KRUSPÉR

ISTVÁN.

FÖLDMÉRTAN.

FÖLDMÉRTAN.

KÉZIKÖNYV

MŰEGYETEMI, ERDÉSZETI ÉS MÁS ROKON INTÉZETEK
ELŐADÁSAIRA
ÉS
MÉRNÖKI HASZNÁLATRA

KÜLÖNÖS TEKINTETTEL

HAZAI VISZONYAINKRA.

IRTA

KRUSPÉR ISTVÁN,

kir. tanácsos, a szerb Takova-rend középkeresztese, a budapesti k. József műegyetemen a geodézia rendes tanára, a m. tud. akademia rendes tagja, a m. természettudom. társulat, a m. mérnök- és épitész-egyesület, a párisi nemzetközi méter-bizottság tagja, az állami központi mértékhitelesitő m. k. bizottság ideiglenes igazgatója.

XVII TÁBLÁVAL.

MÁSODIK BŐVITETT KIADÁS.

BUDAPEST.
KILIÁN FRIGYES M. K. EGYETEMI KÖNYVÁRUS KIADÁSA
1885.

A *-gal jelölt §-ok és számok azon tárgyakat mutatják, melyeket a tanuló első olvasáskor átugorhat a nélkül, hogy az előadás fonalát elveszítné, melyek tehát csak másodrendű fontossággal bírnak.

Nyomatott Kertész Józsefnél Budapest V., Mária Valeria-utca 11.

ELŐSZÓ.

Ezennel átadom munkámat a nyilvánosságnak, azon óhajtással, hogy az oly nagy mértékben gyümölcsöző legyen, mint a mily buzgalommal jártam el annak kidolgozásában. A földmértani irodalom a kulturanyelvek egyikén sem igen termékeny, minek oka kétségkivül abban keresendő, hogy az csak a tisztán szakértő köröket érdekli; ezek pedig számra nézve mindenütt csekély részét teszik a mívelt nagy közönségnek. Nem csoda tehát, ha nyelvünk, melynek multja az exact tudományok mívelésében alig egy pár évtizedre terjed, ezen a téren még kevesebb eredményt képes felmutatni; úgy, hogy ezen könyv a legelső, magyar nyelven nyomtatásban megjelent, rendszeres gyakorlati mértani munkának mondható.

Ennek kidolgozásában Stampfer előadásait, Bauernfeind és Hunaeus sok tekintetben becses műveiket figyelemmel kisértem, de ezek egyikét sem vehettem vezérfonalul, mert a mi körülményeink a külföldi viszonyoktól igen különböznek. Nálunk a commassatio törvényben gyökerező institutiója olyan részeit emelte fontosságra

*

a földmértannak, melyeket a külföldi irók egy pár oldallal elintézettnek gondolnak. Sőt a tisztán felmérési részben is a mi műszereink az övéiktől sokban különböznek. Az egyszerűbb kettős tűkörműszereknek meghonosítása a gyakorlatban hazánkból nyerte első lendületét, s Gáthy eszméje a Lajtán túl sokáig elismerés nélkül maradt. Továbbá a legtöbb művekben a felsőbb geodäsia nem lévén külön választva az alsóbb földmértantól, a háromszögelés előadása igen fellengős, s egyes határok felvételére kevéssé alkalmazható tételeket fejteget; holott épen egyes határok felmérése viszonyaink közt a legnagyobb fontossággal bir.

Önállólag kellett tehát a tárgyat felfognom. Több hibás nézetet kellett megvilágosítnom, melyek közül egyet már Grunert Archivumában is helyreigazítottam, de a hibát a szerző még a későbbi kiadásokban is benne hagyta, a nélkül, hogy engem valaha megczáfolt volna. Különös súlyt fektettem az állandó hibák befolyásának kipuhatolására; minthogy csak azon mérnök üti meg teljesen a mértéket, a ki nem csak jól dolgozik, hanem tudja is, hogy jól dolgozik; ehez pedig szükséges azon körülmények ösmerete, melyek közt a mérésekben előforduló hibák befolyása az eredményre lehetőleg csekély. Az ezen elméletben jártas mérnök nem esik azon hibába, — melyet már Mayer Tóbiás is megrótt Conrector Voigt másodperczmérőjében —, hogy néhol szőrszálhasogatásig szigorú, másutt pedig a dolgot könnyedén veszi; a mint magát Mayer Tóbiás igen találóan kifejezi: néha fillérekkel fukarkodik, máskor meg a tallérokat kidobja. Pedig ilyen esetek a mai nap is előjőnek.

Emlékezem, hogy néhány év előtt valaki az Amsler-féle planimeteren javítást akart tenni, s ez abban állott, hogy a leolvasás utolsó számjegyét, mely rendesen csak megbecsültetik, — noha némely műszereken Nonius által határoztatik meg, — még további 10 vagy több részre akarta beosztani egész szigorúsággal; holott a becslés hibája csak alárendelt fontosságú, mert az egészen a műszer által megejthető hiba határai közé esik, s a legveszedelmesebb hibakútfő egészen másutt, még pedig a kereknek a papiros felületén való gördülésében keresendő.

Több új tételeket, sőt egész szakaszokat fog találni a figyelmes olvasó. A sokszögtan 19. 20. §-ai, az egész hibák elmélete (33—43. §§.), a láttani részben a prismák szintelenségére vonatkozó kifejtések, a 102, 107, 123, 156, 162, 163 és 205. §§. egészen újak; a háromszögelés pedig (225—231. §§.) a mi viszonyainkhoz alkalmazva van előadva. A 223. § VI-ban. Hartnernek egy hibás állítása van helyreigazítva. A térszámitó készülékeket tüzetesen vettem tárgyalás alá, s a beosztási feladatokat bőven előadtam, felhasználván azon javaslatokat is, melyekkel hazai szakértőink a tudományt gazdagították A 318. §-ban Bauernfeind nem egészen helyes kifejtését kijavítottam, miáltal a keletkező számbeli együttható egy kissé más értéket nyert. A barometerrel való magasságmérésben a Laplace-féle kifejtésre visszatértem, mint a mely az elmélet szigorú követelményeinek leginkább megfelel. A lejtmérésben a Németországban alkalmazásban levő műszerek nevezetesebbjeit megismertettem, s az azok szerkezete által követelt kiigazítási módokat tüzetesen előadtam.

Különös figyelmet fordítottam a Stampfer-féle módszerre, mint a mely — tudományos szempontból véve — minden másnak elébe teendő, s annak könnyebb alkalmazására új táblákat számítottam ki, melyek a magy. tud. Akad. 1859-ki értesítőjében megjelentek, s ezen könyvbe is felvétettek. Hogy ezen fáradozásom indokolva volt, bizonyítja azon körülmény, hogy épen most Dr. Herr is a »Stampfer's Anleitung zum Nivelliren« 6-ik kiadásában az állandók jelen értékeinek megfelelő új táblákat tett közzé a régiek helyett. Mennyire van ezek által a dolgon segítve, s mi marad még kivánni való, azt a könyv illető §§-ban bővebben kifejtve lehet olvasni.

A műszerek közt is több helyen saját elrendezéseimmel fog találkozni a figyelmes olvasó. Ezekre vonatkozólag legyen megemlítve a 102. §. 9. száma, melyhez táblák is vannak mellékelve. A 123. §-ban előadott távmérőhöz a táblák szintén munkában vannak. A 265. §-ban javaslott planimeter czélszerűbb a vele egy cathegoriába esőknél. A 350. §-ban előadott javítás a Stampfer-féle lejtmérő műszeren igen könnyen kivihető; a 352. §-ban leírt lejtmérő műszeren pedig, melynek egy példánya a budai kir. József-műegyetem gyüjteményében már évek óta létezik, egészen új rendszert ábrázol.

Az előadás mindenütt az elemi mennyiségtan tételeire van alapítva, különösen azért, hogy a könyv tágasabb körökben is használható s érthető legyen. Csak az egy, barometerrel való magasságmérés teszen kivételt; de itt is csak az Analysis legegyszerűbb képletei jőnek alkalmazásba.

A csaknem 40 ívre és 16 táblára terjedő mű jóval meghaladja azt, mit az előfizetési hirdetésben igértem, s ha annak megjelenése továbbra húzódott, mint reménylettem: legyen szíves azt a nyájas olvasó, artisticai nehézségeinken kivül, a mű nagyobb terjedelmének tulajdonítni.

Budán, 1869. október 18-án

a szerző.

ELŐSZÓ
A MÁSODIK KIADÁSHOZ.

Ezen második kiadásban a tárgy berendezése változást nem szenvedett; de figyelembe kellett venni az 1874. évi VIII. törvényczikket, mely szerint a mérnöki munkálatok ezentúl mind a régi, mind az új mérték szerint tejesíthetők. Szükség volt tehát a mértékek ösmertetését az új, vagyis méter-rendszerre tüzetesebben kiterjeszteni, s ennek a mérő készülékekre való visszahatását figyelemmel kisérni. Kiterjedésre nézve azonban ezen kiadás sokkal többet nyujt az előbbinél, a mennyiben az újabb időben megváltozott műegyetemi tandrend szerint a felsőbb geodéziai előadások beolvasztatván az egyéves geodéziai tanfolyamba, annak tárgyait is fel kellett venni ezen könyv keretébe. Ezt azonban a felső geodéziai problemáknak csak legszükségesebb, hogy úgy mondjam elemi részére szorítottam; tudós kutatásokra — speculatiókra — ki nem terjeszkedtem, mert azok csak monographiákba, nem pedig oskolai vezérkönyvbe valók mindaddig, mig bizonyos megállapodásra nem vezettek. Addig azok csak egyéni nézeteknek tekintendők, melyeket tanulmányozni kell ugyan, de egy éves oskolai tanfolyamban előadni nem lehet, mert túltengésre vezetne, s a tanuló látkörét csak elködösítné; úgy hogy utoljára — ha szabad egy trivialis hasonlattal élnem — a sok fa miatt nem látná az erdőt.

A csillagászat alapfogalmait felvettem ezen könyv keretébe, mert a nélkül a geographiai helymeghatározást megérteni nem lehet. Ugyszintén a napórák szerkesztését is tárgyalom toldalékképen, mert az egész technikai cursusban egy évfolyam sincs, melynek előadási körébe az jobban beleillenék.

A kiadást Kilián Frigyes egyetemi könyvárus úr volt szíves magára vállalni.

Budapest, 1885. májusban.

Kruspér.

TARTALOM.

ELŐSZÓ.
TARTALOM.

BEVEZETÉS.

A) **Sokszögtan.** (Polygonometria).

I. SZAKASZ.

Feladatok és feloldások.

II. SZAKASZ.

Hibák elmélete.

B) Láttan.

ELSŐ RÉSZ.
Vizszintes mérés.

I. OSZTÁLY.
Telekmérés.

I. SZAKASZ.
Egyenes vonal kitűzése és megmérése, 90°, 60°, 45°-ú szögek kitűzése.

II. SZAKASZ.

Görbe vonalak kitűzése.

III. SZAKASZ.

Szögmérés.

B. *Olyan szögmérők, melyek a természetes szögeket fokokban mérik.*

C. *Olyan szögmérők, melyek a szöget rajzolatban adják.*

IV. SZAKASZ.

Egyes idomok felvétele.

V. SZAKASZ.

Egész határok felvétele.

VI. SZAKASZ.

A térkép kidolgozása.

II. OSZTÁLY.

Térmértan.

I. SZAKASZ.

Térmeghatározás.

II. SZAKASZ.

Beosztás.

MÁSODIK RÉSZ.
Függélyes mérés.

I. OSZTÁLY.
Szorosan vett magasságmérés.

II. OSZTÁLY.
Lejtmérés.

III. OSZTÁLY.

Domborrajzok.

HARMADIK RÉSZ.
A felsőbb földmértan elemei.

BEVEZETÉS.

Lap.

A legkisebb négyzetek elmélete.

I. SZAKASZ.

A csillagászat elemei.

II. SZAKASZ.

Földmértani munkálatok.

III. SZAKASZ.

A földabroszok elmélete.

a) *Látszati vetületek.*

b) *Lefejtési vetületek.*

c) *Hasonlósági vetületek.*

Toldalék. A napórákról.

TÁBLÁZATOK.

Nyomtatási hibák.

				e helyett	olvasd
6.	lap	1. sor	felülről	félkörének	délkörének
12.	»	14. »	»	$\alpha' -$	$\alpha' =$
124.	»	11. »	alulról	91. §.	90. §.
128.	»	13. »	felülről	107. §.	106. §.
130.	»	7. »	»	100. §.	99. §.
131.	»	10. »	»	107. §.	106. §.
344.	»	1. »	»	IV.	V.
465.	»	7. »	alulról	hagy	hogy
567.	»	8. »	»	Meehain	Méchain
575.	»	4. »	»	volta	volt
575.	»	2. »	»	részlet	nézlet

BEVEZETÉS.

1. §.

A földmértan a föld felülete kisebb vagy nagyobb részének felmérésével lerajzolásával térfogatának meghatározásával és szétosztásával annak felszine emelkedési viszonyainak valamint egyes tárgyak magasságának meghatározásával foglalkozik.

* Nevét nyelvünkön a tan legfontosabb részétől kölcsönözte, és helyesebb, mint a görög Geodézia (földbeosztás), mely minden más nyelvben azért fogadtatott el, mert már a helyesebb geometria (földmértan) szó egy más fogalom kifejezésére volt lefoglalva, melyet mi szintén a dolog természetével megegyezőbben az általánosabb mértan szóval nevezünk.

2. §.

1) A földmértan felsőbb és alsóbbra oszlik. Az elsőnek czélja vagy az egész föld nagyságának, vagy csak egyes országok fekvésének s kiterjedésének meghatározása; s ez okból az fokmérésnek[1]) és országmérésnek is neveztetik. Ezen tudomány a gömb- és gömbded-háromszögtan elveire fektetve a csillagászat tanai segitségével az alkalmazott mennyiségtan legfinomabb és legnehezebb vizsgálódásaival foglalkozik.

2) Az utóbbi csak kisebb terjedelmü mérésekre szoritkozik, melyekben a földgömb görbülete még észre nem vehető, tehát a föld felületét az érintő sikkal hiba nélkül fel lehet cserélni. A

[1]) A fokmérés név eredetét onnan veszi, hogy a föld alakja- és nagyságának meghatározása lényegesen egy pár ív hosszának, s az azokhoz tartozó középponti szögeknek megmérésére vezethető vissza.

méretek bizonyos állandó viszonyban kicsinyítve vagy rövidítve egy rajztáblán összeállittatván, a természeti idomoknak hasonképét szolgáltatják, a honnan ezen rajz térképnek neveztetik.

3. §. Mérés és mérték.

1) A mérés annak meghatározása, hogy hányszor foglaltatik az egység a mérendő mennyiségben. Ezen egység mértéknek neveztetik, s szükségesképen mindig egynemű a mérendő mennyiséggel.

2) A mértéknek, hogy az minden kivánatnak megfelelhessen, meghatározott- változatlan- és könnyen hozzáférhetőnek kell lenni; de ezen tulajdonságokat nagy tökélylyel alig lehet együtt találni, minthogy a természetben változatlan testek nem léteznek.

3) A mérés vagy közvetlen vagy közvetett. Az első alatt a mértéknek a mérendő mennyiséghez mindanyiszori illesztését értjük, a mennyiszer azt teljesítni lehet. Az utolsó esetben a mérendő mennyiségnek olyan részei méretnek meg, p. o. hossz, szélesség, magasság, hajlásszög stb., melyekből a mértan ösmeretes törvényei szerint a mérendő mennyiséget fel lehet találni.

4. §. A mérés tárgyai.

A mérés tárgya a földmértanban a tér, úgymint: szög, hossz, terület, köbtartalom. Ezek közül csak a két elsőt szokták közvetlen mérni, a többiek közvetett mérés alá esnek. De néha azoknál is czélszerű a közvetett mérés alkalmazása, ha t. i. a közvetlen mérés vagy igen fáradtságos, vagy éppen lehetetlen lenne, mint p. o. egy folyó szélességének, egy hegy magasságának stb. meghatározásánál.

A felsőbb földmértanban a téren kivül még az idő mérése is előfordul, valamint a vízi mérések némely feladataiban is.

5. §. Hosszmérték.

1) Hosszmértékül eleinte az emberi test némely tagjai szolgáltak, a mint az a mértékek neveiből (láb, araszt, hüvelyk) eléggé kitünik. Később a polgárisodás terjedésével a mértékek a kormányok által szabályoztatván, mindenütt a gyakorlatban leg-

többször előforduló nagyságban vergődtek törvényes érvényre. Ugy lett a láb csaknem minden más mértékek alapja, bár annak hossza tartomány- sőt városonként különböző volt, s ezen különbség a tudósok minden egyesitési törekvése daczára részben mai napig is fennáll. A lábat (′) 12 hüvelykre (″), a hüvelyket 12 vonalra (‴), a vonalat 12 pontra (⁗) osztották. Ezen mérték-rendszer tizenkettős mértéknek (tkm.) neveztetik, s a mindennapi életben forgalomban mesterségekben használtatik; a honnan műmérték (Werkmaass) nevet is visel.

2) A láb mint egység némely — kivált mezei — méréseknél igen kicsinek mutatkozván, egy más nagyobb egységet vettek fel, öl = (6′) vagy rúd (= 12′) név alatt, ámbár ezen beosztástól eltérő 7 lábas öl, valamint 14, 16, 20, 22 lábas rudak is fordulnak elő. Ezen uj egységet mérnöki munkálatokra azután 10 egyenlő részre — tizedes láb, — egy ilyen lábat 10 egyenlő részre — tizedes hüvelyk, — s egy hüvelyket ismét 10 egyenlő részre — tizedes vonal — osztották; mely mértékek tehát illetőleg 0·1, 0·01, 0·001 öl vagy ruddal azonosak. Ezen mérték-rendszer tizes mértéknek (tm.), és mezei mértéknek (Feldmaas) is neveztetik.

3) A műmértéknek mezeivé, és megforditva áttétele a számtannak azon feladatai közé tartozik, melyek felbontás és öszvehúzás (Resolviren, Reduciren) által oldatnak fel; s egy két példából könnyen megérthető.

1. Példa. Mennyit teszen $20^0\ 4'\ 10''\ 9'''$ műmérték mezei mértékben?

$$9''' : 12 = 0''{\cdot}75$$
$$10''{\cdot}75 : 12 = 0'{\cdot}896$$
$$4'{\cdot}896 : 6 = 0^0{\cdot}8160$$

tehát $20^0\ 4'\ 10''\ 9'''$ tkm. $= 20{\cdot}^0 8160 = 20^0\ 8'\ 1''\ 6'''\ 0''''$ tm.

2. Példa. Mennyit teszen $314^0\ 9'\ 7''\ 8'''$ mezei mérték, műmértékben?

Az egész ölek mind a két rendszerben azonosak lévén, számolás alá nem jönnek; tehát csak

$$0^0\ 9'\ 7''\ 8'' = 0^0{\cdot}978\text{-at kell átváltoztatni.}$$
$$0^0{\cdot}978 \times 6 = 5'{\cdot}868$$
$$0'{\cdot}868 \times 12 = 10''{\cdot}416$$
$$0''{\cdot}416 \times 12 = 4'''{\cdot}992 \text{ közel } = 5'''$$

tehát: $314^0\ 9'\ 7''\ 8'''$ tm. $= 314^0\ 5'\ 10''\ 5'''\ 0''''$ tkm.

6. §. Európai főbb hosszmértékek.

1) Hazánkban, valamint az Austriai örökös tartományokban is 1874-ik évig a bécsi öl volt a törvényes hosszegység, melynek eredetije a bécsi műegyetem mathematikai gyüjteményében van letéve. Ez egy vas rúdból áll, melynek felszinén ezüst lemezben a mérték vég- és osztálypontjai finom lyukakkal vagynak jelelve, és 13° R. hőmérséknél adja a valódi bécsi ölet. Ezen mérték oly készülékkel van összeköttetésben, mely akármely más mértéknek vele való öszvehasonlitását igen nagy pontossággal lehetővé teszi; ezért Hasonlitó (Comparator) nevet is visel. A jelesebb, mérnöki eszközök készitésével foglalkozó gépészek ilyen ölmértékeket rendesen mahagoni vagy körtefából szokták késziteni, mely, ha jól ki van száradva és olajban kifőzve, csak igen csekély kiterjedési változásokat szenved, s közönséges mérnöki munkálatoknál a hosszmérő eszközök öszvehasonlitására tökéletesen kielégitő.

2) Az ölet mind a tizenkettős, mind a tizes rendszer szerint szokták beosztani, a mint következő schemából kitetszik.

12-ős rendszer, vagy műmérték.

öl (°)	láb (′)	hüvelyk (″)	vonal (‴)	pont (IV)
1	6	72	864	10368
	1	12	144	1728
		1	12	144
			1	12

10-es rendszer, vagy mezei mérték.

°	′	″	‴	IV
1	10	100	1000	10000
	1	10	100	1000
		1	10	100
			1	10

Ezen schemák első soraiból kitűnik egyszersmind a két rendszernek egynevű osztályrészei közti viszony is; t. i.

$$1^{tk'} : 1^{t'} = \frac{1}{6} : \frac{1}{10} = 10 : 6 = 5 : 3$$

$$1^{tk''} : 1^{t''} = \frac{1}{72} : \frac{1}{100} = 100 : 72 = 25 : 18$$

$$1^{tk'''} : 1^{t'''} = \frac{1}{864} : \frac{1}{1000} = 1000 : 864 = 125 : 108$$

$$1^{tk^{IV}} : 1^{t^{IV}} = \frac{1}{10368} : \frac{1}{10000} = 10000 : 10368 = 625 : 648$$

3) Poroszországban s több éjszaki német tartományokban, a porosz vagy rajnai láb volt a törvényes hosszegység, 12 láb tett egy rudat, mely mind a tizenkettős, mind a tizes rendszer szerint osztatott be. Az osztályzat schemája következő:

a műmértéknél:

rúd (o)	láb (′)	hüvelyk (″)	vonal (‴)	pont (IV)
1	12	144	1728	20736
	1	12	144	1728
		1	12	144
			1	12

a mezei mértéknél:

0	′	″	‴	IV
1	10	100	1000	10000
	1	10	100	1000
		1	10	100
			1	10

4) Francziaországban a forradalom előtt a törvényes hosszegység az öl volt Toise[1]) név alatt, mely 6 lábra, ez 12 hüvelykre, ez ismét 12 vonalra osztatott; a vonalnak apróbb részeit tizedes törtekben fejezték ki. Ezen mértékrendszer párizsi név alatt a tudományokban néha még mai napig is használtatik; de a mult század vége felé egészen uj mérték hoza-

[1]) A Toise eredetije egy vas rúd, mely a perui fokmérésnél használtatott mérték gyanánt, és 13⁰ R. hőmérséknél adja a párizsi mérték valódi hosszát. A párizsi csillagda gyüjteményében őriztetik.

tott be. Ugyanis a föld félkörének hossza meghatároztatván, annak negyedének 10 milliomod része vétetett fel egységül *méter* név alatt. 1 méter = 0·513074 Toise = 443·296 párizsi vonal [1]). A méter alsóbb és felsőbb rendű osztályzata a tizes rendszer szerint rendeztetett, a mint a következő schemából kitetszik.

Alsóbb rendű osztályrészek:

Méter	Deciméter	Centiméter	Milliméter
1	10	100	1000
	1	10	100
		1	10

Felsőbb rendű osztályrészek:

Miriaméter	Kilométer	Hectométer	Decaméter	Méter
1	10	100	1000	10000
	1	10	100	1000
		1	10	100
			1	10

Ezen mértékrendszer ujabb időben Európa legtöbb államaiban elfogadtatott. Hazánkban az 1874. évi VIII. törv. czikk által hozatott be a közforgalomba; a mérnöki munkálatoknál azonban ezen rendszer mellett a régi is érvényben hagyatott.

5) Angolországban a törvényes hosszmérték *Yard* nevet visel, mely 3 *lábra*, ez 12 *hüvelykre*, ez 12 *vonalra*, s ez ismét 12 *pontra* osztatik. 22 Yard teszen egy *lánczot*, mely a mezei méréseknél egységül használtatik, és 100 *tagra* osztatik.

6) Az ezen munka végén található I. tábla foglalja magában a különböző tartományokban és vidékeken használatban lévő vagy használatban volt hosszmértékek öszvehasonlitását, melynek segitségével, egy országbeli mértékkel mért hosszat más országbelire át lehet változtatni, mint ezt nehány példából könynyen meg lehet érteni.

[1]) A méter eredetije egy platina rúd által ábrázoltatik, mely 0^0 hőmérsékhél szolgáltatja a valódi méter hosszát. A párizsi levéltárban van letéve.

1) Mennyit teszen M párizsi láb bécsi mértékben?

Legyen a keresett szám x; akkor lesz

$$x \text{ bécsi láb} = M \text{ párizsi láb, tehát}$$

$$x = M \frac{\text{párizsi láb}}{\text{bécsi láb}},$$

vagy a párizsi és bécsi láb értékeit a táblából helyettesitvén,

$$x = \frac{12{\cdot}331}{12} M = 1{\cdot}0276 \; M.$$

2) M bécsi öl, hány Yard?

$$x \text{ Yard} = M \text{ bécsi öl,} \qquad \text{innen}$$

$$x = M \frac{\text{bécsi öl}}{\text{Yard}} = M \frac{6 \text{ bécsi láb}}{3 \text{ angol láb}} = 2 \frac{12}{11{\cdot}572} M = 2{\cdot}0740 \, M.$$

7) Tetemesebb vagy országos távok kifejezésére a mértföld, az uj mértékben a kilométer használtatik. A II. tábla a különböző tartományokbeli mértföldek öszvehasonlitását foglalja magában.

7. §. Térmértékek.

1) Téregységül rendesen a hosszmértékek □-ei használtatnak, p. o. □ öl, □ rúd, □ meter stb. s az alsóbb rendű egységek vagy a párlag-rendszer (Riemenmaas) vagy a négyzet-rendszer szerint alakittattak.

Az elsőben az alapegység a 12-ős osztályzattal éppen azon schema szerint osztatik fel, mely a hosszmértékeknél előadatott, s a keletkezett alsóbb rendű egységek az illető hosszmértékek neveivel neveztettek el. E szerint a párlag láb, hüvelyk, vonal olyan párlagokat jelentenek, melyeknek hossza 1°, szélessége pedig illetőleg $1'$, $1''$, $1'''$.

Az utóbbiban a hosszmérték alsóbb rendű egységeinek □-ei képezik a térmérték osztályzatát, mint ez a következő schemából kitetszik.

A mű mértékben:

□ öl	□ láb	□ hüvelyk	□ vonal
1	36	5184	746496
	1	144	20736
		1	144

A mezei mértékben:

□ °	□ ′	□ ″	□ ‴
1	100	10000	1000000
	1	100	10000
		1	100

2) A különböző tartományok térmértékei közötti viszonyt a hosszmértékek viszonyainak □-ei fejezik ki, minthogy hasonló térek területei a megfelelő oldalak □-eivel egyenes viszonyban állanak. E szerint az I. tábla számjainak □-ei a térek öszvehasonlitására is használtathatnak.

Példa. Hány □ bécsi öl M □ Méter?

x □ bécsi öl $= M$ □ méter, tehát

$$x = M \frac{\square \text{ méter}}{\square \text{ bécsi öl}},$$

úgyde az I. tábla szerint

1 méter $= 37''{\cdot}961$

6 bécsi láb $= 72''$

$$\text{tehát } x = M \left(\frac{37{\cdot}961}{72}\right)^2 = 0{\cdot}27798\, M.$$

3) A mérnöki gyakorlatban a tér nagyságának kifejezésére egy felsőbb rendű egység használtatik, mely tartományonként mind nagyságára, mind nevére nézve különbözik. Hazánkban a szántóföldek legelők erdők h o l d a k b a n (néhol l á n c z o k b a n), a szőlők k a p á s- a rétek k a s z á s o k b a n fejeztetnek ki, de ezeknek nagysága helyenkint változik. Legközönségesebben 1 hold = 1200 □ öl.

A métermérték szerinti magasabb fokú téregység a hektáre = 100 áre = 10000 □ méter.

4) Az Austriai örökös tartományokban a hold 1600 □ öllel számittatik. Ez van az országos felmérésnél — Kataster — is elfogadva; honnan ezen hold hazánkban gyakran k a t a s t r a l i s h o l d n a k is neveztetik. Németországban ezen egység A c k e r, M o r g e n, T a g w e r k, J u c h a r t stb. Francziaországban A r e, Angliában A c r e nevet visel. Ezen különböző egységeknek egymáshoz való viszonyát az alapegységbőli öszvetételből kell meg-

itélni, mely minden tartományban különböző. Egy példa a számitást érthetővé fogja tenni.

Hány Áre M angol Acre?

$$x \text{ Áre} = M \text{ Acre}, \qquad \text{tehát}$$

$$x = M \frac{\text{Acre}}{\text{Áre}}, \qquad \text{úgyde}$$

1 Acre = 10 □ lánczc = 10·22² □ Yard = 4840 □ Yard.
1 Are = 100 □ méter. Tehát

$$x = M \frac{4840 \,\square\, \text{Yard}}{100 \,\square\, \text{méter}} = M.\, 48.4 \frac{\square\, \text{Yard}}{\square\, \text{méter}} = M.\, 48{\cdot}4 \left(\frac{34{\cdot}711}{37{\cdot}961}\right)^2 = 40{\cdot}47\, M.$$

5) A III. tábla magában foglalja a különböző tartományokban használatban lévő térmértékek öszvetételét és egybehasonlitását; ennek használata által az előbbi feladat egyszerűbben igy oldatik fel:

$$x \text{ Áre} = M \text{ Acre, tehát } x = M \frac{\text{Acre}}{\text{Áre}},$$

úgyde 1 Acre = 1125 bécsi □°
1 Áre = 27·799 bécsi □°

tehát $x = M \dfrac{1125}{27{\cdot}799} = 40{\cdot}47\, M.$

6) Igen nagy, vagy országos területek □ mértföldekben fejeztetnek ki, s a külön tartományokbeli □ mértföldek áttételére a II. tábla számjainak □-ei használtathatnak.

8. §. Űrmértékek.

1) Testek felmérésére közönséges a életben igen különböző mértékek használtatnak. Mérnöki munkálatoknál, melyekre mi egyedül szoritkozunk, az üregység a hosszmérték köbe, vagyis egy olyan koczka, melynek oldalhossza a hosszmértékkel egyenlő. Alsóbb rendű egységek, vagy a hasáb-rendszer (Schichten-Maas) szerint 12-ős osztályzattal, vagy a koczka-rendszer szerint képeztetnek.

A hasáb-rendszer beosztási schemája a hosszmértékével egészen azonos, s a mértékek nevei is változás nélkül maradnak. E szerint a hasáb-láb, hüvelyk, vonal nem egyéb olyan parallelepipednél, melynek széle és hossza 1°, magassága pedig illetőleg 1′, 1″, vagy 1‴.

A koczka-rendszer schemája a következő:

A műmértékben:

⊠ öl	⊠ láb	⊠ hüvelyk	
1	216	373248	
	1	1728	stb.

A mezei mértékben:

⊠°	⊠′	⊠″	
1	1000	1000000	
	1	1000	stb.

különböző tartományok köbmértékei öszvehasonlitására az I. tábla számjai köbre emelve használtathatnak, minthogy hasonló testek köbtartalmai a megfelelő oldalhosszak köbviszonyaiban állanak egymáshoz.

A mérnöki gyakorlatban a méter-mérték szerinti köbegység a köbméter, mely a tizedes rendszer szerint osztatik be.

9. §. Szögmértékek.

1) A szögek alapegysége a derékszög, mely a legrégibb időktől óta mai napig 90 fokra, (°) egy fok 60 perczre (′), egy percz 60 másodperczre (″) osztatik; eszerint:

derékszög	fok	percz	másodpercz
1	90	5400	324000
	1	60	3600
		1	60

és ezen rendszer hatvanas rendszernek neveztetik. Francziaországban a tizes rendszernek a mértékekbe behozatala alkalmával megkisérlették ezt a szögek beosztására is kiterjeszteni. Eszerint a derékszög 100 egyenlő részre (degrés), egy degré száz perczre, egy percz száz másodperczre osztatott ezen schema szerint:

derékszög	degrés	százas percz	százas másodpercz
1	100	10000	1000000
	1	100	10000
		1	100

Ezen két schema első sorainak öszvehasonlításából kitűnik, hogy:

$$1^{\text{fok}} : 1^{\text{degr.}} = \frac{1}{90} : \frac{1}{100} = 10 : 9$$

$$1^{\text{ht}'} : 1^{\text{sz}'} = \frac{1}{5400} : \frac{1}{10000} = 100 : 54$$

$$1^{\text{ht}''} : 1^{\text{sz}''} = \frac{1}{324000} : \frac{1}{1000000} = 1000 : 324$$

2) A mértanból ismeretes, hogy a szögek a csúcsból, mint középpontból a szárak közt húzott körívekkel egyenes viszonyban állanak; ugy hogy ezen íveket a szögek mértékeiül lehet használni, ha a körnegyed, mint egység, ugyanazon schèmák szerint osztatik be, melyek a szögekre nézve előadattak.

De ezen egység által a körív hossza nincs tökéletesen meghatározva, minthogy az egység maga, — a körnegyed — még a sugár hosszától függ. Valahányszor tehát a körív valóságos hosszáról vagy annak más vonalak hosszáhozi viszonyáról van szó, egyszerűbb a körsugárt venni fel egységül, s a körívet ezzel, s ennek a tizedes rendszer szerint beosztott vagy tört részeivel hasonlítni öszve. Ezen mérték s u g á r - m é r t é k n e k neveztetik.

3) Tudjuk, hogy a félkör hossza a sugárhoz ugy van, mint $\pi : 1$; tehát 180^0 sugármértékben π-vel jelöltetik.

Legyen egy más ív fokokban α^0 . . . sugármértékben α; akkor a fentebbi szerint

$$\alpha : \pi = \alpha^0 : 180^0, \text{ innen következik}$$

$$\alpha = \alpha^0 . \frac{\pi}{180^0}, \text{ és } \alpha^0 = \alpha \frac{180^0}{\pi}$$

Ezen egyenletek a fokoknak sugármértékre, és megforditva áttételét foglalják magokban.

Ha a szög perczekben van kifejezve, akkor 180^0-ot is perczekre kell változtatni, és lesz

$$\alpha = \alpha' \frac{\pi}{10800'}, \text{ és } \alpha' = \alpha \frac{10800'}{\pi}.$$

Ha a szög másodperczekben van kifejezve, akkor 180^0 is másodperczekre változtatva, lesz

$$\alpha = \alpha'' \frac{\pi}{648000''}, \text{ és } \alpha'' = \alpha \frac{648000''}{\pi}.$$

Ezen képleteket másképen is lehet kifejezni; jelöljünk t. i. egy fok, percz és másodpercznyi íveket sugármértékben arc 1^0, arc $1'$, arc. $1''$ jelekkel; akkor

$$\frac{\pi}{180^0} = \text{arc } 1^0, \quad \frac{\pi}{10800'} = \text{arc } 1', \quad \frac{\pi}{648000''} = \text{arc } 1''$$

Ezen kifejezéseket az előbbi képletekben helyesittetvén, lesz

$$\alpha = \alpha^0. \text{ arc } 1^0, \text{ és } \alpha^0 = \frac{\alpha}{\text{arc } 1^0}$$

$$\alpha = \alpha'. \text{ arc } 1', \text{ és } \alpha' - \frac{\alpha}{\text{arc } 1'}$$

$$\alpha = \alpha''. \text{ arc } 1'', \text{ és } \alpha'' = \frac{\alpha}{\text{arc } 1''}$$

mely utóbbi képletekben arc $1''$ helyett sin $1''$-t lehet tenni, minthogy a kettő közti különbség még a 7-ik tizedes sorban nem érezhető.

10. §. Rövidített mérték.

1) A 2. §-ban megemlittetett, hogy a mezőn megmért vonalak és szögekből egy rajz — térkép — szerkeztetik. Ezen térkép a gyakorlati czélokhoz képest kicsinyített — rövidített — mértékben készittetik, ugy hogy a mezőn mért vonalak a rajzban megfelelő vonalakhoz bizonyos meghatározott állandó viszonyban állanak; mely viszony rövidítési viszonynak — rövidítésnek — neveztetik.

2) A rövidítést kétféleképen szoktuk kifejezni, t. i. vagy kitesszük ölekben azon mezei vonal hosszát, melyet a térképen $1^{tk''}$ képvisel, p. o. $1'' = 40^0$, a mi annyit jelent, hogy a térképen $1^{tk''}$ hossz a mezőn 40^0-et képvisel; vagy a két megfelelő

hossz viszonya fejeztetik ki, s viszony alakjában iratik, melyben azután a nevezetet el is lehet hagyni. Ezen másik mód szerint a fentebbi rövidítési viszonyt igy is lehet irni. 1 : 2880, minthogy 40 × 72" = 2880". Az elsőbb irásmód különösen a régi mértéknél alkalmas, mert kerek számokat ád. Az utóbbi a métermértéknél alkalmasabb.

3) A térképi rajznak alaphosszegysége tehát a régi mértékben a tk. hüvelyk, mely annyi egyenlő részekre osztatik, a hány mezei ölet az képvisel, és az osztályrészek a képviselt mértékek neveivel neveztetnek.

4) Néha a tk. hüvelyk, mint alapegység a tizedes rendszer szerint osztatik be; ilyenkor tehát a térképen mért hosszak valóságos hüvelykekben fejeztetnek ki, melyeknek a mezőn megfelelő hosszakat ölekben úgy nyerhetjük meg, ha a hüvelykek számát azon számmal szorozzuk, a hány ölet 1" tk. hüvelyk képvisel.

11. §. Földünk.

1) Földünk mathematikai felülete a legujabb vizsgálatok szerint, nem vévén tekintetbe a physikai egyenetlenségeket — hegyeket és völgyeket — valószinűleg rendetlen; mindazáltal az egy kerüléknek — ellipsis — kis tengelye körül forgása által származott felülettől igen keveset különbözik. Bessel számitása szerint ezen kerüléknek

nagyobb féltengelye $a = 3272077$ Toise
kisebb » $b = 3261139$ »

innen következik, hogy két féltengely közti különbségnek a nagy féltengelyhezi viszonya $\frac{a-b}{a}$, az ugynevezett behorpadás (Abplattung) közel $= \frac{1}{300}$.

2) Ezen gömbded (späroid) az alsóbb földmérés minden számitásaiban érezhető hiba nélkül gömbnek tekinthető, melynek sugárául a két féltengely közti számtani közép vétetik. E szerint a föld sugára $R = \frac{a+b}{2} = 3266608$ Toise $= 3356805$ bécsi öl $= 6366737 \cdot 6$ méter.

Ezen felfogás szerint a föld felszinének valamely pontján függélyesen gondolt egyenes vonal a föld sugárával öszveesik.

A függélyes vonalra derékszög alatt gondolt sík és egyenes vonal, mely a függély lábpontjából a föld mathematikai felületén képzelt érintővel párhuzamos, látszólag vízszintesnek, az ugyanazon ponton keresztül menő gömbfelület pedig, melyben a nyugvó víz tömecsei egyensúlyban állanának, valódi vízszintesnek neveztetik.

12. §. A valódi és látszólag vízszintes különbsége.

1) Láttuk, hogy a földgömb sugára olyan nagy, hogy az 3 millió 3 százezer ölet meghalad, tehát a föld felületének görbülete, mely a sugárral megforditott viszonyban van, olyan csekély, hogy azt jókora kiterjedésben érezhető hiba nélkül tekintetbe sem szükség venni; hanem a valódi vízszintest a látszólagossal fel lehet cserélni. Hogy ezen állitás helyességéről meggyőződjünk, legyen az 1. ábrában C a föld középpontja, AD vízszintes, AB érintő az A pontban, tehát látszólag vízszintes, CDB egy sugár, mely a D pontban függélyes és az érintőt a B pontban metszi. E szerint D és B a valódi és látszólag vízszintes vonalak egymásnak megfelelő pontjai.

2) Midőn vízszintes mérésről van szó, akkor AD és AB egymással felcseréltetnek; kérdés tehát, mi a kettő közti különbség, vagyis ezen felcserélésből eredhető hiba? Legyen az AD ívnek megfelelő középponti szög α, a gömb sugára R; akkor

$$AB = R\, tg\alpha$$
$$AD = R\alpha; \qquad \text{tehát}$$
$$AB - AD = R\,(tg\alpha - \alpha).$$

Minthogy α csak kis szöget jelent, fejtsük ki a $tang\alpha$ sorba, mely annál jobban öszvetart, mennél kisebb az α értéke. Jelen esetben a sor két első tagjával meg lehet elégednünk; lesz tehát

$$tg\alpha = \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3, \text{ és ezt helyettesitvén}$$

$$AB - AD = \frac{1}{3} R\alpha^3 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\ \odot$$

Nevezzük az AD ívet d-nek, mely a D pontnak az A-tóli távját ábrázolja; akkor

$$\alpha = \frac{d}{R}, \text{ s ezt helyettesitvén}$$

$$AB - AD = \frac{1}{3} \cdot \frac{d^3}{R^2} \ldots \odot'$$

Legyen például d = 5 mértföld = 20000 öl, akkor

$AB - AD = 0^0{\cdot}23$, mely az egésznek körülbelől $\frac{1}{100000}$ részét teszi, oly csekély hiba, melyet csak a legnagyobb pontossággal, s a legtökéletesebb eszközökkel véghezvitt fokméréseknél lehet elkerülni; ellenben telekméréseknél, melyeknél $\frac{1}{1000}$ még tűrhető hibának vétetik, semmi jelentőséggel nem bir.

3) Midőn függélyes iránybani vagy magassági mérésekről van szó, akkor a valódi és látszatos vízszintes közti különbséget a BD vonal ábrázolja, minthogy a függély valamely fentebb eső pontjának a valódi és látszatos vízszintes feletti magassága egymástól ezen vonallal különbözik. Ámde

$$BD = BC - CD$$

$$BC = \frac{R}{cos\alpha}$$

$CD = R$; tehát

$$BD = R\left(\frac{1}{cos\alpha} - 1\right) = R\left(\frac{1 - cos\alpha}{cos\alpha}\right) = \frac{2\,R\,sin\frac{\alpha^2}{2}}{cos\alpha}$$

Minthogy α kis szöget jelent, szabad ezen kifejezésben is a sinus helyett az ívet és a cosinus helyett 1-et tenni; honnan származik

$$BD = \frac{1}{2}\,R\alpha^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{R} \ldots\ldots\ldots \rangle$$

Legyen például d = 100^0, akkor $BD = 0^0.0015$ lesz, oly mennyiség, mely a legszigorúbb magassági méréseknél már figyelembe vétetik. Általában az $\odot$ és ☽ képletek öszvehasonlításából kitünik, hogy az elsőbb az α szög 3-dik, az utóbbi pedig annak 2-dik hatványától függvén, hasonló körülmények közt az utóbbi sokkal nagyobb értékeket nyerend, mint az első. Egyszersmind a felhozott példákból látjuk, hogy a szigorú magassági méréseknél a föld görbületét csak 100^0-et meg nem haladó távra szabad elhanyagolni, mig az közönséges vízszintes méréseknél 5—10 mértföldnyi távra sem érdemel figyelmet.

13. §. Földmértan részei.

A földmérés tárgyai vagy egymás mellett, vagy egymás felett feküsznek. E szerint a földmértan két főrészre oszlik, t. i. vízszintes és függélyes mérésre.

Az első magában foglalja

I) a telkek alakjának és kiterjedésének meghatározására szükséges adatok felmérését, s ezeknek térképpé öszveállitását; felvétel, telekmérés.

II) A telkek térnagyságának meghatározását és bizonyos feltételek szerinti beosztását.

A másodikban meg szokták különböztetni

I) a szorosabb értelemben vett magassági mérést, mely egyes tárgyak magasságának megmérésével foglalkozik, a

II) lejtméréstől, mely a föld physikai felszine emelkedési viszonyainak meghatározásában áll. De ezen megkülönböztetésnek, bár mennyire volt is az a tudomány csecsemő korában indokolva, ma már semmi okszerű alapja nincs és legfeljebb csak gyakorlati szempontból érdemel figyelmet.

Egy harmadik részben tárgyalni fogjuk az országmérés elemeit kapcsolatban a hibák kiegyenlitésének elméletével és az idevágó csillagászati fogalmak és műveletek ösmertetésével.

14. §. Előtanok.

1) Az alsóbb földmértan a mértannak legközelebbi alkalmazása lévén, az elemi összes mennyiségtannak ösmeretét megkivánja. Ezen kivül szükséges ezen tárgynak sikeres tanulásához a különbségi logari és háromszögtani sorok ösmerete is. Továbbá megkivántatik

2) A természettan elemeinek, különösen pedig a mathematikai földleirás, delejesség és láttannak bővebb esmérete.

3) Az emlitett tudományok nem adatván elő a középtanodákban oly kiterjedésben, mint azt a földmértan előadásai megkivánják, szükség lesz két előkészitő tárgyat előre bocsátani, u. m.

A) A sokszögtant, mely a sokszög ösmeretlen részeit az ösmeretesekből kikeresni tanítja; tehát a háromszögtannak folytatását képezi;

B) A láttannak azon részét, mely a tükrök, prismák, nagyitó üvegek, táv- és górcsövek elméletét illetőleg öszvetételét tárgyalja.

A) Sokszögtan (Polygonometria.)

I. SZAKASZ.

Feladatok és feloldások.

15. §.

A sokszögtan azon része a mértannak, mely a sokszög alkatrészei közt létező összefüggést feltalálni, s az ösmeretlen részeket az ösmeretesek által meghatározni tanítja.

16. §. Sokszög.

Sokszög név alatt értünk egy önmagába visszatérő törött vonalat, melyet mi mindig egy síkban fekve gondolunk.

17. §. Oldalak és szögek.

1) Minden n szögnek n oldala és n szöge van. Ez vagy belső, vagy külső lehet, a szerint, a mint ez az alak bel- vagy külterében fekszik. Ha a sokszög oldalai egymást több ízben metszik, nem könnyű elhatározni, valjon egy bizonyos szög belső-e vagy külső. Legyen például a 2-ik ábrában α belszög, kérdés, β kül-e vagy belszög? Ilyen esetben zsinórmértékül következő szolgál. Húzzunk a törött vonal hosszában egy pontozott vonalat anélkül, hogy ez valaha a tört vonalat metszené, míg a kiindulási pontba visszatér. Ekkor a tört vonalnak pontozott oldalán fekvő szögek mind egy jelleműek. E szerint ha α bel-, ugy β külszög.

2) A mezőn következőképen lehet a belt a külszögtől megkülönböztetni. Gondoljuk magunkat a sokszög kezdőpontján a belszöggel szemközt állva, ugy hogy a balkéz a második, a jobbkéz pedig az utolsó vagy n-edik pont felé mutasson, tehát balkéz felé a növekedő, jobbkéz felé pedig a fogyó szögmutató számok feküdjenek, amennyiben az utolsót, vagy n-ediket a kezdő, vagy $n+1$-dik ponthoz képest kisebb számmal kell számozva vennünk. Ha most a sokszög körületén akármelyik szögponton

megállunk, ugy hogy jobbkéz felé a kisebbik, balkéz felé pedig a nagyobbik sorszámmal jelelt szögpont essék: akkor szemközt a beltér, hátul pedig a kültér fekszik.

18. §. Átlók és átlószögek.

A sokszögnek a körületben fekvő alkatrészein kivül más darabjai is vannak, melyek azt épen oly biztosan meghatározzák, mint a körületi részek. Ezek közt legfontosabbak az *átlók*, a *közbe zárt szögekkel* együtt, melyeket *sark-összrendezőknek* is tekinthetünk, és a szögpontok *derék összrendezői*. Mindezek egymással legszorosabb összefüggésben vannak, és egyik a másik által kifejezhető.

19. §.

Tétel. Egy n szög alakja és nagysága meghatározására (kevés kivétellel) $2n—3$ meghatározó részek szükségesek.

Bebizonyitás. a) *Ha a sokszög derék-összrendezők által állapíttatik meg*, vegyük kezdőpontul a sokszög valamely szögpontját, és húzzuk az x tengelyt a szomszéd szögponton keresztül; akkor ezen pontnak csak metszékét kell meghatározni, rendezője o lévén. A még hátralévő $n—2$ pontnak megállapitására $n—2$ metszék és ugyanannyi rendező, tehát öszvesen $2n—3$ darab szükséges.

b) *Ha a sokszög átlók és a közbezárt szögek által határoztatik meg*, válasszunk ismét egy szögpontot sarkpontul, és egy szomszéd oldalt tengelyül, ekkor $n—1$ pontnak meghatározására $n—1$ átló és $n—2$ közbezárt szög szükségesek, melyek ismét $2n—3$ darabot adnak.

c) *Ha a sokszöget körületi darabok által* akarjuk megállapítni, akkor könnyű átlátni, hogy n pont közt $n—1$ öszvekötő-vonal, és $n—1$ vonal közt $n—2$ közbezárt szög kivántatik meg, melyek ismét $2n—3$ darabot tesznek.

20. §. Szögek összege.

Tétel. Minden n szög bel- vagy külszögeinek összege

$\ddot{O} = (n—2v)\, 180^0$, hol v egész szám, és mindig $\begin{matrix} > -\frac{n}{2} \\ < +\frac{n}{2} \end{matrix}$.

Bebizonyitás. Tudjuk, hogy minden vonalat egy pontnak bizonyos törvény szerinti mozgása által lehet származtatni. Jelen esetben gondoljunk egy egyenes vonalat egy állandó pont körül majd jobbra, majd balra forogni, s rajta egy a vonal hosszában mozogható pontot; könnyű átlátni, miszerint ezen két mozgás ugy működhet közre, hogy a pont a tört vonal körületét irja le.

Legyen a 3-ik ábrában O a sokszögön kivül fekvő forgáspont, húzzunk ebből a szögpontokon keresztül egyenes vonalakat, akkor ezek a forgó vonal azon helyzeteinek felelnek meg, melyekben a mozogható pont a szögpontokkal összeesik, és a sokszög annyi háromszögre oszlik, a hány oldala van, minthogy a sokszög minden oldala egy háromszög alapját, a forgáspont pedig azoknak közös csúcsát képezi.

Azon háromszögeket, melyek a vonalnak balról jobbra forgása által állanak elő, állitóknak nézzük; tehát az ellenkező forgás által képzetteket a mértan elvei szerint tagadóknak kell vennünk. Nevezzük az alapnál fekvő szögek absolut értékeit α és β-nak, a csúcsét γ-nak, melyekhez még szögmutatókat kell megkülönböztetésül mellékelni; akkor ezen kifejezések állanak elő:

az 1,2,0	háromszögből	$\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_1 = 180^0$
» 2,3,0	»	$\alpha_2 + \beta_3 + \gamma_2 = 180^0$
» 3,4,0	»	$\alpha_3 + \beta_4 + \gamma_3 = 180^0$
» 4,5,0	»	$-\alpha_4 - \beta_5 - \gamma_4 = -180^0$
» 5 6,0	»	$\alpha_5 + \beta_6 + \gamma_5 = 180^0$
. . . . .	. . .	. . . .
. . . . .	. . .	. . . .
» n,1,0	»	$-\alpha_n - \beta_1 - \gamma_n = -180^0$

Ha most ezen egyenletek összeadatnak, akkor az egyenlő mutatójú α és β vagy bel-, vagy külszöget fognak adni aszerint, a mint az összeg jegye $+$, vagy $-$. Ellenben a γ összege mindig o, minthogy a forgó vonalnak épen olyan nagy szöget kell balra átfutni, amilyent jobbra hátrahagyott, hogy a kiindulási fekvésbe visszajöhessen. Legyen az eképen származó belszögek absolut összege . . . . B,
a külszögek absolut összege . . . . K,
a sokszög szögeinek száma . . . . n,
a tagadó háromszögek száma . . . . m,
honnan következik, hogy az állitó háromszögek száma $n-m$;

akkor az összeadás eredménye ezen egyenlet leend:

$$B - K = (n-2m)\ 180^0.$$

Ugyde minden külszög a neki megfelelő belszöggel összesen 360^0 ád; legyen tehát a K-ban bennfoglalt összeadandók száma p, a K összegnek megfelelő belszögek összege B'; akkor az előbbi szerint $K + B' = p\ .\ 360^0 = 2p\ .\ 180^0$;

Ezen két egyenletből következik összeadás által

$$B + B' = Ö = [n-2(m-p)]\ 180^0.$$

Tegyük $m-p = v$-nek, mely, mint két egész szám közti különbség, csak egész szám, de állitó is, tagadó is lehet; akkor az utóbbi egyenlet lesz:

$$Ö = (n-2v)\ 180^0 \ldots\ldots\ldots \odot$$

Minthogy minden szög $\begin{smallmatrix}>0\\<2.180^0\end{smallmatrix}$, akkor a szögek öszszege is $\begin{smallmatrix}>0\\<n.2.180^0\end{smallmatrix}$; a honnan következik $n-2v \begin{smallmatrix}>0\\<2n\end{smallmatrix}$ vagy $v \begin{smallmatrix}>-\frac{n}{2}\\<+\frac{n}{2}\end{smallmatrix}$.

21. §.

Az előbbi tételből következik:

1) Ha valamely sokszög rajzban adva van, annak szögei összegét fel lehet találni, ha n, m és p megszámláltatnak, és a fentebb talált képletben helyettesíttetnek. Könnyű átlátni, hogy a forgáspontot a sokszögön kivül akárhol lehet választani, anélkül hogy az összeg változnék.

2) Ha valamely sokszög szögei egyen kivül mind adva vannak: ennek értékét fel lehet találni. Legyenek az ösmeretes szögek $A, B, C \ldots\ldots M.$ az ösmeretlen X; akkor

$(n-2v)\ 180^0 = A + B + C + \ldots\ldots + M + X$; tehát

$X = (n-2v)\ 180^0 - (A + B + C + \ldots\ldots + M) \ldots \odot$

Ezen képlet az ösmeretlen értékét ugyan közvetlen nem határozza meg, minthogy v még bizonyos határok közt több értéket vehet fel; mindazáltal a megoldás tökéletes és kétségen kivüli, minthogy csak egy szám létezik, mely v helyett tétetvén X-nek állitó 0^0 és 360^0 között fekvő értéket ad, minden más eredményt pedig mint a dolog természetével öszve nem férőt ki kell zárnunk. Legyenek például egy 6 szögnek ösmeretes szögei:

$$\begin{array}{rl} A = & 17^0\ 22' \\ B = & 22^0\ 40' \\ C = & 15^0\ 15' \\ D = & 36^0\ 55' \\ E = & 15^0\ \ 8' \\ \hline \text{Összesen} = & 107^0\ 20' \end{array}$$

Ezen esetben v helyett lehet tenni sorjában —2, —1, 0, + 1, + 2, melyeknek következő X-ek felelnek meg, 1692° 40′, 1332° 40′, 972° 40′, 612° 40′, 252° 40′. De ezen 5 eredmény közül csak az utolsó használható, a többiek a lehetőség határain kivül esvén; tehát $X = 252^0\ 40'$.

* 3) Ha a sokszög szögei összegét a szögek számával elosztjuk, előáll a rendes sokszög szöge. Nevezzük ezt x-nek, akkor lesz $x = \left(1 - \frac{2v}{n}\right) 180^0$,

melyben v helyett minden, az ösmeretes határok közt eső egész számot lehet tenni. De ezen helyettesitések közül nem mindenik ád külön eredményt, miután könnyű megmutatni, hogy ha v helyett valamely számot egyszer +, másszor — jellel teszünk, ugyanazon sokszögnek egykor bel-, máskor külszöge jön ki eredményül. Elég tehát csak az állitó számokra szorítkoznunk. Nemkülönben el lehet $v = o$-át is mellőzni, minthogy az ennek megfelelő sokszög egyenes vonallá válik.

Ezen megszoritás után következő táblát nyerünk, mely a rendes sokszögeknek minden nemét ábrázolja.

n	v	x
3	1	60°
4	1	90°
5	1	108°
	2	36°
6	1	120°
	2	60°
7	1	128° 34′ 17″
	2	77° 8′ 34″
	3	25° 42′ 51″
. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .

Gondoljuk a kör körületét 5, 6, 7 stb. egyenlő részekre beosztva, és kössük öszve az első pontot a másodikkal, a másodikat a harmadikkal, s így tovább, mig a törött vonal a kiindulási pontba visszatér; akkor a sokszögek azon neme áll elő, mely $v = 1$-nek megfelel. Ha az első pontot a harmadikkal, ezt az ötödikkel, s így tovább öszvekötjük, mindig egy közbe eső pontot átugorván, akkor a sokszögek azon neme származik, mely $v = 2$-nek felel meg. Ha két pontot ugrunk által, akkor a $v = 3$-nak megfelelő sokszögek származnak, s így tovább.

Meg kell még jegyezni, hogy ha $n \ldots v$ által osztható, akkor a sokszöget egy húzomban leirni nem lehet; hanem az annyi külön zárt törtvonalakból van öszvetéve, a hány egységből a hányados áll.

22. §. Összrendezők.

Feladat. Adva lévén egy sokszögnek körületi darabjai, a szögpontok derék-összrendezőit meghatározni.

Feloldás. 1) Nevezzük a sokszög pontjait sorjában 0, 1, 2, 3, ... n-nek, (4. ábra) válasszuk 0-át összrendezők kezdő pontjául, $0n$-et pedig x tengelyül, és legyenek az m pont összrendezői y_m, x_m keresendők, akkor ha $mP \perp 0n$, és $m-1$, $Q \parallel 0n$ húzatnak, lesznek:

$$m\,Q = y_m - y_{m-1}$$
$$m-1,\ Q = x_m - x_{m-1}.$$

Nevezzük az $m-1$ és m közt befoglalt oldal hosszát $(m-1, m)$, azon szöget, melyet az $m-1\ m$ oldal állitó iránya az x tengely állitó irányával bezár, s mely 0 és 360^0 közt minden értéket felvehet magára, α_{m-1}-nek, akkor egész általánosságban lesz

$$\left.\begin{aligned} y_m - y_{m-1} &= (m-1,\ m)\ sin\ \alpha_{m-1} \\ x_m - x_{m-1} &= (m-1,\ m)\ cos\ \alpha_{m-1} \end{aligned}\right\} \odot$$

Ha tehát az $m-1$ szögpontnak összrendezői ösmeretesek, ezen képletek az m pont összrendezőit fogják szolgáltatni. Hogy ezeket egymástól függetlenül lehessen kifejezni, szükség egy olyan pontig visszamenni, melynek összrendezői ösmeretesek. Ilyen a kezdő pont 0, hol $x_0 = o$, $y_0 = o$. Tegyük tehát sorjában

$$m = 1, \text{ akkor } \begin{cases} y_1 = (0,1)\,sin\,\alpha_0 \\ x_1 = (0,1)\,cos\,\alpha_0 \end{cases}$$

$$m = 2, \quad » \quad \begin{cases} y_2 = (0,1)\,sin\,\alpha_0 + (1,2)\,sin\,\alpha_1 \\ x_2 = (0,1)\,cos\,\alpha_0 + (1,2)\,cos\,\alpha_1 \end{cases}$$

$$m = 3, \quad » \quad \begin{cases} y_3 = (0,1)\,sin\,\alpha_0 + (1,2)\,sin\,\alpha_1 + (2,3)\,sin\,\alpha_2\,, \\ x_3 = (0,1)\,cos\,\alpha_0 + (1,2)\,cos\,\alpha_1 + (2,3)\,cos\,\alpha_2\,, \end{cases}$$

. . . .

. . . .

általánosan

$$\left.\begin{array}{l} y_m = (0,1)\sin\alpha_0 + (1,2)\sin\alpha_1 + (2,3)\sin\alpha_2 + \ldots + (m-1,m)\sin\alpha_{m-1} \\ x_m = (0,1)\cos\alpha_0 + (1,2)\cos\alpha_1 + (2,3)\cos\alpha_2 + \ldots + (m-1,m)\cos\alpha_{m-1} \end{array}\right\} \mathbb{D}$$

2) De ezen α-val jelölt szögek ritkán ösmeretesek; szükség tehát azokat a körületi szögekkel kifejezni, melyek rendesen méretnek meg, és sorjában (0), (1), (2) ... $(m-1)$ ... (n)-el jelöltetnek. A 0, 1, 2, ... $m-1$, m, P sokszögben, — melyben $m+2$ szög van, — a szerint, amint α_{m-1} a négy negyed valamelyikébe esik, lesz:

$$\text{vagy } (0)+(1)+\ldots+(m-1)+180^0-\alpha_{m-1} = (m+2-2v)\,180^0,$$
$$\text{vagy } (0)+(1)+\ldots+(m-1)+180^0+360^0-\alpha_{m-1} = (m+2-2v)\,180^0,$$

hol mindig $v \begin{array}{l} > -\frac{m+2}{2} \\ < +\frac{m+2}{2} \end{array}.$

Mind a két esetet öszve lehet foglalni ezen képletben:

$$(0)+(1)+(2)+\ldots+(m-1)-\alpha_{m-1} = (m-1-2v')\,180^0,$$

hol v' az első esetben $v-1$ helyett van téve, s minthogy $v \begin{array}{l} > -\frac{m+2}{2} \\ < +\frac{m+2}{2} \end{array}$, tehát $v' \begin{array}{l} > -\frac{m+4}{2} \\ < +\frac{m}{2} \end{array}$; az utolsó esetben pedig $v' = v$, tehát határaik is egyenlők. Vegyük ezen határok közt a legkisebbet és legnagyobbat, azaz $v' \begin{array}{l} > -\frac{m+4}{2} \\ < +\frac{m+2}{2} \end{array}$, akkor ezek mind a két esetre egyaránt illenek, s általános érvénynyel birnak. Innen következik, elhagyván v' mellől a vonást, mely megkülönböztetésre többé szükség nincsen:

$$\alpha_{m-1} = (0)+(1)+(2)+\ldots+(m-1) - (m-1-2v)\,180^0,$$

hol $v \begin{array}{l} > -\frac{m+4}{2} \\ < +\frac{m+2}{2} \end{array}$, és

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha_{m-1} = (-1)^{m-1}\sin\left[(0)+(1)\ldots+(m-1)\right] \\ \cos\alpha_{m-1} = (-1)^{m-1}\cos\left[(0)+(1)\ldots+(m-1)\right] \end{array}\right\} \text{♉}$$

Helyettesítsük ezen kifejezéseket a fentebbi ⊙ egyenletekben, lesznek

$$\left.\begin{aligned} y_m - y_{m-1} &= (-1)^{m-1}(m-1, m)\, sin\,[(0)+(1)+(2)+\ldots+(m-1)] \\ x_m - x_{m-1} &= (-1)^{m-1}(m-1, m)\, cos\,[(0)+(1)+(2)+\ldots+(m-1)] \end{aligned}\right\} \odot'$$

és a független kifejezések ilyen alakokat nyernek:

$$\left.\begin{aligned} y_m &= (0,1)\, sin\,(0) - (1,2)\, sin\,[(0)+(1)] + (2,3)\, sin\,[(0)+(1)+(2)] - \cdots \\ &\quad + (-1)^{m-1}(m-1, m)\, sin\,[(0)+(1)+\ldots+(m-1)], \\ x_m &= (0,1)\, cos\,(0) - (1,2)\, cos\,[(0)+(1)] + (2,3)\, cos\,[(0)+(1)+(2)] - \cdots \\ &\quad + (-1)^{m-1}(m-1, m)\, cos\,[(0)+(1)+\ldots+(m-1)]. \end{aligned}\right\} \rightmoon'$$

Szögek nevei	Szögek összege	log sin ö	log cos ö	log old
(0)	36° 14′ 20″	9·771700	9·906636	2·098194
(0) + (1)	88 40 56	9·999885	8·361681	2·525485
(0) + (1) + (2)	196 48 8	9·461002*n*	9·981052*n*	2·443279
(0) + (1) + ... + (3)	14 22 1	9·394681	9·986202	2·312664
(0) + (1) + ... + (4)	32 34 49	9·731170	9·925641	2·489326
(0) + (1) + ... + (5)	287 40 19	9·979006*n*	9·482254	2·376285
(0) + (1) + ... + (6)	1 5 43	8·281375	9·999921	2·300443

Jegyzet: Ezen táblában itt-ott a logarok végén látszó *n* betük azt

Ezen táblában p, q, az y és x képletek egyes tagjait jelentik. Meg kell jegyezni, hogy ha a 2-ik rovatban a szögek öszszege 360°-ot meghalad, csak a felesleg van beirva, és a p, q rovatokban a 2-ik, 4-ik stb. sorban lévő számok jegyei a képletek értelmében ellenkezőkre vannak változtatva.

23. §. Alapegyenletek.

Az $\rightmoon'$ képletek a sokszög oldalai és szögei közti öszvefüggést kifejező két egyenletet szolgáltatnak. Ugyanis az m szögpont öszrendezőire nézve, ha 0 kezdőpontul és 0n az x tengely állító irányaul vétetik, találtatott:

$$\begin{aligned} y_m &= (0,1)\, sin\,(0) - (1,2)\, sin\,[(0)+(1)] + \ldots \\ &\quad + (-1)^{m-1}(m-1, m)\, sin\,[(0)+(1)+(2)+\ldots+(m-1)], \end{aligned}$$

Példa. Legyenek adva

$(0) = 36^{0}\,14'\,20''$	$(0,1) = 125^{0}.\,37$
$(1) = 52\;\;26\;\;36$	$(1,2) = 335\,.\,34$
$(2) = 108\;\;7\;\;12$	$(2,3) = 277\,.\,51$
$(3) = 177\;\;33\;\;53$	$(3,4) = 205\,.\,43$
$(4) = 18\;\;12\;\;48$	$(4,5) = 308\,.\,55$
$(5) = 255\;\;5\;\;30$	$(5,6) = 237\,.\,84$
$(6) = 73\;\;25\;\;24$	$(6,7) = 199\,.\,73$

ezekből a szögpontok összrendezői rovatos rendben, mely legbiztosabban és gyorsabban czélhoz vezet, 6 tizedesekben következő schema szerint számittatnak:

log p	log q	p	q	y	x
1·869894	2·004830	74·113	101·118	74·113	101·118
2·525370	0·887166	—335·251	—7·712	—261·138	93·406
1·904281*n*	2·424331*n*	—80·220	—265·663	—341·358	—172·257
1·707345	2 298866	—50·973	—199 006	—392·331	—371·263
2·220496	2·414967	166·148	259·996	—226·183	—111·267
2·355291*n*	1 858539	226·616	—72·200	0·433	—183·467
0·581818	2·300364	3·818	199·694	4·251	16·227

jelentik, hogy ezen logaroknak megfelelő számokat — jegygyel kell venni.

$$x_{\mathrm{m}} = (0,1)\cos(0) - (1,2)\cos[(0)+(1)] + \ldots$$
$$+ (-1)^{\mathrm{m}-1}(m-1, m)\cos[(0)+(1)+(2)+\ldots+(m-1)].$$

Hasonlóképen ha n kezdőpontul, $n0$ pedig az x tengely állitó irányául vétetik, és az összrendezők megkülönböztetésül vonásokkal láttatnak el, lesz:

$$y'_{\mathrm{m}} = (n, n-1)\sin(n) - (n-1, n-2)\sin[(n)+(n-1)] +$$
$$+ (n-2, n-3)\sin[(n)+(n-1)+(n-2)] - \ldots$$
$$+ (-1)^{\mathrm{n-m-1}}(m+1, m)\sin[(n)+(n-1)+\ldots+(m+1],$$
$$x'_{\mathrm{m}} = (n, n-1)\cos(n) - (n-1, n-2)\cos[(n)+(n-1)]$$
$$+ (n-2, n-3)\cos[(n)+(n-1)+(n-2)] - \ldots$$
$$+ (-1)^{\mathrm{n-m-1}}(m+1, m)\cos[(n)+(n-1)+\ldots+(m+1].$$

Ámde a dolog természeténél fogva

$$\left.\begin{array}{l}
y_m = y'_m, \text{ és } x_m + x'_m = (0,\, n), \text{ tehát} \\
(0{,}1)\, sin\, (0) - (1{,}2)\, sin\, [(0) + (1)] + \ldots \\
\quad + (-1)^{m-1} (m-1,\, m)\, sin\, [(0) + (1) + \ldots + (m-1)] \\
= (n,\, n-1)\, sin\, (n) - (n-1,\, n-2)\, sin\, [(n) + (n-1)] + \ldots \\
\quad + (-1)^{n-m-1} (m+1,\, m)\, sin [(n) + (n-1) + \ldots + (m+1)]. \\
(0,n) = (0{,}1)\, cos\, (0) - (1{,}2)\, cos\, [(0) + (1)] + \ldots \\
\quad + (-1)^{m-1} (m-1,\, m)\, cos\, [(0) + (1) + \ldots + (m-1)] + \ldots \\
\quad + (n,\, n-1)\, cos\, (n) - (n-1,\, n-2)\, cos\, [(n) + (n-1)] + \ldots \\
\quad + (-1)^{n-m-1} (m+1,\, m)\, cos\, [(n) + (n-1) + \ldots + (m+1)].
\end{array}\right\} \odot$$

Ezen egyenletek érvényesek, akármi legyen is az m értéke; különösen ha $m = n$, akkor $y'_n = 0$, $x'_n = 0$, tehát $y_n = 0$, $x_n = (0,n)$, és az előbbi egyenletek következő alakokat öltenek fel:

$$\left.\begin{array}{l}
(0{,}1)\, sin\, (0) - (1{,}2)\, sin\, [(0) + (1)] + \ldots \\
+ (-1)^{n-1} (n-1,\, n)\, sin [(0) + \ldots + (n-1)] = 0, \\
(0{,}1)\, cos\, (0) - (1{,}2)\, cos\, [(0) + (1)] + \ldots \\
+ (-1)^{n-1} (n-1, n)\, cos\, [(0) + (1) + \ldots + (n-1)] = (0,n)
\end{array}\right\} \odot$$

A 21. és 23. §-ok $\odot$ képletei a sokszögtani alapegyenleteket képezik, és három tagnak a többiek általi kifejezésére szolgálnak. Három tag tehát ösmeretlen lehet, ha a többi $2n-3$ ösmeretes, kivévén azon esetet, ha mind a három ösmeretlen: oldal volna, minthogy a 21. §. képlete, mint csupán szögekből álló, oldal meghatározására nem alkalmatos.

24. §.

Az előbbi §. értelmében a sokszögekben következő ösmeretlen körületi darabok jöhetnek elő: 2 oldal, 1 szög; 1 oldal, 2 szög; és 3 szög; mely esetek ugyanannyi feladatokra vezetnek.

25. §.

Feladat. Egy sokszöget feloldani, ha benne 2 oldal és 1 szög ösmeretlen.

Feloldás. a) Szerkesztés utján. Legyenek az 5-ik ábrában *ab, cd* és m ösmeretlenek. Kezdjük a szerkesztést valamelyik ösmeretes darabon és folytassuk mind két oldalról, míg az ösmeretlen szögre bukkanunk, az ösmeretlen oldalak helyett tetszés szerinti hosszakat vévén fel. Ha ezen oldalak helyett történetesen a valóságos hosszakat tettük volna, akkor a sokszög bezáródnék, vagyis a szerkezetnek végpontjai összeesnének; de minthogy ez nem valószinű, a sokszög nyitva marad, s az ösmeretlen szögpont *m* helyett két pontot *e* és *f* nyerünk; mi biztos jele annak, hogy *ab* és *cd* hibásan vannak választva. Szükséges tehát ezeket ugy változtatni, hogy a sokszög bezáródjék a nélkül, hogy a többi darabokban változás történnék. E czélból toljuk az idomnak az ösmeretlen oldalak és ösmeretlen szög közti szárnyait az ösmeretlen oldalak hosszában egyközűleg, míg a szerkezet végpontjai összeesnek, vagyis húzzunk *e* és *f*-ből *ab* és *cd*-hez egyközüket, míg ezek egymást *m*-ben metszik; akkor *em* és *fm*, az *ab* és *cd*-ben szükséges változásokat ábrázolandják. Kiigazitván tehát a hibásan felvett ösmeretleneket, s a műtételt ismételvén, a szerkezetnek szükségesképen be kell záródni, és a zárpontban előálló szög fogja az ösmeretlen szöget szolgáltatni. Ezen szerkezetből látszik, hogy csak egy feloldás létezik, minthogy két egyenes vonal egymást csak egy pontban metszheti; kivévén azon esetet, ha a két ösmeretlen vonal egyközű, a mikor *em* és *fm* összeesnek, vagyis végtelen sok metszéspontot adnak; ami azt mutatja, hogy a feloldás határozatlan.

A feloldás lehetetlen is lehet, ha vagy *em*, vagy *fm* nagyobb, mint a megfelelő oldal, és röviditőleg hat; ilyenkor az ösmeretlen oldal tagadó értéket nyervén, a feloldás a sokszög természetével öszve nem fér.

b) Számitás utján. Válasszunk egy ösmeretlen oldalt *x* tengelynek, annak egyik végpontját összrendezők kezdőpontjának, s állitsuk fel az alapegyenleteket az ösmeretlen szögpontban. Eképen két első foku két ösmeretlennel biró egyenlethez jutunk, melyek minden akadály nélkül feloldathatnak. Tagadó jegyű eredményeket nem kell figyelembe venni. A feloldás csak akkor lesz bizonytalan, ha az ösmeretlen oldalak egyközük. Ugyanis a 22. §. ⊙' képlete szerint általánosan

$$y_m - y_{m-1} = (-1)^{m-1} (m-1, m) \sin [(0) + \ldots + (m-1)], \text{ tehát}$$

$$(m-1,\ m) = \frac{y_m - y_{m-1}}{(-1)^{m-1} \sin [(0) + (1) + \ldots + (m-1)]};$$

de ha $(m-1,\ m)$ és $(0,\ n)$ egyközük, akkor különösen

$$y_m = y_{m-1}$$

és a 22. §. ♁ képleténél fogva

$$sin\,[(0)+(1)+(2)+\ldots+(m-1)] = 0, \text{ tehát}$$

$$(m-1,\ m) = \frac{0}{0} = \text{határozatlan.}$$

A feloldandó

$$(0,1)\ sin\,(0) - (1,2)\ sin\,[(0)+(1)]+(2,3)\ sin\,[(0)+(1)+(2) = (7,6)\ sin\,(7)$$
$$-(6,5)\ sin\,[(7)+(6)]+(5,4)\ sin\,[(7)+(6)+(5)]-(4,3\ sin\,[(7)+(6)+(5)+(4)].$$

A számitás következő táblás schema szerint vitetik véghez

Szögek nevei	Szögek összege	log sin ö	log cos ö
(0)	45° 10′ 12	9·850770	9·848193
(0) + (1)	310 11 17	9·883053*n*	9·809760
(0) + (1) + (2)	45 3 47	9·849963	9·849006
(7)	91 2 8	9·999929	8·257027*n*
(7) + (6)	46 2 58	9·857295	9·841382
(7) + (6) + (5)	326 44 1	9·739202*n*	9·922273
(7) + (6) + (5) + (4)	276 53 23	9·996852*n*	9·079032

Az első egyenlet tehát következővé válik:

$$-215{\cdot}005 = (4,5)\ sin\,[(7)+(6)+(5)],$$

innen logarokban

$$\begin{array}{rl} log\,(4,5) = & 2{\cdot}332449\ n \\ & -\ 9{\cdot}739202 + 10\ n \\ \hline & 2{\cdot}593247 \end{array}$$

melynek megfelelő szám $(4,5) = 391{\cdot}965$.

Példa. Egy 8 szögben adva vannak:

$(0) = 45^0\ 10'\ 12''$	$(0,1) = 101{\cdot}38$
$(1) = 265^0\ 1'\ 5''$	$(1,2) = 132{\cdot}94$
$(2) = 94^0\ 52'\ 30''$	$(2,3) = 143{\cdot}51$
$(3) = 310^0\ 9'\ 22''$	$(3,4) = 449.88$
$(5) = 280^0\ 41'\ 3''$	$(5,6) = 234.75$
$(6) = 315^0\ 0'\ 50''$	$(6,7) = 212.46$
$(7) = 91^0\ 2'\ 8''$	

az ösmeretlen darabok (3), (4,5), (0,7).

egyenletek lesznek:

$$(0,1)\ cos\ (0) - (1,2)\ cos\ [(0)+(1)] + (2,3)\ cos\ [(0)+(1)+(2)] + (7,6)\ cos\ (7)$$
$$- (6,5)\ cos\ [(7)+(6)] + (5,4)\ cos\ [(7)+(6)+(5)] - (4,3)\ cos\ [(7)+(6)+(5)+(4)] = (0,7)$$

legbiztosabban:

log old.	log p	log q	p	q
2·005952	1·856722	1·854145	71·899	71·474
2·123656	2·006709*n*	1·933416	101·557	—85·786
2.156882	2 006845	2·005888	101·589	101·365
2·327277	2·327206	0·581304*n*	—212·425	—3·840
2·370606	2 227901	2·211988	169·006	—162·925
2·593247		2·515520		327·733
2·653097	2·649949*n*	1·732129	—446·631	—53·967
			444·051	500·572
			—659·056	—306·518
			215·005	194·054 = (0,7)

Ezen eredmény most a *log old* rovatban beiktattatik, és a számolás kiegészittetvén, kijön

$$(0,7) = 194{\cdot}054.$$

Végre a (3) szögre nézve a 21. §. ⊙ képletből, ha $v = o$-nak vétetik, találtatik

$$(3) = 38^0\ 2'\ 50''.$$

A 22. §. végén az összeg *p* és *q* rovatokat illető jegyzet itt is áll.

26. §.

F e l a d a t. Oldassék fel egy sokszög, melyben 1 oldal és 2 szög ösmeretlen.

F e l o l d á s. Ezen feladatban megkülönböztetünk 3 esetet.

1. Ha az ösmeretlen szögek az ösmeretlen oldal mellett feküsznek.

2. Ha az ösmeretlen szögek nincsenek ugyan az ösmeretlen oldal mellett, de egymásután következnek.

3. Ha az ösmeretlenek szétszórva vannak.

A z e l s ő e s e t f e l o l d á s a. a) S z e r k e s z t é s u t j á n. A szerkesztést (6. ábra) valamelyik ösmeretlen darabból kiindulva, mindkét oldalon folytatni kell addig, mig az ösmeretlen szögekre bukkanunk. Ekkor a két végpont egymással öszveköttetvén, az ösmeretlen darabok meg vannak határozva.

b) S z á m i t á s u t j á n. Válasszuk az ösmeretlen szög előtti ösmeretes szögpontot s oldalt kezdőpontul és x tengelyül, úgy hogy az ösmeretlen darabok $(n—1)$, $(n—1, n)$ és (n) a sokszög utolsó alkatrészeit képezzék. Ekkor az $(n—1)$ összrendezőit ki lehet számitni, minthogy a kezdőponttól a nevezett pontig csupán ösmeretes darabok vannak.

Nevezzük ezeket y_{n-1}, x_{n-1}-nek, akkor az $(n—1)$, n, P derékszögü háromszögből ezen egyenleteket nyerjük:

$$\left.\begin{array}{l}(n-1,\ n)\ sin\ (n) = y_{n-1} \\ (n-1,\ n)\ cos\ (n) = (0,\ n) - x_{n-1}\end{array}\right\} \ldots . \ 1),$$

melyekből az $(n—1, n)$ és (n) értékeit ki lehet számitni.

Emeljük fel t. i. ezen egyenleteket négyzetre és adjuk össze, akkor lesz:

$$(n-1,\ n)^2 = y^2_{n-1} + [(0,\ n) - x_{n-1}]^2 \ldots . \ 2),$$

hol a négyzet gyökét $+$ jellel kell venni. Ezután következik:

$$\left.\begin{array}{l} sin\ (n) = \dfrac{y_{n-1}}{(n-1,\ n)} \\ cos\ (n) = \dfrac{(0,\ n) - x_{n-1}}{(n-1,\ n)}\end{array}\right\} \ldots . \ 3).$$

Ezen egyenletek az (n) értékét tökéletesen meghatározzák, minthogy a függvények jeleiből meg lehet itélni, hogy melyik negyedben kell annak esni.

A feloldást meg is lehet forditni; az 1) egyenletekből t. i. osztás által következik:

$$tg\ (n) = \frac{y_{n-1}}{(0,\ n) - x_{n-1}} \ldots .\ 4).$$

Meg kell jegyezni, hogy ezen törtszám számlálója és nevezője a *sin* (n) és *cos* (n)-el mindig egyenlő jegyü, úgy hogy ezen jegyekből, ha azok változás nélkül hagyatnak, a mint a számitásból kijöttek, a negyedet épen úgy lehet meghatározni, mint a *sin* és *cos* képletekből. Ezután következik az ösmeretlen oldalra nézve:

$$(n-1,\ n) = \frac{y_{n-1}}{sin\ (n)},\ \text{vagy}$$

$$(n-1,\ n) = \frac{(0,\ n) - x_{n-1}}{cos\ (n)} \ldots .\ 5).$$

Ezen mód szerint lehet a sokszög átlóit is a mellette fekvő szögekkel együtt meghatározni.

Ha az y_{n-1} és x_{n-1} értékei az általános képletek szerint a fentebbi 2) egyenletben helyettesittetnek, ezen egyenlet keletkezik:

$$\begin{aligned}(n-1,n)^2 &= (n,0)^2 + (0,1)^2 + \ldots + (n-2,n-1)^2\\ &- 2\,(n,0)\,(0,1)\,cos\,(0) + 2\,(n,0)\,(1,2)\,cos\,[(0)+(1)] - \ldots .\\ &- 2\,(0,1)\,(1,2)\,cos\,(1) + 2\,(0,1)\,(2,3)\,cos\,[(1)+(2)] - \ldots\\ &- 2\,(1,2)\,(2,3)\,cos\,(2) + 2\,(1,2)\,(3,4)\,cos\,[(2)+(3)] - \ldots\end{aligned}$$

. . . .

. . . .

mely szavakban igy hangzik: Az ösmeretlen oldal négyzete egyenlő az ösmeretes oldalak négyzetei összegével, $\pm$ minden ösmeretes oldalpárnak s a közbenzárt szögek összege cosinusának kettős szorozmányával, hol a felső vagy alsó jegyet kell venni aszerint, amint a bezárt szögek száma páros vagy páratlan.

Példa. Egy 8-szögben adva vannak:

$(0) = 30^0\ 10'\ 25''$	$(0,1) = 857^0{\cdot}35$
$(1) = 75^0\ 7'\ 28''$	$(1,2) = 985^0{\cdot}20$
$(2) = 154^0\ 36'\ 50''$	$(2,3) = 439^0{\cdot}71$
$(3) = 209^0\ 41'\ 16''$	$(3,4) = 603^0{\cdot}56$
$(4) = 55^0\ 37'\ 9''$	$(4,5) = 395^0{\cdot}93$
$(5) = 87^0\ 6'\ 24''$	$(5,6) = 582^0{\cdot}44$
	$(7,0) = 880^0{\cdot}65$

ösmeretlenek (6), (6,7) és (7). Legelőször a 6 szögpont összrendezői számittatnak ki a 22. §. $\mathfrak{D}'$ képletei szerint, az eredmény következő:

$$y_6 = -864{\cdot}908, \qquad x_6 = 920{\cdot}568.$$

Azután a (6,7) oldal kiszámitására nézve találtatik a 26. §. 2) képlete szerint:

$$(6,7)^2 = (-864{\cdot}908)^2 + (880{\cdot}65 - 920.568)^2,$$

tehát $$(6,7) = 865{\cdot}829;$$

innen következik a 3) képletek szerint

$$sin\ (7) = \frac{-864{\cdot}908}{865{\cdot}829},$$

$$cos\ (7) = \frac{-39{\cdot}918}{865{\cdot}829}.$$

Ezen képletek mutatják, hogy a (7) szög a 3-dik negyedben van, minthogy mind a sinus, mind a cosinus tagadó jelü. A sinus és cosinusnak megfelelő hegyes szög lesz:

$$87^0\ 21'\ 30'' \text{ és } 87^0\ 21'\ 27'',$$

mely eredmények közül a második biztosabb az elsőnél, miután a sinus 90^0 környékén oly keveset változik, hogy abból az ivre következtetni nem biztos. Vegyük tehát a másodikat a keresett szög gyanánt, akkor a (7) szög értéke lesz:

$$(7) = 267^0\ 21'\ 27''.$$

Végre a (6) szög értéke kijön, ha $v = 1$-nek vétetik, és lesz:

$$(6) = 200^0\ 19'\ 1''.$$

27. §.

A második eset feloldása. a) Szerkesztés utján. Legyen a 7-ik ábrában *a b m l* az adatott sokszög, melyben (*ab*), (*l*) és (*m*) ösmeretlenek. Kezdjük a szerkesztést az ösmeretlen oldalon, felvévén helyette egy tetszés szerinti hosszat *ac*, és folytassuk mindkét felé, mig az ösmeretlen szögekhez jutunk. Ez által két pont *l* és *h* áll elő, melyek egymástóli távjának egyenlőnek kellene lenni az ösmeretes *lm* oldallal, ha az *ac* hosszat eltaláltuk volna. De minthogy ez nem valószinű, szükség az *ac* oldalt úgy változtatni, az egész *ch* szárnyat az *ac* hoszszában párhuzamosan tolván, hogy a fent emlitett egyenlőség helyreálljon, vagy más szavakkal: húzni kell a *h* ponton keresztül *ac*-hez párhuzamost, és az *l* pontból, mint középpontból *lm* sugárral egy kört. Ezek egymást két pontban *m* és *m'* metszik, és a *hm*, *hm'* darabok az *ac*-ben szükséges változtatást ábrázolják. E szerint két különböző feloldást nyerünk, minthogy egy kör egy egyenes vonal által rendesen két pontban metszetik; mindazáltal ha egyik vagy másik a *hm* és *hm'* dararabok közül nagyobb volna az *ac* felvett hosznál, és röviditőleg hatna, az ennek megfelelő feloldás nem volna használható; minthogy ez az ösmeretlen *ab* oldalnak tagadó értéket adna. Hasonlóképen csak egy feloldás létezik, ha az egyenes vonal a kört érinti. Végre a feloldás lehetetlenné lesz, ha az egyenes vonal a kör mellett metszés és érintés nélkül megyen el.

b) Számitás utján. Vegyük az ösmeretlen oldalt *x* tengelyül, s annak egyik végpontját öszrendezők kezdeteül, akkor feltévén a 23. §. ⊙ egyenleteket az *m* pontra nézve, lesznek:

$$(0,1)\ sin\ (0) - (1,2)\ sin\ [(0)+(1)]+(2,3)\ sin\ [(0)+(1)+(2)] - \ldots$$
$$+(-1)^{m-1}\ (m-1,\ m)\ sin\ [(0)+(1)+\ldots+(m-1)] =$$
$$(n,\ n-1)\ sin\ (n) - (n-1,\ n-2)\ sin\ [(n)+(n-1)]+\ldots;$$
$$(0,1)\ cos\ (0) - (1,2)\ cos\ [(0)+(1)] + (2,3)\ cos\ [(0)+(1)+(2)] - \ldots$$
$$+(n,\ n-1)\ cos\ (n) - (n-1,\ n-2)\ cos\ [(n)+(n-1)]+\ldots = (0,n).$$

Az első egyenletben egyedül csak az $(m-1)$ ösmeretlen szög jövén elő, kiszámittathatik ilyeténképen. Az ösmerősöket mind egy tagba összehuzván, és az ösmeretlen tag együtthatójával osztván, ezen kifejezés áll elő:

$$sin\ [(0)+(1)+(2)\ \ldots\ldots + (m-1)] = A,$$

hol *A* állitó vagy tagadó, 1-et meg nem haladó számot jelent. Tegyük fel, hogy *A* állitó jelü, és legyen α olyan 90^0-ot meg nem haladó szög, melynek sinusa *A*, vagyis

$$sin\ \alpha = A, \text{ akkor:}$$

$$(0)+(1)+(2)+\ldots\ldots+(m-1) = \begin{cases} 2k \cdot 180^0+\alpha \\ (2k+1)\ 180^0-\alpha, \end{cases}$$

tehát:

$$(m-1) = \begin{cases} 2k.\ 180^0+\alpha - [(0)+(1)+\ldots+(m-2)] \\ (2k+1)\ 180^0-\alpha - [(0)+(1)+\ldots+(m-2)] \end{cases} \odot$$

hol *k* helyett akármely állitó egész számot lehet tenni. Ha ellenben *A* tagadó jelü, akkor legyen ismét α azon 90^0-ot meg nem haladó szög, melynek sinusa egyenlő az ellenkező jellel vett A-val, vagyis

$$sin\ \alpha = -A,\ \text{akkor:}$$

$$(0)+(1)+(2)+\ldots+(m-1) = \begin{cases} (2k-1)\cdot 180+\alpha \\ 2k\cdot 180+\alpha, \end{cases}$$

tehát:

$$(m-1) = \left\{\begin{matrix} (2k-1)\ 180^0+\alpha - [(0)+(1)+\ldots+(m-2)] \\ 2k.\ 180+\alpha - [(0)+(1)+\ldots+(m-2)] \end{matrix}\right\} \odot'$$

Mindkét esetben végtelen sok feloldást nyerünk; de közülök mind azokat el kell hagynunk, melyek 0^0 és 360^0-on kivül esnek. Ennek következtében könnyű megmutatni, hogy mindegyik kifejezés csak egy feloldást szolgáltat, minthogy csak egy szám létezik, melyet k helyett lehet tenni, a többiek a fentebb emlitett feltételeknek nem tévén eleget. Ha a megtalált szögeket a második egyenletben helyettesitjük, kijőnek az $(0,n)$ ösmeretlen értékei, s ha mindketten állitó jellel birnak, két, a feladat feltételeinek megfelelő sokszög létezik. Ellenben a tagadó jegyü oldal nem használható.

Ha $A = \pm 1$, akkor $\alpha = 90^0$, s mind a két feloldás egyenlő eredményre vezet.

Végre ha $A \begin{matrix} > +1 \\ < -1 \end{matrix}$, akkor a sokszög lehetetlen leend.

Példa. Egy 6 szögben adva vannak:

(0) =	45^0	10′	20″;		(0,1) =	301.84
(1) =	94^0	58	8		(1,2) =	349.68
(4) =	106^0	22	36		(2,3) =	904.25
(5) =	121^0	3	5		(3,4) =	520.32
					(4,5) =	472.91

ösmeretlenek (2), (3) és (0,5). A b) egyenletekből származnak:

$$(0,1)\ sin\,(0) - (1,2)\ sin\,[(0)+(1)] + (2,3)\ sin\,[(0)+(1)+(2)] = (5,4)\ sin\,(5) - (4,3)\ sin\,[(5)+(4)].$$

$$(0,1)\ cos\,(0) - (1,2)\ cos\,[(0)+(1)] + (2,3)\ cos\,[(0)+(1)+(2)] + (5,4)\ cos\,(5) - (4,3)\ cos\,[(5)+(4)] = (0,5).$$

A számitás következő rendben vitetik véghez:

Szögek nevei	Szögek összege	log sin ö	log cos ö	log old.	log p	log q	p	p
(0)	45° 10′ 20″	9·850786	9·848176	2·479777	2·330563	2·327953	214·073	212·791
(0) + (1)	140 8 28	9·806790	9·885149*n*	2·543671	2·350461	2·428820*n*	—224·110	268·423
(0) + (1) + (2)	{ 61 59 39 / 118 0 21 }		9·671692 *p*/*n*	2·956288		2·627980 *p*/*n*		± 424·600
(5)	121 3 5	9·932832	9·712486*n*	2·674778	2·607610	2·387264*n*	—405·145	—243·930
(5) + (4)	227 25 41	9·867131*n*	9 830278*n*	2 716270	2·583401*n*	2·546548*n*	—383·179	352·004
							214·073	1257·818
							—1012·434	—243·930
							—798·361	1013·888 = (0,5)
								833·218
								—668·530
								164·688 = (0,5)

Jegyzés: A logar végén álló *p* azt jelenti, hogy a megfelelő számot + jellel kell venni.

Az első egyenlet tehát lesz:

$$-798{\cdot}36 + 904{\cdot}25 \times \textit{sin}\,[(0) + (1) + (2)] = 0,$$

honnan következik logarokban:

$$\textit{log sin}\,[(0) + (1) + (2)] = 9{\cdot}945911, \text{ és}$$

$$\alpha = 61^0\ 59'\ 39'', \text{ tehát ha } k = 1\text{-nek vétetik}$$

$$(2) = \begin{cases} 281^0\ 51'\ 11'' \\ 337^0\ 51'\ 53'' \end{cases}.$$

Ezen számokkal betöltvén az üresen maradt helyeket, kijön:

$$(0{,}5) = \begin{cases} 1013{\cdot}888 \\ 164{\cdot}688 \end{cases},$$

és végre a 21. §. ⊙ egyenletből, $v = 1$-nek vétetvén, származik:

$$(3) = \begin{cases} 70^0\ 34'\ 40'' \\ 14^0\ 33'\ 58'' \end{cases}.$$

A fentebbi *ö, p, q* rovatokra vonatkozó megjegyzés itt is érvényes.

28. §.

A harmadik eset feloldása. Kössük öszve (8. ábra) a két ösmeretlen szögpontot egymással, akkor a sokszög két részre oszlik I, II-re; melyek közül I-ben egy oldal (*lm*), és a két mellette fekvő szög α, β, II-ben pedig egy oldal (*ab*), és két egymásra következő szög γ, δ ösmeretlenek. Mindkét sokszöget az előbbi feladatok módja szerint fel lehet oldani, s az ösmeretlen szögeket (*l*) és (*m*) a megtalált részletes szögekből α, β, γ, δ kell összetenni, t. i.:

$$(l) = \alpha + \gamma, \text{ és } (m) = \beta + \delta - 360^0;$$

mely kifejezésekben látni való, hogy ha az összeg 360^0-ot meghalad, ezt el kell hagyni, s csak a felesleget kell megtartani.

Miután a II sokszögnek rendesen két alakja van, tehát az I sokszöget mindkettőhöz hozzá lehet illeszteni; innen következik, hogy a jelen feladatnak is rendesen két sokszög felel meg.

Első pillanatra ugyan ugy látszik, mintha az I sokszöget a II-höz kétféleképen lehetne illeszteni, t. i. a közös *lm* átlónak egyik vagy másik oldalára, s eképen 4 sokszög állana elő: de ez bővebb vizsgálat után nem áll, minthogy az emlitett esetekben az I sokszög szögei jellemöket megváltoztatják, t. i. a belsők külsőkké lesznek és megfordítva; tehát az egyik összeillesztés a feladat feltételeinek nem felel meg.

29. §.

Feladat: Oldassék fel egy olyan sokszög, melyben három ösmeretlen szög van.

Feloldás: Legyenek a 9. ábrában (m), (p), (n) szögek ösmeretlenek, s húzzuk az mn, mp és np átlókat; ezek által a sokszög három sokszögre és egy háromszögre osztatik, melyek közül az elsőbbekben egy oldal a mellette fekvő szögekkel, az utóbbiban pedig minden kerületi darabok ösmeretlenek. A sokszögek feloldása által kijönnek az átlók és a mellette lévő szögek α, β, γ, δ, ε, ζ. Ezután a háromszöget fel lehet oldani, miután már az oldalak ösmeretesekké lettek, s a három szögeket η, ϑ, $\varkappa$ ki lehet számitni. Ezen részletes szögekből a sokszög szögei összeadás által állanak elő, t. i.:

$$(m) = \alpha + \eta + \zeta,$$
$$(n) = \beta + \vartheta + \gamma, - 360^0,$$
$$(p) = \delta + \varkappa + \varepsilon,$$

mely kifejezésekben az előbbi §. módjára megjegyzendő, hogy ha az összeg 360^0-ot meghaladna, ezt el kell hagyni, és csak a feleslegét kell megtartani.

Ezen feloldáson kivül még egy másik is létezik; ha t. i. a háromszög külszögei, vagyis $360^0 - \eta$, $360^0 - \vartheta$ és $360^0 - \varkappa$ tétetnek a fentebbi képletekbe, egy más sokszög áll elő, mely a feladat feltételeinek hasonlóképen megfelel.

30. §.

Feladat. Derékszögü öszrendezőkből a körületi darabokat kiszámitni.

Feloldás. Valamely oldal meghatározására a mértan azon képlete szolgál, mely két pont egymástóli távját fejezi ki, t. i.:

$$(m-1, m)^2 = (y_m - y_{m-1})^2 + (x_m - x_{m-1})^2 \;.\;.\;.\;.\; \odot$$

Ugyanezen úton lehet valamely átlót is meghatározni, ha $m-1$ és m helyett a szögpontok mutatói tétetnek.

Az (m) szög meghatározása végett állanak a 22. §. $\odot'$ képletek szerint.

$$y_m - y_{m-1} = (-1)^{m-1} (m-1, m) \sin [(0) + (1) + \ldots + (m-1)],$$
$$x_m - x_{m-1} = (-1)^{m-1} (m-1, m) \cos [(0) + (1) + \ldots + (m-1)],$$
$$y_{m+1} - y_m = (-1)^m \quad (m, m+1) \sin [(0) + (1) + \ldots + (m-1) + (m)],$$
$$x_{m+1} - x_m = (-1)^m \quad (m, m+1) \cos [(0) + (1) + \ldots + (m-1) + (m)].$$

Szorozzuk a második egyenletet a harmadikkal, és vonjuk ki belőle az elsőnek a negyedikkeli szorzatát, akkor lesz:

$$sin(m) = \frac{(x_{m+1} - x_m)(y_m - y_{m-1}) - (y_{m+1} - y_m)(x_m - x_{m-1})}{(m+1, m)(m, m-1)}. \;☽$$

Hasonlóképen szorozzuk a másodikat a negyedikkel, s adjuk hozzá az elsőnek a harmadikkali szorzatát; akkor lesz:

$$cos(m) = -\frac{(x_{m+1} - x_m)(x_m - x_{m-1}) + (y_{m+1} - y_m)(y_m - y_{m-1}}{(m+1, m)(m, m-1)}. \;☽'$$

Ezen egyenletek a szöget kétségtelenül meghatározzák. Oszszuk el a sinust a cosinussal, akkor elő áll:

$$tg\,(m) = \frac{(x_{m+1} - x_m)(y_m - y_{m-1}) - (y_{m+1} - y_m)(x_m - x_{m-1})}{-(x_{m+1} - x_m)(x_m - x_{m-1}) - (y_{m+1} - y_m)(y_m - y_{m-1})}. \;☽''$$

mely kifejezésben a számláló és nevező jegyei a sinus és cosinuséival megegyezvén, a szög negyedét egész biztonsággal meghatározzák.

Ugyanezen képletek szerint lehet valamely két átló közti szöget is kifejezni, csak a mutatókat kell illetőleg felcserélni.

31. §.

Feladat. A körületi darabokból a sokszög területét kiszámitni.

Feloldás. Húzzunk a 10. ábrában az öszrendezők kezdő pontjából minden szögponthoz átlókat; akkor a sokszög háromszögekre oszlik, melyeknek területét sorjában I, II, III . . . jelekkel akarjuk jelelni. Húzzunk továbbá a kezdő pontból minden oldalra függőlegeseket p_1, p_2, p_3 . . .; akkor lesznek:

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{I} &= (1,2)\,p_1, \\ 2\,\mathrm{II} &= (2,3)\,p_2, \\ 2\,\mathrm{III} &= (3,4)\,p_3, \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Tekintsük az 1, 2, 3 . . . szögpontokat sorjában ugyanannyi öszrendező rendszerek kezdetéül, és az 1,2; 2,3; 3,4; . . . vonalakat az x tengelyek állitó irányául; akkor p_1, p_2, p_3, . . . nem egyebek, mint a 0 szögpontnak ezen rendszerekre vonatkozó rendezői, s a rendezők képlete szerint ezen kifejezésekhez jutunk:

$p_1 = (1,0)\ sin\ (1),$

$p_2 = (2,1)\ sin\ (2) - (1,0)\ sin\ [(2)+(1)],$

$p_3 = (3,2)\ sin\ (3) - (2,1)\ sin\ [(3)+(2)]+(1,0)\ sin\ [(3)+(2)+(1)],$

. . . .

. . . .

Ezen kifejezéseket helyettesitvén a fentebbi egyenletekbe, és ezeket összeadván, rövid rendezés után előáll a sokszög kettős területe:

$$\begin{aligned}2T &= (0,1)\ (1,2,\ sin\ (1) - (0,1)\ (2,3)\ sin\ [(1)+(2)]+ \ldots\ldots \\ &\pm (0,1)\ (n-1,\ n)\ sin\ [(1)+(2)+\ldots+(n-1)] \\ &+ (1,2)\ (2,3)\ sin\ (2) - (1,2)\ (3,4)\ sin\ [(2)+(3)]+ \ldots\ldots \\ &\mp (1,2)\ (n-1,\ n)\ sin\ [(2)+(3)+\ldots+(n-1)] \\ &+ (2,3)\ (3,4)\ sin\ (3) - (2,3)\ (4,5)\ sin\ [(3)+(4)]+ \ldots\ldots \\ &\pm (2,3)\ (n-1,\ n)\ sin\ [(3)+(4)+\ldots+(n-1)] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (n-2,\ n-1)\ (n-1,\ n)\ sin\ (n-1)\ \ldots\ldots \odot\end{aligned}$$

vagy szavakban: A sokszög kettős területe = egy oldal elhagyása után képezhető minden oldalpároknak s a közbezárt szögösszeg sinusának szorzatából képezett összeggel, minden egyes tagot — vagy + jellel véve aszerint, amint a bezárt szögek száma páros vagy páratlan.

Ezen képlet szerint lehet kiszámitni valamely sokszögnek egy átló által elmetszett, valamint két átló közt befoglalt részét is.

32. §.

Feladat. Derékszögü öszrendezőkből a sokszög területét kiszámitni.

Feloldás. Huzzunk a 11. ábrában minden szögpontból függőlegeseket az x tengelyre, ezek a sokszöget trapeziumokra osztják, melyeknek területét I, II, III . . . P, Q jelekkel fogjuk jelelni. Ugyde

$$\begin{aligned}2\ \mathrm{I} &= (y_0+y_1)\ (x_1 - x_0), \\ 2\ \mathrm{II} &= (y_1+y_2)\ (x_2 - x_1), \\ 2\ \mathrm{III} &= (y_2+y_3)\ (x_3 - x_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2P &= (y_{n-1}+y_n)\ (x_n - x_{n-1}), \\ 2Q &= (y_n+y_0)\ (x_0 - x_n).\end{aligned}$$

Adjuk össze ezen egyenleteket, és rendezzük az y mutatói szerint; akkor a sokszög kettős területe lesz:

$$(2T = y_0(x_1 - x_n) + y_1(x_2 - x_0) + y_2(x_3 - x_1) + \ldots + y_n(x_0 - x_{n-1}) \ldots \odot$$

vagy szavakkal: A sokszög kettős területe = minden egyes rendezőnek a két szomszéd pont metszékei különbségével képzett szorzatának összegével.

Összehasonlitván ezen két térszámitási képletet egymással, kitünik, hogy az utóbbi egyszerűbb és rövidebb az elsőnél, mihelyt a sokszög oldalainak száma 7-et meghalad, még akkor is, ha az öszrendezőket előbb a kerületi darabokból kellene kiszámitni.

II. SZAKASZ.

Hibák elmélete.

* 33. §.

A gyakorlati irányu tanokban nem elég a feladatot feloldani, hanem módot is kell szolgáltatni a feloldás pontosságának megitélésére. Minden emberi munka gyarló, ennélfogva minden mérés eredménye tökéletlen, és kisebb nagyobb hibáknak van kitéve. Minthogy pedig a sokszög meghatározására szükséges adatok mérés által határoztatnak meg, elkerülhetlen, hogy az adatok hibái miatt az ösmeretlenek is hibásan ne jőjjenek ki. Fontos kérdés tehát, milyen befolyást gyakorolnak az adatok hibái az ösmeretlenekre? hogy e szerint a kényesebbeket közöttök kiesmervén, azoknak megmérésére több gondot lehessen fordítni. Meg kell jegyezni, hogy itt csak olyan kis hibákról van szó, melyekért a mérnök jót nem állhat; később a tetemes vagy szarvas hibák felfedezéséről és kijavitásáról is fogunk szólani.

* 34. §.

A 21. §. $\odot$ képlete szerint:

$$X = (n-2v)\,180^0 - (A+B+C+\ldots\ldots).$$

Tegyük fel, hogy mérés által A helyett hibásan $A + \triangle A$ találtatott, tehát a mérési hiba $\triangle A$, akkor X helyett is egy hibás eredmény $X + \triangle X$ fog kijönni, hol $\triangle X$ az eredmény hibáját jelenti; tehát lesz:

$$X + \triangle X = (n-2v)\ 180^0 - (A + \triangle A + B + C \ldots).$$

Ezen egyenleteket egymásból kivonván, lesz:

$$\triangle X = -\triangle A \ldots : \odot$$

mely eredmény azt mutatja, hogy ha valamely sokszögben minden szög egyen kivül meg van mérve, és egy szögben hiba történt, az ösmeretlen szögben épen olyan nagy, de ellenkező jelü hiba fog mutatkozni.

* 35. §.

Ha valamely sokszög körületében egy oldal hibás, akkor minden következő pont párhuzamosan mozdul el helyéről, és a szögpontok öszrendezői mind hibásak lesznek. Ábrázolja a 12. ábrában a kihúzott vonal a hibátlan, a pontozott pedig a hibás sokszögnek egy részét, legyen tehát $(h-1, h)$ hibás, hh' a hiba: akkor az m pont helyett m', annak öszrendezői mP, oP helyett $m'P'$, oP' fognak előállani. Húzzunk m-ből az x tengelyhez egyközüt; akkor egy derék háromszög $mm'p$ — hiba háromszög — keletkezik, melynek oldalai a szóban levő hibákat, t. i.

$$\left.\begin{array}{l} mm' \,\#\, hh' = \triangle\,(h-1, h) \text{ a } (h-1, h) \text{ oldalban ejtett} \\ \left.\begin{array}{l} m'p = \triangle y_m \text{ a rendezőben} \\ mp = \triangle x_m \text{ a metszékben} \end{array}\right\} \text{keletkező} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{hibákat} \\ \text{ábrázol-} \\ \text{ják.} \end{array}$$

Nevezzük az $m'\ m\ p$ szöget, melyet $m\ m'$ az x tengely állitó irányával képez, α-nak, akkor az $m'\ m\ p$ háromszögben ezen egyenletek állanak:

$$(m', p) = (m, m')\ sin\ \alpha,$$
$$(m, p) = (m, m')\ cos\ \alpha.$$

Ezen kifejezésekben a fentebbi mennyiségeket helyettesitvén, és figyelembe vévén, hogy a 22. §. $\mathfrak{d}$ képletek nyomán

$$sin\ \alpha = (-1)^{h-1}\ sin\ [(0)+(1)+\ldots+(h-1)],$$
$$cos\ \alpha = (-1)^{h-1}\ cos\ [(0)+(1)+\ldots+(h-1)];$$

végre lesz:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle y_m = (-1)^{h-1}\ \triangle\ (h-1, h)\ sin\ [(0)+(1)+\ldots+(h-1)] \\ \triangle x_m = (-1)^{h-1}\ \triangle\ (h=1, h)\ cos\ [(0)+(1)+\ldots+(h-1)] \end{array}\right\} \odot$$

* 36. §.

Ha egy sokszögbea valamelyik szög hibás, akkor minden következő pont körívben mozdul ki helyéből, melynek középpontja a szög csúcsa, sugára pedig a pontnak a hibás szögponttóli távja. Jelentse a 13. ábrában a kihúzott vonal a hibátlan, a pontozott pedig a hibás sokszöget, (h) a hibás szöget, $m'hm$ szög a hibát, mP, oP az m pontnak, $m'P'$, oP' pedig az m' pontnak öszrendezőit; húzzunk m-ből az x tengelyhez, h-ból az y tengelyhez egyközüket, és nevezzük az $m\ m'$ és az x tengely állító iránya közti szöget α-nak; akkor az $m\ m'\ p$ háromszögben ezen kitételekhez jutunk:

$$(m', p) = (m, m') \sin \alpha$$
$$(m, p) = (m, m') \cos \alpha;$$

ugyde $(m', p) = \Delta y_m$, $(m, p) = \Delta x_m$, $(m, m') = (h, m)\,\Delta\,(h)$, és $\alpha = m'm\ p = m\ h\ q$, a szárak egymásra függőlegesen állván; tehát

$$\sin \alpha = \sin m\ h\ q = \frac{(q,\ m)}{(h,\ m)} = \frac{x_m - x_h}{(h,\ m)},$$

$$\cos \alpha = \cos m\ h\ q = \frac{(h,\ q)}{(h,\ m)} = -\frac{y_m - y_h}{(h,\ m)};$$

ezen kifejezéseket helyettesitvén, lesz:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta y_m = (x_m - x_h)\ \Delta(h) \\ \Delta x_m = -\ (y_m - y_h)\ \Delta(h) \end{array}\right\} \ldots .\ \odot$$

* 37. §.

Ha egy sokszögben két oldal és egy szög ösmeretlen, továbbá egy oldal hibás, a hibák közti összefüggést ilyen módon lehet feltalálni. Legyen a 14-ik ábrában a kihúzott vonalakkal a hibátlan sokszög ábrázolva, melyben $(0,n)$, $(k-1,\ k)$ és (m) ösmeretlenek. Ha most a $(h-1,\ h)$ oldalt egy darabkával $h\ h'$ meghosszabitjuk, az egész $h \ldots m$ szárny párhuzamosan fog helyéből kimozdulni, s az m pont m'-be jutni, hol $m\ m' \;\#\; hh'$. De ezen változás által a sokszögnek ki kell nyilni, minthogy a balszárny m'-ben, a jobb pedig m-ben végződik, hogy tehát bezáródjék, szükség az ösmeretlen darabokat is kellőleg változtatni. Könnyű belátni, hogy m-ből $k-1$, k-hoz, és m'-ből $0,n$-hez egyközüket kell húzni, s ekkor $m\,m''$ a $(k—1, k)$-ban, $m''\,m'$ pedig a $(0,n)$-ban szükséges változást, tehát $m\,m'\,m''$ a hibaháromszöget ábrázolandják. Mert ha a $k—1 \ldots m$ szárny a $k, k—1$ oldal hosszában pázhuzamosan tolatik, mig m, m''-höz jut, azután az egész $n \ldots k \ldots m''$ szárny $0n$ irányában szintén párhuzamosan mozdíttatik, valahára m''-nek m'-re kell esni, s a sokszögnek be kell záródni.

Az $m\,m'\,m''$ háromszög alkotó részei közt következő összefüggés létezik:

$$(m, m')\,sin\,m' = (m, m'')\,sin\,m'',$$
$$(m, m')\,cos\,m' + (m, m'')\,cos\,m'' = (m'', m').$$

Jelentsék $\triangle\,(h—1, h)$, $\triangle\,(k—1, k)$, $\triangle\,(0,n)$ az oldalakban létező hibákat, továbbá α, β, a $h—1, h$ és $k—1, k$ oldalak állitó irányainak az x tengely állitó irányáhozi hajlásszögeit, akkor a fentebbiek szerint:

$$(m,m') = \triangle\,(h—1, h),\ (m,m'') = \triangle(k—1, k),\ (m'',m') = \triangle\,(0,n),$$
$$m' = \alpha, \qquad m'' = 360^{0} — \beta,$$

és az előbbi egyenleteket igy is lehet irni:

$$\triangle\,(h—1, h)\,sin\,\alpha = —\triangle\,(k—1, k)\,sin\,\beta,$$
$$\triangle\,(h—1, h)\,cos\,\alpha + \triangle\,(k—1,k)\,cos\,\beta = \triangle\,(0,n),$$

Ugyde a 22. §. δ képletei szerint:

$$sin\,\alpha = (—1)^{h—1} sin\,[(0) + (1) + \ldots + (h—1)],$$
$$cos\,\alpha = (—1)^{h—1} cos\,[(0) + (1) + \ldots + (h—1)],$$
$$sin\,\beta = (—1)^{k—1} sin\,[(0) + (1) + \ldots + (k—1)],$$
$$cos\,\beta = (—1)^{k—1} cos\,[(0) + (1) + \ldots + (k—1)],$$

ezen kifejezéseket helyettesitvén, és az egyenletekből $\triangle\,(k—1, k)$ és $(0,n)$-et kikeresvén, származnak:

$$\left.\begin{aligned}
\triangle\,(k—1, k) &= (—1)^{h—k—1} \frac{sin[(0)+(1)+(2)+\ldots+(h—1)]}{sin[(0)+(1)+(2)+\ldots+(k—1)]}\triangle(h—1,h)\\
\triangle\,(0, n) &= (—1)^{h—1} \frac{sin[(h)+(h+1)+\ldots+(k—1)]}{sin[(0)+(1)+\ldots\ldots+(k—1)]}\triangle(h—1,h)\\
\text{vagy} &= (—1)^{h—1} \frac{sin[(k)+(k+1)+\ldots+(h—1)]}{sin[(0)+(1)+\ldots\ldots+(k—1)]}\triangle(h—1,h)
\end{aligned}\right\}\odot$$

Megjegyzésre méltó azon körülmény, hogy ha a hibás és ösmeretlen oldalak meghosszabbíttatnak, mig egymást metszik, egy a hiba háromszöghöz hasonló háromszög áll elő, ennek oldalai tehát az illető hibákkal egyenes viszonyban állanak.

* 38. §.

Ha valamely sokszögben két oldal és egy szög ösmeretlen, egy szög pedig hibás, akkor a hibák közti összefüggést igy lehet feltalálni. Húzzunk a 15-dik ábrában a hibás h szögpontból hm átlóval körívet, melynek középponti szöge a h-ban lévő hiba legyen, akkor az m pont az m'-be fog menni; ezután húzzunk az m, m' pontokon keresztül egyközüket a k, $k-1$ és $0,n$ ösmeretlenekhez, akkor az $mm'm''$ hibaháromszög áll elő, melynek oldalai a kérdéses hibákat ábrázolják, ugy hogy $(m, m') = (h, m) \triangle (h), (m, m'') = \triangle (k-1, k), (m', m'') = \triangle (0,n)$ leend, mely jelek már az előbbi §§-sokból ösmeretesek.

Az $mm'm''$ háromszögben következő egyenleteket lehet megállapitani:

$$(m,m') \sin m' = (m,m'') \sin m'',$$
$$(m,m') \cos m' + (m,m'') \cos m'' = (m', m'').$$

Húzzunk az m pontból az x, a h pontból pedig az y tengelyhez egyközüket, és nevezzük azon szögeket, melyeket mm' és $k-1, k$ az x tengely állitó irányával képeznek α és β-nak, akkor az idom szerint:

$$m, = \alpha, \qquad m'' = 360^0 - \beta,$$

tehát
$$\sin m' = \sin \alpha = \frac{(q,m)}{(h,m)} = \frac{x_m - x_h}{(h,m)},$$
$$\cos m' = \cos \alpha = \frac{(h, q)}{(h,m)} = -\frac{(y_m - y_h)}{(h,m)},$$

$$\sin m'' = -\sin \beta = -(-1)^{k-1} \sin [(0)+(1)+\ldots+(k-1)],$$
$$\cos m'' = \cos \beta = (-1)^{k-1} \cos [(0)+(1)+\ldots\ldots\ldots+(k-1)].$$

Ezen kifejezéseket helyettesitvén, és az egyenletekből $\triangle (k-1, k)$ és $\triangle (0,n)$ ösmeretleneket kikeresvén, származnak:

$$\left.\begin{aligned} \triangle (k-1, k) &= -(-1)^{k-1} \frac{x_m - x_h}{\sin [(0)+(1)+\ldots+(k-1)]} \triangle (h) \\ \triangle (0,n) &= -\frac{[(y_m - y_h) \sin [(0)+\ldots+(k-1)] + (x_m - x_h) \cos [(0)+\ldots+(k-1)]}{\sin [(0)+(1)+\ldots+(k-1)]} \triangle (h) \end{aligned}\right\} \odot$$

Itt is megemlitendő, hogy ha a hm átlóra függőlegest húzunk, és a $k-1$, k és $0,n$ oldalakat meghosszabbitjuk, mig ezek egymást metszik, egy a hiba háromszöghöz hasonló háromszög áll elő, melynek oldalai tehát a hibák közötti viszonyt ábrázolják.

* 39. §.

Miután az előbbi §§-ban a hibák közt létező összefüggés bővebben előadatott, a következő vizsgálatokban rövidebbek lehetünk.

Ha valamely sokszögben (16. ábra) egy oldal $(0,n)$ és két szög (k), (m) ösmeretlenek, egy oldal pedig hibás, akkor a hibaháromszögben $(m,m') = \triangle\,(h-1, h)$, $(m,m'') = (k,m)\,\triangle\,(k)$ a $k\,m$ átlóra függőleges, és $(m'm'') = \triangle\,(0,n)$ a $0n$ oldallal egyközü leend. Ezen háromszögben állanak ezen egyenletek:

$$(m,m')\,\sin m' = (m,m'')\,\sin m'',$$
$$(m,m')\,\cos m' + (m,m'')\,\cos m'' = (m'',m').$$

Ugyde $\quad m' = 360^0 - \beta \qquad m'' = \alpha,$

tehát:

$$\sin m' = -\sin\beta = -(-1)^{h-1}\sin\left[(0)+(1)+\ldots+(h-1)\right],$$
$$\cos m' = \cos\beta = (-1)^{h-1}\cos\left[(0)+(1)+\ldots+(h-1)\right]$$
$$\sin m'' = \sin\alpha = \frac{(k,q)}{(k,m)} = \frac{x_m - x_k}{(k,m)},$$
$$\cos m'' = \cos\alpha = \frac{(q,m)}{(k,m)} = \frac{y_m - y_k}{(k,m)}.$$

Ezen kifejezéseket helyettesitvén, s az egyenletekből $\triangle\,(k)$, $\triangle\,(0,n)$-kat keresvén, származnak:

$$\left.\begin{aligned}\triangle(k) &= -(-1)^{h-1}\frac{\sin\left[(0)+(1)+\ldots+(h-1)\right]}{x_m - x_k}\triangle(h-1,h) = -\triangle(m)\\ \triangle(0,n) &= (-1)^{h-1}\frac{(y_m-y_k)\sin\left[(0)+\ldots+(h-1)\right]+(x_m-x_k)\cos\left[(0)+\ldots+(h-1)\right]}{x_m - x_k}\triangle(h-1,h)\end{aligned}\right\}\odot$$

A hibaháromszög ezen esetben is hasonló azon háromszöghöz, melyet az ösmeretlen oldal, a hibás oldal és az ösmeretlen szögeket összekötő átlóra függőleges vonal zárnak be egymás közt.

* 40. §.

Hasonlóképen ha a mult §. sokszögében (17. ábra) egy szög (h) hibás, akkor a hibaháromszög $m\,m'\,m''$ két körivecskéből, melyek a hm és km átlókra függőlegesek, és egy, az $0n$ oldalhoz egyközü egyenes vonalból lesz öszvetéve; tehát $(m,m') = (h,m)\,\triangle\,(h)$, $(m,m'') = (k,m)\,\triangle\,(k)$, $(m',m'') = \triangle\,(0,n)$, továbbá $m' = \alpha$ és $m'' = \beta$, mivel a megfelelő szárak egymásra függőlegesen állanak. Ezen háromszögből következik:

$$(m,m')\,\sin m' = (m,m'')\,\sin m'',$$
$$(m,m')\,\cos m' + (m,m'')\,\cos m'' = (m',m'').$$

Ugyde

$$sin\ m'\ sin\ \alpha = \frac{(p,m)}{(k,m)} = -\frac{x_m - x_h}{(h,m)},$$

$$cos\ m'\ cos\ \alpha = \frac{(h,p)}{(hm,)} = -\frac{y_m - y_h}{(h,m)},$$

$$sin\ m''\ sin\ \beta = \frac{(q,m)}{(k,m)} = \frac{x_m - x_k}{(k,m)},$$

$$cos\ m''\ cos\ \beta = \frac{(k,q)}{(k,m)} = -\frac{y_m - y_k}{(k,m)}.$$

Ezen kifejezéseket helyettesitvén, és az egyenletekből $\triangle(k)$, $\triangle(0,n)$ mennyiségeket keresvén, ellőállanak:

$$\left.\begin{aligned} \triangle(k) &= -\frac{x_m - x_h}{x_m - x_h}\triangle(h), \\ \triangle(0,n) &= \left(\frac{(x_m - x_h)(y_m - y_k) - (x_m - x_k)(y_m - y_h)}{x_m - x_k}\triangle(h) \right. \\ \triangle(m) &= \frac{x_k - x_k}{x_m - x_k}\triangle(h). \end{aligned}\right\} \odot$$

Ezen utóbbi képlet az elsőből egyszerű betücsere által származik; de más uton is lehet hozzá jutni. A 34. §. $\odot$-ból t. i. következik, ha két szöget veszünk hibásnak:

$$\triangle X = -\triangle A - \triangle B,$$

jelen esetben $\triangle A = \triangle(h)$, $\triangle B = \triangle(k)$, $\triangle X = \triangle(m)$, tehát ezeket helyettesitvén, a fentebb talált képlet áll elő.

A hibaháromszög ezen esetben is hasonló oly háromszöghöz, mely a *hm* és *km* átlókra függőleges vonalak, és az ösmeretlen $0n$ oldal által képeztetik.

* 41. §.

Ha a sokszögben (18. ábra) 3 szög (k), (l), (m) ösmeretlen és egy oldal $(h-1, h)$ hibás, akkor a hibaháromszög $m\ m'\ m''$ egy egyenes vonalból, és két körivecskéből van öszvetéve, melyek közül az első az oldalhibával egyközü és egyenlő, az utóbbiak pedig a *km* és *lm* átlókra függőlegesen állanak; tehát $(m, m') = \triangle(h-1, h)$, $(m, m'') = (l, m)\ \triangle(l)$, $(m'', m') = (k, m)\ \triangle(k)$. Az $m''\ m'$ ív sugára ugyan szorosan véve $> (k, m)$, és $<$ legfeljebb $= (k, m) + (m, m')$: de minthogy a feltétel szerint (m, m') igen kicsi, szabad ezt (h, m) mellett mindig elhanyagolni.

Húzzunk a $h-1$, m', m'' pontokból az x tengelyhez, a k, l, m', m'' pontokból pedig az y tengelyhez egyközüket, akkor az idomban következő összefüggés látható:

$$(m'', r) = (m'', t) + (m', s)$$
$$(m', t) = (m, r) + (m, s).$$

Ugyde

$$(m'', r) = (m, m'') \sin\gamma, \qquad (m, r) = (m, m'') \cos\gamma,$$
$$(m'', t) = (m', m'') \sin\beta, \qquad (m', t) = (m', m'') \cos\beta,$$
$$(m', s) = (m, m') \sin\alpha, \qquad (m, s) = (m, m') \cos\alpha,$$

továbbá

$$\sin\gamma = \frac{(m,q)}{(l,m)} = -\frac{(x_m - x_l)}{(l,m)}, \qquad \cos\gamma = \frac{(l,q)}{(l,m)} = -\frac{(y_m - y_l)}{(l,m)},$$
$$\sin\beta = \frac{(m,p)}{(k,m)} = \frac{(x_m - x_k)}{(k,m)}, \qquad \cos\beta = \frac{(k,p)}{(k,m)} = \frac{y_m - y_k)}{(k,m)},$$
$$\sin\alpha = (-1)^{h-1} \sin\left[(0)+(1)+..+(h-1)\right], \cos\alpha = (-1)^{h-1} \cos\left[(0)+(1)+..+(h-1)\right].$$

Ezen kifejezéseket helyettesitvén, és az egyenletekből a $\triangle(k)$ és $\triangle(l)$ értékeit keresvén, találtatnak:

$$\left.\begin{aligned}
\triangle_{(k)} &= -(-1)^{h-1} \frac{(y_m - y_l)\sin\left[(0)+..+(h-1)\right] + (x_m - x_l)\cos\left[(0)+..+(h-1)\right]}{(y_m - y_l)(x_m - x_k) - (x_m - x_l)(y_m - y_k)} \triangle_{(h-1,h)} \\
\triangle_{(l)} &= (-1)^{h-1} \frac{(y_m - y_k)\sin\left[(0)+.+(h-1)\right] + (x_m - x_k)\cos\left[(0)+..+(h-1)\right]}{(y_m - y_l)(x_m - x_k) - (x_m - x_l).(y_m - y_k)} \triangle_{(h-1,h)} \\
\triangle_{(m)} &= -(-1)^{h-1} \frac{(y_l - y_k)\sin\left[(0)+..+(h-1)\right] + (x_l - x_k)\cos\left[(0)+..+(h-1)\right]}{(y_m - y_l)(x_m - x_k) - (x_m - x_l)(y_m - y_k)} \triangle_{(h-1,h)}
\end{aligned}\right\} \odot$$

Ezen utóbbi képlet az előbbiekből egyszerű betücsere által származtatható; egyébaránt ugyanazon eredmény jön ki, ha a 34. §. $\odot$ képletében két szög vétetik hibásnak, t. i.

$$\triangle X = -\triangle A - \triangle B,$$

és $\triangle A = \triangle(k)$, $\triangle B = \triangle(l)$, $\triangle X = \triangle(m)$ helyettesittetnek. Megjegyzendő továbbá, hogy ha a hibás oldalt meghosszabitjuk, s a *km* és *lm* átlókra függőlegeseket húzunk, a hibaháromszöghöz hasonló háromszög áll elő.

* 42. §.

Ha az előbbi §. sokszögében egy szög (h) hibás, akkor a hibaháromszög $mm'm''$ három körív által képeztetik, melyek a *hm*, *km* és *lm* átlókra függőlegesek; úgy, hogy $(m, m') = (hm) \triangle h$,

$(m,m'') = (l,m)\ \triangle\ (l)$, és $(m'',m') = (k,m)\ \triangle\ (k)$. Az $m'm''$ ív sugárát illetőleg az előbbi §-ban tett megjegyzés itt is érvényes. Húzzunk a 19. ábrában m, m' pontokból az x tengelyhez, továbbá a k, h, l, m', m'' pontokból az y tengelyhez egyközüket, akkor a keletkező idomban következő összefüggés látható:

$$(m''r) = (m', s) + (m'', t)$$
$$(m'\ t) = (m,\ s) + (m,\ r).$$

Ugyde

$$(m'', r) = (m,\ m'')\ sin\ \gamma, \qquad (m', t) = (m', m'')\ cos\ \alpha,$$
$$(m',\ s) = (m,\ m'\ )\ sin\ \beta, \qquad (m, s) = (m,\ m'\ )\ cos\ \beta,$$
$$(m'', t) = (m', m'')\ sin\ \alpha, \qquad (m, r) = (m,\ m'')\ cos\ \gamma;$$

továbbá

$$sin\ \alpha = \frac{(m,\ p)}{(k,\ m)} = \frac{x_m - x_k}{(k, m)}, \qquad cos\ \alpha = \frac{(k,\ p)}{(k,\ m)} = \frac{y_m - y_k}{(k, m)},$$
$$sin\ \beta = \frac{(m,\ q)}{(h,\ m)} = \frac{x_m - x_h}{(h, m)}, \qquad cos\ \beta = \frac{(h,\ q)}{(h,\ m)} = \frac{y_m - y_h}{(h, m)},$$
$$sin\ \gamma = \frac{(m,\ u)}{(l,\ m)} = \frac{x_m - x_l}{(l,\ m)}, \qquad cos\ \gamma = \frac{(l,\ u)}{(l, m)} = \frac{y_m - y_l}{(l,\ m)},$$

Ezen kifejezéseket helyettesitvén, és az egyenletekből $\triangle\ (k)$ és $\triangle\ (l)$ értékeit keresvén, származik:

$$\left.\begin{aligned} \triangle\ (k) &= -\ \frac{(x_m - x_h)(y_m - y_l) - (y_m - y_h)(x_m - x_l)}{(x_m - x_k)(y_m - y_l) - (y_m - y_k)(x_m - x_l)}\ \triangle(h) \\ \triangle\ (l) &= \frac{(x_m - x_h)(y_m - y_k) - (y_m - y_h)(x_m - x_k)}{(x_m - x_k)(y_m - y_l) - (y_m - y_k)(x_m - x_l)}\ \triangle(h) \\ \triangle\ (m) &= -\ \frac{(x_k - x_h)(y_l - y_h) - (y_k - y_h)(x_l - x_h)}{(x_m - x_k)(y_m - y_l) - (y_m - y_k)(x_m - x_l)}\ \triangle(h) \end{aligned}\right\}\odot$$

Ezen utóbbi képlet az előbbiekből egyszerű betücsere által származtatható; egyébaránt ugyanaz jön ki, ha a 34. §. $\odot$ képletben három szög hibásnak vétetik, u. m.

$$\triangle X = -\triangle A - \triangle B - \triangle C$$

és $\triangle A = \triangle(h)$, $\triangle B = \triangle(k)$, $\triangle C = \triangle(l)$ értékek helyettesittetnek.

Végre megjegyzendő, hogy ha a *hm, km, lm* átlókra függőlegeseket húzunk, a hibaháromszöghöz hasonló háromszög áll elő.

43. §. Szarvas hibák.

Eddig a hibákat olyan kicsinyeknek tekintettük, hogy azok a legjobb mérésben is előfordulhatnak, tehát a mérnököt érettök feleletre vonni nem lehet. De néha minden figyelem daczára olyan szarvas hiba is becsúszik a mérésbe, melyet elnézni nem lehet, nem szabad. Hogy valahol hiba történt, sokszor már azon körülményből is kitetszik, hogy az adatokból sokszöget alkotni nem lehet, de többnyire próbamérések vezetnek annak ösméretére.

Tudniillik a szükséges $2n-3$ darabokon kivül még a többi szükségfelettiek is megméretnek, s az eredmény a számitás vagy szerkesztésével öszvehasonlittatik. Ha a különbség olyan nagy, hogy az az elkerülhetlen hibákból ki nem magyarázható: akkor bizonyosan valahol nagyobb hiba történt.

Most tehát az a kérdés, fel lehet-e a hibát fedezni a nélkül, hogy az egész mérést ismételni kellene, vagy nem?

A felelet következő:

a) Ha a sokszögben egy szükségfeletti darab van megmérve, tehát még két darab ösmeretlen, tegyük fel a három alapegyenletet, és gondoljuk belőlük a két ösmeretlen darabot kiküszöbölve: ekkor egy egyenlet származik, mely csupán ösmeretes darabokat foglal magában. Ha ezen darabok hibátlanok, akkor az egyenlet helyes fog lenni, azaz annak szárnyai egyenlő öszszegeket fog adni; ellenkező esetben pedig ellent fognak mondani egymásnak. Ezen ellentmondást el lehet háritni, ha a hibás adatot kiigazítjuk; de ezenkivül akár melyik más darabnak változtatása is ugyanazon czélhoz vezet. Tehát ezen jelenség nem elegendő a hiba fészkének kimutatására, ámbár a hiba jelenlétét kétségen kivül helyezi.

b) Ha a sokszögben két szükségfeletti darab van megmérve, tehát még egy darab ösmeretlen, gondoljuk az ösmeretlent minden egyes ösmeretes darabbal párosítva, s ezen párokat a három alapegyenletből kiküszöbölve; akkor minden egyes kiküszöbölés eredménye más-más egyenlet leend, melyek csupa ösmeretes mennyiségeket foglalnak magokban. Ezen egyenletek közül csak egy leend helyes, t. i. az, mely a hibás adat kiküszöböléséből eredt, a többiek mind ellentmondók, minthogy a hibás darab által elrontattak. Ezen esetben tehát egy hiba helyét bizton fel lehet fedezni, kivévén; ha mind az ösmeretlen mind a hiba oldalakba esnének, mert a három egyenletből ezen oldalpárt ki nem lehetne küszöbölni, egy egyenlet csupán szögeket tartalmazván. Az eredményző egyenlet tehát még mindig ellentmondó, következésképen a hiba helye kimutatható nem volna. Ugyanaz áll akkor is, ha a mérésben két vagy több hiba történt.

c) Ha három szükségfeletti tag van megmérve, és egy darab hibás, akkor gondoljunk a három alapegyenletből egyenként minden adott darabot kiküszöbölve; az eredmény az leend, hogy midőn a hibás darab kiküszöböltetik, helyes, minden más esetben pedig ellentmondó egyenletek származnak. Egy hibát tehát mindig fel lehet fedezni.

Ha két adatott darab hibás, akkor gondoljunk az adatokból minden lehető párokat képezve, és küszöböljük ki ezeket sorjában a három alapegyenletből. Az eredmény az leend, hogy mikor a hibás pár kiküszöböltetik, helyes, minden más esetben pedig ellentmondó egyenlet áll elő. Tehát két hibát is fel lehet a sokszögben fedezni, ha csak mind a kettő nem oldalban fekszik, minthogy ezen esetben a fentebb emlitett oknál fogva a kiküszöbölés lehetetlen lenne.

Hasonló oknál fogva nem lehet három vagy több hibát fölfedezni.

44. §.

Ennélfogva 7 esetben lehet a hibát felfedezni:

1) Ha minden körületi tag meg van mérve, és 1 szög hibás,
2) » » » » » » » » 1 oldal »
3) » 1 oldal ösmeretlen, és 1 szög hibás,
4) » 1 szög » » 1 » »
5) » 1 » » » 1 oldal »
6) » minden körületi darab meg van mérve, és 1 oldal és 1 szög hibás,
7) » minden körületi darab meg van mérve, » 2 szög hibás.

45. §.

Feladat. Egy sokszögben minden körületi darab meg van mérve, és 1 szög hibás; ezt felfedezni.

Feloldás. a) *Szerkesztés utján.* Szerkesztessék a sokszög, valamelyik oldalból kiindulván, mindkét oldalt: a szerkezetnek a hibás szögpontban össze kell esni. Mert tegyük fel, hogy a 20. idomban (3) hibás, akkor 0, 1, 2, 3 a 0, 6′ alaphoz képest helyesen, 4, 5, 6 pedig hibásan fognak feküdni, minthogy ezek a hibás (3) által helyökből elmozdittatnak. Hasonlóképen

6', 5', 4', 3 helyesen, ellenben 2', 1', 0' hibásan fognak találtatni. E szerint a 3 szögpont mindkét úton hibátlanul határoztatván meg, a két szerkezetnek közös pontja leend.

b) Számitás utján. Számittassanak ki a szögpontok rendezői, valamelyik oldalt tengelyül vévén, két úton, t. i. a tengely két végpontjaiból, mint kezdő pontokból jobbra és balra menve. Akkor a hibás szögpont rendezői mindkét úton helyes értékeket nyernek, minthogy ezekre a hibás szög még befolyással nincsen, tehát egyenlők lesznek, mig a többiekéi egyik úton hibátlanul, a másikon hibásan jövén ki, mindenesetre különböző eredményeket mutatnak.

46. §.

Feladat. Egy sokszögben minden körületi darab meg van mérve, és 1 oldal hibás; ezt felfedezni.

Feloldás. a) Szerkesztés utján. (21. ábra). Szerkesztessék a sokszög, valamelyik oldalból kiindulván egész végig; ekkor két zárpont n és n' áll elő, melyeknek össze kellene esni, ha a sokszög hibás nem volna. Miután már fentebb láttuk, hogy egy oldalhiba a sokszög szárnyát párhuzamosan tolja odább, a zárvonal nn' a hibás oldallal egyközű leend. Egyébaránt a majdnem egyközű vonalak is gyanusak, minthogy az elkerülhetetlen hibák a tökéletes egyközűséget könnyen gyenge hajlásra változtathatják.

b) Számitás utján. Számittassanak ki a szögpontok öszrendezői, és kerestessenek ki ezekből minden oldalak hajlásszögei ezen képlet szerint:

$$tg\,\beta = \frac{y_{n'} - y_n}{x_{n'} - x_n},$$

hol $y_n = 0$, és $x_n = (0,n)$. Ha egy, vagy több β-val egyenlő α találtatik, akkor a megfelelő oldal, vagy oldalak közül valamelyik hibás.

47. §.

Feladat. Egy sokszögben 1 oldal ösmeretlen és 1 szög hibás; ezt felfedezni.

Feloldás. a) Szerkesztés utján. Vegyük az ösmeretlen oldalt alapul, és szerkeszszük a sokszöget jobbra és balra;

ha most az egynemű szögpontok egymással összeköttetnek, a hibás szög pontjait összekötő vonal az ösmeretlen oldallal egyközű leend, de a többiek nem. Mert ha az ösmeretlen oldal hosszát eltaláltuk volna, a 45. §. szerint a két szerkezet a hibás szögpontba összeesnék; de most, midőn az ösmeretlen oldal kelleténél nagyobb vagy kisebb, a szerkezet ennek hosszában párhuzamosan széjjel van húzva, vagy össze van tolva, tehát az eddig közös szögpontok különválnak egymástól, de az azokat összekötő vonal az ösmeretlen oldallal párhuzamos leend.

b) Számitás utján mint a 45. §-ban.

48. §.

Feladat. Egy sokszögben 1 szög ismeretlen, és 1 szög hibás; ezt felfedezni.

Feloldás. a) Szerkesztés utján. (22. ábra). Kezdjük a szerkesztést az ösmeretlen szöggel szomszéd oldalon, és folytassuk egész végig, ekkor két zárpontra jövünk, n és n'-re. Ezen zárpontoknak a hibás szögponttól egyenlő távban kell lenni; mert tegyük fel, hogy m-ben van a hiba, akkor mind az mn, mind pedig az mn' átlók hibátlanok lesznek, miután ezeknek meghatározására az m-ben ejtett hibának befolyása nincsen. Ellenben minden más szögpontból a zárpontokhoz húzott átlók közül egyik hibás, másik hibátlan, tehát különböző leend.

b) Számitás utján. Számitsuk ki a szögpontok öszrendezőit, és keressük ki belőlök a $(0,n)$, $(1,n)$, $(2,n)$ . . . . $(n-1, n)$ átlókat, ezen képlet szerint

$$(m,n)^2 = (x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2,$$

melyben $x_n = (0,n)$, $y_n = 0$, és m helyett sorjában 0, 1, 2 . . . $n-1$, tétetik. Ezután számitsuk ki a $(0,n')$, $(1,n')$, $(2,n')$ . . . $(n-1, n')$ átlók értékeit, ezen képlet szerint:

$$(m,n')^2 = (x_{n'} - x_m)^2 + (y_{n'} - y_m)^2,$$

hol ismét m helyett a fentebbi számokat kell tenni. Ha ezen két sorban az egynevü átlók között egyenlő értékeket találunk, a megfelelő szögpontban van a hiba.

49. §.

Feladat. Egy sokszögben 1 szög ösmeretlen és 1 oldal hibás; a hibát felfedezni.

Feloldás. Kezdjük a szerkesztést az ösmeretlen szög előtti oldalon, és kövessük mindenben a 46. §-ban előadott szabályokat.

50. §.

Feladat. Egy sokszögben minden körületi darab meg van mérve, de 1 oldal és 1 szög hibás; a hibákat felfedezni.

Feloldás. a) Szerkesztés utján. Szerkeszszük a sokszöget mind végig és vizsgáljuk meg, valjon nem egyközü-e valamelyik oldal a zárvonallal. Ha történetből a hibás szög a zárpontban van: akkor találkozni kell egy olyan oldalnak; minthogy a feloldás a hibás szögtől független lévén, a feladat a 46. §-ban előadottal megegyezik. De ha a hibás szög nem a zárpontban van: akkor nem fog egy oldal sem találkozni, mely a zárvonallal egyközü volna, minthogy ez két változás, t. i. egy egyközü tolás, és egy pont körüli forgás közrehatása által származik, mely utolsó az elsőnek egyközüségét elrontja. Ezen esetben szerkeszszük a sokszöget egy oldallal tovább, mi által a zárvonal a következő pontba tétetik által, és ismételjük a vizsgálatot.

Ha itt sem találunk kedvező eredményt, folytassuk a szerkesztést. Valahára csak a zárpontba kell a hibás szögnek esni, s ekkor czélhoz kell jutnunk.

b) Számitás utján. Számitsuk ki a szögpontok öszrenrendezőit, és keressük az oldalak hajlásszögeit a 46. §. képletei szerint, ugyan ezt tévén a zárvonallal is. Ha egyenlőséget sehol sem találunk, folytassuk az öszrendezők és az oldal hajlásszögének számitását, megjegyezvén, hogy az n-edik pontra következő $n+1$-edik tulajdonképen a 0-adik pont; tehát $0'$ jellel jelöltetik, s igy tovább, mig valahára egy zárvonal hajlásszöge valamelyik oldaléval egyenlőnek találtatik.

51. §.

Feladat. Egy sokszögben minden körületi darab meg van mérve, de 2 szög hibás; ezeket felfedezni.

Feloldás. a) Szerkesztés utján. Szerkesztessék a sokszög eleitől végig, miáltal két zárpont áll elő; akkor vizsgáltassék meg, nincsen-e valamelyik szögpont a két zárponttól egyenlő távban. Ha a zárpontban egyik hiba fekszik: akkor kell találkozni olyan szögpontnak, mely ezen feltételnek eleget teszen, minthogy akkor jelen feladat a 48. §-ban előadottal egygyé lesz. De ha a zárpontban levő szög hibátlan: akkor nem fog egy szögpont sem találkozni, melynek távja a zárpontoktól egyenlő volna, minthogy az ezen távokat képező átlók vagy mindketten hibásak, vagy egyik hibás, másik hibátlan; tehát mindenesetre különbözők. Ezen esetben a sokszög egy oldallal tovább szerkesztetik, miáltal a zárpont a következő szögpontba fog esni, s a fentebb emlitett vizsgálat ismételtetik. Ha itt sem találunk egyenlő átlókat, akkor a szerkezetet tovább folytatjuk, mig végre a zárpontok egyik hibás szögpontba esnek, s akkor a fentebb előadott feltételnek eleget teendenek.

b) Számitás utján. Számittassanak ki minden szögpontok összrendezői, és kerestessenek a

$(0,n)\,(1,n)\,(2,n)\ldots(n-1,n)$

$(0,n')\,(1,n')\,(2,n')\ldots(n-1,n')$ átlók, ha köztük egy pár sem egyenlő, számittassanak ki a következő $0'$ pont öszrendezői, melyet a sokszög $n+1$-dik pontjának kell tekintenünk, és kerestessenek az

$(1,0)\,(2,0)\,(3,0)\ldots(n',0)$,

$(1,0')\,(2,0')\,(3,0')\ldots(n',0')$ átlók s igy tovább, mig valahára egyenlő pár átlókra jövünk.

52. §.

Példa. Egy négyszögben minden oldal és szög meg van mérve, t. i.

$(0) = 110^0\,20'\,10''$	$(0,1) = 152{\cdot}35$
$(1) = 131^0\,30'\,20''$	$(1,2) = 196{\cdot}63$
$(2) = 49^0\,59'\,45''$	$(2,3) = 303{\cdot}40$
$(3) = 73^0\,29'\,45''$,	$(3,0) = 135{\cdot}42$.

A szögek összege $Ö = 365^0\,20'$; $5^0\,20'$-al nagyobb, mint annak kellene lenni. Tehát bizonyosan egy, talán több szög is hibás. Tegyük fel az első esetet, és alkalmazzuk a 45. §. szabályait, akkor következő rendezőket kapunk:

$y^0 = 0$	$y_0' = -\ 20{\cdot}240$
$y^1 = 142{\cdot}854$	$y_1' = 126{\cdot}917$
$y^2 = 316{\cdot}212$	$y_2' = 290{\cdot}900$
$y^3 = 34{\cdot}583$	$y_3' = 0.$

Minthogy ezek közt egy pár sem egyenlő, bizonyos, hogy nem csak egy szög, hanem vagy egy szög és egy oldal, vagy két szög hibás. Tegyük fel az elsőbb esetet és számitsuk ki az 50. §. szerint a 3, 0, 1, 2, 3′, 0′, 1′, 2′, pontok öszrendezőit; akkor ezen táblácska áll elő:

Pontok	*y*	*x*
3	0	135 42
0	0	0
1	142·854	—52·946
2	316·212	39·846
3′	34·583	152·703
0′	21·996	17·869
1′	159·310	—48.126
2′	340·543	28·150

Ezen öszrendezőkből az oldalak és zárvonalak hajlásszögeinek α és β, *log tg*-ei igy találtatnak:

Oldal	log tg α	zárvonal	log tg β
9,1	0·431062*n*	3,3′	0·301244
1,2	0·271436	0,0′	0·090244
2,3′	0·397148	1,1′	0·533277
3′,0′	8·970133	2,2′	0.318123*n*
0′,1′	0·318206*n*		

Ezekből látni való, hogy a 0′,1 oldal és 2,2′ zárvonal csaknem egyközüek, és mindketten tagjai ugyanazon egy sokszögnek; tehát (0,1) és (2) hibások. Igazitsuk ki tehát a (2) szöget, akkor lesz:

$$(2) = 44^0\ 39'\ 45''.$$

Ezen értékkel keressük a (4) szögből az ösmeretlen (0,1) értékét, kijön

$$(0,1) = 125{\cdot}35.$$

J e g y z é s. Ha egy oldal sem találkoznék, mely a példában lehető 4 zárvonalak egyikével egyközü volna: akkor nem 1 szög és 1 oldal, hanem talán 2 szög volna hibás. Ha ezen esetet az 51. §. szabályai szerint átdolgoznók, és kivánt eredmény nem mutatkoznék, akkor kétségen kivül több hiba esett volna a mérésben, mint a mennyi felfedezhető, és a sokszöget ujra kellene mérni.

B) Láttan.

53. §. Láttani alaptörvények.

1) A természettan elemeiből ösmeretes, hogy ha egy világosságsugár *AB* (23. ábra) egy közegből másba átmegyen, annak határán eltérittetik; egy része t. i. a sugárnak visszavetést, a másik törést szenved, az elsőbb *BC*, az utóbbi *BD* irányban folytatván utját. Ezen eltérés általános törvények szerint történik; ugyanis a visszavetésre nézve az ütközési és visszavetési szögek egyenlők,

$$a = c;$$

a törést illetőleg pedig az ütközési és törési szögek sinusai egymáshoz állandó viszonyban állanak.

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \mu,$$

hol μ törési kitevő vagy mutató nevet visel.

2) A világosságsugárnak légből tükörüvegbe (Crownglas) átmeneténél, μ . . . 1·48—1·52, ólom tartalmu üvegnél (Flintglas) pedig 1·57—1·63 között fekszik.

3) Ha a sugár megforditva üvegből légbe megyen át, akkor annak menete ugyanazon úton, de ellenkező irányban történik, és a törési kitevő az előbbinek visszás értéke leend. Ugyanis ezen esetben *b* az ütközési, *a* a törési szöget ábrázolandja; tehát a törési kitevő μ' lesz:

$$\mu' = \frac{\sin b}{\sin a} = \frac{1}{\mu}.$$

Az *a* szög 0⁰ és 90⁰ közt minden lehető értéket felvehet, de *b* szükebb határok közé van szoritva, s a legnagyobb *a*-nak, vagyis 90⁰-nak megfelelő *b*-t ezen egyenletből lehet nyerni:

$$\sin b = \frac{1}{\mu}.$$

Ez adja tehát a b lehető legnagyobb értékét, mely tükörüvegnél $42^0\ 30'-41^0\ 8'$, ólomüvegnél $39^0\ 34'-37^0\ 50'$ közé esik. Ha tehát a világosságsugárnak üvegből légbe átmeneténél az ütközési szög b nagyobb ez imént talált értékeknél: akkor a törési szög a lehetetlenné válik, tehát a sugár a légbe át nem jöhet, hanem teljes visszavetést szenved. A teljes visszavetés által származott képeket, a részleteséitől, azoknak nagyobb élénksége világossága által lehet megkülönböztetni.

54. §.

Az előbbi §-ban előadott törvények minden egyszerű világosságsugárra nézve érvényesek, akármi legyen annak törési képessége. Ugyde a fehér sugár nem egyszerű, hanem a szivárvány ösmeretes szineivel biró egyszerű párhuzamos sugárokból van összetéve, melyeknek egyenkint más-más törékenységök van; ezek tehát a törés által különböző irányokban térittetnek el, vagyis szétszóratnak.

A veres sugárnak a legkisebb, a violaszinűnek a legnagyobb eltérés felel meg.

55. §. Síktükör.

Legyen a 23. ábrában EF egy síktükör, A a tükör előtt álló sugárzó pont, mely minden irányban sugarakat lövell. Egy ilyen sugár AG derékszög alatt éri a tükör síkját, és önmagában vettetik vissza; egy más pedig AB, a szög alatt ütközik a síkba, és ugyan olyan szög alatt BC irányban vettetik vissza. Ha ezen sugarak meghosszabbittatnak, egy pontban A' metszik egymást, s ezen pontból látszanak a visszavetett sugarak kiindulni; ezért A' az A képe leend. A kép a sugárzó pontból a tükör síkjára húzott deréklőn a tükör háta megett olyan messze esik, a milyen távol van a tárgy a tükör előtt. Azaz:

$$A'G = AG.$$

* 56. §. Többszörös képek az üveg tükörben.

1) Ha a síktükör párhuzamos lapú üvegtáblából áll, akkor az előbbi §-ban értelmezett képen kivül még mások is mutatkoznak, melyek ismételt törés és visszavetés által képződnek.

Legyen a 24. ábrában E_1F_1, GH a tükör első és második síkja, A a sugárzó pont, AB_1 a beütköző, B_1C_1 a visszavetett sugár; tehát A_1 az A első képe. Az 53. §. szerint az AB_1 sugárnak egy része törést szenvedvén, behat az üvegbe, és K_1-nél a GH síkba ütközik; itt visszavettetvén B_2 pontban ismét az E_1F_1 síkba ütközik, hol egy része másodszor törést szenved, és B_2C_2 irányban kijön a légbe; más része pedig ujolag visszavettetik. A visszavetett sugár most a GH síkot L pontban éri; itt ismét visszavettetvén, B_3 pontban az E_1F_1 síkba ütközik, hol egy része megtöretvén B_3C_3 irányban kilép a légbe, más része pedig ismét visszavettetik, s igy tovább.

Legyen az ütközési és visszavetési szög a B_1 pontnál a, a törési szög b, akkor könnyen be lehet látni, hogy a B_1, B_2, B_3, K_1, L pontoknál az üveg beljében a sugárok és ütközési függélyek közt bezárt szögek mindnyájan b-vel egyenlők; ennélfogva a B_1, B_2, B_3 pontoknál a légbe kilépett sugarak is az ütközési függélylyel mindnyájan a szöget képeznek, következésképen B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 egyközüek. Hosszabbitsuk meg az A_1B_1, B_2C_2, B_3C_3, ... sugárokat, mig egymást O_1, O_2 ....-ben, az AD deréklőt pedig az A_2, A_3 .... pontokban metszik: akkor szembetünik, hogy ha O_1, O_2 .... pontokon keresztül párhuzamos sík tükröket E_2F_2, E_3F_3 gondolunk, ezek egyszerű visszavetés utján a tükörtáblával egyenlő hatást gyakorolnak; következésképen A_2, A_3 .... az A pontnak második, harmadik stb. képei leendenek.

2) Ezen gondolt E_2F_2, E_3F_3 .... tükör síkoknak az első E_1F_1-tőli távját, valamint az A_1, A_2, A_3 ... képek fekvését ilyeténképen lehet meghatározni. Legyen a tükörtábla vastagsága $= \delta$, az E_2F_2 síknak az E_1F_1-tőli távja $MO = x_1$, akkor az $O_1K_1B_1$ háromszögből következik:

$$K_1O_1 = \frac{K_1B_1 \times sin(a-b)}{sin\, O_1}.$$

Ugyde $K_1O_1 = \delta - x_1$, $K_1B_1 = \frac{\delta}{cos\, b}$, $O_1 = 180^0 - a$; ezen

értékeket helyettesitvén, rövid összehúzás után lesz:

$$x_1 = \frac{\delta\, sin\, b}{sin\, a} \cdot \frac{cos\, a}{cos\, b};$$

Továbbá $\frac{sin\ a}{sin\ b} = \mu$, ezen egyenlet segitségével b kiküszöböltetvén, végre lesz:

$$x_1 = \frac{\delta\ cos\ a}{\sqrt{\mu^2 - sina^2}}$$

Továbbá $AA_1 = 2 \,.\, AD_1$

$$AA_2 = 2 \,.\, AD_2 = 2\,(AD_1 + x_1);$$

ezeket egymásból levonván, lesz:

$$A_1A_2 = 2x_1.$$

Az E_3F_3 síkot illetőleg gondoljuk az LB_2K_1 háromszöget LK_2K_1 fekvésbe lehajtva, akkor a $B_1K_1B_2LB_3$ vonalat $B_1K_1K_2LB_2$-al fel lehet cserélni, a nélkül, hogy az LB_3 iránya változást szenvedne. Ugyde $B_2K_2 = 2\delta$, tehát a fentebbi képletben δ helyett 2δ, és x_1 helyett x_2 tétetvén, származik:

$$x_2 = \frac{2\delta\ cos\ a}{\sqrt{\mu^2 - sina^2}} = 2x_1.$$

Továbbá $AA_3 = 2 \,.\, AD_3 = 2\,(AD_1 + x_2) = 2\,(AD_1 + 2x_1)$, ebből az AA_2 fentebb talált értékét levonván, lesz:

$$A_2A_3 = 2\,x_1, \quad \text{tehát}$$

$$A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots.$$

Ezen képek közül a második legélénkebb, minthogy az az üveg fémboritékja által állittatik elő; utánna jön az első. A harmadik s következők csak ritka esetekben láthatók, ennélfogva nem is szükség rájok figyelmet forditni; de a két elsőt könnyen fel lehet egymással cserélni, kivált ha a fémboriték idővel elhomályosodik. Kérdés tehát, milyen nagy hajlásszög alatt metszik egymást a tükör előtt álló szemben az A_1 és A_2 képekből kijövő sugárok?

3) Legyen a 25. ábrában a szem álláspontja C, a keresett szög $= u$, a képnek A_2 a szemtőli távja $A_2C = t$, akkor $CA_1\,A_2$ háromszögből következik:

$$sin\ u = \frac{A_1\,A_2 \times sin\,A_1}{CA_2}.$$

Ugyde $A_1A_2 = 2x_1$, A_1 kevéssel különbözik a-tól, úgy hogy azzal mindig felcserélhető, továbbá A_1A_2 kicsiny lévén, *sin u* helyett az ívet lehet tenni. Ezen megjegyzéseket figyelembe vévén, és x_1 helyett a fentebbi értéket helyettesitvén, lesz:

$$u = \frac{\delta\ sin\ 2a}{t\sqrt{\mu^2 - sina^2}}.$$

Ezen képlet világosan mutatja, hogy u annál nagyobb lesz, minél nagyobb a tükör vastagsága, és minél kisebb a szemnek a képtőli távja. Ha $t = \infty$, akkor $u = 0$, azaz végtelen távban lévő tárgyaknak a tükörben csak egy képök van. De az u értéke a δ és t-n kivül még az esési szögtől is függ. Felsőbb mennyiségtani vizsgálatokból *) azt tanuljuk, hogy ha μ közép számmal 1·5-nek vétetik, u akkor lesz legnagyobb, ha $a = 65^0\ 7'$, s a legnagyobb $u = 0{\cdot}6391\ \frac{\delta}{t}$. p. o. ha $\delta = 1'''$, $t = 30^0$: $u = 5$ másodpercz.

4) Megjegyzésre méltó még, hogy miután a $B_1\,C_1$, $B_2\,C_2$, $B_3\,C_3$ . . . sugárok az esési merővel épen azon szöget képezik, mely alatt az AB sugár a tükörbe ütközik, és ezen eredmény a sugárnak törési képességétől független, az A_1, A_2, A_3 . . . . képek szintelenek lesznek; mert azon szétszóratás, melyet a fehér sugár az üvegbe behatásakor szenved, annak a légbe kiléptekor elrontatik, és a szines sugárok párhuzamosan jövén a szembe, öszvevegyülnek és ismét fehér sugárt képeznek.

* 57. §. Ékalakú tükrök.

Ha a tükör síkok nem egyközüek, hanem egy kis szöget w képeznek egymással: akkor a két első kép közötti szöget u igy lehet meghatározni. Legyenek a 26. ábrában AB, és AB' beeső sugárok, melyek közül az első a tűkör hátulsó, a második pedig annak mellső síkja által vettetik vissza, és egymást C-nél a szemben metszik. Legyen az elsőnek esési szöge $= a$, törési szöge $= b$, akkor az idomból látni való, hogy

$$c = b + w, \text{ és } d = c + w = b + 2w.$$

Nevezzük a légbe kilépő sugárnak törési szögét e, továbbá a második sugárnak esési és visszavetési szögeit a' és e'-nek, akkor ezen kifejezések állanak elő:

*) A legnagyobb és legkisebb értékek elmélete szerint a függvényt a változó után különbzékelni, és az első különbzéki hányadost = 0-nak kell venni.

$$\text{E szerint } \frac{du}{da} = \frac{\delta}{t}\left(2\sqrt{\mu^2 - sin a^2}.\ cos\ 2a + \frac{sin 2a^{\ 2}}{2\sqrt{\mu^2 - sin a^{\ 2}}}\right) = 0.$$

Honnan rövid átváltoztatás után következik: $cos\,2\alpha = 1 - 2\,\mu^2 + 2\mu\sqrt{\mu^2 - 1}$, és ha $\mu = 1{\cdot}5$-nek vétetik, lesz $a = 65^0\ 7'$.

$$sin\ e = \mu\ sin\ (b + 2w),$$
$$sin\ e' = sin\ a'.$$

Vonjuk ki ezen egyenleteket egymásból, akkor lesz:

$$sin\ e' - sin\ e = sin\ a' - \mu\ sin\ (b + 2w), \quad \text{vagy}$$

$$2\ sin\ \frac{e' - e}{2}\ cos\ \frac{e' + e}{1} = sin\ a' - \mu\ sin\ (b + 2w).$$

Bontsuk fel ezen egyenletben $sin\ (b + 2w)$, és figyelmezzünk arra, hogy

$$\mu\ sin\ b = sin\ a,$$

továbbá hogy $e' - e = u$, és w olyan kis szögek, melyeknek sinusait az ívvel, cosinusait pedig 1-el fel lehet cserélni; végre, hogy minden gyakorlati esetben $\frac{e' + e}{2}$ helyett érezhető hiba nélkül a'-t lehet tenni: akkor ezen kifejezés származik:

$$u = \frac{sin\ a' - sin\ a}{cos\ a'} - 2\mu\ w \frac{cos\ b}{cos\ a'}.$$

Ha a sugárzó pontot végtelen távban gondoljuk: akkor $a' = a$ lesz, s b helyett annak a-val kifejezett értékét helyettesitvén, lesz:

$$u = -\frac{2w\sqrt{\mu^2 - sina^2}}{cos\ a}.$$

Ezen kifejezésből látni lehet, hogy a két kép közötti szög még végtelen távból jövő sugároknál sem enyészik el; és ezen tulajdonság ösmertető jel gyanánt szolgál a tükörsíkok párhuzamosságának megvizsgálására.

58. §.

1) Ha valamely világitó pontból A (27. ábra) egy sík tűkörre két különböző fekvésben EF és $E'F'$, melyek egymással α szöget zárnak be, egy közös sugár AB ütközik: akkor a visszavetett sugárok BC', BC'' 2α szöget zárnak be egymással. Ugyanis legyen az AB sugárnak az EF tükörbe esési szöge $= a$, akkor a visszavetési szög is $= a$ lévén, a sugár eltérittetése $= 2a$. Ugyanazon sugárnak az $E'F'$ tükörsíkba esési szöge $= a + \alpha$, tehát a visszavetési szög is $= a + \alpha$ lévén, a sugár eltérittetése $= 2a + \alpha$. Ennélfogva a két visszavetett sugár iránya közötti különbség $= 2\alpha$.

2) Hasonló eredményhez jutunk, ha megforditva $C'B$ és $C''B$ a beeső, BA pedig a visszavetett sugárt ábrázolják.

59. §.

Tétel. Ha egy világosságsugárnak tükrödzés által keletkezett utja a tükör lapjára merőleges síkra vetittetik: a vetület a sugárzó pont vetületéből kijövő sugárnak a vetületi síkban fekvő utjával azonos.

Bebizonyitás. Legyen a 28. ábrában MN egy tükörsík, AC a beeső, CB a visszavetett sugár, CD az esési merő, — mely három vonal mindig egy síkban fekszik. Legyen NP egy MN-re merőleges sík. Húzzunk ezen síkra AC, BC, DC-n keresztül merőleges síkokat, akkor ezek MN-t a $C'' C C'$, NP-t pedig az $A'C'$, $B'C'$, $D'C'$ vonalakban metszik, melyek AC, BC, DC, vetületeit ábrázolják. Ugyde az (AC, $C''C$, DC) és (BC, $C'C$, DC) háromélek egyenlők, minthogy bennök a közös DC élnél fekvő lapszögek mint csúcsszögek, továbbá a DCC'' és DCC' élszögek mint derékszögek, s végre az ACD és BCD élszögek mint esési és visszavetési szögek egyenlők. Tehát a többi megfelelő daraboknak is egyenlőknek kell lenni. Ennélfogva a CC'' és CC' éleknél fekvő lapszögek is, melyeknek mértékei az $A'C'D'$ és $B'C'D'$ szögek, azaz a beesési és visszavetési szögek vetületei is egyenlők. Hasonlóképen az ACC'' és BCC' szögek is, valamint ezeknek 90^0-ra való pótlékai is, azaz a beeső és visszavetett sugároknak a vetületi síkhoz való hajlásszögei is egyenlők.

60. §. Szögtükrök.

1) Ha két síktükör (29. ábra) C szöggel hajlik egymáshoz, és egyikbe valamely világosságsugár ütközik, — melyet egyszer mindenkorra a tükrök derékmetszésében fekve gondolunk —: akkor annak utját igy lehet meghatározni. Legyen a B pontban beütköző sugár esési szöge a, ezen sugár ugyanazon szög alatt visszavettetvén, D-ben a másik tükörbe ütközik, hol a merőlegessel b szöget képez. Itt másodszor visszavettetvén, a beeső AB sugárt x szög alatt metszi. Ezen szög meghatározása végett a BCD $\triangle$-ből következik:

$$C - a - b = o,$$

hasonlóképen a BDE $\triangle$-ben áll:

$$x = 2a + 2b.$$

Ezen egyenletekből következik:

$$x = 2C,$$

azaz: a beeső és kétszer visszavetett sugárok közötti szög kétszer olyan nagy, mint a tükörsíkok közt bezárt szög.

2) Hasonlóképen lehet bebizonyitni, hogy a beeső, és négyszer, hatszor stb. visszavetett sugár közti szög négyszer, hatszor stb. olyan nagy, mint a tükörsíkok közt bezárt szög.

61. §.

1) Ha két, C szög alatt egymáshoz hajló tükörbe (30. ábra) két sugár AB és EF esik, melyek egymással y szöget képeznek, akkor a visszavetett sugárok BD és FG hajlásszögét x igy lehet meghatározni. A $BCFH$ négyszögből következik:

$$180^0 - a - b + C - x = o,$$

hasonlóképen a $BCFI$ négyszögből folyik:

$$180^0 - a - b + y - C = o.$$

Ezen egyenleteket egymásból kivonván, lesz:

$$x + y = 2C.$$

* 62. §.

Ha a beeső sugárok az előbbi §-okban a tükrök derékmetszésével valamely hajlásszögeket képeznek: akkor az előbbi ábrák vonalai az 59. §. értelmében a megfelelő sugároknak a derékmetszésre gondolt vetületeit ábrázolják; magok a sugárok utjai pedig az illető vető síkokban ugyanazon hajlásszögek alatt feküsznek, mint a megfelelő beeső sugárok. A fentebbi C, x, y közt létező egyenletek tehát a sugárok vetületeire vonatkoznak, s ezen értelemben véve érvényesek maradnak.

63. §. Három oldalú prisma.

1) Legyen a 31. ábrában MNP egy három oldalú prisma, melynek síkjai egymással M, N, P szögeket képeznek. Gondoljunk a derékmetszésben egy a szög alatt beeső sugárt AB, mely b szög alatt megtöretvén, a prisma másik oldalát MP a C pontban éri. Az esési szöget c a BMC $\triangle$-ből kikeresvén, találjuk

$$c = M - b.$$

Itt a sugár ugyanazon szög alatt visszavettetvén, a prisma harmadik oldalát NP a D pontban éri d esési szög alatt, melynek értékét a CDP $\triangle$-ből kikeresvén,

$$d = c - P = M - P - b$$

nek találjuk. Itt a sugár másodszor visszavettetvén, E pontban ismét az MP síkot éri, s az esési szög e értéke a DEP $\triangle$-ből lesz:

$$e = P - d = 2P - M + b.$$

Most a sugár megtöretvén, f szög alatt lép ki a légbe.

Ezen utolsó képletből önként folyik, hogy ha $M = 2P$, akkor $e = b$, következésképen $f = a$, azaz: a párhuzamos szines szálakból álló fehér sugár kétszeri törés és ugyanannyi visszavetés után ismét párhuzamosan lép ki az üvegből, tehát a prisma szintelen képet ad. Nevezzük az AB és EF sugárok közt befoglalt szöget x-nek, akkor az emlitett feltétel alatt a BMG és EFG $\triangle$-ekből folyik:

$$x = M,$$

s ezen eredmény mind a beesési szögtől mind az üveg törési viszonyától független.

* 64. §.

1) Az előbbi §-ban vizsgálat alá vett prismában (32. ábra) ugyanazon szög alatt más sugárok is ütköznek az MN síkba, melyeknek utja az előbbitől egészen különbözik. Legyen egy ilyen sugár AB, melynek esési és törési szögei a és b; a tört sugár C-ben az NP síkba ütközik, hol a merővel c szöget képez, melynek értéke a BNC $\triangle$-ből lesz:

$$c = b + N.$$

Itt a sugár ugyanazon szög alatt visszavettetvén, D-nél d szög alatt az MP síkba esik, melynek értéke a CDP $\triangle$-ből

$$d = c - P = b + N - P.$$

Itt a sugár ismét törést szenved, és e szög alatt lép ki a légbe.

Könnyű átlátni, hogy ha $P = N$, akkor $d = b$, következésképen $e = a$, azaz: ha a prisma egyenszárú, akkor a beeső szintelen sugárok kétszeri törés és egyszeri visszavetés után szintelen lépnek ki a légbe.

Nevezzük az AB és DE sugárok által bezárt szöget x-nek, akkor a fentebb kifejtett feltétel alatt, hogy t. i. $P=N$, a $BCDF$ négyszögből következik:

$$x = 2a + 2P - 180^0,$$

és ha $a = 90^0 - P$, midőn a beeső sugár az NP lappal párhuzamos fekvést nyer, akkor $x=o$, azaz: ha a beeső sugár a NP síkkal párhuzamos, akkor az kétszeri törés és egyszeri visszavetés után eredeti irányát visszanyeri, és látszólag töretlen megyen a prismán keresztül.

2) Ha a prisma a szintelenség feltételének $P=N$ eleget teszen, akkor azon sugárokra nézve, melyek a prismában kétszeri törést és egy visszavetést szenvednek, épen olyan hatással van, mint egy a PN síkkal párhuzamos síktükör. Ez okból az tükör helyett igen gyakran használtatik annyival inkább, mert bizonyos esetekben a PN síkon tökéletes visszavettetés áll elő, ennélfogva a képek sokkal világosabban látszodnak, mint a síktükörben.

* 65. §.

Ha egy három oldalú prismának a legnagyobb szöggel átalellenben fekvő síkjába MN (33. ábra) a derékmetszéssel és egymással párhuzamos sugárok ütköznek: akkor három kép származik. Egy sugár AB t. i., $BCDE$ útat irván le, EF irányban jön ki a légbe. Egy másik $A'B'$ ugyanazon szög alatt ütközik az NP síkba, és $B'D'C'E'$ pontokon keresztül, tehát ellenkező irányban haladván, $E'F'$ irányban lép ki a légbe. Egy harmadik végre $A''B''$ az NP síktól egyszerűen visszavettetik.

Nevezzük az esési szöget a-nak, az üveg beljében képződő szögeket a két első sugárnál sorjában b, c, d, e, és b, c', d', e'-nek, akkor ezek közt következő összefüggés létezik:

a BCN $\triangle$-ből $\quad c = b + N$

» CDM » $\quad d = -c + M = -b - N + M$

» DEP » $\quad e = -d + P = b + N - M + P.$

Minthogy pedig $M + N + P = 180^0$,

tehát $\quad N - M + P = 180^0 - 2M,$

az utolsó egyenletet igy is lehet irni:

$$e = b + 180^0 - 2M.$$

Továbbá a $B' C' P$ $\triangle$-ből $c' = -b + P$
» $C' D' M$ » $d' = -c' + M = b - P + M$
» $D' E' N$ » $e' = d' - N = b - P + M - N$,
vagy $e' = b - 180^0 + 2M$.

Nevezzük az EF és $E'F'$ sugárok törési szögeit f, f'-nek, ezek egymástól különbözni fognak, minthogy e és e' is különbözők; de ha $a = o$, melynek szintén $b = o$ felel meg, akkor $e' = -e$, következésképen $f' = -f$, és az EF és $E'F'$ sugárok, vagy más szóval a két első kép közötti szög $= 2f$ fog lenni, hol az f értékét ezen kifejezésből lehet nyerni:

$$sin\, f = \mu\, sin\, e = \mu\, sin\, 2M.$$

A harmadik sugárra nézve az esési és visszavetési szögek egymással egyenlők, azaz $a = f''$, és ha $a = o$, akkor $f'' = o$. Ha ezen három különböző szögeket $-f$, o, $+f$ egymás mellé irjuk és mindeniket a következőből levonjuk, egyenlő különbségek származnak, melyeknek értéke $= f$; tehát a harmadik kép a két első közt középre fog esni, és mindenikkel f szöget képez.

Ha $M = 90^0$, akkor $e = e' = b$, tehát $f = f', = a$. Ezen feltétel alatt tehát az első és második kép összeesik és szintelen lesz. Sőt ha még $a = o$, akkor mind a három kép egygyé válik.

Jegyzés. A derékszögü egyenszárú prisma a szintelenség eddig előadott feltételeinek eleget teszen, ezért azt kiválólag szintelen prismának lehet nevezni.

* 66. §.

1) Ha a 34. ábra szerint egy négy oldalú prismának egyik oldalába világosságsugár AB ütközik, akkor az megtöretvén $BCDE$ útat követ, és itt újolag megtöretvén, EF irányban lép ki a légbe. Jelöljük az esési szöget a, a prisma beljében előálló szögeket b, c, d, e betükkel, akkor

a BCM $\triangle$-ből lesz: $c = b + M$
» CDN » » $d = -c + N = -b - M + N$
» DEP » » $e = -d + P = b + M - N + P$

és minthogy $M + N + P + Q = 360^0$,
tehát $M + P - N = 360^0 - Q - 2N$,
az utolsó egyenletet igy is lehet irni:

$$e = b + 360^0 - Q - 2N.$$

Ha $360^0 - Q = 2N$, akkor $e = b$, ennélfogva $a = f$, hol f a prismából kilépő sugár szögét jelenti. A sugár tehát ezen esetben szintelen jön ki a prismából, akármi legyen az M és P szögek értéke.

Hosszabbitsuk meg az AB és EF sugárokat, mig azok egymást G-ben metszik, akkor egy szög x áll elő, melynek értéke a $BGEQ$ négyszögből lesz:

$$x = Q.$$

Ezen eredmény sokkal általánosabb, mint az a mit Bauernfeind »Elemente der Vermessungskunde I. Bd., München 1856« czimű munkájában a szögprismáról kifejt. Nála a szögprisma egy rendes nyolczszögnek 4-ed kimetszését ábrázolja; pedig az M és P szögek, — a mennyiben azok a fentebbi egyenleteknek eleget tesznek — különböző értékeket nyerhetnek a nélkül, hogy ezen változtatás akár a szintelenségre, akár a kitüzendő szög képződésére befolyással volna.

2) Némely sugárok nem ütköznek a prismának mind a négy oldalába, hanem egyiket vagy másikat átugorják. Ilyenkor a prismát csak három oldalúnak kell tekinteni, s a sugár átmenetét az előbbi §-ok szerint lehet megitélni.

* 67. §.

Tétel. Ha egy világosságsugár a prisma derékmetszésére ferdén ütközik a prismába, mely ezen sugárra nézve a szintelenség feltételének eleget tesz: akkor

I. a prismából kilépő sugárnak a derékmetszésre gondolt vetülete párhuzamos a beeső sugár hasonnemű vetülete irányában beütköző sugárnak a prismából kilépő részével, ámbár a két sugár utjai a prisma beljében egészen külön válnak.

II. A beeső és a prismából kilépő sugárok a prisma derékmetszésével egyenlő hajlásszögeket képeznek.

Bebizonyitás. 1) Legyen a 35. ábrában MNP a prisma derékmetszése, $STUVW$ a ferdén beeső sugár utja, $S'TU'V'W'$ ennek vetülete a prisma derékmetszésére. Jelöljük a ferde sugárra vonatkozó esési törési visszavetési szögeket sorjában $A, B, \ldots E, F$ nagy-, az ezeknek vetületeire vonatkozókat pedig $a, b \ldots e, f$ kis betükkel, végre a ferde sugár vetülete $S'T$ irányában beeső sugár utjára vonatkozó szögeket vonásos kis betükkel; akkor a vetületre vonatkozó szögek b-től e-ig az 59. §-nál fogva, mely szerint a ferde síkban fekvő esési és visszavetési egyenlő szögek vetületei is egyenlők, a 63, 64, 65, 66. §§-ban kifejtett s a derékmetszésre vonatkozó egyenleteknek eleget tesznek, akárhányszor és akármilyen rendben történtek is a tükrödzések, minthogy ezek az esési és visszavetési szögek egyenlőségében gyökereznek. Ha tehát az M, N, P szögek közt az előadott összefüggések léteznek, melyeket a szintelenség feltételei gyanánt ösmertünk el, akkor

$$b = e$$

lesz, akármi legyen azoknak értéke. Továbbá ugyancsak az 59. §. szerint a ferde sugár a prisma beljében a visszavetésnek minden stadiumaiban a derékmetszéshez egyenlő szög alatt hajlik; tehát a törési pontokban T és V a ferde sugárok azoknak vetületei és az esési merők közt egyenlő derékszögű háromélek származnak, u. m. $TLUU'$ és $VKUZ$, minthogy a fentebbiek szerint a befogók egyenlők, azaz

$$e = b, \text{ és}$$

$$\sphericalangle UTU' = \sphericalangle UVZ,$$

tehát a feszitőknek is egyenlőknek kell lenni, azaz

$$B = E,$$

valamint a VK és TL élekben fekvő lapszögek is egyenlők. Ugyde ha $B = E$, akkor $A = F$, mert egyenlő törési szögeknek egyenlő esési szögek felelnek meg; továbbá a sugártörés ösmeretes tulajdonsága szerint az esési sík a törésivel azonos, tehát ezeknek a prisma derékmetszésével képzett szögei is egyenlők, azaz az STL és $S'TL'$ síkok által a TL' élben, valamint a WVK' és $W''VK'$ síkok által a VK' élben képződő lapszögek egyenlők. Végre az $SS'T$ és $WW'V$ vetitő síkok a derékmetszésre mindketten merőlegesen állanak. Innen következik, hogy az $T'L'SS'$ és $VK'WW''$ háromélek is egyenlők. Következőképen

$$\sphericalangle S'TL' = \sphericalangle W''VK', \text{ azaz:}$$

$$a = f,$$

és $STS' \sphericalangle = WVW'' \sphericalangle$, azaz a beeső, és a kétszeri törés után a prismából kilépő sugárok a derékmetszéssel egyenlő szögeket képeznek.

2) Ha pedig egy másik sugár $S'T$ a prisma derékmetszésében a fentebbi ferde sugár vetülete irányában, azaz a szög alatt esik a prismába: akkor az első törés után valamely b' szög

alatt lép be, és többszöri visszavettetés után e' szög alatt esik a prisma utolsó lapjába. Ugyde akármi legyen az esési szög és a törési viszony, ha M,N,P közt a fentebb előadott összefüggések léteznek

$$b' = e',$$

tehát ezen esetben is, mint feljebb,

$$a = f', \text{tehát } f' = f.$$

3) Ha az x alatt a beeső és a kétszer tört sugárok vetületei közt bezárt szöget értjük: akkor a fentebbi §-okban talált kifejezések a ferde sugárra nézve is érvényesek maradnak.

68. §. Sugártörés lencsékben.

1) Ha valamely pontból A (36. ábra) egy üveg lencsére világosságsugárok esnek, ezek megtöretvén képet alkotnak, s a sugárok átmenetét következő vizsgálatból lehet megitélni. Legyen A a sugárzó pont a lencse tengelyében, mely annak gömbfelületei középpontjain C', C megyen keresztül. Egy sugár AD a tengely irányában derékszög alatt metszi a felületeket, tehát törés nélkül megyen keresztül. Egy másik AB, B-nél az első felületbe ütközik, hol a merővel a szöget képez, és b szög alatt megtöretvén, a tengelysugárt A' pontban metszené; de mielőtt egyesülnének, a tört sugár B'-nél a' szög alatt a második felületbe ütközik, hol ismét törést szenvedvén, b' szög alatt kilép a légbe, és A''-ben a tengelysugárt metszi. A'' tehát az A pontnak a lencse által alkotott képe leend. Nevezzük az AB, BA' és $B'A''$ sugároknak a tengelyhezi hajlásszögeit α, β, γ-nak; az A,A' és A'' pontoknak a törő felületektőli távjait, vagyis $AD = T$, $AD' = T'$, $A''D' = t$-nek; a lencse vastagságát v, és a gömbök sugárait r, r'-nek; akkor az ABC és $A'BC$ $\triangle$-ekből folyik:

$$r \sin a = (T + r) \sin \alpha,$$

$$(T' - r) \sin \beta = r \sin b,$$

$$\text{hol } \beta = a - \alpha - b, \text{ és } \sin b = \frac{\sin a}{\mu}.$$

Hasonlóképen az $A'\ B'\ C'$ és $A''\ B'\ C'$ $\triangle$-ekből lesz:

$$r' \sin a' = (T' + r' - v) \sin \beta,$$

$$(t + r') \sin \gamma = r' \sin b',$$

$$\text{hol } \gamma = \beta - a' + b' \text{ és } \sin b' = \mu \sin a'.$$

Ezen egyenletekből az ösmeretlen mennyiségek a, b, T', a', b', t kikerestetvén, lesznek:

$$\left.\begin{aligned} \sin a &= \frac{T+r}{r}\sin\alpha, \\ \sin b &= \frac{\sin a}{\mu}, \\ T' &= r\left\{\frac{\sin b+\sin\beta}{\sin\beta}\right\}, \\ \sin a' &= \frac{(T'+r'-v)\sin\beta}{r'}, \\ \sin b' &= \mu\sin a', \\ t &= r'\frac{(\sin b'-\sin\gamma)}{\sin\gamma}; \end{aligned}\right\}\odot$$

mely képletek által a feladat egész általánosságban fel van oldva.

2) De a gyakorlatban, melyre ezen előadások főképen czéloznak, α többnyire olyan kicsiny, hogy annak sinusát az ivvel fel lehet cserélni. Honnan aztán következik, hogy a többi szögek a, b, β, stb. is mind igen kis értékeket nyernek. Ezen feltétel alatt a fentebbi képletek következő alakokat öltenek magokra:

$$a = \frac{T+r}{r}\alpha,$$

$$b = \frac{a}{\mu} = \frac{T+r}{\mu r}\alpha,$$

$$T' = r\left(\frac{a-\alpha}{a-\alpha-b}\right) = r\frac{T\mu}{T(\mu-1)-r};$$

mely utolsó egyenletet igy is lehet irni:

$$\frac{1}{T'} = \frac{\mu-1}{\mu}\cdot\frac{1}{r} - \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{T}\cdots\odot'$$

Ezen képlet szerint a második felület által véghezvitt törés eredményét is ki lehet fejezni, ha a hason jelentésü mennyiségek egymással felcseréltetnek, vagyis

T helyett — $(T'-v)$,

μ » $\frac{1}{\mu}$.

r » — r',

T' » t tétetnek, hol t gyűtáv nevet visel.

Ezen helyettesités által rövid összehuzás után lesz:

$$\frac{1}{t} = (\mu - 1)\frac{1}{r'} + \mu \frac{1}{T' - v},$$

és ha a lencse vastagságát elhanyagoljuk, tehát $v = o$, T' helyett pedig az előbbi egyenletből vett értéket tesszük, lesz:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{T} = (\mu - 1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \ldots ☽$$

3) Gondoljuk az A pontot végtelen távban, tehát $T = \infty$, és jeleljük a gyűtávot, mely most természettani okoknál fogva gyútáv (focus) nevet visel, f-nek, akkor leend:

$$\frac{1}{f} = (\mu - 1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right),$$

s ezen egyenleteket egymásból levonván, lesz:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{T} = \frac{1}{f} \ldots ⛢$$

Ezen képlet azt tanítja, hogy a tárgy és kép távja visszás értékeinek összege állandó mennyiség; ha tehát egyik nagyobbodik, a másiknak szükségképen kisebbedni kell.

69. §. A lencsék nemei.

Ha a végtelen távból jövő sugárok a lencsén való átmenet után egyesülnek, és valódi képet alkotnak, f igenleges jegyet kap, és a lencse gyüjtőnek mondatik. Ellenben ha a sugárok a lencsén való átmenet után szétágaznak, és csak hátra meghosszabbítva látszanak egy pontból kiindulni, vagyis látszatos képet alkotni, akkor f nemleges jegyet kap, s a lencse szórónak mondatik.

A gyüjtő lencsék háromfélék, t. i. domboru-domborúk, sík-domborúk és homoru-domborúk, mely utóbbinál a homoru felület sugára nagyobb a domboruénál. A szóró lencsék hasonlóképen háromfélék, u. m. homoru-homorúk, sík-homorúk és domboru-homorúk, mely utóbbinál a domboru felület sugára nagyobb a homoruénál.

70. §. Több lencse egy közös tengelyen.

1) Ha több üveg lencse egy közös tengelyen $l_1, l_2 \ldots$ távban áll egymástól, akkor a gyűtávot igy lehet meghatározni.

Az első lencsére nézve 68. §. δ képlete szerint

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{T}=\frac{1}{f_1}.$$

A második lencsére nézve az első által alkotott képet tárgynak lehet tekinteni, tehát figyelembe vévén annak ellenkező fekvését, T helyett — $(t_1—l_1)$-et kell tenni, a többi betűk pedig a második lencse hasonló betűivel felcseréltetnek. E szerint lesz:

$$\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1-l_1}=\frac{1}{f_2}.$$

A harmadik lencsére nézve hasonlóképen lesz:

$$\frac{1}{t_3}-\frac{1}{t_2-l_2}=\frac{1}{f_3}, \text{ stb.}$$

2) Ha a lencséket egymással érintésben gondoljuk, akkor $l_1=l_2= \ldots\ldots = 0$, tehát

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{T}=\frac{1}{f_1},$$
$$\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}=\frac{1}{f_2},$$
$$\frac{1}{t_3}-\frac{1}{t_2}=\frac{1}{f_3},$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

honnan összeadás által következik:

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{T}=\frac{1}{f_1},$$
$$\frac{1}{t_2}+\frac{1}{T}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2},$$
$$\frac{1}{t_3}+\frac{1}{T}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_3},$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

Ezen egyenletek világosan mutatják, hogy a gyüjtő lencsék sokasítva a gyűtávot kisebbítik; szóró lencsék pedig azt nagyobbítják.

3) Lehet egy olyan lencsét gondolnunk, melynek hatása több lencsékével összevéve egyenlő. Nevezzük ennek gyutávját φ-nek, akkor lesz:

$$\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_3}+\ldots.$$

Ha $f_1, f_2, f_3 \dots$ mindnyájan igenlegesek, akkor φ kisebb mint $f_1, f_2, f_3 \dots$ egyenkint; tehát egy kis gyútávu lencsét több nagyobb gyútávuakkal fel lehet cserélni a nélkül, hogy a hatás különböző volna.

71. §. Ferdesugárok. Láttani középpont.

1) Midőn a sugárzó pont A (37. ábra) a lencse tengelyén kivül esik, egy sugár AB oly irányban ütközik a lencse felületébe, hogy az kétszeri törés után a beeső sugárral párhuzamosan lép ki a légbe; s ez a tengelylyeli hasonlatosság miatt mellék-tengely nevet visel. Egy másik AD kétszeri törés után a melléktengelyt A'-ben metszi, tehát A' az A képe leend.

2) Az O pont, melyben a melléktengely a főtengelyt metszi, láttani középpontnak neveztetik. Ennek fekvését igy lehet meghatározni. Legyen $ABB'A'$ a melléktengely utja, tehát $AB \parallel B'A'$, akkor az ABB' szög $=$ $BB'A'$ szöggel. Ugyde egyenlő elhajlásoknak egyenlő esési és törési szögek felelnek meg; tehát CBO szög $=$ $C'B'O$ szöggel, s ennek következtében az ütközési merők CB és $C'B'$ párhuzamosok lesznek. Innen önként folyik, hogy a BOC és $B'OC'$ $\triangle$-ek hasonlók, minthogy a megfelelő szögek egymással egyenlők; ennélfogva az oldalak közt ezen arány áll:

$$CO : CB = C'O : C'B'.$$

Nevezzük a lencse vastagságát v-nek, az O pontnak a lencse első felületétőli távját $EO = x$-nek, akkor az arányt igy is lehet irni:

$$(r'-v+x) : r' = (r-x) : r, \quad \text{innen}$$

$$x = \frac{rv}{r+r'} \dots \odot$$

Ezen képlet az ütközési szögtől független lévén, minden melléktengelyre egyaránt érvényes; ezek tehát az O ponton mennek keresztül.

3) Ha $r = r'$, azaz a lencse egyenoldalu, akkor $x = \frac{v}{2}$; a láttani középpont tehát a lencse közepébe esik.

Ha $r = \infty$, akkor $x = v$,

» $r' = \infty$, » $x = o$.

A láttani középpont mind a két esetben a lencse csúcspontjába esik.

72. §.

A gyakorlatban a legszélsőbb melléktengelynek a főtengelyhezi hajlásszöge $^1/_2$ fokot ritkán haladván meg, a melléktengelysugárnak az egyenes vonaltóli eltérése oly csekély, hogy azt figyelembe sem kell venni, hanem ugy lehet tekinteni, mintha a melléktengely a lencsén törés nélkül menne keresztül. Legyen a 38. ábrában *AB* valamely tárgy, melynek minden pontjai sugárokat lövellnek a lencsére; húzzunk annak végpontjaiból a láttani középponton keresztül egyenes vonalakat, akkor az előbbi §-oknál fogva az *A* és *B* pontok képei *A'* és *B'* lesznek, s a kép a tárgyhoz képest felfordítva van. Nevezzük a tárgy hosszát *H*, a képét *h*, a tárgy és képnek a láttani középponttóli távjait *T* és *t*-nek, akkor az *ABO* és *A'B'O* hasonló $\triangle$-ekből lesz:

$$H : T = h : t.$$

73. §. Gömb- és szineltérés.

1) Az előbbi §-okban kifejtett képletek szorosan véve csak a tengely- és annak közelében beeső sugárokra nézve érvényesek; csakis ezek gyülnek össze egy pontban. Ellenben a tengelytől távolabbiak — a 68. §. ⊙ képlete szerint kiszámittatván — annál rövidebb gyútávot mutatnak, mennél távolabb esnek a tengelytől. Ennek oka a törő felületek gömbalakjában fekszik; azért a tengely- és szélső sugárok gyűtávjai között lévő különbség gömbeltérésnek neveztetik. Ez minden lencsénél a görbületi sugárok viszonyától függ. Szorosabb vizsgálat után, — mely előadásaink határain kivül esik — ugy találtatik, hogy közönséges üvegnél, melynek törési viszonya $\mu = 1{\cdot}5$, a legkisebb eltérésü lencse domboru-domboru, vagy homoru-homoru, melynél a tárgy felé néző felület sugára hatszor kisebb a másiknál. Sík-domboru és homoru lencsék is, ha domboru vagy homoru oldalukat a tárgy felé forditják, igen csekély eltérést mutatnak; s ez okból a szemcsövekben igen gyakran használtatnak.

2) De még egy második ok is hátráltatja a törött sugároknak egy pontbani egyesülését. Ugyanis a fehér sugár a törés után szines részeire szétbontatván, szétágazó szálak alakjában lép ki az üvegből, melyek közül a kevésbbé törékenyek nagyobb, a

törékenyebbek pedig kisebb távban metszik a tengelyt. Ezen különböző szinü szálak gyűtávjainak különbsége szineltérésnek neveztetik. Ha tehát a tárgy valamely pontjából (39. ábra) a lencse minden pontjaira sugárokat húzunk, ezek kétszeri törés után mindnyájan egy kis kör körületén belől mennek keresztül, melynek átmérője *mn*, a legszélsőbb sugároknak a tengelyhezi hajlásszögétől függ, és ezen kis kör tulajdonképen az *A* pont képe. Minthogy pedig a tárgy minden más pontjának képe is ilyen kis kör lesz, ezek egymást nagyobb részint takarni fogják; honnan a kép összezavarodása elkerülhetlenné válik.

3) A sugárok ezen kettős eltérésének káros hatása abban mutatkozik, hogy a tárgy képe határozatlan elmosott szines szegélyü leend. Ezen tökéletlenséget a láttan csecsemő korában az által igyekeztek elhárítni, hogy a lencse átmérőjét — nyilását — annak görbületi sugárához képest igen kicsinynek vették, hogy tetemes ütközési szögek elő ne jöhessenek. De a kép nagyobb tökélyének ez útoni eszközlése a világosság rovására történik; minthogy a kép világossága a lencse felületével egyenes viszonyban áll. A tudomány jelen időben sokkal tökéletesebb módot szolgáltat ezen czél elérésére. Ugyanis két különböző szórékonyságu üvegből olyan lencsekapcsolatot lehet előállitni, mely egy egyes lencse helyett tétetvén, a tört sugároknak szines szálait nagyobb részint párhuzamosan, tehát szintelenül ereszti ki a légbe. Ilyen kapcsolat, mely a 40. idom szerint két vagy három, részint domboru, részint homoru lencséből van összetéve, s melyek közül a domborúk tükörüveg-, a homorúk pedig ólomüvegből készittetnek, szintelen — achromaticus — nevet visel. A szintelenség feltétele által csak a lencsék gyútávjai állapittatnak meg; a görbületi sugárok egy részével még szabadon lehet rendelkezni. Ezeket tehát ugy lehet választani, hogy a gömbeltérés is nagyobb részint elenyésszék, s eképen a kép a tökélynek nagyobb fokára emelkedjék. Ilyen lencsekapcsolat aplanaticus nevet visel.

74. §. Szem.

1) Az emberi szem a 41. ábrában alakjára nézve két külön átmérőjü gömbmetszetből van összetéve, melyeknek alapjok közös. A mellső és kisebb szarunemű átlátszó *c*, a hátulsó és nagyobb

pedig átlátszatlan fehér bőrrel *d* van bevonva, melyek egymással *a*, *b* nél össze vannak nőve. A fehér bőr alatt az érhártya *e*, s ez alatt finom idegrostból álló szöveg az ideghártya *f* terjed el, melyet az agyból jövő látideg *g* folytatásának s szétágazásának kell tekintenünk. A két gömbmetszet közös alapjában az érhártyának folytatványa, a szivárványhártya *i* van kifeszitve, melynek közepén kis kerek lyuk — pupilla — van. Ezen lyuk előtt egy átlátszó kemény lencse alaku test *l* — kristálylencse — van helyezve, melynek széle a szem falával izmok és hártya által van összeköttetve. Ezen választófal által a szem ürege két kamarára *k*, *k'*, osztatik, melyek közül *k* viznemű, *k'* pedig az ugynevezett üveg nedvvel van megtöltve.

2) A látás érzete ilyeténképen keletkezik. A szem előtt lévő tárgynak valamely pontjából a szembe sugárok jövén, ezek a *k, l, k'* testekben törést szenvednek, és egy pontban metszik egymást. Ezen gyűpont a tárgy távjához képest majd az ideghártyán, majd pedig az előtt vagy hátul esik. Első esetben a sugárok az ideghártya egy kis részecskéjén öszpontosulván, ebben bizonyos ingert okoznak, mely a látideg által az agyvelővel közöltetvén, a látás érzetét támasztja bennünk. Minthogy pedig a tárgynak minden pontja az ideghártya más részecskéjében ébreszt hasonnemű ingert, annak minden pontjáról tiszta fogalmunk származik, azaz a tárgyat tisztán látjuk. Az utolsó esetekben ellenben, a tárgynak valamely pontjából kijövő sugárok törés után az ideghártyával nagyobb körben találkozván, az inger nagyobb térre kiterjed. Ugyanez áll a köröskörül fekvő pontokról is. Ezen körök területtel birván, nagyrészben egymást takarni fogják; tehát az ideghártya minden részecskéje a tárgynak több pontjai által ingereltetik egyszerre, honnan azután zavart felfogás határozatlan bizonytalan látás érzete származik.

75. §. Legtisztább láttáv.

Az előbbi §-ból következik, hogy az emberi szemet aplanaticus lencse-kapcsolatnak lehet tekinteni, melynek láttani középpontja a kristálylencse közepe tájára esik. Szabályszerű egészséges szem 8—10 hüvelyknyi távra lát legtisztábban; de ettől külömböző távban is lehet tisztán látni, habár néha a nézés fájdalmas érzést költ is bennünk. Ugyanis a szemnek alkalmazkodási képessége van, azaz az ideghártya és a láttani középpont közötti táv nem egészen változhatlan, hanem szűk határok közt a szükséghez képest változtatható. Nevezetesen növekedő távokba egész a végtelenig tisztán lehet látni, minthogy a gyűtáv változása még a szem alkalmazkodási képességén belül esik. Ellenben a táv kisebbedtével hamar elérjük a tiszta látás határát, minthogy ezen esetben a kép igen gyorsan megyen hátra, s az ideghártya csak bizonyos határig képes azt követni.

2) Némely szem a 8—10''-nyi távból jövő sugárokat az ideghártyán belől vagy kivül egyesíti; az elsőbb a rendes mértéknél rövidebb, az utóbbi annál hosszabb távban lát legtisztábban. Ezért az elsőbb rövid-, az utóbbi messzelátónak neveztetik.

3) A rövidlátó szemen homoru, a messzellátón domboru szemüveg által lehet segítni. Az első t. i. a szem eleibe tartatván, a gyűtávot meghosszabbitja, az utolsó pedig megrövidíti; s eképen lehetővé teszi, hogy a kép az ideghártyára essék.

76. §. Látszög.

1) Azon szög, mely alatt valamely tárgy a szem láttani középpontjában látszik, látszögnek, látszó nagyságnak neveztetik, minthogy — nem vévén figyelembe a tárgynak a szemtőli távját — annak nagyságát ezen szög után szoktuk megitélni. Ezen szöggel egyenes viszonyban áll az ideghártyán előállott kép nagysága is.

2) Azon szög, mely alatt a tárgy már elkezd tűnni a szem elől, legkisebb látszögnek neveztetik. Ez különböző érzékenységü szemeknél, és különböző természetü és alaku tárgyaknál különböző. Olyan tárgyakra nézve, melyeknek önvilágok nincsen, s melyeknek egy mérete sem tetemesen nagyobb a másiknál, ez 40—60''. Ellenben hosszú, keskeny alakoknál, mint p. o. villámhárítóknál 2—3''-ig is leszáll, minthogy ezen esetben a kép keskenysége annak hossza által eléggé pótoltatik, hogy tiszta látás érzete származhasson. Önvilággal biró tárgyaknál, minők a csillagok, a legkisebb látszög olyan kicsiny, hogy meg sem lehet mérni.

3) A tárgyak két ok miatt lehetnek láthatlanok, t. i. ha

vagy kicsinységök, vagy távjok miatt kisebb szöget alkotnak a szemben a legkisebb látszögnél. Első esetben nagyitó üveggel, másodikban távcsővel lehet azokat láthatókká tenni.

77. §. Nagyitó üveg.

1) Ha valamely közel lévő tárgy látszöge igen kicsiny, azt nagyobbítni lehet az által, hogy a tárgyat a szemhez közelebb visszük. De minthogy ekkor a kép az ideghártyán túl esik, gyüjtő lencsét kell a szem eleibe tenni, mely a kép gyűtávját megröviditvén, azt az ideghártyára visszahúzza. Legyen T a tárgynak az üveglencsétől (42. ábra), l_1 a lencsének a szem láttani középpontjátóli távja, f_1, f_2 a lencse és szem gyútávja, t_1, t_2 az első és második kép távja az illető lencsétől, végre τ a legtisztább láttáv; akkor a 68. §. 5 szerint a lencse általi törésre nézve áll:

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{T} = \frac{1}{f_1},$$

hasonlóképen a szemben történt törésre nézve:

$$\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1 - l_1} = \frac{1}{f_2}.$$

Ugyde a lencsén keresztül akkor látunk legjobban, ha a belőle kijövő sugárok olyan szétágazással birnak, mintha a legtisztább láttávból jönnének. Tehát a szemre nézve még ezen egyenlet is áll:

$$\frac{1}{t_2} + \frac{1}{\tau} = \frac{1}{f_2}.$$

A két utolsó egyenletből azután következik:

$$\tau = -(t_1 - l_1), \quad \text{vagy} \quad t_1 = -(\tau - l_1),$$

és ezen értéket az első egyenletben helyettesitvén, lesz:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{\tau - l_1}.$$

Innen következik, hogy miután $\frac{1}{\tau - l_1}$ többnyire igen kis igenleges mennyiséget jelent:

$$\frac{1}{T} \text{ egy kevéssel} > \frac{1}{f_1}, \quad \text{vagy} \quad T < f_1.$$

Hogy tehát a nagyitó üvegen keresztül tisztán lehessen látni, a tárgyat az üveghez egy kicsit közelebb kell tartani a lencse gyútávjánál, s a tárgy fennállva fog látszodni.

2) A nagyitás mértékét azon képek nagysága viszonyából lehet megitélni, melyek az üvegen keresztül, és szabad szemmel a legkedvezőbb látási körülmények közt az ideghártyán előállanak. Legyen a tárgy hossza vagy legnagyobb mérete $= H$, az első és második képé $= H'$ és H'', akkor a 72. §. szerint:

$$H : H' = T : t_1$$
$$-H' : H'' = -(t_1 - l_1) : t_2.$$

Ezekből következik:

$$-H : H'' = -T(t_1 - l_1) : t_1 t_2, \quad \text{és}$$
$$H'' = \frac{H t_1 t_2}{T(t_1 - l_1)}.$$

Helyettesitsük ezen kifejezésben t_1 T helyett a fentebb talált, legjobb látásnak megfelelő értékeket, akkor lesz:

$$H'' = \frac{H t_2}{\tau}\left(\frac{\tau - l_1}{f_1} + 1\right) \ldots ♁$$

Legyen továbbá a szabad szemben előálló kép hossza $= H'''$, ha a tárgyat a legtisztább láttávban gondoljuk, akkor lesz:

$$H : H''' = \tau : t_2,$$

tehát
$$H''' = \frac{H t_2}{\tau}.$$

Innen következik $\frac{H''}{H'''}$, vagyis a nagyitás *), melyet N-el jelölünk:

$$N = \frac{H''}{H'''} = \frac{\tau - l_1}{f_1} + 1.$$

Ha a lencsét igen közel tartjuk a szemhez, akkor $l_1 = o$, és

$$N = \frac{\tau}{f_1} + 1 \ldots \odot$$

Ha pedig a szemet a lencse gyúpontjába helyezzük, akkor $l_1 = f_1$ és

$$N = \frac{\tau}{f_1} \ldots \odot'$$

---

*) A 76. §. szerint az ideghártyán keletkező kép a látszöggel egyenes viszonyban lévén, $\frac{H''}{H'''}$ helyett a megfelelő szögek viszonyát is lehet tenni.

azaz: a nagyitó üveg annyiszor nagyít, a hányszor annak gyútávja a legtisztább láttávban foglaltatik.

78. §. Górcső.

1) Az egyszerű nagyitó üveg csak mérsékelt nagyitás előállitására alkalmatos, mivel tetemesebb nagyitás csak a lencse gyútávjának, következésképen a tárgy távja, valamint a lencse görbületi sugárai és nyilásának rendkivüli kisebbedésével eszközölhető. Ez okból jelentékeny nagyitás összetett nagyitó üvegek vagy górcső — (Microscopium) — által eszközöltetik, melyre az előszámlált kedvezőtlen körülményeknek sokkal kisebb befolyásuk van.

2) Ez legegyszerűbb alakban két lencséből áll (43. ábra), melyek közül az első k, tárgylencsének, a második k' pedig szemlencsének neveztetik. A tárgylencsének feladata a tárgyból jövő sugárokat egy képben egyesítni; a szemlencséé pedig mint valamely nagyitó üvegé ezen képet nagyítva adni át a szemnek.

3) A górcső nagyítását következő vizsgálatból lehet megitélni. A tárgylencsére nézve áll a 72. §. szerint:

$$H : h = T : t, \quad \text{vagy} \quad h = \frac{Ht}{T},$$

hol a betűk jelentései az emlitett §-ból ösmeretesek. Helyettesítsük a h értékét az előbbi §. ♁ képletében H helyett, melylyel egyenlő jelentésü, akkor lesz:

$$H'' = H\frac{t}{T}\cdot\frac{t_2}{\tau}\left(\frac{\tau - l_1}{f_1} + 1\right),$$

mig a szabad szemben a legjobb látás esetében keletkező kép

$$H''' = \frac{Ht_2}{\tau}.$$

Ezekből következik a nagyítás:

$$\frac{H''}{H'''} = N = \frac{t}{T}\left(\frac{\tau - l_1}{f_1} + 1\right) \ldots \odot$$

Ezen kifejezés két tényezőből áll, melyek közül az első a tágylencse, a második pedig a szemlencse nagyítását jelenti. Egyébaránt f_1 mind igen- mind nemleges szám lehet, azaz a nagyítást mind domboru mind homoru szemlencse által lehet eszközölni. Első esetben a kép megforditva, az utóbbiban pedig fennállva látszik.

4) A tárgy- és szemlencse közötti távot l igy lehet meghatározni. A szemlencsére nézve ezen egyenlet áll:

$$\frac{1}{l-t}+\frac{1}{t_1}=\frac{1}{f_1}.$$

Ugyde az előbbi §. szerint a legtisztább látás azt kivánja, hogy $t_1 = -(\tau - l_1)$ legyen; tehát ezt helyettesitvén lesz:

$$\frac{1}{l-t}-\frac{1}{\tau-l_1}=\frac{1}{f_1}.$$

Fentebb már megemlittetett, hogy $\frac{1}{\tau-l_1}$ mindig igenleges kis törtszámot jelent; tehát az egyenletet igy is lehet irni:

$$\frac{1}{l-t} \text{ egy kevéssel} > \frac{1}{f_1}, \text{ azaz } l-t < f_1, \text{ vagy}$$

$$l < t + f_1.$$

A szerint tehát a mint f_1 igen- vagy nemleges, azaz a szemlencse domboru vagy homoru, a *tárgy- és szemlencse közötti táv egy kevéssel kisebb leend a képtáv és szemlencse gyútávja összege vagy különbségénél.*

5) A górcső annál tisztábban mutat, mennél tökéletesebb a tárgylencse által alkotott kép. E czélból egyszerű lencse helyett szintelen aplanaticus kapcsolatot szoktak használni, sőt néha 2, 3 ilyen kapcsolat is tétetik egymás eleibe. Ennek haszna abban áll, hogy a törés több lencse közt megosztatván, ezeknek egyenként nagyobb gyútávot lehet adni; mi által nem csak a tárgy távja, hanem a görbületi sugárok és nyilások, valamint az ezektől függő láttér és a kép világossága is arányos növekedést nyernek. Hasonlóképen lehet a szemlencse hatását is több lencse közt megosztani; melyeknek összetétele később fog tárgyaltatni.

79. §. Távcső.

1) A távcső legegyszerűbb alakjában ugy mint a górcső két lencséből áll, t. i. tárgy- és szemlencséből, melyek hatása a górcsőnél előadottal tökéletesen megegyez.

2) A nagyítást következőképen lehet megitélni. A szemben

előálló kép nagysága a távcsőn keresztül az előbbi §. szerint, melynek tartalma a jelen esetre is illik, lesz:

$$H'' = \frac{Ht}{T} \cdot \frac{t_2}{\tau} \left(\frac{\tau - l_1}{f_1} + 1 \right).$$

Ugyanazon tárgyra szabad szemmel nézvén, lesz:

$$H''' = \frac{Ht_2}{T + l + l_1},$$

mely két kifejezésben a két t_2 nem tökéletesen egyenlők ugyan, de egymástól olyan keveset különböznek, hogy azokat egymással fel lehet cserélni; továbbá $l + l_1 \ldots T$-hez képest elenyészik. Tehát a nagyítás

$$\frac{H''}{H'''} = N = \frac{t}{\tau} \left(\frac{\tau - l_1}{f_1} + 1 \right),$$

hol az első tényező a tárgy-, a második pedig a szemlencse nagyítását jelenti.

3) A szem helye legczélszerűbben a tengelynek azon pontja lesz, melyből a képet egész kiterjedésében legjobban át lehet tekinteni. Ez pedig a C pont (44. ábra), melyben a mellék tengelysugárok a főtengelyt metszik. Ezen pontot úgy lehet nézni, mint a tárgylencse láttani középpontjának a szemlencse által alkotott képét, s ha a két lencse közötti távot l, a C pontnak a szemlencsétőli távját pedig l_1-nek nevezzük, lesz:

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l_1} = \frac{1}{f_1}.$$

Innen következik $$l_1 = \frac{lf_1}{l - f_1},$$

vagy ha a nevezőben f_1-et elhanyagoljuk, elég közelitéssel

$$l_1 = f_1.$$

Ezen értéket a nagyítás képletében helyettesitvén, lesz:

$$N = \frac{t}{f_1} \ldots \odot,$$

$$\text{közel} = \frac{f}{f_1},$$

azaz: a távcső annyiszor nagyít, a hányszor a szemlencse gyútávja a tárgylencse képtávjában foglaltatik.

4) A nagyítást mind domboru, mind homoru szemlencse által lehet eszközölni; az első a Kepler-, az utóbbi a Galilaei-

féle távcső szerkezetére vezet. Az első megfordítva, az utóbbi fennállva mutat. A tárgy- és szemlencse közötti táv itt is, mint az előbbi §-ban

$$l < t + f_1.$$

Ezen mennyiség változó, minthogy T, tehát t is különböző értékeket vehet fel. Ezért a tárgy- és szemlencsét két külön csőbe kell foglalni, hogy egyiket a másikba betolván, a lencsék egymástóli távját szükséghez képest változtatni lehessen.

80. §.

1) A távcső nagyítását észlelés utján is meg lehet határozni. Ha t. i. egy egyenlő részekre beosztott rúd olyan távban felállittatik, hogy az osztályvonalakat még szabad szemmel látni lehessen, s egyik szemmel a távcsőn keresztül, a másikkal pedig szabadon nézünk a rúdra: akkor az osztályrészek egyszerre nagyítva is, természetes nagyságban is látszodnak, és meg lehet számlálni, hogy egy nagyított osztályrész hány természetest takar. Ezen szám adja a nagyítás mértékét.

2) Minthogy a 77. §. jegyzése szerint a nagyítás a látszögek viszonya által fejeztetik ki, ezen tételt a nagyítás megmérésére lehet használni. A nap tányérja t. i. szabad szemmel középszámmal 32′ alatt látszik, mely szög sugármértékben $= 0{\cdot}00931$; ha pedig a távcsőt a nap felé irányozzuk, a tört sugárok a szemlencsén kijövén képet alkotnak, melyet egy, a tengelyre merőleges síkkal fel lehet fogni, s annak a szemlencse középpontjábóli látszögét meg lehet határozni. E czélból meg kell mérni a kép átmérőjét és a szemlencsétőli távját, s ha ezek d és t-vel jelöltetnek, a látszög $= \frac{d}{t}$, tehát a távcső nagyítása:

$$N = \frac{d}{t} : 0{\cdot}00931 = 107{\cdot}4 \frac{d}{t}.$$

81. §. Láttér.

L á t t é r n e k neveztetik azon kör, melyet a gór- vagy távcsőn keresztül egyszerre át lehet tekinteni. Ennek nagyságát azon szöggel szoktuk mérni, mely alatt a kör átmérője a tárgylencse közepéből látszik, mely egyszersmind a szemüveg átmérőjének a tárgylencse közepébőli látszögével egyenlő. Legyen ezen szög α, a szemüveg átmérője d, a két lencse közötti táv l, akkor:

$$\alpha = \frac{d}{l} \cdot$$

Ugyde a szemlencse nyilását a gömb- és szin-eltérés káros hatása nélkül nem szabad nagyobbnak venni a legkisebb görbületi sugár felénél, vagy legfeljebb 0·6 részénél, azaz $d \overline{\overline{<}} 0{\cdot}6r$. Vegyük az üveg törési viszonyát tükörüvegnél középszámmal 1·5-nek, akkor a sík domboru lencsének sugára:

$$r = \frac{f_1}{2}, \text{ tehát } d \overline{\overline{<}} 0{\cdot}3 f_1.$$

Továbbá l kevés hijján $= t + f_1$. Ezen értékeket helyettesitvén, s az eredményt $arc\ 1'$-el osztván, hogy a szög perczekben legyen kifejezve, lesz:

$$\alpha \overline{\overline{<}} \frac{1030 f_1}{t + f_1} \text{percz},$$

vagy mind számlálót, mind nevezőt f_1-el osztván, s $\frac{t}{f_1}$ helyett a nagyítást $= N$-et írván, lesz:

$$\alpha = \frac{1030}{N+1} \text{percz}.$$

Ezen képlet világosan mutatja, hogy h a a n a g y í t á s n ö v e - k e d i k, a l á t t é r k i s e b b l e s z, és megforditva.

* 82. §.

1) A tárgyak mind a gór- mind a távcsőn keresztül nézve rendesen homályosabban látszodnak, mint szabad szemmel; s a világitás azon foka, mely a nevezett láttani műszerek által a szemben alkotott képen elömölve látszik, azok v i l á g o s s á g á - n a k neveztetik.

2) A górcső világossága annál nagyobb, mennél e r ő s e b b és számosabb sugárok esnek a tárgylencsébe, s miután azok több vagy kevesebb lencséken, s végre a szem lyukán átmentek, mennél kisebb tért lepnek el az ideghártyán. Ugyde a sugárok világitó ereje bizonyos távban a sugárzó ponttól ezen táv négyzetével megforditott viszonyban van. Továbbá az ideghártyán alkotott kép világitásában résztvevő sugárok száma a tárgylencse felületével, vagy a nyilás négyzetével egyenes viszonyban áll. E szerint ha a górcső világosságát V, a tárgynak a távlencsétőli távját T, a tárgylencse nyilását D, az ideghártyán keletkezett

kép méretét H, s egy ösmeretlen együtthatót K-nak nevezzük, lesz:

$$V = \frac{KD^2}{T^2H^2}.$$

Hasonlóképen, ha a szabad szemben létező természetes világosságot egységül vesszük, a tárgyat a legtisztább láttávban τ helyezzük, a szemlyuk átmérőjét $= \delta$, s az ideghártyán előálló kép méretét $= H'$-nek nevezzük, lesz:

$$1 = \frac{K\delta^2}{\tau^2 H'^2}.$$

Ezen egyenleteket egymással elosztván, lesz:

$$V = \frac{D^2\tau^2 H'^2}{\delta^2 T^2 H^2},$$

hol $\frac{H}{H'}$ a górcső nagyítását jelenti; az előbbi képletet tehát igy igy is lehet irni:

$$V = \frac{D^2\tau^2}{N^2\delta^2 T^2};$$

vagy ha N helyett a 78. §. 3. szám ⊙ értéke tétetik, azon megjegyzéssel, hogy l_1 helyett a 79. §. 3. száma értelmében f_1-et lehet tenni, akkor lesz:

$$V = \frac{D^2 f_1{}^2}{\delta^2 t^2}.$$

3) Ugyanazon eredményhez jutunk a távcsőnél is. Ezen esetben t. i. a tárgylencsébe és a szabadszembe ütköző sugárok világitó erejét egyenlőnek lehet tekinteni, tehát $\frac{\tau}{T} = 1$. Ennélfogva:

$$V = \frac{D^2}{N^2\delta^2},$$

és ha N helyett a 79. §. 3. számából a nagyítás értéke tétetik, lesz:

$$V = \frac{D^2 f_1{}^2}{\delta^2 t^2}.$$

4) Ezen képlet mind a gór- mind a távcsőnél azon feltételhez van kötve, hogy a szemüvegből kijövő sugárcsomag átmérője a szemlyukét meg nem haladja. Ezen csomag átmetszése a szemüvegen kivül világos köröcske alakjában látható, mely tulajdonképen nem egyéb a tárgylencsének a szemüveg által alkotott képénél. Ha a tárgylencse és ezen köröcskének átmérője

D, d, mindkettőnek a szemüvegtőli távja l_1, l'-nek neveztetik, akkor:

$$D : d = l : l', \quad \text{és}$$

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{f_1}.$$

Ezen egyenletekből egyszerű számitás által folyik:

$$\frac{D}{d} = \frac{l - f_1}{f_1} = \frac{t}{f_1},$$

s ezen értéket a fenntebbi képletben helyettesítvén, mind a gór- mind a távcsőre nézve lesz:

$$V = \frac{d^2}{\delta^2},$$

azaz: a gór- és távcső világossága egyenlő a szemüvegből kijövő sugárcsomag keresztmetszése és a szemlyuk területe közötti hányadossal.

5) A világosság a természetessel egyenlő, ha $V = 1$, azaz $d = \delta$; s ennél nagyobbat előállitni nem lehet. Mert ha $d > \delta$, akkor a sugárcsomagnak csak azon része hat be a szembe, melynek keresztmetszése a szemlyukéval egyenlő; a többit pedig a szivárványhártya visszatartóztatja, ennélfogva az a kép világitásában részt nem vehet. Innen következik, hogy miután a távcsőnél $\frac{D}{d} = \frac{t}{f_1} = N$, a nagyítás által a tárgylencse nyilása, s megforditva korlátozva van, t. i. ha N adva van, D-t legfeljebb $= N\delta$; ha pedig D adva van, N-et legalább $= \frac{D}{\delta}$-nek kell venni, ezen határokon kivül a távcső tökélyére semmi befolyással nem birván. Más oldalról a távcső nagyítását csak addig czélszerű emelni, mig $V > \frac{1}{2}$ marad, különben önvilágossággal nem biró testek igen homályosan látszodnak. Górcsőnél a világosság hiányát tükörrel, vagy egy üveglencséveli mesterséges világitás által lehet pótolni.

83. §.

1) Az egyszerű távcső a tárgyakat igen tökéletlenül és szines szegélylyel mutatja; minthogy már maga a tárgylencse által alkotott kép zavart és szines, s ezen tökéletlenség a szem-

üveg által nagyítva állittatik a szem eleibe. A hiba csökken, ha a tárgylencse nyilása a gyútávhoz képest igen kicsiny, ugy hogy csak a tengelyhez közel eső sugárok vehetnek részt a kép alkotásában; de ekkor a kép rendkivül homályosan látszik. Ezen okoknál fogva mai időben tárgylencse gyanánt szintelen aplanaticus kapcsolatok alkalmaztatnak.

2) A szemcső egy vagy több, ugyanazon fajta üvegből készitett egyszerű lencséből áll, és a tárgyat vagy felforditva, vagy fennállva mutatja. Az elsőbb csillagászati, az utóbbi földi szemcsőnek neveztetik azon alkalmazástól, melyre kiválólag van szánva. Szintelen kapcsolatok nincsenek használatban, mivel igen nagy görbületeket igényelnek. A szemcső e szerint mind a gömb-, mind a szineltérésnek alá lévén vetve, a tárgylencse által alkotott képet ismét elrontja; de ezen káros hatást a lencsék kellő választása és elhelyezése által gyengítni, sőt nagy részint elháritni lehet.

3) A gömbeltérés észrevehetlen lesz, ha a szemcső legalább két síkdomboru, vagy síkhomoru lencséből van összetéve; mivel ekkor a törés megosztatván, mindenik lencsének nagyobb gyútávot lehet adni, ennélfogva a görbületi sugarak nagyobbakká, az ütközési és törési szögek pedig kisebbekké lesznek.

4) A szineltérést a két szemüveg közötti táv kellő választása által lehet eloszlatni. Ugyanis a tárgylencse által alkotott szintelen képnek mn (45. ábra) fehér sugárai az első szemlencse által megtöretvén, ismét szines szálakra oszlanak, melyek közül a törékenyebbek op, $o'p'$, a lencse tengelyéhez közelebb, a kevésbbé törékenyek pedig oq, $o'q'$ távolabb ütköznek a második lencse felületébe, hol az elsőbbek esési szöge kisebb, az utóbbiaké pedig nagyobb leend. Innen következik, hogy a második törés alkalmával a törékenyebb szinek eltérittetése kisebb, a kevésbbé törékenyeké pedig nagyobb leend; ennélfogva a második törés az első által okozott szétágazást kisebbíti, sőt ha a lencsék egymástól kelleténél nagyobb távban állanak, s ennélfogva az ütközési pontok p, q, és p', q' egymástól távolabb esnek, a szétágazó sugárok összetartókká is válhatnak. Ha tehát a szemüvegek kellő távban helyeztetnek egymás után, a szétágazás egészen elenyészik, és a szines qs, pr, $p'r'$, $q's'$ sugárok párhuzamosan lépnek ki a légbe.

84. §. Csillagászati szemcsövek.

A csillagászati szemcsövek kétfélék, u. m. Huyghens és Ramsden-féle szerkezetüek.

1) A Huyghens-féle két síkdomboru, domboru oldalukat a tárgy felé fordító lencséből áll, melyek közül az első a tárgylencse, és az általa alkotott kép között foglal helyet. A 46. ábrából látható, hogy a tárgylencse által megtört sugárok az első szemlencse által még egyesültök előtt felfogatnak, és rövidebb távban egyesittetnek; mely okból ez gyüjtő — Collectiv — nevet visel. A második lencse egyszerű nagyitó üveg módjára működik. Hogy a legtisztább látás és szintelenség feltételeinek elég tétessék, a szemüveg méretei Prechtl szerint következőképen vétetnek: $f_2 = \frac{1}{3} f_1$, $l_1 = \frac{2}{3} f_1$, a szemnek a második lencsétőli távja $= \frac{1}{6} f_1$, a felfogott képnek az első üvegtőli távja $= \frac{1}{2} f_1$, a valódi kép a két lencse közt középen áll. A szemcső egyetemes gyútávja $\varphi = \frac{1}{2} f_1$, tehát annak nagyítása a 77. §. ⊙' szerint:

$$N = \frac{t}{\varphi} = \frac{2t}{f_1}.$$

Ezen kifejezésből látni lehet, hogy a Huyghens-féle szemcső nagyítása kétszer olyan nagy, mint az első lencséé; továbbá az kétszer olyan nagy nyilást megbir, és kétszer olyan nagy láttért szolgáltat, mint a vele egy hatású egyszerű lencse.

2) A Ramsden-féle szemcsőben a lencsék domború oldalai egymás felé vannak fordulva, s a tárgylencse által alkotott kép az első lencse előtt áll, mint a 47. ábrából látszik. Innen következik, hogy ezen szemcsőt kettős nagyító üvegnek lehet tekinteni, s méretei Prechtl szerint következők: $f_2 = \frac{5}{9} f_1$, $l_1 = \frac{4}{9} f_1$ a szem távja a második lencsétől $= \frac{1}{12} f_1$, a képnek az első lencse előtti távja $= \frac{1}{10} f_1$, a szemcső egyetemes gyútávja $\varphi = \frac{1}{2} f_1$.

Meg kell jegyezni, hogy ezen szerkezet a szineltérést nem oszlatja el olyan tökéletesen, mint az előbbi, ennélfogva elméleti szempontból annak utánna áll.

85. §. Földi szemcső.

1) A földi szemcső négy lencséből van összetéve, mint a 48. ábra mutatja. Ezek közül az első a tárgylencse által alkotott képből kijövő sugárokat megtöri és összetartóbbakká teszi. A második a sugárokat megforditja és igen nagy távban képpé egyesitné ugyan; de mielőtt ez történnék a sugárok a harmadik által felfogatnak, és képpé egyesittetnek. Végre a negyedik egyszerű nagyító üveg gyanánt működik.

Ezen elemzésből látható, hogy a földi szemcső nem egyéb összetett górcsőnél, melynek tárgyfelőli része két különálló egyszerű lencséből, szemfelőli pedig a Huyghens-féle szemcsőből áll. Mind a két pár lencse külön csövekbe, ezek pedig egy nagyobb csőben vannak befoglalva.

2) Meg kell még említni, hogy a szemcső azon helyén, hol a valódi kép áll elő, közepén kerek lyukkal ellátott fenek — diaphragma — van helyezve, mely a kép kiterjedését korlátozza, és annak a tengelytől távolabb eső részeit elfedi.

86. §. Irányszálak.

1) A távcső mérésre csak akkor alkalmatos, ha vele bizonyos irányt kitűzni vagy irányozni lehet. E czélból a cső hosszában egy vagy több meghatározott síknak, vagy vonalnak kell lenni, melyet a természetben kitűzött vonalak irányába lehessen állitni. Ezen iránysík, látsík vagy irányvonal, látvonal a tárgylencse láttani középpontja, és az ugynevezett keresztszálak, vagy azoknak metszéspontja által állapittatik meg; a keresztszálak pedig a szemhez legközelebb eső valódi kép síkjában a diaphragmán kifeszített finom pókszálakból állanak, s a cső látterében a 49. ábrában látható alakok valamelyikét mutatják. Ezen finom szálak közül valamelyiket a távcsőnek a kellő oldalra való mozditása által a tárgy képére be lehet állitni; ugy hogy a szemüvegen át nézvén, a szál a tárgy képét középen metszi, s ekkor a fentebbi §§. értelmében a tárgy is az illető iránysíkban fog állani, azaz a tárgy be lesz irányozva.

2) Néha a látsík fekvése a távcsőben valamely helyhez van kötve. Hogy azt be lehessen állitni, a diaphragmának egy kis mozdulhatósággal kell birni, mindamellett, hogy az a csőben merev állapotban van megerősitve. E czélból az (50. ábra) négy csavarka közé van szoritva, melyek azt a fenek lyukában szabadon tartják, s minden felé egy kevéssé mozdíthatják. Ha a diaphragmát csak egy irányban kell mozdítni, akkor egy átalellenes csavarpár is elegendő, s hogy a diaphragma ne inogjon, két felől a lyuk oldalait érinti, melyek neki mintegy vezetőül szolgálnak.

3) Néha megkivántatik, hogy a keresztszálak a cső tengelye körül egy kis fordulási képességgel birjanak. Ezt vagy a diaphragma csövecskéjének mozoghatóvá tétele által lehet elérni, s ekkor a szemcsőben azokon a helyeken, hol a csavarkák keresztül mennek, keresztben hosszukás lyukak vannak kimetszve, mint az 50. ábrában *n*-nél látszik; vagy pedig a diaphragma mozdulatlan, és az egész szemcsövet kell tengelye körül fordítni. E czélra annak hosszában egy négyszögü pálczácska *p* (51. ábra) van csavarok által megerősitve, mely egy, a távcsőben kimetszett nyilásban két csavarka *q*, *q* által tartatik. Vagy végre az egész távcsőt lehet tengelye körül fordítni, a szemcső pálczácskája pedig az *o* nyilást egészen betölti; ennélfogva az oldalcsavarkák elmaradnak.

87. §.

Az irányzás csak ugy lehet biztos, ha a keresztszálak a szemüvegen keresztül tisztán látszodnak, és a kép a keresztszálak síkjába esik.

1) Az első feltételnek ugy lehet eleget tenni, ha a szemüveg és a keresztszálak közti táv egy kis változtatást enged; minthogy ennek rövidlátó szemnél egy kissé rövidebbnek kell lenni, mint rendesnél. Ezen változtatást kétképen lehet eszközölni, t. i. vagy a diaphragma bir a cső hosszában egy kis mozoghatósággal, s hogy a csavarok a mozgást ne gátolják, a szemcsőben hosszukás lyukacskák vannak vágva, mint a 50. ábrában *m*-nél látszik; vagy pedig a diaphragma mozdulatlan, hanem a szemlencse mozogható egy kevéssé, s e czélból egy kis csövecskébe van befoglalva, melyet a csőbe be lehet csavarni.

2) A második feltétel igen fontos azért, mert ha annak

elég tétetett, akárhol nézünk a szemlencsén keresztül, a keresztszál a képnek mindig ugyanazon pontját metszi. Ellenben ha a keresztszál és kép egymáson kivül esnek, mint az az 52. ábrában látszik, hol M a szemlencsét, N a keresztszál átmetszését, és P a képet ábrázolja, akkor egy kis parallaxis áll elő; azaz a szerint, a mint a szem a lencse megett m, m', m''-ben áll, a szál a képnek p, p', p'' pontjaira vetődik. Ha tehát a szem a lencse megett fel vagy alá mozog, a szál is mozogni látszik a képen. Minthogy a kép helye a távcsőben a tárgy távjához képest változik, szükség, hogy a tárgylencse és a szemcső közötti távot változtatni lehessen. Ezen eredményt mind a tárgylencse, mind a szemcső mozoghatóvá tétele által el lehet érni. Az első szerkezet szerint a keresztszál a távcsőben mozdulatlan, a tárgylencse pedig külön csövecskébe van foglalva, melyet ki s be lehet tolni. A második szerkezet szerint, mely ma általánosan el van fogadva, a tárgylencse a távcsőbe mozdulatlanul be van csavarva, s a diaphragma a szemcső belsejébe van helyezve, melylyel együtt azt ki és be lehet tolni. Mind a két esetben addig kell a mozogható csövet tolni, mig a parallaxis egészen elenyészik.

ELSŐ RÉSZ.

Vizszintes mérés.

I. OSZTÁLY.

Telekmérés.

88. §. Bevezetés.

A telekmérés egyes telkek határok uradalmak felvételével foglalkozik.

A felvételnek célja általában mind azon mértani adatok meghatározásában áll, melyek a telkeknek álladalmi gazdászati iparos hadi s egyéb célokra felhasználásánál kérdés alá jöhetnek. Hogy ezen adatok a lehető legnagyobb rendben s átlátszóságban tartassanak, egy térképben — mint valamely raktárban — rakatnak le, mely kicsinyített mértékben a természeti idomokhoz hasonló alakokat képez. Ennek segitségével azután minden kiterjedés irány emelkedés s egyéb mértani viszonyokra vonatkozó feladatokat könnyebben fel lehet oldani, mint az a helyszinén közvetlen mérés által eszközölhető volna.

89. §.

A telekmérésben tehát két fő műtételt kell megkülönböztetni; u. m. az adatok közvetlen megmérését, és azoknak térképpé összeállitását vagy a szerkesztést. Ezen műtételek néha egymástól különválva, néha egyszerre alkalmaztatnak; mindketten egyenlő fontossággal birnak, s a térkép tökélyére egyenlő befolyást gyakorolnak. Ennélfogva egyiket sem szabad a másiknak alárendelni; valamint egyiknek a másik feletti kiemelése semmi gyakorlati hasznot nem hoz, hanem csak idő- és munkapazarlást okoz.

90. §. Vetületi sík.

1) Minthogy a föld szine egyenetlen, a mennyiben a hegyek és völgyek oldalai rendetlen görbe felületeket képeznek; ellenben a tábla, melyre a térkép rajzoltatik, sík; — görbe, lefejthetlen felületeket pedig síkon eltorzitás nélkül lerajzolni nem lehet: a föld szinének pontjaiból egy bizonyos síkra függélyesek gondoltatnak, és az ezen függélyesek lábpontjait öszvekötő vonalak rajzoltatnak a táblára. Ezen vetületi síkon keletkező idomok tehát a föld szinén létező, természetes lejtőséggel biró telkektől nagyságokra nézve különböznek. Legyen AB (53. ábra) valamely lejtős sík átmetszete, AB' a vetületi sík, $BB' \perp AB'$-re és BAB' szög $= \alpha$, akkor:

$$AB = \frac{AB'}{\cos \alpha}.$$

Ugyanezen összefüggés érvényes még akkor is, ha AB és AB' az illető síkokon fekvő területeket jelentenek.

2) A mi a vetületi sík fekvését illeti, ámbár lehető volna ezt némely esetekben a természetben előforduló valamely lejtős síkkal párhuzamosan választani: mindazáltal az kivétel nélkül a föld mathematikai felülete érintő síkjával egyközűnek vagy v i z s z i n t e s n e k vétetik. Mert a természetben ritkán lehet olyan lejtős síkot találni, melynek hajlása nagyobb kiterjedésében állandó volna; de ha lehetne is olyan síkot találni, azt a természetben biztosan kitűzni s hozzá akármely ponton keresztül párhuzamost húzni — mint az a felvételi munka folytán megkivántatik — igen nagy gyakorlati nehézséggel jár. Ellenben a vizszintes sík fekvését a nyugvó víz szine, vagy egy zsinórra kötött szabadon függő test segitségével akárhol legpontosabban meg lehet határozni.

3) Némelyek azon gyakorlatot, miszerint a természetes lejtős síkon fekvő területek helyett azoknak vizszintes vetületeit vesszük, azon physikai okkal is akarták támogatni, hogy a lejtős síkon több növény nem terem, mint annak vizszintes vetületén, minthogy minden növény életére bizonyos légkörnyezet kivántatik meg; az azt körülvevő légoszlop pedig mind a két esetben ugyanaz. De ezen állitás csak szálas növényekre nézve helyes, melyek természetüknél fogva függélyes irányban nőnek, nem pedig fűneműeknél, melyek ezen feltételhez kötve nincsenek.

Mások azzal is akarják a fentebbi gyakorlatot igazolni, hogy a lejtős síkon, a nagyobb kiterjedés daczára, nem terem több, mint annak vizszintes vetületén, minthogy a lefolyó esővíz igen sok tápanyagot magával ragad, mely különben a föld termékenyitésére fordittatnék. De ezen befolyás nem m e n n y i s é g i, hanem m i n ő s é g i természetü; a minőségnek pedig a mennyiség általi kárpótlása mindig csak elkerülhetetlen rosznak tekinthető.

91. §. Felvételi módok.

Mielőtt a telekmérés segédeszközeinek előadásába, és azok alkalmazásának részleteibe ereszkednénk, szükség azon mértani elveket elősorolni, melyeken a felvételi módok vagy rendszerek nyugosznak. Csak igy lehet a különböző mérnöki munkálatok czéljával, s az azoknak véghezviteléhez megkivántató műszerek természetével megösmerkednünk. Az emlitett elvek következők:

1) Adva lévén két pont A, és B (54. ábra) egy harmadiknak C fekvése meghatároztatik, ha az AC, BC hosszak megméretnek; minthogy ekkor a keletkező $\triangle$-nek minden oldalai ösmeretesek lesznek. Az elemi mértan utmutatása szerint egy háromszöget a rajztáblán úgy lehet szerkeszteni, hogy a kicsinyített mértékben feltett AB vonal végpontjaiból az ugyanazon viszonyban kicsinyített AC, és BC vonalakkal, mint sugárokkal, körívek húzatnak; ezek egymást a keresett pontban metszik.

* Ha a megmért oldalak közül valamelyik, p. o. $BC = a$, egy kicsit hibás, akkor a szerkesztés is hibás eredményt ad. Nevezetesen legyen a BC-ben ejtett hiba $CD = \triangle a$, akkor a C pont C'-be mozdul ki helyéből; a szerkesztési hiba tehát a CC' ívecske által ábrázoltatik. Ennek értéke a $CC'D$ hibaháromszögecskéből, melynek oldalait észrevehető hiba nélkül egyeneseknek lehet tekinteni, könnyen meghatározható. Ugyanis $D = 90^0$, C' közel $= C$-vel, azon szöggel, melyet AC és BC egymással képeznek, minthogy a megfelelő szárak egymásra merőlegesen állanak. Tehát

$$CC' = \frac{\triangle a}{sin\ C}.$$

Ezen mennyiség a legkisebb értékre szoritkozik, ha $C = 90^0$, t. i. legkisebb $CC' = \triangle a$.

2) Ha két pont A és B adva van (55. ábra), az azokat

öszvekötő vonalat x tengelynek, egyik pontot pedig az öszrendezők kezdőpontjának választván, egy harmadik pontot C annak derék öszrendezői által lehet megállapitni.

* Ha az $AD = x$, és $CD = y$ megmérésében hiba történt, akkor a szerkezetben is ugyanazon hiba fog mutatkozni. Ha pedig a derékszög kitüzésében esett volna egy kis hiba, úgy hogy a megmért rendező CE a merőlegessel egy kis $= w$ szöget képezne, akkor az x és y-ben ejtett hibákat következőképen lehet kifejteni.

$$DE = \triangle x = CE \times \sin w,$$
$$CE - CD = \triangle y = CE - CE \times \cos w.$$

Minthogy pedig w igen kis szöget jelent, szabad lesz $\sin w$ helyett az ívet, $\cos w$ helyett pedig $= 1 - \frac{w^2}{2}$-et tenni, s ekkor elég közelitéssel lesz:

$$\triangle x = CE \times w,$$
$$\triangle y = CE \times \frac{w^2}{2}.$$

Ezen kifejezésekből látható, hogy mind a két hiba annál nagyobb, mennél nagyobb a rendező; egyébaránt a rendező hibája, a metszékéhez képest, csaknem egészen elenyészik.

3) Hasonló körülmények közt ferde öszrendezők által is lehet valamely pont fekvését meghatározni, és a szerkesztési hiba hasonló módon fog mutatkozni.

* Nevezzük a tengelyek hajlásszögét φ-nek (56. ábra), akkor a CDE $\triangle$-ből folyik:

$$ED \times \sin \varphi = EC \times \sin w$$
$$- ED \times \cos \varphi + EC \times \cos w = CD.$$

Ezen egyenletekből következik, ha

$$\sin w = w, \text{ és } \cos w = 1 - \frac{w^2}{2}\text{-nek vétetnek:}$$

$$DE = \triangle x = \frac{CE \times w}{\sin \varphi},$$

$$CE - CD = \triangle y = CE \times w \,.\, \mathrm{cotg}\varphi + \frac{CE \times w^2}{2}.$$

4) Ha két pont A és B (57. ábra) adva van, az azokat öszvekötő vonalat tengelyül, egyiket a két pont közül pedig sarkpontul választván, egy harmadik C fekvését sarköszrendezők által is meg lehet határozni. Ezek a v o n ó s u g á r — radius vector

— és a s a r k s z ö g $CAB = \alpha$, melyet a vonósugár a tengelylyel bezár.

* Ha ezek közül egyik vagy másik hibás, akkor a szerkezet is hibás lesz. Nevezetesen a vonósugárban ejtett hiba a szerkezetben is épen olyan nagy hibát okoz; a sarkszögben ejtett hiba pedig a C pontot helyéből körívben mozditja ki, melynek radiusa a vonósugár. Tehát ha a sarkszög hibája $= \triangle\alpha$-nak neveztetik, lesz:

$$CC' = AC \times \triangle\alpha.$$

5) Ha két pont A és B (58. ábra) adva van, egy harmadiknak C fekvését az AB hossz, és a mellette fekvő szögek A, B, vagy egy mellette, és egy átalellenben fekvő szög A, C által lehet meghatározni.

* Ha ezen szögek közül egyik p. o. A egy kicsit hibás: akkor a C pont C'-be mozdul ki helyéből, s a hibát CC' az ACC' hibaháromszögből lehet megitélni, t. i.:

$$CC' = \frac{AC \times \sin \triangle A}{\sin C'},$$

mely kifejezésben $\sin \triangle A$ helyett az ívet, és C' helyett C-t lehet tenni. Tehát elég közelitéssel lesz:

$$CC' = \frac{AC \times \triangle A}{\sin C}.$$

A hiba a legkisebb értékre szoritkozik, ha $C = 90^0$, ekkor t. i. lesz:

$$CC' = AC \times \triangle A.$$

6) Egy sokszögnek pontjai annak körületi darabjai által is meg vannak határozva, mint azt a sokszögtanban bővebben láttuk.

7) Egy nevezetes módositása ezen módnak abban áll, hogy a körületi szögek helyett az oldalak delejes elhajlásai — Declinatio — α, β, γ, (59. ábra) méretnek meg, melyekkel a körületi szögek helyét tökéletesen pótolni lehet. Ezen munka közben szabad a szögpontokon keresztül gondolt delejes déllőket párhuzamosoknak tekinteni, ámbár szorosan véve azok a föld delejes sarka felé összetartanak.

*) Hogy az ezen körülményből eredhető hibát meg lehessen itélni, legyen AB (60. ábra) egy legnagyobb körív a föld felületén; húzzunk A és B-én keresztül delejes déllőket, melyek egy-

mással a delejes sarkpontban M találkoznak, mig a csillagászati délkörök egymást a P sarkpontban metszik. A csillagászati és delejes déllők a föld felületének különböző pontjain különböző szögeket zárnak be egymással, de a különbség, egyenlő körülmények közt, annál kisebb, mennél kisebbek a földirati szélességek, és a pontoknak egymástóli távjai. Szabad tehát ezen különbségeket a telekmérés minden feladataiban egyenlőknek tekinteni, ugy hogy $MAP = MBP$-vel, s ekkor a delejes déllőknek valamely két pontban való összehajlását ugyanazon pontokban az astronomiai délkörök darabjai közt bezárt szöggel lehet felcserélni. Legyen az AB ív $= a$, annak az A és B pontokban a delejes déllőtőli elhajlása α, α', a delejes déllőknek a csillagászati délköröktőli elhajlása $MAP = MBP = \delta$, az A pontnak földirati szélessége $= \varphi$, akkor az ABP gömbháromszögben $AP = 90^0 - \varphi$, $A = \alpha - \delta$, $B = 180^0 - (\alpha' - \delta)$ lévén, következő egyenlet áll:

$$cotg\ (\alpha' - \delta) = cotg\ (\alpha - \delta)\ cos\ a - \frac{sin a\ tg\varphi}{sin(\alpha - \delta)},$$

vagy tekintetbe vévén, hogy a csak 2—4'-nyi szöget jelent, minthogy a telekmérésben előforduló hosszak 2—4 ezer ölet meg nem haladnak, elég közelitéssel lesz:

$$cotg(\alpha' - \delta) = cotg(\alpha - \delta) - \frac{a\ tg\varphi}{sin(\alpha - \delta)},$$

és rövid átváltoztatás után:

$$sin(\alpha' - \alpha) = a\ sin(\alpha' - \delta)\ tg\varphi.$$

Ezen kifejezésben $\alpha' - \alpha$ csak igen kis szöget jelentvén, sinus helyett az ívet, valamint az egyenlet jobb oldalán α' helyett α-t lehet tenni. Továbbá a rendesen hosszmértékben lévén adva, czélszerű az ívet hosszmérték által fejezni ki, azaz a helyett $\frac{a}{R}$-et kell tenni, hol R a föld sugárát jelenti. Ezen változtatásokat a fentebbi egyenletbe vezetvén, lesz:

$$\alpha' - \alpha = \frac{a}{R}\ tg\varphi\ sin(\alpha - \delta)\ .\ .\ .\ \odot$$

mely kifejezés világosan mutatja, hogy a delejes déllők öszvehajlása annál nagyobb, mennél nagyobb a hely földirati szélessége, és mennél inkább közeledik az ív a parallel körhöz. Az összehajlás legnagyobbá lesz, ha $\alpha - \delta = 90^0$, tehát a legnagyobb

$$\alpha' - \alpha = \frac{a\ tg\varphi}{R}.$$

Egyébaránt ezen mennyiség a 45⁰ szélesség alatt 1000⁰-re még 1′-et meg nem halad.

8) Ezen módok áttekintése azon eredményre vezet, hogy a közvetlen mértani munkálatok a pontok megjelölésére, egyenes vonalak kitüzésére, azoknak megmérésére, bizonyos nagyságú szögek kitüzésére, s általában mindennemű szögek mérésére szoritkoznak.

I. SZAKASZ.

Egyenes vonal kitüzése és megmérése. 90⁰, 60⁰, 45⁰-u szögek kitüzése.

92. §. Jelek.

Pontok kijelölésére a mezőn, különböző czélokhoz képest, különböző eszközök használtatnak, u. m.

1) 12—16″ hosszu □ vagy ▭ keresztmetszésü karók, melyek vagy csak könnyen szúratnak a földbe, vagy pedig egészen beveretnek, a szerint, a mint csak ideiglenes vagy állandó jelül szolgálnak. Hogy utóbbi esetben a pontra könnyebben rá lehessen találni, czélszerű a karó körül, a 61. idom alakjára, gödröcskéket kivájni — darluláb —, melyeknek nyomai hoszszabb időre láthatók maradnak, ha szinte a karó kiveszett volna is a földből.

2) 6—8′ hosszu, $1^1/_2$″ vastag rudak, egyik végükön meghegyezve, czélszerűen meg is vasalva, hogy könnyebben be lehessen azokat a földbe verni. Ezek 50—100⁰ távra igen jól látszodnak, ezért egyenes vonalak, szögek kitüzésére igen alkalmatosak; czélszerűen lábakra beosztatván, felváltva fehér és veres festékkel bevonatnak, s eképen kisebb vonalak, p. o. rendezők megmérésére alkalmatos mérőrudakat szolgáltatnak.

3) 3—4⁰ hosszú vékony s könnyű rudak, melyekre fehér és veres kelméből készült lobogók köttetnek, hogy 3—400⁰-nyire is láthatók legyenek. A lobogók felkötése módja a 62. ábrából látható; mind a két módnak megvan a maga előnye, s egyszer

egyik, másszor másik lobogó látszik jobban, a szerint, a milyen irányban a szél fúj. Mindazáltal azon tulajdonság, hogy az *A* lobogó a légben mindig lebeg, tökéletes szélcsendet kivévén, mig *B* nyugodt felületet képez, az *A* láthatóságát tetemesen elősegíti. A lobogók azért készittetnek fehér és veres kelméből, mert ezen színek a háttér színeitől legjobban elütnek. Ez okból a fehér és veres, mérnöki színeknek is neveztetnek.

4) Keresztrudak. Ezek 3⁰ hosszú, 3—4″ átmérőjü rudak, melyeknek felső végükön keresztben két 18—20″ hosszú, 10″ széles deszkadarabok szögeztetnek (63. ábra), és fehér festékkel, vagy legalább mészszel befestetnek. Ezen rudak meghegyeztetvén, vasrúddal eleve a földbe vert lyukakba nagy erővel beüttetnek. Czélszerűbb, ha deszkából készitett, és vas abroncscsal megkötött 3′ hosszú tokok ásatnak be a földbe, ugy hogy csak 1—2″-nyi darab álljon ki belőlök, s a rudak függélyes állásban belé helyeztetvén, ékekkel megerősittetnek. Ezen rudakat, szükség esetében, ki lehet venni a tokból és ismét helyreállitni; mi okból ezen pontokat álláspontokul lehet használni. 1000, sőt jó világitás esetében 1500⁰-nyi távra is lehet őket látni.

5) Ha még nagyobb távra kell valamely pontot láthatóvá tenni, akkor 5—6⁰ hosszú szálfákat, 3′ hosszú, 1½′ széles keresztdeszkákkal ellátva, szoktak a földbe beásni; csak hogy ezeket kivenni és ismét helyre állitni nehézségük miatt nem lehet. Keresztdeszkák helyett némelyek szalmazsúpot — csóvát — szoktak a szálfák végére kötni (64. ábra) és hogy az le ne csússzon, a rúd végén lyukat fúrván, egy pálczát dugnak keresztül, melyen a csóva köteléke fennakad. A keresztdeszkák, kivált ha fehér festékkel be vannak vonva, melyet az eső le nem moshat, elsőséget érdemelnek azért, mert jobban látszodnak, és a deszkák által visszavetett sugároknak — melyek a távolban fehér folt gyanánt mutatkoznak — közepe a rúd tengelyével, minden oldalról nézve, összeesik; holott a csóva világos oldala többnyire a rúd tengelyén kivül esik, s ezért némely hibákra adhat alkalmatosságot.

6) 5—6⁰ magas, 3—4 oldalu gúlák — pyramis — (65. ábra) felső részükön bedeszkázva, és fehérre befestve. Ezeknek tengelyében, melyet a földön egy függöny segitségével ki lehet tűzni, egy oszlopot szoktak beásni, mely a szögmérőnek állványul szolgál. Néha, kivált erdős bérczeken, a földszinti kilátás a körösko-

rül lévő akadályok által el van zárva. Ilyenkor ezen oszlopot 2—3⁰ magasra kell csinálni, s az oszlop körül deszkákból állást késziteni ugy, hogy ez az oszlopot ne érintse; különben a mérnök léptei által okozott rázkodások az oszlopon át a mérő eszközzel is közöltetnének.

7) Ezeken kivül minden kitünő tárgyak, minők a tornyok, magas háztetők csúcsai és kéményei oszlopok keresztek egyedül álló fák kútágasok stb., melyek helyzetüknél fogva nagyobb távban láthatók, jelül használtathatnak, annyival inkább, minthogy ezek sem a szél, sem a roszakarat általi megrongáltatásnak nincsenek annyira kitéve, mint a rudak.

93. §. Egyenes vonal.

1) Egy egyenes vonal, vagy helyesebben mondva, függélyes sík a végpontoknál földbe vert karók vagy rudak által tökéletesen ki van jelölve. De néha a végpontok közt, vagy ezeken kivül több ilyen pontokra is van szükség, melyek szintén az egyenes vonalban feküsznek. Ezen pontok meghatározása kitűzésnek neveztetik.

A kitűzés rendesen csak a hosszmérés könnyitése végett, s ilyenkor mindig a legegyszerűbb szerszámok — rudak — által eszközöltetik. De vannak olyan esetek is, melyekben a kitüzés által — még pedig többnyire kedvezőtlen körülmények közt — bizonyos pontok szigorú megállapitása czéloztatik, melyeknek később más mérnöki munkálatokra kiindulási pontokul kell szolgálni. Ilyenkor egyszerű rudakkal ritkán lehet czélt érni, hanem tökéletesebb irányzó s más felvételi műszerekre van szükség.

2) A kitűzési feladatoknál következő eseteket lehet megkülönböztetni.

Először: Ha egyik ponttól a másikat látni lehet, s legalább

egyik pont hozzáférhető, vagy

ha mind a két pont hozzáférhetlen.

Másodszor: Ha egyik ponttól a másikat látni nem lehet.

94. §. Első eset.

Ha egyik pont hozzáférhető. 1) Legyenek a végpontok *A*, *B* rudakkal jelölve (66. ábra), melyeket egyenlő vastagoknak teszünk fel, s egy harmadik pont C legyen a két végpont közt kitüzendő: akkor a mérnök két vagy három lépéssel az A háta megett szemét az A, B rudak jobb oldalain keresztül menő érintő síkba helyezi, és int a segédnek, ki C-nél egy rúddal áll, mig annak rúdja is érintésbe jön az irányzó síkkal. Az irányzás a rudak baloldalain ismételtetik, s ha C mindkét oldalt érinti az iránysíkokat, a kitűzés helyes.

2) Ha a rudak vastagsága különböző, de tengelyeik egy függélyes síkban állanak, akkor a B rúd (67. ábra) az A és C rudak mindkét oldalain keresztül húzott érintő síkoktól egyenlő távban látszik. A fentebbi kitűzési szabály tehát oda módositandó, hogy a C rúd helyét addig kell változtatni, mig ezen tulajdonságnak elég nem tétetik.

3) Ugyanaz áll akkor is, ha a kitűzésre egy kézi távcső használtatik, minthogy ez a rúd oldalához tartatván, az irányzó síkra nézve épen olyan hatást gyakorol, mintha a rúd a távcső átmérőjével vastagabb volna.

4) Ha a C pont az A, B pontokon kivül esik, azaz a vonalat meg kell hosszabbítni, akkor a mérnök segéd nélkül is beállithatja magát az egyenes vonalba.

5) Ha a két kitűzött vonal metszéspontját kell meghatározni, akkor mind a két vonal végén egy mérnök helyezi el magát, s a segédet egyszer egyik, másszor másik állitja be az illető vonalba. Figyelemmel kell lenni arra, hogy ha a segéd már az egyik vonalba beállittatott, a másodikba beállitás folytán, — a mennyire szabad szemmel meg lehet itélni, — az első vonal hosszában mozogjon, nehogy az első beállitás tetemesen elromoljék. Ezen műtétel felváltva addig ismételtetik, mig a kitűzött pont mind a két vonalban fog állani; s ekkor az ezeknek metszéspontját fogja kijelölni.

6) Ha m i n d a k é t p o n t h o z z á f é r h e t l e n, akkor ilyeténképen lehet működni. A két végpont A és B közt (68. ábra) két mérnök C és D rudakkal ellátva helyezi el magát, s elébb D állitja be a C rudat az $A\,D$ egyenes vonalba, mi által az C' fekvésbe jön; azután C' állitja be D rudat a $C'\,B$ irányba, miáltal az D' fekvést nyer, s igy tovább felváltva, mig végre mind a két rúd az AB vonalba jön.

95. §. Bauernfeind prismakeresztje.

1) Ezen feladatnak kényelmesebb feloldására szolgál Bauernfeind prismakeresztje. Ez két egymás felett helyezett egyenszárú derékszögü üveg prismából áll, melyeknek feszitő oldalaik egymásra merőlegesen, befogóik pedig párhuzamosan állanak. Ezen prismák erős lemezből készült, elől és oldalt nyilásokkal ellátott tokban vannak megerősitve, és a megkivántató helyzet előállitása végett 4 igazitó csavarkákkal ellátva, melyek közül kettő a, a' húz, kettő b, b' pedig taszít. (69. ábra). Az ujabb szerkezet szerint 3 taszitó csavarka egy rendes △ szögpontjaiban, a negyedik, húzó, pedig annak középpontjában van helyezve. Ezen csavarkák az m lemezt, melyen a felső prisma üvegragaszszal van megerősitve, szilárd állásban tartják; de ha a taszitó csavarkák egy kevéssé megeresztetnek, azt minden irányban mozdítni lehet. E czélból a régibb szerkezetnél a húzó csavarkák a tok fedelén hosszúkás lyukakon mennek keresztül, hogy a mozgást ne gátolják.

2) A műszer használata következő. A mérnök azon a tájon, hol a kitűzendő pontnak esni kell, (70. ábra) a műszert szem előtt tartván, ugy hogy mind a két prismába egyszerre benézhessen, keresztben áll az AB vonalra. Ekkor az egyik prisma befogó oldala A, a másiké B felé fog nézni, tehát az A és B tárgyakból kijövő sugárok a prismákon keresztül menvén, azoknak mellső oldalain jőnek ki a légbe, és az A, B tárgyak képei a kijövő sugárok irányában A', B' pontokban látszodnak. A mérnök most előre vagy hátra megyen, mig az A', B' képek egygyé válnak, s ekkor a műszer közepe az AB vonalban fog állani. Ugyanis a sugároknak a prismákon átmenetele a 64. §. értelmében történvén, a prismák ugy hatnak, mintha csak a feszitő síkok tükrei egyedül működnének. A sugároknak ezen tükrök általi visszavettetése pedig a 61. §. utmutatása szerint menvén véghez, azon megjegyzéssel, hogy jelen esetben $C = 90^0$, a beeső és visszavetett sugárok hajlásszögei közt ezen összefüggés létezik:

$$x + y = 180^0,$$

Innen következik, hogy ha

$$y = 180^0, \quad \text{akkor} \quad x = 0,$$

azaz: a visszavetett sugároknak párhuzamosoknak kell lenni.

Megemlitendő, hogy ha az *A*, *B* tárgyak az állásponton keresztül menő vizszintes sík felett vagy alatt állanak, és a műszer tengelye — legalább szabad szemmel itélve — függélyes állásban tartatik, akkor a képek is a vizszintes sík felett vagy alatt a tárgyakkal egyenlő magasságban látszodnak.

Ha az *AB* vonal valamely ferde síkon fekszik, akkor a műszer tengelyét czélszerű nem függélyesen, hanem a ferde síkra merőlegesen tartani; azért a rudak képei nem szűnnek meg egymás közt párhuzamosok lenni.

3) Mielőtt a műszert használni lehetne, meg kell vizsgálni, valjon a prismák tengelyei és befogó oldalai párhuzamosak-e egymásal vagy nem?

E czélból egy körülbelől vizszintes síkságon három függélyesen felállitott rúd által egy egyenes vonal tűzetik ki, s a mérnök a prismakeresztet szabad kézzel — a mennyire szabad szemmel megitélni lehet — függélyes állásban a középső rúd felett tartván, megvizsgálja, valjon a két szélső rúd képei összeesnek-e vagy nem? Ha a prismák tengelyei nem párhuzamosak egymással, akkor a rudak képei egymás felé hajolnak, és különböző magasságban látszodnak. Az első hibát a *b*, *b'*, az uttóbbit az *a*, *a'* csavarkákkal lehet megszüntetni, egyiket közülök megeresztvén, másikat meghúzván, mig a képek párhuzamosakká lesznek és egyenlő magasságban látszodnak. Végre a befogó oldalak párhuzamosságát az *m* lemeznek tengelye körüli gyengéd forditása által kell eszközölni, mig a képek tökéletesen egybeolvadnak.

A műszer ekképen kiigazittatván, a szélső rudak képeinek mindig egymásra kell esni, akár előre, akár hátra fordulunk arczczal; s ezen megfordulást munka közben is lehet alkalmazni annak megvizsgálására, valjon a műszer időközben nem változott-e?

96. §. Második eset.

Ha a vonal egyik végpontjáról a másikat látni nem lehet, a kitűzést különböző körülmények közt különbözőképen lehet eszközölni.

1) Ha a vonal végpontjai — mint vasúti munkálatoknál sokszor megesik — 1—2 mértföldnyi távban vannak egymástól és egy kiterjedt síkságon állanak, melyen egy, a kilátást

gátló akadály, p. o. egy erdő húzódik keresztül: akkor az egyik végponton nagy füstöt lehet gerjeszteni, mely kedvező légköri körülmények közt tetemes magasságra függélyesen felemelkedik, s a másik végponton távcső segitségével az erdő felett láthatóvá lesz. Éjjel egy hordó kátrány lángja által okozott világosságot is jó eredménynyel használtak jel gyanánt, s annak közepét az erdő felett jól ki lehetett venni. Ezen esetben a beállitandó rúd vége az éji sötétség miatt argandi lámpával láttatott el, és az intés ferde irányban feleresztett rakéták által eszközöltetett.

De ezen mód csak akkor alkalmazható, ha az akadály a mérnök állásától nagy távban van; különben az tetemes magassági szöget elfedvén, a háta megett lévő tárgyakat még rendkivüli magasságban sem engedi látni.

2) Ha az előbbi mód czélhoz nem vezet, következőképen lehet működni. Legyenek A, B (71. ábra) a vonal végpontjai, tűzzünk ki egy egyenes vonalat AC olyan irányban, melyről gondoljuk, hogy körülbelül a B pont felé mutat, és verjünk be az egyenes vonalba karókat M, stb. azokon a tájakon, hol közbeeső pontokra szükség van. Magában értetik, hogy a kilátás akadályait el kell háritni; vagy ha ez lehetetlen volna, a vonalat párhuzamosan oldalt kell mozdítni. E czélból a már kitűzött darab két egymástól távol eső pontjából C, D egyenlő hosszaságú merőlegesek $CC' = DD'$ méretnek le, melyeknek végükön keresztül az akadály mellett el lehet látni. Ezen merőlegesek ritkán fognak 1—2°-et meghaladni; azért a derékszög kitűzésére a szabad szem többnyire elégséges, minthogy a 92. §. 2 szerint a derékszögben ejtett csekély hiba a merőleges hosszát igen kevéssé változtatja. Ha ekképen ezen segédvonal kitűzetett, és a B pontból rá merőleges BE bocsáttatott, végre az egész vonal A-tól D-ig, s D'-től E-ig, valamint BE is megméretik. Ezen munka közben azon hosszak, melyekben az M, N . . . karók esnek, feljegyeztetnek, s végre az M, N . . . pontokból az AB vonalig érő merőlegesek meghatározására az ábrában látható hasonló $\triangle$-ekből következő arányok állanak elő:

$$(AD+D'E) : (BE-D'D) = AM : Mm$$
$$= (AD+D'N) : (Nn-DD');$$

melyekből $Mm, Nn,$ . . . kiszámittatván, az M, N . . . pontokban merőlegesen felrakatnak.

3) Ugyanazon feladatot következőképen is fel lehet oldani. Köttessenek össze az *A*, *B* végpontok (72. ábra) egy szabad tetszés szerint választott, lehetőleg hosszú vonalakból összetett tört vonallal, mely czélra a helyszinén mutatkozó nyilások, melyekben messze lehet látni, felhasználtatnak. Ezen tört vonal egy sokszöget képez, melyben az *AB* oldal, és a mellette fekvő szögek egyedül ösmeretlenek; a többi körületi darabok pedig megmérethetnek. Ezen sokszög feloldatván, kijön az *A* szög, mely a helyszinén kitűzetvén, az *AB* vonal irányát meghatározza.

Ha a kitűzendő vonalnak végpontjai már egy térképen meg vannak állapitva, mint ez p. o. az erdővágások, osztályrészek, s a t. kitűzésénél szokott történni, a feladat csak az osztályvonalaknak a térképről a természetbe áttételére szoritkozik. Ilyenkor a kitűzendő vonalnak a szomszéd oldallali szögét *A* kell a térképen meghatározni, és ezt a természetben az illető pontban a megfelelő oldal mellé feltenni. Ekképen a kitűzendő vonal iránya meghatároztatván, a kitűzést a 95. §. 1 szerint tovább lehet folytatni.

4) Ha az *AB* vonalnak valamely táján egy pontot *m* kell nagy tökélylyel meghatározni és a vonal irányát kitűzni, akkor azon a tájon, hol a keresett pont valószinüleg esni fog, egy pontot *M* veszünk fel, és ezt a sokszög legközelebbi szögpontjával *C* összekötvén, egy uj sokszöget alakitunk, melyben az *Am*, *Cm* oldalak az *m* szöggel együtt ösmeretlenek, a többi körületi darabok pedig megmérethetnek. Ezen sokszög feloldatván, és a *Cm* hossza a *CM* vonalon leméretvén, a keresett *m* pont ki lesz tűzve. Végre az *m* pontban a szög a szomszéd *mC* oldalhoz feltétetvén, az *mA* vonal iránya is ki lesz tűzve.

5) Ha a végpontok *A*, *B*, (73. ábra) egy hegynek két oldalán vannak, akkor a 95. §. 6 szerint két közbe eső rúddal lehet a kitűzést véghezvinni. De ha a *C* pontból *B*-t, *D*-ből pedig *A*-t nem lehetne látni, akkor három vagy több rudat kell alkalmazni, melyek ugy helyeztetnek el, hogy mindeniktől a két előtte valót látni lehessen. A kitűzés ilyeténképen vitetik véghez: *E* beigazitja *C*-t az *EA* vonalba, hasonlóképen *D*-t ez *EB*-be, ezáltal az elsőbb *C'*, az utóbbi *D'* helyet fog elfoglalni. Ezután *C'* beigazitja *E*-t a *C'D'* vonalba, miáltal ez *E'* pontba jön. Most *E'* ismétli azt, a mit elébb *E* tett, s i. t., mig mindnyájan az *AB*

vonalba jutnak. Ezen működés — csekély módositással — akárhány rúdra is kiterjeszthető.

6) Néha alagútak épitésénél a tengely-vonal függélyes síkjában több pontok tűzetnek ki a földszinén, s ezekben a tengelyvonalig érő aknák ásatnak azért, hogy azoknak fenekén — az alagút vonalában — előre is hátra is, tehát egyszerre több helyen lehessen dolgozni. Ezen esetben a tengely-vonalat az aknák fenekén nagy tökélylyel kell kitűzni, minthogy a kivájást a falazás rendesen nyomban követvén, a hiba kiigazitására később alkalom nincsen. Pedig az — ha egyszer az alagút áttöretett, a találkozási helyen igen szembetűnik.

7) Ezen feladat legegyszerűbben a delejtű segitségével oldatik fel. A kitűzendő vonal delejes elhajlása t. i. a földszinén lévő pontban megméretik; ezután a pont egy hosszu zsinórral, melynek végére körte alakú, végén hegyes súly van kötve, lefüggélyeztetvén, a függély lábpontjában az elhajlás kitűzetik. (Lásd a 169. §.).

*8) Ugyanezen czélra szolgál a Starke prismája is, A' (74. ábra), mely egy erős lemezből készült szintén prisma alaku, s befogó oldalain nyilt toknak feszitő oldalán 4 részint húzó, részint taszitó csavarkák által ugy van lefoglalva, hogy azt minden irányban egy kicsit mozdítni lehessen. A toknak egyik nyilt oldalára egy erős lemez karika van forrasztva B', melynél fogva azt egy távcső fejére lehet tolni, s ekképen a prisma feszitő oldalát a távcső irányvonalával 45⁰ hajlásszög alatt szilárdul meg lehet erősítni. A távcső tulajdonképen egy lejtmérő műszer alkotó részét teszi, — melynek szerkezetébe most ereszkedni nem akarunk; — csak annyit kell megjegyeznünk, hogy az mind mértani tengelye körül, mely használat közben mindig vizszintessé tétetik, mind pedig ágyával együtt egy függélyes tengely körül forgatható. Hogy a távcső irányvonala a forgás által helyéből ki ne mozduljon, a távcső mértani tengelyével párhuzamossá tétetik, mi okból a diaphragma 4 csavarka közé van szorítva. (Lásd 86. §. 2).

*9) Ezen műszer használata ebben áll. Miután a távcső — egyelőre szabad szemmel — vizszintes, s a CA vonalra (74. ábra) merőleges fekvésbe hozatott, a prisma középpontja egy függöny által a C pont felett függélyesen beállittatik, a távcső vizszintessé tétetik, és a prisma nyilt oldala az *A* tárgy felé forditattván, a távcső függélyes tengelye körül forditattik, mig a tárgy képe a távcső látterében tökéletesen a függélyes szálra esik. Ekkor a *CA* vonal a távcső irányvonalával *CD*, és — a mennyiben ez a mértani tengelylyel párhuzamos — a távcső mértani forgás tengelyével is derékszöget fog képezni. Mert a 64. §. 2 szerint a prisma épen ugy hatván, mint a feszitő sík tükre egyedül, ez pedig az irányvonallal, következésképen a visszavetett sugárral is 45⁰-ot zárván be, szükségesképen az ütköző sugárral is 45⁰-ot fog képezni. Tehát $AC \perp CD$. Most a távcső vizszintes tengelye körül ugy forditattik, hogy a prisma nyilt oldala az akna feneke felé nézzen; ekkor az ott lévő tárgyak a távcsőben látszodni fognak és könnyű lesz két olyan, lehetőleg távol eső pontot az akna fenekén kijelölni, melyek az irányszál által metszetnek. Ezen pontokban karók veretnek le a földbe, és azok fején a pontok ujolag szigorúan megjelöltetnek. Ezen pontok szükségesképen az *AC* vonal vetületében feküsznek; mert a visszavetett sugárok — mindnyájan párhuzamosak lévén a távcső mértani forgástengelyével — az *AC*-n keresztül menő függélyes síkra merőlegesen állanak, tehát a beeső sugároknak az *AC* síkban kell lenni.

* 10) Mielőtt ezen műszert használni lehetne, meg kell vizsgálni, valjon 1) a távcső irányvonala párhuzamos-e annak forgástengelyével? 2) 45⁰-ot zár-e be a prisma feszitő síkjával?

Az első pontot illetőleg a prisma a távcső fejéről levétetik, s az irányszálak szabadszemmel függélyes, illetőleg vizszintes állásba hozatván, a távcső valamely távol lévő pontra irányoztatik, ugy hogy a függélyes szál azt tökéletesen középen messe. Ezután a távcső mértani tengelye körül 180⁰-al forditattik, miáltal a keresztszálak megforditott állásba jőnek, de azért függélyes, illetőleg vizszintes fekvésöket megtartják. Ha a tárgy képe ekkor is az irányszálra esik, ennek fekvése helyes; ellenkező esetben a kép eltérése a kettős hibát ábrázolván. Mert legyen a 75. ábrában *CD* a távcső mértani forgástengelye, *ED* az iránysík, mely meghosszabbitva az *M* tárgyat találja. Ha a távcső 180⁰-al felforditattik, akkor az iránysík *FD* fekvésbe jön, és az *N* ponton megyen keresztül. A távcsőben tehát az *MN* eltérés látszik, melynek közepe a CD tengely irányában van. A hibát ugy lehet eloszlatni, hogy a diaphragma az oldalcsavarkák által — melyek közül egyik megeresztendő, a másik pedig meghúzandó — jobbra vagy balra mozdittatik, mig a szál az MN közepére mutat; s ezen vizsgálat mindaddig ismételtetik, mig a szál mind a két fekvésben ugyanazon pontra esik. Ha ezen vizsgálat a vizszintes szálra is kiterjesztetik: akkor a keresztszálak metszéspontja által megállapitott iranyvonal is párhuzamossá lett a távcső forgástengelyével.

A második pontot illetőleg a távcső vizszintes fekvésbe hozatván, a prisma nyilt oldala valamely távol — 8—10000°-nyire lévő tárgy felé fordittatik, és az irányszál tökéletesen a tárgy képére beállittatik. Ezután a távcső ágyából kiemeltetvén, megforditva tétetik vissza, ugy hogy annak két vége helyet cseréljen. Ha most a távcsőnek tengelye körüli forditása által a szálat ismét a tárgyra lehet hozni, akkor a műszer helyes; ellenkező esetben pedig a kép eltérése az irányszáltól a kettős hibát ábrázolja. Ugyanis — feltévén, hogy a tárgyból kijövő sugárokat a nagy táv miatt párhuzamosoknak lehet tekinteni, — legyen EF (76. ábra) a prismával egyenlő hatású tükör, AC a beeső sugár, CC' a visszavetett sugár, egyszersmind a távcső mértani tengelye, és m a közöttök bezárt szög. Hasonlóképen a megfordított fekvésben $E'F'$ a tűkör, BC' a beeső, $C'C$ a visszavetett sugár, melyek egymással ismét m szöget zárnak be. $A'C'$ a fentebbi tárgyból jövő sugár, mely a feltétel szerint AC-vel párhuzamos. Nevezzük az $A'C'B$ szöget w-nak, akkor lesz:

$$2m - w = 180^0,$$

tehát a műszerben lévő hiba:

$$m - 90^0 = \frac{w}{2}.$$

Ezen hibának eloszlatása végett a prismát a csavarkák által egy kicsit fordítni kell, mig a szál a BA' tér közepére esik, s az egész műtételt ismételni kell, mig az a távcső mindkét fekvésében ugyanazon pontra mutat. Mennél távolabb esik a tárgy, annál tökéletesebb lesz a kiigazítás. Legyen a tükrök egymástóli távja $CC' = t$, a tárgy távja $= T$, akkor az AC és $A'C'$ sugárok hajlásszöge közel

$$\alpha = \frac{t}{T},$$

a fentebbi egyenlet tehát helyesebben lesz:

$$2m-w=180^0-\alpha,$$

s innen $$m-90^0=\frac{w-\alpha}{2}.$$

Az által tehát, hogy az $A'C'B$ szöget felezzük, hibát ejtünk, melynek értéke $=\frac{\alpha}{2}$. De ezen hiba, ha t legfeljebb $0^0{\cdot}2$, és T legalább 10000^0-nek vétetik, 0·00001-et meg nem halad, melynek $2''$ felel meg; ennélfogva egészen elhanyagolható.

98. §. Kitűzési hibák.

Az egyenes vonal kitűzésében eshető hibák két fő forrásból erednek, u. m. az emberi szem tökéletlenségéből, és a rudak ferde állásából.

1) Az elsőt illetőleg a 76. §. 2-ben láttuk, hogy a legkisebb látszög 40—60″-át teszen, (n-szer nagyitó távcsőnél n-szer kisebb). Ha tehát a 77. ábrában az AB és AC irányok közti különbség ezen határt át nem hágja, az A pontban a B, C rudakat egymástól megkülönböztetni nem lehet. Nevezzük a legkisebb látszöget w-nak, a kitűzendő rúdnak a szemtőli távját $AC=t$-nek, a kitűzési hibát $CE=x$-nek, akkor lesz:

$$x=tw=0{\cdot}00029t.$$

2) Ha az AB vonalat (78. ábra) meg kell hosszabbítni, és a mérnök C-nél áll, legyen a legkisebb látszög $ACB=w$, $AB=T$, $BC=t$, és húzzuk $BD \perp AC$, és $CE \perp AB$, akkor az ABD és ACE hasonló háromszögekből lesz:

$$AB:BD=AC:CE,$$

vagy elegendő pontossággal

$$T:tw=T+t:x.$$

Honnan következik:

$$x=\frac{t}{T}(T+t)\,w.$$

Ha pedig a mérnök az A pontban áll, akkor a BAC szög lesz $=w$, tehát a kitűzési hiba $CE=x'$ lesz:

$$x'=(T+t)\,w.$$

Ezen két eredmény egymástól a $\frac{t}{T}$ tényezőben különbözik, honnan következtetni lehet, hogy ha $t<T$, a C pontbóli, ellenkező

esetben pedig az A pontbóli kitűzés tökéletesebb. Átaljában véve a vonal meghosszabbítása mindig nagyobb hibával jár, mint valamely közbenső pontnak kitűzése.

3) Ha a kitűzendő rúd ferdén áll, és valamely közbeeső akadály miatt annak csak a felső vége látszik, akkor ez fog beállittatni az egyenes vonalba, a rúd lábpontja pedig a vonalon kivül fog esni. Legyen a 79. ábrában a rúd hossza $= h$, annak a vizszintes síkhozi hajlásszöge $= \varphi$, akkor annak vizszintes vetülete:

$$CD = h \cos\varphi,$$

és ha ennek az AB vonalhozi hajlásszöge θ-nak neveztetik, a kitűzési hiba $DE = x$ lesz:

$$x = CD \times \sin\theta = h \cos\varphi \sin\theta.$$

Ezen kifejezés világosan mutatja, hogy a kitűzési hiba annál nagyobb, mennél hosszabb a rúd, s mennél inkább és oldalvástabb hajlik az el a függélyes iránytól. Ellenben, ha a rúd a kitűzendő síkban van, bár milyen ferdén áll is az, semmi hibát nem okoz. A rudakat tehát függélyesen kell a földbe állítni és kézben tartani. E czélból 6—8′ hosszú rudacskák két ujj közt szabadon függve tartatnak azért, hogy önsúlyok által függélyes állásba jöhessenek. Hosszú nehéz rudakat pedig a földre állitván arczczal a kitűző mérnök felé fordulva katonás merev állásban kell tartani.

4) Az összetettebb kitűzési feladatokban eshető hibákat is az előbbiek nyomán lehet megitélni. Ezek annál tetemesebbek lesznek, mennél több segéd műtétel szükséges a kitűzésre.

5) A prismakereszt használata által eshető hibát is a fentebbiekből lehet megitélni, azon megjegyzéssel, hogy ezen műszernél a rudak képei állittatnak be egymásra. A prismából kijövő sugárok tehát a legkisebb látszögig térhetnek el a párhuzamosságtól a nélkül, hogy azt a szem megitélhetné. Innen következik a 61. §. szerint, hogy a beeső sugárok közötti szög is w-val lehet 180^0-tól különböző. Legyen tehát a 70. ábrában $C = 180^0 - w$, $AB = T$, $BC = t$, akkor az ABC $\triangle$-ből lesz:

$$\sin A = \frac{t}{T} \sin w,$$

azután az ACE derékháromszögből, melyben AC helyett érezhető hiba nélkül $T—t$ tétethetik, következik:

$$CE = x = (T—t) \sin A = \frac{t(T—t)}{T} \sin w,$$

mely képletben $\sin w$ helyett az ívet is lehet tenni. A hiba legnagyobbá lesz, ha $t = \frac{T}{2}$ *), t. i.

$$x = \frac{Tw}{4},$$

mely félannyi, mint a végpontból való kitűzési hiba. Ebből látni lehet, hogy a prismakereszt igen érzékeny, s a czélnak tökéletesen megfelelő műszer.

99. §. Mérő-láncz.

1) Az egyenes vonal megmérésére szolgáló eszközök közt első helyen áll a mérő-láncz. Ez lúdtoll vastagságú vashuzalból készült szemekből van összetéve, melyek mindkét végükön horog alakjára fel vannak hajtva, és vaskarikákkal összefűzve. A félölek nagyobb karikákkal, az egészek pedig sárgaréz hosszúkás pereczekkel vannak megkülönböztetve. A láncz végein, a 80. ábra *M* szerint, 2" átmérőjü karikák vannak, melyeken 5' hosszú, végükön vaskereszttel, és 2" hosszú hegyes szeggel felszerelt lánczrudak huzatnak keresztül. Némelyek a rudak helyett egyszerű fogantyúkat *N* használnak, melyeknél fogva a lánczot szintén kényelmesen lehet kezelni.

A láncz hossza nálunk 10^0, az uj mérték szerint 20 m. Ezen mérték végei vagy az utolsó karikák középpontjaiba, ennélfogva a lánczrudak tengelyeibe esnek; vagy pedig a fogantyúknál bereszelt vonások által vannak megjelölve. Beosztása régenten a 12-ős, most rendesen a 10-es rendszer szerint, a lánczszemek által eszközöltetik, melyeknek hossza rendesen 1', néha $^1/_2$', az uj mérték szerint 20 cm. Kisebb részeket csak szabadszemmeli becslés által lehet megkülönböztetni.

2) A láncz a tapasztalás tanitása szerint hosszas használat által kinyúlik, s ez által tökéletes 10^0 hosszát elveszti. Ezen hiba

---

*) A legnagyobb és legkisebb elmélete szerint, ha $U = t(T—t)$ egy függvényt jelent, melyben T állandó, t pedig változó, akkor az U legnagyobb értéke ezen feltételhez van kötve: $\frac{dU}{dt} = -t + T = o$, honnan következik $t = \frac{T}{2}$.

kiigazítására a régibb lánczoknál semmi intézkedés nem találtatik, hanem kénytelen a mérnök a szemek horgait összeveregetni, vagy ha a hiba tetemesebb, egyik vagy másik szemből egy kis darabkát levágni, és a horgot ujra összehajtani. Ujabb időben e czélra becses szerkezeteket hoztak javaslatba.

G. Berlin a 81. ábra szerint a sárgaréz pereczeket igen czélszerűen felhasználja a láncz kiigazitására, s szerkezete minden egyes öl kijavítását lehetővé teszi.

Oldendorf — azon szempontból indulván ki, hogy ha az egész láncz hossza helyes, az egyes ölekben $^1/_2$—1"-nyi hiba a mérésre káros hatást nem gyakorol, minthogy a mezőn a méreteket egy hüvelyk pontossággal meghatározni ugy sem lehet, nem lévén legtöbb esetekben a telkek sarokpontjai és határai sem ezen pontossággal a mezőn kitűzve —, a hiba kiigazitását három pontra, t. i. a láncz közepére és két végére szorítja. Szerkezete a 82. ábrából oldalnézet és keresztmetszésben látható.

Egyszerűbb és kevésbé ügyes munkás által is előállitható a 83. ábrában látszó szerkezet, melyet hazánkban némely mérnökök használnak.

3) A lánczhoz tartozik még 10 darab 18" hosszú, végén karikára összehajtott szeg, melyek részint a földön a láncz végeinek megjelölésére, részint a lánczhúzások megszámlálására szolgálnak.

Használaton kivül mind a láncz, mind a szegek külön vaskarikákra fel vannak fűzve.

4) A láncz kiigazítása ilyeténképen történik. Egy egyenes sík helyen p. o. folyosón lemér a mérnök egy öles rúddal 10°-et, és minden ölnél egy vonást húz a földön. Ezután kihúzván a lánczot a mért vonal hosszában, s annak egyik végét a kezdő ponton beállitván, megvizsgálja, valjon a másik vége összevág-e a földön lévő vonással? Ha különbség mutatkozik: akkor a hiba az illető ölekben, vagy a változtatható szemekben kiigazittatik, mig a végpontok tökéletesen összeesnek. A közbeeső ölek ritkán fognak a megfelelő jelekkel megegyezni, de azért $^1/_2$—1"-nyi eltérés semmit sem teszen; minthogy a láncz osztályrészei minden megmérendő hossznál csak egyszer, t. i. a 10° sokasán felül maradt darabkának megmérésénél jönnek használatba. Egy hüvelyknél kisebb mértéket pedig a telekmérésben figyelembe venni soha sem szükség.

Ha a láncz métermérték szerint van beosztva, akkor természetesen 1 vagy 2 méter hosszú mérő rudat kell használni.

5) Némelyek a láncz hibáját meghatározzák a nélkül, hogy azt kiigazítnák, és annak a méretre befolyását számitás által veszik figyelembe. Legyen valamely vonalnak lánczczal mért hossza $= L$ lánczöl, mig a valódi hossz $= x$ valóságos öl, a láncz hossza pedig $= 10 + \delta$ valós. öl, ennélfogva 1 lánczöl $= 1 + \frac{\delta}{10}$ valóságos öl, akkor ezen egyenlet áll:

$$x \text{ valóságos öl} = L\left(1 + \frac{\delta}{10}\right) \text{ valóságos öl, tehát}$$

$$x = L + L\frac{\delta}{10}.$$

Megforditva, ha a lánczczal L valóságos öleket kell lemérni: akkor a megfelelő lánczölek számát x-nek nevezvén, lesz:

$$x \text{ lánczöl} = L \text{ valóságos öl,}$$

tehát $$x = \frac{L}{1 + \frac{\delta}{10}}, \text{ közel} = L - \frac{L\delta}{10}.$$

6) A lánczczal való mérésre két ember kell, egyik elől másik hátul, kiket A és B-vel akarunk megjelölni. A mérés vizszintes síkon következőképen történik. Miután B lánczrudját a vonal kezdőpontjában beszúrta, s A a lánczot körülbelől a vonal irányában kihúzta, ennek rudját a mérnök, vagy — ha már be van gyakorolva — B a vonalba beállitja. Ekkor A a rúd hegyes végével a földbe egy kis lyukat szúr, hogy a vonal iránya el ne vesszen, s a lánczot gyengén megvetvén egyenes vonalba kifeszíti úgy, hogy az a földbe szúrt lyuk felett menjen el, s a rudat erősen a földbe ütvén, a lyukba egy szeget szúr. Figyelmezni kell arra, hogy miután a láncz hossza a lánczrudak tengelyei közt van megállapitva, a rudak hegyei közötti mérték csak akkor lesz a láncz hosszával egyenlő, ha a lánczrudak a kifeszített láncz irányára merőlegesen állanak. Ezért általános szabály, hogy a lánczrudakat a kifeszített láncz irányára merőlegesen kell tartani. Ezután A előre menvén, a lánczot magával húzza, mig B a szeghez ér, s ennek lyukába a lánczrúd hegyét erősen beszúrván, az egész műtétel az előbbi rendben ismételtetik.

Ha a láncz végei nem a rudak tengelyei, hanem a karikákba reszelt vonások által vannak megjelölve, akkor B a vonást tartja a szeg mellé, A pedig szintén a vonás mellett szúrja be a szeget a földbe.

Ha a föld olyan kemény, hogy a rúd hegyét nem lehet beleszúrni, s ezért a B lánczrúdja enged a húzásnak: akkor B lábát a rúd eleibe tartja.

Ha a láncz csak fogantyúval van felszerelve, akkor a mérnök a beirányzás után a láncz utolsó szemére lép, hogy az a feszités által helyéből ki ne mozdulhasson.

Az A által a földbe szúrt szegeket B összeszedi és a karikára felfűzi, s ha mind a 10 szeg együtt van, azaz: a megmért vonal 100^0-et tesz, azt A-nak visszaküldi; azután a mérés tovább folytattatik.

Ha a láncznak valamelyik vége egy kis gödörbe esnék, akkor a lánczkarika a rúdon felemeltetik, mint az a 84. ábrában látszik, mig a láncz vizszintes fekvésbe jön. Ezen körülmény a rudas lánczoknak a fogantyúsok feletti előnyét világosan mutatja.

99. §. Lánczmérési hibák.

A lánczmérés több hibának van kitéve, melyek az eredményre kisebb-nagyobb befolyást gyakorolnak. Ezek közül némelyek állandók, azaz: minden lánczhúzásban ismétlődnek; mások pedig változók vagy esetlegesek, melyek minden lánczhúzásban más, és épen ugy igen- mint nemleges értékeket vehetnek fel. Az elsőbbek sokkal veszélyesebbek, mint az utóbbiak, minthogy azok summázódnak, mig ezek egymást nagyobb részint lerontják.

A lánczczal való mérés hibaforrásai közt legnevezetesebbek:

1) A láncz kinyúlása. Ha a láncz hossza 10^0-et δ-val halad meg, akkor az előbbi §. 5. száma szerint a hiba egy L^0 hosszú vonalban, ha az $\triangle L$-nek neveztetik, lesz:

$$\triangle L = \frac{L\delta}{10}.$$

Ezen hiba a vonal hosszával egyenes viszonyban áll, s a $\frac{\triangle L}{L}$ viszony értéke állandó mennyiség. Ez egyszersmind a vonalegységre eső hibát jelenti, s ez okból a mérés pontosságának megitélésére mértékül szokott használtatni. Lesz tehát:

$$\frac{\triangle L}{L} = \frac{\delta}{10} \text{ *)},$$

azaz: a megmért vonal pontossága a láncz pontosságával egyenlő, vagy más szavakkal: a hányadrésze a lánczban lévő hiba a láncznak, annyadrésze a megmért vonal hosszában lévő hiba is a hossznak. A láncz hosszát úgy ki lehet igazítni, hogy a benne hátramaradt hiba 3'''-at meg nem halad, mely az egésznek $\frac{1}{2880}$-ad részét teszi. Ezen hibakútfőt tehát kellő figyelem mellett egészen ártalmatlanná lehet tenni.

2) A hőmérsék változása. Tegyük fel, hogy a láncz τ közép hőfok alatt igazittatott ki, és T alatt használtatik, a vas kiterjedési együtthatója, azaz a hosszegységnek egy fok hőmérsékváltozásra eső kiterjedése $= \varkappa$, akkor a láncz kiterjedése $= \delta$ lesz:

$$\delta = 10\, \varkappa\, (T - \tau),$$

tehát

$$\frac{\delta}{10} = \varkappa\, (T - \tau).$$

Legyen p. o. $\tau = 15^0$, $T = 25^0$, $\varkappa = \frac{1}{64000}$, akkor $\frac{\delta}{10} = \frac{1}{6400}$, tehát magában oly csekély, hogy közönséges méréseknél még figyelembe nem vétetik.

3) A macskák. Ezen név alatt értetnek a lánczszemek és karikák összecsomódzásai. A mellékelt 85. ábrák összehasonlításából kitűnik, hogy minden macska a láncz hosszát a karika átmérőjével rövidíti, mely körülbelől 1"-et teszen, s miután az magától ki nem oldódzik, ellenben ügyetlen kezelés által — különösen ha a hátulsó lánczos a lánczszemeket rakásra csüggeni engedi, — magától könnyen előállhat, mint állandó hiba igen káros, s ennélfogva különös figyelembe ajánlandó.

4) A láncz különböző feszültsége. Minthogy a láncz súlya mintegy 4 klgr., azt a légben egyenes vonalban kifeszítni nem lehet, hanem a középen kisebb-nagyobb hosszant a földön fekszik. Tegyük fel, hogy a láncz hossza 10^0, annak mind

*) Hogy ezen képletben számlálót és nevezőt ugyanazon egységben kell kifejezni, mondani is alig szükséges.

a két végén a légben csüggő része $= l$, (86. ábra) annak vizszintes vetülete $= l'$, s a lánczrúd keresztvasának a földtőli távja $= d$, akkor az előálló derék $\triangle$-ben, melyben a feszitő oldalt egyenesnek lehet tekinteni, lesz:

$$l' = \sqrt{l^2 - d^2},$$

és miután $d \ldots l$-hez képest mindig igen kicsiny, a Newton képlete szerint sorba kifejtve elég közelitéssel lesz:

$$l' = l - \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{l}.$$

Innen következik:

$$l - l' = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{l},$$

és miután $2(l - l') = \delta$, tehát

$$\frac{\delta}{10} = \frac{d^2}{10 l}.$$

Ezen képlet azt mutatja, hogy a hiba annál nagyobb, mennél nagyobb d, és mennél lazább a láncz. Legyen p. o. $l = 0^0{\cdot}5$, $d = 0^0{\cdot}05$, akkor $\frac{\delta}{10} = \frac{1}{2000}$. A lánczrúd keresztvasának tehát minél közelebb kell lenni a rúd végéhez.

5) A z e g y e n e s v o n a l t ó l i e l t é r é s. Ez a mérés tökélyére igen csekély befolyást gyakorol. Mert tegyük fel a legkedvezőtlenebb esetet, hogy t. i. az eltérés az egyenes vonaltól felváltva jobbra és balra a legnagyobb mértékben történik, mint az a 87. ábrában látszik, s legyen a láncz hossza $= l$, annak az egyenes vonalra való vetülete $= l'$, akkor az első lánczhúzásnál származó derék háromszögből lesz:

$$l' = \sqrt{l^2 - p^2}, \text{ vagy elég közelítéssel } l' = l - \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{l},$$

A második lánczhúzásnál lesz:

$$l'' = \sqrt{l^2 - 4p^2}, \text{ vagy közelítve } l'' = l - \frac{2p^2}{l}.$$

Tegyük fel, hogy az egész hossz n lánczhúzásból áll, melyek közt az első és utolsó egyenlő, valamint a közbensők is egymás közt egyenlők: akkor az egész hossz AB, melyet L'-nek akarunk nevezni, lesz:

$$L' = 2l - \frac{p^2}{l} + (n-2)l - 2(n-2)\frac{p^2}{l} = nl - (2n-3)\frac{p^2}{l}.$$

Ugyde nl a mérés által nyert hosszat $= L$ jelenti; tehát ha $L - L' = \triangle L$ az egyenes vonaltól eltérés által okozott hibát jelenti, lesz:

$$\triangle L = (2n-3)\frac{p^2}{l}, \text{ és } \frac{\triangle L}{L} = \frac{2n-3}{n}\frac{p^2}{l^2} = \left(2 - \frac{3}{n}\right)\frac{p^2}{l^2}.$$

Ezen viszony annál nagyobb, minél nagyobb n. Annak határértéke, mely a legnagyobb hibának felel meg, származik, ha $n = \infty$-nak tétetik. Ezen feltétel alatt tehát lesz:

$$Lim\frac{\triangle L}{L} = \frac{2p^2}{l^2}.$$

Legyen p. o. $p = 0^0 \cdot 1$, $l = 10^0$, akkor $Lim\frac{\triangle L}{L} = \frac{1}{5000}$.

6) A föld engedékenysége. Ha a föld igen lágy vagy laza, akkor a hátulsó lánczrúd a húzásnak enged, s az eredmény épen olyan, mintha a láncz azon darabkával hosszabb volna, a mivel a rúd hegye a földben előre húzatott. Hogy ezen hiba meggátoltassék, egyrészről a hátulsó rudat olyan mélyen kell beszúrni a földbe, a mint csak lehet, s a lábat is eleibe kell tartani; más részről pedig a lánczot óvatosan kell megvetni és kifeszítni.

7) A szegek hibás beszúrása. Ezen hiba az esetlegesek közé tartozik, minthogy a szeget épen úgy lehet kelleténél előbbre, mint hátrább beszúrni. A legkisebb négyzetösszegek elméletében bebizonyittatik, hogy ha valamely mennyiségre M, több egymástól független kicsiny hibácskák $m_1, m_2, m_3 \ldots$ befolynak, melyek tehát épen úgy igen-, mint nemleges értékeket nyerhetnek: akkor az M-ben várható hiba középértéke, melyet $\triangle M$-nek nevezünk, lesz:

$$\triangle M = \sqrt{m_1{}^2 + m_2{}^2 + m^2{}_3 + \ldots}$$

Legyen most $M = n$ láncz hossza, s egy láncz hosszában a szegek szúrása miatt megesheto hibának közép értéke $= \pm \delta$, tehát $m_1 = m_2 = m_3 = \ldots = \pm \delta$, akkor lesz:

$$\triangle M = \pm\sqrt{n\delta^2} = \pm\delta\sqrt{n.}$$

Ezen kifejezés azt mondja, hogy a hiba általános közép értéke a lánczhúzások számával négyzetgyök viszonyban növekedik.

Osszuk el ezen egyenletet a fentebbi közelítő kifejezéssel, akkor $M = 10n$ lévén, találtatik:

$$\frac{\Delta M}{M} = \pm \frac{\delta}{10\sqrt{n}}.$$

azaz: a mérés pontossága szintén a lánczhúzások számának négyzetgyöke viszonyában növekedik. Az esetleges hibák tehát egymást annál valószinűbben elrontják, mennél nagyobb számmal hatnak egymásra.

*8) Ha a lánczot egy árkon kell keresztül húzni, és az egészen a levegőben csügg, akkor a rudak tengelyei közötti táv különbözik a láncz hosszától, minthogy azt egyenes vonalban kifeszítni nem lehet. Legyen a 88. ábrában a láncz hossza $= l$, a rúd tengelyei közötti táv $= l'$, a láncz sülyedése $= p$, és tekintsük egyszerűség kedvéért a lánczvonalat körívnek; — mit annál inkább szabad tenni, mennél jobban ki van a láncz feszítve. Legyen a kör sugára r, az ACB szög $= \alpha$, akkor ezen egyenletek származnak:

$$\left.\begin{aligned} \frac{l'}{2} &= r \sin\frac{\alpha}{2}, \\ l &= r\alpha, \\ p &= r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}\right\} \ldots \odot$$

Ezen egyenletekből r-et kiküszöbölvén, lesz:

$$\frac{l'}{l} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha},$$

$$\frac{p}{l} = \frac{1 - \cos\frac{\alpha}{2}}{\alpha}.$$

Ezen egyenletekből α-t kiküszöbölni egész általánosságban nem lehet, de azon föltétel alatt, hogy α csak kis szöget jelent, — mi a gyakorlattal tökéletesen megegyez, — ennélfogva a sinust és cosinust sorokba ki lehet fejteni, lesz:

$$\frac{l'}{l} = \frac{2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48}\right)}{\alpha} = 1 - \frac{\alpha^2}{24},$$

$$\frac{p}{l} = \frac{1 - \left(1 - \frac{\alpha^2}{8}\right)}{\alpha} = \frac{\alpha}{8},$$

α-t kiküszöbölvén, végre lesz:

$$l - l' = \frac{8}{3} \cdot \frac{p^2}{l} \dots \text{D})$$

Legyen p. o. $p = 0^0{\cdot}2$, $l = 10^0$, akkor $l - l' = 0^0{\cdot}01$, ezen hiba a láncz sülyedésével négyzetes viszonyban nő.

9) Ezen különféle hibák összefolyása következtében a lánczczali mérés pontosságát legkedvezőbb esetben $\frac{1}{2000}$, rendesen csak $\frac{1}{1000}$-nek lehet venni.

100. §. Más hosszmérő eszközök.

A mérőlánczon kivül még más hosszmérő szerszámok is vannak, melyek egyes esetekben hasznos szolgálatot tesznek. Ide tartoznak:

1) A mérő-szalag vagy kötél. Ez 3 újjnyi szélességü erős kenderszövetből, vagy kis újjnyi vastagságú kötélből áll, melynek hossza 3—4-szer nagyobb lehet a lánczénál a nélkül, hogy kezelése tetemesebb erőt igényelne. Az osztályvonalak olajfestékkel vannak megjelölve.

A szálas anyagokból készült mérőszerek ellen két alapos kifogást lehet tenni. Először, hogy hosszuk a nedvesség által változik. Ezen befolyás ellen az olajbanfőzés legjobb óvó szer: mert az olaj az anyag lyukacsaiba behatván, a vízrészeket egészen kizárja. Másodszor: hogy tetemes ruganyosságuk miatt igen nagy kinyúlásnak vannak kitéve. Ezen akadályt csak a kifeszítés állandósitása által lehet elháritni, minthogy a kinyúlás a ruganyosság határai közt a feszitő erővel állandó viszonyban áll. E czélból az első rúdkarika és a kötel vége közé egy 6″ hosszú 9‴—12‴ átmérőjü, végén horogban végződő üres hengerecske van beiktatva (89. ábra), melynek közepéből, végén horogra összehajtott, hosszában egyenlő részekre beosztott pálczácska nyúlik ki, s mely egy mérsékelt erejü tekercsrúgó által a csőben visszatartatik, és csak tetemes feszités következtében lép ki a csőből. Ha ezen mérőszalag a lemért kiigazító vonal hosszában kifeszittetik, mig a végpontok a megjelölt vonásokba esnek, akkor a henger rugója a feszítésnek engedvén, a pálczácska valamelyik osztályvonásig kilép a hengerből. Tehát mérés közben is mindig úgy kell a kötelet kifeszítni, hogy a pálczácska kiálló része ugyanazon vonást mutassa; s akkor a kötél feszével annak hossza is az előbbi fog lenni.

2) Csekélyebb méréseknél gyengébb, $^1/_2$" széles, és 10° hosszú mérőszalag is (90. ábra) használtatik, melyet nagyobb kényelem és hordozhatóság kedvéért egy 3" átmérőjű, henger alakú bőrtoknak tengelyére fel lehet tekergetni. Egyik oldala honi, másik rendesen méter-mérték szerint van beosztva. Ilyen szalagok legújabban aczélból is készittetnek.

3) A m é r ő r ú d. Ez rendesen 2° vagy 4 m. hosszú, 1" széles, 2" magas, száraz fenyűfa rúdból áll, mely vagy a 12-ős, vagy a 10-es rendszer szerint van apróbb részekre beosztva. A mérték végpontjai vagy a rúd felületén annak tengelyére merőleges vonások, vagy pedig a rúd tengelyében a véglapok által határoztatnak meg, melyek rá szintén merőlegesen állanak. A rúd végeinek tompa ék alakokat is lehet adni, melyek egymásra keresztben állanak. Hogy a mérték hossza állandóbb és biztosabb legyen, a rúd végei sárgaréz vagy aczéllemezzel vannak beborítva. A mérték hosszát rudas körzővel 0"·01 pontossággal meg lehet határozni, mely 2°-es rúdnál $\frac{1}{14400}$-részt teszen; s ezen pontosság a telekmérés legkényesebb méréseiben is tökéletesen kielégitő.

A rúddali mérés következőképen történik. A kezdőpontból kiindulván, a vonal hosszában egy 50—60° hosszú erős zsinór feszittetik ki a földszinén; ezután a rudat, — melynek mindkét végén egyegy személy áll, a zsinórra fektetvén, egyik végével a kezdő ponthoz illesztjük, a másik végén pedig egy vékonyra metszett rajzónnal a zsinóron egy vonást húzunk. Ezután a rudat odább visszük, a hátulsó végét a vonáshoz illesztjük, az elsőt pedig ismét megjelöljük s i. t., mig a zsinór végéhez érünk. Itt a rudat a földre nyomván, a zsinórt alóla kibontjuk, s előre vivén a vonal irányában ujolag kifeszítjük, s a mérést folytatjuk, mig a vonal végéhez érünk. Az utolsó darabkát, a rúd apróbb osztályrészeivel, vagy ha az hijányoznék, egy mérőpálczácskával mérjük meg.

A rudak mindig párosával használtatnak, s a rudak egymáshozi illesztése a 91. ábrából látható. Ha a földön mélyedések vagy gödrök vannak, ezek felett a zsinór mintegy hidat képez, s a rudat marokkal a zsinórhoz kell szorítni, hogy az az összeillesztés közben el ne mozduljon.

Minő pontosságot lehet ilyen rúdmérések által elérni, következő példákból kitetszik, melyek a budai műegyetemi gyakorlatok alkalmával fordultak elő.

1861-ben egy vonal hossza találtatott	1 izben	=	423°·134
	2 »	=	423 ·117
1862-ben » » » »	1 izben	=	133°·028
	2 »	=	133 ·020
1866-ban » » » »	1 izben	=	203 ·116
	2 »	=	203 ·137

A mérő rudak közönséges 2 öles lejtmérő-rudak voltak, tehát lényegesen az *A* alaknak feleltek meg. 1868-ban pedig a Pest városi háromszögelés megvizsgálása alkalmával *B* alakú rudakat használtunk, s egy próba-vonal hosszát, melyet a Magyar államvaspálya sínjein mértünk meg a kőbányai állomásnál,

első izben 661·465 }
másod izben 661·483 } ölnek találtunk.

4) A mérő körző. Ez 1—2 □" keresztmetszésü, 1° vagy 2 m. hosszú rúdból áll, melynek mind a két vége derékszög alatt elálló hegyes szegekkel, közepe pedig 3—4' hosszú nyéllel van ellátva (92. ábra). A hosszmérés ezen műszerrel egy kifeszített zsinór hosszában épen ugy történik, mint ahogy a papiroson a körzővel szoktunk valamely mértéket egymásután felrakni, mely hasonlatosságtól a műszer nevét is vette.

5) Az útmérő — Hodometer. — Ott, hol több mértföldnyi hosszú vonalak megméréséről van szó, p. o. póstavonalak ország- és mellékútak stb. megmérésénél, leggyorsabban és kielégítő pontossággal lehet czélt érni, ha a mérnök a vonalat kocsin beútazza, és a kerék körületét használja mértékül. Tegyük fel, hogy többszöri próbamérésből középszámmal m kerékfordulás esett A ölre, — hol A-t 1000°-ön alól nem kell venni, — és egy más vonal megmérése közben n kerékforgás számláltatott: akkor a megfelelő hosszat $= L$ ezen arányból lehet meghatározni:

$$L : n = A : m,$$

tehát
$$L = \frac{n}{m} A.$$

A kerékforgás megszámlálása egy számlálógép (93. ábra) — az ugynevezett útmérő — által eszközöltetik. Ezen órához hasonló alakú és szerkezetű műszer erős lemezből készült tokban van befoglalva, mely a kerék agyán, vagy a küllők közt megerősittetik, ennélfogva a kerékkel együtt forog. Fő alkotó része ezen műszernek az *I* inga, mely az *A* főtengelyen szilárdul meg lévén erősitve, vele egy testet képez. Ennek súlypontja a tengelyen kivül esvén, mint minden szabadon függő test magát függélyes állásba helyezni és abban fentartani törekszik. Midőn tehát az egész műszer a kerék forgásában résztvesz, az ingának a forgásszöggel szükségesképen hátra kell maradni, s az eredmény épen az, mintha az egész műszer nyugalomban volna, de az inga az *A* tengelylyel együtt az ellenkező irányban ugyanazon szögsebességgel forogna. Az *A* tengely forgása azután az *a*, *a'* kerekek által a *B* tengelylyel, erről *b*, *b'* által *C*-vel, s i. t. egész a *G* tengelyig közöltetik; még pedig *a*, és *a'* tökéletesen egyenlők lévén, az *A* és *B* tengelyek forgásai is egyenlők lesznek; innen kezdve minden következő tengely 10-szer lassabban forog, mint az előtte való, minthogy az egymásba vágó kerekek átmérői egymáshoz 1 : 10 viszonyban állanak. A tengelyek végein mutatók vannak helyezve, melyek a tengely körül lévő, 10 egyenlő részre beosztott, és 0—9-ig számozott számlapokon a forgás nagyságát láthatóvá teszik. Végre a számlapok mellé az egységek nemei, t. i. 0·1, 1, 10, 100, 1000, 10000 fel vannak jegyezve.

6) A lépés. Csekélyebb fontosságú vagy előleges méréseknél, sőt kényesebb körülmények közt is, ha t. i. a vonal hossza 3—4 ölet meg nem halad, és 1' hibát el lehet nézni, különösen pedig próbaméréseknél, mint p. o. ha mérés közben egy szeg elveszett, ennélfogva a vonal hossza 10°-el kétséges, a lépést nagy haszonnal lehet mértékül használni. A tapasztalás ugyanis azt tanítja, hogy a rendes, akaratlanul használt lépés hossza minden embernél annyira állandó, ámbár annak általános értéke különböző, hogy az általa nyert mérés pontosságát legalább $^1/_{100}$-nek lehet venni. Egy ölre rendesen $2^1/_2$ lépést számitnak, ámbár némelyek 2', mások 3'-as lépésekre szoktatják magokat. De legczélszerűbb, ha a mérnök a maga lépése hosszát meghatározza az által, hogy egy bizonyos, p. o. 100° hosszú vonalat többször lelép, s a hosszat a lépések közép számával elosztja.

*A lépések számlálására is létezik egy műszer, mely zsebóra alakú nagyságú és szerkezetében, kivévén az ingát, az útmérőhöz hasonlít. Az inga helyét ebben egy emeltyű pótolja, melynek egyik vége a műszer belső oldalfalán megerősített peczek körül bizonyos szög alatt inghat, másik vége pedig a műszerből kiáll, és arra egy zsinór köttetik. Ezen emeltyűt egy rugó mindig felfelé tolja; de ha a zsinór lefelé húzatik, az erőnek enged. Az ujabb szerkezetű ilyen műszereken zsinór nincsen, hanem az emeltyű a testnek a lépés folytán váltakozó emelkedése és sülyedése által hozatik mozgásba. Az emeltyűn van továbbá egy horog, mely a főtengely végén lévő fogaskerékbe vág, és ha az emeltyű lesülyed, a kereket egy foggal magával húzza; ha pedig az a rugó által felemeltetik, a horog a következő fog háta megett foglal helyet. E szerint az emeltyűnek ismételt lefelé mozdulása által a főtengely akadozott forgásba jön, s ezen forgás, az 5. szám alatt előadott módon, a többi tengelyekkel közöltetik, s mutatók által láthatóvá tétesik. Használat közben ezen zsebóra forma műszer a zsebbe tétetik, és a zsinór a térd alatt a lábszárhoz köttetik.

7) A hang sebessége. A természettanból ösmeretes, hogy a hang légben 1″ alatt 1040 párisi lábat halad, mig a világosság sebessége 40000 mértföldnél nagyobb. Ha tehát valamely távol látható ponton egy puska vagy ágyu süttetik el, a villanást azon pillanatban lehet látni, mig a durranás csak később érkezik füleinkbe, és a közbeneső m. perczek száma 1040-el szorozva a távot fogja adni. Az idő megmérésére egy harmadpercz óra legalkalmatosabb, mely úgy van készitve, hogy azt egy rugó nyomása által megindítni és megállítni lehessen; a közbeneső időszak pedig a számlapon olvastatik le. Szükség esetében egy közönséges zsebóra által is czélt lehet érni, ha annak ketyegései megszámláltatnak, miután eleve meghatároztatott, hogy hány ketyegés esik egy perczre. Rendesen 150 körül fogjuk ezt találni.

8) A szemmérték. Ez azon tehetség, miszerint egy előttünk álló vonalnak hosszát minden mérés nélkül megbecsülni, valamint két vonal közötti viszonyt megitélni képesek vagyunk. Az első sokkal több nehézséggel jár, és sokkal nagyobb csalódásoknak van kitéve, mint az utóbbi; miután arra a tapasztalás szerint az álláspont magassága a vonalnak a szem irányához fekvése a tér nyilt vagy zárkozott volta előttünk ösmeretes nagyságú tárgyak közel léte a világitás foka stb., igen nagy

befolyást gyakorolnak. Átaljában véve az általános táv megbecsülése annál tökéletesebb, mennél több érzékek vehetnek részt benne, ennélfogva a becsülésre mintegy több adatok vannak, melyek egymást kölcsönösen kiegészítik. Olyan távokra, melyek a tapasztalás határait túlszárnyalják, a szemmérték egészen haszonvehetetlen.

Sokkal nagyobb pontossággal lehet két vonal hosszát egymással összehasonlítni, s ezen pontosság annál nagyobb, mennél egyszerűbb és szokottabb a viszony, és mennél könnyebben lehet a megbecsülendő hosszakat egyszerre áttekinteni. Igy p. o. a papiroson a felezés: $\frac{1}{100}$, a 3 egyenlő részre osztás: $\frac{1}{20}$, a 10 egyenlő részre osztás: $\frac{1}{10}$ pontossággal szabad szemmel könnyen eszközölhető. Az áttekintés határa 60^0 látszög.

Ha a vonalak igen kicsinyek, akkor az összehasonlítás ismét nehezebbé lesz, mig végre a legkisebb látszögön túl a látás egészen megszűnik.

A jól gyakorlott szemmérték a mérnököknek igen szükséges; minthogy az a rajzolás közben a munkát tetemesen elősegíti, sőt kis hosszak felrakása és beosztásánál a körzőt és léptéket gyakran nélkülözhetővé teszi. Különösen a rajzolásba becsúszott hibák felfedezésére az megbecsülhetetlen szolgálatokat tesz, s annak kiképzése a mérnöknek eléggé nem ajánlható.

101. §. Vizszintes vetület.

Ha a megmérendő egyenes vonal valamely hajlott síkon vagy görbe felületen fekszik, akkor a 91. §. szerint annak vizszintes vetületét kell meghatározni. Ennek különböző módjai vannak, u. m.:

1) A lépcsőmérés. Ez a vizszintes síkon való méréstől (94. ábra) abban különbözik, hogy a láncznak alsóbb vége a rúdon felemeltetik, mig az a felsővel egyenlő magasságba jön. Ekkor a láncz kifeszíttetik, és a rúd függélyes állásba helyeztetvén, a szeg annak lábpontjába szúratik. Ha a mérés lefelé történik, akkor az első lánczos a lánczot az utolsó szemnél fogva feszíti ki, és annak végét a lánczrúd által lefüggélyezi. Ellenben felfelé mérvén, a hátulsó lánczosnak kell a láncz végét felemelni,

és a rudat — a mennyiben szemmértékkel megitélni lehet — az erős húzás daczára is függélyes állásban kell tartani; mi tetemes nehézséggel jár. Ezért a felfelé való lépcsőmérés nem ajánlható.

Minthogy a láncz sülyedése miatt a két végpont közötti mérték kelleténél kisebb, szükség vagy a lánczot közepén emelni, hogy azt jobban ki lehessen feszítni, vagy a sülyedést megbecsülni, és a közép értéknek megfelelő rövidülést a 100. §. 8. szerint kiszámitván, a 99. §. 5. értelmében a mért hosszból levonni. Az említett helyen egy lánczhossz kijavitása volt:

$$\delta = \frac{8p^2}{310},$$

L hosszban pedig van $\frac{L}{10}$ lánczhúzás, tehát az egész javítás lesz:

$$\triangle L = \frac{8}{300} p^2 L,$$

hol mind L-et, mind p-t ölekben illetőleg kettős méterekben kell venni.

Ha a sík hajlásszöge kisebb $2^0\ 30'$-nél, akkor a vonalat vizszintesnek lehet tekinteni. Ugyanis $\cos 2^0\ 30' = 0{\cdot}999$, ennélfogva a feszitő és annak vizszintes vetülete közti különbség $= 0{\cdot}001$, tehát még nem nagyobb, mint a lánczczali hosszmérés hibahatára. Minthogy pedig $\sin 2^0\ 30' = 0{\cdot}044$; tehát $10^0 \sin 2^0\ 30' = 0^0{\cdot}44$ lesz azon magasság, melyre a láncz végét kellene emelni. Ez a lánczrúd hosszának körülbelől fele. Ha tehát a föld esése 10^0-re a rúd felénél többet nem teszen, akkor a lépcsőmérést mellőzni lehet, és a hosszat úgy kell megmérni, mintha az vizszintes volna.

Ha a hajlásszög 6^0-ot meghalad, a lépcsőmérés 10^0-es lánczczal kivihetetlenné válik; mert ezen esetben $tg 6^0 = 0{\cdot}1$, tehát $10^0 \cdot tg 6^0 = 1^0$ lévén, a láncz végét egy ölnyi magasra kellene felemelni; mely magasságban a húzónak a láncz kifeszitésére elegendő ereje nincsen. Ezen esetben tehát 5^0-es lánczczal lehet a mérést eszközölni. A lépcsőmérés pontosságát legfeljebb $\frac{1}{600}$-nak lehet tenni.

2) A hajlott síkon fekvő vonalat meg kell mérni, mintha az vizszintes volna, és a vizszintes vetületnek rövidülését meg kell határozni. E czélból mérés közben egy tiszta és a közép

hajlásnak megfelelő helyen a láncz a földön kifeszittetik (95. ábra), egy öles karika a földhöz szegeztetik, és 2—3 öllel tovább egy rúd önsúlya által függélyes helyzetben felállittatik. Ezután a 2—3 öles lánczdarab feszesen felemeltetvén, a végpontnak a rúdtóli legnagyobb eltávozása megméretik. Ez a ferde vonal és annak vizszintes vetülete közti különbséget ábrázolja, minthogy a legnagyobb rövidülés a vizszintes fekvésnek felel meg. Legyen p. o. a lánczdarab $= 2^0$, annak rövidülése $= \delta$, az egész mérthossz $= L^0$, annak rövidülése $= \triangle L$, akkor lesz:

$$2^0 : \delta = L^0 : \triangle L, \text{ honnan } \triangle L = \frac{\delta L}{2},$$

melyet L-ből le kell vonni. $2'''$ hiba δ-ban $\frac{1}{1000}$ pontosságnak felel meg.

Ha a megmérendő vonal valamely görbe felületen fekszik, melynek hajlásszöge helyenkint különböző, akkor a vonalat darabokra kell osztani és mindeniknek rövidülését külön kell meghatározni.

3) A vonal hosszát és hájlasszögét meg kell mérni, és a vetületet számitás által meghatározni. Legyen a vonal hossza $= L$, a hajlásszög $= \alpha$, a vizszintes vetület $= V$, akkor:

$$V = L \cos \alpha.$$

Minő pontossággal kell a hajlásszöget megmérni, a cosinus változásából a tábla különböző vidékén lehet megitélni. Ebből látjuk, hogy a cosinusban 0·001 változásnak

10^0	táján	$20'$
20^0	»	$10'$
30^0	»	$5'$

szögváltozás felel meg, nagyobb tökély a szögmérésben nem szükséges. Ennélfogva ezen czélra a tökéletlenebb szögmérők is alkalmatosak. Ilyen műszer a H e g y m é r ő — Bergwaage. — Ez egy 6" magas derék-faháromszögből áll (96. ábra), oldalán egy sárgarézből készült, fokokra beosztott körívvel felszerelve, melynek középpontjából *O* egy selyem szál függ le, s ennek végére egy golyócska van kötve. Az ív beosztásának kezdő vagy 0 pontja ott van, hol a középpontból az alapra húzott merőleges vonal az ívet metszi.

Az α szög mérése ezen műszerrel úgy történik, hogy a földre a vonal irányában egy egyenes rudat fektetünk, és a műszert rá tévén, a golyót szabadon függeni hagyjuk; ekkor az elmetszett ív a hajlásszög mértékét adja. Mert a fentebbiek szerint a beosztás 0 pontján keresztűl menő sugár *OC* az *AB* alapra, következésképen a föld szinére, a szabadon függő szál *OD* pedig a vizszintesre merőlegesen állván, a *COD* szög a föld hajlásszögével egyenlő.

A 0 pont helyes voltát úgy lehet megvizsgálni, hogy a függély által elmetszett ívet leolvasván, a műszert megfordítjuk, — mi által *A* és *B* egymással helyet cserélnek, — s a szál által elmetszett ívet újra leolvassuk. Ha a leolvasások egyenlők, akkor a 0 pont fekvése helyes. Tegyük fel, hogy ezek α', α'' egymástól különböznek, a valódi szög pedig $= \alpha$, akkor

$$\alpha' + \alpha'' = 2\alpha,$$

tehát $$\alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2},$$

azaz: a valódi hajlásszög a két leolvasás közötti számtani középpel egyenlő. Tehát az első leolvasás hibája, melyet a 0 pont hibás helyzete okoz, vagyis az úgynevezett Collimatio hiba

$$\alpha' - \alpha = \frac{\alpha' - \alpha''}{2},$$

azaz: a Collimatio hiba a két leolvasás közötti különbség felével egyenlő, melyet a jobb oldalon történt leolvasásokból le kell vonni, a baloldaliakhoz pedig hozzá kell adni.

4) Eddig a hosszmérést minden más mérnöki munkálatoktól független, önálló műtételnek gondoltuk, ennélfogva a vetület meghatározásánál is önálló műszerekre volt szükség. De a gyakorlatban a hosszmérés többnyire szögméréssel lévén kapcsolatban, czélszerű a vizszintesre áttételt a szögmérők által eszközölni annyival inkább, minthogy ezektől — tökéletesebb szerkezetök miatt — biztosabb eredményt remélhetni, mint az eddig előszámlált módok szolgáltatni képesek.

Minden szögmérőnek lényeges alkotó része az irányzó, mely vagy egy vizszintes tengely körül függélyes síkban forogható távcsőből, vagy egy pár nézgéből — Dioptra — áll, azaz: 3—7" hosszú lemezekből, melyek közül egyik néző lyukakkal, a másik pedig széles-hosszú nyilással, s közepén kifeszített hajszállal van ellátva. Ezen nézgék, rendesen egy vizszintes fekvésű vonasz két végén merőlegesen vannak megerősítve, vagy csuklókkal ellátva, hogy azokat — függélyes síkban kisebb-nagyobb szög alatt egész a vízszintes fekvésig le lehessen hajtani. Ezen különböző szerkezetű irányzók közül mindeniket lehet a vizszintesre való áttétel eszközlésére képessé tenni.

5) A 97. ábra a mérő-asztalhoz tartozó távcsős vonaszt ábrázolja, melynek most csak azon részeit vesszük figyelembe, melyek a vizszintesre áttétel eszközlésére szolgálnak. Ezek: a távcső tengelyének tokján szilárdul megerősitett függélyes állású beosztott ív *M*, és a távcső tengelyén megerősített vele együtt forgó kar *N*, melynek végén egy mutató vonás *m*, vagy pedig egy Nonius (lásd 107. §.) van helyezve. Ennek segitségével a magassági ívet 5′-nyi pontossággal le lehet olvasni. A beosztás kezdő pontja az ív közepén úgy van megállapítva, hogy ha a távcső irányvonala a vonasz lapjával párhuzamos fekvésbe hozatik, a mutató 0-nál áll. Hogy a távcsőnek a függélyes síkban finom mozgást lehessen adni, az *M* és *N* közé egy szorító és paránymozgató készülék van igtatva. Az *M* ív t. i. az *L* szorító csavar által két erős lemez *a*, *b* közé szoríttatik, s a *b*-ből kiálló lemezkére *c*, a *k* paránycsavar, s a rugós ellenrudacska *k′* hatnak, melyek az *N* kar végén látszó rámába vannak helyezve. Ha tehát az *L* csavar meg van eresztve, az *N* kart szabadon fel- s lefelé lehet hajtani; ha pedig az meghúzatik, ekkor a kart a *k* csavar által finom mozgásba lehet hozni.

6) Mielőtt ezen műszert használni lehetne, meg kell vizsgálni, valjon a távcső irányvonala párhuzamos-e a vonasz lapjával, midőn a mutató 0-án áll, vagy nem? E czélból az asztaltábla körülbelől vizszintessé tétetvén (98. ábra), a távcső irányvonala egy igen távol lévő, s az asztaltábla síkjához közel álló pontra beállíttatik, és a mutató leolvastatik. Ezután a vonasz felfordítva tétetik az asztalra, mint azt az ábra mutatja, s az irányvonal az előbbi tárgyra beirányoztatván, a mutató ismét leolvastatik. Ha mind a két érték egyenlő, akkor a 0 pont állása helyes, ellenkező esetben a különbség a kettős hibát ábrázolván. Mert az idomból látható, hogy a leolvasott ívek a kezdőponttól ellenkező oldalra feküdvén, ugyanazon darabkával, de ellenkező értelemben hibásak, a mennyivel t. i. a kezdőpont hibás. Ha te-

hát a valódi magassági szög $= \alpha$, a leolvasások $= \alpha' \alpha''$, és a kezdőpont hibája $= \delta$, akkor: $\alpha' = \alpha + \delta$, $\alpha'' = \alpha - \delta$.
Innen következik:

$$\alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2}, \text{ és } \delta = \frac{\alpha' - \alpha''}{2}.$$

A hibát az irányvonal fekvésében lehet kiigazítni. A mutatót t. i. az α szögre be kell állítni, s azután a vizszintes irányszálat az u, u' csavarkák által emelni vagy sülyeszteni, mig az a tárgyat metszi.

*7) Eddig hallgatva feltettük, hogy a megmért vonal egy hajlott síkon fekszik. De a föld szinének alakja a síktól tetemesen elüthet, mielőtt a fentebbi műszer megszünik használható lenni. Tegyük fel, hogy a föld szine teknő alakú (99. ábra), melynek görbületét körformának lehet venni, és mélyedése az ív hosszához képest csekély; akkor a 100. §. 8. szerint elég közelitéssel lesz:

$$L' = L - \frac{8}{3}\frac{p^2}{L},$$

és ezen kifejezés eredménye a ⊙ alatti szigorú képletekétől a vonalnak $\frac{1}{1000}$ részével nem különbözik, mig $\frac{p}{L} < \frac{1}{10}$.
Ezen képletből következik:

$$\frac{L - L'}{L} = \frac{8}{3}\frac{p^2}{L^2},$$

és ha $\frac{L - L'}{L} = 0{\cdot}001$-nek vétetik, $\frac{p}{L} = 0{\cdot}019$, közel $= \frac{1}{50}$.
Mig tehát a mélyedés a vonal hosszának $\frac{1}{50}$ részét el nem éri, az ívet a húr helyett lehet venni, minthogy a különbség még a mérésben megengedhető hibát meg nem haladja.

Ha a különbséget figyelem nélkül hagyni nem lehet, akkor p-t vagy közvetlen egy rúddal meg kell mérni, vagy a mi czélszerűbb, a vonal közepe tájának megfelelő hajlásszöget α' kell megmérni, s ebből p értékét meghatározni. Ugyanis elég közelítéssel

$$p = \frac{L}{2} \sin(\alpha' - \alpha),$$

tehát ezen kifejezést helyettesitvén, lesz:

$$L' = L - \frac{2}{3} L \sin(\alpha' - \alpha)^2$$

Ezen képletet elegendő pontossággal igy lehet átváltoztatni:

$$L' = L\left(1 - \frac{2}{3} sin\,(\alpha' - \alpha)^2\right) = L\left(1 - sin\,(\alpha' - \alpha)^2\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= L\left[cos\,(\alpha' - \alpha)^2\right]^{\frac{2}{3}} = L\,cos\,(\alpha - \alpha)^{\frac{4}{3}}.$$

Tehát a vizszintes vetület lesz:

$$V = L\,cos\alpha\,cos\,(\alpha' - \alpha)^{\frac{4}{3}} \ldots \odot$$

*8) Ha a föld szine két egymást metsző síkhoz közelébb áll, mint egy körívhez (100. ábra), akkor a vonalnak mindenik síkban eső darabját külön kell megmérni, és a 100. §. 5. nyomán következő közelitő kifejezéshez jutunk:

$$L' = (L_1 + L_2) - \frac{1}{2} p^2 \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2}.$$

Minthogy pedig $p = L_1\,sin\,(\alpha' - \alpha)$,
ezen értéket helyettesítvén, lesz:

$$L' = (L_1 + L_2) - \frac{1}{2}\frac{L_1}{L_2}(L_1 + L_2)\,sin\,(\alpha' - \alpha)^2$$

$$= (L_1 + L_2)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{L_1}{L_2}\,sin\,(\alpha' - \alpha)^2\right)$$

$$= (L_1 + L_2)\left(1 - sin\,(\alpha' - \alpha)^2\right)^{\frac{1}{2}\frac{L_1}{L_2}} = (L_1 + L_2)\,cos\,(\alpha' - \alpha)^{\frac{L_1}{L_2}},$$

és a vizszintes vetület lesz:

$$V = (L_1 + L_2)\,cos\alpha\,cos\,(\alpha' - \alpha)^{\frac{L_1}{L_2}} \ldots ☽$$

mely kifejezésben $\frac{L_1}{L_2}$ helyett érezhető hiba nélkül a legegyszerűbb közelitő törtet, p. o. $\frac{195}{348}$ helyett $\frac{2}{3}$-t is lehet tenni. A $\odot$ és ☽ képletek logari számitásra igen kényelmesek s $\frac{1}{1000}$ pontosságot mindaddig szolgáltatnak, mig $\alpha' - \alpha \ldots 10^0$-ot meg nem halad.

9) A 101. ábra a mérő-asztalhoz tartozó n é z g e v o n a s z n a k egy részét ábrázolja úgy, a mint azt én a »Z e i t s c h r i f t d e s I n g e n i e r - V e r e i n e s i n W i e n, IX. J a h r g a n g Nr. 21. 22.« folyóiratban a vizszintes vetület meghatározására alkalmaztam. Itt *A* a vonasz, *B* a nézge, mely a vonaszszal csukló által van összekötve, és a *C* tengely körül fel s alá hajtható. *B* végén oldalt egy kis lemezecske van megerősitve, mely-

ből egy kis tányérka D áll ki. Ennek középpontját a csukló tengelyével C összekötő egyenes vonal a nézge felületéhez párhuzamos. A nézge széle alatt egy beosztott pálczácska E van megerősitve. Ennek beosztásának alapegysége a CD hossz, mely 100 egyenlő részre osztatik; de az E léptékre annak csak fele van feltéve, és a vonások közül minden 10-ik sorjában számozva. Ezen számsor 500, 600, 700, 800, 900, 1000. Ezen léptékhez tartozik még egy szintén lemezből készült derék-háromszög H, melynek kisebbik befogóján egy 10 részből álló beosztás — Nonius — (lásd 107. §.) van alkalmazva. Ennek segítségével az E osztályrészei még 10 egyenlő részekre osztatnak. Egy ilyen részecskét, mely körülbelől 0‴·07 hosszú, szabad szemmel igen tisztán lehet látni. Az E lépték a vonaszon úgy van megerősitve, hogy ha a nézge lapja a vonaszéhoz párhuzamos fekvésbe lehajtatik, s a H háromszög az E léptékre tétetvén, annak függélyes éle a D tányérkával érintésbe hozatik, a mutató 1000-en áll. A háromszög kisebbik befogójának külső oldalára két lemezecske F, F' van erősítve azért, hogy az a lépték élén annál biztosabban álljon. Meg kell még említni, hogy a H háromszögnek a vonasz tokja fedelén van hely csinálva, hol használaton kivül elhelyezve tartatik.

Ezen műszernek használata következő. Miután az asztal a meghatározandó vonal egyik végpontjában vizszintesen felállittatott s a vonasz annak irányában az asztalra tétetett, a nézge lehajtatik, mig annak meghosszabbított felülete a rúdtartó egyént — Figurans — a vonal másik végén mell tájban metszi, — a meddig t. i. a nézge csuklója a mérnöknek ér, — mit a nézge felületén végignézés által elég pontosan meg lehet itélni. Ezután a H háromszög az E léptékre tétetvén, előre tolatik, mig annak függélyes éle a D tányérkát érinti, és a mutató állása leolvastatik. Legyen a leolvasás $= n$, a nézge hajlásszöge $= \alpha$, mely egyszersmind a föld szinének hajlásszögével egyenlő, akkor azon feltétel alatt, hogy a lépték o pontja C-vel, a Noniusé pedig a háromszög függélyes élével összeesik, és ezen él a tányérka középpontjára állittatik be, lenne

$$cos\alpha = \frac{CG}{CD} = \frac{n}{1000}.$$

Ugyde ezen feltételnek elég téve nincsen, minthogy a Nonius *o* pontja a *Go* darabkával áll hátrább, mint kellene; tehát a leolvasás is annyi osztályrészszel ad kevesebbet, a mennyi a *Go* darabkára fér. Ezen darabka állandó, és a nézge hajlásszögétől független, ennélfogva minden leolvasáshoz hozzáadandó volna; de ez egyszer mindenkorra az által tétetik feleslegessé, hogy a gépész a léptéket a *Go* darabkával jobb kéz felé tolva erősíti meg a vonaszon. Tehát minden további kiigazitás nélkül helyesen lesz:

$$cos\alpha = \frac{n}{1000},$$

s a vizszintes vetület

$$V = \frac{Ln}{1000}.$$

A tapasztalás tanusága szerint az n értékét $\frac{1}{2}$ egységig le lehet olvasni, mi $\frac{1}{2000}$ pontosságot ad.

A mi a műszer kiigazítását illeti, a lépték beosztását, s a *CD* vonalnak a nézge felületéveli párhuzamosságát egy körzővel, a lépték fekvését pedig a *H* háromszög által lehet megvizsgálni. T. i. ha a *B* lemez a vonaszhoz párhuzamos fekvésbe lehajtatik, s a *H* háromszög a *D* tányérkához tolatik, a mutatónak 1000-en kell állani.

* 10) Ha a föld szine teknő alakú, akkor a rudat nem csak a vonal végén, hanem annak közepén is fell kell állítni, s a Noniust mind a két ízben leolvasni. Legyenek a leolvasások n, n', a megfelelő hajlásszögek α, α', és induljunk ki a 7. számban talált képletből

$$L' = L - \frac{2}{3} L\ sin(\alpha' - \alpha)^2,$$

melyben a sinust n, n'-el kell kifejezni, akkor lesz:

$$L' = L - \frac{2}{3} L\ (sin\ \alpha'\ cos\ \alpha - cos\ \alpha'\ sin\ \alpha)^2 =$$

$$= L - \frac{2}{3} L \left\{\frac{n}{1000}\sqrt{1 - \frac{n'^2}{1000^2}} - \frac{n'}{1000}\sqrt{1 - \frac{n}{1000^2}}\right\}^2,$$

s a vizszintes vetület lesz:

$$V = \frac{Ln}{1000} - \frac{2}{3} \cdot \frac{Ln}{1000} \left\{\frac{n}{1000}\sqrt{1 - \frac{n'^2}{1000^2}} - \frac{n'}{1000}\sqrt{1 - \frac{n^2}{1000^2}}\right\}^2.$$

Vagy ha $\frac{2}{3}\left\{\frac{n}{1000}\sqrt{1-\frac{n'^2}{1000^2}}-\frac{n'}{1000}\sqrt{1-\frac{n^2}{1000^2}}\right\}^2=\frac{1}{K}$-nak

tétetik, az utolsó képletet igy is lehet irni:

$$V=\frac{Ln}{1000}-\left(\frac{Ln}{1000}\right):K\ldots\odot$$

A K értékei a IV. táblában ki vannak számitva, melynek argumentumai n, és $n-n'$. Ennek használata egy példából könnyen megérthető. Legyen p. o. valamely hosszmérésnél $L=120^0{\cdot}3$, $n=875$, $n'=842$, tehát $n-n'=33$. Itt

$120{\cdot}3\times0{\cdot}875=105^0{\cdot}26$;

a IV. tábla 870-es oszlopában a 35-ös sorban $K=334$, tehát $\left.\right\}-\frac{105}{334}=-0{\cdot}31.$

Összesen $=104^0{\cdot}95.$

102. §. Vonasz.

Egyenes vonal-húzásra a papiroson szolgálnak:

1) a vonasz, mely közönséges használatra kemény száraz fából, de igen pontos rajzolatokhoz kaucsuk-, vas- vagy sárgarézből készittetik, minthogy a fa idővel megvetemedik, s a vonasz éle meggörbül. A sárgaréz vonaszok a papirost igen beszennyezik, ezeknek alsó lapjokat tehát papirossal, célszerűbben szalmával kell bevonni, vagy pedig az élek mellett rovátékokkal kell ellátni, melyek elefántcsonttal kirakatnak, hogy a fémfelület a papirossal érintkezésbe ne jőjjön.

2) Rajzháromszögek. Ezek vékony fatáblácskákból vagy $\frac{1}{2}$ — 1" széles lemezekből ráma alakban összekötött 45^0 és 90^0, vagy 60^0 és 90^0-ú háromszögek (102. ábra). Az egy darabból készültek egyenességüket ugyan tovább megtartják, de könnyebben megvetemednek, s azután nem feküsznek jól a rajztáblán. A ráma alakúak ellenben a megvetemedésnek nincsenek annyira kitéve, de szerkezetüknél fogva mindig homorúakká lesznek. Ugyanis a faszálak a lemezek hosszában feküdvén, a háromszög kül- és belcsúcsai A, B, C, a, b, c egymáshozi fekvésüket változatlan megtartják, miután a már kiszáradt fa a szálak hosszában alig észrevehető összehúzódást szenved; mig a szálakkal keresztben az összehúzódás igen tetemes. Innen következik, hogy a lemezek idővel keskenyebbekké lévén, élük kivül-belül homorú alakot vesz fel.

3) A vonalak előlegesen rajzónnal húzatnak ki, melynek egyik vége élesre, a másik hegyesre van faragva. Az elsővel vékonyabb vonalakat lehet húzni, mint az utóbbival, és az nem kopik el oly hamar; a hegyes vég ellenben irásra alkalmatosabb. A rajzón élét nagyjában késsel kell kifaragni, de a kellő finomságot faragás által előállitni igen nehéz, minthogy a finom él rendesen kitöredezik. Czélszerűbb tehát a már nagyjában kifaragott rajzónt egy darab sima tajtkövön, vagy egy kemény papiros felületén dörzsölni; ekképen a legszebb élt lehet képezni.

4) Ha igen sok vonalat kell egymás mellé húzni, — mint az a mérő-asztalon szokott történni — melyek könnyen összefolynak, vagy a vonasz által eltörültethetnek, akkor a rajzón helyett a körző hegyét lehet használni, melylyel — a papirosra ferdén tartatván — igen tisztán látható vékony barázdákat lehet a papirosba nyomni.

5) A rajzvonalak utóljára fekete vagy más szinű festékkel rajz- vagy irótollak által húzatnak ki.

6) A vonasz éle egyenességét következőképen lehet megvizsgálni. A vonasz AB (103. ábra) egy papirossal bevont rajztáblára tétetik, és annak éle mellett finom vonal húzatik. Ezután a vonasz a $B'A'$ fekvésbe, tehát megforditva tétetik a vonalhoz, s ha mindenütt összeesik vele, akkor a vonasz éle egyenes, ellenkező esetben görbe, s a gépész által kijavítandó. Czélszerűbb a vonaszt a $B'A'$ fekvésben nem egészen a vonalra, hanem mellé párhuzamosan igen közel fektetni, és egy uj vonalat húzni; ha a két vonal közötti táv mindenütt egyenlőnek látszik, akkor a vonasz egyenes.

7) Vagy a vonasz élével egy másik vonasznak élére állittatik, és az ablak felé tartatik. A világosságsugárok a legfinomabb nyiláson is áthatván, a hibás helyeket el fogják árulni.

103. §. Körző.

A hosszmérés a papiroson körző és lépték által eszközöltetik. Meg lehet különböztetni

1) a kézi körzőt, melyet csak szabad kézzel lehet kinyitni és bezárni;

2) a hajszálkörzőt, melynek egyik szárát (104. ábra)

egy kis csavar *m* által lehet mozgásba hozni. Egyébaránt alakjára nézve a kézi körzőtől nem különbözik.

3) A rudas körzőt (105. ábra). Ennek szerkezete következő: két sárgaréz hüvelyt *A*, *A'* egy egyenes fapálczára *P* szorosan rá lehet tolni, és annak hosszában akárhol a *B*, *B'* csavarokkal megszorítni. Ezen hüvelyekből derékszög alatt hegyes peczkek *c*, *c'* állanak ki, melyek közül egyiket ki lehet venni, és rajzóntartóval, vagy rajztollal ki lehet cserélni. A másik finom mozgással van ellátva. E czélra két szerkezet van használatban; egyik a hajszálkörzőével azonos, a másik a 106. ábrából könnyen megérthető. Ebben egyik hüvely a rúd végén áll, és közepén 2—3" hosszú csavarral *E* van felszerelve, mely csak tengelye körül foroghat, de a hüvely hosszában nem mozog. Az anyacsavar *F* pedig a *P* rúd végén van bemetszve, a holt-mozgás megakadályozása czéljából hosszában felhasítva, és az *n*, *n'* csavarkákkal gyengén összeszorítva. A csavar végén a hüvelyen kivül egy tányér *G* van helyezve, és a *p* csavarka által a hüvely külső oldalához szorítva. Ha idővel az érintésben lévő felületek kikopván, holt-mozgás állana elő, azaz a csavarfordulásnak nem felelne meg illendő mozgás a tengely irányában, ezen csavarkákat meg kell húzni, mig a holt-mozgás egészen elenyészik.

4) A körző hegyeit rendesen háromszögű gúla alakjára szokták csinálni azért, hogy ha a körzőt bezárjuk, a hegyek egy pontot formáljanak, s ekképen a műszerrel a legkisebb hosszakat is le lehessen venni. De ezen alaknak azon hibája van, hogy a papirosba háromszögű lyukat szúr, melynek területén a pont valódi fekvését megitélni nem lehet, minthogy az a tér középpontjával nem esik össze, hanem a háromszög leghosszabb oldalához legközelébb áll. Czélszerűbb tehát a körző hegyének tű alakot adni, mely mindig körátmetszésű lyukat csinál, s a valóságos pont a középpontba esik. Különösen áll ez a rudas körzőkről, melyek igen kis hosszak megmérésére úgy sem használtatnak soha.

104. §. Lépték. — Scala.

A lépték — Scala — egy 6—36" hosszú sárgaréz táblácskán bevésett vagy papiroson húzott egyenes vonalból vagy párhuzamos vonalrendszerből áll, mely bizonyos mértani törvények szerint kisebb-nagyobb számú részekre van beosztva úgy, hogy rajta a mértékeket a legkisebb megkivántató fokozatonként biztosan le lehessen venni.

A legkisebb szabadszemmel már alig látható pontnak átmérője = 0''·001, tehát ennél kisebb osztályrészeket a léptéken megkülönböztetni nem szükséges.

A lépték beosztásának alapegysége a *tk.* hüvelyk, mely vagy a 10-es rendszer szerint 1000 részre osztatik, és valódi hüvelyk-mértékeket szolgáltat; vagy pedig — a térkép kicsinyitéséhez képest — bizonyos számú természetes öleket képviselvén, annyi egyenlő részekre osztatik, a hány öl, vagy az ölnek még megkülönböztetendő apróbb részei mennek egy hüvelykre. Ezen esetben a lépték osztályrészei a természetes ölek és azoknak apróbb részei neveivel neveztetvén, rövidített vagy kicsínyitett mértékeket szolgáltatnak.

Az ujabb mértékben a Scala alapegysége a milliméter, melynek a kicsinyitési viszony különbözősége szerint a természetben mindig egy vagy több méter, deciméter vagy centiméter felel meg.

A léptékek szerkezetükre nézve négyfélék, u. m.

Először: közvetlen beosztásúak, melyeknél egy egyenes vonal, többnyire egy vonasznak ferdén lemetszett éle, közvetlen be van osztva. 1''-et 20—40 egyenlő részre könnyen be lehet osztani a nélkül, hogy az osztályvonalak összezavarodnának, s egy ilyen osztályrészben még 10—5 egyenlő részt szabad szemmel meg lehet különböztetni. Ennélfogva ezen léptékeken, ha a kicsinyités 1 : 2000-et meg nem halad, 1—2 t. lábakat le lehet olvasni. Czélszerű a léptéknek 3 oldalú prisma alakot adni, — Prismalépték — melynek mind a három élén különböző beosztást lehet alkalmazni.

Ezen lépték használata abban áll, hogy azt a megmérendő vonal mellé tévén, a beosztás 0 pontját a vonal egyik végéhez illesztjük, a másik végén pedig, mely vagy egy osztályvonásra, vagy két vonás közé esik, a megfelelő mértéket vagy közvetlen, vagy a szabad szemmeli becslést is igénybe véve leolvassuk.

Hasonléképen kell bánni, ha valamely vonalra egy adatott pontból bizonyos mértéket kell feltenni; ezen esetben t. i. a lépték kezdőpontja az adatott pontra beállittatik, és a mérték a megfelelő osztályvonásnál, illetőleg két vonás közt finom tőszúrással a papirosra áttétetik.

105. §. Átlós lépték.

Másodszor: Átlós léptékek. Ezeknek alapelvét az 1000-es lépték szerkezetéből, mely ezen rendszernek typusát ábrázolja, legkönnyebben fel lehet fogni.

1) Az 1000-es lépték következőképen készittetik. Miután (107. ábra) egy egyenes fővonalra AB, 5—6''-nyi hossz feltétetett, ezen vonal ugyanannyi egyenlő részre osztatik, miáltal 1'' hosszú osztályrészek nagyobb tökélylyel állittatnak elő, mint azokat 1'' közvetlen felrakása által eszközölni lehetne; minthogy a levételben ejtett hiba annyi részre oszlik, a hány hüvelyket teszen a levett vonal. Ekkor az osztálypontokon keresztül a fővonalra körülbelől merőlegesen párhuzamos vonalak húzatnak, s ezen keresztvonalak közül valamelyiken, p. o. AC-n 10 egyenlő darabka egymásután felrakatván, az osztálypontokon keresztül a fővonalhoz párhuzamosok húzatnak. Ezután az első hüvelyk két szélső párhuzamosai ismét 10 egyenlő részre osztatnak, és az osztálypontok ferde átlók által összeköttetnek úgy, hogy felül a 0-adik alól az 1-sővel, az 1-ső a 2-ikkal . . . a 9-ik a 10-ikkel köttetnek össze. Végre az osztályzat az ábrában látható rendben számoztatik. Ezen beosztásból látni való, hogy az A0, (0 1), (1 2), (2 3), (3 4), (4 5) darabok az egész küvelykeket, az A0 hüvelyk osztályrészei a tizedrész hüvelykeket, a 0D keresztvonal és a 0E átló közt az 1-es, 2-ős, 3-as, . . . 9-es parallelákon lévő darabkák pedig a 0'''·01, 0'''·02, 0'''·03, . . . 0'''·09-et ábrázolják. Végre ha két szomszéd vizszintes párhuzamos közt egyenlő távokban még 10 párhuzamost gondolunk, ezeken az 0D és 0E vonalak közt eső darabkák sorjában 0'''·001-el növekednek, mint ezt a háromszögek hasonlatosságából könnyű megmutatni.

Ha ezen léptékkel egy, a papiroson adott vonal hosszát meg akarjuk mérni, a vonalat a körző hegyei közé vesszük, s ennek egyik hegyét az AB vonal valamelyik fő osztáspontjára helyezzük úgy, hogy annak másik hegye az A és 0 közé essék. Tegyük fel p. o., hogy a körző egyik vége a 3-as osztályvonalra, a másik pedig a 6 és 7 közé esik, akkor a vonal hossza nagyobb mint 3'''·6, és kisebb mint 3'''·7. Most becsüljük meg szabad szemmel azon hézagot, mely a körző hegyei és a 6-os pont közé esik, a (6 7) darabka tized részeiben. Legyen ez 4 tizedrész, akkor a mérték még körülbelül 0'''·04-el nagyobb mint 3'''·6, azaz $3''\cdot64$. Hogy erről biztosságot nyerjünk, lemegyünk a körző mind a két hegyével a 3-as keresztvonalon, és a 6-os átlón a 4-es párhuzamosig; ha a körző hegye még mindig túl esik az átlón, ekkor még az 5-ös parallela felé mozdulunk, megtartván a körző hegyei és a parallelák közti párhuzamosságot; mig végre az pontosan az átlóra esik, és a körző hegye s a parallela közti hézagot 10-ed részekben megbecsüljük. Jelen esetben ez 7 tizedrész lesz; tehát a vonal hossza $= 3''\cdot647$.

Megfordítva ha egy bizonyos hosszaságú vonalat kell a léptékről levenni és a térképre feltenni, akkor igy működünk. Legyen a kivánt hossz $= 3''\cdot647$, akkor a körző egyik végét a 3-as keresztvonalon a 4-es parallela alatt körülbelől $^7/_{10}$ távban beszúrjuk, és a körzőt kinyitjuk, mig annak másik vége szinte a 4-es parallela alatt $^7/_{10}$ távban a 6-os átlóra esik. Ha nagyobb pontosságot akarunk elérni, mint a melyet egyes levétel adni képes, akkor a mértéket kétszerezzük, — itt lesz tehát $= 7''\cdot294$ — és ezen mértéket az illető helyen a körző átfordítása által vesszük le a léptékről. Ha a körző hegye nem esnék tökéletesen az átlóra, a hibát felezzük, s a levételt ismételjük, mig a körző nyilása kétszer véve a léptékkel teljesen összevág.

2) A hüvelyklépték szerkezete nyomán könnyű lesz ezen általános feladatot feloldani : $1''$-et M egyenlő részre osztani. Bontsuk fel t. i. M-et három tényezőre ugy, hogy $M = mnp$ legyen; azután húzzunk a fővonalhoz m párhuzamost, osszuk be az első hüvelyket n egyenlő részre, húzzunk ugyanannyi átlót, és végre gondoljunk minden két párhuzamos közé még p parallelát, s a keletkező lépték a feladatot tökéletesen fel fogja oldani.

Ha azt akarjuk, hogy a lépték kicsinyített öleket és lábakat adjon, akkor az M értékét a kicsinyitésből, és a leolvasandó legkisebb mértékből kell eleve meghatározni. Legyen p. o. a kicsinyités $1'' = 40^0$ által kifejezve, és a legkisebb mérték $= 0\cdot{}^01$, akkor $M = 40.\ 10 = 400$, tehát szétbontva $= 4.\ 10.\ 10$, vagy $= 8.\ 5.\ 10$, vagy $= 2.\ 20.\ 10$. Ha a beosztást a 12-ős rendszer szerint kellene rendezni, s a legkisebb leolvasható mérték $= 6'' = \frac{1^0}{12}$ volna, akkor $M = 40.\ 12 = 480$. tehát szétbontva $= 4.\ 10.\ 12$, vagy $= 8.\ 5.\ 12$, vagy $= 2.\ 20.\ 12$, vagy $= 3.\ 16.\ 10$. stb. lenne. Innen látni lehet, hogy a feladatnak különbféleképen lehet eleget tenni, s a lépték mindig más alakot ölt magára, melyek közül egyik kényelmesebb s a czélnak megfelelőbb fog lenni, mint a másik. Különösen áll ez a számozásra nézve, mely annál zavartabb leend, mennél inkább eltér a 10-es rendszer által megállapitott számsorozattól, azaz: mennél inkább eltávozik M . . . 10-nek valamely hatványától, illetőleg 60-nak valamely sokasától.

3) Ha M tényezői nem volnának alkalmatosak, czélszerűbb lesz az egész hüvelyk helyett annak valamely törtrészét egységül felvenni, melyre azután 100, illetőleg 120 részek essenek. Ugyanis egyre megyen, akár $1''$ osztatik p. o. 400 részre, akár pedig $^1/_4''$ . . . 100 részre; épen úgy a 12-ős rendszerben $1''$-et 480 részre osztani annyi, mint $^1/_4''$-et 120 részre osztani. Akármi legyen az M értéke, a 100 vagy 120 résznek megfelelő hüvelykek számát ezen arányból lehet kiszámítni:

$$M : 100 = 1'' : X'', \text{ vagy } M : 120 = 1'' : X''.$$

E szerint a negyvenes léptéket legczélszerűbb úgy szerkeszteni, hogy $^1/_4''$ . . . 100 egyenlő részre osztatik; tehát $M = 100 = 2.\ 5.\ 10$ lévén, $^1/_4''$. . . 5 egyenlő részre osztatik, ugyanannyi átlókkal; a fővonalhoz 10 párhuzamos húzatik, s még közbe mindenütt egy párhuzamos gondoltatik. A 108. ábrából, mely ezen léptéket ábrázolja, látni lehet, hogy a páros öleket a lépték felső, a páratlanokat pedig annak alsó felében lehet feltalálni. Ugyanezen szerkezet használható kellő módositással a 20, 30, 50-es léptékeknél is.

106. §. Nonius-lépték.

Harmadszor: Nonius-lépték. Ez áll két egyenlő vastagságú egymás mellett fekvő s érintkező vonaszból, melyeknek felső lapjain az érintkezési éleknél összeszögellő vonalak által két különböző beosztás van ábrázolva. Ezen két különböző beosztás lehetővé teszi, hogy ezen készülékkel kisebb mértékeket lehessen meghatározni, mint a milyeneket a főlépték közvetlen szolgáltat. A hosszabbik vonasz, mely rendesen mozdulatlanul fekszik és a főbeosztást foglalja magában, főléptéknek; a kisebbik, második beosztással ellátott lépték pedig, mely használat közben a főlépték mellett előre és hátra tolatik, a feltalálóktól Nonius vagy Verniernek neveztetik.

1) A Nonius általános elmélete következő: Legyen a főléptéknek egy osztályrésze $= a$, tegyünk át m ilyen részt a második vonaszra, és osszuk be azt n egyenlő részekre, melyeket b-vel akarunk jelölni, akkor lesz:

$$ma = nb; \ldots \odot, \quad \text{vagy} \quad b = \frac{m}{n} a.$$

Most vegyünk a főléptéken μ, a Noniuson ν osztályrészt, és keressük a μa és νb közötti különbséget, ez lesz:

$$\mu a - \nu b = \frac{\mu n - \nu m}{n} a.$$

Ezen kifejezésben m, n, μ, ν tetszésszerinti igenleges egész számokat jelentenek. Válasszuk most ezen mennyiségeket ugy, hogy

$$\mu n - \nu m = \pm 1 \ldots ☽$$

legyen; akkor a fentebbi különbség legkisebb értéket veszen fel, és a Nonius által előállítható legkisebb hézag lesz $= \pm \frac{a}{n}$, azaz: annyadrésze a fölépték egy osztályrészének, a hány rész van a Noniusban.

A fentebbi egyenletből 2, 3, 4 . . .-eli szorzás által származik:

$$2\mu \cdot n - 2\nu \cdot m = \pm 2,$$
$$2\mu \cdot n - 3\nu \cdot m = \pm 3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Az ezeknek megfelelő különbségek sorjában $\pm \frac{2a}{n}$, $\pm \frac{3a}{n}$, ...

Tehát a két lépték osztályrészeinek összehasonlítása által olyan hézagokat lehet előállítni, melyek a fentebb említett legkisebb mérték sokasait természetes rendben ábrázolják. Innen következik, hogy a Nonius által a főlépték osztályrészei annyi egyenlő részekre osztatnak, a hány részből áll a Nonius.

2) Legyen $m = 1$, akkor az $\odot$ egyenlet ezzé válik:

$$a = nb.$$

Ezen esetben tehát a főlépték egy osztályrésze n részre osztatik. A 109. ábrában $n = 6$, és a Noniusnak 1, 2, 3, 4, 5-el jelölt vonalai a főlépték 3-as vonásától, melyre a Nonius 0 pontja mutat, $\frac{1}{6}a$, $\frac{2}{6}a$, $\frac{3}{6}a$, $\frac{4}{6}a$, $\frac{5}{6}a$ hézagokban állanak. A Noniusnak ezen neme legegyszerűbb, de csak akkor használható, ha a főlépték osztályrészei az n részre közvetlen beosztást megbirják a nélkül, hogy osztályvonalak igen sűrün esnének, s a leolvasást szükségtelenül megnehezítnék.

3) Legyen $\mu = 1$, és $\nu = 1$, akkor a ☽ egyenlet átváltozik ezzé: $n - m = \pm 1$, vagy $m = n \pm 1$.
Ezen esetben tehát a főléptékről levett osztályrészek száma 1-el kevesebb vagy több, mint a Noniusé; honnan a Nonius ezen neménck kétféle szerkezete következik. Mind a kettőt a 110. ábrában lehet látni, azon megjegyzéssel, hogy $n = 5$-nek van véve, s a Nonius kezdő pontja a főlépték 10-es vonására van beállítva. Az $\frac{1}{5}a$, $\frac{2}{5}a$, $\frac{3}{5}a$, $\frac{4}{5}a$, hézagokat az léptéken az (1,11), (2,12), (3,13), (4,14); a másodikon pedig az (1,9), (2,8), (3,7), (4,6) darabkák ábrázolják. Ezen Noniusok leggyakrabban fordulnak elő, mivel a számozatnak természetes rendje a leolvasást igen könnyíti. De azon esetben, ha a főlépték hézagait nagy számú p. o. 50—60 részre kellene beosztani, ezen Nonius igen hosszú, s a leolvasás igen fárasztó lesz. Ilyenkor tehát

4) a legáltalánosabb Noniust lehet alkalmazni, melyben mind μ, mind ν, vagy legalább egyik a kettő közül 1-től különbözőnek vétetik. Ezen esetet egy példából legjobban meg lehet érteni. Legyen p. o. a főlépték egy osztályrésze 15 egyenlő részre osztandó, tehát $n = 15$; a ☽ egyenlet szerint μ, ν, m-et úgy kell választani, hogy

$$\mu n - \nu m = \pm 1$$

legyen. Jelen esetben ezen czélt következő számok által lehet elérni: $\mu = 1$, $\nu = 7$, $m = 2$; vagy $\mu = 1$, $\nu = 2$, $m = 7$, minthogy valóban $1.15 - 2.7 = 1$. De még más számok is czélhoz vezetnek, nevezetesen $\mu = 1$, $\nu = 8$, $m = 2$, vagy $\mu = 1$, $\nu = 2$, $m = 8$; minthogy ekkor meg $1.15 - 2.8 = -1$. Válasszuk az első számsort. Ezen esetben a főléptékről 2 osztályrészt kell levenni és a Noniusra áttenni, s ezt 15 egyenlő részre osztani, mint az a 111. ábrából látszik. Az ezen Nonius által előállitható legkisebb hézag lesz:

$$\left.\begin{array}{rl} & 1.a - 7.b = \frac{1}{15}a, \\ \text{ennek kettőse} & 2a - 14.b = \frac{2}{15}a, \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{mely az (1,4)} \\ \text{mely az (2,5)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{darabka által} \\ \text{ábrázoltatik,} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rll} \text{ennek hármasa } 3a - 21.b = \frac{3}{15}a\,, & \left.\begin{array}{l}\text{vagy a mi ezzel egyre megyen,}\\ \text{(minthogy } 2a = 15.b\text{),}\end{array}\right. & \\ 1a - 6.b = \frac{3}{15}a\,, & \text{mely a (3,4)} & \left\{\begin{array}{l}\text{darabka által}\\ \text{ábrázoltatik,}\\ \text{s i. t.}\end{array}\right. \\ \text{» négyese } 2a - 13.b = \frac{4}{15}a\,, & \text{mely a (4,5)} & \end{array}$$

A Nonius számozása olyan rendben történik, hogy a kezdőpontból kiindulván, minden 7-ik vonal fölébe egy egységgel nagyobb szám iratik, figyelvén arra, hogy az utolsó vonástól az elsőre kell ugrani, és a számlálást folytatni.

Ha a második számsort választottuk volna, akkor a főléptékről 7 osztályrészt kellett volna levenni, azt a Noniusra áttenni, és 15 egyenlő részre osztani. A Nonius számozata azután olyan rendben menne, hogy minden 2-ik vonás nyerne egy egységgel nagyobb számjegyet.

Ilyetén módon lehet a többi számsorokat is más-más Noniusok készítésére felhasználni, melyeknek közös ösmertető jele abban fog állani, hogy a számok a Noniuson nem természetes rendben következnek egymás után, hanem ide s tova ugrálnak.

5) Némely Noniusoknál a kezdőpont elől, másoknál pedig hátul van. Ezért az elsők *előzőknek*, az utóbbiak pedig *utózóknak* neveztetnek. Az elsőbb számozata ellenkező irányban van, mint a főléptéké, mig az utóbbinál mind a kettő egyenlő irányt tart.

6) A Nonius-léptéknek használata annak szerkezetéből könnyen megérthető. Ha t. i. a főlépték fekvése változatlan maradván, a Noniust egy darabkával előre toljuk, mig annak 1-es számú vonása a lépték azon vonásával összeesik, mely a fentebbi rajzokban mellette jobbkéz felől áll, akkor a Nonius 0 pontja is ugyanazon darabkával távozik el a lépték azon vonásától, melylyel most összeesik. Ugyanaz áll a 2-ik, 3-ik stb. számú vonásokról is. Ha tehát megfordítva a Nonius 0 pontja a lépték két osztályvonala közt áll valahol, annak a hátulsótóli távját a Nonius azon vonásán lehet felösmerni, mely a lépték valamelyik vonásával összeesik. Ezen szabály minden Noniusra nézve kivétel nélkül érvényes. Ha a Noniusnak egy vonása sem esnék össze a lépték valamely vonásával, hanem — mint a

112. ábrában látszik — a 2-ik p. o. még jobbra, a 3-ik pedig már balra esnék a lépték illető vonásaitól vagy megfordítva, akkor a 2-nek megfelelő leolvasás kevés, a 3-é pedig sok volna. Ilyenkor tehát a számtani középet $2^1/_2$-t kell venni.

Ezen vizsgálat nyomán egy papirosra rajzolt vonal hosszát Nonius léptékkel igy lehet megmérni. Helyezzük a léptéket közel és párhuzamosan a vonal mellé, toljuk a Noniusnak akármelyik, de mindig ugyanazon végét elébb a vonal egyik, azután a másik végéhez, és olvassuk le mind a két izben a Noniust. Ekkor a két leolvasás közti különbség a vonal hosszát fogja adni. Minthogy a Noniusnak minden pontja a 0 ponttal egyenlő útat hagy maga után, szabad azon vonaszt, melyre a Nonius vonásai metszve vannak, mind a két végén hosszabbra is csinálni a beosztásra szükséges darabnál, — mi által a szélső osztályvonalak a sérüléstől jobban megóvatnak. Ezen felesleges darabkák mind a két leolvasásnál egyenlők lévén, a kivonás által egymást elrontják.

A mérést úgy is lehet módositani, hogy miután a Nonius vége a vonal bal végpontjára beállittatott, a léptéket párhuzamosan előre toljuk, mig annak 0 pontja a Nonius 0 pontjával összeesik. Ekkor a Nonius végét a vonal jobb végpontjára állítjuk be, s leolvassuk. Ezen leolvasás közvetlen a keresett hosszat fogja adni.

Hasonlóképen kell működni, ha egy pontból egy adatott irányban bizonyos nagyságú hosszat kell feltenni.

7) A Nonius-léptéknek az átlóshoz képest azon előnye van, hogy körzőt nem igényel, és a nagyitó üveg használatát ki nem zárja; mig a körzőnél a nagyitó üveg használata igen kényelmetlen. Innen következik, hogy Nonius-lépték által tökéletesebb eredményt lehet előállitni, mint átlós lépték által, átaljában egy vonal hosszát egész 0″·001-ig megmérni épen nem nehéz. A műegyetem gyüjteményében egy ilyen 32″ hosszú lépték közvetlen 0″·05 nagyságú részekre van beosztva, és a Nonius 50 részt foglal magában. Ezen léptéken tehát a legkisebb leolvasható mérték = 0″001, melyet egy nagyitó üveggel igen tisztán lehet látni, sőt még annak felét is meg lehet különböztetni.

8) A Nonius elvét nem csak az egyenes, hanem azon vo-

nalak beosztására is lehet használni, melyeknek görbületök állandó, minők a kör- és a csavarvonal. Ezen §. szerint kell tehát a 97. és 101. ábrákban előforduló Noniusokat is megitélni.

107. §. Paránymérő csavar.

Negyedszer. Ha a rudas körző rúdja hüvelykekre beosztatik, és a körző hüvelyei közül egyik egyszerű mutató vonással, másik pedig paránymérő csavarral láttatik el, akkor a hosszmérésre igen kényelmes műszer áll elő. Hogy a csavarral hosszat lehessen mérni, azokhoz, miket a 104. §-ban a rudas körzőről mondottunk, azt kell még adni, hogy a csavaron — a hüvelyen külül — egy tányérka van megerősitve, melynek karimája bizonyos számú egyenlő részekre van beosztva, és a hüvelyen egy mutató van helyezve. Ezen osztályzat által a csavar fordulata apróbb részekre osztatik, miáltal a csavar lépése is ugyanannyi egyenlő részekre oszlik, minthogy egy fordulat a tengely hosszában egy lépést húz maga után. Az egész fordulatok számát egy oldalt lévő beosztáson lehet leolvasni. Tegyük fel p. o., hogy a csavaron 20 lépés megyen 1"-re és a tányér karimája 50 részre van beosztva,

akkor egy lépés $= \frac{1''}{20}$, ennek $\frac{1}{50}$ része $= 0''{\cdot}001$, tehát a karimának minden osztályrésze $0''{\cdot}001$-et, az oldalléptéké pedig $0''{\cdot}05$-et jelent. A mutatót úgy kell megállapítni, hogy ha a lépték és a tányér mutatói 0-án állanak, a körző hegyei egy pontot képezzenek.

108. §. Rendkivüli esetek.

Ámbár legtermészetesebb volna minden kicsinyítéshez külön léptéket készítni; minthogy ezen mind a levétel mind a felrakás legközvetlenebb legegyszerűbb, ennélfogva a legkevesebb leolvasási hibának van kitéve; de tekintetbe vévén, hogy az önrajzolta léptékeket rajzolási hibáktól megóvni nem lehet, mig egy tekintélyes gépész kezéből kikerült sárgarézre vésett lépték gép által készittetvén, a tökélynek sokkal magasabb fokán áll; minden előjöhető esetre pedig külön léptéket késziteni csaknem lehetetlen: tudni kell a mérnöknek minden jó léptéket más kicsinyítésre is felhasználni, mint a milyen a léptéké.

1) Legyen a kéznél lévő lépték hüvelyklépték, és a térkép kicsinyítése $1'' = m^0$. Ha a térképről egy hosszat leveszünk, s azt a léptékkel összehasonlitván, $= h''$-nek találjuk, akkor a megfelelő hossz

$$M = hm \text{ öl.}$$

Mert ha $1'' = m^0$, akkor $h'' = hm^0$.

Megfordítva, ha a térképre M kicsinyített ölet kell feltenni, akkor a megfelelő hüvelykek számát osztás által találjuk meg, t. i.

$$h = \frac{M}{m} \text{ hüvelyk.}$$

Látni való, hogy a hüvelyk-lépték használata minden kicsinyítésnél igen egyszerű, miután a szükséges átváltoztatás egyszerű szorzás és osztás által eszközöltetik. Ezért a hüvelyk-lépték méltán általános lépték nevet is visel.

2) Legyen a kéznél lévő lépték kicsinyítése $1'' = n^0$, a térképé pedig $1'' = m^0$. Ennélfogva egy kicsinyített öl hossza a léptéken $= \frac{1''}{n}$, a térképen pedig $= \frac{1''}{m}$. Ha most a térképről valamely hosszat leveszünk, s azt mind a két nevezett egységgel megmérvén, az eredményeket N és M-nek nevezzük, akkor ezen egyenlet fog állani:

$$N \text{ lépték-öl} = M \text{ térkép-öl, vagy}$$

$$N\frac{1}{n} = M\frac{1}{m}, \qquad \text{tehát}$$

$$M = N\frac{m}{n}.$$

Megfordítva, ha M ölet kell feltenni a térképre, akkor a megfelelő ölek száma a léptéken kerestetik, és lesz:

$$N = M\frac{n}{m}.$$

3) Ha valamely térképhez, melyen a lépték hiányzik, a kicsinyítést utólagosan kell meghatározni, keressünk a térképen egy olyan lehetőleg hosszú vonalat, melynek hossza közvetlen mérés által ösmeretes, vagy szükség esetében mérjük meg a megfelelő vonalat a mezőn. Legyen ennek hossza $= M$, mig a térképről levett vonal egy olyan léptékkel mérve, melynek ki-

csinyítése $1'' = n^0$, N-nek találtatott, akkor a fentebbiek szerint

$$\frac{N}{n} = \frac{M}{m},$$

tehát

$$m = \frac{M}{N} n,$$

és a megfelelő lépték kicsinyítése $1'' = m^0$ leend. Ha ezen meghatározás több vonalnál ismételtetik, az eredményekből húzott számtani közép a térkép kicsinyítését elég pontossággal fogja adni.

Azonban a kicsinyítés meghatározása csak másodrendű érdekkel bir; hanem közvetlen egy olyan kerekszámú hossznak megfelelő vonalra van szükség, melyet mindjárt apróbb részekre lehessen osztani a papiroson. Legyen p. o. 500^0-nek megfelelő hossz $= x$ keresendő, akkor ezen arány áll,

$$M : N = 500 : x.$$

Az x-et tehát a léptékről levévén, a térképre feltesszük, s apróbb részekre osztjuk. (Lásd a 105. §.).

4) Ha a mérnök a helyszinén utánméréseket nem tehet, de a telekkönyvben feljegyzett térfogatok rendelkezésére állanak: akkor válasszon ki a térképen egy nagyobb kiterjedésű dűlőt, számitsa ki annak térfogatát valamely kéznél lévő lépték szerint, melynek kicsinyítése $1'' = m$ öl, s a talált térfogat legyen $= T \square$ öl. Ugyanazon dűlőnek a telekkönyvben feljegyzett térfogata, mely a térképi scala — $1'' = x$ öl — szerint számittatott, legyen $= t \square$ öl, akkor a térfogatok és a léptékek kicsinyítései között ezen összefüggés van:

$$t \text{ térképi } \square \text{ öl} = T \text{ léptéki } \square \text{ öl}.$$

Ugyde

$$1 \text{ térképi öl} = \frac{1}{x} \text{ hüvelyk},$$

$$1 \text{ léptéki öl} = \frac{1}{m} \text{ hüvelyk},$$

tehát

$$1 \text{ térképi } \square \text{ öl} = \frac{1}{x^2} \square \text{ hüvelyk},$$

$$1 \text{ léptéki } \square \text{ öl} = \frac{1}{m^2} \square \text{ hüvelyk},$$

ezeket helyettesitvén, lesz:

$$\frac{t}{x^2} = \frac{T}{m^2}, \text{ vagyis } x = m\sqrt{\frac{t}{T}}.$$

109. §. Mérési hiba a papiroson.

1) A fentebbiekből láttuk, hogy a lépték — egyes eseteket kivéve — a szabad szemmeli használatra van szánva, tehát a papiroson való mérés pontossága is csak a szabad szemmeli láthatás határáig terjed. A tapasztalás tanitása szerint egy finom pontokban végződő 2—3" hosszú vonalat finom hegyű körzővel túlzott figyelem nélkül 0"·002—0"·003 pontossággal meg lehet mérni. Rudas körzőnél a hossz 10—20 hüvelykre is mehet a nélkül, hogy a hiba tetemesen változnék. A mérési hiba tehát a vonal hosszától független. Innen következik:

2) Hogy hüvelykléptéken csak a 3, 5, 7 ezredrészeket kell leolvasni, mert a közbeeső leolvasásokban bizni nem lehet.

3) Hosszabb vonalakat a papiroson aránylag nagyobb pontossággal lehet megmérni, mint rövidebbeket; mivel a hiba mind a kettőnél egyenlő lévén, az a hosszabb vonalnál több részre oszlik.

4) A rajzolatban ejthető hibának a mezőn annál nagyobb hossz felel meg, mennél nagyobb a térkép kicsinyítése, vagy — a mint mondani szokták — mennél kisebb a lépték. Ennélfogva a térkép kicsinyítését mindig a még leolvasandó legkisebb mértékhez képest kell választani. Ha p. o. a térképen még $0^0\cdot1$-et meg akarunk különböztetni, akkor:
0"·002 = $0^0\cdot1$, vagy 2" = 100^0, 1" = 50^0-nek kell venni, s a térképet ezen lépték szerint kell készítni.

5) Ha a kézi körző szárai igen nagy szöget képeznek egymással, akkor tetemes hiba származik abból, hogy a körző hegye, kinyitás közben, akaratlanul is mélyen behat a papirosba.

* Legyen a körző nyilásszöge α (113. ábra), a megmérendő vonal BD, a körző hegyének a papirosba behatása $AD = \lambda$, és húzzunk BD sugárral egy kis körívet, mely az AB egyenest E-ben metszi, akkor $AE = \delta$ fogja a mérési hibát ábrázolni; és az ADE $\triangle$-ből, melyet E-ben derékszögűnek lehet tekinteni, s melyben az A szög $= 90^0 - \frac{\alpha}{2}$, lesz:

$$\delta = \lambda \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Ezen képlet világosan mutatja, hogy a hiba annál nagyobb, mennél nagyobb a nyilásszög; annyival inkább, minthogy a nyilással együtt a körző hegyének behatása is nagyobbodik. Ha $\alpha = 60^0$, azaz: a megmért hossz a körző szárával egyenlő, akkor $\delta = \frac{1}{2}\lambda$, s minthogy λ... 0·01—0″·02-et is meghaladhat, a hiba tetemessé válhat. Innen következik, hogy kézi körzővel nagyobb vonalat levenni nem szabad a körző szárai hosszánál; hanem azt vagy rudas körzővel, melynél $\alpha = 0$ lévén, ezen hibának helye nincsen, vagy darabokban kell levenni és egyenként megmérni.

* 6) Hasonló hiba áll elő a 107. §-ban leirt rudas körző használatánál is, ha a rúd vagy megvetemedik, vagy önsúlya alatt áthajlik (114. ábra), mitől rendesen nehéz fémrudaknál lehet tartani. Legyen AB a meggörbült rúd, melyre a körző szárai merőlegesen állanak, akkor a rúdon az AB ív olvastatik le, mig a körző hegyei $A'B'$ távban állanak egymástól. Húzzunk A-ból BB'-hez párhuzamost, akkor a hibát $A'E = \delta$ ábrázolja, minthogy az AB ív a húrtól olyan kis áthajlásnál, mint a milyennek p-t gondoljuk, észrevehetőleg nem különbözik. Ha tehát $AC = R$, $AB = l$, a körző szára $AA' = \lambda$, akkor a hasonló $\triangle$-ekből lesz:

$$R : \lambda = l : \delta, \qquad \text{vagy} \qquad \delta = \frac{\lambda l}{R}.$$

Ugyde az ADC derék $\triangle$-ből következik:

$$R^2 = \frac{l^2}{4} + (R-p)^2, \quad \text{vagy}$$

$$R = \frac{\frac{l^2}{4} + p^2,}{2p} \text{közel} = \frac{l^2}{8p},$$

Ezen értéket helyettesítvén, lesz: $\delta = \frac{8p\lambda}{l}$.

Legyen p. o. $p = 0''{\cdot}01$, $\lambda = 2''$, $l = 10''$, akkor $\delta = 0''{\cdot}016$; pedig p . . . l-el fokozott viszonyban növekedik. Ezen készülék tehát két egymástól keveset különböző hossz különbségének megmérésére alkalmatosabb, mint átalános hosszak meghatározására; mivel a mérési hibák mind a két hossznál egyenlő körülmények közt keletkezvén, kevés hijján egyenlők lesznek; ennélfogya a különbségből csaknem egészen kimaradnak.

7) Miután a 104. §. szerint egy olyan pont, melynek átmérője $0''\cdot001$, szabadszemmel alig látható; ha egy vonasz élét két pontra kell tennünk, mindeniknél hibázhatunk ezen kis darabkával a nélkül, hogy azt észrevehetnénk. Legroszabb esetben tehát a vonasz éle a két pontnak ellenkező oldalaira eshet, s a vonasz éle a valódi pontokat összekötő vonaltól egy kis α szöggel térhet el. Nevezzük a két pont egymástóli távját *d*, a vonasz élének a ponttóli eltérését δ-nak, akkor lesz:

$$\alpha = \frac{2\delta}{d}.$$

Ezen kifejezés világosan mutatja, hogy a vonal irányában ejtett hiba annál nagyobb, mennél kisebb a két pont közötti táv. Ha $\delta = 0''\cdot0015$, $d = 5''$-nek tétetik, akkor $\alpha = 2'$.

110. §.

Az összerendezők általi felvételnél bizonyos szögek, mint p. o. 90^0, 60^0, 45^0, különös fontossággal birnak; ezeknek gyors és kényelmes kitűzésére tehát, — ámbár azt minden szögmérő által is lehet eszközölni, — különös módok és eszközök használtatnak.

Ha a rendező 1—2^0-et meg nem halad, és a metszék meghatározásában $1'$ hibát el lehet nézni, a derékszöget szabad szemmel is ki lehet tűzni, de sokkal nagyobb pontosságot lehet elérni a mérőláncz használata által. Nevezetesen:

1) Ha egy egyenes vonalnak *AB* (115. ábra) valamely pontjából *C* kell merőlegest felemelni, mérjünk le a *C* pontból a vonal hosszában 3^0-et *D*-ig, ezután a láncz végét a *D* pontban, a 9^0-es karikát pedig a *C* pontban leszúrván, feszítsük ki a lánczot az 5-ös karikánál fogva. Ekkor az 5^0-es karika a merőlegesben fog feküdni, mivel egy olyan háromszög, melynek oldalai 3, 4, 5 öl derékszögű.

2) Vagy mérjünk le a C' pontból jobbra és balra 3^0-et, és a láncz végeit a D' és E' pontokban leszúrván, az 5^0-es karikánál fogva húzzuk ki a lánczot. Ekkor a merőleges az 5^0-es karikán fog keresztülmenni.

3) Ezen módot ugy is lehet változtatni, hogy a D' és E' pontokból az egész láncz hosszával köríveket karczolunk be a föld szinébe; a merőleges a metszésponton megyen keresztül.

4) Ha az adatott pont C az AB vonalon kivül, de 10^0-nél közelebb esik, akkor a láncz végét C-ben le kell szúrni, és a lánczot kifeszítvén, a másik végét az egyenes vonalba AB-be kell állítni. Ez kétféleképen történhet meg, egyszer a D, másszor az E pont áll elő, és a merőleges lábpontja a DE darabka közepére esik.

*5) Ha az adatott pont C az AB vonaltól 10^0-nél távolabb esik, akkor azon a tájon, hol a merőleges lábpontja valószinüleg esni fog, a vonalban két pontot D, E választunk, s a keletkező $\triangle$-nek oldalait megmérjük. Nevezzük ezeket a, b, c-nek, a merőlegest p, ennek lábpontjának a D ponttóli távját x-nek, akkor a CDF és CEF derék $\triangle$-ekből lesz

$$b^2 = p^2 + x^2,$$
$$c^2 = p^2 + (a-x)^2$$

Ezeket egymásból kivonván lesz:

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},$$

mely hosszat a D pontból E felé le kell mérni, s a nyert F pont lesz a merőleges lábpontja.

6) Ha az AB (116. ábra) egyenes vonal valamely pontjában C 60^0-ú szöget kell kitűzni, lemérünk a vonal hosszában 5^0-et D-ig, s a láncz két végét C, és D-ben leszúrván, az 5^0-es karikánál fogva a lánczot kifeszítjük, s a szögpontot megjelöljük. Ekkor a 60^0-ú szög szára az E ponton megyen keresztül, minthogy az egyenoldalú $\triangle$ szögei mindnyájan 60^0-ot tesznek.

7) Ha az adatott pont C' az AB vonalon kivül, de 10^0-nél közelébb esik, akkor a merőleges távot $C'D' = p$ megmérvén, a láncz egyik végét a C' pontban leszúrjuk, és kifeszítvén a láncznak azon pontját állitjuk be az AB vonalba, mely $\frac{2p}{\sqrt{3}} = 1{\cdot}155\,p$ hossznak megfelel. Ezen pont a 60^0 alatt hajlott vonalnak lábpontja lesz. Ugyanis a $C'D'E'$ derék $\triangle$-ben $E' = 60^0$, $C' = 30^0$ lévén, a $C'D'$ és $C'E'$ oldalak közt ezen összefüggés létezik:

$$C'D' = C'E' \times \cos 30^0 = C'E'.\ \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Innen következik:

$$C'E' = \frac{2p}{\sqrt{3}} = 1{\cdot}155\,p.$$

*8) Midőn a C'' pont az AB vonalon kivül 10^0-nél távolabb esik, akkor az 5. szám útmutatása szerint cselekedvén, ha még a 60^0-ú szög alatt hajlott vonalat $C''F$ húzva gondoljuk, két $\triangle$ áll elő, u. m. $C''D''E''$ és $C''D''F$. Az elsőből a D'' szöget, a másodikból a $D''F'$ darabot ki lehet számitni, u. m.:

$$cos\, D'' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

$$D''\, F = \frac{b\, sin\, (60^0 - D'')}{sin\; 60^0}.$$

9) A 45^0-ú szög kitűzése a derékszög két egyenlő részre osztása által eszközöltetik. E czélból a derékszög száraira a csúcspontból egyenlő, czélszerüen 10^0 hosszú darabok méretnek le, s a két pontot összekötő vonal két egyenlő részre osztatik. Ekkor a 45^0-nak megfelelő sugár ezen a ponton megyen keresztül.

10) Ha az adatott pont C' az AB vonalon kivül, de 10^0-nél közelébb van, akkor a merőleges távot p megmérjük, és a láncz egyik végét a C' pontban leszúrván, a lánczot kifeszítjük, s azon pontját állitjuk be az AB vonalba, mely a C' ponttól $p\,\sqrt{2} = 1{\cdot}414\, p$ távban esik. A nyert pont E' a 45^0 alatt hajlott vonal lábpontja fog lenni. Ugyanis az $E'\, D'\, C'$ derékháromszögben $E' = 45^0$ lévén:

$$C'D' = C'E' \times sin\, 45^0 = \frac{C'E'}{\sqrt{2}},$$

tehát $$C'E' = C'D' \times \sqrt{2} = p\,\sqrt{2} = 1{\cdot}414\, p.$$

*11) Ha a C'' pontnak az AB vonaltóli távola 10^0-et meghalad, akkor a 9. szám szerint kell a feloldáshoz fogni, és következő képletekhez jutunk:

$$cos\;D'' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

$$D''F = \frac{b\; sin\; (45^0 - D'')}{sin\; 45^0}.$$

12) Ezen feloldásokból kitűnik, hogy a láncz 90^0, 60^0, 45^0-ú szögek kitűzésére csak egyes esetekben, vagy más kényelmesebb műszerek hiányában alkalmatos. Ellenben folytonos és ismételt használatra igen fárasztó.

111. §. 90⁰, 60⁰, 45⁰ kitűzésére szolgáló műszerek.

A 90^0, 60^0, 45^0-ú szögek kitűzésére szolgáló műszerek közt nevezetesebbek:

1) A szögkereszt. Ez (117. ábra) két nézgével felszerelt egymást derékszög alatt metsző 10—12″ hosszú vonaszból A, és B áll, melyeket egy függélyes állású csapon a köröskörül fordítni, és egy csavarral b megszorítni lehet. A csap egy $4^1/_2$—5′ hosszú pálczán e van megerősitve, mely egy egyszerű állványt képez.

A két vonasz vagy szilárdul meg van egymáson erősítve, vagy czélszerűbben a felső az alsó közepéből kiálló csap körül foroghat, és egy horog h által nyer merev állást, melynek egyik végét az egyik, a másikat pedig a másik vonasz közép vonalában fúrt lyukakba kell dugni. Minden szögnek más-más lyukpár felel meg, melyeknek a forgástengelytőli távjait r, ha h a horog hoszszát jelenti, következő képletből lehet kiszámítni:

$$r = \frac{h}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Ezen képletből következik, ha

$$\alpha = 90^0, \quad r = 0{\cdot}70711\ h,$$
$$\alpha = 60^0, \quad r = h,$$
$$\alpha = 45^0, \quad r = 1{\cdot}30656\ h.$$

Ezen műszer használata igen egyszerű. Ha t. i. (116. ábra) az AB adatott vonalnak valamely pontjából C a nevezett szögek közül valamelyiket ki akarjuk tűzni, az állványt a C pontban függélyesen a földbe kell szúrni, azután a b csavart megnyitván, a műszert fordítni kell, mig egyik irányzó az AB vonal irányában fog feküdni; mit onnan lehet megitélni, hogy a hajszál az A rudat közepén metszi. Ekkor a b csavart meg kell szorítni, s a másik irányzó a kitűzendő szög másik szárát fogja képviselni, melyet egy rúddal a mezőn meg lehet jelölni.

Ha a C' pont az AB vonalon kivül esik, akkor választunk az AB vonalban szabadszemmel egy pontot, melyről gondoljuk, hogy az körülbelől a keresett pont lehetne. Felállitjuk a műszert ezen pontban az előbbi mód szerint, és átnézünk a második irányzón. Ha az irányvonal a C' pont mellett megyen el, — mint rendesen szokott történni, minthogy szabadszemmel a keresett pontot el nem találtuk, — akkor az eltérést megbecsüljük, s a műszert az AB vonalban a kellő irányban épen annyival odább visszük. Ezután a műtételt ismételjük, mig az irányzó a C' ponton megyen keresztül.

2) Mielőtt ezen műszert használni lehetne, meg kell vizsgálni,

valjon az iránysíkok a műszer síkjára merőlegesen állanak-e? és egymással 90°, 60°, 45°-eket zárnak-e be?

Az első pontot illetőleg állitsuk fel a műszert ugy, hogy annak síkja szabadszemmel vizszintes legyen, és fordítsuk azt, mig az irányzó valamely függélyes tárgyra mutat, minő p. o. egy ház szöge, vagy egy gondosan függélyes állásban a földbe szúrt rúd. Ha a hajszál a tárgygyal párhuzamos, akkor az iránysík fekvése helyes. Egyébaránt egy kis hiba épen nem ártalmas, miután a műszer síkjának ugy is csak szabadszemmel lehet vizszintes fekvést adni.

A második pontnak vizsgálata azon nyugszik, hogy $2.90^{\circ} = 180^{\circ}$, $3.60^{\circ} = 180^{\circ}$, és $4.45^{\circ} = 180^{\circ}$. Ha tehát egy síkságon a műszer felállittatik, és egy tetszés szerint választott vonaltól kezdve a 90°-ú szög kétszer, a 60°-ú háromszor, a 45°-ú pedig négyszer egymásmellé feltétetik, a két szélső vonalnak egy egyenes vonalat kell képezni, s az eltérés a 2, 3, 4-szeres hibát ábrázolja. A hibát a lyukak kiigazitása által lehet elenyésztetni.

3) A tükörcső. Ez (118. ábra) egy 8—10″ hosszú csőből áll, melynek egyik vége be van fenekelve, és közepén egy kis lyukacskával *a* ellátva, a másik végén pedig egy sík tükör *b* van megerősítve, melynek egyik feléről *c* a fémboriték le van véve, úgy hogy csak átlátszó üveg táblácskát képez. A tükör közepén egy finom vonás *dd* van húzva legczélszerűbben hátul a fémboritékon keresztül, mert egy elől húzott vonás a tükör által visszavettetvén, kétszeresen látszik, mi könnyen felcserélésre adhat alkalmat. Ezen vonás és a lyuk által a csőben egy iránysík állapíttatik meg, mely a tükör síkjával 45°-ú hajlásszöget képez. Végre a cső oldalán a tükör előtt egy lyuk *e* van kivágva, melyen keresztül az oldalsugárok a tükörhöz juthatnak.

Gondoljuk most, hogy a cső iránysíkja *ad* a mezőn kitűzött vonallal *AB* összeesik, és a *d* pontban egy *AB*-re merőleges sugár *Ed* esik a tükörbe, ez a tükörsíkkal 45°-ot zárván be ugyancsak 45° alatt fog visszavettetni; ennélfogva *da* irányban fogja útját folytatni. Az *a*-nál lévő szemnek tehát úgy látszik, mintha a sugár *E'd* irányból jönne, és a tükrön lévő vonás *d* mind a sugárzó pont képét *E'*, mind pedig a *B* tárgyat metszeni fogja; mig az *E* pont mellett lévő tárgyak, — p. o. *F* — képei a tükörben a vonástól oldalt fognak látszodni.

4) Ha ezen műszerrel egy kitűzött vonalra AB egy közbeneső pontból C merőlegest akarunk felemelni, a csövet szabad kézzel körülbelől vizszintesen, s a tükröt a C pont felett függélyesen tartván, az irányzót a B végpontra beállítjuk; ezután egy segédet egy rúddal oldalt küldvén, előre vagy hátra intézett jelekkel úgy helyezünk el, hogy a rúd képe az irányzó vonással s a B ponttal összeessék.

Ha pedig a C pont az AB vonalon kivül áll, akkor a csövet a fentemlített fekvésben a szem eleibe tartván, az irányzót B-re beállítjuk, s az AB vonalban előre vagy hátra megyünk, míg a C képe az irányzó vonáson lesz, s egyszersmind a B ponttal összeesik.

* Ezen műtétel némi nehézséggel jár azért, mert a C képe a cső legkisebb ingadozását is megérzi. Ezért nehéz a C képét az irányzó vonást és a B tárgyat tökéletesen egymásra állítni. Ugyanis ha az irányzó a kitűzött egyenes vonaltól AB α szöggel hajlik el, akkor a beeső sugár esési szöge is α szöggel, a visszavetett sugáré pedig az 58. §. szerint 2α-val változik, tehát a cső ingadozása a képen kétszerte nagyobb mozgást idéz elő.

5) A tükörcső használhatóságához megkivántatik, először, hogy a tükör lapjai síkok és párhuzamosok legyenek; másodszor, hogy az irányvonal a tükör felületével 45^0-ot képezzen.

A tükör sík voltát abból lehet megösmerni, hogy a tükör a tárgyak különösen hosszú egyenes vonalak képét híven eltorzítás nélkül mutatja. Még szigorúbb ösmertetőjelt szolgáltat azon körülmény, hogy ha egy távcsőt valamely távol lévő pontra beállítunk, s azután a tárgy képét a tükörben felkeressük, ezt a távcsőn keresztül tisztán kell látni; minthogy a tárgyból kijövő sugárok szétágazása a visszavetés által nem változik. Ellenben ha a tükör felülete homorú, vagy domború, akkor a sugárok szétágazása a visszavetés után kisebb, illetőleg nagyobb, mint azelőtt volt; ennélfogva a szemcsőt beljebb kell tolni, illetőleg küljebb kell húzni, hogy a kép tisztán látszodhassék.

A tükörsíkok párhuzamosságát az 57. §. útmutatása szerint abból lehet megitélni, hogy végtelen távban lévő tárgyakról csak egy kép áll elő, míg az ék alakú tükrök mindig két képet mutatnak.

Az irányvonal fekvésének helyes voltát a 2. szám alapján így kell megvizsgálni. Egy kiterjedt síkságon egy egyenes vonalban (119. ábra) három rudat *A*, *C*, *B* kitűzünk, s a műszert a középső rúd felett tartván, az állitólag derékszöget a *CA* vonal mellé kitűzzük, és annak szárát egy rúddal *D* megjelöljük. Ezután *B* felé fordulván figyelmezünk, valjon a *D* rúd képe találkozik-e a *B* rúddal az irányzó vonáson, vagy nem? Első esetben a kitűzött szög valóban derék, utóbbiban pedig nem. Ekkor tehát a szöget *CB*-vel ujra kitűzzük, és annak szárát az *E* rúddal megjelöljük, a *DE* darabot két egyenlő részre osztjuk, és közepébe egy rudat *F* állítunk. Ekképen *FCA*, *FCB*-vel egyenlő lesz; tehát $FC \perp AB$. Végre a tükört az igazító csavarka által, — mely rendesen a tükör hátulsó részére hat, — addig kell mozdítni, míg az *F* rúd képe *B*-vel a tükör vonásán találkozik. Meg kell jegyezni, hogy a *CA*, *CB*, *CF* hosszakat nem kell rövidebbeknek választani azon merőlegesnél, melyet a tükörcsővel akarunk felemelni, vagy leereszteni.

6) A s z ö g t ü k ö r. Ezen műszer (120. ábra) két egymáshoz 45°, 30° vagy $22^1/_2$° alatt hajlott síktükörből áll, melyek erős fém-lemezekbe vannak foglalva, és egy oldalnyilásokkal ellátott üres prisma oldalain csavarkákkal megerősítve. Egyik tükör *M* mozdulatlan, a másikat *N* pedig a *b*, *c* csavarkákkal, melyek közül egyik húz, másik taszít, egy kevéssé mozdítni, és minden állásban megszorítni lehet. Hogy a kiálló *b*, *c* csavarkák akaratlanul meg ne mozduljanak, s ezáltal a tükör fekvése ne változzék, czélszerű a csavarkákat egy vastag lemezzel beborítni, melyen a csavarkák fejeinek tágas lyukak vannak hagyva.

Néha egy tokban egymás felett, vagy háttal egymás felé fordulva két tükör-rendszer is van összekapcsolva, melyek közül egyik 90°, másik 60°; vagy egyik 45°, másik 60°-ú szögek kitűzésére szolgál.

A szögtükör használata a tükörcsőéhez hasonló. A prisma nyilt oldalának egyik élét *DD*, vagy *EE*, t. i. a mezőn kitűzött egyenes vonalnak *AB* valamely pontjában, körülbelől függélyes állásban, a szem elé kell tartani, és egyszerre mind a szemmel átalellenben lévő tükörbe, mind a nyiláson keresztül kell nézni. Az elsőben látszodni fognak az oldalt lévő tárgyak kétszeri visszavetés által származott képei, az utóbbiban pedig a *B* rúd. Ugyde a 60. §. szerint a beeső és kétszer visszavetett sugárok közötti szög kétszer annyi, mint a tükrök hajlásszöge; ha tehát a visszavetett sugár az AB vonallal párhuzamos, azaz a sugárzó pont képe a B rúddal összeesik, akkor a beeső sugár az AB vonallal 90^0, illetőleg 60^0, 45^0-ot fog képezni, a szerint, a mint a tükrök hajlásszöge 45^0, 30^0, vagy $22^1/_2{}^0$, és a tükör a kitűzendő szög csúcsában fog állani.

A 30^0-ú szögtükörrel nemcsak 60^0, hanem 120^0-ú szöget is ki lehet tűzni; az első a beeső és kétszer, — az utóbbi a négyszer visszavetett sugárok által képeztetik. Hasonlóképen a $22^1/_2{}^0$-ú szögtükör nemcsak 45, hanem 90^0, és 135^0-ú szögek kitűzésére is alkalmatos, azok t. i. a beeső és kétszer, négyszer és hatszor visszavetett sugárok által képeztetnek. Innen következik, hogy mind a 30^0, mind a $22^1/_2{}^0$-ú szögtükör kettős tükörrendszer helyét pótolja.

7) Ezen kettős tükörrendszereknek az egyszerű 45^0-ú szögtükör felett azon előnyük van, hogy általok a rendezők megmérését meg lehet gazdálkodni, és a metszékek megmérésére lehet visszavinni. Ugyanis legyen a 121. ábrában AB egy metszéktengely, M egy oldalt lévő pont, melynek 60^0, 90^0 és 120^0-ú rendezői sorjában MP, MQ, MR, akkor

$$MP = 2.PQ = PR.$$

Hasonlóképen ha az N pontnak 45^0, és 90^0-ú rendezői NS és NT, akkor:

$$NT = ST.$$

8) A 45^0 szögtükör kiigazítása a tükörcsőével mindenben megegyez.

A 30^0-ú szögtükröt illetőleg (119. ábra) tűzzünk ki egy egyenes vonalat három rúddal, A, C', B; a középső pontban C' tűzzünk ki a BC' vonal mellé a műszerrel 60^0-ú szöget, s jelöljük meg annak szárát egy rúddal D'. Ezután forduljunk arczczal A felé, és tűzzünk ki a műszerrel AC' mellé 120^0-ú szöget; ennek szára a D' ponton megyen keresztül, ha a szögtükör helyes. Ellenkező esetben D' mellé a szög szárában egy rudat E' kell beszúrni, és a $D'E'$ különbséget, mely a hármas hibát ábrázolja, három egyenlő részre kell osztani. Legyen $D'F' = {}^1/_3 . D'E'$. Ekkor az F' pontban egy rudat szúrván, a tükröt az igazitó csavarkák által addig kell mozdítni, mig az F' rúd képe mindkét oldalt az A és B rudakkal összeesik.

A $22^1/_2{}^0$-ú szögtükörre nézve tűzzünk ki az ACB egyenes vonal mellé 90^0-ú szögeket, és mindenben úgy működjünk, mint a 45^0-ú szögtükörnél mondatott.

9) A prismák Miután a 63. és 66. §-okban megmutattatott, hogy a három- és négyoldalú prismák a belső sugárokat bizonyos esetekben állandó szögek alatt térítik el, ezek is alkalmasok szögek kitűzésére. Nevezetesen a derék egyenszárú 3 oldalú prisma s a négy oldalúk közt az, melynek egy szöge $= 90^0$, az átalellenben lévő pedig 135^0, derékszög kitűzésére szolgál. A Bauernfeind prismakeresztjének mindenik prismája tehát ezen czélnak tökéletesen megfelel.

112. §. Ugyanaz a papiroson.

A papiroson 90^0, 60^0, 45^0 alatt hajlott vonalak rajzháromszögek által húzatnak.

1) A B rajzháromszög derékszögét a 122. ábrában ugy kell megvizsgálni, hogy annak egyik befogóját a rajztáblán egy egyenes élű vonasz mellé illesztvén, a másik befogó mellett egy finom vonalat húzunk; azután a háromszöget megfordítva tesszük a vonaszhoz a húzott vonal mellé, s ha a befogó a vonallal összeesik, a derékszög helyes; különben a különbség a kettős hibát ábrázolja. Czélszerű a háromszöget másod-izben nem egészen a vonalra, hanem egy kis távban mellé állitni, és a befogó mellett új vonalat húzni. Ezen vonalaknak párhuzamosoknak kell lenni.

2) A háromszög 60^0-ú szögét igy kell megvizsgálni. (123. ábra). Fektessük a háromszöget B fekvésben egy egyenes élű vonasz mellé, és húzzunk a feszitő mellett egy finom vonalat. Ezután fordítsuk meg a háromszöget B' fekvésbe, és húzzunk a feszitő mellett ismét egy vonalat. Ha a háromszög szöge 60^0 volt, ezen két vonal szintén 60^0-ot fog bezárni egymással, ennélfogva ha a feszitőt egyik vonalra pontosan beállitjuk, a befogónak a másik vonallal párhuzamosan kell feküdni. Az eltérés a 3-szoros hibát ábrázolja.

3) A 45^0-ú háromszögek megvizsgálása, miután a derékszög helyesnek találtatott, ilyeténképen történik. (124. ábra). A háromszögnek feszitő oldalát egy egyenes vonaszhoz illesztvén,

húzzunk az egyik befogó mellett egy finom vonalat; ezután a háromszöget megfordítva illesztvén a vonaszhoz, a befogót a vonal mellé állitjuk. Ha az a vonallal párhuzamos, akkor a szög helyes; ellenkező esetben az eltérés a kettős hibát ábrázolja.

113. §. Párhuzamosak.

Ha a mezőn valamely adatott pontból egy egyenes vonalhoz párhuzamost kell húzni, ezt különféleképen lehet véghezvinni, u. m.

1) Eresszünk le a 125. ábrában a C pontból az adatott vonalra AB egy merőlegest, mérjük meg ennek hosszát CD, és a vonal valamely más pontjából E emeljünk fel egy egyenlő hoszszaságú merőlegest $EF = CD$. Ekkor CF, AB-vel párhuzamos fog lenni, és az eredmény annál jobb leend, mennél hosszabb CF.

2) Eresszünk le C-ből AB-re egy merőlegest CD, és emeljünk fel a C pontban CD-re ismét egy merőlegest CF, akkor $CF \parallel AB$, és az eredmény annál biztosabb, mennél hosszabb CD.

3) Ha a C pont hozzáférhetlen volna, akkor az AB valamely pontjában egy merőlegest EF emelvén fel, erre a C pontból merőlegest CF eresztünk le, mely az AB-vel párhuzamos fog lenni.

4) Keressünk az adatott vonal irányában, a távolban, valamely tisztán látható tárgyat M (126. ábra), és tűzzünk ki ezen tárgy felé az adatott pontból C egy egyenes vonalat. Ezek egymással annál kisebb szöget fognak bezárni, mennél távolabb esik az M pont, és mennél közelebb van C az AM vonalhoz. Ugyanis legyen $CD = p$, $DM = T$, az AMC szög $= \alpha$, akkor elég pontossággal lesz

$$\alpha = \frac{p}{T}.$$

Ha ezen szög az irányzási hibát, melyet a legkisebb látszöggel, azaz $1'$-el egyenlőnek vehetünk, meg nem haladja, akkor a két vonalat a gyakorlatban párhuzamosnak lehet tekinteni.

Különös figyelemre méltó azon eset, mely a mérő-asztal használatánál előfordul, hogy p . . . 10—15''-et meg nem halad. Ilyenkor az M pont már 3—400°-re is elég távol van, hogy a vonalakat párhuzamosoknak lehessen venni. Sőt ha p csak 1—2'' hosszú, T. . . 50—60°-re leszállítható, a nélkül, hogy a párhuzamosságban lévő hiba érezhető volna.

5) A papiroson párhuzamos vonalakat rajzoló háromszögekkel egymás melletti eltolás által szoktunk húzni.

114. §. Közvetett mérés.

Eddig az egyenes vonalat mindig olyan állapotban gondoltuk, hogy a közvetlen mérés semmi legyőzhetlen akadály által nem gátoltatott. Valóban kisebb vagy nagyobb lejtők árkok patakok keritések kőfalak stb., a közvetlen mérést csak nehezítik, de lehetetlenné nem teszik. De vannak olyan akadályok is, mint p. o. mocsárok posványok folyóvizek épületek stb., melyeken a közvetlen mérés lehetősége egészen megtörik, és a mérnököt közvetett mérésre utalják.

Szélesebb értelemben véve minden felvétel: közvetett mérés; a mennyiben a térképen a lépték segítségével minden vonal hosszát meg lehet határozni; mindazáltal itt csak azon közvetett mérésekről lesz szó, melyeket az eddig előadott egyszerű eszközök segítségével véghez lehet vinni a nélkül, hogy a vidéknek felvételi térképe igénybe vétetnék. Sőt inkább a közvetett mérést a térkép készítésére szükséges adatok meghatározása végett mintegy kedvezőtlen körülmények közt eszközlendő hosszmérésnek kell tekintenünk.

Az ide tartozó feladatok háromfélék, t. i.
A vonalnak végpontjai hozzáférhetők, vagy
Annak csak egyik végpontja hozzáférhető, vagy
Mindkét végpontja hozáférhetlen.

Első eset. A vonalnak végpontjai hozzáférhetők. 1) Legyen AB (127. ábra) a megmérendő vonal, válaszszunk oldalt egy pontot C, melyről mind A, mind B-hez látni és mérni lehet. Mérjük meg az AC és BC hosszakat, s meghosszabbítván mérjük le a $CA' = CA$, és $CB' = CB$ darabokat. Ekkor $A'B' = AB$. Ugyanis az ABC és $A'B'C$ $\triangle$-ek egyenlők lévén, minthogy azoknak két megfelelő oldalai a bezárt szögekkel együtt egyenlők, a többi hasonfekvésű oldalak is egyenlők egymással; tehát $AB = A'B'$.

A CA' és CB' hosszak helyett azoknak felét vagy harmadát általában valamely aránylagos részét is lehet lemérni, s akkor az ab hossz is AB-nek fele vagy harmada vagy aránylagos része leend. De ilyenkor kicsinyből nagyra húzván következtetést, minden munkálatot legnagyobb szigorral kell véghezvinni, minthogy a hiba is aránylagosan növekedik.

2) Keressünk a szögtükörrel oldalt egy olyan pontot C (128. ábra), melyben az AC és BC megmérhető vonalak egymásra merőlegesen állanak. Ekkor lesz:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}.$$

3) Tűzzünk ki az akadály mellett egy egyenes vonalat (129. ábra) és eresszünk le rá az A, B pontokból merőlegeseket. Ezeket a metszékkel együtt meg lehet mérni, és ha $BE \parallel CD$, az ABC derék $\triangle$-ből következik

$$AB = \sqrt{BE^2 + AE^2}.$$

Ugyde $BE = CD$, $AE = AC - BD$, ezeket tehát helyettesítvén, lesz:

$$AB = \sqrt{CD^2 + (AC - BD)^2}.$$

Ha CD, AB-hez közel párhuzamos, akkor az $AC - BD$ . . CD-hez képest igen csekély lévén, a fentebbi képletet a Newton formulája szerint ki lehet fejteni, és elegendő pontossággal lesz:

$$AB = CD + \frac{1}{2}\frac{(AC - BD)^2}{CD}.$$

4) Ha A-tól B-hez látni lehet (130. ábra), emeljünk fel az A és B pontokban merőlegeseket, s ezeken egyenlő hosszakat $AC = BD$ lemérvén, $CD = AB$ fog lenni.

115. §.

Második eset. Ha a vonal egyik végpontja hozzáférhetlen. 1) Legyen AB (131. ábra) a megmérendő vonal, hol A hozzáférhetlen. Tűzzünk ki a vonal irányában egy harmadik pontot D, és válasszunk oldalt egy negyediket C. Mérjük meg a BC, DC hosszakat, és tegyük fel azokat a meghosszabbított vonalakra úgy, hogy $CB' = CB$, és $CD' = CD$ legyenek. Ezután keressük fel az AC és $B'D'$ vonalak metszéspontját A', ekkor $AB' = AB$ fog lenni. Ugyanis a szerkezet szerint $BCD \triangle = B'C'D' \triangle$-el, minthogy két oldal a bezárt szöggel együtt mindkettőjökben egyenlők. Ennélfogva B szög $= B'$ szöggel, és miután a C-nél lévő csúcsszögek is egymásközt egyenlők, az ABC és $A'B'C$ háromszögek is egyenlők lesznek. Tehát $A'B' = AB$.

A CD', CB' vonalak helyett azoknak felét, vagy harmadát Cd, Cb is lehet feltenni; a mikor azután ab is AB-nek fele vagy harmada fog lenni.

Ezen feladatban a feloldás pontossága főképen az A' pont meghatározásától függvén, az eredmény annál kielégitőbb lesz, mennél inkább közelít A szög 90^0-hoz. A BC vonalat tehát, ha a hely megengedi, AB-nál kisebbnek venni nem kell.

2) Emeljünk fel a 132. ábrában AB-re egy merőlegest BC, és AC-re egy másodikat CD, hol D az AB vonalban fekszik. Ekkor két hasonló $\triangle$ áll elő, u. m. ABC, és BCD; minthogy a megfelelő oldalak egymásra merőlegesen állanak. Tehát:

$$AB : BC = BC : BD,$$

és ebből

$$AB = \frac{BC^2}{BD}$$

Ezen esetben is czélszerű BC-t nem sokkal kisebbnek venni AB-nál; különben egy kis hiba ezen vonal megmérésében az AB vonal meghatározására igen károsan hatna.

3) Emeljünk fel a B pontban (133. ábra) AB-re egy merőlegest BC, és vessünk le az A pontból BC-re 60^0 szög alatt egy egyenes vonalat AC, akkor az ABC derékháromszögből lesz:

$$AB = BC \times tg\,60^0 = BC \times \sqrt{3}.$$

Ellenben ha B pontnál 60^0-ú szög tűzetik ki, és ennek számára A-ból merőleges bocsáttatik le, akkor:

$$AB = \frac{BC}{cos\;60^0} = \frac{BC}{sin\;30^0} = 2\,.\,BC.$$

4) S t a m p f e r t ü k ö r c s ö v e ezen feladat feloldására egy egyszerű készülékkel van ellátva. A néző lyuk t. i. egy kis lemezke közepén van helyezve (134. ábra), melyet az iránysíkra merőlegesen oldalt lehet tolni, s e végett vezetékek közt fekszik. Ezen lemezke egy mutató vonással, egyik vezeték pedig egy osztályzattal van ellátva, mely úgy van készitve, hogy ha a lemez mutatója ezen vonások közül valamelyikre beállittatik, a tükörcső által kitűzött szög cosinusa $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \frac{1}{n}$, azaz: olyan törtszám, melynek nevezője n egész szám. Ezen esetben tehát lesz:

$$AB = n \times BC.$$

Azon szám, melylyel a BC hosszat szorozni kell, hogy a keresett táv értéke kijőjjön, az illető osztályvonás mellé fel van jegyezve.

116. §.

Harmadik eset. Ha a vonal mindkét végpontja hozzáférhetlen.

1) Legyen a 135. ábrában AB egy hozzáférhetlen vonal; mérjünk le egy tetszésszerint választott egyenes vonalban két egyenlő darabot $CD = CE$; válasszunk az EA és DB irányokban két pontot G és F, s az FC és GC hosszakat megmérvén, rakjuk fel azoknak meghosszabbított irányaikba, úgy hogy $FC = F'C$, és $GC = G'C$ legyen. Végre tűzzük ki az EF' és BC, továbbá DG' és AC vonalak metszéspontjait B', A'. Ekkor $A'B' = AB$. Ugyanis ezen feloldás nem egyéb a 115. §. 1. szám kétszeri alkalmazásánál, ennélfogva az ott előadott okoknál fogva $AC = A'C$ és $BC = B'C$. Minthogy pedig a C-nél lévő csúcsszögek is egyenlők, az ABC és $A'B'C$ $\triangle$-eknek is egyenlőknek kell lenni, következésképen $A'B' = AB$.

Magában értetik, hogy a CE, CD, CG, CF vonalaknak felét vagy harmadát is lehet felrakni, s az ab hossz is fele, vagy harmada lesz az AB hossznak.

Mennél nagyobb ED, annál nagyobb szögek alatt metszik A' és B'-ben a vonalak egymást, tehát a feloldás annál biztosabb fog lenni.

2) Válasszunk a 136. ábrában egy alapvonalat CD, tűzzünk ki hozzá párhuzamost EH, és határozzuk meg azon pontokat, E, F, G, H, melyekben a C, D pontokból A és B felé húzott átlók a párhuzamost metszik. Ekkor a keletkező hasonló $\triangle$-ekből CDA és EFA lesz:

$$CD : EF = CA : EA,$$

vagy kivonás által új arányt képezvén:

$$CD - EF : CD = CA - EA : CA = CE : CA;$$

honnan következik:

$$CA = \frac{CD \times CE}{CD - EF}.$$

Hasonlóképen a CDB és GHB hasonló $\triangle$-ekből lesz:

$$CB = \frac{CD \times CG}{CD - GH}.$$

Most a CA és CB hosszaknak felét vagy harmadát Ca, Cb, felrakjuk, s az ab hosszat megmérjük; ez is fele vagy harmada fog lenni az AB vonalnak. A feloldás annál biztosabb, mennél nagyobb a párhuzamosak közti táv, minthogy akkor a nevezők nagyobbak lévén, a mérési hibák csekélyebb befolyással birnak.

3) Tűzzünk ki az AB vonal valamely pontjában (137. ábra) C egy 60^0 alatt hajlott vonalat, és húzzunk erre az A és B pontból merőlegeseket; akkor a lábpontok közötti táv DE félannyi, mint AB; tehát $AB = 2 \times DE$.

117. §. Távmérők.

1) A közvetett mérésnek azon módjai, melyek az előbbi §-okban előadattak, egyes esetekben igen hasznos szolgálatot tehetnek ugyan, de ismételt alkalmazásra igen sok fáradsággal és idővesztéssel járnak, minthogy a munka mindenkor több hossznak közvetlen megmérését igényli. Pedig alig fordul elő a gyakorlatban egy-egy feladat, melynek gyors és kényelmes feloldása oly kivánatos volna, és eredménydúsabbnak lenni igérkeznék, mint egy pontnak egy más ponttól — a mérnök álláspontjától — való távjának megmérése, az úgynevezett távmérés. Ugyanis ha sikerülne egy oly műszert szerkeszteni, mely által egy álláspontból a körülötte lévő pontok távjait a mérőláncz mellőztével olyan kis idő alatt meg lehetne mérni, a mennyi egy szögmérésre kivántatik a nélkül, hogy az eredmény rosszabb volna a lánczmérésénél: akkor a felvétel nagyobb részint a sarkösszrendezők alkalmazására szoritkoznék, és gyorsaság s kényelem tekintetéből semmi kivánni való nem maradna. Nem is hiányoznak kisérletek ezen czél elérésére, bár az eredményt eddig csak 100^0-et meg nem haladó távra mondhatni kielégitőnek; mig a gyakorlati szükség legalább is 3—4-szer olyan nagy távra kiterjed. A feloldás nehézsége a feladat természetében fekszik, a mint következő vizsgálatból kitünik.

*2) Minden távmérés egy $\triangle$-ön alapul, melynek egyik oldala a a másikhoz T képest következésképen az átalellenben lévő szög α is igen kicsiny. Ezen háromszögben a egy legfeljebb 2^0 hosszú rudat, T pedig a megmérendő távot jelenti. Ha most a háromszöget körülbelől derékszögűnek, vagy egyenszárúnak tesszük fel, elegendő pontossággal lesz:

$$T\alpha = a.$$

Vizsgáljuk meg most, minő hatást gyakorol az a, vagy az α megmérésében ejtett hiba a T-re.

Ha $a \ldots \triangle a$-val változik, akkor T is változni fog. Nevezzük ezen változást $\triangle T$-nek, akkor lessz:

$$(T+\triangle T)\,\alpha = a + \triangle a,$$

ebből az előbbi egyenletet levonván, marad:

$$\triangle T.\,\alpha = \triangle a,$$

és ezt az első egyenlettel osztván, lesz:

$$\frac{\triangle T}{T} = \frac{\triangle a}{a}.$$

Ezen egyenlet azt mondja, hogy a hányadrészéig az a oldalt biztosan meg tudjuk mérni, annyadrészéig fogjuk a távot is biztosan meghatározhatni. Egy két öles rúd hosszát rudas körzővel $^1/_{2000}$ ölig biztosan meg lehet mérni, tehát:

$$\frac{\triangle a}{a} = \frac{1}{2000 \times 2} = \frac{1}{4000},$$

mig a lánczczali mérés pontossága legkedvezőbb esetben sem nagyobb $^1/_{2000}$-nél. Az a hossz tehát a távmérés nehézségét teljességgel nem okozza.

Másként áll a dolog az α szögre nézve. Ugyanis ha $\alpha \ldots \triangle\alpha$-val változik, akkor T is fog változni, teszem azt $\triangle T$-vel, és ezen egyenlet áll elő:

$$(T+\triangle T)\,(\alpha + \triangle\alpha) = a,$$

vagy kifejezve, és az első egyenletet belőle kivonván, lesz:

$$T.\,\triangle\alpha + \triangle T.\,\alpha + \triangle T.\,\triangle\alpha = o.$$

Feltesszük, hogy az α, és T-ben lévő hibák oly csekélyek, hogy azoknak szorzatát, mint másodrendű mennyiséget, az első rendűhöz képest el lehet hanyagolni. Tehát elegendő pontossággal lesz:

$$T.\triangle\alpha + \alpha.\triangle T = o$$

vagy

$$\frac{\triangle T}{T} = -\frac{\triangle\alpha}{\alpha}.$$

Ezen egyenlet is azt mondja, hogy ha T-t bizonyos annyadrészéig biztosan meg akarjuk határozni, az α szöget is annyadrészéig biztosan meg kell mérni. Tegyük fel most, hogy $T = 100^0$, $a = 1^0$, akkor $\alpha = 0{\cdot}01$, mely ívnek körülbelül $35' = 2100''$ felel meg. Ha tehát 100^0 távot $0{\cdot}^0 1$-ig pontosan meg akarunk határozni, mi az egésznek $^1/_{1000}$-ét teszi, akkor az $\alpha = 2100''$ szöget $2''$ pontossággal kell megmérni, mi tökéletesebb szögmérők által is csak hosszasabb munka után, a régi tökéletlenebb szerkezetűek által pedig épen nem eszközölhető. Ha pedig $T \ldots 3$—4-szer nagyobb volna, akkor α anniyszor kisebb lenne, tehát egy m. percznek csak kis tört részecskéjét lenne szabad hibázni; pedig később látni fogjuk, milyen nehéz, s milyen tökéletes műszerek kivántatnak ahoz, hogy valamely szöget csak $1''$-ig is pontosan meg lehessen mérni.

3) Ezen vizsgálatból következik, hogy a szögmérőnek igen tökéletes irányzóval kell felszerelve lenni, hogy az irányokat $^1/_4$—$^1/_2{}''$-ig biztosan ki lehessen tűzni. Minthogy a közönséges nézgék — Stampfer szerint — csak $15''$-ig adnak biztos irányt, távcsöveknél pedig az irányzás biztonsága a nagyítással egyenes viszonyban áll: szükség, hogy a távcső 30—40-szer nagyítson, mihez — egyébként hibátlan szerkezet mellett — 12 — $16''$ gyútáv kivántatik. Minthogy továbbá az α szög mindig kicsiny, 1^0-ot ritkán haladván meg, annak megmérése beosztott körívet nem igényel, hanem egy, a távcső látterében helyezett paránymérő eszköz által vitethetik véghez; honnan ezen távmérők láttaniaknak neveztetnek, és leggyakrabban használtatnak. De vannak olyan távmérők is, melyeknél a távcső csak az irányok kitűzésére szolgál, a szögmérő pedig a távcsőn kivül van helyezve.

4) A távmérésben két esetet kell megkülömböztetni, u. m. 1-ször: ha a táv mindkét végpontja hozzáférhető; 2-szor: ha egyik végpont hozzáférhetlen.

A mérnököt különösen az első eset érdekli, minthogy a gyakorlatban csaknem minden pont többé kevésbé annyiban hozzáférhető, hogy abban egy segéd egy rudat felállíthat. Hadi czélokra pedig az utóbbi eset bir különös fontossággal, a mennyiben az az ellenség állásának meghatározására szolgál.

118. §. Első eset. Üveg-paránymérő.

Ha a megmérendő távnak mind a két végpontja hozzáférhető, a szögmérésre következő műszerek használtatnak.

1) Az üveg-paránymérő. Ez (138. ábra), egy vékony

üveg táblácskából áll, melynek közepén egy vonás *mm* van keresztülhúzva, és igen parányi egyenlő részekre beosztva. Egy tk. vonal hosszát 30—40 részre be lehet osztani. Az 5-ös és 10-es vonások könnyebb leolvasás kedvéért hosszabbak a többieknél. Ezen üveg táblácska valamely szögmárő — p. o. a 101. §. 5. számában leirt vonasz — távcsőjének gyúpontjában azon a helyen erősittetik meg, hol különben az irányszálak szoktak kifeszítve lenni, és az *mm* vonás a függélyes szál helyét pótolja. Legyen a 38. idomban O az álláspont, B a vonal végpontja, $BA = a$ egy rúd, melynek két végén messze látható, czélszerűen a 139. ábra alakjára felváltva fehér és veresre festett czéltáblák vannak megerősítve, $A'B' = h$ ezen rúdnak a távcső tárgylencséje által alkotott képe, akkor ha a rúd, és annak képének a tárgylencsétőli távját T, t-nek nevezzük, következő arány áll elő:

$$T : t = a : h.$$

Minthogy pedig láttani törvények szerint

$$\frac{1}{T} + \frac{1}{t} = \frac{1}{f},$$

hol f a tárgylencse gyútávját jelenti. Ezen egyenletekből t kiküszöböltetvén, lesz:

$$T = f + \frac{af}{h}.$$

A távcső forgástengelye a mint a 97. ábrában látszik, rendesen annak $^1/_3$ tájára esik, czélszerű tehát ezen pontot állítni fel az álláspont felett, s ekkor a T, $^2/_3$ f-el nagyobb lesz, tehát:

$$T = \frac{5}{3} f + \frac{af}{h}.$$

2) Ezen képlet azon feltétel alatt keletkezett, hogy a szemlencse egyszerű, vagy Ramsden-féle szerkezetű, és a tárgylencse által alkotott kép a paránymérőre esik. Ha a szemcső Huyghens szerkezetével bir, mint rendesen szokott lenni, akkor a képlet egy kis módositást szenved. Ugyanis ekkor a tárgylencse által alkotott kép rs a paránymérő háta mögé esvén, a gyüjtőlencse által a paránymérőre visszahúzatik, és tulajdonképen az $r's'$ kép nagysága méretik meg. Szükség tehát rs-et $r's'$ által kifejezni. Legyen a gyüjtőlencse gyútávja (46. ábra) $= f_1$, akkor a 84. §. szerint az rs képnek a gyüjtőlencsétőli távja $= {}^1/_2 \cdot f_1$, az $r's'$-é pedig $= {}^1/_3 \cdot f_1$, tehát a 72. §. szerint:

$$rs : r's' = \frac{1}{2}f_1 : \frac{1}{3}f_1 = 3 : 2,$$

honnan következik:

$$rs = \frac{3}{2}r's', \quad \text{azaz} : h = \frac{3}{2}h'.$$

Ezen értéket a fentebbi egyenletben helyettesitvén, lesz:

$$T = \frac{5}{3}f + \frac{2}{3}\frac{af}{h'};$$

és ha a kép a paránymérőnek n osztályrészét fedi, s egy osztályrész hossza p-nek neveztetik, akkor a fentebbi egyenlet ezzé válik:

$$T = \frac{5}{3}f + \frac{2}{3}\frac{af}{pn}.$$

Ezen egyenletben a, f, p állandó mennyiségeket jelentenek, és csak egyedül n változó. Ha tehát az egyes tagok állandó együtthatói rövidség okáért M, N-nek neveztetnek, a táv általános egyenletét így is lehet irni:

$$T = M + \frac{N}{n} \ldots \odot$$

3) Az M és N értékét legczélszerűbben úgy lehet meghatározni, hogy két lehetőleg különböző táv mind lánczczal, mind a távmérővel megméretik. Nevezzük a lánczmérés eredményeit T, T'-nek, a paránymérőn leolvasott részek számát n, n'-nek, akkor lesz:

$$T = M + \frac{N}{n}, \qquad T' = M + \frac{N}{n'},$$

mely egyenletekből M és N kiszámittathatnak. Ha kettőnél több mérés tétetett, akkor ezeket párosával össze lehet foglalni, és mindenik párból M, N-net kiszámítni. Az eredmények egymástól egy kevéssé külömbözni fognak, minthogy az észleletek több kevesebb hibának ki vannak téve; tehát a külömböző értékek közötti számtani középet kell vennünk, s ezeket az M és N igazi értékei gyanánt tartanunk mindaddig, mig tökéletesebb mérésekre szert nem tehetünk.

Az ekképen meghatározott $\odot$ egyenlet után egy táblácskát lehet kiszámitani, melynek első rovatában az n-ek, másodikban pedig a megfelelő T-k jegyeztetnek fel; úgy, hogy a gyakorlatban minden számitás megkiméltetik, s a keresett táv a táblából kiiratik.

4) Meg kell még említni, hogy a rúd közepét az irányvonalra merőlegesen kell tartani. E czélból a rúd hosszára merőlegesen a szem magasságában egy kis irányzó csővecske van megerősítve, melynek egyik nyilt végén a rúd hosszára merőleges szőrszál van kifeszítve; a másik befenekelt vége pedig egy kis lyukacskával van ellátva. A segédnek tehát a rudat úgy kell tartani, hogy a csővön át nézvén, a szőrszál a mérnök fejét messe.

5) Magában értetik, hogy a távmérő által a táv az irányvonal hosszant határoztatik meg, melyet még szükség esetében a vízszintes síkra kell vetni. E czélból a távcsőnek magasságmérő készülékkel (lásd 97. ábra) kell felszerelve lenni.

Az üveg paránymérőnek főgyengéje az, hogy az osztályrészeket csak szabad szemmel lehetvén apróbb részekre osztani, n-et legfeljebb csak 0·1-ig lehet olvasni. Legyen a távcső gyútávja 12″, és a paránymérőnek egy osztályrésze $= \frac{1'''}{30} = \frac{1''}{360}$, akkor ez a tárgylencse középpontjából $\frac{1}{12.360} = 0{\cdot}000233$ szög alatt látszik, melynek 48″ felel meg. Ennélfogva a legkisebb megmérhető szög = 5″, mely sokkal nagyobb, mintsem a gyakorlati szükséget kielégíthetné.

119. §. Csavar-paránymérő.

1) Sokkal nagyobb pontosságot szolgáltat a csavarparánymérő. Ez áll egy, (140. ábra) a távcső gyúpontjában az *a*, *a* vezetékek közt fel s alá mozogható rámából *b*, melynek felszinén egy vizszintes fekvésű pókszál *c* van kifeszítve, és egyik oldalán egy finom metszésű csavar *d* megerősitve, melynek anyja *e* a csak hosszában mozogható orsó körül foroghat. Az anyacsavar körülete 100 egyenlő részre van beosztva, melyen egy fordulatnak $^1/_{100}$ részét, sőt miután egy osztályrészt még szabad szemmel 10, legalább 5 egyenlő részre biztosan be lehet osztani, annak $^1/_{500}$ részét le lehet olvasni. Az egész fordulatokat a ráma belső ürében az *f*, *f*, csavarokkal megszorított diaphragma felületén lévő fogas rudacskán *g* lehet megszámlálni, melyen a fogacskák a csavar lépéseivel egyenlők; ennélfogva az irányszál minden csavarfordulással egy foggal megyen odább. Ezen beosztás kezdőpontja egy pókszállal *m* van megjelölve, mely a diaphragmán a *c* irányszállal párhuzamosan feszíttetik ki. Ezenkivül a diaphrag-

mán még egy másik szál h is van az előbbire merőlegesen kifeszítve, s ezek együtt a távcső keresztszálait képezik. Ezen keresztszálak a c szálnál egy kevéssé mélyebben feküsznek azért, hogy az utóbbit felettök el lehessen tolni a nélkül, hogy egymásba ütköznének. Végre megemlítendő, hogy a k rugó a rámát mindig felfelé tolja, s ekképen a csavarnál a holt mozgás elhaříttatik.

2) Ezen műszernek használata következő. Miután a távcső a rúdra irányoztatott, s az m szál a paránycsavar által (l. 97. ábra) azon czéltáblára tökéletesen beállíttatott, mely a távcsőben felül látszik, a c szál a paránymérő csavar e által a másik czéltáblára beállittatik, s a csavar állása n leolvastatik. A csavar beosztása rendesen úgy van intézve, hogy ha az m és c szálak egymásra esnek, a mutató 0-án áll; s ezen esetben az előbbi §. ⊙ képlete itt is érvényes. Ha pedig a fentebbi körülmények közt a mutató m-en állana, akkor a fentebbi egyenletben n helyett $n-m$-et kellene tenni, tehát lenne:

$$T=M+\frac{N}{n-m}.$$

A mi a csavar általi paránymérést illeti, miután nem nehéz olyan csavart készítni, melyen 1″-re 100—120 lépés esik, egy lépést pedig az anyacsavar beosztása által 500 részre be lehet osztani, a legkisebb megmérhető hossz

$=\frac{1''}{120.500}=\frac{1''}{60000}$, s ha a távcső gyútávja 12″, akkor a legkisebb megmérhető szög $=\frac{1}{60000.12}=0{\cdot}0000014$, közel $\frac{1''}{3}$.

120. §. Reichenbach távmérője.

1) Ebben a távcső diaphragmáján két vizszintes fekvésű pókszál van kifeszítve, melyeknek egymástóli távja változatlan; a rúd pedig egyenlő részekre van beosztva. A régibb ilynemű műszereknél mindenik szálnak külön szemlencséje volt; de az újabbaknál csak egy közös lencse van alkalmazva. Ezen távmérőnek elmélete az előbbiektől igen keveset különbözik. Nevezzük a két szál közötti távot h-nak, akkor a 119. §.-ban kifejtett elsőbb képletek itt is érvényesek azzal a különbséggel, hogy itt a h állandó, a pedig változó. Ha tehát az állandó együtthatók M, N-el jelöltetnek, a táv képlete lesz:

$$T=M+Na.$$

Megemlitendő, hogy a rúdon az a értékei helyett a megfelelő T-ket lehet felirni úgy, hogy azon a távcsővel közvetlen a keresett távok olvastatnak le.

Ha a T értékei számtani haladványt képeznek, akkor a megfelelő a-k is ilyen haladvány tagjaiból fognak állani, következésképen a rúd beosztása egyenletes fog lenni. Ugyanis ha két távot T, T', a megfelelő rúdhosszakat pedig a, a'-nek nevezünk, lesz:

$$T = M + Na,$$
$$T = M + Na',$$

ezeket egymástól kivonván lesz:

$$T - T' = N(a - a'), \qquad \text{vagy}$$
$$\frac{T - T'}{a - a'} = N,$$

azaz: *a távok növekedése a rúdhosszak növekedésével állandó viszonyban áll.* Innen a rúd beosztásának készitésére nézve következő szabályt lehet levonni. A távmérőt egy körülbelől vizszintes síkon kellőleg elhelyezvén, állitsuk fel a rudat 20^0-nyi távban; állitsuk be az egyik irányszálat a rúd végén már előre megjelölt vonásra, s jegyezzük meg azon pontot, melyet a második irányszál metsz. Ezután ismételjük ezen műtételt 100^0-nyi távban. Ez által a rúdon két pont állapíttatik meg, melyek 20^0- és 100^0-nek felelnek meg, s a közbeeső hézagot 80 egyenlő részre kell osztani, és ezen osztályrészeket százon felül is folytatni. Legjobb az osztályrészeket fehér lapon vastag fekete vonalak által jelölni meg, melyek közül minden 5-ik hosszabbra van húzva, a tizedik pedig számmal ellátva. Egy osztályrészt szabad szemmel még apróbb részekre be lehet osztani.

*2) Az Ertl müncheni gépész által készített Reichenbach-féle távmérőrúd beosztásának kezdő pontja annak felső végén C-nél van (141. ábra), és a távcső alsó irányvonalát ezen pont felé kell irányozni, mig a felső irányvonal a rúdnak valamely más pontját D találja. Minthogy pedig a rúd a föld felületére körülbelül merőlegesen áll, a mennyiben a PO irányvonal, melyet a segéd a mérnök felé intéz, AB-vel közel párhuzamos: innen következik, hogy a rúd azon darabkája CD, mely a két irányvonal közé esik, a távcső közép vonalára OE ferdén áll; ennélfogva a D-nél történt leolvasás a távot egy kicsit nagyobbnak adja, mint kellene. Hogy tehát a CD darabból az OE távot helyesen lehessen meghatározni, a T képletében a, azaz DC helyett DG-t kell tenni, mely utóbbi OE-re merőleges. Ugyde:

$$DG = CD \times \cos GDC,$$

a GDC szög pedig $= EOP$ szöggel, mivel száraik egymásra merőlegesen állanak. Nevezzük ezen szöget $= \varepsilon$-nak, akkor lesz:

$$DG = a \cos\varepsilon,$$

s ezt helyettesítvén lesz:

$$OE = M + N a \cos\varepsilon.$$

Tekintetbe vévén pedig, hogy M . . . 2—3 lábat soha meg nem halad, és $\cos\varepsilon$ a gyakorlatban 0·8-nél sohasem kisebb, elég közelítéssel lehet tenni:

$$OE = (M + Na) \cos\varepsilon = T . \cos\varepsilon$$

hol T a rúdon leolvasott tökéletlen távot jelenti. Ezután az EOP derék $\triangle$-ből lesz:

$$OP = OE \times \cos\varepsilon = T . \cos\varepsilon^2,$$

és végre, ha az OE iránynak megfelelő hajlásszöget, melyet a távcsővel összeköttetésben lévő magasságmérő íven (l. 97. ábra) kell leolvasni, ω-nak nevezzük, honnan az OP hajlásszöge $= \omega - \varepsilon$-nek találtatik, az OP, vagy — a mi csaknem egyre megyen — AB vonal vizszintes vetülete lesz:

$$V = OP \times \cos(\omega - \varepsilon) = T . \cos\varepsilon^2 . \cos(\omega - \varepsilon) \; . \; . \; . \odot$$

Az ε szög meghatározására az $EOP \triangle$ szolgál, melyben $EP = CP - CE = l - {}^1/_2\, a$; OE pedig a fentebbiekből ösmeretes, tehát:

$$\sin \varepsilon = \frac{l - {}^1/_2\, a}{T . \cos \varepsilon},$$

honnan következik:

$$\sin 2\varepsilon = \frac{2l - a}{T} \; . \; . \; . \; ☽$$

Az $\odot$ és ☽ egyenletekben foglaltatik a Reichenbach-féle távmérés végfeloldása, t. i. az ε értéke a ☽ egyenletből kiszámíttatván, az $\odot$ egyenletből a táv vetülete meghatároztatik. Ezen utóbbi képlet szerint egy táblát is lehet kiszámítni, mely a vetület értékét a T és ω argumentumok után szolgáltatja. Ilyen táblák találtatnak Bauernfeind gyakorlati mértanában, melyek az Ertl műhelyéből kikerült távmérők számára vannak kiszámítva, és bajor lábra vonatkoznak.

3) A Reichenbach-féle távmérő fő becse annak egyszerűsé-

gében áll, melynélfogva a mérnök akármely jó távcsős vonaszt távmérővé átalakítni képes a nélkül, hogy gépész segitségére szorulna; mig a többi távmérők csak ügyes művész által készíttethetnek.

*4) Az eddig előadott távmérők azon feltétel alatt keletkeztek, hogy a rúd képe tökéletesen az irányszálak síkjába esik; nem azért, mintha a képet nem lehetne eléggé tisztán látni, ha az egy kissé a diaphragmán kivül áll is; hanem azért, hogy a kép hossza az irányszálak közti távval tökéletesen egyenlő legyen. Minthogy pedig a kép helye a távcsőben a tárgy távjához képest változik, szükség a szemcsövet minden tárgyra külön beállítni, hogy a kép és irányszálak közt legkisebb ingadozást se lehessen észrevenni, különben a kép hossza hibásan méretvén meg, a rúd távja is hibásan fog kijönni. Legyen ugyanis a 142. ábrában rs, a rúd képe, mm a diaphragma, akkor az o-ban lévő szemnek ugy látszik, mintha a diaphragmának r', s' pontjai a kép r, s pontjaival összeesnének, ennélfogva az $rs = h$ helyett $r' s'$ méretik meg, és a kettő közti különbség lesz a kép megmérésében onnan eredő hiba, hogy a szemcső nincsen helyesen beállítva. Legyen a szemlencse gyútávja $= \varphi$, a diaphragma és a kép közti táv, vagy a szemcső beállitási hibája $= \triangle\varphi$, $rs = h$, és $r'u = os$; akkor ru az rs és $r's'$ közti különbséget ábrázolja, és ha ez $\triangle h$-nak neveztetik, az $or's'$, és $r'ru$ hasonló $\triangle$-ekből lesz:

$$\varphi : \triangle\varphi = r's, : ru = h - \triangle h : \triangle h, \text{ vagy közel} = h : \triangle h,$$

tehát
$$\frac{\triangle\varphi}{\varphi} = \frac{\triangle h}{h}.$$

Ugyde a táv egyenletéből $T = M + \frac{N}{h}$, ha T és h változóknak tekintetnek, következik:

$$T + \triangle T = M + \frac{N}{h + \triangle h},$$

s ezeket egymásból kivonván, a változás értéke lesz:

$$\triangle T = \frac{N}{h + \triangle h} - \frac{N}{h} = -\frac{N \triangle h}{h(h + \triangle h)}, \text{ közel} = -\frac{N}{h}\frac{\triangle h}{h}.$$

Minthogy pedig M . . 2—3'-at meg nem halad, tehát $\frac{N}{h}$ közel $= T$, lehet tenni:

$$\frac{\triangle T}{T} = -\frac{\triangle h}{h},$$

és a fentebbi értéket helyettesitvén, lesz:

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Delta \varphi}{\varphi}.$$

Ezen egyenlet nyilván mutatja, hogy ha T-t $^1/_{1000}$-nyi pontossággal akarjuk meghatározni, a szemcsőt annak gyútávja $^1/_{1000}$ részéig pontosan kell beállítni, mi ha nem lehetetlen is, mindenesetre igen nehéz, és időveszteséggel járó dolog, minthogy φ rendesen kisebb 1″-nél.

Ugyanezen eredményhez jutunk, ha a szemcsőt Huyghens-féle szerkezetűnek gondoljuk, valamint akkor is, ha a Reichenbach-féle képletet $T = M + Na$ vesszük vizsgálat alá. Ugy hogy az általános szabálynak tekinthető.

121. §. Stampfer távmérője.

1) Ezen készülék, mely a tudós szerző által szerkesztett lejtmérőnek lényeges alkotó részét teszi, de önállólag is minden távcsöves vonaszon alkalmazható, legegyszerűbb alakban a 143. ábrából könnyen megérthető. Egy vizszintes tengely körül forogható rudacska *A* mind a két végén derékszög alatt fel van hajtva és villa alakú. Egyike ezeknek *B*, a távcső forgástengelyének, — mely két csavar *C* hegyei által képeztetik, — ágasul szolgál; másika pedig *D* a távcső fel- és lefelé való mozgását vezeti. *D* mellett az *A* rudacskán egy lyuk van fúrva, melyen egy finom lépésű csavar megyen keresztül. Ennek egyik vége a távcsővön *E*-nél meg van erősítve, a másikra pedig anyacsavar van felcsavarva. Ezen anyacsavar a rudacska alsó lapját egy kis gömbölyeg gödröcskében érinti, és egy mérsékelt erejű rugó *F* az érintő felületek közt bizonyos feszültséget hoz létre, mely által a holt mozgás megsemmisittetik. A távcsőnek a *C* tengely körüli forgásszöge a csavar által méretik meg, melynek egész lépései a *D* ágas oldalán lévő osztályzaton, egy fordulatnak apróbb tört részei pedig az anyának 100 egyenlő részre osztott körületén olvastatnak le. E czélból mind a két osztályzat mutatóval *J*, *J'* van ellátva. A távcsőben irányzó keresztszálak vannak kifeszítve, s az *A* rudacska még egy magasságmérő ívvel felszerelve, hogy az irányvonal hajlásszögét meg lehessen mérni, és a ferde távot a vizszintesre lehessen vetni. Ezen magasságmérő ívnek mutatója *J''* úgy van megállapítva, hogy ha a távcső

láttengelye az A rudacskával, s a vonaszszal körülbelől egyközű, akkor a mutató 0-án áll. De ezen párhuzamosság nem csak a $\mathcal{J}''$, hanem a többi mutatók állásától függ, minthogy a csavar forgatása által a távcső és az A rúd közötti hajlásszög változik. Ezen álláspontot így lehet meghatározni: állitsuk be a $\mathcal{J}''$ mutatót az ív 0 pontjára, és a vonaszt az asztal-táblára tévén, — mely körülbelől vizszintes lehet, ámbár nem kell szükségképen annak lenni; — forgassuk a csavart, mig a vizszintes fekvésű szál valamely távol lévő tárgyat metsz; húzzunk a vonasz éle mellett egy finom vonalat, és olvassuk le a csavar állását, melyet m-el akarunk megjelölni. Ezután tegyük a vonasz élét megfordítva a vonal mellé, úgy hogy a távcső az asztaltábla alá essék, s a csavart forgatván, állitsuk be a vizszintes szálat ismét az előbbi pontra, s a mutató állását m' olvassuk le. Ekkor a keresett párhuzamos állásnak $\frac{m+m'}{2}$ fog megfelelni. Mert az irányvonal első esetben a párhuzamos fekvésen felül, a másodikban pedig azon alul egyenlő hajlásszögeket fog képezni; ennélfogva a párhuzamos fekvésnek a csavar számtani közép állása fog megfelelni. (Lásd 101. §. 6. szám).

2) A Stampfer távmérőjének használata következő. Miután a segéd egy 1—2⁰-es rudat, mely a 139. ábra szerinti két céltáblával van ellátva, a B pontban (144. ábra), függélyesen felállitott, a mérnök pedig az A pontban a távmérőt vizszintesen elhelyezte, a távcső irányvonalát körülbelől a rúd közepére irányozza, s azt ebben az állásban a szoritó készülék által megerősitvén, a hajlásszöget φ leolvassa. Ezután forgatja a csavart, mig a vizszintes szál egyszer a felső, másszor az alsó táblára mutat, s a csavarállást mind a két ízben leolvassa. Nevezzük ezeket o és u-nak, mig a közép vonalnak megfelelő csavarállást k-val akarjuk megjelölni; legyen továbbá a rúd hossza $= a$, és a céltáblákra irányzott vonalak közti szög $= \alpha$, akkor az ABC $\triangle$-ből lesz:

$$AC : a = cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) : sin\ \alpha,$$

tehát
$$AC = \frac{a\ cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right)}{sin\ \alpha}.$$

Továbbá az $ACD\triangle$-ből lesz:

$$AD = AC \times \cos\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a\ \cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha},$$

mely egyenletet így is lehet irni:

$$AD = \frac{a}{2} \cdot \frac{\cos 2\varphi + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{a}{2tg\alpha} + \frac{a}{2}\frac{\cos 2\varphi}{\sin\alpha}.$$

Minthogy pedig $\alpha \ldots 2^0$-ot soha meg nem halad, $tg\,\alpha$ és $sin\,\alpha$ helyett elegendő pontossággal az ívet lehet tenni. Tehát lesz:

$$AD = \frac{a}{\alpha} \cdot \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} = \frac{a}{\alpha}\cos\varphi^2.$$

Legyen a csavaron egy lépésnek megfelelő szög $= p$, akkor elegendő pontossággal:

$\alpha = (o - u)p$, tehát $AD = \frac{a \cos\varphi^2}{p(o-u)}$,

vagy ha rövidség okáért az állandó mennyiség $\frac{a}{p} = C$-nek tétetik:

$$AD = \frac{C\cos\varphi^2}{o-u}.$$

A C meghatározása végett meg kell mérni egy körülbelől vizszintes fekvésű síkon egy vonalat mind lánczczal, mind a távmérővel, s az eredményt az utolsó egyenletben helyettesítvén, a C-n kivül minden más mennyiség ösmeretessé lesz. Ezt tehát ki lehet számítni.

Az utolsó képletet tábla szerkesztésére alkalmasabbá lehet tenni, ha $\cos\varphi^2$ helyett: $1 - \sin\varphi^2$ tétetik, s akkor lesz:

$$AD = \frac{C}{o-u} - \frac{C}{o-u}\sin\varphi^2 \ldots \odot$$

hol mind a két tagot külön táblába lehet szerkeszteni. Az első tag szolgáltatja a ferde távot, de csak közelítve, a mennyiben a rúd a közép irányvonalra nem áll merőlegesen, mint kellene lenni; a második pedig az első tag pótlékát, és ez mindig csak kis értékkel bir.

*3) A $\odot$ képlet azon feltétel alatt keletkezett, hogy a csavar k-ra volt beállítva, midőn a távcső a rúd közepére irányoztatott; ennélfogva φ a valódi magassági szöget jelenti. Szükség volna tehát minden távmérésnél a csavart eleve k-ra beállítni, mi tetemes idővesztességet okozna. De ezen beállitás szükségét el is lehet kerülni, ha a szög a k-ra beállitás elmulasztása miatt kiigazíttatik, mit igen egyszerűen lehet eszközölni. Ugyanis ha a két céltáblára irányzott vonalaknak megfelelő csavarállások o és u-nak neveztetnek, akkor a rúd közepére irányzott vonalnak $\frac{o+u}{2}=k'$ csavarállás fog megfelelni. Tegyük fel most, hogy $k'<k$, akkor ha a csavar mutatója k'-en áll, a távcső irányvonala azon iránytól, mely a csavar k állásának megfelel, $(k-k')p=\varkappa$ szöggel hajlik előre lefelé, ennélfogva a rúd közepére beállíttatván, φ is $\varkappa$ szöggel nagyobbnak fog megméretni, mint kellene. A kiigazított hajlásszög tehát $\varphi-\varkappa$ fog lenni, és

$$AD=\frac{C}{o-u}-\frac{C}{o-u}sin(\varphi-\varkappa)^2.$$

A $\varkappa$ értékét csak 4—5′ pontossággal szükséges meghatározni ezen képlet szerint:

$$\varkappa=p\,(k-k')=p\left(k-\frac{o+u}{2}\right),$$

s a számitás könnyítésére egy kis segédtáblácskát lehet készítni, mely a $\varkappa$ értékét $o+u$ argumentum után szolgáltatja.

4) Ezen távmérés tökéletességéhez megkivántatik, hogy a csavar forgatása közben a tábla fekvése, s az A rúd hajlásszöge legkevésbbé se változzék; különben az α szög hibásan méretnék meg. Ezen feltételnek pedig eleget tenni igen nehéz, minthogy már a napsugároknak az állvány lábaira hatása is észrevehető változást okoz. Más részről meg az állványnak időközbeni változását észre sem lehet venni, minthogy az irányzás a céltáblákra egymásután történik. Innen lehet kimagyarázni, hogy noha a csavarnak 0·002 fordulása az irányvonalban már észrevehető változást okoz, ismételt mérések sokkal nagyobb különbségeket mutatnak, úgy hogy a mérési hibát szabad ég alatt, különösen verőfényes időben, középszámmal 0·005 fordulatnál alig lehet kisebbnek venni, mely a Stampfer lejtmérőjén létező méretek szerint, — hol egy fordulatnak körülbelől 11′ felel meg — 3″-t teszen.

5) Ezen távmérőtől a Stampfer lejtmérőjén látható szerkezet abban különbözik, hogy a lejtmérőnél a magassági ívet egy szintező pótolja. De a lejtmérő távmérésre kevésbbé alkalmatos, minthogy a magassági szöget csak 8—10°-ig lehet vele megmérni és

csak magasságmérési czélokra, s az ezzel összefüggésben lévő távmérésre van szánva. Ennélfogva annak idejében a magassági méréssel együtt fog tárgyaltatni.

122. §. Uj távmérő.

1) Minden eddigieket felülmúl — a mérés tökélyét illetőleg — következő, általam a Fraunhofer Heliometere után szerkesztett távmérő. Ebben a tárgylencse (145. ábra) közepén két részre van metszve; egyik *A* a távcsőben szilárdul be van foglalva, másik pedig *B*, a *C*, *C* vezetékek közt fel s alá mozogható *D* lemezen van megerősítve. Ezen lemez egy, körülbelől a távcső gyúpontjából leirt körívben egy finom lépésű csavar által *E* mozgattatik, melynek egész fordulatai számát az oldalt látszó léptéken *F*, a tört részeket pedig a csavaranya karimáján, mely 100 részre van beosztva, lehet leolvasni. A beosztás úgy van készitve, hogy ha a tárgylencse mindkét felének láttani középpontjai egymással összeesnek, ennélfogva a két fél egy egészet képez, a mutató 0-án áll. A szemcső Ramsden-féle keresztszálakkal ellátva, melyek a távcsőt minden más mérések eszközlésére is alkalmatossá teszik. Végre a távcső a 97. ábra szerint magasságmérő ívvel van ellátva.

2) Ezen távmérőnek elmélete következő: Legyen a megmérendő távban egy 1—2^0 hosszú, czéltáblákkal ellátott rúd felállítva (146. ábra) úgy, hogy a távcső láttengelye a rúdra körülbelől merőleges legyen. Irányozzuk a távcső vizszintes szálát az alsó táblára *B*, ekkor, ha a tárgylencse két felének láttani középpontjai összeesnek, a rúdnak csak egy képe áll elő a távcsőben. Ellenben ha az *E* csavart forgatván, a nevezett láttani középpontok egymástól különválnak, mindenik lencsefél külön képet fog alkotni, és a csavar forgatása által oda lehet vinni a dolgot, hogy a *B* és *C* tábláknak a két lencsefél által alkotott képei egymást takarni fogják. Tegyük fel, hogy ezen eset valóban beállott, akkor az *A* képet és a *B*, *C* tárgyakat összekötő vonalak mindig az illető lencsefél láttani középpontján menvén keresztül, az *Auv*, és *ABC* $\triangle$-eket hasonlóknak lehet tekinteni; tehát ha $BC = a$, $AB = T$, $uv = h$, $Au = t$-nek neveztetnek, lesz:

$$T : a = t : h,$$

Úgyde láttani elvek szerint:

$$\frac{1}{T-t}+\frac{1}{t}=\frac{1}{f},$$

hol f a távcső gyútávját jelenti; ezen két egyenletből t kiküszöböltetvén lesz:

$$T=\frac{fa}{k}\cdot\frac{a}{r-h}, \text{ vagy közelitve } =f+f\frac{a}{h}.$$

Czélszerű a távot itt is a távcső forgástengelyétől számítni, mely körülbelől a távcső közepére esik; ekkor a fentebbi értékből $^1/_2 f$-et le kell vonni, és lesz:

$$T=\frac{f}{2}+\frac{fa}{pn}.$$

Legyen a csavar lépésének hossza $=p$, a leolvasott csavarállás $=n$, akkor $h=np$, és helyettesítés által lesz:

$$T=\frac{1}{2}f+\frac{fa}{pn}=M+\frac{N}{n},$$

hol M és N állandó együtthatókat jelentenek. Az állandók meghatározása a 118. §. 3. szerint történik.

3) Az előbbiekből önként érthető, hogy a B lencse mozgásának függélyes síkban kell történni, valamint a rúdnak is ugyanazon síkban kell állani. Ezt onnan lehet megitélni, hogy ha a csavar forgattatik, a két féllencse által alkotott képeknek egymás felett, nem egymás mellett kell állani.

4) Ezen távmérő czélszerű voltát különösen emeli azon körülmény, hogy a mérés ismétlése a csavar elfordítása által igen gyorsan eszközölhető. Az állványnak a munka közbeni ingadozása sem képes a mérésre károsan hatni, minthogy ezen hatás mind a két képre egyenlő lévén, azoknak egymáshozi fekvésében változás nem történik.

123. §. Második eset.

A második eset, midőn t. i. a táv egyik végpontja hozzáférhetlen, sokkal nehezebben oldható fel, mint az első; minthogy akkor az alapvonalnak a mérő eszközben kellvén helyezve lenni, ez 3—4'-nál hosszahb nem lehet, ha csak a műszert tetemes súlya miatt haszonvehetetlenné tenni nem akarjuk. Minthogy pedig hasonló körülmények közt a háromszögben kisebb oldalnak kisebb szög áll átalellenében, szükségképen a szögmérés nehézségei is nagyobbak lesznek az előbieknél.

Ezen feladat feloldására következő műszerek szerkesztettek:

1) Paccecci pantometruma. Ez áll (147. ábra) két, keresztszálakkal ellátott távcsőből A, B, melyek közül A egy 3—4′ hosszú erős ráma alakú táblán szilárdul meg van erősitve, B pedig egy pont O körül foroghat. A táblán egy kis legfeljebb 4—5° hosszú beosztott ív van megerősítve, melynek középpontja az O pontban van, s a távcsővel egy Nonius van összekötve, melynek segitségével 2—3″-et le lehet olvasni. A Nonius úgy van helyezve, hogy ha a távcsövek irányvonalai párhuzamosak, a mutató 0-án áll. Ezen párhuzamosságot a 113. §. 4. szerint valamely igen távol eső pontra irányzás által lehet előállítni, s ha a mutató valamely 0-tól különböző állást $= m$ mutatna, ez a Collimatio hibát ábrázolná, melyet minden mérésből le kellene vonni.

Ezen műszer használata következő. Miután a tábla körülbelől vizszintes fekvésbe hozatott, az A távcső valamely tárgyra beállíttatik, mely a C pontban, vagy annak közelében látható. Ezután a B távcső O körül forgattatik, mig annak látvonala is ugyanazon tárgyra mutat, s a Nonius leolvastatik. Akkor könnyen érthetőleg a DOC szöget mértük meg, mely egyszersmind az $OCA = \alpha$ szöggel egyenlő. Ennélfogva az OCA derék $\triangle$-ben, melyben $OA = a$ az alapot, $AC = T$ pedig a távot képezi, lesz:

$$T = \frac{a}{\alpha}.$$

Az a értékét nem közvetlen mérés által, hanem czélszerűbben úgy kell megállapítni, hogy a mezőn egy közép hosszaságú vonalat mind lánczczal, mind távmérővel megmérünk, s a méreteket a fentebbi egyenletben helyettesítvén, az a értékét belőle kiszámitjuk.

A vizszintesre való áttétel ezen feladatnál csekély jelentőségű, minthogy a ferde táv és annak vizszintes vetülete közti különbség rendesen a mérési hiba határai közé esik. Ezért a műszeren a vizszintező készülék szükségtelen.

2) Stampfer hadi távmérője. Stampfer a linczi erőditések felszereléséhez egy távmérőt készittetett, mely egyszerűsége miatt emlitést érdemel. Ez (148. ábra) egy 3=4′ hosszú, 3″ átmérőjű csőből áll, melynek felső végén a cső tengelyére

merőleges csap körül forogható tükör A, alsó végén pedig a cső tengelyére 45^0 alatt hajlott síktükör B szilárdul van megerősitve. A két tükör üvegoldalai egymás felé vannak fordulva. Oldalt a cső végén annak tengelyére merőlegesen egy kis távcső T van helyezve, melynek alsó fele a B tükör által el van takarva. Mind a két tükör előtt lyukak vannak a csövön metszve, melyeken keresztül a távol tárgyakból C kijövő sugárok mind az A tükörbe, mind a távcsőbe juthatnak. Az A tükör tengelyéről egy hosszú rúd D nyúlik le, mely egy csavarral E van összeköttetésben, s ennek segitségével a tükört tengelye körül lassú forgásba lehet hozni. Az E csavar forgását részint egy számlálón, részint a csavar fejének körületén le lehet olvasni. Végre a cső egy 5' hosszú pálczán G van megerősitve, mely a földre állíttatván, a távcső épen a szem magasságába esik, s a műszerrel való mérés kényelmesen eszközöltethetik.

3) A mérés módja ez: A műszer az álláspontban körülbelül függélyes állásban tartatván, a távcső a megmérendő távban valamely tisztán látható pontra irányoztatik, s a csavar forgattatik, mig ugyanazon tárgyból jövő sugárok egyszersmind az A tükörből a B-be, s innen a távcsőbe vettetvén, képet alkotnak. E szerint a távcsőben a tárgynak két képe látszik egyszerre, melyeket a csavar forgatása által a láttér közepében tökéletesen egymásra lehet állítni, és a csavar állását leolvasni. Tegyük fel most, hogy ha egy végtelen távban lévő tárgynak képei összeesnek, a mutató 0-án áll: akkor a csavar által fentebb megmért szög a tükör fordulását jelenti, ez pedig az 58. §. szerint fele a $C'AC = \alpha$ szögnek. Legyen $AD = l$, egy csavarlépés hossza $= p$, $AB = a$, $BC = T$, akkor:

$$\alpha = \frac{2pn}{l}, \text{ és } \quad T = \frac{a}{\alpha} = \frac{al}{2pn} = \frac{M}{n},$$

hol M egy állandó együtthatót jelent, és a fentebbiek nyomán közvetett módon határoztatik meg.

Ezen műszerrel, a tapasztalás tanitása szerint, $^1/_{100}$, legfeljebb $^1/_{200}$ pontosságot lehet elérni.

II. SZAKASZ.

Görbe vonalak kitűzése.

124. §.

1) Ujabb időben a vaspályák korszakában igen nagy fontosságot nyert a görbe vonalak kitűzése. Mert jóllehet a vaspályák lehetőleg egyenes vonalban vitetnek; mindazáltal a legkedvezőbb vidékeken sem lehet elkerülni, hogy azok néha irányukat ne változtassák; hegyes vidékeken pedig többnyire a völgyek kanyarulatait kénytelenek követni. Minden görbék közt legnevezetesebb a kör, mely egyszerűsége és állandó görbülete miatt legnagyobb alkalmazásnak örvend. Ez okból itt kizárólag a körív kitűzéséről fogunk szólani, annyival inkább, mivel azon elvek, melyekre a kör kitűzése alapíttatik, nagyobb részint más bizonyos mértani törvények szerint származó görbe vonalaknál is alkalmazhatók.

A körívnek kitűzése erőműtani okoknál fogva rendesen két feltétel alatt kivántatik, u. m. 1) hogy a kör sugára igen nagy, 100°-nél ritkán kisebb; 2) hogy ha egy körív egy egyenes vonallal, vagy egy más körívvel összeköttetik, az érintő az összekötési pontban mind a két vonalra nézve közös legyen, s ekképen az egyik vonalból a másikba való átmenetel gyengédeden, s törés nélkül történjék.

2) A kör kitűzése körül következő feladatok jőnek elő:

I. Feladat. Egy körívet kitűzni, ha annak középpontja és sugára adva van.

1. Feloldás. Ha a sugár hossza kisebb a mérőláncz vagy kötél hosszánál, akkor annak egyik végét a középpontban megerősitvén, a sugár hosszát lemérjük, s a kötélt kifeszítve körül vivén, a sugár végpontját a földön bekarczoljuk, vagy a kerületben karókat verünk le.

2. Feloldás. Ha a kör sugára igen nagy, akkor a középponton keresztül egy egyenes vonalat kell kitűzni, és a sugár hosszát mindkét oldalt lemérvén, a végpontokat rudakkal megjelölni. Ezután keresni kell a mezőn valamely 90°-ot kitűző műszerrel olyan pontokat, melyekben a rudak képei egymást takarják, ezek a kör körületében fognak feküdni.

125. §.

II. Feladat. Egy körívet kitűzni, ha annak egy pontja A (149. ábra) és ezen pontbani érintője AE a sugár hosszával együtt adva vannak.

1. Feloldás. Legyen AB egy körív. Válasszuk az adatott A pontot a derék összrendezők kezdőpontjául, az AE érintőt x tengelyül, s vegyünk fel egy tetszés szerinti hosszat $AP = x$ metszékül; akkor a megfelelő rendezőt $BP = y$ következőképen lehet kiszámítni. Az ODB derék $\triangle$-ből, melynek oldalai $OB = R$, $DB = x$, $OD = R - y$, lesz:

$$R - y = \sqrt{R^2 - x^2},$$

hol a négyzetgyököt $+$ jellel kell venni, minthogy $R > y$. De a gyakorlatban x, . . . R-hez képest, mindig kis mennyiség lévén, a négyzetgyököt sorba ki lehet fejteni, és az első tagokat megtartván, lesz:

$$y = \frac{1}{2}\frac{x^2}{R} + \frac{1}{8}\frac{x^4}{R^3} \ldots \odot$$

A második tag értéke igen kicsiny, mig $x < \frac{R}{10}$, ennélfogva legtöbb esetekben el is hanyagolható. Igy p. o. ha $x = 100$, $R = 1000$, a második tag $= 0{\cdot}013$. Ezen képlet szerint ki lehet számitni az x, $2x$, $3x$, $4x$ . . . metszékeknek megfelelő rendezőket, s ezután a metszékek a hely szinén az AE tengelyen leméretvén, az illető rendezők merőlegesen felállíttatnak. Ezeknek végpontjai a körívben fognak feküdni.

Mennél nagyobb a metszék, annál nagyobb az utolsó egyenletben elhanyagolt tagok értéke, annál hibásabb a rendező kiszámitott értéke. Ez okból a kitűzést az érintőn csak bizonyos határig szabad kiterjeszteni; azon túl egy új érintőt EA' kell a körhöz illeszteni, melyen a kitűzést tovább lehet folytatni. Most csak az a kérdés, milyen irányban kell az EA' vonalat az AE-hez fektetni, hogy az a kört érintse?

Legyen $AE = X$, az AOE szög $= \omega$, akkor

$$tg\omega = \frac{X}{R}.$$

Továbbá $AEO = 90 - \omega$, ennélfogva AEA' szög $= 180 - 2\omega$. Ezen szöget tehát valamely szögmérővel az AE vonalhoz fel lehet tenni, és az ekképen keletkező vonalon EA' az AE-n felrakott méreteket ellenkező rendben felrakni, sőt a kitűzést az A' ponton túl is lehet folytatni, s szükség esetében új érintőt is lehet szerkeszteni.

Az EA' érintő irányát szögmérő nélkül is meg lehet határozni, t. i. meg kell hosszabbítni az OA sugárt, mig azt a meghosszabbított érintő EA' az F pontban metszi; s ekkor lesz:

$$AF = AE \,.\, tg\, 2\omega = X \,.\, tg\, 2\omega = \frac{2\, Xtg\omega}{1 - tg\omega^2},$$

$$\text{közel} = X \,.\, tg\omega + 2\, Xtg\omega^3,$$

s ezen kifejezésben a $tg\omega$ előbbi értékét helyettesítvén, lesz:

$$AF = \frac{2\, X^2}{R} + \frac{2\, X^4}{R^3}.$$

Ezen hosszat tehát az A pontban AE-re merőlegesen fel lehet tenni s az F és E pontokon keresztül egyenes vonalat kitűzni, mely a keresett EA' érintő fog lenni.

2. Feloldás. Legyen (150. ábra) AE az adatott érintő, B a körnek egy pontja, melynek összrendezői x, y, már meg vannak határozva. Húzzunk ezen pontban a körhöz érintőt BE', mely meghosszabbítva AE-t C-ben metszi. Nevezzük CE-t u-nak, akkor a kör ösmeretes tulajdonsága szerint $BC = AC = x - u$, tehát a BCE derékháromszögből lesz:

$$(x - u)^2 = u^2 + y^2,$$

honnan következik: $$u = \frac{x^2 - y^2}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{y^2}{2x}.$$

Helyettesítsük ezen egyenletben az y fentebb talált értékét, elhagyván az x-nek negyediket áthágó hatványait, akkor lesz:

$$u = \frac{x}{2} - \frac{1}{8}\,\frac{x^3}{R^2}.$$

A második tag, mig $x < {}^1/_{20}\, R$, rendesen igen kicsiny, azért elhanyagolható. Igy p. o. ha $x = 50^0$, $R = 1000^0$, akkor az említett tag értéke $= 0^0{\cdot}016$. Ha ekképen a C pont meghatároztatott, a C és B pontokon keresztül egyenes vonal tűzetik ki, s a keletkezett érintőn BE' az előbbi műtétel ismételtetik. Könnyű átlátni, hogy az AE metszéket 2—3 egyenlő részekre is lehet osztani, melyeknek a köríven ugyanannyi pontok felelnek meg.

3. Feloldás. Húzzunk az A ponton keresztül (151. ábra)

egy húrt AB, melynek hosszát tetszés szerint lehet választani; osszuk be ezt 2, 4 . . . általában $2n$ egyenlő részre, és emeljünk fel ezen pontokból a körívig érő merőlegeseket. Ezeknek hosszait következőképen lehet meghatározni. Legyen $AB = 2l$, az 0, 1, 2 . . . pontokban felemelt merőlegesek sorjában Y, Y', Y'' $Y^{(n)}$, és húzzunk a középső merőleges végpontján keresztül AB-vel párhuzamost, melyet a merőlegesek a, b, c . . . pontokban metszenek, akkor:

$$\begin{aligned} Y &= oD = nB, \\ Y' &= nB - aa', \\ Y'' &= nB - bb', \\ Y''' &= nB - cc', \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Az nB, aa', bb', cc' . . . értékeit a fentebbi ⊙ egyenletből ki lehet számitni, ha x helyett sorjában $l, \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \frac{3l}{n} \ldots$ tétetnek; ennélfogva rövid számitás után lesz:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{2}\frac{l^2}{R} + \frac{1}{8}\frac{l^4}{R^3}, \\ Y' &= \frac{n^2-1}{2n^2}\frac{l^2}{R} + \frac{n^4-1}{8n^4}\frac{l^4}{R^3}, \\ Y'' &= \frac{n^2-4}{2n^2}\frac{l^2}{R} + \frac{n^4-16}{8n^4}\frac{l^4}{R^3}, \\ Y''' &= \frac{n^2-9}{2n^2}\frac{l^2}{R} + \frac{n^4-81}{8n^4}\frac{l^4}{R^3}, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

E szerint a merőlegesek értékei meg lévén határozva, csak az a kérdés marad még hátra, milyen szög alatt kell a húrt az érintő mellé fektetni, hogy annak hoszsza $= 2l$ legyen? Legyen ezen szög $= \omega$, akkor mértani törvények szerint az EAB szög $= DOB$ szöggel, tehát a BOo derék $\triangle$-ből lesz:

$$sin\,\omega = \frac{l}{R}.$$

Továbbá $ABO = 90 - \omega$, és ABC szög $= 180 - 2\omega$. Ezen szöget a B pontban az AB húr mellé feltévén, egy uj húr származik, melyen az előbbi műtételt ugyanazon rendben ismételni lehet.

Az EAB és ABC szögeket szögmérő nélkül is ki lehet tűzni; húzzunk t. i. a B pontból az érintőre merőlegest, akkor lesz:

$$BE = 2l.\,sin\omega,\ AE = 2l.\,cos\,\omega = 2l\sqrt{1 - sin\omega^2} = 2l - l\,sin\omega^2,$$

s ezen kifejezésekben a $sin\omega$ fentebb talált értékét helyettesitvén, lesz:

$$BE = \frac{2l^2}{R}, \quad AE = 2l - \frac{l^3}{R^2},$$

melyek által a B pont fekvése meg van határozva.

Ezután emeljünk fel a húr közepéből egy merőlegest, és keressük az oF darab hosszát, mely a BC húr meghosszabbítása által elvágatik. Az oFB $\triangle$-ből lesz:

$$oF = ltg2\omega = 2l\,tg\omega, \text{ közel } = 2l\,tg\omega\ (1 + tg\omega^2)$$

minthogy pedig $tg\omega = \frac{sin\,\omega}{cos\,\omega} = \frac{sin\omega}{\sqrt{1 - sin\,\omega^2}}$, közel$= sin\omega\,(1 + \frac{1}{2} sin\omega^2)$, ezt és a $sin\omega$ fentebbi értékét helyettesitvén, elegendő közelitéssel lesz:

$$oF = \frac{2l^2}{R} + \frac{3l^4}{R^3}.$$

E szerint az F és B pontok által az új húr tökéletesen meg van határozva.

4. Feloldás. Tegyük fel a fentebb meghatározott ω szöget (152. ábra) az AF érintőből kiindulván egymás mellé, mi által AB, AC, AD, AE . . . vonalak állanak elő, és rakjuk fel a megfelelő húrt $= 2l$, mely gyakorlati okoknál fogva a láncz, vagy mérőkötél hosszát meg nem haladja, az AB, BC, CD . . . vonalak mentében ugy, hogy az $AB = BC = CD = DE = \ldots = 2l$; akkor a B, C, D, E . . . pontok mindnyáján a korívben fognak feküdni. Mert azon tulajdonság, hogy egyenlő körületi szögek száraik közt egyenlő ívdarabokat metszenek el, a körvonalra nézve érvényes. Könnyű átlátni, hogy ezen mód szerint minden pont az előbbiektől függővé válik, ennélfogva a mérési hibák annál inkább nagyobbodnak, mennél több pontokra terjed ki a műtétel; míg az előbbiek szerint az érintő vagy húrról történt kitűzés egymástól független eredményt szolgáltat. Tegyük fel, hogy ω az A pontban m-szer tétetett fel egymás mellé, s E az utolsó meghatározott pont, akkor egy új érintőt EF' lehet kitűzni, melynek az AE húrral való hajlásszöge $= 180 - m\omega$. Ezen új érintőből kiindulván, a műtételt az előbbi rendben tovább lehet folytatni.

126. §.

III. Feladat. Két kitűzött egyenes vonalat a mezőn egy körívvel összekötni.

1. Feloldás. Ha a kör sugára adva van. Ve-

gyük fel a két vonalat (153. ábra), és rajzoljuk olyan nagy léptékben, hogy a hosszakat kellő pontossággal meg lehessen mérni a léptékkel. Ezután a sugár hosszát két tetszés szerinti pontból M, N merőlegesen feltévén, húzzunk a végpontokon P, Q keresztül a vonalakkal párhuzamosokat, melyek egymást a kör középpontjában O fogják metszeni. Ebből a vonalakra merőlegeseket húzván, az A, B metszéspontok származnak, melyek a körív végpontjait ábrázolják. Ezután a rajzolatban a $CA = CB$ vonal hosszát a léptéken megmérjük, s a mezőn a C pontból az illető vonalakon lemérjük; ekképen a nevezett pontok ki lesznek tűzve. A sugár hosszából pedig az ív kitűzéséhez szükséges rendezők kiszámittatván, a helyszinén a fentebbi feladatok útmutatása szerint kitűzetnek.

2. Feloldás. Ha a körív kezdőpontja adva van. Hosszabítsuk meg az adott vonalakat, míg azok egymást a C pontban metszik, és az AC hosszat a BC vonalra áttévén, emeljünk fel az A, B pontokból a vonalakra merőlegeseket. Ezek egymást a kör középpontjában fogják metszeni.

127. §.

IV. Feladat. Egy egyenes vonalat egy ponttal körív által összekötni.

1. Feloldás. Ha a kör sugára adva van. Emeljünk fel a vonal valamely pontjából (154. ábra) egy merőlegest, melynek hossza a körsugárral egyenlő; húzzunk ennek végpontjából P a vonalhoz párhúzamost, és messük ezt az adott pontból N egy körívecskével, melynek sugára az adatott sugárral egyenlő. Ez által egy pont O áll elő, mely a kitűzendő körívnek középpontja, és az OA merőleges által az adatott vonalon keletkező metszéspont A a körív kezdőpontja fog lenni. Az A pontot a mezőn az NC merőleges lábpontjából az NA hossz lemérése által lehet kitűzni.

2. Feloldás. Ha az ív kezdőpontja adva van. Kössük össze az A és N pontokat egyenes vonallal, és emeljünk fel ennek közepéből egy merőlegest, valamint az A pontból is húzzunk az adatott vonalra egy merőlegest. Ezek egymást a kör középpontjában fogják metszeni.

128. §.

V. Feladat. Egy adatott körívet egy távollévő ponttal egyenes vonal által összekötni.

Feloldás. Válasszunk a körben (155. ábra) azon a tájékon, hol az egyenes vonal kezdőpontját lenni gondoljuk, egy pontot A, és tűzzünk ki az adatott pont N felé egy egyenes vonalat, mely a kört egy második pontban B fogja metszeni. Ezután az AB húrt megmérvén, keressük a 125. §. 3. feloldása szerint a közép merőleges hosszát; s ezt a hely szinén kitűzvén, húzzunk annak végpontjából C az N pont felé egyenes vonalat. Ez a keresett vonallal, mely nem más, mint az N pontból a körhöz húzható érintő, annál inkább össze fog esni, mennél kisebb a merőleges, és mennél távolabb esik az N pont.

129. §.

VI. Feladat. Két párhuzamos vonalat két egyenlő körívvel összekötni.

1. Feloldás. Ha a sugár és egyik kiindulási pont adva vannak. Húzzunk a két párhuzamos közt (156. ábra) középen egy harmadikat, s az A pontban a sugár hosszát a vonalra merőlegesan feltévén, az ekképen nyert középpontból O húzzuk az AB körívet. Ezután az AB húrt húzván, mig az a harmadik párhuzamost C-ben metszi, emeljünk fel ezen pontban az első sugárral ellenkező irányban szintén egy merőlegest, s erre a sugár hosszát feltévén, húzzuk az új középpontból O' a BC körívet. Ezek mind az egyenes vonalakkal, mind egymásközt érintésben fognak lenni.

2. Feloldás. Ha a köríveknek végpontjai adva vannak. Húzzunk az adatott végpontokból A, C az egyenes vonalra merőlegeseket, és az AC átlót négy egyenlő részre osztván, húzzunk az 1-ső és 3-ik osztálypontból az átlóra merőlegeseket. Ezek az előbbieket az O, és O' pontokban metszik, melyek a körívek középpontjai lesznek. Mind a két feloldás helyes volta azon alapszik, hogy az ABO és BCO' $\triangle$-ek egyenszárúk és egyenlők lévén, az A, B, C pontokban összeütköző vonalaknak közös deréklőjök, tehát közös érintőjök is van.

130. §.

VII. Feladat. Egy kört és egy egyenes vonalat körívvel összekötni.

1. Feloldás. Ha a kiindulási pont a körben adva van. Húzzunk a kör középpontjából C (157. ábra) az egyenes vonalra merőlegest, mely a kört B és B'-ben metszi, és húzzuk az AB és AB' egyeneseket, mig ezek az adatott egyenes vonallal D és D'-ben találkoznak. Emeljünk fel ezekben merőlegeseket, és hosszabbítsuk meg az AC sugárt, mig ezek egymást O, és O'-ben metszik. Ezek a keresett körívek középpontjai lesznek. Ugyanis az ABC $\triangle$ egyenszárú lévén, a vele hasonló ADO is egyenszárú, tehát $AO = OD$. Minthogy pedig AO a körre, OD pedig az egyenes vonalra merőleges, ezeknek az összekötő körívvel A és D-ben közös deréklői, s közös érintői lesznek. Hasonlóképen lehet megmutatni, hogy $AO' = D'O'$.

Ha a kiindulási pont D az egyenes vonalban volna adva, akkor a DB vonal húzatik, mig a kört A-ban metszi, a többi változatlan marad. Minthogy pedig a D pontot B'-el is össze lehet kötni, ezáltal egy második feloldás származik.

2. Feloldás. Ha az összekötő körív sugára adva van. Húzzunk a kör középpontjából C (158. ábra) az adatott két kör összegével vagy különbségével két új kört. Ezután emeljünk fel az egyenes vonalnak valamely pontjából B egy merőlegest, és erre az összekötő kör sugárát feltévén, húzzunk ennek végpontjából E az adatott egyeneshez párhuzamost, mely az előbbi köröket az O, és O' pontokban metszi. Ezekből a C középponton keresztül egyenes vonalakat húzván, ezek az adatott kör körületét az A, A' pontokban metszik, melyek az összekötő körök kiindulási pontjait szolgáltatják; a körök végpontjai pedig az O és O'-ből az egyenes vonalra húzott merőlegesek lábpontjaiba esnek. Ezen szerkezetnek helyes volta azon alapszik, hogy $AO = DO =$ az új kör sugárával; továbbá mindketten merőlegesen állanak a körre, illetőleg az egyenes vonalra. Rendesen 4 feloldás létezik, mivel az egyenes vonal a két kört 4 pontban metszi.

131. §.

VIII. Feladat. Két kört egy harmadik által összekötni.

1. Feloldás. Ha a kiindulási pont az egyik körben adva van. Húzzunk a kör középpontjából (159. ábra)

C ezen adatott ponton A keresztül egy egyenes vonalat, s a másik kör középpontjából C' egy hozzá párhuzamos átmérőt, mely a kör körületét B, B' pontokban metszi. Ezután húzzuk az AB, AB' szelőket, mig azok a kört a D és D' pontokban metszik, és húzzuk a DC' és $D'C'$ szelőket is, melyek az AC-t az O és O' pontokban találják. Ezek az összekötő körívek középpontjai lesznek, ennélfogva a feladat kétféleképen oldható. A feloldás helyes volta azon alapszik, hogy az ADO, és $AD'O'$ $\triangle$-ek egyenszárúk, és hogy az A, D, D' pontokban összeköttetésben lévő köröknek közös deréklőjök és érintőjök van.

2. Feloldás. Ha az összekötő kör sugára adva van. Legyenek a 160. ábrában r_1, r_2, R az első második és az összekötő kör sugárai. Húzzunk az első kör középpontjából C, $R-r_1$ vagy $R+r_1$ sugárral, a második kör középpontjából pedig $R-r_2$ vagy $R+r_2$ sugárral köröket, ezek párosával egymást 8 pontban metszik, melyek ugyanannyi feloldásnak megfelelő körök középpontjait O, O' ... szolgáltatják. Az összeköttetési pontok $A, B, A' B'$ ... előállanak, ha az O, O' ... pontokból C és C'-n keresztül szelők húzatnak, melyek a körök körületeit a keresett pontokban fogják metszeni. Ezen szerkezetnek oka abban rejlik, hogy

$$AO = r_1 + R - r_1 = R,$$
$$BO = r_2 + R - r_2 = R,$$

ennélfogva, $AO = BO$. Ezenkivül pedig azok még az illető körök középpontjain menvén keresztül, a körívekre merőlegesen állanak. Hasonlóképen

$$A'O' = r_1 + R - r_1 = R,$$
$$B'O' = R,$$

tehát a fentebb emlitett tulajdonságok az $A'B'$ körre nézve is állanak, s i. t.

132. §. Köröket húzni a papiroson.

Körök húzására a papiroson következő eszközök szolgálnak:

1) A körző. A nullakörzővel a legkisebb köröket, 5—6′ hosszú rudas körzővel pedig a mérnöki gyakorlatban előforduló legnagyobb köröket lehet húzni, kivévén a földabroszokon némely déli és párhuzamos köröket, melyeknek sugárai néha 30—40′-at is meghaladnak. Ezen esetben czélszerűen lehet használni

2) a 161. ábrából világosan látható műszert, mely két párhuzamos élű, s körző módjára egy csukló körül kinyitható és bezárható vonaszból áll, melyeket egy szárnyas anyacsavarral minden nyilásban szorosan össze lehet szorítni, s ekképen az éleknek tetszés szerinti változatlan hajlásszöget lehet adni. A műszernek használata igen egyszerű. Miután t. i. a kör körülete a papiroson három pont által kijelöltetett, a műszer úgy állíttatik be, hogy a vonaszok élei a két szélső ponton *a*, *b*, a két él metszéspontja *A* pedig a középsőn menjenek keresztül, s ezen nyilásban az anyacsavar erősen meghúzatik. Ezután a két szélső pontban finom tűk szuratván be a táblába, az egész műszer balról jobbra mozgattatik, figyelvén arra, hogy a vonaszok élei mindig érintsék a tűket, s az *A* metszéspontban egy rajztoll illesztetvén, a vonal kihúzatik. Hogy ezen vonal körív, onnan következik, hogy annak minden pontjában a vonaszok élei egyenlő szögeket képeznek.

A műszert fel is lehet fordítni, és a szög homorú oldalát illeszteni a tűkhöz, s a rajztollat is a szög csúcsához a homorú oldalon tartani; sőt egy kis megfontolás után oda is lehet jutni, hogy a két tű a szögnek homorú oldalát érintse, a rajztoll pedig a domború oldalon az *A* pontban helyeztessék. Ezen a módon a vonalat biztosabban ki lehet húzni, minthogy a vonaszok élei a tűkhöz nyomatnak, mi a fentebbi mód szerint nagyobb gyakorlati nehézséggel jár.

3) Ugyanazon czélra szolgál a 162. ábrában lerajzolt műszer is, mely egy $^1/_2$" széles, 1''' vastag sárgaréz vonaszból áll, mindkét végén derékszög alatt felhajtva. Ezen szárnyak át vannak fúrva, a lyukakon vastag huzal keresztüldugva, melynek egyik vége egy peczekkel le van szögezve, a másik pedig csavarmetszésekkel ellátva. Ha most az anya-csavart balról jobbra forgatjuk, a vonasz szárnyai egymáshoz közelíttetnek, s a vonasz meggörbül. Ezen görbület mindaddig, mig igen tetemes nem lesz, a körtől igen keveset különbözik; ennélfogva, ha a kör a papiroson néhány ponttal megjelöltetett, a vonasznak a csavar forgatása által olyan görbületet lehet adni, mely a megjelelt pontokkal összeesik, és az ívet a vonasz mellett igen szépen ki lehet húzni.

Szükség esetében egy vékony favonaszt is lehet szabad kézzel úgy meggörbítni, hogy annak éle a kijelölt pontokon menjen keresztül; s ha két személy dolgozik együtt, a legszebb görbe vonalakat lehet húzni.

III. SZAKASZ.

Szögmérők.

133. §.

A felvételre szolgáló műszerek közt legfontosabbak a szögmérők, részint mivel a felvételi módok legnevezetesebbjei szögmérést igényelnek; részint mivel a szögmérést olyan esetekben is lehet alkalmazni, melyekben a hosszmérést természeti akadályok miatt használni nem lehet.

A szögmérőkben három fő alkotórészt kell megkülönböztetni; ezek 1) az irányzó, mely a megmérendő szög szárainak irányait a mezőről átveszi, és vagy távcsőből, vagy nézgékből áll. 2) Az Alhidade, mely az irányzó által felfogott irányokat a szögmérőre átteszi, s e czélra mutatóval, Noniussal, s más hasonnemű szervekkel van ellátva. 3) A tányér, melynek karimája — Limbus — fokokra, s ennek apróbb részeire van beosztva. Ezen az Alhidade mutatója azon helyet jelöli meg, mely az irányzó által felfogott iránynak megfelel. Néha a tányéron a beosztott karima helyett, rajzpapiros van kifeszítve, melyre a megmérendő szög szárai lerajzoltatnak, s ekképen a szög természetes nagyságban állapíttatik meg.

E szerint a szögmérőket két fő csoportba lehet sorozni. Az elsőbe tartoznak azok, melyek a szögnek vetülelét, vagy magát a ferde síkban fekvő szöget fokokban mérik meg; a másodikba pedig azok, melyek azt rajzolatban — graphice — szolgáltatják.

134. §. Szögmérés lánczczal.

Mielőtt a szögmérők leirásába, és azok használatának előadásába fognánk, meg kell említnünk, miképen lehet mérő-lánczczal szöget mérni.

1. Feloldás. Legyen a 163. ábrában a megmérendő szög ACB karók vagy rudak által kitűzve; szúrjuk be a láncz egyik végét a C csúcsban, és feszítsük ki a lánczot a szög szárai irányaiban, úgy hogy $CA' = CB' = 10^0$ legyen. Ezután mérjük meg az $A'B'$ húr hosszát $= c$, s az α szög az $A'B'C$ $\triangle$ által meg lesz határozva. Ugyanis ha $CA' = CB' = r$, akkor lesz:

$$sin\frac{\alpha}{2} = \frac{c}{2r} = \frac{c}{20}.$$

*Minő körülmények közt lehet a méréstől jó eredményt várni, következőből kitünik. Tegyük fel, hogy $c \ldots \triangle c$-vel, $r \ldots \triangle r$-vel, következőképen α is $\triangle a$-val változik; és gondoljuk $\triangle c$, $\triangle r$-et egymástól független igen kis mennyiségeknek, akkor az előbbi egyenletből lesz:

$$sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\triangle\alpha}{2}\right) = \frac{c + \triangle c}{2(r + \triangle r)},$$

s ezen egyenleteket egymásból levonván, rövid átváltoztatás után lesz:

$$2cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\triangle\alpha}{4}\right) sin\frac{\triangle\alpha}{4} = \frac{c + \triangle c}{2(r + \triangle r)} - \frac{c}{2r} = \frac{r\triangle c - c\triangle r}{2r(r + \triangle r)}$$

$$= \frac{\triangle c}{2(r + \triangle r)} - \frac{c\triangle r}{2r(r + \triangle r)},$$

vagy elég közelitéssel

$$\triangle\alpha = \frac{\triangle c}{r\,cos\frac{\alpha}{2}} - \frac{c}{r} \cdot \frac{\triangle r}{r\,cos\frac{\alpha}{2}};$$

s ha az utolsó tagban $\frac{c}{r}$ helyett a vele egyenlő $2sin\frac{\alpha}{2}$ tétetik, lesz:

$$\triangle\alpha = \frac{\triangle c}{r\,cos\frac{\alpha}{2}} - \frac{2\triangle r}{r\,cotg\frac{\alpha}{2}}.$$

Ezen kifejezésnek mind a két tagja végtelenné válik, ha $\alpha = 180^0$, ellenben azok legkisebb értéküket veszik fel, ha $\alpha = 0$. A mérésben ejtett hibák tehát tompa szögeknél igen nagy hatást gyakorolnak, mig azok hegyes szögeknél számba sem jönnek. Innen lehet következtetni, hogy ezen mód szerint csak hegyes szögeket lehet kellő pontossággal megmérni, s tompa szögek helyett a mellékszögeket kell meghatározni.

Ha mind a sugár, mind a húr hossza $0^0 \cdot 01$-ig pontosan van megmérve, akkor a szögben eredő hibát körülbelől $5'$-nek lehet venni.

2) Feloldás. Mérjünk le a szög egyik szárán CA' (164. ábra), 10^0-et, és a C és A' pontokból a kifeszített lánczczal a földön köríveket leirván, mérjük meg az $A'B' = c$ darabot, hol B' azon pontot jelenti, melyben a CB szár az egyenoldalú $\triangle\ CDA'$ oldalát metszi. Ekkor az $A'B'C$ $\triangle$-ből lesz:

$$tg a = \frac{c^0 \sin A'}{10^0 - c^0 \cos A'} = \frac{c^0 \sqrt{3}}{20 - c^0}.$$

3) A lánczczal megmért szöget a papiroson a $CA'B'$, illetőleg $CA'D$ $\triangle$-ek szerkesztése által lehet lerajzolni. Ezen szerkesztés közben szem előtt kell tartani, hogy miután a szögek szárai a papiroson úgy állanak elő, hogy a csúcspont a szárak valamely megjelölt pontjaival egyenes vonalak által összeköttetik, ezen pontoknak a csúcstól legalább $5''$-nyi távolságban kell lenni; különben a lerajzolt szög minden figyelem daczára $3-5'$-nél nagyobb hibát foglalhat magában. (Lásd 109. §. 7.) Más szavakkal: a szög szerkesztésére olyan nagy léptéket kell választani, hogy 10^0 legalább $5''$ által képviseltessék.

A. Szögmérők, melyek a szög vetületét fokokban mérik.

135. §. Theodolit.

Azon szögmérők közt, melyek a szög vetületét a mezőn fokokban mérik, legtökéletesebb a Theodolit, mely a Reichenbach szerkezete szerint a legpontosabb mérésekre, sőt az ujabb módositások után csillagászati s földirati mérésekre is alkalmatos. A Theodolit vagy egyszerű, vagy szorzó a szerint, a mint a szögnek egyszerű módon, vagy szorzás általi megmérésére szolgál.

1) A szorzó Theodolit legczélszerűbb szerkezete a 165. ábrából látható. Fő alkotó részét képezi egy $8-12''$ átmérőjű fokokra és annak apróbb részeire beosztott tányér a, melynek középpontjában merőlegesen egy $5-6''$ hosszú csap b van megerősítve. Ezen csap egy perselybe c van illesztve úgy, hogy abban tengelye körül foroghat. Ezen perselynek alsó végén 120^0-nyira

egymástól 3 láb *d* nyúlik ki, végükön emelő csavarokkal *e* ellátva, melyek tehát egy egyenoldalú △ szögpontjaiba esnek, s a lábak tetszés szerinti emelésére, vagy sülyesztésére szolgálnak. Az *e* csavarok anyjai fel vannak hasítva, és az *x* csavarok által összeszoritva azért, hogy azokban a legkisebb ingadozás is elháríttassék. A persely felső végéről szinte egy 5—6" hosszú kar *f* nyúlik ki, melyhez a tányért egy szorító csavar *g* által lehet kapcsolni, s egy paránycsavar *h* által finom mozgásba lehet hozni. Ezen szorító és parány-csavar készüléket ma két alakban készítik, a 166. ábrából mindkettő könnyen megérthető. A tányér csapja *b* hosszában át van fúrva úgy, hogy a lyuk tengelye a csap külső felületének tengelyével összeesik, s ezen lyukba egy második tányérnak *i* — Alhidade — csapja *k* van beillesztve. Ennélfogva mind a limbus mind az Alhidade egy közös tengely körül foroghat. Az Alhidadét a tányérhoz egy szorító csavar *g'* által lehet csatolni, és a *h'* paránycsavar által finom forgásba lehet hozni. A forgás tökéletességéhez megkivántatik, hogy a csapok kúp alakúak legyenek; ekképen ha idővel a lyukak kikopnának is, a csapok lejjebb szállitása által minden ingadozást el lehet távolítni. Továbbá a csapok végei lapos, vagy gömbmetszék alakú rugókon álljanak azért, hogy a tányérok nagyrészint ellensúlyoztatván, a súrlódás csökkenjen, s a forgás igen gyengédeddé váljon. A tányér karimáján, csaknem érintésben az Alhidadével, egy ezüst lemezkarika *w* van beeresztve s az átmérőhöz képest 5—10'-nyi nagyságú egyenlő részekre beosztva; az Alhidade karimáján pedig 2, 3, 4, . . . egymástól egyenlő távokban eső pontokon Noniusok, vagy paránymérőcsavarral felszerelt görcsővek vannak helyezve. Ezekkel a limbus osztályrészeit még apróbb részekre lehet beosztani úgy, hogy Noniussal 5—10", csavarparánymérővel pedig egyes m. p.-ket is le lehet olvasni. Ezen kis ívecskéket kicsinységük miatt szabadszemmel látni nem lehet; ezért mindenik Nonius felett egy 5—10-szer nagyitóüveg *g* van helyezve, melyeken keresztül a Nonius részecskéi tisztán látszodnak.

Még nagyobb a górcső nagyitása, mely 30—40-ig emelkedik, úgy hogy azon át a másodperczeknek tizedrészeit is lehet látni. Egy Starke és Kammerer jóhirű bécsi gépészek által készitett, s górcsövekkel ellátott Theodoliton a limbus közvetlen 5′-re van beosztva, a paránymérő csavaron 2·5 fordulat ad 5′-et, tehát egy fordulat = 2′, és az anyacsavar karimája 60 részre lévén beosztva, egy ilyen osztályrésznek a limbuson $^{2}/_{60}{}'= 2''$ felel meg. De egy ilyen részt még szabadszemmel 10 egyenlő részre lehet osztani, tehát a leolvasható legkisebb szög értéke = 0·"2. Az egész fordulatok számlálására a górcső látterében egy három fogból álló reczés lemezke van megerősítve (167. ábra), mely a limbus síkjának a görcső tárgylencséje által alkotott képével összeesik, s az első fog töve egy kis lyukacskával van megjelölve; honnan kezdve a csavarforgások számláltatnak. A csavar által jobbra és balra tolható rámában két finom szál van közel egymáshoz párhuzamosan kifeszítve, melyek közé kell a limbus leolvasandó vonását állítni, s ezen vonás mindig az, mely a fogak közé esik valahol. A fokok és 5-ös perczek leolvasására egy egyszerű Nonius szolgál.

Az előbbiek szerint a paránymérő csavaron történt leolvasások a csavarforgás számait szolgáltatják, melyeket kettővel való szorzás által lehet perczekké és másodperczekké változtatni. De minthogy a műszeren két átalellenes górcső van alkalmazva s a két leolvasásból nyert számtani középet kell venni a valódi érték gyanánt: a kettővel való szorzást a kettővel való osztást lerontja, s a leolvasások összege a keresett perczeket és másodperczeket szolgáltatja.

Ezen szerkezet igen gondos kiigazitást kiván, nevezetesen az említett 2·5 csavarfordulatnak nagy tökélylyel kell egyezni a limbus 5′-nyi hézagával, különben a leolvasott számok is hibások volnának. Ezért más gépészek nem veszik a csavar lépéseit a limbus hézagával végszerű, vagy kerekszámú viszonyban, hanem azokat egymással összehasonlítván, táblácskákat készítnek, melyekből a csavarforgásoknak megfelelő limbus-hézagocskákat ki lehet keresni. Ha p. o. többszörös kisérletek középeredményéül 10′-re 8·372 csavarfordulat találtatott, akkor feltévén, hogy a csavar tökéletes, egy fordulatra 1′·194, s ha az anya karikája 100 részre van beosztva, egy ilyen részre 0″·716 esik.

Az Alhidade egy átmérőjében két 5—6″ magas oszlop *m, m,* van csavarokkal megerősítve, melyeknek végein szögalakra kivájt ágyakban a távcső tengelye *n* fekszik. A távcső a régibb Theodolitoknál a tengely közepén lévő lyukon keresztül volt dugva; de ezen szerkezetnél csak legfeljebb 20°-nyi magasságba lehetett irányozni, nagyobb szögeknél a távcső a tányér széléhez ütődvén. Az újabb Theodolitoknál a távcső meg van törve; a tengely t. i. hosszában át van fúrva, s közepén egy oldalnyilásokkal ellátott üres koczka van helyezve, melyhez a távcső első része csavarokkal van kapcsolva; belől pedig egy derékszögű egyenszárú prisma van csavarok által megerősítve. Ez a tárgylencsében megtört sugárokat eltéríti, s a tengely irányában veti vissza, melynek végén a szemcső van helyezve. A távcső hiányzó hátsó része helyett a koczkán egy pálczácska *t*, s azon egy ellensúly *q* van megerősítve azért, hogy a súlypont a tengelybe essék; de az rövidebb az *m* oszlopnál; ennélfogva a távcsőt át lehet hajtani, és vele előre és hátra is lehet nézni. Az ily távcsővel egész a tetőpontig lehet irányozni, mi némely földirati czélokra szolgaló méréseknél igen fontos dolog. Hogy a Theodolit magassági mérésre is alkalmas legyen, a távcső forgástengelyére merőlegesen egy 8—9" átmérőjű kör *a'* van megerősitve, melynek beosztása az *a* tányéréval mindenben megegyez. Ezen kör a távcsővel együtt forog, és az *u* szorító csavar által az *m* oszlophoz kapcsoltatván, a *v* paránycsavarral finom forgásba hozható. A Noniusok az Alhidadén megerősitett *z* oszlopból kinyuló karok végein mozdulatlanúl helyezvék.

2) Az egyszerű Theodolit a szorzótól csak abban különbözik, hogy annak tányérja a *c* hengerhez szilárdul van kapcsolva, ennélfogva tengelye körül nem foroghat, s rajta az illető szorító készülék hiányzik.

3) A Theodolit igen szilárd állványt kiván. Legalkalmatosabbak e czélra a kő- vagy faoszlopok, melyek a gúlák tengelyeiben a földbe ásatnak; valamint a tornyok ablakait erkélyek párkányait kémények tetejét is, ha körülöttök egy kis állás készíttetik, melyen a mérnök körül járhat, igen jól lehet használni. Ezeknek hiányában állványul egy 2" vastag 2' átmérőjű három lábon álló fatányért szoktak alkalmazni, melynek egyik lábát 3—4"-el meg lehet hosszabbítni, hogy a tányért körülbelől vizszintes fekvésbe lehessen hozni. Czélszerű a tányér közepén egy 3" átmérőjű lyukat fúrni keresztül, hogy a Theodolit középpontját egy függöny segítségével a földre lehessen lefüggönyözni.

136. §. A Theodolit kellékei.

Hogy a Theodolit a mezőn kitűzött szög vizszintes vetületének mértékét hibátlanul szolgáltassa, szükség bizonyos kellékekkel birnia, melyek vagy a műszer felállitására, vagy pedig annak egyes részei közötti összeköttetésére vonatkoznak. Nevezetesen:

1) A tányér tengelyének a mezőn kitűzött szög csúcsa felett függélyesen kell beállítva lenni.

2) A tányér forgástengelyének függélyes állást kell adni, és annak

3) a tányér síkjára merőlegesen kell megerősítve lenni. Csak így fog a tányér, akármint fordíttassék az tengelye körül, vizszintes fekvésben maradni, mi a szög visszintes vetületének meghatározására lényegesen megkivántatik.

4) A limbus beosztásának a legnagyobb tökélylyel kell készítve lenni azért, hogy a leolvasások a megfelelő ívek valódi mértékei legyenek.

5) Az Alhidade forgástengelyének a beosztott kör középpontján kell keresztül menni, és

6) a tányér tengelyével párhuzamosnak kell lenni. Csak akkor lesznek a körön leolvasott ívek az Alhidade mutatói által leirt ívek mértékei.

7) A távcső forgástengelyének a tányér tengelyére merőlegesen kell állani, és

8) henger alakú egyenlő átmérőjű csapokban kell végződni.

9) A távcső láttengelyének annak forgástengelyére merőlegesen kell állani.

Ha ezen négy utolsó feltételnek elég nem tétetett, akkor a láttengely a távcsőnek tengelye körüli forgatása által a 6, 7, 8 pontok eseteiben ferde síkot, a 9-ben pedig kúp felületet ír le; ennélfogva ha a láttengely valamely magassan álló pontra irányoztatnék, azután pedig az vizszintes fekvésbe lehajtatnék, a láttengely a pont vizszintes vetülete mellett menne el, s a távcső által felfogott szög a mezei megfelelő szögtől különböznék.

10) A távcső láttengelyének a tányér, és a távcső forgástengelyei metszéspontján kell keresztül menni; különben az irányvonal által felfogott szög a mezőn kitűzöttől, melynek csúcsában a tányér középpontját felállítva gondoljuk, különböző volna.

11) Végre hogy az irányzás a távcsőben ne csak egy vonalra szorittassék, hanem nagyobb térre kiterjedhessen anélkül, hogy a mutató állása a limbuson változnék, egyik irányszálat a láttengely és a távcső forgástengelye által képzett síkkal párhuzamossá, a másikat pedig ezen síkra merőlegessé szokták tenni. Ezáltal az elsőbb a képen vizszintes, az utóbbi függélyes állásban fog látszodni, s az irányszálak és az iránytengelyen keresztül gondolt síkok vizszintes és függélyes iránysíkokat fognak szolgáltatni.

Ezen kellékek közül a két első legfontosabb, és a műszer felállitása alkalmával pontosan helyreállítandó, minthogy a hátramaradt hibát orvosolni nem lehet.

A 3, 4, 5, 6, 8 és 10 számok alattiakat különösen a gépésznek kell a műszer készitése alkalmával eltávolítni; a hátramaradtakat pedig a mérnök egyszer mindenkorra meghatározván, — minthogy azok természetüknél fogva hosszabb ideig változatlan maradnak, — azoknak a megmért szögekre való befolyását kiszámitja, s a megmért szöghöz kapcsolja. A hibák kiigazitására a műszeren segéd eszközök hiányoznak [1]).

Végre a 7, 9, 11 számok alatti hibák olyanok, melyeket a gépész legnagyobb szorgalom mellett sem képes elkerülni; ezért a műszeren mindig kiigazitási csavarkák vannak alkalmazva, hogy azokkal azon hibákat igen csekély nagyságra le lehessen szállítni, melyeknek befolyása a megmért szögre már alig érezhető. De legczélszerűbb a kiigazitásra olyan nagy fáradságot nem fordítni, hanem a szögmérést oly módon intézni, hogy a hibák az eredményből kiessenek, mint ezt később bővebben fogjuk előadni.

137. §. A Theodolit segéd eszközei. I. Függöny.

A tányér tengelyét a föld felületének valamely pontja felett a függöny segitségével szoktuk beállítni, s ezen műtétel központositás nevet visel. Miután t. i. az állvány a pont felett úgy helyeztetett, hogy annak tányérja körülbelől vizszintesen, a

---

[1]) Breithaupt az általa készitett Theodolitoknál a tányérnak correctio-csavarkákat ád, hogy azt tengelyére merőlegessé lehessen tenni; de ez egészen felesleges, mert az innen eredő hiba a mért összegre mindig igen csekély befolyást gyakorol. (Lásd 144. §.).

tányér közepén lévő lyuk pedig a földön megjelelt pont felett függélyesen álljon, a Theodolit az állványra tétetik, a tengely perselye végén lévő horogra egy zsinór köttetik, mely az állvány lyukán keresztül menvén, az alsó végére kötött körte alakú súly által függélyes irányban feszíttetik ki, s a Theodolit az állványon úgy helyeztetik el, hogy a súly hegyes vége a pont felett függélyesen álljon.

Ha a persely végén a horog hiányzik, a mérnök a lábak töveire hurkokat köthet, ezeket a tengely hosszában egy csomóba összefoglalja, és végén egy hurkot csinál, melyben azután a függöny végét meg lehet erősítni.

Ha az álláspont egy oszlopon, vagy valamely kőfal felületén van megjelölve, mely már magában is állványt képez, akkor a Theodolit tengelyének végét szabadszemmel is a pont felibe lehet tenni, s ha két különböző oldalról nézve, a tengely meghosszabítva a ponton látszik keresztül menni, az valósággal a ponton is megyen keresztül.

138. §. II. A szintező.

1) A 136. §-ban elószámlált tulajdonságok nagy része a szintező — libella — által vizsgáltatik meg. Ez (168. ábra) egy 5—8" hosszú, $^1/_2$" átmérőjű, gyengén korívben hajlott üvegcsőből áll, melynek mind a két vége légmentesen el van zárva, miután annak $^4/_5$ része borléllel megtöltetett, $^1/_5$ része pedig légüres tért képez. Ezen cső, könnyebb kezelés végett, egy sárgaréz tokban van befoglalva, melynek felső része ki van metszve, hogy a cső domború oldala kilátszódjék, két végén pedig alant szög alakra kimetszett lábak vannak megerősítve, melyeknél fogva a szintezőt valamely hengerre lehet tenni. Ezen lábak közül egyik a tokkal szilárdan össze van kötve, a másik pedig, a szükséges kiigazitás végett, egy kis mozoghatósággal van felruházva. Ezen mozgás 4 csavarka *p*, *q* által eszközöltetik, melyek a tok négyszögű végének oldalaira hatnak, amint az *(a)* ábrában látszik. Szilárdabb lesz a szerkezet, ha a fel és lefelé intézett mozgás az egyik, az oldalvásti pedig a másik láb közt megosztatik *(b)*; vagy ha az oldalmozgás a láb felső végén, a fel és lefelé intézett pedig akképen eszközöltetik, hogy a láb hosszában felhasíttatik, és egy csavar által összeszoríttatik *(c)*. Végre megem-

litendő még a Starke szerkezete is, melyben mind a két mozgást a szintező egyik lába végén helyezett két egymás felé hajlott csavar által lehet előidézni. Ha ezen csavarkák ki- vagy befelé egyformán csavartatnak, a láb rövidül vagy hosszabbodik; ha pedig egyik ki-, a másik befelé csavartatik, a láb oldalt mozdul.

2) Ha a szintezőt valamely sík tábla fekvésének meghatározására akarjuk használni, akkor a lábak egy kis táblácskán erősíttetnek meg, melyet azután egészen a síkba lehet fektetni. Ezen esetet úgy lehet nézni, mintha a lábak kimetszésének hajlásszöge 180^0 volna.

3) A szintező hatása következő. Ha a műszer valamely ferde fekvésű hengerre tétetik (169. ábra), melynek hajlásszöge 1^0-ot meg nem halad, akkor a csőben lévő légüres tér hosszúkás buborék alakjában fog mutatkozni, és a cső legmagasabb részét fogja elfoglalni. A cső legmagasabb pontja pedig, mértani okoknál fogva, ott van, hol a deréklő függélyes, vagyis az érintő vizszintes. Ennélfogva a buborék középpontjában m a cső felületére gondolt deréklő mindig függélyes. Tegyük fel most, hogy a henger hajlásszöge α-val változik, akkor a nevezett deréklő is ugyanazon szöggel fog hajolni, s egy más pontnak m' deréklője lesz függélyessé. Ezen két deréklő közötti szög tehát szintén $= \alpha$; és ha feltesszük, hogy a cső hosszmetszete köralakú, melynek sugára $= r$, a buborék középpontjának útja pedig, vagyis az mm' ív $= h$, akkor:

$$\alpha = \frac{h}{r} \ldots \mathfrak{D}$$

mely képlet azt mondja, hogy a talap hajlásszögének változása a buborék által leirt úttal egyenes viszonyban van. A szintező tehát csekély hajláskülönbségek megmérésére különösen alkalmatos; s e czélra csak az kivántatik meg, hogy h és r, vagy a mi egyre megyen $\frac{1}{r}$, azaz: a hosszegységnek a görbület középpontjában megfelelő szögek meghatároztassanak.

A h megmérése végett a cső hosszában egyenlő bár tetszésszerinti nagyságú osztályrészek vannak bemetszve, melyeken a buborék végpontjainak állása leolvastatik. Legyen ezen beosztás kezdőpontja a cső végén 0-nál, és nevezzük a buborék jobb és bal végén nyert leolvasásokat j, és b-nek, akkor a középpontnak a számtani közép fog megfelelni, ennélfogva lesz:

$$h = \frac{j+b}{2} - \frac{j'+b'}{2}, \text{ vagy } = \frac{j-j'}{2} + \frac{b-b'}{2}.$$

Az $\frac{1}{r}$ meghatározása legegyszerűbb módon, s rendkivüli segédeszközök igénybe vétele nélkül csupán egy irányszálakkal ellátott távcső segitségével következő módon vitetik véghez. (170. ábra). A távcső a szintező mellett egy asztalon fekvő körülbelől vizszintes rajztáblára M annak mellső oldalára merőlegesen tétetik, s a szemcső úgy állíttatik be, hogy egy átalellenben 10 vagy több öl távban álló falat tisztán lehessen látni. Ezután azon pont A a falon megjelöltetik, melyet a távcső látvonala mutat, és a buborék állása a szintezőn leolvastatik. Most a tábla hátulsó része egy aládugott ék által emeltetik, úgy hogy a buborék 10—12 vonással tovább mozduljon; ez által a tábla mellső éle körül az egész készülék egy kis hajlást fog szenvedni, és a látvonal a falon egy más pontot B fog mutatni, mely az előbbi alatt függélyesen fog állani. Ezen pont hasonlóképen megjelöltetik, és a buborék állása leolvastatik. Végre a falon kitűzött AB darab, valamint a falnak a tábla mellső élétőli távja AC pontosan megméretik, s ezen méretekből a két irányvonal közti szög α lesz:

$$\alpha = \frac{AB}{AC}.$$

Ezen szöget valamint a h értékét is a fentebbi ☽ képletben helyettesitvén, egyedül $\frac{1}{r}$ marad ösmeretlen, melyet az egyenletből ki lehet számítni.

Mennél kisebb az $\frac{1}{r}$ értéke, annál érzékenyebb a szintező, azaz: annál kisebb hajlás-változásokat lehet rajta megösmerni. A legérzékenyebb szintezőknél, melyeknél a cső köralakja mesterséges kiköszörülés által állittatik elő, — s mai időben a szakértő művészek által igen nagy tökélylyel készittetik, — ezen mennyiség 2—3″-et meg nem halad, s minthogy még egy osztályrészt, mely körülbelől 1^{tk}‴-at teszen, szabadszemmel 10 egyenlő részre be lehet osztani, a hajlásszögek változásait egy m. percznek csekély tört részecskéjéig meg lehet mérni.

4) De a szintező nemcsak a hajlásszögek különbségei, hanem azok absolut értékeinek meghatározására is alkalmatos. Legyen AB (171. ábra) a talaphenger tengelye, melynek a vizszintes síkhoz AH való hajlásszöge $= \beta$; tegyük fel a szintezőt a hengerre, és olvassuk le a buborék állását. Ezen leolvasás az m pont fekvését határozza meg, melynek deréklője függélyesen áll, s mely a henger tengelyével valamely szöget képez. Most forditsuk meg a szintezőt ugy, hogy annak lábai helyet cseréljenek, és olvassuk le a buborékok állását; ennek középpontja a csőnek azon pontjában m' fog helyet foglalni, melynek deréklője függélyessé lesz, és a tengelylyel ugyanazon szöget, de az ellenkező oldalon fog bezárni. Ezen két deréklő közt bezárt szög a fentebbiek szerint

$$\alpha = \frac{h}{r} = \frac{(j-j') + (b-b')}{2r}.$$

Húzzunk az O pontból AB-re merőlegest, ez a CD oldalt és az α szöget két egyenlő részre fogja osztani, minthogy az OCD $\triangle$ egyenszárú; továbbá $BAH = COM$ szöggel, mivel száraik egymásra merőlegesen állanak, tehát:

$$\beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{(j-j') + (b-b')}{4r},$$

mely képlet azt mondja, hogy a t a l a p h a j l á s s z ö g é n e k a b s o l u t é r t é k e a b u b o r é k ú t j á n a k f e l e á l t a l m é r e t i k.

5) Innen következik, hogy az m és m' között középen fekvő pontban M a csőhöz húzott deréklő az AB talapra merőlegesen áll. Ha tehát az AB talapot vizszintessé akarjuk tenni, akkor annak felsőbb végét sülyeszteni, vagy az alsóbbat emelni kell, mig a buborék középpontja az m és m' pontok közt középen állapodik meg; vagy a mit könnyebben lehet észlelni, mig a buborék végpontjai az általok hátrahagyott útak felére visszamennek. Ha ezen műtétel helyesen vitetett véghez, akkor a buborék mindig ugyanazon pontban jön nyugvásba, akármelyik állásban helyeztessék a szintező a talapra.

6) Ha egy körülbelől függélyesen álló tengelyen keresztben egy szintező van megerősítve, mely a tengelylyel együtt forog, a szintező által a tengelynek a függélyes vonaltól elhajlását is meg lehet határozni. Ugyanis legyen a 172. ábrában aO a ten-

gely, cd a cső felső felülete, m a buborék középpontja, tehát az mO deréklő függélyes, mely a tengelylyel β szöget képez. Ha most a tengely 180°-al fordittatik, akkor az m pont m_1-be megyen, és m_1O a tengelylyel még mindig β szöget képez, de függélyes állását elveszti; ennélfogva a buborék egy más pontban m' fog megállapodni, melynek deréklője függélyes fog lenni, és a tengelylyel hasonlóképen β szöget fog bezárni. Ezen két deréklő, t. i. m_1O és $m'O'$ közt bezárt szög tehát $= 2\beta$, melynek mértéke az m_1m' ív, tehát a tengelynek a függélyes iránytóli eltérése.

$$\beta = \frac{\alpha}{2},$$

s ezen szög is a buborék által átfutott ív felével méretik.

Ezen eredmény a 4-ik szám alattival, mely a vizszintes vonalra vonatkozik, mindenben megegyez, ennélfogva a tengelynek függélyessé tétele is egészen azon módon vitetik véghez, miképen az a vizszintes vonalra nézve előadatott.

7) Hogy a cső azon pontja, melynek deréklője a talapra merőleges, emlékezetben jobban megmaradjon, különösen pedig azon okból, mivel a cső hosszmetszete a köralakhoz középen leginkább közelít, a végek felé pedig attól többé kevésbé elüt, a nevezett pont rendesen a cső közepébe tétetik által, és a cső beosztásának kezdő pontja is ezen középpontba van helyezve. Ezen feltétel alatt — figyelembe vévén még azon körülményt is, hogy minden gyakorlati esetben a buborék végpontjai a cső középpontjától ellenkező oldalra esnek, minthogy a cső vége felé a görbület köralakjában bizni nem lehet, — a fentebbi számokban kifejtett képletek úgy módosulnak, hogy b helyett — b, j' helyett — j'-t kell tenni; ennélfogva α és β következő alakokat vesznek fel:

$$\alpha = \frac{(j+j') - (b+b')}{2r}, \quad \beta = \frac{(j+j') - (b+b')}{4r}.$$

Minthogy pedig a cső középpontjának deréklője a talapra valószinűleg nem merőleges, szükséges a cső egyik lábát mozoghatóvá tenni, hogy ezt meghosszabítni, vagy rövidítni lehessen, s ezen czélra szolgálnak a lábak végén látszó csavarkák.

139. §. A Theodolit kiigazitása. Rectificatio.

A Theodolit kiigazitása ilyen rendben történik:

1) Meg kell vizsgálni, valjon a szintező cső, és a lábak kimetszését érintő henger tengelyei egy síkban feküsznek-e, vagy nem? Mert a szintező csőt a talaphengeren egy kevéssé oldalt lehetvén dűlteni, ezen mozgásnak a buborék állásában változást előidézni nem szabad. Ez csak akkor fog történni, ha a szintező cső a talaphengerrel párhuzamos; ez pedig feltételezi, hogy azok egy síkban feküsznek. Ennek megvizsgálása végett helyezzük a szintezőt a Theodolit-távcső tengelyére, forditsuk a tányért, mig a szintező egy lábcsavar irányába esik, s minden szoritó csavart meghúzván, állitsuk be a buborékot egy lábcsavarral a cső közepébe. Ezután a szintezőt — a mennyire a lábaknál lévő hézag megengedi — oldalt dültvén előre és hátra, ha a buborék vagy egy helyben marad, vagy a csőnek mindig ugyanazon vége felé mozdul, akár előre akár hátra dültöttük a szintezőt: akkor a két tengely egy síkban fekszik. Ha pedig a buborék egyszer jobbra, másszor balra mozdul ki helyéből, mint azt két nem párhuzamos pálczácska által könnyen láthatóvá lehet tenni: akkor a nevezett vonalak nem egy síkban feküsznek, s a hibát a mozogható lábnak a *p* csavarkák által oldalt mozditása által lehet kiigazítni.

2) A szintező cső középpontjának érintőjét a távcső forgástengelyével párhuzamossá kell tenni. E czélból a buborékot mint előbb középre be kell állitni úgy, hogy annak végpontjai a középponttól jobb és bal felé ugyanazon számú vonásokig érjenek. Ezután a szintezőt meg kell fordítni, s ha a buborék ugyanazon vonások közt állapodik meg, akkor a kivánt tulajdonság megvan; ellenkező esetben a buborék állásában mutatkozó különbség a kettős hibát ábrázolja. A buborékot tehát *q* csavarkák által félúttal vissza kell vinni, s a műtételt mindaddig ismételni, mig a megforditás után semmi különbség sem mutatkozik.

Ezen hibát egészen elháritni nem könnyű, minthogy a csavarkák lépései ritkán eléggé finomak. Ha tehát már a kettős hiba egy osztályrésznél kisebb, czélszerűbb a buborék végeit leolvasni, és az ugyanazon végre vonatkozó leolvasások közt a számtani középeket vévén, ezek lesznek a buborék végeinek helyei azon fekvésben, melyben a buborék középpontjának érintője a tengelylyel párhuzamos. Ezen állásba kell tehát a buborékot a lábcsavarokkal hozni, ha a tengelyt vizszintessé akarjuk tenni. Legyen p. o. a szintező első fekvésében mind a két leolvasás = 7·6, a megforditás után pedig a cső azon végén, hol a *q* csavarkák vannak, találtatott = 7·0, a másikon = 8·2. Akkor a szintező azon végét hol a *q* csavarkák vannak 7·3, a másikat pedig 7·9-re kell beállítni a lábcsavarral, s akkor a távcső tengelye vizszintes fog lenni.

3) Meg kell vizsgálni, valjon a távcső forgástengelye merőleges-e az Alhidade tengelyére? E czélból a szintezőt egy lábcsavar irányába helyezvén, s a szorító csavarokat meghúzván a szintezőt azon vonások közé beállitjuk, melyeket az előbbi szám útmutatása szerint találtunk. Ezután az Alhidadét 180°-al forditjuk tengelye körül, mely czélra a tányér beosztását használni lehet. Ha a buborék ismét azon a helyen jön nyugvásba, mint azelőtt, akkor a szintező érintője valamint a vele párhuzamos forgás-tengelye is a távcsőnek merőlegesen fekszik az Alhidade forgás-tengelyére; ellenkező esetben a buborék eltérése a kettős hibát mutatván. (Lásd 138. §. 6. szám). Ennek felét tehát a távcső egyik oszlopán ki kell igazítni, mely czélból az két darabból van csinálva, s húzó és taszitó csavarkák által összekapcsolva; és az egész műtételt ismételni kell, mig a buborék az Alhidade 180°-ali fordítása után helyét meg nem tartja. Ekképen a szintező az Alhidade forgástengelyére merőlegessé tétetvén, ha ez a tányér tengelyével párhuzamos, az is merőlegesen fog állani a tányér tengelyére. Hogy ezt függélyes állásba lehessen helyezni, az Alhidadét 90°-al kell fordítni, miáltal a szintező más két lábcsavar felé fog fordulni, s ezekkel a buborékot szintén be kell állítni. Ha ezen műtétel egy párszor ismételtetik, a limbus tengelye függélyessé válik, és a limbust lassan körül lehet forgatni, anélkül, hogy a buborék helyéből kimozdulna.

4) Meg kell vizsgálni, valjon a távcső láttengelye annak forgástengelyére merőleges-e? E czélból a távcsőt körülbelől vizszintes fekvésben valamely igen távol lévő pontra irányozzuk úgy, hogy a szálak metszéspontja azt középen

messe; azután a távcsőt ágyából kiemelvén, megforditva tesszük vissza úgy, hogy a tengely végei helyet cseréljenek: a szálak metszéspontjának ugyanazon pontra kell mutatni, ellenkező esetben az eltérés a kettős hibát ábrázolván. Mert ha a 173. ábrában AB a távcső forgástengelyét, CD pedig annak láttengelyét ábrázolja, melyek egymással α szöget zárnak be, s az irányvonal az M ponton megyen keresztül, akkor a távcső megforditása után az irányvonal $C'D'$ fekvésbe jön, a forgástengely pedig irányát nem változtatja, tehát az α szög is változatlan marad, csak ellenkező fekvést veszen fel, s az irányvonal az N ponton megyen keresztül. Legyen β a CDM és $C'D'N$ irányok közti különbség, akkor

$$2\alpha + \beta = 180^0, \text{ azaz } \frac{\beta}{2} = 90^0 - \alpha.$$

Az eltérésnek felét tehát az irányvonalon kell kiigazítni. E célból, ha a távcső egy darabban van készitve, a diaphragmát a csavarkák által oldalt kell mozdítni; ha pedig a távcső meg van törve, akkor a diaphragma mozdulatlan, de helyette a prismát lehet az azt tartó csavarkák r, s, t által tengelye körül egy kicsit mozdítni. Mind a két esetben a keresztszálak metszéspontját a csavarkák által M, N közt közepére kell beállítni, s a műtételt ismételni, mig a megforditás után a képen a legkisebb eltérés sem fog mutatkozni.

5) Végre meg kell vizsgálni, valjon az iránysík merőlegesen áll-e a távcső forgástengelyére, vagy ha a távcső meg van törve, a láttengelynek a prismán kivül eső darabjai által megállapitott síkra. E végre állítsuk be a szálak metszéspontját valamely távol eső, tisztán látszó pontra, és mozdítsuk a távcsőt tengelye körül fel s alá; ha a pont mindig a szálon marad, akkor annak fekvése helyes. Ha pedig az jobbra, vagy balra eltávozik a száltól, akkor az ferdén áll, s fordítni kell rajta, mig a nevezett kellék helyre nem áll. Ezen forditás rendesen a szemcsőn szokott véghezvitetni; e czélból a szemcső az 51. ábra szerint csavarkákkal láttatik el. A tört távcsöveknél a 174. ábrában látható szerkezet czélszerűbb.

140. §. A tányér tengelyének függélyessé tétele. Szintezés.

1) Ha a Theodolit már ki van igazítva, a tányér forgástengelyét igy lehet függélyessé tenni (175. ábra). A szintezőt a távcső tengelyére helyezvén, és az Alhidade szorító csavarját meghúzván, a tányért úgy fordítjuk, hogy a szintező *mn* az *ab* lábcsavarokat összekötő vonallal körülbelől párhuzamos legyen, és egyik csavart fel, a másikat lefelé forgatván, a buborékot a kiigazításkor megjelölt helyre beállítjuk. Ezután fordítjuk a tányért, mig a szintező az első irányra merőlegesen, tehát a harmadik lábcsavar *c* irányába esik, s ezen lábcsavar által a buborékot szintén beállítjuk, s ezen műtételt felváltva addig ismételjük, mig a buborék mind a két fekvésben ugyanazon vonások közt állapodik meg.

2) Ha a Theodolit még nincsen kiigazítva, s a szintező is hibás, a tányér tengelyét igy kell függélyessé tenni. Fordítsuk a tányért tengelye körül, mig a szintező két lábcsavarral párhuzamos fekvésbe jön, állítsuk be a buborékot ezen csavarokkal a cső közepébe, és olvassuk le a buborék végeit. Legyen p. o. a cső azon végén, hol az igazító csavarkák vannak, a leolvasott szám = 7·5, a másikon = 8·4. Ezután fordítsuk a tányért tengelye körül, a mennyire szabadszemmel meg lehet itélni, 180⁰-al, és a buborék végeit az előbbi rendben leolvasván 5·4, és 10·5-öt találjunk. Most a buborékot a lábcsavarok által a leolvasások számtani közepére, t. i.
$\frac{7{\cdot}5 + 5{\cdot}4}{2} = 6{\cdot}5$, és $\frac{8{\cdot}4 + 10{\cdot}5}{2} = 9{\cdot}4$-re beállítván, s a tányért 90^0-al fordítván, hogy a szintező a harmadik csavar irányába álljon, a buborékot ezen csavar által is 6·5 és 9·4 közé beállítjuk. Ezáltal a tengely már közel függélyes állást nyert. De a függélyességben még egy kis hiba lehet, mert a 180^0-al való megforditás csak szabadszemmel történt. Most tehát a műtételt ismételni kell. A szintező t. i. az első állásba visszavitetvén, a buborék a lábcsavarok által 6·5 és 9·4 közé beállittatik; ezután a tányér 180^0-al fordittatván, a buborék végei leolvastatnak. Legyenek ezen leolvasások 6·9 és 9·0, akkor a buborékokat
$\frac{6{\cdot}5 + 6{\cdot}9}{2} = 6{\cdot}7$ és $\frac{9{\cdot}4 + 9{\cdot}0}{2} = 9{\cdot}2$ közé kell beállítni, s a

szintezőt a harmadik csavar irányába fordítván, a buborékot ezen csavarral szintén 6·7 és 9·2 közé kell beállítni stb., mig végre a forgatás a buborék állásában semmi változást nem okoz.

*141. §. A Theodolit többi kellékeinek megvizsgálása.

1) Valjon a tányér merőlegesen áll-e annak forgástengelyére? így lehet megvizsgálni. Miután az előbbiek szerint a tányér tengelye függélyessé tétetett, emeljük ki az Alhidadét ágyából, és helyezzünk egy talpas szintezőt a tányér különböző átmérői irányaiban. Ha a buborék mindig egy helyen állapodik meg, akkor a tányér karimája vizszintes, tehát a tengelyre merőleges. Ha pedig különbség mutatkoznék, szorgalmas próbák után fel lehet azon átmérőt keresni, melynek irányában a buborék 180⁰-ali megforditás után legnagyobb eltérést mutat, s ennek fele a hajlásszög mértékét fogja szolgáltatni.

2) Valjon az Alhidade forgástengelye párhuzamos-e a tányér forgástengelyével? igy lehet megvizsgálni. Miután a tányer tengelye a szintező segítségével függélyessé tétetett, az a szoritó csavar által a lábakhoz kapcsoltatik, s az Alhidade tengelye körül fordíttatik, figyelvén arra, valjon a buborék mindig egy helyben marad-e? vagy nem. Ha különbség mutatkozik, szorgalmas vizsga után fel kell azon átmérőt keresni, melyben az eltérés legnagyobb, s a buborék állásából a hiba nagyságát meg lehet határozni.

3) Valjon az Alhidade forgástengelye a limbus középpontján megyen-e keresztül? így lehet megvizsgálni. Miután az Alhidadét a tányérhoz kapcsoltuk, a mutatókat *a*, *b*, *c*, *d* sorjában leolvassuk. Ezután az Alhidadét körülbelül 10⁰-al fordítjuk tengelye körül, s a mutatókat ismét leolvassuk stb., mig az Alhidade az egész kört körüljárta. Ha most az *ab*, *bc*, *cd*, *da* hézagok az Alhidade minden állásában állandóknak találtatnak, akkor az Alhidade központos. Ellenkező esetben sűrűbb, és szigorú vizsgálat után fel lehet fedezni a limbusnak azon átmérőjét, mely az Alhidade forgáspontján megyen keresztül. Nevezetesen midőn az Alhidadén páros számú mutatók vannak, ezek párosával mindig átalellenben esnek egymással, és ha az azokat összekötő vonal *ac*, a limbus középpontján megyen keresztül, akkor a közbe eső ívek $ac = ca = 180^0$.

Midőn pedig a mutatók száma páratlan, akkor egy mutató *c* mindig két mutató *a, b* közt középen lévő ponttal *k* van átalellenben. Ha tehát a *kc* átló a limbus középpontján megyen keresztül, szükségesképen $kc = ck = 180^0$.

Ha az *ac*, vagy *kc* átló az Alhidade forgástengelye mellett megyen el, akkor az *ac* és *ca*, illetőleg *ck* és *kc* ívek közötti különbség legnagyobb értékét kell felkeresni; ez az átlók azon állásának felel meg, mely a limbus középpontját az Alhidade forgáspontjával összeköti.

*142. §. Hiba kútfők.

Bár milyen szorgalommal történt légyen is a Theodolit egyes részeinek kiigazítása, mégis maradnak hátra csekély hibácskák, melyek a szögmérés tökélyének többé kevésbbé ártanak. Ezen hibácskák mindig csoportosan lépnek fel, s a mérési hiba ezeknek algebrai összege által képeztetik: mindazáltal szabad azokat egyenként venni vizsgálat alá, mintha a többiek nem is léteznének; mivel fel lehet tenni, hogy azok olyan csekély értékkel birnak, miszerint azoknak felsőbb hatványai és egymássali szorzatai, az első hatványhoz képest elenyésznek. Ezen hibák közt különös figyelemre méltó,

1) ha a Theodolit tengelye nem áll függélyesen a szög csúcsa felett, vagy a külpontossági hiba. Néha kénytelen a mérnök a műszert csúcson kivül állítni fel, ha t. i. a csúcshoz vagy nem lehet férni, vagy el volna tőle zárva a kilátás, mint azt a tornyok belsejében tapasztaljuk. Legyen a 176. ábrában C a megmérendő szög csúcsa, C' a Theodolit tengelye, $ACB = \alpha$ a valódi szög, mely helyett az $AC'B = \alpha'$ méretik meg, akkor az AOC és BOC' $\triangle$-ekből következik:

$$\alpha + A = \alpha' + B, \quad \text{vagy} \quad \alpha - \alpha' = B - A,$$

hol A és B az ugynevezett parallactikus szögeket jelentik, t. i. azon szögeket, melyek alatt a CC' vonal az A és B pontokból látszik. Ezen szögek meghatározása végett mérjük meg a $CC' = d$, vonalat, és a $CC'A = \omega$ szöget, akkor az ACC' és BCC'' $\triangle$-ekből következik:

$$\sin A = \frac{d \sin\omega}{CA},$$

$$\sin B = \frac{d \sin(\omega + \alpha')}{CB}$$

mely egyenletekben *sinA, sinB* helyett az íveket is lehet tenni, mivel ezen szögek egy pár perczet soha sem haladnak meg. Tehát lesz:

$$\alpha - \alpha' = d \left\{ \frac{sin\,(\omega + \alpha')}{CB} - \frac{sin\,\omega}{CA} \right\} \cdots \odot$$

A parallactikus szögek kiszámitására a CA és CB távok ösmerete megkivántatik. De ezeket az ABC $\triangle$ feloldása által, melyben az α szög helyett a megmért α' szög tétetik, elég pontosan meg lehet határozni.

A külpontosság hatása különösen akkor jelentékeny, ha A és B ellenkező jeleket nyernek. Ekkor is a legkedvezőtlenebb eset áll elő, ha $CA = CB$ lehető kis értékkel bir. Nevezzük ezt D-nek, akkor a fentebbi képletből lesz:

$$\alpha - \alpha' = \frac{d}{D} \left\{ sin\,(\omega + \alpha') - sin\,\omega \right\} = \frac{2d}{D} \, cos \left(\omega + \frac{\alpha'}{2} \right) sin \, \frac{\alpha'}{2}.$$

Ennek ismét számilag legnagyobb értéke áll elő, ha $cos \left(\omega + \frac{\alpha'}{2} \right) = \pm 1$, vagyis $\omega + \frac{\alpha'}{2} = \begin{cases} 0^0 \\ 180^0 \end{cases}$, honnan következik:

$$\omega = -\frac{\alpha'}{2}, \quad \text{vagy} \quad \omega = 180^0 - \frac{\alpha'}{2}.$$

Ha még $sin \, \frac{\alpha'}{2} = \pm 1$, azaz : $\alpha' = 180^0$, akkor a hiba lehető legnagyobb fog lenni, u. m.:

$$\alpha - \alpha' = \pm \frac{2d}{D} \cdots ☽$$

Legyen p. o. $d = 3'''$, $D = 100^0$, akkor

$$\alpha - \alpha' = \pm \frac{2.3}{100.72.12} = \pm \frac{1}{14400} = \pm 0{\cdot}000069,$$

körülbelül $= 14.''$ A Theodolit tengelyét tehát a szög csúcsa felett annál nagyobb pontossággal kell függélyesen beállítni, mennél rövidebbek a szög szárai, s mennél pontosabban akarjuk a szöget megmérni.

Ellenben a külpontosságnak a szögmérésre legkisebb befolyása sincsen, ha az A, B, C, C' pontok egy kör körületében feküsznek, minthogy akkor az α és α' körületi szögek egyenlő ívek felett állván, egymással tökéletesen egyenlők.

2) A parallactikus szögek meghatározására következő módot is lehet használni. A C pontnak az irányvonalaktóli merőleges távolait megmérvén, ha ezeket p és q-nak nevezzük, lesz:

$$sin\,A = \frac{p}{CA}, \quad sin\,B = \frac{q}{CB},$$

mely kifejezésekben a sinusok helyett az íveket is lehet tenni. Ezeket helyettesitvén, a keresett hiba lesz:

$$\alpha - \alpha' = \left\{\frac{q}{CB} - \frac{p}{CA}\right\} \dots \text{δ}$$

* 143. §. Ha a tányér tengelye nem függélyes.

Gondoljunk a távcső lát- és forgástengelyei metszéspontjából, mely az álláspont felett függélyesen van beállitva, mint középpontból gömbfelületet leirva; húzzunk a középponton C keresztül (177. ábra) egy, a tányér síkjával párhuzamos, és egy vizszintes síkot, melyek a gömb felületét az AOB és DOE legnagyobb körökben metszik. Emeljünk fel a gömb középpontjából ezen síkokra merőlegeseket CG, CH, melyek a gömb felületét a G és H pontokban találják. Ezek az AOB és DOE körök sarkpontjai lesznek. Húzzunk továbbá a középpontból a tárgyak felé irányvonalakat CM, CN, melyek a gömb felületén az M, N pontokon mennek keresztül, és húzzunk CM, CN-en át az AB, DE síkokra merőleges síkokat, melyek az iránysíkokat ábrázolják, s a gömb felületét GMM', GNN', HMM', HNN' legnagyobb körökben, az AB, DE köröket pedig az M', N', M'', N'' pontokban metszik; akkor valósággal az $M'CN'$ szög méretik meg, melynek mértéke az AOB körön lévő $M'N' = \alpha$ ív, mig a megmérendő szögnek $M''CN''$ mértéke a DOE körön lévő $M''N'' = \alpha$ ív által ábrázoltatik. Ezen két ív közötti különbség tehát a keresett hiba.

Ennek meghatározása végett legyen a tányér hajlásszöge, melyet a két sarkpont közötti ívvel lehet mérni, $GH = \delta$, az MCM'' NCN'' magassági szögek h, h' a hasonfekvésű MCM', NCN' szögek k, k', végre a megmért és keresett $M'CN'$ és $M''CN''$ szögek α, α'; akkor a HMN és GMN gömbháromszögekből, melyekben a H és G-nél lévő gömbszögek α', α, a bezáró oldalak pedig a h, h', k, k', íveknek 90^0-ra eső pótlékaival egyenlők, az MN oldalra nézve két egyenlő kifejezést nyerünk, u. m.:

$$\sin h \sin h' + \cos h \cos h' \cos\alpha = \sin k \sin k' + \cos k \cos k' \cos\alpha'.$$

Feltévén, hogy δ csak egy igen kis szöget jelent, α, α', h, k, h', k' csak igen keveset fognak egymástól különbözni; ennélfogva lehet tenni $\alpha = \alpha' + \omega$, $k = h - x$, $k' = h' - y$, hol ω, x, y szintén csak igen kis szögeket jelentenek. Ezen értékeket a fentebbi egyenletben helyettesitvén, lesz:

$$\sin h \sin h' + \cos h \cos h' \cos(\alpha' + \omega)$$
$$= \sin(h - x) \sin(h' - y) + \cos(h - x) \cos(h' - y) \cos\alpha'$$

Ezen kifejezésben az összeg és különbségekre vonatkozó függvényeket szétbontván, s az igen kis szögek sinusai helyett az ívet, cosinusai helyett pedig 1-et tévén, lesz:

$$\sin h \sin h' + \cos h \cos h' (\cos\alpha - \omega \sin\alpha')$$
$$= (\sin h - x \cos h)(\sin h' - y \cos h')$$
$$+ (\cos h + x \sin h)(\cos h' + y \sin h') \cos\alpha'.$$

Ezen tagokat kifejtvén, és csak az x és y első hatványait tartván meg, rövid összehuzás után lesz:

$$\omega = \frac{tg h}{\sin\alpha'}(-x\cos\alpha' + y) + \frac{tg h'}{\sin\alpha'}(x - y\cos\alpha').$$

Az x és y meghatározására az MGH, és NGH $\triangle$-ből következő kifejezések szolgálnak:

$$\sin k = \cos\delta \sin h - \sin\delta \cos h \cos\beta,$$
$$\sin k' = \cos\delta \sin h' - \sin\delta \cos h' \cos(\beta + \alpha),$$

vagy elegendő pontossággal:

$$\sin k = \sin h - \delta \cos h \cos\beta,$$
$$\sin k' = \sin h' - \delta \cos h' \cos(\beta + \alpha),$$

és ha ezen kifejezesekben k, k' helyett a fentebb felvett értékek tétetnek, lesz:

$$\sin h - x \cos h = \sin h - \delta \cos h \cos\beta,$$
$$\sin h' - y \cos h' = \sin h' - \delta \cos h' \cos(\beta + \alpha),$$

tehát $x = \delta \cos\beta, \quad y = \delta \cos(\beta + \alpha).$

Ezeket a fentebbi egyenletben helyettesitvén, és α helyett α'-et tévén, lesz:

$$\omega = -\frac{\delta tg h}{\sin\alpha'}\left(\cos\beta \cos\alpha' - \cos(\beta + \alpha')\right)$$
$$-\frac{\delta tg h'}{\sin\alpha'}\left(\cos(\beta + \alpha')\cos\alpha' - \cos\beta\right)$$

Úgyde $\quad cos\beta\ cos\alpha' - cos(\beta + \alpha') = sin\beta\ sin\alpha'$,

$$cos(\beta + \alpha')\ cos\alpha' - cos\beta = -\ sin(\beta + \alpha')\ sin\alpha'.$$

Ezeket helyettesitvén, rövid összehúzás után lesz:

$$\omega = \alpha - \alpha' = \delta \left\{ tgh'\ sin(\beta + \alpha') - tgh\ sin\beta \right\} \ldots \odot$$

Ezen képlet azon feltétel alatt keletkezett, hogy mind a két tárgy vizszintes sík felett áll; de ha egyik alant volna, a megfelelő h-t ellenkező jellel kellene venni, s a tagok jelei egyenlőkké lennének. Ezen esetben a hiba — egyébaránt hasonló körülmények közt — nagyobb fog lenni, minthogy a tagok összeadatnak. Vegyük ezen legroszabb esetet, s legyen $h' = -h$ $=$ a lehető legnagyobb magassági szöggel, akkor a fentebbi kifejezés következő alakot ölt magára:

$$\alpha - \alpha' = -\ \delta tgh \left(sin(\beta + \alpha') + n\ sin\beta \right) = 2\ \delta tgh\ sin \left(\beta + \frac{\alpha'}{2} \right) cos\ \frac{\alpha'}{2}.$$

Ezen kifejezés értéke legnagyobbá válik, ha $sin \left(\beta + \frac{\alpha'}{2} \right) = \pm 1$,

azaz: $\beta + \frac{\alpha'}{2} = \begin{cases} 90^0 \\ 270^0 \end{cases}$, mely esetben a két kör metszéspontja O a megmért ív közepére esik. Ezen mértékek közt ismét van egy legislegnagyobb, melynek $cos\ \frac{\alpha'}{2} = \pm\ 1$, azaz: $\frac{\alpha'}{2} = \begin{cases} 0^0 \\ 180^0 \end{cases}$ felel meg.

A legislegnagyobb hiba tehát:

$$\alpha - \alpha' = \pm\ 2\ \delta tgh \ldots ☽$$

Ellenben a hiba elenyészik, akármi legyen a szög értéke, ha $sin \left(\beta + \frac{\alpha'}{2} \right) = 0$, vagy $\beta + \frac{\alpha'}{2} = \begin{cases} 0^0 \\ 180^0 \end{cases}$, mely esetben a megmért ív közepe a limbus legmagasabb, vagy legalacsonyabb pontjába esik.

Vegyük a legroszabb esetet szemügyre, akkor úgy találjuk, hogy $h = 5^0$-nak $\alpha - \alpha' = 0{\cdot}17\delta$ felel meg.

» $= 10$	»	$= 0{\cdot}35\delta$	»	»
» $= 20$	»	$= 0{\cdot}73\delta$	»	»
» $= 30$	»	$= 1{\cdot}15\delta$	»	»
» $= 40$	»	$= 1{\cdot}68\delta$	»	»

Ezen tábláckából látni lehet, hogy a szintezési hiba lapos vidéken, hol nagy magassági szögek elő nem fordulnak, igen csekély befolyással bir a szögmérésre; ellenben az hegyes vidéken, hol

30—40° hajlásszögek igen gyakoriak, a szögben olyan nagy, sőt nagyobb hibát is okozhat, mint a minő a szintező eltérése δ, s ezen hibát csak a szintező pontos és gyakori beállitása által lehet elkerülni.

* 144. §. Ha a tányér a maga tengelyére nem merőleges.

Gondoljunk ismét a távcső lát- és forgástengelyei metszéspontjából mint középpontból egy gömbfelületet. Húzzunk ennek középpontjából C (178. ábra) egy vizszintes és egy, a tányér síkjával párhuzamos síkot, melyek a gömb felületét a DOE és AOB legnagyobb körökben metszik. Legyen ezen síkok közötti hajlásszög $BOE = \delta$. Gondoljuk továbbá a tányér tengelyét CG függélyes állásban, húzzuk a CM, CN irányvonalakat, s ezeken keresztül függélyes síkokat, melyek a gömb felületét az $MM'M''$ és $NN'N''$ legnagyobb körökben metszik, és az AOB és DOE körökön az $M'N'$, $M''N''$ íveket metszik el, melyek közül az első a megmért α', az utolsó pedig a megmérendő α szöget ábrázolja. Kérdés tehát, milyen nagy a kettő közti különbség?

Ennek meghatározása végett vegyük fel az $N'ON''$ derék gömb-$\triangle$-et, melyben az O szög $= \delta$; ebből lesz:

$$tg(ON'') = cos\delta . tg(ON').$$

Ezen kifejezésben δ mindig csak kis szöget jelent, tehát elég közelitéssel lehet tenni:

$$tg(ON'') = \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right) tg(ON'), \quad \text{vagy}$$

$$tg(ON'') - tg(ON') = -\frac{\delta^2}{2} tg(ON').$$

Úgyde $$tg(ON'') - tg(ON') = \frac{sin(ON'' - ON')}{cos(ON'')\, cos(ON')},$$

mely kifejezésben a sinust az ívvel fel is lehet cserélni, valamint a nevezőben ON'' helyett ON'-et is lehet tenni. Tehát:

$$ON'' - ON' = -\frac{\delta^2}{2} sin(ON')\ cos(ON'), \quad \text{vagy}$$

$$ON'' = ON' - \frac{\delta^2}{4} sin(2 . ON').$$

Hasonlóképen lesz az $M'OM''$ derék gömb-$\triangle$-ból:

$$OM'' = OM' - \frac{\delta^2}{4} sin(2 . OM').$$

Ezen egyenleteket egymásból levonván, lesz:

$$M''N'' = M'N' - \frac{\delta^2}{4}\left(sin(2.OM') - sin(2.ON')\right).$$

$$= M'N' - \frac{\delta^2}{4} cos(OM' + ON') \, sin(OM' - ON').$$

Ugyde a fentebbek szerint:

$M''N'' = \alpha$, $M'N' = \alpha'$, és ha a limbus legmagasabb pontjának B az M'-tőli távját β-nak nevezzük, figyelembe vévén azt, hogy $BO = 90^0$, lesz: $OM' = 90^0 - B$, $ON' = 90^0 - (\alpha + \beta)$, s ezen értékeket helyettesitvén, rövid összehúzás után lesz:

$$\alpha - \alpha' = \frac{\delta^2}{2} cos(2\beta + \alpha') \, sin\alpha' \ldots \odot$$

Ezen hiba az előbbi §-ban meghatározotthoz képest igen csekély, minthogy ez a hajlásszög négyzetétől függ, mig a szintezési hiba annak első hatványával van viszonyban.

A hiba legnagyobbá lesz, ha $cos(2\beta + \alpha') = \pm 1$, azaz $2\beta + \alpha' = \begin{cases} 0 \\ 180 \end{cases}$, honnan következik $\beta = -\frac{\alpha'}{2}$, vagy $\beta = 90 - \frac{\alpha'}{2}$. Mértanilag kifejezve a hiba legnagyobb, ha a megmért ív közepe a limbusnak B vagy O pontjába esik, hol t. i. az átmérő hajlásszöge legnagyobb, vagy 0. Ha még $sin\,\alpha' = \pm 1$, vagy $\alpha' = \begin{cases} 90^0 \\ 270^0 \end{cases}$, akkor a hiba legeslegnagyobb lesz, t. i.

$$\alpha - \alpha' = \frac{\delta^2}{2} \ldots ☽$$

Legyen p. o. $\delta = arc\ 10' = 0{\cdot}0029$, akkor $\alpha - \alpha'$ még kisebb 1"-nél, azért nincsen a műszeren semmi intézkedés téve ezen hiba eltávolitására.

A hiba egészen elenyészik, ha $cos(2\beta + \alpha') = 0$, vagyis $2\beta + \alpha' = \begin{cases} 90^0 \\ 270^0 \end{cases}$, honnan következik $\beta = 45^0 - \frac{\alpha'}{2}$, és $\beta = 135^0 - \frac{\alpha'}{2}$. Ezen esetekben a megmért ív közepe az O és B pontok közt középre esik.

*145. §. Ha a távcső forgástengelye a tányér tengelyére nem merőleges.

Gondoljunk ismét a nevezett tengelyek metszéspontjából C (179. ábra) egy gömbfelületet, húzzunk annak középpontján keresztül egy vizszintes síkot, melyet a tányér síkjával párhuzamosnak gondolunk. Ezen sík a gömbfelületet az AB legnagyobb körben metszi. Legyenek továbbá CM, CN a tárgyak felé irányzott vonalak, CMM'' és CNN'' függélyes síkok, melyek a gömböt az $MM''=h$, és $NN''=h'$ magassági ívekben metszik, ellenben CMM' és CNN' ferde iránysíkok, melyek a függélyes $CM'G$, és $CN'G$ síkokkal δ szöget képeznek; akkor a megmért szög $=\alpha'=M'CN'$, a megmérendő pedig $=\alpha=M''CN''$ által ábrázoltatik, s a kettő közti különbség keresendő. Úgyde könynyen érthetőleg

$$\alpha+M'M''=\alpha'+N'N'', \text{ vagy } \alpha-\alpha'=N'N''-M'M''.$$

Az $M'M''$ és $N'N''$ ívek meghatározására az $MM'M''$ és $NN'N''$ derék gömb-$\triangle$-ek szolgálnak, melyekben egyik befogó h, h', s az átellenben fekvő hegyes szög $90^0-\delta$ ösmeretesek. Tehát

$$sin(M'M'')=tg\delta.\ tgh,$$
$$sin(N'N'')=tg\delta.\ tgh',$$

mely egyenletekben elegendő közelítéssel $sin(M'M'')$, $sin(N'N'')$ és $tg\delta$ helyett az íveket is lehet tenni. Ezeket helyettesítvén, lesz:

$$\alpha-\alpha'=\delta(tgh'-tgh)\ldots\odot$$

A hiba ezen képlet szerint is legnagyobb lesz, ha h és h' ellenkező jelekkel birnak. Legyen tehát $h'=-h=$ a legnagyobb lehető magassági szöggel, akkor a hiba lesz:

$$\alpha-\alpha'=-2\delta tgh,$$

mely kifejezés a szintezési hiba legnagyobb értékével azonos. Ha pedig $h'=h$, akkor a hiba egészen elenyészik.

Megemlítendő, hogy ezen hiba ellenkezővé válik, ha δ ellenkező értéket nyer; δ pedig ellenkező értéket veszen fel, ha a távcsőt áthajtjuk, és a tányért tengelye körül 180^0-al fordítjuk. Ugyanis ezen műtétel által az eszközöltetik, hogy ha a távcső forgástengelye előbb p. o. balra hajolt, most ugyanazon szög alatt jobbra fog hajolni. Ha tehát a tányér ezen fekvésében a szög újra megméretik, s a leolvasott érték α''-nak neveztetik, lesz:

$$\alpha-\alpha''=-\delta(tgh'-tgh)\ldots\odot'$$

s az $\odot$ és $\odot'$ egyenleteket összeadván, lesz:

$$2\alpha-\alpha'-\alpha''=0, \quad \text{vagy} \quad \alpha=\frac{\alpha'+\alpha''}{2}, \text{ azaz:}$$

a valóságos szög értéke egyenlő a tányér két különböző fekvésében megmért szögek számtani közepével. Ezen eredmény tehát a szóban lévő hibától ment.

*146. §. A csapok különböző vastagsága.

Hasonló befolyást gyakorol a szögmérésre azon hiba is, midőn a távcső forgástengelyének csapjai nem egyenlő átmérőjűek. Ezen esetben ugyanis, ha a szintező mind a két fekvésben ugyanazon vonások közt jön is nyugvásba, a forgástengelye nem vizszintes, hanem bizonyos hajlásszöggel bir, melynek nagyságát következőképen lehet meghatározni. Legyen a 180. ábrában AB a szintező mindig vizszintes érintője, CD a forgástengely, a, b a szintező lábak hosszai, r, r' a csapok sugárai, φ, φ' a lábak kimetszéseit meghatározó szögek, δ a tengely hajlásszöge, és d annak hossza, akkor

$$tg\delta = \frac{b-a}{d} + \frac{1}{d}\left(\frac{r'}{cos\varphi'} - \frac{r}{cos\varphi}\right),$$

és ha a szintező megfordíttatván, a buborék ugyanazon helyen jön nyugvásba, akkor a, b, φ, φ' helyet cserélnek, s lesz:

$$tg\delta = \frac{a-b}{d} + \frac{1}{d}\left(\frac{r'}{cos\varphi} - \frac{r}{cos\varphi'}\right).$$

Ezen egyenleteket összeadván, lesz:

$$tg\delta = \frac{r'-r}{2d}\left(\frac{1}{cos\varphi'} + \frac{1}{cos\varphi}\right), \text{ közel } \delta = \frac{r'-r}{d cos\varphi},$$

minthogy φ, és φ' egymástól igen keveset különböznek. Legyen p. o. $r'-r = 0''{\cdot}0001$, $d = 10''$, $\varphi = 30^0$, akkor $\delta = 0{\cdot}00001$, közel $= 3''$. Ezen értéket az előbbi §. ⊙ egyenletében δ helyett kellene tenni, hogy e hibának a szögmérésre való befolyása megállapíttassék.

*147. §. Ha az Alhidade forgástengelye a tányérával nem párhuzamos.

Hasonló természetű azon hiba is, mely az Alhidade és a tányér forgástengelyei közt létező valamely hajlásszög által okoztatik. Miután t. i. a kiigazítás által a távcső tengelye tulajdonképen az Alhidade tengelyére tétetett merőlegessé, ha ez a tányér tengelyével nem párhuzamos, akkor az sem lesz erre merőleges. De minthogy a tányérnak tengelye körüli forgatása által azon sík is forgásba jön, melyben az Alhidade tengelye fekszik, a távcső forgástengelye mindenféle kisebb-nagyobb igen- és nemleges hajlásszöget fog nyerni. Ha tehát a szög a tengely különböző fekvésénél megméretik, a belőlök eredő számtani közép annál közelébb fog esni a valódi értékhez, mennél többféle fekvésben történt a mérés; minthogy akkor reményleni lehet, hogy a hibák egyszer igen-, másszor nemleges értelemben követtetvén el, egymást elrontják. Innen lehet egyszersmind megitélni, valjon a tányér, vagy az Alhidade tengelyét kell-e a szintezővel függélyessé tenni? Mindenesetre a tányérét; mert ha az Alhidade tengelyét tennők függélyessé, akkor a tányéré azon szög alatt állana ferdén, mely a két tengely közt foglaltatik; s ha azután a tányér tengelye körül fordíttatnék, az Alhidade függélyes állását elvesztené, és kétszer olyan hajlásszöget is nyerhetne, mint a párhuzamosság elleni hiba. Ellenben nemleges hajlásszögek elő nem jöhetnének, tehát a számtani közép sem lehetne olyan pontos, mint az ellenkező esetben; hanem legkedvezőbb körülmények közt ki lenne téve azon hibának, mely a tányér tengelyének ferde állásából következik.

* 148. §. Ha a távcső láttengelye a távcső forgástengelyére nem merőleges.

Gondoljunk a távcső lát- és forgástengelye metszéspontjából C (181. ábra) egy gömbfelületet, húzzunk ennek középpontján keresztül egy vizszintes síkot, mely a tányérral párhuzamos. Legyen CO ezen síkban a távcső forgástengelye, CM egy irányvonal, mely a forgástengelylyel $90^0 - \delta$ szöget zár be. Ezen vonal CO körül forgattatván, egy kúpfelületet ír le, mely a tányér síkját CM' vonalban metszi; e szerint úgy lehet a dolgot tekinteni, mintha a távcső a vizszintes síknak M' pontjára volna irányozva, míg a CM-en keresztül húzott függélyes sík tulajdonképen a M'' ponton megyen keresztül. Legyenek végre CO', CN, CN', CN'' a második tárgyra vonatkozó hasonfekvésű vonalak; akkor a megmért szöget α' az $M'CN'$, a megmérendőt α pedig az $M''CN''$ ábrázolandják, s könnyen érthetőleg lesz:

$$\alpha + M'M'' = \alpha' + N'N'', \text{ vagy } \alpha - \alpha' = N'N'' - M'M''.$$

Az $M'M''$ és $N'N''$ meghatározása végett ezen kifejezések állanak:

$$M'M'' = OM' - OM'',$$
$$N'N'' = ON' - ON'',$$

hol $OM' = O'N' = OM = O'N = 90^0 - \delta$, OM'' és ON'' pedig az OMM'' és ONN'' derék gömb $\triangle$-ekből találtatnak, t. i.

$$cos(OM'') = \frac{sin\delta}{cosh},$$

ebből levonván $\quad cos(OM') = sin\delta,$

lesz: $$cos(OM'') - cos(OM') = \frac{sin\delta}{cosh} - sin\delta,$$

vagy $$2sin\frac{OM' - OM''}{2}\, sin\frac{OM' - OM''}{2} = \frac{sin\delta}{cosh} - sin\delta,$$

és elég közelítéssel:

$$M'M'' = \frac{\delta}{cosh} - \delta,$$

hasonlóképen:

$$N'N'' = \frac{\delta}{cosh'} - \delta,$$

tehát $$\alpha - \alpha' = \delta\left\{\frac{1}{cosh'} - \frac{1}{cosh}\right\} \ldots \odot$$

A hiba legnagyobbá lesz, ha vagy h vagy $h' = 0$, azaz:

$$\alpha - \alpha' = \delta\left(1 - \frac{1}{cosh}\right) \cdots ☽$$

Ezen képlet szerint ha $h = 10^0$, akkor $\alpha - \alpha' = 0{\cdot}02\delta$,

$h = 20$ » » $= 0{\cdot}06\delta$,

$h = 30$ » » $= 0{\cdot}16\delta$,

honnan látszik, hogy ezen hiba a szintezési hibánál sokkal kisebb. Ha $h = h'$, akkor a hiba egészen elenyészik.

Ha δ ellenkező értéket nyer, ezen hiba is ellenkezővé válik. Ugyde a távcső áthajtása, és a tányérnak 180^0-ali fordítása által δ ellenkező oldalra esik; ha tehát a szög a tányér ezen fekvésénél is megméretik, és az eredmény α''-nek neveztetik, lesz:

$$\alpha - \alpha'' = -\delta\left(\frac{1}{cosh'} - \frac{1}{cosh}\right),$$

s ha a két hasonnemű egyenlet összeadatik, lesz:

$$2\alpha - \alpha' - \alpha'' = o, \quad \text{vagy} \quad \alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2}.$$

A két eredmény közötti számtani közép tehát ezen hibától is ment.

* 149. §. Ha az iránysík nem a tányér tengelyén megyen keresztül.

Legyen C (182. ábra) az álláspont, mely felett a tányér tengelye függélyesen van beállítva, A, B a tárgyak, melyek felé a távcső van irányozva, az iránysíknak a C-tőli távja $= \delta$, akkor az $AC'B = \alpha'$ szög méretik meg, mig a megmérendő szög $\alpha = ACB$, tehát a kettő közötti különbség keresendő. Ugyde az AOC' és BOC $\triangle$-ekből lesz:

$$\alpha + B = \alpha' + A,$$

az A és B meghatározására pedig lesznek:

$$\sin A = \frac{\delta}{CA},$$

$$\sin B = \frac{\delta}{CB},$$

hol a sinusok helyett az ívet is lehet tenni. Ennélfogva

$$\alpha - \alpha' = \delta \left\{ \frac{1}{AC} - \frac{1}{BC} \right\} \ldots \odot$$

A hiba legnagyobbá lesz, ha vagy AC vagy $BC = \infty$, t. i.

$$\alpha - \alpha' = \frac{\delta}{AC}.$$

Ellenben ha $AC = BC$, a hiba egészen elenyészik. A hiba ellenkező δ-val ellenkező értéket nyer; a távcső áthajtása, s a tányérnak 180^0-al való fordítása által pedig δ ellenkező oldalra esik; tehát ha a szög a tányér mindkét fekvésénél megméretik, a számtani közép ezen hibától is ment fog lenni.

* 150. §. Az Alhidade tengelyének külpontossága.

1) Legyen C (183. ábra) a limbus középpontja, C' az Alhidade forgástengelye, A, B a beirányzandó tárgyak, $C'A$ és $C'B$ az irányvonalak, melyek közt a megmérendő szög α foglaltatik, m, n a mutatók állásai: akkor az mn ív nem az α, hanem az $mCn = \alpha'$ mértéke fog lenni, s a két szög közötti különbség keresendő. Nevezzük a $C'mC$ és $C'nC$ szögeket u, u'-nek, akkor lesz:

$$\alpha + u = \alpha' + u', \quad \text{azaz } \alpha - \alpha' = u' - u.$$

Az u és u' szögek meghatározása végett legyen $CC' = d$, $C'Cm \measuredangle = \omega$, akkor:

$$\sin u = \frac{d \sin \omega}{C'm},$$

$$sinu' = \frac{d\,sin\,(\omega + \alpha')}{C'n},$$

mely kifejezésekben *sinu, sinu'* helyett az íveket, $C'm$, $C'n$ helyett pedig a körsugárt $= r$ lehet tenni. Tehát

$$\alpha - \alpha' = \frac{d}{r}\left(sin\,(\omega + \alpha') - sin\omega\right), \quad \text{vagy}$$

$$\alpha - \alpha' = \frac{2d}{r}\,cos\left(\omega + \frac{\alpha'}{2}\right) sin\,\frac{\alpha'}{2} \ldots \odot$$

A hiba legnagyobbá lesz, ha $cos\left(\omega + \frac{\alpha'}{2}\right) = \pm 1$, vagyis $\omega + \frac{\alpha'}{2} = \begin{cases} 0 \\ 180^0 \end{cases}$, honnan lesz: $\omega = -\frac{\alpha'}{2}$ vagy $\omega = 180^0 - \frac{\alpha'}{2}$. Mértanilag kifejezve a hiba legnagyobb, ha a tengelyeket összekötő vonal a szög közepén megyen keresztül. Ha még $sin\frac{\alpha'}{2} = 1$, akkor a hiba legeslegnagyobbá lesz, t. i.

$$\alpha - \alpha' = \frac{2d}{r}.$$

Ha p. o. $d = 0 \cdot'''0001$, $r = 5''$, akkor $\alpha - \alpha' = \frac{0 \cdot 0002}{5} = 0 \cdot 00004$, közel $= 8''$. Ezen hiba tehát igen veszélyes, mivel azt alig lehet elkerülni; s ha a műszer eleinte hibátlan volt is, a legkisebb egyoldalú kopás a tengelyen, vagy egy porszemecske, mely a tengely és a persely közé esik, elegendő ennek létrehozására. Valóban a legjobb szerkezetű theodolitokon is 40—50''-re menő külpontossági hiba nem ritkán található.

2) A fentebbi képletből látható, hogy a hiba az ω értékével együtt változik. Ha tehát a tányér tengelye körül fordíttatik, az ω, 0^0 és 360^0 közt minden szögeket átfutván, a hiba is a legkisebb és legnagyobb közt mind $+$ mind $-$ jellel minden lehető értékeket fel fog venni. Ha tehát a szög a tányérnak különböző fekvésénél méretik meg, a számtani középből a hiba nagy részint kiesik.

3) Még tökéletesebben lehet a külpontossági hibát a szögmérésre nézve ártalmatlanná tenni, ha az Alhidadén több mutató van egyenlő távban egymástól elhelyezve, s ezeknek állásai minden irányvonalnál leolvastatnak. Nevezetesen ha csak két mutató van az Alhidadén, a C' forgásponton keresztülmenő átló végein,

akkor az mm' és nn' vonalak húrokat képezvén, a köztök bezárt szög α az elmetszett ívek számtani közepe által méretik.

Ha 3 egymástól 120°-al különböző mutató van az Alhidadén, akkor az azoknál történt leolvasásokból lesz sorjában:

$$\alpha = \alpha' = \frac{2d}{r} cos\left(\omega + \frac{\alpha'}{2}\right) sin \frac{\alpha'}{2},$$

$$\alpha - \alpha'' = \frac{2d}{r} cos\left(\omega + \frac{\alpha''}{2} + 120^0\right) sin \frac{\alpha''}{2},$$

$$\alpha - \alpha''' = \frac{2d}{r} cos\left(\omega + \frac{\alpha'''}{2} + 240^0\right) sin \frac{\alpha'''}{2}.$$

Ezen egyenletek jobb oldalain az α', α'', α''' szögeket egyenlőknek lehet venni; mivel a köztök lévő csekély különbség a $\frac{d}{r}$ igen kis szorzóval kapcsolatban felsőbb fokú kis mennyiséget ád, s ezért elhanyagolható. Tehát az egyenleteket összeadván lesz:

$$3\alpha - \alpha' - \alpha'' - \alpha''' = \frac{2d}{r}\left\{\begin{matrix} cos\left(\omega + \frac{\alpha}{2}\right) + cos\left(\omega + \frac{\alpha}{2} + 120\right) \\ + cos\left(\omega + \frac{\alpha}{2} + 240\right) \end{matrix}\right\} sin \frac{\alpha}{2}.$$

Ugyde $$cos\left(\omega + \frac{\alpha}{2}\right) + cos\left(\omega + \frac{\alpha}{2} + 120^0\right) + cos\left(\omega + \frac{\alpha}{2} + 240^0\right)$$

$$= cos\left(\omega + \frac{\alpha}{2}\right) + 2\, cos\left(\omega + \frac{\alpha}{2} + 180^0\right) cos 60^0$$

$$= cos\left(\omega + \frac{\alpha}{2}\right) - cos\left(\omega + \frac{\alpha}{2}\right) = 0,$$

tehát $3\alpha - \alpha' - \alpha'' - \alpha''' = o$, vagy $\alpha = \frac{\alpha' + \alpha'' + \alpha'''}{3}$.

A keresett szög tehát a mutatókon leolvasott értékek számtani közepével egyenlő.

* 151. §. Még némely hiba kútfők.

1) Az irányzási hiba. A Theodolit-távcsők mindig szintelenek, s legtökéletesebb szerkezetűek lévén, az irány felfogásában legfeljebb $^1/_4$—$^1/_2$" bizonytalanyságot hagynak. Ez tehát azon határ, melyen felül a szögmérés tökélyét emelni nem lehet.

2) A körbeosztási hiba. A körbeosztás mai időben tökéletes osztó gépek által eszközöltetvén, minden jóhirű gépész kezéből kikerült Theodolit osztályvonalai $^1/_{10}$—$^1/_4$"-ig igazi helyükön állanak. Ezért nem is ereszkedtünk a beosztás hibáinak megvizsgálásába, mivel ez igen fáradságos munkát s költséges eszközöket igényel. Az osztályvonalak vastagsága 10—15" teszen, tehát 40-szer nagyobb, mint a beosztási hiba.

3) A leolvasási hiba. A 10" átméröjű Theodolitoknál a legkisebb osztályrész 10', mely Nonius segitségével még 60 egyenlő részre osztatik. Ennélfogva a legkisebb leolvasható szög = 10", legfeljebb ennek fele = 5". Egy ilyen 10" értékű ívnek hossza = 5 $\times$ *arc* 10" = 0"·00024, tehát még szabadszemmel nem látható. Ezért vannak a Noniusok felett 6, 8-szor nagyitó üvegek helyezve. Górcsövek és paránymérőcsavarok által egyes m. perczeket is le lehet olvasni.

4) Az Alhidade csapjában a surlódás által okozott csavarodás. A tapasztalás tanítja, hogy ha az irányszál valamely tisztán látszó pontra a paránycsavar által beállíttatik, a mutató egy kissé különböző állást mutat, a szerint, a mint az Alhidade balról jobbra, vagy jobbról balra fordíttatik vala. Ennek oka abban rejlik, hogy a tengely elébb egy kis csavarodást szenved, mielőtt a surlódás annak felületén legyőzetnék, s ezen csavarodás azon irányban történik, melyben a forgás történt. Az innen származó csekély hibát úgy lehet elhárítni, hogy a szög egyszer balról jobbra, máskor az ellenkező irányban méretik meg, s a két eredmény közt a számtani közép vétetik.

5) Az állvány csavarodásából eredő hiba. A tapasztalás szintén tanítja, hogy a Theodolit állványa a nap sugárainak egyoldalú hatása következtében nem egészen mozdulatlan, hanem a vizszintes síkban egy kis csavarodást szenved, s ezt a rajta álló tányérral is közli. Ezen csavarodás rendes körülmények közt az idővel áll egyenes viszonyban. Ha tehát az egyes beállítások közt egyenlő időszakok töltek el, a csavarodás értéke számtani haladványt képez. Ezen hibát ugy lehet a szögmérésből kiküszöbölni, hogy a mérés egyszer balról jobbra, másszor jobbról balra körülbelől egyenlő időközben vitetik véghez, s a megfelelő irányokból a számtani közép vétetik. Ugyanis legyenek a leolvasások sorjában *A*, *B*, *B'*, *A'*, a csavarodás értéke két

szomszéd leolvasás közt $= \delta$, tehát a kiigazított leolvasások A, $B + \delta$, $B' + 2\delta$, $A' + 3\delta$, akkor a számtani középek következő számokat adnak:

$$\frac{A + A'}{2}, \frac{B + B'}{2}, \text{ és } \frac{A + A' + 3\delta}{2}, \frac{B + B' + 3\delta}{2};$$

melyekből az iránykülönbségekre nézve egyenlő értékek következnek, u. m.

$$\frac{A + A'}{2} - \frac{B + B'}{2}.$$

152. §. A Theodolittali szögmérés. Egyszerű szögmérés.

A Theodolittali szögmérésnek két módja van, u. m. egyszerű és szorzott.

1) Az egyszerű szögmérés igy megyen véghez. Miután a Theodolit az álláspontban felállíttatott, s a tányér a szoritó csavar által a lábakhoz kapcsoltatott, az Alhidade megnyittatik, és fordíttatván tengelye körül, a távcső az első pontra irányoztatik. Az irányzás könnyítése, nevezetesen a tárgynak a távcsőve könnyebben felkereshetése végett a távcső két végén iránypeczl kecskék — nézgék — vannak felállítva, melyeknek hegyei egymással összeköttetvén, a távcső láttengelyével körülbelől párhuzamos irányvonalat adnak. Eleinte tehát ezen vonalat kell szabadszemmel a tárgyra irányozni, azután a távcsőn keresztül nézvén, a tárgy képe a távcső látterében fog látszodni, s ha ez még távol állana az irányszáltól, az Alhidadét lassan kell fordítni, mig azok egymáshoz közel jőnek. Ekkor az Alhidadét a tányérhoz szoritván, a paránycsavart fordítni kell, mig azok tökéletesen egymásra esnek, s a mutatók állását sorjában le kell olvasni. Ezután az Alhidadét ismét megnyitván, s tengelye körül fordítván a távcsőt a második pontra kell irányozni, s a mutatókat leolvasni, s i. t. egész az utolsó pontig. Ez megtörténvén a távcsőt át kell hajtani, s az Alhidadét tengelye körül fordítni, mig a távcső tökéletesen az utolsó pontra mutat, s a mutatók állását sorjában le kell olvasni. Ezután az Alhidadét megnyitván az utolsóelőtti pontra kell irányozni, s i. t. a mérést visszafelé mindaddig folytatni, mig a legelső ponthoz vissza nem érünk. A megfelelő leolvasások közt azután a számtani középet kell venni.

2) Meg kell említni, hogy a teljes leolvasás fokok perczek és másodperczekben csak egy mutatónál szükséges, a többinél csak a perczeket és másodperczeket kell felírni. Mert a fokok minden következő mutatónál egy bizonyos állandó mennyiséggel — p. o. 2 mutatónál 180°, 3-nál 120°, 4-nél 90°al nagyobbodván, ezen állandók az iránykülönbségekből egészen kiesnek. Tegyük fel p. o., hogy két iránynak következő leolvasások feleltek meg:

	I. Nonius	II.	III.	IV.
A	36° 47′ 40″	126° 47′ 20″	216° 47′ 30″	306° 47′ 50″
B	87° 32′ 10″	177° 32′ 0″	267° 32′ 20″	357° 32′ 0″
Különbség	50° 44′ 30″	50° 44′ 40″	50° 44′ 50″	50° 44′ 10″

Ezekből a számtani közép lesz = 50° 44′ 32·″5.

Egyszerűbb következő irásmód:

	I. Nonius	II.	III.	IV.	Számtani közép
A	36° 47′ 40″	47′ 20″	47′ 30″	47′ 50″	36° 47′ 35″
B	87° 32′ 10″	32′ 0″	32′ 20″	32′ 0″	87° 32′ 7″5
				Különbség	50° 44′ 32″5

3) Ha valamely beirányzandó tárgy igen széles, ugy hogy azt az irányszállal felezni biztosan nem lehet, akkor első izben midőn t. i. az Alhidade balról jobbra fordíttatik, a tárgynak bal oldalát, másod izben pedig, midőn a mérés jobbról bal felé történik, annak jobb oldalát kell beirányozni; a két mérés közti számtani közép azután a tárgynak közepére fog vonatkozni.

4) Ha a szögmérés igen fontos, akkor az egymásután többször ismételtetik. De minden uj mérés előtt meg kell a limbust nyitni, s 30—40°-al tengelye körül fordítni *), s ismét megszorítni. Ekképen a limbus a megmérendő szöghöz mindig más-más fekvésbe jővén, a kiigazitási hibák befolyása csökkenni fog; különösen pedig a mutatók a limbusnak más-más helyeire esvén, azon elfogultságnak eleje vétetik, melynélfogva hajlandók vagyunk a beosztásnak ugyanazon helyén mindig ugyanazon számokat olvasni le.

---

*) Az egyszerű Theodolit tányérját forgatni nem lehet, hanem az egész műszert lábastól fel kell emelni, és ugy fordítni az állványon.

153. §. Az egyszerű szögmérés schemája és kiszámitása.

Legyen *O* az álláspont, körülötte az *A*, *B*, *C*, *D* tárgyak, melyek között a szögeket kell megmérni, akkor az *O* pontban véghezvitt mérés következőképen iratik a naplóba:

O álláspont.

Tárgyak nevei.	I. Nonius	II.	III.	IV.	Közép	Jegyz.
A	36° 42′ 10″ 42′ 0″	42′ 20″ 42′ 15″	42′ 30″ 42′ 30″	42′ 25″ 42′ 20″	36° 42′ 18″·7	
B	98° 35′ 20″ 35′ 15″	35′ 25″ 35′ 20″	35′ 25″ 35′ 25″	35′ 20″ 35′ 15″	98° 35′ 20″·6	
C	145° 46′ 30″ 48′ 45″	46′ 40″ 48′ 40″	46′ 25″ 48′ 40″	46′ 20″ 48′ 30″	145° 47′ 33″·7	
D	233° 54′ 20″ 54′ 20″	54′ 15″ 54′ 10″	54′ 0″ 54′ 5″	54′ 5″ 54′ 10″	233° 54′ 10″·6	

Ezen schemában minden tárgy két sorhoz tartozik, melyek közül a felső a balról jobbra, az alsó pedig a jobbról balfelé történt mérés eredményét jelenti. A számtani közép rovatban felírt számok a zárjegyben bezárt leolvasások számtani közepét szolgáltatják. A *C* pontnál egyszer a bal, másszor a jobb oldal van beirányozva, mivel a leolvasások két percznél nagyobb különbséget mutatnak, holott a többinél a különbség 5″-et alig halad meg.

Az egyszerű szögmérés csak ez egyes irányoknak megfelelő leolvasásokat szolgáltatja, melyekből az iránykülönbségeket kivonás által lehet nyerni. Igy p. o.:

AOB szög = 98° 35′ 20″·6 — 36° 42′ 18″·7 = 61° 53′ 1″·9
BOC » = 145° 47′ 33″·7 — 98° 35′ 20″·6 = 47° 12′ 13″·1 stb.

154. §. Szorzott mérés.

1) A mult században a körbeosztás oly tökéletlen lévén, hogy az egyes vonások fekvésében 2—4′ hiba is találtatott, — habár az irányzás és leolvasás csekélyebb hibának voltak is kitéve, — ezért az egyszerű szögmérés nem adhatott kielégitő eredményt, minthogy a mérték, melylyel a megmérendő szög összehasonlíttatott, hibás volt. Mai időben a 8—10″ átmérőjű Theodolit beosztására nézve ugyan nyugodtak lehetünk, de a

Nonius általi leolvasásban még mindig 10"-át hibázhatván, a mérés eredménye kedvezőtlen körülmények közt 20"-val is hibás lehet. Ezen hibák befolyásának megsemmisitése végett talált fel Mayer Tóbiás göttingai csillagász egy nevezetes szögmérési módot, melynek alapelve abban áll, hogy a megmérendő szög a limbusra egymás mellé többször feltétetik, s ezen többszörös szög méretik meg, a mennyiben a limbuson megfelelő ívnek kezdő és végpontjai leolvastatnak. Ha tehát egy ilyen többszörös szögben ugyanazon hiba van is, mint minden közvetlen megmért szögben, de az egyszeres szögben a hibának csak annyadrésze lesz jelen, a hányszor az egyszeres szög a limbusra feltétetett. Ha p. o. valamely szög 10-szer szoroztatott, s a leolvasott szög 20"-val hibás, akkor az egyes szögre csak $^{20}/_{10}$" = 2" esik. Sőt egy kis figyelmet fordítván a műtételre, a szöget olyan kis körrel, melyen csak 10"-et lehet leolvasni, egész $^{1}/_{2}$—$^{1}/_{4}$" pontossággal meg lehet határozni. Ezen mérési mód azon okból, hogy a megmérendő szögnek többszöröse méretik meg, szorzott mérésnek neveztetik, s következőképen vitetik véghez.

2) Legyen *ACB* a megmérendő szög, *A* a bal, *B* a jobb kéz felé eső tárgy, *C* a szög csúcsa. Állitsuk fel a műszert a szög csúcsa felett annak rendje szerint, kapcsoljuk az Alhidadét a tányérhoz, s olvassuk le a Noniusokat. Ezután fordítsuk a tányért tengelye körül elébb durván, később a *g* szoritó csavart meghúzván, a *h* paránycsavar által finomul, mig a függélyes irányszál tökéletesen az *A* tárgyat metszi; nyissuk meg az Alhidadét, forditsuk tengelye körül elébb durván, később — a *g'* szorító csavart meghuzván, — a *h'* paránycsavar által finomul, mig az irányszál a *B* tárgyat metszi. Ekképen a mutató a limbuson egy olyan ívet futott át, mely a megmérendő szögnek mértéke; de a mutató állása most nem olvastatik le, hanem a szögfelrakás ismételtetik. Tehát a tányért megnyitván, visszafelé forditjuk, mig a távcső ismét az *A* pontra mutat s a *g* csavart meghuzván, a *h* paránycsavar által tökéletesen a tárgyra irányozzuk; ezután az Alhidadét megnyitván, forditjuk tengelye körül, mig a távcső a *B* pontra néz, s a *g'* csavart meghuzván, a *h'* paránycsavarral a tárgyra irányozzuk. Ezáltal a mutató ismét egy oly ívet futott át, mely a megmérendő szögnek mértéke; ennélfogva a mutató

a műtétel elejétől fogva a kettős ívet futotta s i. t. Ha a szög eléggé szoroztatott, utoljára a mutatókat ismét leolvassuk. Tegyük fel most, hogy az első leolvasás α-t, a második β-t adott, mely utóbbihoz még azon egész köröket is hozzá kell adni, melyeket a mutató a mérés elejétől fogva átfutott, de a melyek a leolvasásból kiestek, mivel a számozás 360°-ról 0°-ra ugrik; végre legyen a szorzás száma $= n$, akkor az egyszerű szög ω lesz:

$$\omega = \frac{\beta - \alpha}{n}.$$

Önként értetik, hogy α, β alatt az összes Noniusokból nyert számtani középet kell érteni.

3) A szorzás általi szögmérés csak akkor fogja a várt tökéletes eredményt szolgáltatni, ha a szöget pontosabban lehet a limbusra felrakni, mint a mutató állását leolvasni. Mert ha minden egyes szög felrakásánál olyan nagy hibát ejthetnénk, mint a leolvasásnál, akkor egy n-szeres szögben a hiba, legroszabb esetben, n-szer olyan nagy lehetne, mint egy egyszerű szögben, tehát annak n-ed része az egyszerű mérésbeli hibától nem különböznék, s a szorzásnak haszna nem volna. A szögek pontos felrakásához pedig megkivántatik, hogy a beirányzás minél tökéletesebb, és a lábak, a tányér és az Alhidade közötti kapocs minél merevebb, s holt mozgástól ment legyen.

Az irányzási hiba, mint már fentebb láttuk, a Theodolit-távcsőknél $^1/_2$—$^1/_4$″-t meg nem halad; s ez azon határ, melyen alól a szögmérési hibát leszállítni nem lehet.

A szilárd és merev kapcsolat a szorító és paránymérő csavarok helyes szerkezetétől függ : nevezetesen a csuklók érintkező részei az anyag ruganyossága, és rugók által tartatnak feszültségben, hogy a holt mozgásnak eleje vétessék; ezért vannak a paránycsavarok anyjai is felmetszve. Mind a mellett a tapasztalás azt tanítja, hogy a mérés hibája egy bizonyos határon túl a szorzás számával inkább nő, mint fogy; mit csak jelentékeny felrakási, vagy kezelési hibákból lehet kimagyarázni.

155. §. A szorzott mérés schemája és kiszámitása.

1) Eleinte a szorzott szögmérés oly módon kezeltetett, hogy az egyszerű szög 20—30-szor feltétetett egyhuzomban a limbusra, és akkor olvastattak le a mutatók. De ezen gyakorlat nem ajánl-

ható, mivel ilyen nagy számú szorzás közben a csavarok kezelésében könnyen rendetlenség támad, s a szorzás folytonossága kétes lehet; miután már a napsugároknak az állvány lábaira való hatása, vagy a földnek az állvány lábai alatti ruganyossága, mely a mérnök lépteinek enged, a limbus fekvésében tetemest változást okoznak. Czélszerűbb, Bessel útmutatása szerint, a Noniusokat minden 3, 4, vagy 5-ik szorzás után leolvasni, s a szorzást 20-ig folytatni. Ekképen kisebb kiterjedésű szakaszok származnak, melyeknek egymásközötti különbségeiből meg lehet itélni, valjon nem történt-e a mérés közben valamely rendetlenség, s ha ez mutatkoznék, a kérdéses szakaszt ki lehet hagyni a számitásból. Egyszersmind ugyanazon szorzási számnál több leolvasások tétetvén, reményleni lehet, hogy a leolvasási hibák egyszer + másszor — értelemben ejtetvén, a végeredményből nagyobb részint ki fognak esni.

2) Legyen *O* az álláspont, *A*, *B*, *C* körülötte lévő tárgyak, melyek közt a szögeket meg kell mérni, a mérést a naplóban következő schema szerint kell felirni.

O álláspont.

Szögek nevei	Szorzás mutató	I. Nonius	II.	III.	IV.	Közép	Egyszerű szög
AB	0	17° 8′ 30″	8′ 40″	8′ 45″	8′ 40″	17° 8′ 38″·8	25° 7′ 8″·9
	3	92° 30′ 0″	30′ 5″	30′ 10″	30′ 10″	92° 30′ 6″·3	
	6	167° 51′ 25″	51′ 40″	51′ 25″	51′ 20″	167° 51′ 27″·5	
	9	243° 13′ 0″	13′ 10″	12′ 50″	13′ 5″	243° 13′ 1″·2	
BC	3	304° 14′ 35″	14′ 40″	14′ 55″	14′ 45″	304° 14′ 43″·8	140° 20′ 30″·4
	5	224° 55′ 35″	55′ 50″	55′ 45″	55′ 30″	224° 55′ 40″·	
	7	145° 36′ 50″	36′ 45″	36′ 40″	36′ 30″	145° 36′ 41″·2	
	10	206° 38′ 5″	38′ 0″	38′ 10″	38′ 15″	206° 38′ 7″·5	

Ezen schemában a 0-szoros leolvasások a limbus azon pontját jelentik, melyben a szögek felrakása kezdődik. Ha egy szög már meg van mérve, és a következő szög méréséhez akarunk fogni, akkor az előbbi szög utolsó leolvasása a következő szög 0-szorosát fogja szolgáltatni, ha időközben az Alhidade állásában változás nem történt. Igy *BOC* szögnek kiindulási pontja az *AOB* szögnek 9-szeres leolvasása által van adva.

3) Az egyszerű szögnek a szorzott mérés adataiból való kiszámitására Bessel egy, a valószinűség elméletére fektetett módot adott elő, melyet Fischer »Höhere Geodäsie« czimű munkájában

meg lehet találni. Mi Stampfer szerint azon elvből indulunk ki, hogy a nyert adatokból minden lehető kettős kapcsolatokat képezvén, ezekből az egyszerű szögek értékei számittassanak ki, és közöttök a számtani közép vétessék. Minthogy pedig minden többszörös szögből nyert egyszerű szög annyiszor biztosabb, mint egy egyszeresen mért szög, a hány egység van a szorzás mutatójában, ezért minden szorzott mérésből nyert egyszerű szöget azon mutatóval szorozni kell, mely a szorzás számát jelenti, s ugy kell a számtani középbe felvenni. Ennélfogva ha a szorzási számok sorjában *o*, *a*, *b*, . . . *h*, *k*, *l*, a megfelelő leolvasások (*o*), (*a*), (*b*), . . . (*h*), (*k*), (*l*) . . .-el jelöltetnek, s a leolvasások száma, a *o*-szorost nem számlálván, $= n$, akkor:

$$\text{Egyszeres szög} \left\{ = \frac{\begin{array}{l} \frac{(a)-(o)}{a-o}(a-o)+\frac{(b)-(o)}{b-o}(b-o)\ldots+\frac{(k)-(o)}{k-o}(k-o)+\frac{(l)-(o)}{l-o}(l-o) \\ +\frac{(b)-(a)}{b-a}(b-a)+\frac{(c)-(a)}{c-a}(c-a)\ldots+\frac{(l)-(a)}{l-a}(l-a) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\frac{(k)-(h)}{k-h}(k-h)+\frac{(l)-(h)}{l-h}(l-h) \\ +\frac{(l)-(k)}{l-k}(l-k) \end{array}}{\begin{array}{l} a-o+b-o+\ldots\ldots+k-o+l-o \\ +b-a+c-a+\ldots\ldots+l-a \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +k-h+l-h \\ +l-k. \end{array}} \right.$$

Ezen képlet számlálójának egyes tagjaiban az osztók és szorzók egymást elrontják, és rövid összehuzás után lesz:

$$\begin{array}{c}\text{egyszeres} \\ \text{szög}\end{array} \left\{ = \frac{n[(l)-(o)]+(n-2)\,[(k)-(a)]+(n-4)\,[(h)-(b)]+\ldots}{n(l-o)+(n-2)\,(k-a)+(n-4)\,(h-b)+\ldots} \right. \text{[1]}$$

Itt is meg kell említni, hogy a számlálóban előforduló különbségekhez annyiszor kell 360°-ot hozzáadni, a hányszor a mutató az illető két leolvasás közt a 0 ponton átment. Az utolsó tag

[1]) Ezen általam kifejtett képlet a Besseltől eredő, s a valószinűség alapján felállitott kifejezéssel teljesen azonos.

együtthatója mind a számláló, mind a nevezőben 1 vagy 2 a szerint, a mint n páratlan vagy páros. Ezen képlet szerint a fentebbi két példának kiszámitása igy fog menni.

Miután az AOB szögre nézve a számtani közép rovatában az első leolvasás a 2-ikból, ez a 3-ikból, s i. t. levonattak, a talált különbségekből 3) 75° 21′ 27″·7. 3) 75° 21′, 21″. 3) 75° 21′ 33″·7 meggyőződtünk, hogy a mérésben jelentékeny hiba nincsen, s a mutató a 0°-on keresztül nem ment, a számitáshoz lehet fogni. Itt $n=3$, $a=3$, $b=6$, $c=9$, továbbá:

$$3\ [(9)-(0)] = 3(243^\circ\ 13'\ 1''\cdot2 - 17^\circ\ 8'\ 38''\cdot8) = 688^\circ 13'\ 7''\cdot2$$
$$1\ [(6)-(3)] = 167^\circ\ 51'\ 27''\cdot5 - 92^\circ\ 30'\ 6''\cdot3 = 75^\circ\ 21'\ 21''\cdot2$$
$$\text{Összesen} = 753^\circ\ 34'\ 28''\cdot4$$

Továbbá
$$3(9-0) = 27$$
$$1(6-3) = 3$$
$$\text{Összesen} = 30,$$

tehát $753^\circ\ 34'\ 28''\cdot4 : 30 = 25^\circ\ 7'\ 8''\cdot9 = AOB$ szög.

A BOC szögnél az egyes leolvasások közti különbségek igy mutatkoznak: 3) 61° 1′ 42·6. 2) 280° 40′56″·2) 280° 41′ 1″·2. 3) 61° 1′ 26″·3. A két középső számból az egyes szög körülbelől 140° 20′-nek találtatik, és ha az első 3-szoroshoz 360° adatik, miáltal az 421°-ra emelkedik, és 3-al osztatik, az eredmény szintén az. Tehát a 0-szoros és 3-szoros leolvasások közt a mutató 1-ször, a 3 és 5-szörös közt 2-odszor, az 5 és 7-szeres közt 3-adszor, a 7 és 10-szeres közt 4-edszer ment át a 0-án. Továbbá $n=4$, $a=3$, $b=5$, $c=7$, $d=10$, és

$$4\ [(10)-(0) + 4.\ 360^\circ] = 5613^\circ\ 40'\ 25''\cdot2$$
$$2\ [(\ 7)-(3) + 2.\ 360^\circ] = 1122^\circ\ 43'\ 54''\cdot8$$
$$\text{Összesen} = 6736^\circ\ 24'\ 20''\cdot0.$$

Továbbá
$$4\ (10-0) = 40$$
$$2\ (\ 7-3) = 8$$
$$\text{Összesen} = 48.$$

Tehát $6736^\circ\ 24'\ 20'' : 48 = 140^\circ\ 20'\ 30''\cdot4 = BOC$ szög.

Néha megtörténik az is, hogy egy szorzási mutató hibásan van felirva, de azt kevés kisérlet után tisztába lehet hozni, ha az egyes leolvasások közti különbségek összehasonlíttatnak. Ezeknek csak néhány másodperczczel szabad különbözniök egymástól.

156. §. Irányszálak közötti hézag.

Néha a Theodolit távcsőjének diaphragmáján 2, 3 irányszál van kifeszítve. Ezeknek egymástóli szögtávját, vagyis azon szöget, melyet a rajtok, és a tárgylencse láttani középpontján keresztül gondolt iránysíkok egymással bezárnak, melyek ösmerése némely észlelésekhez szükséges, következő módon lehet meghatározni. Legyen a távcső látterében bal oldalt látszó irányszál *a*, a jobbról eső pedig *b*; válasszunk egy igen messze, s körülbelől a tányér síkjában fekvő tisztán látható tárgyat, irányozzuk rá a távcsőt, s a szorító csavarokat mind a tányéron mind az Alhidadén megszorítván, állítsuk be az *a* szálat a *h* paránycsavarral a tárgyra, és a Noniusokat olvassuk le. Ezután nyissuk meg az Alhidadét, forditsuk tengelye körül, mig a *b* szál közel a tárgyra esik, s a *g'* szorító csavart meghúzván, a *h'* paránycsavarral állitsuk be a *b* szálat a tárgyra. Ekképen a mutató egy olyan ívet futott át, mely a két szál közötti hézagnak mértéke. Most a tányér megnyittatván, visszafelé forditattik, mig az *a* szál ismét a tárgyra mutat, s a műtétel az előbbi rendben ismételtetik, s i. t. figyelvén arra, hogy valahányszor a tányér visszafelé forgattatik: az *a* szállal, valahányszor pedig az Alhidade előre forgattatik: a *b* szállal kell irányozni. Végre a Noniusok állása leolvastatik, s a szög a szorzott szögmérés szabályai szerint kiszámíttatik.

157. §. Astrolabium.

Az Astrolabium a mult század végéig mind csillagászati mérésekre — honnan nevét vette, — mind mértani czélokra általánosan használatban volt, de azóta a tökéletesebb szerkezetű Reichenbach-féle Theodolit által csaknem egészen kiszoríttatott. Ennek tányérja egy 14—16'' átmérőjű beosztott félkörből *A* (184. ábra) áll, melynek osztályrészei rendesen 20'-et adnak, s kettős számozattal vannak ellátva, melyek közül egyik jobbról balra, másik balról jobbra halad. Az Alhidade *B* vonasz alakú, két végén Noniusokkal *C*, *C'* felszerelve, melyeken 1—2'-et le lehet olvasni. Ezen Noniusok közül mindig csak egyik van működésben, — kivévén, ha azok 0 és 180°-on állanak, — mivel a másik alatt a beosztott kör hiányzik. A régibb példányoknál néha átlós beosztás is előjön, melyben az egyes fok nagyságú osztályrészek párhuzamos körök és átlók által osztatnak apróbb részekre olyanformán, mint azt az egyenes vonalra nézve a 105. §-ban láttuk. Ezen esetben az Alhidade végein mutató vonalakra van szükség, melyek vagy ráma alakú nyilásokban az átmérő irányában kifeszített hajszálakból, vagy ferdén lemetszett élekből állanak. Irányzóul a jobb Astrolabiumoknál rendesen egy távcső szolgál, mely egy magasságmérő íven *D* van megerősítve. Ezen ív középpontjában egy rövid csap *O* látszik s ez az *E* oszlopban fúrt lyukban foroghat; az oszlop pedig a *B* vonaszon van csavarok által megerősítve. A távcső keresztszálakkal, s a szükséges kiigazítási csavarkákkal van felszerelve; s az irányzás pontosságának előmozdítása végett, mind az Alhidadén, mind a magassági íven szoritó és paránycsavarok vannak alkalmazva. A tökéletlenebb Astrolabiumoknál távcső helyett nézgék vannak helyezve, melyek az Alhidade végein *F*, *F'* csavarok által erősíttetnek meg; egy második mozdulatlan nézge pár *G*, *G'* pedig a félkör azon átmérőjében van felállítva, mely a 0 és 180°-ú osztályvonalakon megyen keresztül. Ezen második irányzó a tányér fekvésének biztositására szolgál, s ezért biztositó nézgének neveztetik. A tányér egy állványon nyugszik, melynek szerkezete megengedi, hogy a félkört minden oldalról fel és lefelé mozdítni, valamint tengelye körül fordítni, s minden állásban megszoríțni lehessen. E czélból egy 3 oldalú faprisma oldalaihoz csavarok által 3 láb szoríttatik, melyek kiterpesztve a műszernek terepélyes alapot nyujtanak, a prisma felső vége pedig csonka kúpot *L* képez. Ezen kúpra egy tok *H* huzatik, s egy szoritó csavar *I* által megszoríttatik. Ezen toknak felső vége nyilt, s üres félgömböt képez, melybe egy tömör gömb, az ugynevezett dió, van illesztve. Ezen gömböt, mint valamely általános csuklót, minden oldalra lehet hajtani; de egyszersmind egy kúp alakú szoritó csavar *K* által, mely egy fa hengert alulról a dió alsó oldalához szorít, minden állásban meg lehet erősítni. A dióból pedig egy csap *i* nyúlik ki, mely a tányér alsó oldalán megerősített üres hengerbe *k* illik, s egy szoritó csavar *l* által megszorítható.

Meg kell említni, hogy a *H* tok felső végén oldalt egy kimetszés van azért, hogy az *i* csapnak vizszintes, tehát a tányérnak függélyes állást lehessen adni, s ennélfogva a műszerrel magassági méréseket is lehessen tenni.

158. §. Az Astrolabium kiigazítása.

Az Astrolabiumnak tulajdonképen ugyanazon kellékekkel kell bírni, melyeket a Theodolitnál előadtunk, minthogy mind a kettőnek alkotó részei, s azoknak mozgásai egymáshoz hasonlók. De mivel a leolvasási hiba az Astrolabiumnál tetemes, t. i. 1—2′; könnyű a gépésznek az egyes részeket olyan tökéletesen összeállítni, hogy a hátramaradt hibák befolyása a leolvasási hibát még el ne érje. Ezért nagyobb részint a hibák kiigazítására szükséges intézkedések is hiányoznak, valamint a finom mozgásról is csak kivételesen van gondoskodva.

A tányér egy talpas szintező által tétetik vizszintessé, mely műtételben 1—2′-nyi hiba még elnézhető. (Lásd 143. §.)

A jelentékenyebb hibák, melyeket a gépész nehezen képes elhárítni, következő forrásokból erednek.

1) Ha a távcső irányvonala a forgástengelylyel nem merőleges.

2) Ha ezen forgástengely a tányérral nem párhuzamos.

3) Ha a mutatókat összekötő vonal nem az Alhidade forgástengelyén megyen keresztül.

4) Ha az Alhidade forgástengelye nem a limbus középpontjában van.

5) A beosztási, és

6) A Collimatio hiba.

159. §. Az irányvonal hibája.

1) Minthogy a távcsőt megfordítni nem lehet, a Theodolitnál előadott vizsgálati módot sem lehet alkalmazni, hanem ilyeténképen kell működni. Miután a tányér vizszintesen felállíttatott, és a távcső körülbelől vizszintes fekvésbe hozatott vala, állitsuk be az irányszálak metszéspontját valamely függélyes vonalra. E czélra legjobb egy szabadon függő zsinórt használni, mely egy átalellenben lévő ház tetejéről lebocsáttatik, s végére egy kő köttetik. Ha most a távcsőt tengelye körül fel s alá hajtjuk, a keresztpont vagy a zsinóron fog fel s alá mozogni, vagy attól eltérni, és az *AB*, *A′B′* (184. ábra) vonalak közül valamelyiket fogja leirni. Ha a keresztpont a zsinóron mozog, akkor a távcsőnek mind forgás- mind iránytengelye helyes. Ha az *a* idom mutatkozik, akkor a forgástengely vizszintes ugyan,

de az irányvonalra nem merőleges. Ezen esetben tehát a diaphragma csavarkáival kell segítni, s a derékszöget helyreállítni. Ha pedig a *b* vagy *c* idom mutatkozik, akkor mind a forgásmind a láttengely fekvése hibás; s igyekezni kell előbb a forgástengelyt vizszintessé tenni az által, hogy az *E* oszlop alá — elébb a csavarokat megeresztvén — oldalt papiros szeletkéket dugunk, és a csavarokat ismét meghúzzuk, míg a keresztpont a *b*, *c* idomok helyett az *a*-t fogja leirni; ezután pedig a hátralévő hiba a diaphragma csavarkáival igazíttatik ki.

2) Ha az irányzó nézgékből áll, akkor meg kell vizsgálni: valjon a legalsó néző lyukon és a hajszálon keresztül gondolt sík merőleges-e a limbusra vagy nem?; azután pedig: valjon a legfelső lyukon s a hajszálon keresztül gondolt sík összeesik-e az előbbivel úgy, hogy azok csak egy iránysíkot képeznek?

Az első pontra nézve, miután a tányér vizszintessé tétetett, fordítni kell az Alhidadét, mig — az alsó lyukon átnézvén — a hajszál a zsinórra, vagy igen közel mellé esik; s ha azzal párhuzamosnak látszik, akkor a hajszál fekvése helyes: ha pedig nem párhuzamos, akkor a tárgynézge csavarjait, melyekkel az Alhidadéra van megerősítve, megeresztvén, oldalt papiros szeletkéket kell alá dugni mindaddig, mig a csavarokat ismét meghúzván, a kivánt párhuzamosság elő nem áll.

A második pontra nézve: Miután az előbbiek szerint, az alsó lyukon átnézvén, a hajszál a zsinóron látszik, átnézünk a legfelső lyukon; s ha az most is a zsinórra esik, mint azelőtt, akkor a két iránysík egymással összeesik. Ha pedig az a zsinórtól oldalt eltérne, akkor a szemnézge ferdén áll, s aládugott papiros szeletkék által kell azt felegyenesítni. A második pár nézgét hasonlóképen kell kiigazítni.

160. §. A mutató vonal külpontossága.

Ámbár a limbus csak félkörből áll, mindazáltal a szögeket egy pont körül egész 360°-ig meg lehet vele mérni a nélkül, hogy azt tengelye körül fordítni kellene, ha az Alhidade mind a két végén mutatóval van ellátva, melyek közül egyik a beosztott ívbe lép, midőn a másik azt elhagyja. De a szögmérés csak akkor lesz helyes, ha a mutatókat összekötő vonal az Alhidade forgástengelyén megyen keresztül; úgy hogy, ha az irányzót előbb valamely tetszésszerinti, azután pedig az ellenkező irányba hozzuk, a mutatók a limbusnak ugyanazon pontján állanak. Ennek megvizsgálása végett legyen a 186. ábrában *AD* a beosztott körnek 0 és 180°-on keresztül menő átmérője, *A* és *B* a két mutató, melyeknek összekötő vonala az Alhidade forgáspontja *O* mellett megyen el. Ez pedig szintén a kör középpontján *C* kivül esik. Állítsuk be az egyik mutatót p. o. *A*-t a limbus 0 pontjára, és olvassuk le a *B* mutatót a körön, vagy a *BD* ívet. Ezután fordítsuk az Alhidadét, mig a másik mutató *B* esik a kör 0 pontjába, miáltal a mutató vonal *B'A'* fekvésbe jön, és ismét olvassuk le az *A'D* ívet. Akkor *BD*—*A'D* a kettős hibát fogja ábrázolni. Ennek felét tehát hozzá kell adni a *B*-n történt leolvasáshoz. Ha pedig *B*-t akarnók helyesnek venni, le kellene a hibát vonni az *A*-n történt leolvasásokból. Legyen p. o. a *B* leolvasás = 179° 54′, az *A* leolvasás = 179° 58′, tehát *BD*=6′, *A'D* = 2′, akkor a kettős hiba 4′, s a pótlék = 2′, tehát a kiigazított *B* = 179° 56′.

Ha most az Alhidade forgástengelye a limbus középpontjában volna, akkor a kiigazított leolvasások 0° és 180°-at adnának; de mivel *B*, 180°-tól különbözik, bizonyos, hogy az Alhidade forgástengelye is külpontos.

*161. §. Az Alhidade tengelyének külpontossága.

Az előbbi vizsgálat már többnyire el fogja árulni, valjon az Alhidade a limbus középpontja körül forog-e, vagy nem? de egész bizonyossággal csak következő módon lehet ennek ösmeretére jutni. Mérjünk meg az Astrolabiummal két, vagy három szöget, melyek közül egyik hegyes, másik tompa, harmadik 180 és 360° közé eshetik, nehányszor, p. o. 6-szor egymásután, úgy hogy a limbuson a kiindulási pont először 0°, azután 60°, 120°, stb., azaz: minden következő körülbelől $^1/_6$ körkörülettel nagyobb legyen, mint az előbbi. Ekképen a szögeknek hat, egymástól egy kissé különböző értékeire teszünk szert, melyeknek számtani közepei a szögeket a külpontossági hibától menten fogják szolgáltatni. (150. §. 2.), s ezek a valóságos értékektől csak annyiban fognak különbözni, a mennyiben a leolvasások a beosztási hibák által egy kissé el vannak rontva. Gondoljuk ezeket olyan csekélyeknek, hogy azok a külpontossági hibához képest elenyésznek, és hasonlítsuk össze a számtani középeket azon leolvasásokkal, melyek a 0^0-ból indultak ki; akkor a különbségek a leolvasási íveknek, vagyis a limbus leolvasott osztásvonalainak megfelelő külpontossági hibákat fogják adni, s két ilyen hiba elégséges a külpontossági állandók — t. i. ω, és $\frac{d}{r}$ — (l. 150. §. 2) meghatározására, három megmért szögből tehát párosával 3-féleképen lehet a számitást végrehajtani, s az eredményekből számtani középet lehet venni, mely a valósághoz közelebb fog állani, mint azt egy egyes meghatározástól várni lehetne.

Egy példa az egész műtételt világosabbá fogja tenni. Egy Astrolabiummal, melyen a mutatók külpontosságtól mentek, s a Noniusok I. és II-vel vannak jelölve, három szög *AB*, *AC*, *AD* hatszor egymásután megméretett, s a szögek, valamint a limbuson is a számok, az óramutató mozgása irányában növekednek. A mérés következő táblából látható.

Mérés száma	Irány	I. Non.	II. Non.	Mérés száma	Irány	I. Non.	II. Non.
1)	*A*	0° 0′	— —	4)	*A*	179° 42′	— —
	B	60° 2′	— —		*B*	— —	59° 49′
	C	119° 42′	— —		*C*	— —	119° 30′
	D	— —	120° 3′		*D*	119° 45′	— —
2)	*A*	— —	119° 54′	5)	*A*	119° 48′	— —
	B	0° 0′	— —		*B*	179° 53′	— —
	C	59° 40′	— —		*C*	— —	59° 36′
	D	— —	59° 54′		*D*	59° 50′	— —
3)	*A*	— —	60° 12′	6)	*A*	59° 56′	— —
	B	— —	120° 19′		*B*	119° 58′	— —
	C	— —	179° 58′		*C*	179° 42′	— —
	D	— —	0° 12′		*D*	0° 0′	— —

Innen következnek:

Szög neve	1 mér.	2 mér.	3 mér.	4 mér.	5 mér.	6 mér.	Közép	Közép — 1 m.
AB	60° 2′	60° 6′	60° 7′	60° 7′	60° 5′	60° 2′	60° 4′·83	2·′83
AC	119° 42′	119° 46′	119° 46′	119° 48′	119° 48′	119° 46′	119° 46′	4·′00
AD	300° 3′	300° 0′	300° 0′	300° 3′	300° 2′	300° 4′	300° 2′	—1·′00

A külpontossági hiba a 150. §. 2 szerint következő képlet által fejeztetik ki:

$$\alpha - \alpha' = \frac{d}{r}\left(sin\,(\omega + \alpha') - sin\omega\right),$$

melyet ezen alakra lehet hozni:

$$\alpha - \alpha' = \frac{d}{r}\,cos\omega\; sin\alpha' - \frac{d}{r}\,sin\omega\;(1 - cos\alpha'),$$

tegyük itt rövidség végett $\frac{d}{r}\,cos\omega = x$, $\frac{d}{r}\,sin\omega = y$, akkor az egyenletből lesz;

$$\alpha - \alpha' = x\;sin\alpha' - y\;(1 - cos\alpha').$$

Tegyük most ezen egyenletbe $\alpha - \alpha'$ helyett az utolsó, α helyett pedig az 1. mérés rovatából az *AB* és *AC* szögekuek megfelelő értékeket, akkor lesznek:

$$\left.\begin{aligned} 2{\cdot}83 &= 0{\cdot}8663\,x - 0{\cdot}5005\,y \\ 4{\cdot}0 &= 0{\cdot}8686\,x - 1{\cdot}4955\,y \end{aligned}\right\}\text{ s ezekből } y = -\,1'{\cdot}17,\; x = 2'{\cdot}59.$$

Ha pedig az *AB* és *AD* szögekre vonatkozó értékeket vesszük, az egyenletek ezekké lesznek:

$$\begin{aligned} 2{\cdot}83 &= 0{\cdot}8663\,x - 0{\cdot}5005\,y \\ 1{\cdot}00 &= 0{\cdot}8656\,x + 0{\cdot}4992\,y \end{aligned}\left\{\begin{array}{l}\text{s ezekből}\\ \text{következik}\end{array}\right\}\,y = -2'{\cdot}83,\; x = 2'{\cdot}21$$

A nyert két y-ból számtani közép lesz: $y = -\,1'{\cdot}50$, az x-ekből hasonlóképen számtani közép: $x = 2'{\cdot}40$. Ezeket négyzetre emelvén lesz:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{d}{r}\right)^2 = 8{\cdot}01,$$

tehát
$$\frac{d}{r} = 2'{\cdot}8,$$

Továbbá
$$\frac{y}{x}\;tg\omega - \frac{-\,1{\cdot}50}{2{\cdot}40},$$

honnan következik, mint megfelelő hegyes szög $= 32^0$, s a számláló jegyét figyelembe véve, mely arra mutat, hogy a szög a 4-dik negyedbe esik, elég pontossággal lesz:

$$\omega = 328^0.$$

Ezen állandókból azután következő táblácska számittatik ki:

Leol-vasás	Hiba I. Non.	Leol-vasás	Hiba II. Non.	Leol-vasás	Hiba I. Non.	Leol-vasás	Hiba II. Non.
0°	+ 0′·0	0°	+ 2′·9	100°	+ 3′·9	100°	— 1′·0
10°	0′·4	10°	2′·5	110°	4′·2	110°	— 1′·2
20°	0′·8	20°	— 2′·2	120°	4′·2	120°	— 1′·2
30°	1′·3	30°	— 1′·5	130°	4′·2	130°	— 1′·1
40°	1′·8	40°	— 1′·0	140°	4′·1	140°	— 1′·1
50°	+ 2′·3	50°	+ 0′·6	150°	+ 3′·9	150°	— 0′·9
60°	2′·7	60°	0′·1	160°	3′·6	160°	— 0′·7
70°	3′·2	70°	— 0′·2	170°	3′·3	170°	— 0′·4
80°	3′·5	80°	— 0′·6	180°	2′·9	180°	— 0′·0
90°	3′·7	90°	— 0′·8	—	—	—	—

*162. §. Beosztási hibák.

1) Mielőtt a Ramsden, később a Reichenbach-féle osztógépek általános használatba jöttek, a körosztás körző által szabad kézzel oly módon vitetett véghez, miképen azt a papiroson szoktuk tenni. Tudniillik először a körsugárt ismételve felrakván, a 60°, 120° és 180° pontokhoz jutottak. Ezen íveket felezvén, 30°-ú, s ezeknek ismételt felezése által 15°-ú íveket nyertek. A 15°-ú íveket három egyenlő részre osztván, 5°-ú hézagokra jöttek, s ezeket öt részre osztván, egyes fokokra tettek szert. s i. t. Ezen műtétel igen fáradságos volt azért, mivel a 3 és 5 részre osztást csak próbálgatás által lehetett eszközölni. Azért megkisérlették a 60°-ú ívet 64 részre is osztani, mely számnak 60 felett azon előnye van, hogy folytonos felezés által egész 1-ig osztható; ennélfogva a körbeosztás a mértani mód szerint eszközölhető.

Ezen rendszerben 90°-ra 96 rész esik. Mások a kör kerületére egy tetszésszerinti nagyságú ívecskét raktak fel folytonosan egymásmellé, mit a körzőnek hegye körüli megfordítása által lehet eszközölni; s utólagosan keresték az ívecske hosszát, oly módon, hogy a félkörre eső részek összesen 180°-t tesznek. Akármelyik osztási rendszer legyen is alkalmazva, elkerülhetetlen, hogy az osztásvonalak egy kissé hibásak ne volnának, s a hibát legalább is 0‴·002—0‴·003-nek lehet tenni, mely 10″ sugárú kör körületén körülbelül 1 perczet teszen. Ennél nagyobb pontosságot tehát a leolvasásban sem lehet kivánni, a mint valóban Astrolabiumnál kisebb osztályrészeket soha sem is találunk. A

A beosztási hibákat egy finom hegyű körzővel lehet megvizsgálni, mely közben olyan rendet követünk, mintha a kört be akarnók osztani. Legelőször is megvizsgáljuk, valjon a 0^0 és 180^0 közt lévő ív félkör-e, vagy nem? E czélból a kör átmérőjét egy rudas körzővel levesszük és felezzük. Ezen hossznak 0 és 180^0 közt háromszor kell felmenni stb., mig a vizsgálat az 5^0-ú ívekig terjedt. A kisebb íveket a Nonius segitségével lehet megvizsgálni. Ha t. i. a Nonius első vonása a limbus valamelyik vonásával összeesik, akkor az utolsónak szintén össze kell esni egy másikkal, s i. t.

*2) Az átlós beosztás az Astrolabium karimáján rendesen úgy van készitve, hogy egymástól egyenlő — körülbelől $2'''$ távban 7 központi kör húzatik, a legszélsőbb egyes fokokra beosztatik, s az osztálypontokon A, B, C, D, . . . keresztül (187. ábra) a középpont O felé sugárok húzatnak, melyek a legbelső kört az A', B', C', D' . . . pontokban metszik, s végre az AB', BC', CD' . . . átlók húzatnak. Ekképen a sugár és az átló közt az 1, 2, 3, 4, 5, kör körületén befoglalt ívek 10, 20, 30, 40, 50 perczeket ábrázolnak. De ezen beosztás nem egészen helyes. Ugyanis legyen $AO = r$, $AA' = a$, AOB szög $= \alpha$, H egy tetszés szerinti pont A és A' közt ugy, hogy $AH = na$ legyen, hol n egy valódi törtszámot jelent: a H-n keresztül húzott kör az átlót G-ben fogja metszeni, és az $AOG = \nu\alpha$ szög az AOB szögnek bizonyos részét fogja ábrázolni, hol ν, n-től különböző fog lenni. Ennek meghatározása végett lesz az AOG $\triangle$-ből:

$$tgA = \frac{OG.\ sin\nu\alpha}{AO—GO.\ cos\nu\alpha} = \frac{(r—na)\, sin\nu\alpha}{r—(r—na)\ cos\nu\alpha}.$$

Hasonlóképen az AOB' $\triangle$ lesz:

$$tgA = \frac{OB'.\ sin\alpha}{AO—OB'.\ cos\alpha} = \frac{(r—a)\, sin\alpha}{r—(r—a)\ cos\alpha}.$$

Ezen két egyenletet egymással összekapcsolván, lesz:

$$\frac{(r—na)\, sin\nu\alpha}{r—(r—na)\ cos\nu\alpha} = \frac{(r—a)\, sin\alpha}{r—(r—a)\ cos\alpha}.$$

Minthogy pedig az α igen kis szöget jelent, szabad a sinus helyett az ívet, s a cosinus helyett 1-et tenni, s az egyenletből rövid összehúzás után lesz:

$$\nu = n\frac{r—a}{r—na}.$$

Legyen p. o. $r = 10''$, $a = 1''$, $n = \frac{1}{6} = \frac{10}{60}$, akkor $v = \frac{9}{59}$,

$$\text{»} = \frac{2}{6} = \frac{10}{30} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \frac{10}{29},$$

$$\text{»} = \frac{3}{6} = \frac{10}{20} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \frac{9}{19},$$

$$\text{»} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \frac{9}{14},$$

$$\text{»} = \frac{5}{6} = \frac{10}{12} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \frac{9}{11}.$$

* 3) Ezen beosztási rendszer hibáit némelyek az által igyekeztek elhárítni, hogy a körök közti hézagokat nem egyenlőknek vették. Miképen kell azokat választani, hogy a beosztási hibák elenyésszenek, a fentebbi egyenletből meg lehet határozni, ha az n után feloldatik; t. i. lesz:

$$n = v \frac{r}{r - a(1 - v)}.$$

Ezen egyenlet szerint, ha az előbbi féltételek nyomán

$$v = \frac{1}{6} = \frac{10}{60}\text{-nek tétetik, lesz: } n = \frac{10}{55},$$

$$\text{»} = \frac{2}{6} = \frac{10}{30} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} = \frac{10}{28},$$

$$\text{»} = \frac{3}{6} = \frac{10}{20} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} = \frac{10}{19},$$

$$\text{»} = \frac{4}{6} = \frac{20}{30} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} = \frac{20}{29},$$

$$\text{»} = \frac{5}{6} = \frac{50}{60} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} = \frac{50}{59}.$$

Ha tehát az na értékei A-ból A' felé felrakatnak, s ezen pontokon keresztül húzatnak a központi körök, a fok apróbb osztályzata helyes fog lenni. De elméletileg véve akkor lenne a beosztás legjobb, ha az AB', BC'… átlók helyett körívek húzatnának, melyek meghosszabbítva az O ponton mennének keresztül, az AB' ív hat egyenlő részre osztatnék, s ezen osztálypontokon húzatnának keresztül a párhuzamos körök. Ugyanis ha ezen osztálypontokon keresztül O felé egyenes vonalakat gondolunk, ezek a körre nézve húrok lesznek, melyeknek végpontjai egyenlő hosszaságú íveken állanak; tehát egymás közt egyenlő szögeket képeznek.

163. §. Collimatio hiba.

Midőn az Astrolabium félkörén megerősített nézge csak biztositó irányzó gyanánt szolgál, a nélkül hogy az szögmérésre használtatnék, akkor annak fekvése egészen tetszéstől függ; de ha azt a mérésre használni akarjuk úgy, hogy a szögnek egyik szárát az egyik, a másikat pedig a másik által akarjuk beirányozni: akkor meg kell vizsgálni, valjon ha a két iránysík párhuzamos, a mutató 0-án áll-e, vagy nem? E végre a műszert kellőleg felállítván, megmérünk valamely két tárgy A, B közt fekvő szöget két módon; először úgy, hogy a szilárd irányzó (188. ábra a) A, mozogható pedig B felé nézzen; másodszor megfordítva b). Ha a leolvasott ívek egymással egyenlők, akkor az irányzók fekvése helyes. Ellenkező esetben a különbség a kettős hibát ábrázolja. Ugyanis az első ízben az mn, másod ízben az $m'n'$ ív olvastatik le; holott a szög valódi mértéke $= kn = k'n'$, tehát a collimatio hiba $= mk = m'k'$. Ugyde:

$$kn = mn - mk,$$
$$k'n' = m'n' + m'k';$$

ezen egyenleteket egymásból levonván, lesz:

$$mk = \frac{mn - m'n'}{2}.$$

Ha pedig azokat összeadjuk, a szög valódi értéke lesz:

$$nk = \frac{mn - m'n'}{2}.$$

A Collimatio hibát úgy lehet kiigazítni, ha az egyik mozdulhatlan nézgelemez lábcsavarjait megeresztjük, s a nézgét kellő irányban oldalt mozditjuk; (ha azt a csavar lyukai nem engednék, ezek egy kevéssé hosszukásra reszeltetnek ki), s a csavarokat ismét erősen meghúzzuk. A hibát benne is lehet hagyni az irányzóban; de akkor minden leolvasásból le kell azt vonni, ha a balról jobbra haladó számozat használtatik; ellenkező esetben pedig a hibát hozzá kell adni.

164. §. Astrolabiummal való szögmérés.

1) Ha az Astrolabium két irányzóval van ellátva, és a collimatio hiba meg van határozva, akkor a szögmérés ilyetén-képen vitetik véghez. Miután a műszer középpontja a szög csúcsa

felett függélyesen felállíttatott, és a félkör vizszintes fekvésbe hozatott vala, ez tengelye körül forditattik, mig irányzója az első pontra mutat, s a szorító csavar meghúzatik. Ezután az Alhidade irányzója sorjában a második, harmadik stb. pontra beállíttatik, s a Nonius állása mindannyiszor leolvastatik. Munka közben szorgalmasan utána kell nézni, valjon a félkör irányzója nem mozdult-e el az első pontról? s ha ez mutatkoznék, ki kell azt igazítni. A leolvasott számokat a collimatio, illetőleg a beosztási és külpontossági hibáktól ki kell javítni; akkor azok az illető sugároknak az első sugárrali hajlásszögeit fogják adni. Ha pedig az egyes sugárok közt bezárt szögeket kellene meghatározni, ezeket az illető levolvasások közötti különbségek fogják szolgáltatni.

2) Ha a félkör irányzóját csak biztositás végett akarjuk használni, akkor azt akárminő tisztán látható tárgyra be lehet állítni, s a felveendő pontokat az Alhidade irányzójával kell beirányozni. Ekképen történik a mérés akkor is, ha az Astrolabium csak egy irányzóval van felszerelve.

3) Ha az Astrolabium távcsővel és paránycsavarral van ellátva, akkor a szögmérést a Mayer szorzási módja szerint is lehet véghezvinni; és a szöget — a műszer tetemes fogyatkozásai daczára — 5 — 10" pontossággal meg lehet határozni.

165. §. Tájola.

A tájola a delejtűnek azon ösmeretes tulajdonságára van alapítva, hogy az szabadon függő állapotban mindig a hely delejes déllője irányában jön nyugvásba. Szerkezete következő. Egy 6" oldalhosszú négyzet alakú sárgaréz táblácskán *A* (139. ábra) egy 5" átmérőjü üres henger *B* van megerősitve. Ennek középpontjában egy aczélból készült, felső végén 15—20° alatt hegyesre köszörült simított és edzett kúpalakú peczek *C* van felállitva, melynek hegyén rhombus, vagy négyoldalu prisma alakú, végén ékformára metszett $4^1/_2$" hosszú delejezett tű *D* szabadon leng. Ezen tű közepén át van fúrva; a lyukban egy kis kupakocska megerősitve, melynek teteje achat, vagy más igen kemény és simítható kőből van készitve. Ezen kőben kupdad alakú gödröcske van köszörülve, és a surlódás csökkentése végett nagy tökélylyel kisimítva. A *B* henger oldalán a tű felületével egyenlő magasságban egy vékony lemez karika *E* van megerősitve, melynek körülete fokokra van beosztva, s ezen beosztáson a tű hegyének állását le lehet olvasni. Az *A* táblácskának két oldalábó az *F, F* karok nyúlnak ki nézgékkel felszerelve, melyeknek iránysíkja a beosztott kör középpontján megyen keresztül. Néha az egész készülék egy fa tokban van beillesztve; az irányzó pedig egy fa csőből áll, mely a tok oldalából kinyuló csap körül foroghat. Olykor távcsőt is találunk a tájolával kapcsolatban; ámbár azon csekély pontosság, melyet a leolvasásban el lehet érni, nincsen arányban azon tökélylyel, melyet a távcsőveli irányzás szolgáltat; ennélfogva teljesen nélkülözhető. Az egész készülék egy állványon van felállítva, mely az Astrolabiuméval tökéletesen egyenlő, és egy függélyes csap körül foroghat. Meg kell említni, hogy a *B* henger üvegtáblával van befödve, hogy a por annak belsejéhez olyan könnyen ne férhessen, s a léghuzam a delejtűt ingadozásba ne hozza. Továbbá a delejtűt egy emeltyűvel, melynek rövidebb vége a *B* hengeren kivül van, fel lehet emelni, s a fedő üveghez szorítni, azért, hogy szállitás közben a peczek hegye a tű erőszakos rázkodásai által meg ne sérüljön, s a tű delejes ereje csökkenést ne szenvedjen.

166. §. A tájola kiigazitása.

A tájola használhatóságához megkivántatik:

1) Hogy a delejtű érzékeny legyen, azaz: valamely erő által lengésbe hozatván, nagyszámú lassan kisebbedő lengéseket csináljon, végre a beosztásnak mindig ugyanazon pontjánál jőjjön nyugvásba. Az érzékenység a tű delejes erejével, mely a tű felületével nő, egyenes, a peczek végén lévő súrlódással pedig forditott viszonyban áll. A tűt tehát lehetőleg könnyűnek kell csinálni, s a kupak belső üregének felületét nagy tökélylyel ki kell simítni.

2) A delejtű közeléből el kell távolítni minden vas részeket. Ezek ugyanis a delejtűre hatván, annak tengelyét a hely delejes déllője irányától eltérítik. Különösen károsan hatnak a tájola-szelenczének anyagában létező vas részecskék; minthogy ezek a tű hegyéhez közel esvén, a vonzó erő pedig a távnak négyzetével megforditott viszonyban növekedvén, a tű állását tetemesen megváltoztatják.

3) A peczek hegyének a beosztott kör középpontjába kell esni. Ezt onnan lehet megösmerni, hogy a tű végei, akármint forditassék a tájola tengelye körül, mindig 180°-al különböző pontokon állanak. Ha külömbség mutatkoznék, akkor a két végeken történt leolvasások közötti számtani közép a külpontossági hibától ment eredményt ád. (Lásd 150. §. 3).

4) Az iránysíknak a kör középpontján kell keresztül menni. Ellenkező esetben a hiba befolyását a 149. §. szerint lehet megitélni.

Midőn a tájolát csak szögmérésre használjuk, a nélkül, hogy az irányoknak a déllőhözi fekvése figyelembe vétetnék: akkor az eddig előszámlált tulajdonságok elegendők. De ha az irányok absolut elhajlásának meghatározásáról, vagy a delejes déllő kitűzéséről van szó, akkor még következő vizsgálatok szükségesek.

5) A delejtű tengelyének a tű hegyein kell keresztül menni. Ennek megvizsgálása végett a tájola üveg fedőjét, mely egy karika által van leszorítva, felemelvén, a tűt a peczekről levesszük; egy finom fonal végén kettős hurkot kötünk, s a tűt bele fektetjük; a fonal másik végét pedig egy fa pálczácska végén metszett hasadékba behúzzuk. (190. ábra). Az így felszerelt pálczácskát egy vizszintes asztal-tábla felett 10—12″ magasságban megerősítjük úgy, hogy a tű az asztal felett 3—4‴-nyira annak felületétől szabadon függjön. Ha a tű egy darab idő mulva nyugalomba jött, egy ív papirost teszünk alá az asztalra, melyen egy finom egyenes vonal van húzva; s a szemet körülbelől a fonal felibe tartván, a papirost úgy helyezzük el, hogy a tű végei a vonalra vetődjenek. Ezután a tűt a hurokban megfordítjuk, úgy hogy annak felső lapja alulra essék; s ha a tű hegyei ismét a vonalra vetődnek, akkor annak tengelye helyes, ellenkező esetben az eltérés a kettős hibát ábrázolván, melyet csak a gépész javíthat ki.

6) A 0 és 180°-on keresztül menő átmérőnek a tájola négyszögü táblácskája egy oldalával párhuzamosnak kell lenni; ekkor azután, ha a tű végei 0 és 180°-on állanak, a tábla széle a hely delejes déllője irányát fogja kitűzni. Ennek vizsgálata következő. Miután az előbbi pont szerint az ív papiros az asztalon megállapittatott vala, a rajta lévő vonal a hely delejes déllőjét ábrázolja. Most a tájolát az állványról levévén, a tábla szélét a vonal

mellé illesztjük; s ha a tű végei 0 és 180°-ra mutatnak, akkor a kivánt párhuzamosság megvan. A mutatkozó hibát a beosztott körnek tengelye körüli forditása által lehet kiigazítni.

7) Végre meg kell vizsgálni, valjon az irányvonal párhuzamos-e a tábla szélével vagy nem? E végre egy vonaszt egy asztalra helyezvén, annak élét valamely távollévő pontra irányozzuk, és mellette egy finom vonalat húzunk. Ezután a tájola táblácskája szélét a vonal mellé helyezvén, megnézzük, valjon az irányzó ugyanazon tárgyra mutat-e vagy nem? utóbbi esetben egyik vagy másik nézgét oldalt kell mozdítni, mig az irányzó a nevezett tárgy felé néz, s a parallelismus egészen helyreáll.

8) A delejtű hossza $4^1/_2$—5"-et meg nem haladván, a beosztott kört legfeljebb csak $^1/_2$°-okra lehet beosztani; s miután a tű végei csak egyszerű mutatókat képeznek, apróbb részeket csak szabadszemmeli beosztás által lehet megkülönböztetni. Ha tehát egy osztályrésznek még $^1/_5$ részét meg lehet becsülni, a leolvasható legkisebb szög 6 percz fog lenni s ennél nagyobb pontosságot a tájolától várni nem lehet. De ha a leolvasást nagyobb pontossággal lehetne is eszközölni, annak gyakorlati haszna nem volna, mivel a hely déllőjének fekvése naponként olyan tetemes ingadozásoknak van kitéve, melyek a fentebbi leolvasási hibát meghaladják, a nélkül, hogy a műszerben nyomot hagynának magok után. Innen következik, hogy a tájola csak csekélyebb fontosságu felvételeknél, vagy csak rövid távokra használható, melyeknél 5' hiba a pont fekvésében még érezhető változást nem okoz.

*167. §. Schmalkalder tájolája.

Ez (191. ábra) az előbbitől abban különbözik, hogy osztályzata kemény papirosra *a* van rajzolva, mely a delejtű *b* felületén ugy van megerősitve, hogy a kör középpontja a forgás tengelyébe esik; a szemnézge helyett pedig egy üveg prisma *c* van alkalmazva, s a beosztott kör felé néz, másik pedig függélyes állású, s egészen be van fedve egy kis lyukon *d* kivül, mely a prisma szélére esik. Ha ezen lyukacskán átnézünk, kétféle tárgyakat látunk, u. m. a hajszálat a tárgygyal együtt, és a beosztott kört, mely a prisma átfogó oldalán történt visszavetés következtében szinte függélyes állásban látszik; s ha a hajszál a tárgyra beállittatik, az egyszersmind a beosztott körnek valamely pontját találni fogja, melyet le lehet olvasni. Hogy a beosztást a prismán keresztül tisztán lehessen látni, annak alsó oldala gömbfelületre van köszörülve, mint valamely üveglencse, s épen ugy is hat, mint valamely nagyitó üveg; mig az átfogó csak egyszerű tükör szerepet játszik. Ezáltal a beosztott kör képe körülbelől a tárgynézge távolába tolatik hátra, s nagyítva látszik a szem előtt; mi a leolvasást tetemesen könnyíti.

Ezen szerkezetnek gyenge oldala az, hogy a papiros tányér beosztása az anyag változékonysága, különösen pedig a nedvesség befolyása következtében igen tökéletlen; fémből pedig a tányért készítni annak tetemes súlya miatt nem lehet a nélkül, hogy a tű érzékenysége ne csökkenne. Továbbá a körnek központositása is igen nagy nehézséggel jár. Ezen okokból a műszer csekély alkalmazásban részesül.

168. §. A tájolávali szögmérés.

Ha a tájola a 166. §. minden pontjaira nézve helyesnek találtatott, akkor az egyes irányoknak megfelelő leolvasások azoknak delejes elhajlásait fogják szolgáltatni; ha pedig a leolvasások egymásból levonatnak, a különbségek a megfelelő vonalak közt befoglalt szögeket fogják adni.

Ha az 5, 6, 7 pontokban jelölt tulajdonságok hiányoznak, akkor a leolvasásokban egy állandó hiba fog létezni; de a különbségek változatlanok maradnak.

Ha egy egyenes vonalnak két végén az elhajlások megméretnek, ezek egymástól 180°-al fognak különbözni, mivel az iránykülönbségek is 180°-ot tesznek.

169. §. Fallon tűkörvonasza.

1) Csekélyebb fontosságu mérésekre, különösen katonai czélokra, hol igen nagy pontosság nem kivántatik, jó szolgálatot tesz a Fallon tűkörvonasza. Ez (192. ábra) egy 6—8'' hosszú vonaszból *A* áll, melynek egyik végén egy merőlegesen felállitott nézge *B*, a másikon pedig 2—3'' átmérőjű beosztott félkörrel ellátott tányér *C* van helyezve. Ennek középpontjában a tányérra merőlegesen egy körülforogható ráma van helyezve, de felső feléről a fém boriték le van kaparva, s ezen üvegen a forgástengely irányában egy vonás *D* van bemetszve, mely az

irányszálat helyettesíti. A ráma alsó részéből egy kar *E* nyúlik ki, végén mutatóval ellátva, melynek állását a beosztott körön le lehet olvasni. A félkör 360 egyenlő részre van beosztva, melyek mind a két oldalról közép felé 0°-tól 180°-ig számoztatnak ugy, hogy a középső vonal 180°-al van jelölve. A fél fokok azért vannak egész fokok gyanánt számozva, mert ha a tükör tengelye körül forgattatik, az 58. §. szerint a visszavetett sugár mozgása kétszerte nagyobb, mint a tűköré. A mutatón legfeljebb 10′-et lehet leolvasni.

2) Ezen műszernek főbb kellékei az irányzónak már ösmeretes tulajdonságain kivül ezek:

a) A tűkörnek a vonasz lapjára merőlegesen kell állani. Ennek megvizsgálása végett válasszunk két függélyes tárgyat, p. o. két házsarkot vagy gondosan függélyes állásban kitűzött rudat, melyek az álláspontból nézve 10—15° távban vannak egymástól. Azután a műszert egy vizszintes asztalra helyezvén forditsuk úgy, hogy a nézgén keresztül nézvén, egyik tárgy a tűkör felső részében a hajszál közepében álljon, és forditsuk a tűkört, mig a másik tárgy is annak alsó részében az első tárgyhoz közel fog látszodni. Ha most mind a két tárgy párhuzamosnak látszik egymással, akkor a tűkör fekvése helyes; ellenkező esetben pedig a tűkör a vonasz lapjára hajlik, és egy csavarka által kiigazítható. Azért választottunk csak 10—15° nagyságú szöget, mivel ekkor a tűkör az iránysíkkal csak kis szöget képezvén, a hajlásszög hatása igen szembetünő lesz.

b) Az irányzó vonalnak a vonasz lapjára merőlegesen kell állani. Ennek megvizsgálása végett fordítsuk a tűkört, mig az az iránysíkra körülbelől merőlegesen fog állani, s mindenben a 159. §. 2. útmutatása szerint cselekedjünk.

c) Az irányzó vonalnak a forgás tengelyén kell keresztül menni, mit úgy lehet magvizsgálni, hogy a műszer egy asztalra tétetvén, az irányzó valamely távol lévő pontra beállíttatik, s a tűkör fordittatik tengelye körül, mely közben a vonalnak mindig a ponton kell maradni.

d) Végre meg kell vizsgálni, valjon a mutató 180°-on áll-e, midőn az iránysík a tűkör síkjára merőleges? E végre forditsuk a tűkröt, mig a szemnézge hasadékján átnézvén, annak képét az irányzó vonás metszeni látszik; ekkor az iránysík a tűkörre merőleges, s a mutatónak 180°-ot kell mutatni. Ellenkező esetben a különbség a collimatio-hibát adja.

3) Ha ezen műszerrel szöget akarunk mérni, azt szabad kézzel körülbelől vizszintes fekvésben szemünk előtt tartjuk, az irányzót a szög egyik szárának végpontjára irányozzuk, s a tűkört fordítjuk, mig a másik tárgy képe a tűkörben szintén a vonásra esik. Ha az irányzás helyesen vitetett véghez, mind a két tárgynak az irányvonalon kell látszodni.

*170. §. Peczelt Cathetometerje.

Az előbbitől lényegére nézve nem különbözik a Peczelt Cathetometerje, mely nevét onnan vette, hogy általa valamely pontnak derék összrendezőit illetőleg egy derék △-nek befogóit könnyen meg lehet határozni. Fő különbség köztük a kör beosztásában mutatkozik, mely a Cathetometernél a szögek érintőit szolgáltatja. Ez által a részek egyenetlenekké lévén, Noniust alkalmazni nem lehet, hanem az apróbb részeket vagy meg kell becsülni, vagy a szögmérést úgy kell intézni, hogy a mutató mindig valamely osztályvonalra essék. Ezen utóbbi czélt a szerző úgy éri el, hogy ha a szög csúcsában állván, s a tárgyakat a tűkör irányvonalán egymásra beállitván, a mutató két vonás közé esnék, a mutatót a közelebbi vonásra beállitja, s az álláspontot a megmérendő szög egyik szárán addig változtatja, mig a tárgyak ismét a tűkör vonásán takarják egymást; s ekképen a szöget csúcson kivül méri meg, a csúcskivüliséget pedig külön méri meg, hogy azt a pontoknak a térképen felrakása alkalmával figyelembe lehessen venni. A műszernek állványul egy pálcza szolgál, melyet a szükséghez képest meg lehet hosszabbítni, hogy az irányzó a mérnöknek szeme magasságába essék. Bővebb ösmertetést lehet nyerni »Peczelt kis Cathetometere, magyarra fordítva Sztoczek József által. Budán 1845.« czímű munkácskából.

171. §. Szögmérés és szerkesztés a papiroson.

Ha valamely rajzolatban adott szög nagyságát kell meghatározni, vagy a mezőn megmért szöget a papiroson kell szerkeszteni, erre különböző módok kinálkoznak; u. m.

1) Legyen a 193. ábrában a megmérendő szög ACB, húzzunk a csúcspontból C 5—6" sugárral körívet, mely a szárakat D és E pontokban metszi, tegyük fel erre a D pontból a sugár hosszát, mely F-ig ér, és DF ív $= 60^0$. Ezután hasonlítsuk össze a DE ívet DF-el, feltévén azt erre egy körzővel a hányszor lehet, — jelen esetben 2-szer. — A maradékot $2F$ hasonlítsuk össze DE-vel, — jelenleg 2-szer foglaltatik benne, — s a maradékot $2'E$ hasonlítsuk össze $2F$-el, s igy tovább, a maradékot mindig az előtte való maradékkal hasonlítván össze, mig olyan maradékra bukkanunk, mely az előbbiben maradék nélkül benn foglaltatik, vagy a maradékot szabad szemmel meg lehet becsülni. Jelen esetben ha $DF = 60^0$, $DE = \alpha$, 1-ső maradék $2F = m'$, 2-ik maradék $2'E = m''$ stb., következő kifejezéseket nyerünk:

$$\begin{array}{llll}
DF = 2.DE + F2, & \text{vagy} & 60^0 & = 2\alpha + m', \\
DE = 2.F2 + E2', & » & \alpha & = 2m' + m'', \\
F2 = E2' + F1'', & » & m' & = m'' + m''', \\
E2' = F1'' + E1''', & » & m'' & = m''' + m^{IV}, \\
F1'' = E1''' + F1^{IV}, & » & m''' & = m^{IV} + m^{V}, \\
E1''' = 2.F1^{IV} + \frac{1}{5} F1^{IV}, & » & m^{IV} & = \left(2 + \frac{1}{5}\right) m^{V} = \frac{11}{5} m^{V}.
\end{array}$$

Innen hátra felé számítva lesz:

$$m''' = \left(1 + \frac{11}{5}\right) m^{V} = \frac{16}{5} m^{V},$$

$$m'' = \left(\frac{16}{5} + \frac{11}{5}\right) m^{V} = \frac{27}{5} m^{V},$$

$$m' = \left(\frac{16}{5} + \frac{27}{5}\right) m^{V} = \frac{43}{5} m^{V},$$

$$\alpha = \left(\frac{86}{5} + \frac{27}{5}\right) m^{V} = \frac{113}{5} m^{V},$$

$$60 = \left(\frac{226}{5} + \frac{43}{5}\right) m^{V} = \frac{269}{5} m^{V},$$

Ennélfogva a két utolsó egyenletből lesz:

$$\frac{\alpha}{60} = \frac{113}{269}, \text{ vagyis } \alpha^0 = \frac{113}{269} 60^0 = 25^0\ 13'.$$

Ezen mód alkalmazása igen fáradságos, noha a szöget 2—3′ pontossággal meg lehet határozni; ezért csak egyes esetekben, s más egyszerűbb eszközök hiányában alkalmazható.

2) Húzzunk a szög csúcsából tetszés szerinti sugárral r egy

ívet, mely a szárakat metszi. Mérjük meg a húr hosszát c ugyanazon léptékkel melyről r levétetett, akkor lesz:

$$sin\,\frac{\alpha}{2} = \frac{c}{2r}.$$

Megfordítva ha egy egyenes vonal mellé egy adatott csúcspontból valamely ösmeretes szöget α fel kell tenni, akkor tetszés szerinti sugárral r a csúcspontból egy körívet húzunk, a megfelelő húr hosszát ezen képlet szerint $c = 2r sin\,\frac{\alpha}{2}$ kiszámitjuk, s ezt a kör metszéspontjából az ívre feltévén, a végpontot a csúcscsal összekötjük.

A sugár hosszát mind a két esetben legalább 5"-nek kell venni, ha azt akarjuk, hogy a szög 1—2'-ig hibátlan legyen.

Ha a sugárt 5"-nek vesszük, az utolsó képlet lesz:

$$c = 10''\,sin\,\frac{\alpha}{2},$$

melyet a természetes sinus táblából egyszerűen ki lehet irni, csupán a tizedes pontot kell egy helylyel jobbra tenni.

De vannak ezen czélra számitott húrtáblák is, minő a Stampfer logar tábláiban, s ezen könyv végén is V. szám alatt találtatik. Ebben az első rovat a szögeket 20'-enként növekedve, a második a megfelelő húrok hosszait, a harmadik az arányos toldalékokat 2'-enként foglalja magában. A sugár = 500. Legyen p. o. 35° 47' húrja keresendő; az V. táblából.

$$\begin{array}{r}
35^0\ 40'\text{-re esik} = 306{\cdot}2 \\
7'\text{-re}\ \ » \ = \quad 1{\cdot}0 \\
\hline
\text{Összesen} = 307{\cdot}2.
\end{array}$$

Tompa szögek szerkesztése tökéletlenebb, mint a hegyeseké (lásd 134. §.); ezért tompa szögek helyett a mellék hegyeseket kell szerkeszteni.

3) Húzzunk a szög egyikének valamely pontjából a másikra merőlegest; mérjük meg ennek hosszát p, a sugáréval együtt r valamely léptékkel; akkor lesz:

$$sin\,\alpha = \frac{p}{r}.$$

Ha megfordítva egy egyenes vonal mellé valamely adott csúcspontból egy adott szöget α kell szerkeszteni, akkor egy tetszésszerinti sugárral r a merő hosszát kiszámítjuk ezen képlet szerint:

$p = r \sin\alpha$; azután a sugár hosszát a vonalra feltévén, a talált pontból p sugárral körívet húzunk, s végre ehhez a csúcspontból érintőt rajzolunk.

Ezen szerkezet annál tökéletlenebb, mennél közelebb esik a kör érintő pontja a csúcsponthoz; mivel a vonasznak a pontokhoz illesztése annál nagyobb hibának van kitéve.

*Ugyanazon következtetéshez jutunk, ha a p és r megmérésében ejthető hibákat vesszük is figyelembe. Ugyanis a fentebbi egyenlet szerint:

$$\sin\alpha = \frac{p}{r},$$

ha $p \ldots \triangle p$-vel, $r \ldots \triangle r$-el változik, miáltal α is $\triangle \alpha$-val fog változni, akkor lesz:

$$\sin(\alpha + \triangle\alpha) = \frac{p + \triangle p}{r + \triangle r}.$$

Ezen egyenleteket egymásból levonván, rövid átváltoztatás után

lesz: $$2\cos(\alpha + \triangle\alpha)\sin\frac{\triangle\alpha}{2} = \frac{\triangle p}{r + \triangle r} - \frac{p\triangle r}{r(r + \triangle r)},$$

vagy elég közelítéssel:

$$\triangle\alpha = \frac{\triangle p}{r\cos\alpha} - \frac{p\triangle r}{r^2\cos\alpha},$$

és ha az utolsó tagban $\frac{p}{r}$ helyett $\sin\alpha$ tétetik, lesz:

$$\triangle\alpha = \frac{\triangle p}{r\cos\alpha} - \frac{\triangle r}{r} tg\alpha.$$

Ezen képletnek mindenik tagja a legkisebb értéket veszi fel, ha $\alpha = 0$; ellenben ∞ lesz, ha $\alpha = 90^0$.

Tegyük p. o. $\triangle p = \triangle r = 0''\cdot002$, mely hibát könnyen meg lehet ejteni, $r = 5''$, $\alpha = 45^0$-nak, akkor az első tag értéke

lesz: $$\frac{0\cdot002}{5 \times 0\cdot7} = 0\cdot0006, \text{ körülbelől} = 2',$$

a másodiké pedig lesz:

$$\frac{0\cdot002}{5} = 0\cdot0004, \text{ körülbelől} = 1',$$

45^0-nál nagyobb szöget tehát ezen módon szerkeszteni nem kell.

4) Emeljünk fel a szög egyik szárának valamely pontjából egy merőlegest, mig az a másik szárat metszi; mérjük

meg annak hosszát p, valamint a sugárét is r, valamely léptékkel, akkor lesz:

$$tg\alpha = \frac{p}{r}.$$

Ha megfordítva valamely egyenes vonal mellé egy adatott szöget kell feltenni, akkor a csúcspontból az egyenes vonalra a sugár hosszát feltévén, ennek végpontjából a p hosszat merőlegesen felállítjuk, melyet ezen képlet szerint kell kiszámítni:

$$p = r tg\alpha,$$

s a végpontot a csúcscsal összekötjük.

*A szerkesztési hibák hatását következőből lehet megitélni. Gondoljuk, hogy a $CDE\triangle$-ben (194. ábra) $r \ldots \triangle r$-rel, $p \ldots \triangle p$-vel, és a $D = 90^0 \ldots \omega$-val változik: akkor α is fog $\triangle\alpha$-val változni, és a ferde $\triangle$-ből következik:

$$tg(\alpha + \triangle\alpha) = \frac{(p + \triangle p)\ sin(90^0 + \omega)}{(r + \triangle r) - (p + \triangle p)\ cos(90^0 + \omega)}.$$

Ebből levonván a fentebbi egyenletet, lesz:

$$tg(\alpha + \triangle\alpha) - tg\alpha = \frac{(p + \triangle p)\ cos\omega}{r + \triangle r + (p + \triangle p)\ sin\omega} - \frac{p}{r},$$

vagy rövid kifejtés után

$$\frac{sin\triangle\alpha}{cos(\alpha + \triangle\alpha)\ cos\alpha} =$$

$$\frac{pr(cos\omega - 1) + rcos\omega\triangle p - p\triangle r - p(p + \triangle p)\ sin\omega}{r\{r + \triangle r + (p + \triangle p)\ sin\omega\}},$$

vagy elég közelítéssel:

$$\frac{\triangle\alpha}{cos\alpha^2} = \frac{r\triangle p - p\triangle r - p^2\omega}{r^2},$$

és ha $\frac{p}{r}$ helyett $tg\alpha$ tétetik, lesz rövid összehuzás után:

$$\triangle\alpha = cos\alpha^2.\frac{\triangle p}{r} - \frac{1}{2}\ sin2\alpha\frac{\triangle r}{r} - sin\alpha^2.\ \omega.$$

Ezen tagok közül egyik sem lehet végtelen, akármi legyen az α értéke, ennélfogva a szerkezet minden körülmények közt használható. Ha p. o. $\frac{\triangle p}{r}$, $\frac{\triangle r}{r}$, és ω egymással egyenlőknek vétetnek, mi körülbelől a dolog természetével megegyez, és a tagok jegyei egyenlőknek gondoltatnak, hogy a legkedvezőtlenebb eset álljon elő, akkor a hiba lesz:

$$\triangle\alpha = (cos\alpha^2 + \frac{1}{2} sin2\alpha + sin\alpha^2)\,\omega = (1 + \frac{1}{2} sin2\alpha)\,\omega,$$

ennek pedig legnagyobb értéke áll elő, ha $sin2\alpha = 1$, azaz $\alpha = 45^0$. Ezen legnagyobb hiba lesz:

$$\triangle\alpha = \frac{3}{2}\omega.$$

Ebből látható, hogy az érintő általi szerkesztés a legjobbak közé tartozik, és használhatósága csak az által szenved korlátot, hogy az érintő 45^0-ot meghaladó szögeknél igen nagy, úgy hogy gyakran a rajztáblán nincsen is elég hely annak felrajzolására.

172. §. Szög-felrakó műszerek.

Ugyanezen czélok elérésére különös műszerek is vannak használatban, u. m.

1) A s z ö g - f e l r a k ó — Transporteur. — Ez legegyszerűbb alakjában 3—4" átmérőjű egyes fokokra beosztott félkörből áll, melynek átmérője egy vonasz éle, középpontja pedig egy pont, vagy vonás által van megjelölve. Ha ezen pont a megmérendő szögnek csúcsába, a vonasz éle pedig annak egyik szárára helyeztetik, akkor a másik szár a beosztott körnek valamely pontját fogja metszeni, melyen a szög mértékét le lehet olvasni. A számozás két oldalról van intézve. Ezen szögrakó pontosabb szerkezetekre nem használható, mivel rajta legfeljebb csak 10—15′-et lehet leolvasni.

2) Újabb időben Alhidade és Noniussal felszerelt szögfelrakók is készíttetnek (195. ábra), melyeken a szög mértékét 1—2′-nyi pontossággal le lehet olvasni. Ezeknek szerkezete az Astrolabiuméval lényegében megegyez, különbség csak abban van, hogy az irányzó hiányzik, a középponti csap, mely körül az Alhidade forog, át van törve, s annak középpontja megjelölve. Az Alhidade-vonasz élének a beosztott kör középpontján kell keresztül menni, és ha ez az átmérőt képező vonasz élével összeesik, a Nonius mutatójának 0-án kell állani.

Hogy a szögmérés és felrakás a fentebbi pontossággal eszközöltethessék, a beosztott kör sugárát 5—6″-nek kell venni. Czélszerű az Alhidade végén egy rugós lemezkét k erősítni meg egy finom tűvel ellátva, mely lenyomatván, az Alhidade éle hosszában egy kis lyukacskát szúr, s ezáltal a szög szárát megjelöli.

3) Húrlépték. Ez (196. ábra) egy átlós léptékhez hasonlít s úgy van készítve, hogy arról akármely 0—90° közt eső szögnek bizonyos sugár hosszához tartozó húrját körzővel le lehet venni. Szerkezete következő. Egy 8" hosszú, 1" széles sárgaréz lemezen egymástól mintegy $1^1/_2$''' nagyságú egyenlő távokban 7 párhuzamos egyenes vonal van húzva, s az első vagy fővonalra az egyes fokoknak megfelelő húrok hosszai fel vannak rakva. Ezen pontokon keresztül a fővonalra keresztben parallelák húzatnak, melyek az utolsó vonalat az elsővel egyenlő osztályrészekre osztják. Ezután a két szélső parallelák szomszéd pontjai átlókkal összeköttetnek, melyek által a többi parallelák is apróbb részekre osztatnak. Végre a felső sor osztályzatán minden 10-ik vonás számokkal, az 5-ik pedig hosszabb vonással jelöltetik meg; a második harmadik negyedik stb. párhuzamosok előtt pedig 10, 20, 30, . . . percz iratik, minthogy mindenik keresztvonal, és az ugyanazon pontból húzott átló közt a parallelákon elmetszett darabok egymáshoz úgy állanak, mint az elől irt számok. Tehát a húrléptékről levett húrok hosszai azokkal, melyeket a húrtábla szolgáltat, tökéletesen egyenlők.

Ezen lépték használata igen egyszerű. Legyen p. o. 36° 40' szerkesztendő, akkor a 60°-ú húrt, mely a sugár hosszával mindig egyenlő, a lépték fővonaláról levévén, azzal a szög csúcsából körívet húzunk; ezután a körző egyik hegyét a 40'-es párhuzamos elején, a másikat pedig a 36°-os átlónak a nevezett párhuzamossali metszéspontjára beállitjuk, s az ekkép nyert húrt a körívre feltesszük, s a pontot a csúcscsal összekötjük. Ha a szög 36° 46' volna, akkor a 40 és 50-es párhuzamosok közt körülbelől a hézag $^6/_{10}$ részével lejebb kell a körző hegyeit beállítni úgy, hogy azok a fentebb nevezett kereszt- és átlóvonalakon állván, a nyilás a párhuzamosokkal körülbelől parallel legyen; a mint azt a pontozott *uv* vonal mutatja.

B. Olyan szögmérők, melyek a természetes szögeket fokokban mérik.

*173. §. Borda szorzóköre.

Mielőtt Reichenbach és Fraunhofer a szintezők kiköszörülését a tökélynek azon fokára vitték, melyet az ujabb műszereken bámulunk, a mérnökök törekvése oda volt irányozva, hogy a szög vetületének meghatározása a mennyire lehet, a szintezőtől független módon eszközöltessék. Ezen czélt el lehet érni, ha az irányvonalak közt befoglalt szög a természetes síkban méretik meg, azon magassági szögekkel együtt, melyeket az irányvonalak a vizszintes síkkal képeznek; mely adatokból azután a szög vizszintes vetületét ki lehet számítni. Az ezen czélra szolgáló mérő szerek különösen két jellemző tulajdonsággal birnak, u. m. a tányért a térben minden irányba lehet hozni, és a távcső a tányérral mindig párhuzamos fekvésü. Ezen szögmérők közt legnevezetesebbek:

1) A Borda szorzóköre. Ennek felső része (197. ábra) a Theodolittól csak abban különbözik, hogy a távcső *A* az Alhidadéval párhuzamosan szilárdul össze van kötve és a tányér csapjának perselyén *B* lábak helyett egy tengely *C* van keresztben megerősitve, mely egy 16—18" magas, körülbelől függélyes állásu oszlopnak ágas alaku végein *D* ágyakban nyugszik. A *B* persely végén egy ellensúly *E* van helyezve, mely a tányért, s a hozzá tartozó részeket ellensúlyozza ugy, hogy az egésznek súlypontja a *C* tengelybe esik. Ekképen a tányért a *C* tengely körül forgatván, tetszés szerinti hajlásba lehet hozni, s az *F* szorító készülékkel minden állásban meg lehet erősítni, és a parány-csavarral finom mozgásba lehet hozni. Az oszlop továbbá hosszában ki van fúrva, és egy csap *G* körül foroghat, mely három lábon nyugszik. Ezen lábak, mint a Theodolitnál, emelő csavarokkal vannak felszerelve, melyek által a csapnak függélyes állást lehet adni. Ezen két egymástól független mozgás közrehatása által a tányért a térben tetszés szerinti fekvésbe lehet hozni, és a távcső segitségével, melynek irányvonala a tányérral párhuzamos, a megmérendő szög síkjával párhuzamossá lehet tenni. A lábakon egy beosztott kör *H*, az oszlopon pedig egy kar *I* van megerősítve, Noniussal ellátva, melyen egyes perczeket lehet leolvasni. Ezen beosztás csupán a műszer kiigazitására szolgál, szögmérésre pedig kivétel nélkül az *A* tányér használtatik. Végre a *B* persely hosszában és arra keresztben szintezők *K*, *L* vannak megerősítve, melyek a *D* oszlop és a tányér síkjának függélyessé tételére szolgálnak, s ha azok az ujabb szintezőkön tapasztalt érzékenységgel nem birnak is, a fennforgó czélra tökéletesen elegendők.

2) A Borda körének felállitása következőképen történik. Miután a G csap vége az álláspont felett függélyesen beállittatott, s a csap közel függélyes állásba hozatott, a tányért a C és G tengelyek körüli forditás által a szög síkjával párhuzamossá teszszük, mit onnan lehet megösmerni, hogy a távcső irányvonala a két beirányzandó tárgynak azon pontjain megyen keresztül, melyekre az irányzást akarjuk intézni. Ezen fekvésben tehát a tengelyek megerősittetnek, a szögmérés egyszerű módon vagy szorzás által eszközöltetik, s a szög kiszámitása a Theodolitnál előadott módon vitetik véghez.

3) Innen következik, hogy a Borda-kör tányérjának az Alhidadévali összeköttetésére nézve ugyanazon kellékekkel kell birnia, mint a Theodolitnak; de az irányvonalnak a tányér síkjával párhuzamosnak kell lenni. Ennek megvizsgálása végett hozzuk a tányért körülbelől függélyes állásba, és irányozzuk a távcsőt közel vizszintes fekvésben valamely igen távol lévő pontra. Ezután forditsuk a műszert a G csap körül 180⁰-al, mit az alsó körön lehet megitélni, s forditsuk az Alhidadét tengelye körül szintén egy félkörrel, s ha az irányvonal még mindig az előbbi ponton megyen keresztül, akkor a kivánt párhuzamosság megvan; ellenkező esetben az eltérés a kettős hibát ábrázolván. A hibát a diaphragma csavarkáival lehet kiigazítni, az irányszálat a két pont közt középre beállitván, s a műtételt addig kell ismételni, mig a megforditás után semmi különbség sem látszik.

4) Ha a Borda körével magassági szöget akarunk mérni, a tányért függélyes állásba kell hozni, mi a B persely hosszában fekvő szintező K által eszközöltetik. Ezt tehát előbb ki kell igazítni. E végre a tányért szabad szemmel függélyes állásba hozván, a távcső irányvonalát valamely 30—40⁰ magasságban lévő tárgyra beállitjuk; azután a műszer előtt az asztalon egy tányérba vizet öntvén, melynek felülete nyugodt állapotban természetes vizszintes tűkröt képez, forditsuk az Alhidadét tengelye körül, mig a tárgy képe a víz tűkrében látszodván, ismét a távcsőbe vettetik vissza. Ha ez tökéletesen az irányvonalon látszik, mint előbb, akkor a tányér függélyes; ellenkező esetben azt a C tengely körül egy keveset mozdítni kell, mig a két feltételnek elég nem tétetik. Ebben az állásban azután a szintező buborékjának

középen kell állani, s ha ez nem történnék, azt az igazitó csavarka által be kell állítni.

Ha a két irányvonalnak megfelelő Nonius állások leolvastatnak, a különbség közel a kettős szöget fogja szolgáltatni.

* 174. §. Vizszintes áttétel.

A ferde síkban megmért szöget, mielőtt az a pontok megállapitására felhasználtathatnék, a vizszintes síkra kell vetítni. E czélra gondoljunk a 177. ábrában az álláspontból C, mint középpontból egy gömbfelületet, húzzunk az állásponton keresztül egy vizszintes síkot, mely a gömböt a DE legnagyobb körben metszi. Legyen ennek sarkpontja, vagyis a tetőpont H. Húzzuk a CM és CN irányvonalakat, rajtok keresztül függélyes síkokat HMM'', HNN'', melyek a vizszintes kört M'', N'' pontokban metszik: ekkor $MCN = \alpha'$ a megmért szög, annak vizszintes vetülete pedig $M''CN'' = \alpha$ fog lenni. Az ezek közötti összefüggés meghatározása végett legyenek a magassági szögek $MCM'' = h$, $NCN'' = h'$, akkor a HMN gömb $\triangle$-ből, melynek mind a három oldala ösmeretes, az MHN szög pedig az $M''N'' = \alpha$ szöggel egyenlő, lesz:

$$cos\alpha = \frac{cos\alpha' - sinh\ sinh'}{cosh\ cosh'}.$$

175. §. A bordakörreli szögmérés hibái.

A Borda köréveli szögmérésnek nevezetesebb hibaforrásai azokon kivül, melyek a Theodolitnál is előfordultak és már tüzetesen tárgyaltattak, ezek:

1) Ha az irányvonal a tányérral nem párhuzamos. Legyen DE (178. ábra) a tányér síkja, CM, CN az irányvonalak, melyek közt a megmérendő szög foglaltatik. Ezeknek a tányérhozi hajlásszöge $MM'' = NN'' = k$, a leolvasott szög $M''CN'' = \alpha'$, mely nem egyéb az MCN szögnek a tányér síkjára gondolt vetületénél: akkor az MNG háromszögben két oldal és egy szög ösmeretes, u. m. $GM = GN = 90\text{-}k$ G szög $= \alpha'$, tehát a harmadik oldalra $MN = \alpha$ nézve lesz:

$$cos\alpha = sink^2 + cosk^2\ cos\alpha', \text{ vagy}$$
$$cos\alpha = sink^2 + cos\alpha' - cos\alpha'\ sink^2.$$

Innen következik:

$$\cos\alpha - \cos\alpha' = \sin k^2 (1 - \cos\alpha') = 2\sin k^2 \sin\frac{\alpha'^2}{2}.$$

Úgyde: $$\cos\alpha - \cos\alpha' = -2\sin\frac{\alpha+\alpha'}{2} . \sin\frac{\alpha-\alpha'}{2},$$

tehát elég közelitéssel lesz:

$$\sin\alpha' . (\alpha - \alpha') = -2k^2 \sin\frac{\alpha'^2}{2},$$

vagy rövid átváltoztatás után:

$$\alpha - \alpha' = -k^2 tg\frac{\alpha'}{2} \ldots \odot$$

Ezen hiba annál nagyobb, mennél közelébb áll α'.. 180^0-hoz; ellenben ha $\alpha' = o$, az egészen elenyészik. Legyen p. o. $\alpha = 90^0$, $k = arc\ 5' = 0{\cdot}0014$, akkor $\alpha - \alpha'$ még $< 1''$-nél. Ennélfogva hegyes szögeknél a hiba befolyása igen csekély.

2) Ha a tányér a szög síkjával nem párhuzamos. Ezen eset áll elő, ha az irányszálak metszéspontja az egyik tárgyat tökéletesen metszi, a másiknál pedig egy kicsit alul vagy felül megyen el a ponttól; enélfogva ezen tárgyat a tányérra merőleges szállal kell metszeni. Legyen $OM' = \alpha$ (178. ábra) a megmérendő, $OM'' = \alpha'$ annak vetülete a kör körületén, mely tehát leolvastatik, δ a két ív közötti szög, akkor az $OM'M''$ derék $\triangle$-ből lesz:

$$tg\alpha' = tg\alpha \cos\delta = tg\alpha\ (1 - 2\sin\frac{\delta^2}{2}), \quad \text{vagy}$$

$$tg\alpha - tg\alpha' = 2\sin\frac{\delta^2}{2} tg\alpha, \quad \text{vagy}$$

$$\sin(\alpha - \alpha') = 2\sin\frac{\delta^2}{2} . \cos\alpha' \sin\alpha.$$

Minthogy pedig δ mindig kicsiny, elég közelitéssel lehet tenni:

$$\alpha - \alpha' = \frac{\delta^2}{4} \sin 2\alpha' \ldots \odot$$

Ezen hiba legnagyobbá lesz, ha $\sin 2\alpha' = 1$, vagy $2\alpha' = 90^0$ s ennek értéke lesz:

$$\alpha - \alpha' = \frac{\delta^2}{4},$$

mely az előbbi pontban kifejtett hibánál sokkal kisebb.

Hasonló eredményhez jutunk a magassági szög megmérésénél is, ha a tányér a függélyes állásból egy kevéssé eltér.

3) Ha a megmért szög egy kevéssé hibás, annak vizszintes vetülete is hibás fog lenni. A 174. §. képlete szerint t. i.

$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha' - \sin h \sin h'}{\cos h \cos h'},$$

ha α' .. $\triangle\alpha'$-el, α .. $\triangle\alpha$-val változik, akkor az egyenletből lesz:

$$\cos(\alpha + \triangle\alpha) = \frac{\cos(\alpha' + \triangle\alpha') - \sin h \sin h'}{\cos h \cos h'}.$$

Ezeket egymásból levonván lesz:

$$\cos\alpha - \cos(\alpha + \triangle\alpha) = \frac{\cos\alpha' - \cos(\alpha' + \triangle\alpha')}{\cos h \cos h'},$$

vagy összevonván:

$$2\sin\left(\alpha + \frac{\triangle\alpha}{2}\right)\sin\frac{\triangle\alpha}{2} = \frac{2\sin\left(\alpha' + \frac{\triangle\alpha'}{2}\right)\sin\frac{\triangle\alpha'}{2}}{\cos h \cos h'}$$

hol elég közelítéssel lehet tenni:

$$\triangle\alpha = \frac{\triangle\alpha' \sin\alpha'}{\sin\alpha \cos h \cos h'} = \frac{\triangle\alpha'}{\cos h \cos h'} \dots \odot$$

Ha h és h' csak kis íveket jelentenek, akkor a képlet ilyen alakot ölt magára:

$$\triangle\alpha = \triangle\alpha',$$

azaz: a hibák közel egyenlők.

4) Ha a magassági szögek hibásak, a szög vetülete is hibás fog lenni. Gondoljuk ismét, hogy a fentebbi egyenletben

$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha' - \sin h \sin h'}{\cos h \cos h'},$$

h ... $\triangle h$-val változik, akkor α is $\triangle\alpha$-val fog változni, és az egyenletből lesz:

$$\cos(\alpha + \triangle\alpha) = \frac{\cos\alpha' - \sin(h + \triangle h)\sin h'}{\cos(h + \triangle h)\cos h'}.$$

Ezeket egymásból kivonván, lesz:

$$\cos\alpha - \cos(\alpha + \alpha\triangle) = \frac{\cos\alpha'}{\cos h'}\left\{\frac{1}{\cos h'} - \frac{1}{\cos(h + \triangle h)}\right\}$$
$$- tg h'\left\{\frac{\sin h}{\cos h} - \frac{\sin(h + \triangle h)}{\cos(h + \triangle h)}\right\},$$

vagy összehúzván:

$$2sin\left(\alpha+\frac{\triangle\alpha}{2}\right)sin\frac{\triangle\alpha}{2}=-\frac{cos\alpha'}{cosh'}\cdot\frac{2sin\left(h+\frac{\triangle h}{2}\right)sin\frac{\triangle h}{2}}{cosh\,cos\,(h+\triangle h)}$$
$$+\frac{tgh'\,sin\triangle h}{cosh\,cos\,(h+\triangle h)},$$

vagy elég közelitéssel

$$\triangle\alpha\,sin\alpha=-\frac{cos\alpha'}{cosh'}\,\frac{sinh}{cosh^2}\triangle h+\frac{tgh'}{cosh^2}\triangle h.$$

Úgyde $\qquad cos\alpha'=cosh\,cosh'\,cos\alpha+sinh\,sinh',$

ezt helyettesítvén, rövid összehúzás után lesz:

$$\triangle\alpha=\frac{\triangle h}{sin\alpha}\left\{tgh'-tgh\,cos\alpha\right\}\ldots\odot$$

A legroszabb eset áll elő, ha h és h' ellenkező jelekkel birnak és egyenlők; ekkor t. i. lesz:

$$\triangle\alpha=\triangle h\cdot tgh\cdot cotg\frac{\alpha'}{2}\ldots☽$$

A hiba igen tetemessé válhat, ha $cotg\frac{\alpha'}{2}$ végtelenhez, azaz: $\alpha\ldots0$ vagy 180^0-hoz közeledik. Ezen eseteket tehát el kell kerülni.

Egyébaránt a hiba általában véve nem nagy. Ha p. o. $\alpha=90^0$, $h=10^0$, $\triangle h=1'$, akkor $\triangle\alpha=1''$ lesz.

4) Ezen vizsgálatokból azon tanulságot lehet meríteni, hogy a Borda körének kiigazitásában és felállitásában olyan nagy pontosság nem szükséges, mint a Theodolitnál. Tehát azon kor ban, midőn a szintezők még tökéletlenek voltak, a Borda köré- vel jobb szögmérést lehetett előállítni, mint a régibb Trougton Ramsden stb. féle Theodolitokkal. Valóban az európai országos felmérések nagyobb része ilyen szögmérők által eszközöltetett, és csak a Reichenbach óta, s az ő szerkezete szerint készitett Theodolitok érdemelnek felettök elsőséget.

*176. §. Hadley tűkörhatoda.

Ezen nevezetes, s különösen a hajózásnál nélkülözhetlen műszer (198. ábra) áll egy 45—60⁰ nagyságú körkimetszésből, melynek körive félfokokra s ezeknek apróbb részeire van beosztva, de egész fokok gyanánt vannak számozva úgy, hogy azon 90—

120⁰-ú szögeket meg lehet mérni. A kör középpontjában egy csap körül az Alhidade foroghat. Ez vonasz alakú, a forgáspontban egy merőleges állású tűkörrel *A*, a másik végén pedig Noniussal ellátva, melyen a mutató állását le lehet olvasni. A kör síkjában egy másik kisebb szintén merőleges tűkör *B* van szilárdan megerősitve; ezen tűkör előtt pedig egy kis távcső a tányérral párhuzamosan úgy van helyezve, hogy a tárgylencsének alsó része a tűkör által eltakartatik, felső része pedig nyiltan van. Ha ezen távcsővel a távolba nézünk, két képet látunk egymáson, t. i. az *M*-ét, melynek sugárai a *B* tűkör felett egyenesen a távcsőbe jutnak, és az *N*-ét, melynek sugárai először az *A* tűkörbe esnek, innen a *B* tűkörbe, s innen a távcsőbe vettetnek. Ha ezen kétféle sugárok egymással párhuzamosok, akkor a képek egymásra esnek, mintha egymásra volnának irányozva. A képek ezen állásának az *MON* szög felel meg, mely a 60. §. szerint kétszer olyan nagy, mint a tűkörsíkok közt befoglalt szög; ez pedig azon feltétel alatt, hogy a mutató 0-án áll, midőn a tűkörsíkok egymással párhuzamosok, egyenlő azon szöggel, melyet a mutató a beosztott körön mutat. A megmérendő szög tehát kétszer olyan nagy, mint a mutató által elmetszett ív; ezért van a beosztásnak minden osztályrésze két olyan nagy értékkel számozva, hogy az utólagos kettőveli szorzás megkiméltessék.

A szögmémérés közben a műszert egy fogantyún szabad kézben ugy kell tartani, hogy a tányér a szög síkjával párhuzamos legyen; s ha az Alhidade tengelye körül kellőleg fordittatik, a két tárgy képei egymásra fognak esni. Ellenben ha a tányér síkját a szögével nem tarjuk párhuzamosan, a visszavetett sugárok mind másmás síkokban feküdvén, a képek egymás felett fognak látszodni; sőt ha az elhajlás tetemesebb, akkor a *N*-ből jövő sugárok a kétszeri visszavetés után olyan nagy szög alatt ütköznek a távcső tárgylencséjébe, hogy a kép a láttérből ki is esik.

Meg kell még említni, hogy a jobb szerkezetű tűkörhatodoknál a távcsőt egy csavar által a tányér síkjához közelítni, s attól eltávolítni lehet, megtartván mindig a párhuzamos fekvést. Ez azért szükséges, hogy ha egyik tárgy sokkal homályosabb volna a másiknál, abból több sugárokat lehessen a távcsőbe vezetni, mint a másikból, s ekképen a képeknek egyenlő világosságot lehessen adni, mi a beállitás pontosságát tetemesen elősegíti.

Továbbá a napra irányzás lehetővé tétele végett a *B* tűkör előtt, valamint *A* és *B* közé is színes üveg ellenzők — Blende — *E*,*E'* vannak helyezve, melyeket forgók körül fordítni, s ekképen ki s be lehet igtatni.

*177. §. A tűkörhatod kellékei.

Azon tulajdonságokon kivül, melyek már a többi szögmérőknél előfordultak, minők p. o. a beosztás helyes volta, az Alhidade tengelyének központossága stb., a tűkörhatodnak még következő fő kellékekkel kell birnia.

1) A tűkrök felületei párhuzamos síkok legyenek. Ezeket egyenként a távcső segélyével lehet megvizsgálni. Ezt t. i. tokjából kivévén, valamely távollévő tárgyra irányozzuk, s a szemcsőt úgy húzzuk ki, hogy a tárgy képe lehető legtisztábban látszodjék; ezután a műszert egy asztalra helyezvén úgy fordítjuk, hogy ugyanazon tárgyat a tűkörben látni lehessen. Ha ezen állásban a tárgy képét a távcsővel a tűkörben felkeressük, annak tisztán kell látszodni. Ha pedig a szemcső kihúzását változtatni kell, hogy a kép tisztán látszodjék, vagy pedig kettős kép látszik, ha szintén a tárgy távolsága végtelen nagy volna is: akkor a tűkör lapjai görbék, vagy ékalakban dűlnek egymáshoz.

2) Mind a két tűkörnek merőlegesen kell állani a tányérra. Az *A* tűkröt illetőleg a vizsgálat két egyenlő magasságú, négyszögű L alakú lemez által történik. Ha ezek a tűkör előtt a tányér lapjára helyeztetnek, képeiknek a tűkör háta megett egyenlő magasságban, a tárgygyal egyenes vonalban kell látszodni. Ellenkező esetben az *A* tűkröt a csavarkák által ki kell igazítni, azaz előre vagy hátra kell hajtani, mig a kelléknek elég nem tétetik.

A *B* tűkör merőleges állását az *A* tűkörreli párhuzamosság által lehet megvizsgálni. Ha t. i. a mutató 0 körül áll, az Alhidade egy bizonyos állásában a két tűkörnek párhuzamosnak kell lenni, s ha a távcsőt a napra irányozzuk, a két képnek egymást takarni kell; ellenkező esetben azokat a *B* csavarkái által egymásra kell beállítni.

3) Ha a két kép egymást takarja ugyan, de a mutató 0-ától különböző állást mutat, ez a Collimatio-hiba, melyet

vagy a Noniuson vagy a B tűkrön lehet kiigazítni, a szerint, a mint egyik vagy másikat egy kevéssé oldalt lehet mozdítni, illetőleg tengelye körül fordítni. Ha a Collimatio-hiba kijavítva nincs, annak értékét fel kell jegyezni, és minden leolvasásból le kell vonni. Czélszerű ezen észlelésre a napot választani, melynek képei a karima mind a két oldalán érintésbe hozatnak, s a megfelelő Noniusállások leolvastatnak. Legyenek ezek α', α'', akkor a boritkozásnak a számtani középp felel meg; s ha ezt α-nak nevezzük, lesz a Collimatio-hiba:

$$\alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} \ldots \odot$$

A két leolvasás közötti különbség a nap kettős átmérőjét adja, azaz $\alpha' - \alpha'' = 4R$, mely egyenletet az észleletek helyes voltának megitélésére lehet használni. Az R értékét valamely csillagászati naptárban az évnek minden napjára nézve fel lehet találni.

4) A távcső tengelyének a tányérral párhuzamosnak kell lenni. A távcső látvonala a láttér közepén megyen keresztül és nincsen megjelölve, minthogy az irányzás a képek egymásra beállitása által, nem pedig szállali metszés által történik. A képeket tehát a láttér közepében kell egymásra állítni. Hogy ezt könnyebben meg lehessen itélni, a diaphragmán négy egymásra merőleges szál által egy kisebb tér van bekerítve, s ennek közepén megyen a tengely keresztül. A tengelynek a tányérrali párhuzamosságát így lehet megvizsgálni. Tegyük a tűkörhatodot egy asztalra, s a fentebb emlitett lemezkéket a tányérra a távcső mellé helyezvén, nézzünk azoknak felső élén keresztül a távolba és jelöljünk meg valamely pontot, mely az iránysíkba esik. Ha ezen pont a távcső látterében is — a mennyire szabadszemmel meg lehet itélni — a szálak közt középen látszik, akkor a párhuzamosság megvan. Ellenkező esetben a hibát a távcsőt tartó oszlopon a gépész által kell kiigazíttatni.

5) Az ellenzőknek tiszta üvegből készült párhuzamos oldalú táblácskákat kell képezni, hogy a sugárokat az egyenes irányból el ne téritsék, s ekképen a mérésben hibákat ne okozzanak. Ezeknek vizsgálatát a Collimatio-hibának ellenzővel, és a nélküli meghatátozására lehet visszavinni. Ha különbség mutatkoznék, akkor minden ellenző használatánál a neki megfelelő Collimatio-

hibát kell alkalmazni. Ekképen a sugároknak az ellenzők általi elétrittetése a mérésből kiesik.

* 178. A tűkörhatod általi szögmérés különös hibái.

Ha a távcső tengelye a tányérral nem párhuzamos, akkor a beütköző és kétszer visszavetett sugárok közt befoglalt szög helyett, melyet meg akarunk mérni, valósággal annak a tűkrök derékmetszésére, következésképen a vele párhuzamos tányérra gondolt vetülete méretik meg. Az 59. §. szerint a beütköző és visszavetett sugároknak a derékmetszéshezi hajlásszögei egyenlők; innen következik, hogy a megmérendő szög szárai a tányérral egyenlő hajlásszögeket képeznek. Ennélfogva a hiba meghatározása a 175. §. 1. alatt megvizsgált esettel azonos. Ha tehát az ottani elnevezések megtartatnak, lesz:

$$\alpha - \alpha' = - \delta^2 \, tg \frac{\alpha'}{2} \ldots \odot$$

Ennek legnagyobb értéke áll elő, ha $\alpha' = 120^0$, nagyobb szöget a hatoddal mérni ritkán lehet. Ekkor tehát

$$\alpha - \alpha' = - 1{\cdot}7 \, \delta^2.$$

* 179. §. A tűkrök és távcső ferde állása.

1) Vegyük fel azon általános esetet, midőn mind a tűkrök, mind a távcső hajlik a limbus síkjához, és határozzuk meg a hibák befolyását a megmérendő szögre. Az 59. §. szerint a beütköző és visszavetett sugároknak a tűkrök derékmetszéséveli hajlásszögei egyenlők. Innen következik, hogy a megmérendő szög szárai is a tűkrök derékmetszésével egyenlő szögeket képeznek. A feladat tehát oda megyen ki, hogy adva levén egy ferde szög α, melynek szárai a derékmetszéssel egyenlő h szögeket képeznek, ennek a derékmetszésre gondolt vetületét α kell meghatározni. E czélból a 175. §. 1) kifejtésében a limbus síkja helyett a tűkrök derékmetszését, a távcső hajlásszöge δ helyett h-t, melynek értéke jelen esetben az α szöggel együtt változik, végre α' helyett α_0-t tévén, ezen képlet áll elő:

$$\alpha - \alpha_0 = - h^2 tg \frac{\alpha_0}{2} \ldots \odot$$

2) A 62. §-ból továbbá láttuk, hogy a szögtűkörnél a derékmetszéssel, párhuzamos sugárokra nézve kifejtett eltéríttetési törvények a ferde sugároknak a derékmetszésre vetített vetületeire nézve is érvényesek. A szögtűkörnél pedig a derékmetszéssel párhuzamos sugárokra nézve a beeső és kétszer visszavetett sugárok közötti szög kétszer olyan nagy, mint a tűkrök közötti szög. Ezen szögnek értéke tehát $= \frac{\alpha_0}{2}$, s a további teendő leend, a tűkrök hajlásszöge és azon szög közötti összefüggést felkeresni, melyet a tűkröknek a limbus síkjával képező metszésvonalai bezárnak, s melyet a limbuson közvetlen leolvasunk. E végre legyen a 199. ábrában BAV a limbus síkja, CBO a forgó-, CAO a mozdulatlan tűkör síkja. Gondoljuk mind a kettőt a limbushoz előre hajolva, tehát $CBA \sphericalangle = 90^0 - \delta$, $CAB \sphericalangle = 90^0 - \delta'$, a leolvasott szög $= \alpha'$, melynek fele az AOB szöggel egyenlő. Az ABC gömbháromszögből következik:

$$\cos\frac{\alpha_0}{2} = -\sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\cos\frac{\alpha'}{2},$$

vagy figyelembe vévén, hogy δ, δ' csak kis szögecskéket jelentenek, elegendő pontossággal lesz:

$$\cos\frac{\alpha_0}{2} = -\delta\delta' + \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^2\left(1 - \frac{\delta'}{2}\right)^2\cos\frac{\alpha'}{2}.$$

Innen következik:

$$\cos\frac{\alpha_0}{2} - \cos\frac{\alpha'}{2} = -\delta\delta' - \frac{\delta^2 + \delta'^2}{2}\cos\frac{\alpha'}{2},$$

s rövid átváltoztatás után elegendő pontossággal lesz:

$$\alpha_0 - \alpha' = \frac{2\delta\delta' + (\delta^2 + \delta'^2)\cos\frac{\alpha'}{2}}{\sin\frac{\alpha'}{2}} \quad \ldots \; ☽$$

A ⊙ és ☽ egyenleteket összeadván, származik:

$$\alpha - \alpha' = -\left[h^2 tg\frac{\alpha'}{2} - \frac{2\delta\delta' + (\delta^2 + \delta'^2)\cos\frac{\alpha'}{2}}{\sin\frac{\alpha'}{2}}\right], \quad \ldots \; ♁$$

mely kifejezésekben α_0 helyett α' van téve, minthogy a különbség csak a második fokot meghaladó tagokra van befolyással, melyek már eddig is elhanyagoltattak. Most már csak a h értékének meghatározása van hátra.

3) Legyen MN a távcső irányvonala, melynek a tűkrök derékmetszéséveli hajlásszögét h-nak neveztük. Húzzunk a gömb középpontjából OMN-hez párhuzamost, mely a gömb felületét a limbus síkja felett Q-ban messe: ekkor COQ azon szög, melyet a tűkrök derékmetszésére merőleges vonal a távcső irányával képez, tehát

$$COQ \sphericalangle = 90^0 - h.$$

Nevezzük most azon állandó szöget, melyet a távcső irányvonala a limbus síkjával bezár, δ''-nek, s azon hegyes szöget, melyet ugyanaz a mozdulatlan tűkör metszésvonalával OA képez, β-nak: akkor a QOP síkot merőlegesen húzván a limbusra, $QOP \sphericalangle = \delta''$, és $QOA \sphericalangle = \beta$ fog lenni.

A CQA gömb $\triangle$-ben továbbá ezen kifejezés áll:

$$\cos CQ = \cos AC \cdot \cos AQ + \sin CA \cdot \sin AQ \cdot \cos CAQ.$$

Az ACB háromszögből pedig következik:

$$\sin AC = \frac{\sin\frac{\alpha'}{2}\cos\delta}{\sin\frac{\alpha_0}{2}}, \quad \cos AC = \frac{\sin\delta\cos\delta' + \cos\delta\sin\delta'\cos\frac{\alpha'}{2}}{\sin\frac{\alpha_0}{2}}.$$

Továbbá az AQP derék $\triangle$-ből lesz:

$$\sin\delta'' = \sin\beta \cdot \sin QAP,$$

vagy elegendő pontossággal: $\delta'' = \sin\beta \cdot (QAP)$.

Innen következik:

$$QAP = \frac{\delta''}{\sin\beta}; \text{ és } CAQ = CAP - PAQ = 90^0 + \delta' - \frac{\delta''}{\sin\beta}.$$

Ezen értékeket helyettesítvén, lesz:

$$\sin h = \frac{\sin\delta\cos\delta' + \sin\delta'\cos\delta\cos\frac{\alpha'}{2}}{\sin\frac{\alpha_0}{2}}\cos\beta - \frac{\cos\delta\sin\frac{\alpha'}{2}}{\sin\frac{\alpha_0}{2}}\sin\beta\cdot\sin\left(\delta' - \frac{\delta''}{\sin\beta}\right),$$

vagy elegendő pontossággal:

$$h = \frac{\delta + \delta'\cos\frac{\alpha'}{2}}{\sin\frac{\alpha'}{2}}\cos\beta - \left(\delta' - \frac{\delta''}{\sin\beta}\right)\sin\beta, \text{ vagy}$$

$$h = \frac{\delta \cos\beta}{\sin\frac{\alpha'}{2}} + \frac{\delta' \cos\left(\frac{\alpha'}{2} + \beta\right)}{\sin\frac{\alpha'}{2}} + \delta''.$$

Ezen értéket a fentebbi ♂ képletben helyettesítvén, könnyű átváltoztatás után lesz végre:

$$\alpha - \alpha' = -2\left[\left(\delta\cos\beta + \delta'\cos\left(\frac{\alpha'}{2}+\beta\right) + \delta''\sin\frac{\alpha'}{2}\right)^2 \operatorname{cosec}\alpha' + \left(\frac{\delta-\delta'}{2}\right)^2 tg\frac{\alpha'}{4} - \left(\frac{\delta+\delta'}{2}\right)^2 cotg\frac{\alpha'}{4}\right] \ldots ♂'$$

A β értéke körülbelől 75°, s α legfeljebb 120° lehet.

4) Ha a tűkörhatod úgy van kijavítva, hogy midőn a collimatio-hiba meghatároztatik, ugyanazon tárgynak mindkét képe egymásra esik, tehát a két tűkör egymással párhuzamos: akkor $\delta' = -\delta$, s az előbbi kifejezés ezzé válik:

$$\alpha - \alpha' = -2tg\frac{\alpha'}{4}\left(\delta^2 + \left\{\delta\sin\left(\beta + \frac{\alpha'}{4}\right) + \delta''\cos\frac{\alpha'}{4}\right\}^2 \sec\frac{\alpha'}{2}\right) \ldots ♂''$$

Ha a távcső fekvése helyes, akkor $\delta'' = 0$, s a tűkrök hajlásából eredő hiba lesz:

$$\alpha - \alpha' = -2\delta^2 tg\frac{\alpha'}{4}\left[1 + \frac{\sin\left(\beta + \frac{\alpha'}{4}\right)^2}{\cos\frac{\alpha'}{2}}\right] \ldots ♂'''.$$

Ennek legnagyobb értéke áll elő, ha α helyett a legnagyobb értéket $\alpha = 120°$ helyettesítjük, s β helyett 75° tévén lesz:

a legnagyobb $\alpha - \alpha' = 2{\cdot}1\ \delta^2$.

5) Ha egyedül a mozdulatlan tűkör fekvése volna hibás, akkor lenne $\delta = 0$, $\delta'' = 0$, s a ♂' egyenlet ezzé válnék:

$$\alpha - \alpha' = -2\left[\delta'^2\cos\left(\frac{\alpha'}{2}+\beta\right)^2 + \frac{\delta'^2}{4}\left(tg\frac{\alpha'}{4} - cotg\frac{\alpha'}{4}\right)\right]$$

vagy némű reductio után:

$$\alpha - \alpha' = \frac{2\delta'^2 \sin(\alpha'+\beta)\sin\beta}{\sin\alpha'} \ldots ♂^{IV}.$$

Ezen hiba kis szögeknél igen nagygyá lehet, minthogy a kifejezés ∞-hez közeledik, midőn α' 0 felé tart. Mig $\alpha' = 10°$-nál a hiba $= 10\delta'^2$, $\alpha' = 120°$-nál már csak $= 0{\cdot}6\delta'^2$.

*180. §. A mozgó tűkör külpontossága.

Legyen a 200. ábrában ab a nagyobbik, vagy mozgó tűkör, ennek forgáspontja c, a világitó pont N, melyből a tűkörnek minden pontjára sugárok esnek, s ezek a B tűkörre, onnan pedig a távcsőbe vettetnek vissza. Ezen sugárcsomagból körülbelől a középső, melyet fősugárnak nevezünk, a távcső láttani középpontján megyen keresztül, s valahányszor sugárról szólunk, mindig a fősugárt kell alatta értenünk. Legyen egy ilyen sugár útja $NABC$, a mint az a külpontos tűkörben visszavetés által származik, mig tulajdonképen ha a tűkör a c forgásponton menne keresztül, a fősugár Nc lenne. Az első a kétszer visszavetett sugárral α', a második α szöget zár be, s a kettő közötti különbséget kell keresnünk. E végre az AcN $\triangle$-ből lesz:

$$cN \cdot sin\, N = cA \cdot sin\; cAN.$$

Itt $cN = D$, $N = \alpha' - \alpha$, $cAN = 180^0 - A$, cA pedig az AcD derék $\triangle$-ből határoztatik meg, melyben $cD = d$, cAD pedig a cAN szögnek fele; ennélſogva;

$$cA = \frac{d}{cos\frac{A}{2}}.$$

Tehát lesz:

$$sin\, N = sin(\alpha' - \alpha) = \frac{d\, sin\, A}{D cos\frac{A}{2}} = \frac{2d}{D} sin\frac{A}{2}.$$

Végre az ABC $\triangle$-ből $A = \alpha' + 180^0 - 2\beta$, ezt helyettesítvén, elég pontossággal lesz:

$$\alpha - \alpha' = -\frac{2d}{D} cos\left(\beta - \frac{\alpha'}{2}\right) \ldots \odot$$

A hiba legnagyobbá válik, ha $cos\left(\beta - \frac{\alpha'}{2}\right) = 1$. azaz : $\beta = \frac{\alpha'}{2}$, ekkor t. i.

$$\alpha - \alpha' = -\frac{2d}{D}.$$

Legyen p. o. $d = 0 \cdot'' 05$, $D = 100^0$, akkor $\alpha - \alpha' = -3''$.

Innen látni lehet, hogy azon pontosság, melylyel a gépész a tűkört a középpont felett beállítni képes, tökéletesen kielégitő, ezért kiigazitás nem szükséges.

* 181. §. Parallaxis.

Az eddig előadottakból világos, hogy a tűkörhatoddal a beeső és kétszer visszavetett sugárok közt befoglalt szög méretik meg; ez pedig egyenlő azon szöggel (198. ábra) *PAN*, melyet a tűkör forgáspontjából az irányvonalhoz húzott párhuzamos a beeső sugárral képez; mig tulajdonképen az *MAN* szöget kellene megmérni. Szükség tehát a még hiányzó parallacticus szöget $MAP = u$ meghatározni, s ezt a megmért szöghöz adni. Ugyde ezen szög $= AMQ$ szöggel, s ha $AM = D$, $AQ = d$-nek neveztetik, hol d legfeljebb $1 - 2''$ hosszat jelent, elég közelítéssel lesz:

$$u = \frac{d}{D} \ldots \odot$$

Legyen p. o. $d = 1''$, akkor

ha $D =$	50^0	. . . .	$u = 57''$
» »	$= 100$	. . . .	» $= 29$
» »	$= 200$	. . . .	» $= 14$
» »	$= 300$	. . . .	» $= 9{\cdot}5$

Az $\odot$ képlet szerint egy kis táblácskát lehet kiszámítni, mely a parallaxis értékeit magában foglalja.

A d értékét egy körzővel elegendő pontossággal meg lehet mérni a műszeren. De czélszerűbb következő módon működni. Határozzuk meg a collimatio-hibát először igen nagy, azután csak $10 - 15^0$ nagyságú távra nézve, a kettő közti különbség közvetlen a nevezett távnak megfelelő parallaxist fogja szolgáltatni: s ha egy más távra nézve a megfelelő mennyiségeket vonással jeleljük, lesz:

$$u' = \frac{d}{D'},$$

tehát $\frac{u'}{u} = \frac{D}{D'}$, mely egyenletből d egészen kiesett, és a parallaxis meghatározására nézve lesz $u' = u\,\frac{D}{D'} \ldots$ ☽

* 182. §. Pistor tűkörköre.

1) A tűkörhatodnak némely gyenge oldalai vannak, melyeket orvosolni nem lehet, mivel azok lényegesen e műszer szerkezetében gyökereznek. Nevezetesen homályos tárgyak a kettős tűkrödzés által annál sötétebben látszodnak, mennél hegyesebb

szög alatt esnek a tűkörbe, részint azért, mivel a tűkör annál kevesebb sugárokat fog fel a tárgyból, részint azért, mivel az üveg a felfogott sugároknak annál nagyobb részét elnyeli, mennél ferdébben esnek azok a tűkör síkjába. Továbbá tűkörhatoddal nagyobb szöget megmérni nem lehet, mint azon ívnek kétszerese, melyet a távcső tengelye a kisebbik tűkörrel képez, vagyis 2β, hol β az előbbi §§.-ból ösmeretes. Ezen állásban t. i. már a beeső sugár a nagy tűkörsíkkal párhuzamos, ha az Alhidade még tovább fordíttatnék, a nagy tűkör háttal fordulna a kisebbik felé. Különösen megemlítendő pedig, hogy a külpontossági hibát a tűkörhatodnál megsemmisítni nem lehet, mivel két átellenben levő Noniust alkalmazni nem lehet.

2) Ezen tökéletlenségek teljesen el vannak hárítva a Pistor és Martins tűkörkörén. Ez lényegében (201. ábra), és hatására nézve a tűkörhatoddal megegyezik, de szerkezetében attól némileg különbözik; nevezetesen a körkimetszés helyett egy 4 — 5″ átmérőjű tele kör alakú tányér van alkalmazva, melynek körületén mindenik negyed 180⁰-ra van beosztva, s olyaténtképen számozva, hogy az 1-ső és 3-ik negyedben a számok 0-tól 180-ig nőnek, a 2-ik és 4-ikben pedig 180-tól 0-ig fogynak. Más szavakkal, a körnek két átalellenben fekvő 0 pontja van, melyektől jobbra és balra a számok 180-ig haladnak.

Az Alhidade két átellenben fekvő Noniussal bír, melyek a körületnek egyenlő számokkal jelölt pontjaira mutatnak, kivévén azon csekély különbséget, mely a külpontosságtól származik. A legkisebb leolvasható szög = 20″.

A mozdulatlan tűkör helyett egy szintelen prisma van a tányéron megerősítve, melynek feszitő oldala a távcsővel körülbelől 20⁰ szöget képez, ennélfogva a sugárokat teljesen visszaveti. Ugyanazon szöget képez tehát a távcső irányvonalával párhuzamos sugár is az Alhidadén megerősített tűkörrel, midőn a Nonius 0-án áll. Ezen állásban a kép leghomályosabban látszik, mivel a sugárok a tűkörbe legferdébben ütköznek. De ha a szög nagyobbodik, s a tűkör az Alhidadéval együtt kellőleg fordíttatik, a kép mind világosabbá válik. Midőn a megmérendő szög 130⁰ és 180⁰ közé esik, a beeső sugárok az ellenző és a prisma által feltartóztattatnak; tehát a szögeket ezen a vidéken megmérni nem lehet. Ha a szög 180⁰-nál nagyobb, akkor az

Alhidadét még tovább kell fordítni, s a mérés lehetővé válik; mig egyszer az Alhidade a prismába ütközik, mi 260° körül történik. A 180 és 260° közé eső szögeket tehát valósággal meg lehet mérni, de a leolvasás azoknak 360°-ra kiegészitését szolgáltatja. A fentebb emlitett 130 és 180° közé eső szögeket is a limbusnak ezen vidékén lehet megmérni, minthogy azoknak 360°-ra kiegészitései is 180 és 260° közé esnek.

Megemlítendő még, hogy midőn a megmérendő szög 180° körül van, a beeső sugárok a mérnök feje miatt nem juthatnak a tűkörbe; ilyenkor tehát a szemcsőhöz egy három oldalu prismát kell kapcsolni, melybe oldalt kell benézni; ez által az akadály egészen elhárittatik.

3) A szögmérés a tűkörkörrel épen úgy történik mint a tűkörhatoddal; t. i. a műszert a közepén levő nyelen fogván, a távcsőt a szög bal szárában lévő tárgyra *M* irányozzuk, azután a tányért ezen irányvonal, mint tengely körül hajlitván, mig az a szög síkjával a mennyire szabadszemmel meg lehet itélni párhuzamossá lesz, forditjuk az Alhidadét, mig a jobb szárban lévő tárgy *N* a tűkör és prismán keresztül szintén a távcsőben megjelen. Ekkor a képeket a láttér közepében tökéletesen egymásra állítjuk, mit részint a tányér hajlásának változtatása, részint az Alhidade paránycsavarjának kezelése által lehet elérni, s a Noniusokat leolvassuk.

Midőn a szög 180°-nál nagyobb, akkor annak szárai egymással helyet cserélnek. Minthogy pedig az előbbi szám szerint a 130 és 180° közé eső szögek helyett azoknak 360°-ra kiegészitései méretnek meg: következik, hogy a 130°-nál nagyobb szögek megmérésénél a távcsőt a jobb szár irányába kell állítni, s a balszár tárgyát kell a tűkrön keresztül a távcsőbe vezetni. A leolvasások mindenkor a 180°-nál kisebb szögek mértékeit fogják szolgáltatni.

*183. §. A tűkörkör kiigazitása.

A tűkörkörnek kellékei a tűkörhatodéval lényegesen azonosok, csupán csak a prisma igényel még különös vizsgálatot. Ennek t. i.

1) színtelennek kell lenni, azaz: a feszitő oldalon lévő szögeknek egyenlőknek kell lenni, noha azoknak értéke 45

és 60^0 közt akármi lehet. Ezen tulajdonságot onnan lehet megitélni, hogy a tárgyak a prismán keresztül, vagy a nélkül a távcsőben egyenlő tisztán és szintelenül látszodnak.

2) A prisma tengelyének a tányérra merőlegesen kell állani részint azért, hogy a kép lehető tisztán látszodjék; különösen pedig azért, hogy a feszitő oldal, mely tulajdonképen a második tűkört képviseli, a tányérra merőlegesen álljon. Ezen tulajdonságot így lehet megvizsgálni. Ha a távcső szemüvege végtelen távra beállítatott, a diaphragmán kifeszített valamely szálból kijövő sugárok a tárgylencsében megtöretvén, párhuzamosan lépnek ki a légbe, s a prismán átmenvén, szintén párhuzamosan esnek a tűkörbe, minthogy a prisma szintelen lévén, a párhuzamosságban változást nem okoz. Tegyük fel most, hogy a tűkör a sugárokra merőlegesen áll; akkor ezek ellenkező irányban térittetnek vissza, és a távcsőben képpé egyesíttetnek, mely az eredeti szállal összeesik. Fordítsuk tehát az Alhidadét tengelye körül, mig a mutató 140^0 tájára jövén, a diaphragma képe a távcső látterében megjelen; s ha azt az Alhidade forditása által az eredetire rá lehet állítni, akkor a prisma fekvése helyes; ellenkező esetben azt a kiigazitó csavarkák által egy kissé mozdítni kell, mig a kép a diaphragmával egészen egybe olvad.

C. Olyan szögmérők, melyek a szöget rajzolatban adják.

184. §. Mérőasztal.

1) Azon szögmérők közt, melyek a szög vetületét rajzolat által szolgáltatják, első helyen áll a mérőasztal. Ez nem egyéb egy $2^1/_2{}'$ hosszú, és $2'$ széles, papirossal bevont rajztáblánál, melyre a megmérendő szög a mezőn mindjárt azon pontban rajzoltatik fel, hol annak a sokszögben feküdnie kell. A mérőasztallal tehát a szögnek megmérése és szerkesztése egy füst alatt történik, egy műtétel által eszközöltetik. Ez ilyeténképen vitetik véghez, hogy a táblának azon pontja, mely a felveendő szög csúcsát képezi, a mezőnek megfelelő pontja felett függélyesen beállíttatik, s a tábla visszintessé tétetvén, a szög egyik szárának, melyet már a táblára felrajzolva kell gondolnunk, a mezei megfelelő vonalhoz képest olyan fekvés adatik, mely az Alhidade mutató vonala, és az irányvonal közti szöggel egyenlő.

Végre az irányzó a szög csúcsán keresztül annak a mezőn kitűzött második szára irányába hozatik, s az Alhidade mutató vonala mellett a papiroson szintén a szög csúcsán keresztül egy egyenes vonal húzatik, mely a szögnek második szárát fogja szolgáltatni.

2) Hogy a mérő-asztal ezen műtételek gyors és pontos véghezvitelére alkalmas legyen, mind a mellett hogy az egy állványon szilárd fekvésben van helyezve és megerősítve, bizonyos mozoghatóságot igényel; t. i. szükség, hogy az asztal-táblát vizszintessé tenni lehessen, mi három pontbani tetszésszerinti emelés és sülyesztés által eszközöltetik; továbbá szükség, hogy azt egy függélyes tengely körül szabadon lehessen forgatni, és azt az állványhoz szoritván néhány foknyi szög alatt finom mozgásba lehessen hozni. Végre szükség, hogy a táblát vizszintes irányban 4—5"-nyire minden oldalra párhuzamosan el lehessen tolni.

3) Az asztal felszerelésére nézve hazánkban háromféle szerkezetet találunk, melyek Marinoni, Kraft, és Starke név alatt ösmeretesek. A 202. *a*) *b*) ábrák a mult században, és a jelen század első két tizedében nálunk kizárólag használatban volt Marinoni-féle asztalt ábrázolják. Ebben *A* egy 10" átmérőjü $1^1/_2$" vastag fatányér, az ugynevezett állványfő, melynek alsó oldalán egymástól egyenlő távban három láb darab van megerősítve, s ezekhez a lábszárak csuklók által vannak kapcsolva, melyeket az α-nál látszó szárnyas csavarok által össze lehet szorítni. Ezen lábszárak két darabból vannak összetéve és középen egymásba csavarva, hogy azokat az asztallal egy ládában lehessen elrakni. A lábak közt középen közel a fő széléhez három lyuk van fúrva, beléjök alól széles lapokban végződő csavarok *b* csavarva, melyeknek felül kiálló végökön egy tányér *B* nyugszik. Ennek alsó oldala közepén egy gömbcsukló — dió — van megerősítve, s ebből egy csap nyúlik ki, mely az állvány közepében lévő lyukon keresztül van dugva, s végén egy szárnyas csavar *C* látszik. Ha ezen csavart megeresztjük, a *B* tányért a *b* csavarok által három helyen emelni, vagy sülyeszteni, valamint a dió körül szabadon forgatni lehet; ha pedig azt meghúzzuk, akkor a *B* tányér erősen az állványhoz szorul. A *B* tányér felső oldalán egy négyszögű táblácska *C* fekszik, mely a *B*

tányér középpontjában lévő csap *d* körül foroghat, s egy anyacsavarral *B*-hez van szorítva. De a *d* tengely körüli forgás csak lassú, s legfeljebb 8 — 10°-ra terjed, minthogy a *C* tábla egyik szögletéből egy peczek *e* áll ki, mely egy erős csavarorsónak *f* szolgál ágyúl; ezen orsó pedig egy anyán *g* megyen keresztül, mely a *B* tányér oldalán van megerősítve. Ennélfogva a *B* és *C* darabok egymással merev összeköttetésben vannak, mely csak a cssvarorsó forgatása által szenved lassú változást. A *C* tábla két általellenben fekvő oldalán párhuzamos négyzet alakú kiálló hornyolatok vannak, melyek egy ráma alakú darab *D* oldalán lévő rovátékokba illenek, úgy hogy a rámát ezen rovátékok hosszában jobbra és balra lehet tolni, és a szögletekben helyzett szoritó csavarok *i* által minden állásban meg lehet szorítni. Ezen rámának másik két oldala hasonló hornyolatokkal *k* van ellátva, melyek ismét az *E* asztaltábla alsó oldalán beeresztett léczek *l* rovátékaikba illenek, s az asztaltáblát előre és hátra tolni engedik. Ennélfogva az asztaltáblának a *C* táblácska felett két egymásra merőleges irányban párhuzamos mozgást lehet adni, s ezen mozgások közreműködése által az asztaltáblát 3 — 4''-re minden irányban lehet tolni a nélkül, hogy annak oldalai irányukat változtatnák.

Ezen szerkezet ugyan minden megkivántató mozgással el van látva, de a lábak csuklói gyengesége miatt, különösen pedig azon okból, hogy a szoritó csavarok mind a *D* rámát, mind pedig az *E* táblát felfelé emelik, az oldal- vagy függélyes nyomásnak igen enged, s csekély merevséggel bír. Sokkal merevebb és szilárdabb ennél

4) a Kraft-féle asztal (lásd a 203. *a*) *b*) ábrákat). Ennek állványa a Reichenbach, középső részei pedig a Winkler eszméi után vannak alkotva, s Kraft érdeme csupán az asztaltáblának a közép részekkeli kapcsolatára szoritkozik. Lábai rendesen egy darabban készitvék, felül 3" széles hengerekben végződnek, melyek a főben kivájt üregekbe vannak illesztve, s a főn keresztül menő, csavarban végződő csapok *k* által a főhöz vannak erősen szorítva. A *B* tányér egészen sárga rézből van öntve, s ujabb időben a dió helyett egy horoggal *h* az állványhoz kapcsolva. Ezen tányér körülete fogakkal van felszerelve, melyekbe egy, a *C* kereszten megerősített végtelen csavar *f* fogódzik. Ezen csavar forgatása által a *C* keresztet a *B* tányéron lassan

egészeu körül lehet forgatni. De a csavart az ábrában látható külpontos emeltyű *t* által ki is lehet a fogak közül emelni, s akkor a *C* keresztet durván körül lehet forgatni. Ennélfogva a szerkezetnek kettős durva forgása van, u. m. az emelő csavarok hegyein, és a *B* tányér felett. Az asztaltábla a *C* kereszten nyugszik, melynek két szárnya párhuzamos nyilásokkal *F* van ellátva. Hasonlóképen az asztaltábla léczei is *G* mind vizszintes, mind függélyes irányban 10—15″ hosszant át vannak törve, s belől a tábla és lécz közt egy rovátékban hosszában mozogható anyacsavar van helyezve, melybe az áttöréseken keresztül szárnyas csavarok *R* csavartatnak. Ezen nyilások megengedik, hogy az asztaltáblát a kereszt felett minden irányban 3—4″-re oldalt lehessen tolni, s a csavarokat meghúzván, minden állásban meg lehessen szorítni.

Különös érdeme ezen szerkezetnek abban áll, hogy a csavarok mindenütt húzólag hatnak, s ezáltal a szilárdságot tetemesen nevelik. Ez okból ezen szerkezet az előbbit csaknem egészen kiszoritotta. Még tökéletesebb és merevebb

5) a Starke-féle asztal, mely ezelőtt mintegy 25 évvel lett a mérnöki folyóiratokban megösmertetve, s a 204. *a*) *b*) *c*) ábrákban látható. Ennek feje *A* △ alaku, sárgarézből van öntve és a könnyűség végett át van törve, a lábak ráma alakban három darabból vannak összetéve, felül 8″ szélesek, s a fő oldalából kiálló gömbök *a* közé vannak szorítva, melyek közül egyik mozdulatlan, másik pedig egy erős csavar *M* végén van, melyet az anyában beljebb vagy küljebb lehet csavarni. Ezen anya hosszában fel van hasítva, és egy keresztcsavar *N* által összeszorítható, hogy az *M* csavar annál szilárdabb és mozdulatlanabban álljon. Az emelő csavarok *E* az állványfő három csúcsában helyezvék, anyjuk hasonló czélból fel von hasítva, s kis csavarkák által összeszorítva, melyeket — ha a csavarok kikopnának, — meg lehet húzni, s az ingadozásnak elejét lehet venni. A *B* tányérból három szárny *F* nyúlik ki, alsó oldalukon hosszúkás lyukakkal ellátva, melyek az *E* csavarok végeinek befogadására szolgálnak. Ezáltal a *B* tányér foroghatási képességét elveszti, csupán függélyes irányban való mozoghatását tartván meg. A *C* tábla, mely itten tányér alakú, a *B* középpontjában kiálló csap *d* körül durván foroghat;

de ezen durva forgást finommá lehet változtatni. E czélból a *C* alsó részét, mely sárgaréz boritékkal van ellátva, egy erős karika *K* övedzi körül, melyet egy csavar *m* által erősen a *C* körületéhez lehet szorítni. Ezen karika a *B* tányérral egy erős csavar-orsó *f* által van összeköttetve, melynek forgási ágya a *B* tányér egyik szárnyán *F*, anyja pedig *c* a *K* karikán van helyezve, épen úgy, mint azt a Marinoni asztalánál láttuk. A *C* tányér felső részéből ismét három kar *P* nyúlik ki, ezek 4'' átmérőjű tányérkákban végződnek, melyeken 3'' átmérőjű lyukak vannak kivágva. Az asztaltábla ezen tányérkákon nyugszik, s az *R* csavarok által szorittatik le, melyeknek anyjai a tábla belsejében vannak elrejtve. A tányérkákon lévő lyukak az asztaltáblának oldalt mozgathatása végett vannak készitve. A tábla két vagy három rétegből van összeenyvezve, melyeknek szálaik egymásra keresztben állanak, hogy a megvetemedésnek a lehetségig ellentálljanak.

Ezen szerkezetnek kitünő tulajdonságai közt kiemelendő az állvány nagyobb merevsége, minthogy a lábak szárai ferde támaszok gyanánt hatnak, melyeken az oldalnyomás ereje megtörik, továbbá az emelő csavaroknak a középponttóli nagyobb távjai, de kivált az asztal-táblának nagyobb nyuglapja, melyet a *C* tányér karjai nyujtanak. Ezek az asztalnak a függélyes nyomás ellen sokkal nagyobb ellentállási képességet adnak, mint azt az előbbi szerkezeteknek megfelelő részei szolgáltatni képesek.

185. §. A mérő-asztal segédeszközei.

A mérőasztalhoz több segédeszközök kivántatnak meg, u. m.

a) A függöny. Ez egy fa horogból *ABC* (205. ábra) áll, melynek hosszabbik végén *C*-nél egy zsinór van kötve, a zsinór végén pedig egy körte alakú súly van megerősítve. Az *AC* vonalnak az *AB* belső lapjára merőlegesen kell állani. Ezen műszer az asztal-tábla valamely pontjának a földszinére való lefüggönyözésére szolgál. A *BAC* szöget akármely derék háromszöggel meg lehet vizsgálni, minthogy a fennforgó czélra különös pontosság szükségtelen.

b) A szintező (lásd 138. §.). Ebben a cső 4" hosszú és 5—6" hosszú talpon van megerősítve. A kiigazitó csavarkák szerkezete a 206. ábrából látható. Az üvegcső felületén a buborék végeinél rendesen egy pár vonás van bemetszve, hogy a buborékot pontosabban be lehessen állítni. — A kiigazitás a 138. §. alapján következőképen vitetik véghez. A szintezőt az asztal-táblára egy lábcsavar irányában helyezvén, a talp két oldalán finom rajzón vonal húzatik, s a buborék a lábcsavar által a csőn lévő vonások közé beállittatik. Ezután a szintező megfordítva helyeztetik a vonalak mellé, s ha a buborék helyéből kimozdul, a kiigazitó csavarka által fél úttal visszavitetik. Ezen műtételt is egypárszor ismételni kell, mig a megforditás a buborék állásában semmi változást nem okoz.

Régenten az asztal szintezésére szelencze alakú szintezők használtattak. Ezek 3—4" átmérőjü üres hengerből állottak, felül üveg fedéllel légmentesen elzárva, melynek belső oldalán nagy átmérőjű gömbfelület volt köszörülve, és az ür egy kis hijján borszeszszel megtöltve. A fedél középpontjából 2—3 központos kör volt húzva, melyek közé a szinte köralakú buborék beállittatott, úgy hogy annak szélei egyik vagy másik kör körületétől egyenlő távban állottak. A körök középpontjában a gömbfelülethez gondolt deréklőnek itt is merőlegesen kellett a talapra állani, de a hiba kiigazitására segédeszközök hiányoztak, s csak a talp leköszörülése által lehetett a hibán segítni. Ezen szintezők egy részről csekély érzékenységük miatt, minthogy igen nagy sugárú gömbfelületet köszörülni igen nehéz, más részről azon okból, mert a födélnek a szelenczébe beillesztése légmentesen csaknem lehetetlen, azért a borszesz hamar elpárolog, mai időben használatból egészen kimentek.

c) A n é z g e v o n a s z. Az irányok felfogására, és azoknak az asztaltáblára áttételére szolgál. Ez 30" hosszú 2" széles vonaszból áll (207. ábra) *A*, melynek mindkét végén 7—8" hosszú nézge van felállitva, s csukló *m* által a vonaszszal összekapcsolva, melynélfogva azokat a vonaszra le lehet hajtani. A szemnézge *B* vagy hasadékkal, vagy czélszerűbben 5—6 egyenes vonalban fekvő lyukacskákkal, a tárgynézge *C* pedig kifeszített lószőr, vagy feketére festett finom huzallal van felszerelve. Ezen szál a nézgén fúrt lyukacskákban rendesen fa ékecskék által van beszögezve; de ha a szál hossza 6—7", czélszerű a nézge egyik végén egy kis csapocskát *k* helyezni a *D* ábra szerint, melyre a szálat úgy lehet feltekerni, mint a hegedűhúrokat szokták felhúzni.

1) Arra, hogy a mezőn kitűzött szög az asztaltáblára hibátlanul feltétessék, a többek közt megkivántatik, hogy az iránysík a mezőn kitűzött szög csúcsán, a vonasz éle pedig a papiroson megjelölt hasonnemű ponton menjen keresztül. Mind a két feltételnek elég tétetik, ha a szög csúcsai a mezőn és a papiroson függélyesen egymás fölé állittatnak, s a nézgevonasz ugy van készitve, hogy az iránysík annak élén menjen keresztül. Ezen szerkezetből egyszersmind önként folyik, hogy a vonasz élének akármelyik pontját lehet a ponthoz illeszteni. De a fentebb nevezett feltételeknek úgy is eleget lehet tenni, ha az iránysík a vonasz élével akárminő szöget képez, csak a vonasz élének azon pontja állittassék a szög csúcsa fölé, melyen az iránysík keresztül megyen épen ugy, mint azt a Theodolitnál láttuk, hol az Alhidade forgáspontjában az iránysík és az indexvonal egymást metszik. A nézgevonasz rendesen az első elv szerint van készitve; de ez nem okvetlen szükséges, hanem szabad az iránysíknak a vonasz élétől eltávozni, azzal egy kis szöget képezni, sőt a vonasz közepén is keresztül menni, mindamellett a vonasz élének akármely pontját tarthatni a papiroson megjelölt szög csúcsához a nélkül, hogy abból egy jelentéktelen külpontossági hibácskán kivül valamely észrevehető kár keletkeznék, mint ezt később tüzetesen fogjuk előadni.

2) A nézgevonasz néha kettős iránysíkkal van ellátva, melyek egymás felett állanak ugy, hogy mindenik nézge félig szem-, félig tárgynézge gyanánt szolgál. (208. ábra). De ezen szerkezet nem célszerű. Ugyanis azáltal, hogy mind a hasadék, mind a szőrszál csak fél olyan hosszú, mintha az az egész lemez hosszában kiterjedne, azon tér is, melyet a nézgével egyszerre át lehet tekinteni, csak fél annyi lehet, mint az egyes nézgénél. Legyen p. o. a lemez hossza 7″, a vonaszé 30″, akkor ezen szög $\alpha = \frac{3{\cdot}5}{15} = 0{\cdot}25$ körülbelől $= 13^0$, mig az az egyes nézgénél 25—26^0-ra emelkedik. Ennélfogva hegyes vidékeken, hol 15—20^0-nyi hajlásszögek igen gyakran előfordulnak, a kettős nézgéket használni alig lehet; mig az egyesek használhatóságu-

kat legtöbb esetben megtartják, s csak kivételképen lesz szükség az irányzásban rendkivüli segédeszközökhöz folyamodni.

3) Midőn a beirányzandó vonalnak meredeksége nagyobb, mint a nézge által áttekinthető legnagyobb hajlásszög, akkor az irányzást a vonasz élén lehet eszközölni azon feltétel alatt, hogy az iránysík a vonasz élén megyen keresztül. Ugyanis az iránysík ezen három tényező közül, u. m. néző lyuk, szőrszál és vonaszél, akármelyik kettő által egyaránt megállapíttatik, s akármelyik kapcsolatot lehet használni a szerint, a mint a szükség hozza magával. Ha tehát egy part oldalán felülről lefelé kell nézni (209. ábra) (*a*), a vonaszt előre kell tolni, mig a tárgy az asztal felett a legfelső néző lyukon keresztül látható lesz s azt a vonasz élével oly módon kell metszeni, mint az a szőrszállal szokott véghezvitetni. Ha pedig alulról felfelé kell nézni (*b*), akkor a vonaszt hátra kell húzni, mig az asztal élétől nézve a tárgy a nézge nyilásában látható lesz, s a szemet a vonasz éle alatt körülbelől 6—8″ távban az iránysíkba helyezvén, a szőrszálat a tárgyra oly módon kell beállítni, mintha két rúd közé egy harmadikat akarnánk az egyenes vonalba kitűzni.

4) Ugyanezen czélra szolgálnak az ugynevezett h e g y i n é z g é k is. Ezek az egyik nézgelemezen (210. ábra) felállitott mellék nézgékből *E, F* állanak, melyek mindenben a főnézgék szerkezete szerint vannak készítve, s kettős iránysíkokat tartalmaznak, melyekkel előre is hátra is lehet irányozni, s ha a lemez csuklója körül felemeltetik, azt kisebb-nagyobb hajlásszög alatt lehet beállítni. Ezen hegyi nézgék azon tökéletlenségnek, mely minden nézgével közös, fokozott mértékben vannak kitéve. Ugyanis irányzás közben a szemnek egyszerre mind a szőrszálra, mind a távol tárgyra kellvén nézni, hogy egyiket a másikra be lehessen állítni, rendesen egyik sem látszik tisztán, minthogy azoknak képei a távok közötti igen nagy különbség miatt a szemben egymás háta mögé esnek, ennélfogva az ideghártya mindkettőhöz egyszerre alkalmazkodni nem képes. A hegyi nézgénél, melynek hossza ritkán több 6″-nél, mig a tárgy távja 2—500°-et is meghalad, ezen nehézség igen szembetünőn mutatkozik, mert ha figyelmünket a távol lévő tárgyra fordítjuk, a szőrszál vastag határozatlan elmosott szegélylyel látszik. Ezért a hegyi nézgék csak kivételesen alkalmazandók, s a fentebb lerajzolt egyszerű nézgéknél egészen nélkülözhetők.

186. §. A nézgevonasz kellékei és kiigazítása.

A nézgevonasznak következő kellékekkel kell birni:

1) A vonasz élének egyenesnek kell lenni. Ezen tulajdonságot már a 103. §-ban megvizsgálni tanultuk; de azon körülmény, hogy a vonasszal irányzó van kapcsolatban, a vonasz éle megvizsgálására is felhasználható. E czélból az asztaltáblára 5—6″-nyi távban egymástól két erős tű szúratik le, és a vonasz éle hozzájok illesztetvén, az asztaltábla úgy fordíttatik, hogy az iránysík valamely tisztán látható távol tárgyra mutasson, s az asztal ezen állásban megszorittatik. Ezután a vonasz a tűk mellett előre és hátra húzatik, figyelvén arra, hogy annak éle a tűket mindig érintse a nélkül, hogy azokra oldalnyomás gyakoroltatnék, s ha a szőrszál mindig a tárgyra mutat, akkor a vonasz éle egyenes; ellenkező esetben pedig görbe s a hibát ügyes gépész által kell kiigazíttatni.

2) A tárgynézge szőrszálán, és a szemnézge lyukain keresztül gondolt iránysíkoknak össze kell esni, s a vonasz lapjára merőlegesen kell állani. Ennek megvizsgálása a 159. §. 2-ban már előadatott.

3) Ha a nézgék kettős iránysíkokkal vannak ellátva, ezeknek párhuzamosoknak kell lenni. Ennek megvizsgálása végett az egyik iránysík valamely távol lévő tisztán látható tárgyra irányoztatván, a vonasz éle mellett finom vonalat kell húzni; ezután a vonasz élét a vonal másik oldalához illesztvén, meg kell vizsgálni, valjon a második iránysík az előbbi tárgyra mutat-e, vagy nem? Első esetben az iránysíkok párhuzamosak; az utolsóban úgy lehet segítni a hibán, ha a szőrszál a peczek által egy kissé oldalt nyomatik, s úgy ékeltetik be.

4) Miután a fentebbiek szerint gyakorlati szempontból itélve kivánatos dolog, hogy az iránysík a vonasz élén menjen keresztül, ennek megitélésére következő eljárást lehet alkalmazni. A nézgelemezeken hosszában rendesen egy egyenes vonal van bevésve, s a gépész mind a néző, mind a szőrszál beékelésére szükséges lyukakat ezen vonalakban szokta fúrni. Ezen vonalak tehát az iránysíkban feküsznek. Állítsuk fel tehát mind a két nézgét, és egy jó rajzoló háromszöggel vizsgáljuk meg, valjon ezen vonalak meghosszabítva a vonasz élével találkoznak-e, vagy

nem? Ha hiba mutatkoznék, a lemez csuklóit le kell srófolni, s a csavarlyukakat egy kissé hosszukásra reszelvén, a nézge-lemezeket oldalt mozdítva kell ismét megerősítni.

Vagy állitsuk be az iránysíkot a 159. §-ban előadott szabadon függő zsinórra; azután nézzünk előbb a néző lyukakon s a vonasz élén, azután a vonasz hátulsó végén s a szőrszálon keresztül a zsinórra; ha ezen különböző irányok a zsinórt mindig metszik, akkor az iránysík a vonasz élén megyen keresztül. Ellenkező esetben a hibát ki kell igazítni.

5) Végre a hegyi nézgére nézve is meg kell vizsgálni, valjon annak iránysíkjai a főnézgéével párhuzamosak-e? vagy nem. E czélból a már kiigazított főirányzó valamely függélyesen kifeszített zsinórra beállittatik, s ekkor a főnézgék lehajtatván, a hegyi nézgék iránysíkjai vétetnek szemügyre. Ha ezek is szintén a zsinórra mutatnak, s fel vagy lefelé hajtatván mindig a zsinóron maradnak, akkor azoknak fekvésök helyes. Ha pedig a zsinórtól eltérnek, akkor a csukló tengelye vagy nem párhuzamos a nézge lapjával, vagy nem merőleges a fő iránysíkra. Mind a két hiba olyanforma eltéréseket fog okozni a zsinórtól, mint a 159. §-ban előadatott, s a hibát a főnézge csuklójának kiigazitásával lehet csak megszüntetni, melyen a hegyi nézgék vannak helyezve. Megtörténhetik, hogy ezen műtétel által a fő iránysík fekvése egy kevéssé változik; ezen esetben a kiigazitásokat ismételni kell, mig minden iránysík helyesnek találtatik.

187. §. Távcsöves vonasz.

Fontosabb felvételeknél, különösen ha igen nagy távolba kell irányozni, nézgék helyett távcső használtatik, mely a vonasszal vagy állandóan össze van kapcsolva, vagy csak használat közben erősíttetik meg a vonaszon, azután pedig arról levétetik. Ezen készülék távcsős vonasz nevet visel.

1) Ez egy az előbbihez hasonló nagyságu vonaszból áll (101. ábra), melynek egy harmada táján egy 5—6″ magas oszlop van felállitva, s annak felső végén egy vizszintes tengely körül forogható távcső van helyezve, melyet tetszés szerint fel s le lehet hajtani. A távcsővel czélszerűen egy magasságmérő ív van kapcsolatban, melylyel a ferde síkban mért hosszakat vizszintes síkra lehet áttenni. Sőt kivánatos dolog a távcsőt még

távmérő szervekkel is ellátni, hogy a műszer a lehető legnagyobb használhatóságnak örvendhessen.

2) Régente a távcső az oszloppal egy rövid csap által köttetett össze ugy, mint azt az Astrolabiumnál láttuk. De ezen szerkezet igen tökéletlen volt azért, mert a csap hossza $^1/_2$"-et meg nem haladván, a forgás síkja nem volt eléggé szilárd és változatlan, s ezen tengely kiigazitására a kellő szervek hiányoztak. Most a távcső egy 3—4" hosszú csap végén van megerősitve, s ezen csap körül forgatható ugy, hogy vele előre is, hátra is lehet irányozni. A forgás-tengelynek továbbá egy kis mozoghatóság van adva, hogy azt a vonasz lapjával párhuzamossá lehessen tenni; sőt a tengely perselyén rendesen egy kis szintező is van megerősítve, melylyel a tengelyt még akkor is vizszintessé lehet tenni, ha az asztaltábla a vonasz súlya által egy kevéssé lesülyedt volna is.

3) A távcsős vonasznál meg kell vizsgálni, valjon annak irányvonala fel és lefelé hajtatván, a forgástengelyre merőleges síkot ir-e le, vagy nem? Ehhez két feltétel kívántatik meg, u. m.:

a) a láttani tengelynek a forgástengelyre merőlegesen kell állani;

b) a forgástengelynek a vonasz lapjával párhuzamosnak kell lenni.

Ha a távcsőt áthajtani nem lehet, mind a két pontnak megvizsgálása a 159. §. útmutatása szerint történik. Ha pedig a távcsőt át lehet hajtani, akkor ilyenténképen kell működni.

a) Az első pontra nézve. Állitsuk fel az asztalt annak rendje szerint, tegyük a vonaszt (211. ábra) *AB* a táblára, és az irányzót valamely igen távol fekvő, körülbelől az asztal vizszinében eső pontra *M* beállitván, húzzunk a vonasz éle mellett a papiroson finom vonalat. Ezután tegyük a vonaszt megfordítva a vonal mellé ugy, hogy *A* . . *A'*-be, *B* . . *B'*-be essék, és hajtsuk át a távcsőt, mely most hátra felé mutat, hogy ismét előre nézzen. Ha az irányvonal ismét az előbbi pontra mutat, akkor a tengelyek egymásközti fekvése helyes; ellenkező esetben az eltérés a kettős hibát ábrázolja, melynek felét a diaphragma csavarkáival ki kell igazítni. Az egész műtétel a Theodolit hasonnemű vizsgálatához hasonlít.

6) A második pontra nézve állitsuk fel az asztalt,

s irányozzuk a távcső irányvonalát (212. ábra) valamely magasan álló pontra *M*, ezután a távcsőt lefelé hajtván, tűzzünk ki egy második pontot *N* olyan mélyen a vizszintes alatt, a mint csak lehet. Ezután forditsuk meg a vonaszt, hajtsuk át a távcsőt, hogy az ismét az *M* pontra mutasson, s állitsuk be tökéletesen az *M* pontra. Ha most az irányvonal lefelé hajtatván, ismét az *N* ponton megyen keresztül, akkor a láttani tengely által leirt sík a vonaszra merőleges. Ellenkező esetben az eltérés a kettős hibát ábrázolja. Ugyanis a távcső láttani tengelye által leirt sík a vonasz mindkét fekvésében egyenlő szög alatt, de ellenkező oldalra hajlik a vonasz lapjára, ennélfogva a merőleges síknak közepén kell keresztül menni. Most tehát a forgástengely fekvését változtatni kell az illető csavar által, mig a láttani tengely fent az *M* ponton, alant pedig az *N* és *N'* között középen megyen keresztül. Ezáltal a forgástengely a vonasz síkjával párhuzamossá, s a mennyiben ez a vizszintes asztaltáblával párhuzamos, egyszersmind vizszintessé lett; és ha most a szintező buborékja a kiigazitó csavarkával középre beállittatik, a buborék állásából a forgástengely vizszintességét jövőben is meg lehet itélni.

4) Hogy az egész iránysík merőlegessé tétessék a vonasz lapjára, a 139. §. 5. útmutatása szerint kell működni.

5) A távcső a vonaszon rendesen ugy van megerősítve, hogy az iránysík a vonasz élével körülbelől összeesik, legalább azzal párhuzamos. De ezen tulajdonság nem okvetlen szükséges; legfeljebb csak azért kivánatos, hogyha nézgés és távcsöves vonaszok vegyesen használtatnak, az irányokban különbség ne mutatkozzék.

Az iránysíknak a vonasz élével való párhuzamosságát így lehet megvizsgálni: állítsuk fel az asztalt annak rendje szerint; illesszük a vonaszt két erősen a táblába vert egyenlő vastag tű mellé, melyek egymástól körülbelől 20'' távban állanak, s fordítsuk az asztalt, míg az iránysík valamely igen távol lévő tárgyra mutat. Ezután fordítsuk meg a távcsőt úgy, hogy az az asztal alatt menjen el, mi által a vonasz a tűk másik oldalánál foglal helyet (213. ábra). Ha az iránysík ekkor is az előbbi tárgyra néz, akkor a kivánt párhuzamosság megvan; ellenkező esetben az eltérés a kettős hibát ábrázolván. Ugyanis ha *AB* a vonaszt,

MN az irányvonalat jelenti, mely az AB élével α szöget zár be, akkor a felforditás után a vonasz $A'B'$, az irányvonal pedig $M'N'$ fekvésbe jön, a vonasz éle pedig párhuzamos fekvését megtartja. Tehát az irányvonal eltérése $\beta = 2\alpha$.

A hibát néha az oszlop fejénél, de többnyire annak lábánál lévő csavarok által lehet kiigazítni, melyek által az oszlopot tengelye körül egy kicsit fordítni lehet.

188. §. Tájékozás. Tájola.

A 184. §.-ban röviden megemlíttetett, hogy ha a mezőn kitűzött valamely szöget az asztaltáblára fel akarunk tenni, annak egyik szárát — melyet már a táblán felrajzolva gondolunk — a mezőn megfelelő vonalhoz olyan szög alatt kell fektetni, melyet e vonasz éle az iránysíkkal bezár. Ezen szög a fentebbiek szerint ugyan többnyire $= 0^0$, ennélfogva a vonalak egymással párhuzamosak; de az nem okvetlen szükséges.

Az asztaltáblának ezen beállitása, mely által eszközöltetik, hogy a papiroson felrajzolt vonalak a megfelelő mezei vonalakhoz minden állomáson állandó hajlásszögeket képeznek s meghosszabbítva a láthatárnak mindig ugyanazon pontjai — tájékai — felé néznek, tájékozásnak (orientiren) neveztetik. Ezt két módon lehet eszközölni, u. m. az irányzó, és a tájola segítségével.

1) Az első mód szerint, miután az asztaltábla a földön megjelölt álláspontban kellőleg elhelyeztetett úgy, hogy a megfelelő pontok a mezőn és papiroson egymás felett függélyesen állanak, s az asztaltábla vizszintessé tétetett, a vonasz éle a papiroson felrajzolt s az állásponton keresztül menő vonal mellé illesztetik, s az asztal tengelye körül fordíttatik, mig az iránysík a vonal végén kitűzött jelt középen metszi. Ekképen az asztal épen olyan fekvést nyer, mint a milyet akkor bír vala, midőn a vonal a papiroson húzatott; ennélfogva a vonalak párhuzamossága a két különböző álláspontban el van érve. Könnyű átlátni, hogy tájékozásra csak olyan vonalat lehet használni, mely az asztal álláspontján megyen keresztül.

2) A második mód a tájola használatában áll. Ez a 189. ábrában látható tájolától csak abban kölönbözik, hogy irányzója és állványa nincsen. A tájékozás következő módon történik. Miután az asztal egy állásponton kellőleg felálíttatott

és tájékoztatott, a tájola az asztaltáblára tétetik és úgy fordíttatik, hogy a delejtű északi vége 0°, déli pedig 180°-on álljon, s a tájola talpa mellett körül finom vonalak húzatnak. Még egyszerűbb, ha a talp azon oldalához, mely a 0° és 180°-on keresztül gondolt átmérővel párhuzamos, s mely a talp fenekén ki van húzva, és Észak, Déllel meg van jelölve, az irányzó éle hozzá illesztetik, s miután a tű végei 0° és 180° jönnek nyugvásba, a vonasz mellett finom vonal húzatik, mely tehát a 165. §. szerint az álláspont delejes délllőjét fogja ábrázolni, és északi végén rendesen nyilvessző horgokkal jelöltetik meg. Ha most valamely más álláspontban az asztalt tájékozni akarjuk, feltesszük a vonaszt pontosan a delejes délllő mellé, mellé illesztjük a tájolának fentebb nevezett oldalát, úgyhogy annak éle a vonaszéval tökéletes érintésbe jőjjön, fordítjuk az asztalt tengelye körül, mig a delejtű északi vége 0°, déli pedig 180°-on áll. Ekkor az asztal az előbbi fekvésével párhuzamossá lett, a mennyiben a két álláspont délllőjét párhuzamosnak lehet tekinteni (lásd 91. §. 7). Könnyű átlátni, hogy ezen műtételre a kör beosztása tulajdonképen nem szükséges; két vonás a 0° és 180° helyén elegendő. Ez okból olyan asztali tájolák is vannak, melyeknek limbusa csak 20—30° nagyságú ívdarabból áll.

189. §. Asztaltábla.

1) Az asztaltábla rendesen száraz hársfából van készitve, melynek felülete sima kemény erektől és görcsöktől ment. Hogy a nedvesség rá ne hasson, olajba van főzve, vagy legalább azzal beitatva. Hogy a tábla meg ne vetemedjék, a széleken keresztben a szálakkal léczek vannak rovatékokba eresztve; de ezeket beenyvezni nem kell, hogy a tábla összehuzódását ne akadályozzák, különben a táblán repedések állanának elő.

2) Némelyek az összehuzódás megakadályozása végett két vékony táblát szállal keresztben összeenyveznek, vagy a táblát a koczkás padlók módjára több apróbb darabból állitják össze. Ezek ugyan az összezsugorodásnak nincsenek annyira kitéve, mint a fentebbiek, de annál könnyebben megrepednek.

3) Igen nagy fontosságú felvételeknél üvegtáblákat szoktak használni, melyek fa-rámákba vannak foglalva, és felső lapjok tökéletesen síkra van köszörülve. Ezek a meleg befolyásától

igen keveset szenvednek, minthogy az üveg kiterjedése 1^0 R. hőmérsék növekedésre a hossznak csak 0·000011 részét teszi; a nedvesség által pedig változást épen nem szenvednek. Ennélfogva a legállandóbb asztaltáblákat szolgáltatják; de törékenységök miatt általános használatra még sem alkalmasok.

4) Ujabb időben megkisérlették üvegtábla helyett hengerezett vas lemezt használni, mely a fatáblán csavarok által erősittetik meg. Ennek kiterjedése ugyan az üvegénél $^1/_2$ résszel nagyobb, minthogy az = 0·000015; de ezen kiterjedés minden irányban egyenlő lévén, kivált ha a lépték is felrajzoltatik a táblára, s a méretek erről vétetnek le, vagy rakatnak fel a térképre, a térkép tökélyének teljességgel nem árt.

5) Az asztaltábla vastag tömör sima rajzoló-papirossal húzatik be, mely egész kiterjedésében a táblára ragasztatik, hogy a rá rajzolt pontok fekvésében a nedves lég befolyása változást ne okozzon. E czélra olyan gyenge enyvre van szükség, mely a papirost eléggé lefoglalja, de nagyobb erőnek enged; mert a papirost utoljára a tábláról le kell venni a nélkül, hogy az elszakadozzék. Ilyen ragaszt szolgáltat a tojás fehérjéből vert hab, melytől a sárga és a csira gondosan el van távolitva. Ha a papiros ezen habbal bemázoltatik, mig az egész kiterjedésében kiegyenesedik, és egy kissé nedvesnek mutatkozik, azután a táblára helyeztetvén, középről a szélek felé gyengén dörzsöltetik, egészen a táblához ragad. Ezen munka közben óvakodni kell a papiros szükségtelen feszitésétől; különben az igen száraz időben könnyen felpattan, különösen pedig a leszakitás után előbbi alakját visszanyerni törekedvén, a rá rajzolt alakok igen nagy változást szenvednek, s a térkép a természetteli hasonlóságát elveszti: hanem a mint a papiros fekszik, úgy kell a táblához nyomni, s ha munka közben a nedvességnek folytonos hatása következtében a papiroson nagy hólyagok mutatkoznának, ezeket középről a szélek felé kell terelni, s a papirost a táblához dörzsölni, hogy leragadjon. Végre a papiros 4 sarkát biztosság végett enyvvel a táblához kell leragasztani, s a táblát árnyékban lassan kell megszárítni. Némelyek az egész táblát behúzzák papirossal, s annak széleit a tábla oldalára lehajtván, csirizzel leragasztják. De ez nem ajánlható; mert ha a papiros a keresztléczekre van ragasztva, ez nem lévén beenyvezve a táblába,

hurczolás közben helyéből kimozdulhat, s a papirost a tábláró felszakithatja. Jobb, ha a papiros az asztal széleitől 1"-nyire eláll, s a keresztléczeket el nem éri. A sarkok leenyvezése elég biztosságot nyujt a felpattanás ellen.

190. §. Az asztal felállitása. Irányzás.

1) Az asztal felállitása következő módon vitetik véghez. Miután az asztal a földön megjelölt álláspont fölé helyeztetett, a táblát a lábak által szabad szemmel körülbelől vizszintessé tesszük, s a közép csavart megeresztvén ugy forditjuk, hogy a táblának azon vonala, mely után az asztalt tájékozni akarjuk, körülbelől a mezőn megfelelő vonallal párhuzamos legyen. Ezután az álláspontot a papirosról a földre lefüggönyözzük; ezáltal ki fog tűnni, hogy mennyire esik az a mezei ponton kivül. Ennek elháritása végett az asztalt lábastól felemeljük, a kellő irányban oldalt tesszük, s a műtételt ismételjük, mig a függöny elegendő pontossággal a mezei pont felett jön nyugvásba. Most az asztalnak két lábát erősen a földbe szúrjuk, a harmadikat egyelőre még szabadon hagyván, s ezen harmadik lábnál foglalunk állást úgy, hogy az asztalláb vége a mi lábaink fejei közé essék. Ezen állásban egyik emelő csavar jobb, a másik bal kéz felé, a harmadik pedig az állványfő tulsó oldalára esik. Ekkor a szintezőt az asztal közepére tesszük úgy, hogy az szabad szemmel itélve a jobb és bal csavarokat összekötő vonallal párhuzamos legyen, s a szabadon maradt lábat mint valamely emeltyűnek végpontját lábunk fejével jobbra vagy balra mozdítván, a mint a szükség kivánja, a buborékot a cső közepére beállítjuk. Ezután a szintezőt derékszög alatt fordítván úgy, hogy az a harmadik csavar felé nézzen, az eddig szabadon maradt lábat a földbe beszúrjuk, míg a buborék a cső középpontjában állapodik meg. Ezután a szintezőt ismét az első irányba fektetjük, s ha a buborék a középből igen eltérne, azt az illető láb beljebb nyomása által, ha pedig az eltérés csak csekély volna, a jobb és bal csavar forgatása által, melyek közül egyik fel, a másik lefelé mozdíttatik, tökéletesen a cső közepébe állítjuk. Ezután a szintezőt ismét a második fekvésbe helyezzük, s a hibát vagy a láb vagy a harmadik csavar által ismét elhárítjuk. Ilyeténképen az asztal táblájának két, körülbelől egymásra merőlegesen álló vonala viz-

szintessé tétetvén, az egész sík vízszintessé vált, s akár minő irányban és akárhol tétessék fel a szintező a táblára, a buborék mindig középen fog beállani, ha csak a tábla felülete nem görbe, vagy meg nincsen vetemedve. Végre a vonasz élét a táblán lévő tájékozási vonal mellé illesztjük, s az asztalt függélyes tengelye körül előbb durván fordítjuk, mig az iránysík körülbelől a mezőn megfelelő vonalba esik; azután a középcsavart meghúzzuk, illetőleg a fentebb *C*-vel nevezett keresztet vagy tányért az állványhoz szoritjuk, s az asztalt a paránycsavar által finom forgásba hozzuk, mig az iránysík tökéletesen a vonal végén lévő jelt középen metszi. Ekképen a táblán felrajzolt vonalnak a mezei megfelelő vonalhoz képest kellő fekvés adatván, a szögek felrakásához lehet fogni. Meg kell még említni, hogy azon ritka esetben, midőn a központosítást az asztal felemelése és oldalt mozdítása által elég pontossággal eszközölni nem lehetne, ha t. i. 1—2″-nyi külpontosságot nem volna szabad elnézni; akkor a központosítást az asztaltáblának az állványon oldalt tolása által lehet könnyítni. E czélból a táblát leszorító csavarokat meg kell ereszteni, és a táblát a kellő irányban oldalt tolván, ismét meghúzni. Ezen műtétel által a vizszintesség alig fog változást szenvedni, de a tájékozás mindenesetre egy kicsit változni fog. Ezért ezt újra kell csinálni; minthogy a tájékozásban a legkisebb hiba is igen ártalmas.

2) A szögek felrakása a táblára az irányzás által eszközöltetik. E czélra az álláspontban egy finom tűt lehet beszúrni a táblába, s a vonaszt mellé helyezvén, előre és hátra kell tolni. E közben a kéznek nagy újjával, melylyel a vonaszt fogjuk, egy kis oldalnyomást kell a vonaszra gyakorolni, hogy annak a tárgy felé néző vége jobbra vagy balra kanyarodjék a nélkül, hogy a vonasz éle a tűtől eltávoznék, vagy pedig azt eltörné. Különösen őrizkedni kell, hogy a vonasz annak hosszára merőlegesen a tű felé ne mozdíttassék; mert ekkor a tű eltörnék, s a papiroson olyan nagy lyuk támadna, mely miatt a pont továbbra haszonvehetlenné válnék. Ilyeténképen gyakorlott mérnökök az irányzást nehány m. percz alatt teljesítik. A vonasz éle mellett azután rajzónnal finom vonalat kell húzni, melynek lehetőleg a tű közepéből kell kiindulni, mely a lyuk középpontjának megfelel. Ha a munka különös pontossággal eszközlendő, tűt

használni nem szabad, hanem a szintezőnek egyik szögét lehet a pont felibe tartani. Ezen esetben a vonasz élét nagy szigorral a pont közepén kell keresztül tenni, s a vonalat szorosan a vonasz éle mellett kell húzni. Különösen figyelmezni kell arra, hogy munka közben a mérnök karja a táblára ne nehézkedjék, nehogy az asztal állása, ha csak pillanatnyira is, változást szenvedjen, s irányzási hibákra szolgáltasson alkalmat.

*191. §. Az asztallali szögmérés hibái.

A mérő asztallali szögmérés csaknem mind azon hibáknak ki van téve, melyeket a theodolitnál előszámláltunk; ennélfogva az ott kifejtett képletek itt is érvényesek. De azon hibáknak nagyobb része igen sokat veszít befolyásából az által, hogy a mérő asztallal elérhető pontosság (1—2′) sokkal kisebb lévén, mint a theodolitnál, a kiigazitás közben nagyobb eltéréseket is el lehet tűrni. Nevezetesen

1) A külpontosságra nézve a 142. §.-ban, mint legroszabb eset a ☽ képlet szerint találtatott

$$\alpha - \alpha' = \pm \frac{2D}{d}.$$

Tegyük d-t csak 1″-nek, akkor ha

$$\begin{array}{llll} D = 10^0 & \ldots & \alpha - \alpha' = & 9' \; 36'' \\ \text{»} = 100 & \ldots & \text{»} \quad = & 58'' \\ \text{»} = 200 & \ldots & \text{»} \quad = & 29''. \end{array}$$

Tehát a hiba befolyása kis távokra igen nagy, nagyobbakra csekély. De minthogy a szögmérés nem közvetlen czél, hanem csak eszköz a mezőn kitűzött pontoknak a papiroson való meghatározására; ezek pedig a szögeken kivül még a távolságtól is függenek: tehát tulajdonképen a pontnak helyéből kimozdulását kell szemügyre vennünk. Ez pedig, ha p. o. a sarkrendszert akarjuk használni, a 91. §. 5. szerint $= D(\alpha - \alpha') = 2d$; tehát legroszabb esetben is csak kétszer annyi mint a külpontosság. Innen következik, hogy ha egyébaránt az asztal helyesen van tájékozva, 1 — 2″-nyi hiba a központositásban nem ártalmas, mivel azt a léptékről levenni, s a térképen láthatóvá tenni még nem lehet, kivévén azon esetet, midőn nagy városok felvételénél igen nagy lépték használtatik; ezen esetben a központositást is nagyobb szigorral kell kezelni. Innen lehet megitélni, hogy az asztaltáblának párhuzamos mozoghatósága nem olyan fontos, mint sokan gondolják. Mert 1—2″-nyi hibát el lehet nézni; 3 s több hüvelyknyire pedig az asztalt eltolni nem lehet; de ha lehetne sem volna tanácsos, minthogy akkor a tábla súlypontja tetemesen oldalt esvén, az asztal szilárd állásában bizni nem lehetne.

2) A szintezési hibának legnagyobb befolyása a 143. §. ☽ képlete szerint

$$\alpha - \alpha' = \pm 2\delta\, tgh,$$

a mellékelt táblácskából egyszersmind kitünik, hogy 30⁰ hajlásszögön alul a szöghiba kisebb a szintezési hibánál, azon felül pedig nagyobb. Mennél hegyesebb tehát a vidék, annál pontosabban kell a szintezőt beállítni. Egyébaránt a szintezőben 1—2′-nyi érzékenység elegendő. Ezért az asztali használatra szánt szintezők csak természetesen hajlott üveg csövekből vannak kimetszve, melyeknél mesterséges kiköszörülés egészen szükségtelen.

3) Az iránysík ferdeségére nézve ugyanazon eredményre jutunk, mint a szintezési hibánál láttuk.

4) Ha a nézgevonasz iránysíkjai a vonasz lapjára ugyan merőlegesen állanak, de egymással nem párhuzamosak, ekkor azok felváltva használtatván, a szögben épen olyan hibát okoznak, minő maga az iránysíkok közötti szög.

5) Ha a távcső láttengelye annak forgástengelyére nem merőleges, akkor a legnagyobb hiba a 148. §. ☽ szerint:

$$\alpha - \alpha' = \delta\left(1 - \frac{1}{cosh}\right).$$

Ez sokkal kisebb az előbbieknél, 3—4′-nyi eltérés még nem ártalmas.

6) Ha a távcsős vonasz az asztal szélére esik, ez annak tetemes súlya alatt vizszintességét elveszti, s az ebből eredő hibát a 2) pont szerint lehet megitélni; de ha a távcső forgástengelyén szintező van helyezve, s a buborék az emelő csavar által helyére beállittatik, akkor az iránysík függélyessé válik, s a hiba befolyását a 144. §. szerint kell megitélni. Ennek ☽ képlete szerint a lehető legnagyobb hiba

$$\alpha - \alpha' = \frac{\delta^2}{2}$$

az előbbiekhez képest csaknem egészen elenyészik. Innen lehet látni, hogy az újabb szerkezetű távcsős vonaszok a czélnak jobban megfelelnek, mint a régiek. Egyébaránt a szintezőt csak akkor kell minden irányvonalnál beállítni, ha a buborék igen eltérne a középtől, valamint szerfeletti szigorúság a beállitásban egészen szükségtelen.

7) Ha az iránysík nem a vonasz élén megyen keresztül, akkor a hiba befolyását a 149. §. szerint lehet megitélni. A legroszabb esetet ezen képlet fejezi ki:

$$\alpha - \alpha' = \frac{\delta}{D},$$

melynek értéke ugyan tetemesen nagy, ha D kicsiny. De minthogy itt is, mint az 1. számnál, a pontnak helyéből kimozdulását kell szemügyre venni, melynek értéke $= D(\alpha - \alpha') = \delta$, ez pedig a külpontosság: tehát a térkép tökélyének teljességgel nem ártana, ha az iránysík a vonasz közepén menne is keresztül, mivel az ebből eredő hiba a pont fekvésében a vonasz szélességének felét, mely körülbelől $= 1''$, meg nem haladná. Ezt pedig a léptéken még látni nem lehet.

Ha a vonasz kettős iránysíkkal van ellátva, s a szögnek egyik szárát az egyik, másikat pedig a másik iránysíkkal irányozzuk be, akkor δ-t a második irányban — jellel kell venni, s a fentebbi §-nak ⊙ egyenlete ezzé változik át:

$$\alpha - \alpha' = \delta\left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}\right),$$

s a legnagyobb érték lesz, ha $AC = BC = D$,

$$\alpha - \alpha' = \frac{2\delta}{D},$$

ez pedig kétszerte nagyobb az előbbinél.

*192. §. Irányzási hiba.

1) A régi mérnökök a nézgéveli irányzás hibáját $1'$-nek becsülték; de az Stampfer kisérletei szerint sokkal kisebb, t. i. kedvező körülmények közt és jó szerkezetű nézgéknél $= 10''$, sőt éles szemeknél még ennél is kisebb, noha az rosz világitásnál $20''$-ra is felszökik. Közép számmal azt $15''$-nek lehet venni.

2) A néző lyukra nézve azon vélemény uralkodott, hogy az irányzási hiba azon szöggel egyenlő, mely alatt a lyuk fél

átmérője a szőrszáltól látszik. De ez hibásnak bizonyult be. Ugyanis Stampfer kisérleteiben ezen szög 6′-re is emelkedett a nélkül, hogy az irányzási hiba növekedett volna; ellenben ha ezen szög bizonyos határon alól kisebbittetett, az irányzási hiba nagyobbodott. Ezen tüneményt onnan lehet kimagyarázni, hogy a világosság-sugárok a lyuk szélein bizonyos távolságig a lyuk középpontja felé az egyenes irányból eltérittetnek; tehát a szemben tökéletlen látásérzetet okoznak. Ennélfogva a szem akaratlanul is kénytelen a lyuk közepében állapodni meg, ha tisztán akar látni. A néző lyuk átmérője $^1/_3$ és $^2/_5$ vonal közt legczélszerűbbnek találtatott, keskenyebb lyukon igen kevés sugárok, s azok is eltéritve hatnak a szembe, tehát tökéletlen látást okoznak; szélesebbnél pedig az eltéritő övön belől igen nagy tér marad, melynek minden pontjában egyformán lát a szem. Ennélfogva határozott álláspontot nem találván, az irányvonal fekvésében bizonytalanság áll elő.

3) A nézgevonasz hossza egészen közönyös, csak kisebb ne legyen a legkisebb láttávnál. Ellenben ennél rövidebb nézgéknél az irányzási hiba tetemesen nagyobb; minthogy a tárgy és az irányszál képei a szemben igen különböző távolba esvén, az ideghártya egyszerre mindkettőhöz alkalmazkodni nem képes.

4) A szőrszál vastagsága az irányzás tökélyére befolyással nincsen, ha a tárgy csak kevéssé nagyobb szög alatt látszik, mint a szőrszál. De ha az 10, vagy többször vastagabbnak látszik, akkor az irányzás bizonytalan kezd lenni, mivel a szőrszál két oldalán látszó darabok szélességének egyenlőségét megitélni nehéz. Ha pedig a tárgy kisebb szög alatt látszik, mint a szőrszál, ennélfogva ettől egészen eltakartatik, akkor a fentebb említett irányzási hiba még az eltakart vagy ártalmas szög felével nagyobb lesz, minthogy a rúd ezen térben akárhol állhat a nélkül, hogy azt a szem megitélni képes volna. A közönséges 24 — 30″ hosszú nézgevonaszoknál az ártalmas szög körülbelől 1′-et teszen; egy 2″ vastagságú rúd pedig 100° távban szintén 1′ szög alatt látszik. 100°-ön túl tehát az irányzási hibát ezen körülmény szerint kell megitélni.

5) Innen lehet megitélni a hegyi nézgék használhatóságát is. Ezeknek hossza ritkán nagyobb 7″-nél; s ha a szőrszál vastagságát csak 0·‴01-nek vesszük is, az ártalmas szög =

$\frac{0{\cdot}01}{7} = 0{\cdot}0014$ körülbelől $= 5'$. Az irányzási hiba tehát az utóbbi kedvezőtlen körülmények közt, melyek itt már 20^0 távban kezdődnek, minthogy egy $2''$ vastag rúd 20^0-nyi távban a szőrszál által eltakartatik, lesz $= 2'\ 30'' + 15'' = 2'\ 45''$. Ezért a hegyi nézgét csak kivételképen szabad használni.

6) A távcsőveli irányzás annál tökéletesebb, mennél nagyobb a távcső nagyítása, feltévén, hogy az tökéletes szerkezetű, s a nagyítást megbírja. E szerint ha a távcső nagyítása N-nek neveztetik, az irányzási hiba lesz $= \frac{15''}{N}$. De ha a távcső szemüvegének nagyítása kelleténél nagyobb, úgy hogy a képen már az elmosódásnak nyomai látszodnak, az irányzás pontossága csökken. Különös előnyt ád a távcsőveli irányzásnak a nézge felett azon körülmény, hogy a távcsőben az irányszál és a tárgy képe egy síkban esvén, a szemüvegen keresztül mind a kettő tisztán látszik. Világosan lehet ezt látni a Stampfer által szerkesztett nagyítás nélküli távcsövön, melynek mind tárgy-, mind szemlencséje egyenlő gyútávú lévén, nagyítása $= 1$, azaz, a tárgyakat épen olyan nagynak mutatja, mint a nézgék. Ezeknél az irányzási hiba csak 3—5"-t teszen, jeléül annak, hogy a szem, ha mind a két tárgyat egyszerre tisztán látja, 3—5" iránykülönbséget képes felfogni, mint azt a távolban látszó villámháritókon észre lehet venni.

* 193. §. Különös szögmérési hibák az asztalnál.

Különösen az asztal szerkezetéből és használatából eredő hibák ezek:

I. A tájékozási hiba. Ennek a felvételre igen ártalmas befolyása van, mert ha az asztal a szükséges párhuzamos fekvésből valamely szöggel elfordíttatik, akkor mindazon vonalak, melyek ezen álláspontból az asztaltáblán húzatnak, ugyanazon szöggel lesznek valódi helyeikből elfordulva. Ezen hiba több forrásokból ered, milyenek:

1) Az állás külpontossága. Ha az $= d$, a tájékozási vonal hossza $= D$, akkor a papiroson lévő vonal a földön megfelelő vonaltól legroszabb esetben egy szöggel ω fog elhajolni, melyet ezen képletből lehet meghatározni:

$$\omega = \frac{d}{D}.$$

Ezen hiba annál nagyobb, mennél nagyobb d, és mennél kisebb D. Ha p. o. $d = 1''$, és

$D = 10^0$, akkor a tájékozási hiba $\omega = 4' \, 48''$
» $= 100^0$, » » » » $\omega = 29''$
» $= 200^0$, » » » » $\omega = 16''$.

A hiba tehát 10^0 hosszú vonalnál igen tetemes, mig az 200^0-nél figyelmet nem érdemel. Innen azt lehet következtetni, hogy az asztalt mindig a leghosszabb vonal után kell tájékozni, és ha kényteleníttetünk rövidebb vonalat használni tájékozásra: nagyobb távra irányozni, mint a milyen a tájékozási vonal hossza, nem szabad.

2) Ha az iránysík nem esik össze a vonasz élével, hanem azzal egy kis szöget képez, abból a tájékozásra káros következés nem háramlik, ha mind az irányzás, mind a tájékozás ugyanazon vonasszal történt, s a vonasz a pont mellett mindig ugyanazon oldalra, p. o. balra vagy jobbra helyeztetik. Ugyanis legyen a 214. ábrában AB a mezőn kitűzött vonal, állitsuk fel az asztalt A felett, tegyük a vonasz élét az A ponthoz, s irányozzuk a pq iránysíkot a B pont felé, s végre húzzuk a vonasz éle mellett az ab vonalat, mely a mezei AB-t ábrázolja. Most menjünk a B pontra, állitsuk fel az asztalt, b'-et B felibe függélyesen helyezvén, a vonasz élét a $b'a'$ vonalhoz illesztvén, s az asztalt úgy fordítván, hogy a $p'q'$ iránysík az A ponton menjen keresztül; akkor feltévén egyelőre, hogy b' a vonasz élének azon pontjába esik, melybe az első állomáson a esett volt, ennélfogva az iránysíknak a ponttól való távja ac, $b'c'$ mind a két állásban egyenlő, — az AcB és $Bc'A$ $\triangle$-ek egyenlők lesznek, minthogy mindkettőjökben két-két oldal, s a derékszögek egymással egyenlők; ennélfogva $pq \parallel p'q'$. Minthogy pedig a vonasz éle az iránysíkkal mind a két álláspontban egyenlő szögeket zár be, ezeknek párhuzamosságából azoké is következik.

Ha pedig a b' pont a vonasz élének más pontjába esnék, mint az első felállitásban a esett volt, akkor ac sem lenne egyenlő $b'c'$-el, tehát pq sem lenne $\parallel$ $p'q'$-val, s a tájékozásban egy kis hiba esnék, melynek értékét

$$\frac{b'c' - ca}{AB}$$

által lehet kifejezni. De ez legroszabb esetben is igen csekély mindaddig, mig a vonasz éle és az iránysík közötti szög kicsiny marad. Ha ezen szög p. o. kisebb 1^0-nál, akkor $b'c' - ac < 1'''$-nál, ennélfogva a tájékozási hiba még 10^0 hosszú vonalnál sem nagyobb 15 másod percznél, és a többi forrásokból eredő hibákhoz képest egészen elenyészik.

3) Másként áll a dolog, ha a nézge kettős iránysíkkal van ellátva, s a vonasz egyszer jobbról, máskor balról tétetik a pont mellé. Ekkor ugyanis (215. ábra) a két iránysík pqB és $q'p'A$ nem lesz egymással párhuzamos, hanem az AB vonalon O-nál metszi egymást. Legyen a köztök bezárt szög u, az iránysík és a vonasz éle közt lévő szög ω, akkor lesz:

$$OAs \text{ szög} = \omega - u$$
$$Os'B \text{ szög} = \omega,$$

tehát a két álláspontban a vonaszélek közt bezárt szög:

$$Os'B - OAs = u = \frac{ac}{AO} = \frac{b'c'}{BO} = \frac{ac + b'c'}{AB}.$$

Ezen hiba annál nagyobb, mennél nagyobb ac, $b'c'$ és mennél kisebb AB, s még akkor sem enyészik el, ha a vonasz éle az iránysíkkal párhuzamos, minthogy az eredmény az ω szögtől független. Innen azt lehet következtetni, hogy ha az iránysík nem egészen a vonasz élén megyen keresztül, a vonaszt mindig ugyanazon oldalra, p. o. jobbra vagy balra kell a pont mellé tenni; akkor a külpontosság sem a tájékozásra, sem az irányzásra károsan hatni nem fog; s csak akkor lehet mind a két iránysíkot vegyesen használni, ha azok a vonasz élén mennek keresztül. Egyszersmind látni való, hogy a második iránysíknak lényeges haszna nincsen.

4) Ha a vonasz élét két ponthoz kell illeszteni, akkor legroszabb esetben egyik ponttól jobbra, másiktól balra egy kis darabkával el lehet térni, s ez által a vonasz éle a vonallal egy kis szöget ω fog bezárni, melynek nagysága, ha az eltérés δ, a vonal hossza a papiroson d-nek neveztetik, a 109. §. 7 szerint

$$\omega = \frac{2\delta}{d}.$$

Ezen hiba annál nagyobb, mennél nagyobb δ, és mennél kisebb d. Legyen p. o. $\delta = 0'''001$, melyet már szabad szemmel alig lehet látni, és

$d =$	$1''$,	akkor	$\alpha =$	$7'$
» =	5	»	» =	$1'\,14''$
» =	10	»	» =	42
» =	20	»	» =	21
» =	30	»	» =	14.

A hiba tehát egész 5"-ig olyan nagy, hogy figyelem nélkül hagyni nem lehet. Minthogy pedig a megfelelő hossz a mezőn csak 40-es léptéken is már 200 ölet teszen, melyet már a hosszabb vonalak közé kell számlálni: innen következik, hogy tájékozás végett a vonaszt a végpontokhoz illeszteni kellő pontossággal ritkán lehet; hanem ha az asztalt valamely vonal után tájékozni szándékozunk, az irányzás alkalmával azon darabkán kivül, melyre a pont esik, még az asztal szélein is kell rövid finom úgynevezett őrvonalkákat húzni a vonasz mellett, s tájékozás közben a vonasz élét ezekhez kell illeszteni. Ekkor a hiba 15—20"-át nem fog meghaladni.

Igen jelentékeny hiba áll elő,

II. ha a vonasz éle nem a papiroson megjelelt ponton megyen keresztül, hanem attól δ"-val eltávozik. Ekkor t. i. ha a lépték 1" $= m^0$ által fejeztetik ki, a pontnak kimozdulása $= m\delta^0$, s a hiba annál nagyobb fog lenni, mennél kisebb a lépték. Innen lehet megitélni a tű használata által eredő hibát is. A vonasz éle t. i. a tűvel érintésben lévén, a tű vastagsága felével áll távol a ponttól, s ha a tű vastagsága csak 0·"01-nek tétetik is, a pont kimozdulása százas léptéken már 0^0·5-et teszen. A tű által okozott hibát tehát csak igen nagy léptéknél lehet elhanyagolni. Ezen hibát az által meg lehet semmisítni, ha a vonalat nem tökéletesen a vonasz élénél, hanem a mennyire szabad szemmel meg lehet itélni, a tű közepéből húzzuk. Ez okból a rajzónt egy kissé ferdén kell tartani, s egy kis gyakorlás által kellő biztosságot lehet szerezni.

Hasonló hiba szarmazik

III. a rajzónvonal vastagságából is, ha egy pontot két vonal metszése által kell megállapítni. Ugyanis a valódi metszéspont 0 helyett (216. ábra) egy egész tér fog előállani, melynek középpontját annál nehezebb megitélni, mennél inkább elüt az a négyzettől. Ezen tér fél-átlói közül a nagyobbik képezi tehát a támadható legnagyobb hibát. Nevezzük a vonalak vastagságát δ-nak, a metszésszöget α-nak, akkor:

$$aO = ab\,.\,sin\frac{\alpha}{2}, \qquad bO = ab\,.\,cos\frac{\alpha}{2}.$$

Ugyde $ab = \frac{\delta}{sin\alpha}$, ezen értéket helyettesítvén, rövid összehúzás után lesz:

$$aO = \frac{\delta}{2cos\frac{\alpha}{2}}, \qquad bO = \frac{\delta}{2sin\frac{\alpha}{2}},$$

és ha a lépték $1'' = m^0$ által fejeztetik ki, a lehető hiba lesz:

$$\frac{\delta m}{2cos\frac{\alpha}{2}}, \text{ vagy } \frac{\delta m}{2sin\frac{\alpha}{2}} \text{ ölekben,}$$

melyek közül mindig a nagyobbikat kell venni. Ha $\alpha = 90^0$, akkor mind a kettő egyenlő lesz, t. i. $= \frac{\delta m}{\sqrt{2}}$ öl.

Legyen p. o. $\delta = 0 \cdot'' 005$, $m = 40^0$, akkor

ha $\alpha = 90^0$		a hiba	$= 0 \cdot {}^0 15$
» $= 60^0$	vagy 120^0	»	$= 0 \cdot 2$
» $= 40^0$	» 140^0	»	$= 0 \cdot 3$

tehát a hiba annál nagyobb, mennél inkább eltávozik a metszésszög a derékszögtől. Innen azon szabályt lehet elvonni, hogy 40^0-on alul, és 135^0-on felül eső metszésszögeket biztosan használni nem lehet.

Igen veszedelmes hiba származik az asztallali felvételben

IV. a fatáblának a melegség általi összehuzódása által. Ez a szálak irányában igen csekély, de azokra merőleges irányban igen tetemes; ennélfogva a szálakhoz különböző irányokban különböző. Legyen *a*, *b* (217. ábra) a táblának két pontja, *ax* a szálak iránya, melylyel *ab* . . . α szöget képez. Nevezzük a *b* pontnak az *ax* tengelyre vonatkozó derék összrendezőit *x*, *y*-nek, akkor lesz:

$$tg\alpha = \frac{y}{x},$$

és ha mind x, mind y egy kissé változik, mi által α is változást fog szenvedni, akkor ismét lesz:

$$tg(\alpha + \Delta\alpha) = \frac{y + \Delta y}{x + \Delta x}.$$

Ezen egyenleteket egymásból levonván, rövid összehuzás után lesz:

$$\frac{sin\Delta\alpha}{cos\alpha\ cos(\alpha + \Delta\alpha)} = -\frac{y\Delta x - x\Delta y}{x(x + \Delta x)},$$

vagy elég közelitéssel

$$\frac{\Delta\alpha}{cos\alpha^2} = -\frac{y\Delta x - x\Delta y}{x^2}.$$

Ugyde Δx, és Δy, x és y-al egyenes viszonyban növekednek, feltévén, hogy a tábla sűrűsége mindenütt egyenlő; ha tehát az összehuzódási együtthatók az x és y irányában $-m$, és $-n$-nek neveztetnek, lesz:

$$\Delta x = -mx, \qquad \Delta y = -ny,$$

s ezeket fentebb helyettesitvén, rövid átváltoztatás után lesz:

$$\frac{\Delta\alpha}{cos\alpha^2} = -\frac{y}{x}(n - m) = -(n - m)\ tg\alpha;$$

tehát $\Delta\alpha = -(n - m)\ sin\alpha\ cos\alpha = -\frac{n - m}{2}\ sin2\alpha$

Ezen változás legnagyobbá válik, ha $sin2\alpha = 1$, azaz: $\alpha = 45^0$, ekkor t. i. lesz:

$$\Delta\alpha = -\frac{n - m}{2}.$$

Egy más vonalra ac-re nézve, melynek hajlásszöge $= \alpha'$, lesz hasonlóképen:

$$\Delta\alpha' = -\frac{n - m}{2} sin2\alpha',$$

tehát $\Delta\alpha' - \Delta\alpha = -\left(\frac{n - m}{2}\right)(sin2\alpha' - sin2\alpha)$

$$= -(n - m)\ cos(\alpha + \alpha')\ sin(\alpha' - \alpha),$$

és ha $\alpha' - \alpha = \omega$, honnan következik $\Delta\alpha' - \Delta\alpha = \Delta\omega$, lesz,

$$\Delta\omega = -(n - m)\ sin\omega\ cos(\alpha + \alpha').$$

Ezen változás legnagyobb értéket veszen fel, ha

$$cos(\alpha + \alpha') = \pm 1, \quad \text{azaz:} \quad \alpha + \alpha' = \begin{cases} 0^0, \\ 180^0, \end{cases}$$

s a fentebbi kifejezés ezzé változik:

$$\triangle\omega = \pm (n-m)\, sin\omega \quad . \ . \ . \odot$$

Ezen esetet mértanilag a *bad*, és *bad'* szögek által lehet ábrázolni, melyben az *ax*, illetőleg *ay* tengely a szöget két egyenlő részre osztja.

A nevezett változás egészen elenyészik, ha $cos(\alpha + \alpha') = 0$, azaz, $\alpha + \alpha' = 90^0$, akármi legyen az ω értéke, s ezen esetet mértanilag a *bac* szög ábrázolja, melyben a szöget felező vonal az x tengelylyel 45^0-ot képez. Ha a $\odot$ képletben $n = 0{\cdot}002$-nek vétetik, ámbár az néha tetemesen nagyobb, mig m alig észrevehető, akkor a lehető legnagyobb hiba 7'-re rúg.

V. Hasonló hiba keletkezik a p a p i r o s ö s s z e h u z ó d á s a által is, midőn az a tábláról levétetik. Ugyanis a papiros felragasztás közben megnedvesedvén kitágul, s ezenkivül még többé kevésbbé ki is feszíttetik, s a tábláról levétetvén ismét összehúzódik természetes állapotába. Ezen változás nem minden irányban egyenlő, hanem a szerint, a mint a papiros különböző helyeken tömöttebb vagy lazább, majd kisebb, majd nagyobb. Ezen hiba tetemesen kisebbé lesz az által, ha a papiros felragasztás közben szükségen kivül nem feszíttetik, hanem csak természetes fekvésében nyomatik a táblához, hogy ahhoz mindenütt hozzá ragadjon: de egészen még sem enyészik el. Ami a lépték változását illeti, azt különböző irányban fekvő ösmeretes hosszaknak a papirosról levétele, és az eredeti mértékkel összehasonlitása által lehet meghatározni. Tegyük fel p. o., hogy az asztalon egy négyszög van felrajzolva, mely az egész táblát körülövedzi; ennek hossza eredetileg 25", szélessége pedig 20" volt, miután pedig a papiros a tábláról leszakíttatott, a hosszú oldalak 24·"975 és 24·"970, a rövidek pedig 19·"980 és 19·"972-nek találtattak; akkor a négy oldal összes hossza = 89·"897, holott az eredetileg = 90" volt. Tehát 1" összement $\frac{89{\cdot}897}{90} = 0''{\cdot}9988$-re, s a változás teszen 0"·0012-et. Ha tehát a térképhez léptéket kell készítni, az eredeti léptékről 5, vagy 6-szor 0·"9988-et kell levenni, ezen hosszat 5, illetőleg 6 egyenlő részre osztani. Ezek lesznek az uj egységek, melyeket ugyanazon rendszer szerint kell apróbb részekre osztani, és ugyanazon számokkal számozni, mint az az eredeti léptéken látható. (Lásd 108. §. 3).

194. §. A pontosság határa.

Az előbbi §-okban előadott hibakútfők vizsgálata megtanított bennünket azon feltételeket szem előtt tartani, melyek a munka jóságát elősegítik; különösen pedig azon eseteket gondosan eltávolítni, melyekben az elkerülhetlen hibák a mérésre nagy befolyást gyakorolnak. Mind a mellett lehetetlen a hibákat teljesen elkerülni, s minden asztallal mért szög 1—2′-ig bizonytalan, melyért a leglelkiismeretesebb mérnök sem állhat jót. Minthogy pedig a nézgével való irányzás 15—20″-ig biztos: a nézgevonasz az asztallali mérésre tökéletesen elég. Ha mégis kényelemből távcsövet akarunk használni, annak csak csekély, legfeljebb 5—6-szori nagyítást kell adni; akkor annak nagyobb világossága és láttere fog lenni, mi a munka gyorsaságát tetemesen előmozdítja, mig erős távcsövek az irányzást szükség felett nehezítik a nélkül, hogy a tökéletesebb irányt a papirosra megfelelő pontossággal át lehetne tenni.

195. §. Zollman tányérja.

1) A Zollman tányérja egy 24″ átmérőjű fa-tányérból *A* áll (218. ábra), mely legczélszerűbben négy emelő csavaron *b* nyugszik, melyek egy rendes négyszög szögpontjaiban helyezvék. Az emelő csavarok egy 5″ átmérőjű főn mennek keresztül, mely egy három lábú állványon nyugszik. Mielőtt az emelő csavarok meghuzatnak, a tányért egy dió körül durván lehet forgatni, azután pedig azt erősen a főhöz kell szórítni. A tányér felső oldalán a forgás pontjában egy csap *c* van megerősítve, mely a nézgevonasznak *B* forgástengelyül szolgál. Ennek éle a forgás pontján megyen keresztül. Használat előtt a tányér felső lapja rajzoló papirossal behuzatik.

2) Ezen műszernél meg kell vizsgálni, valjon az iránysík merőleges-e a vonasz lapjára? Ez mindenben a 159. §. 2 szerint történik. Továbbá valjon a vonasz éle a forgásponton megyen-e keresztül? E czélból a vonasz éle mellett egy finom vonalat kell húzni s a vonaszt 180°-al megfordítni; ha az él ismét a vonalra esik, akkor a műszer helyes, ámbár egy kis eltérés épen nem ártalmas.

3) Ezen műszernek használata igen egyszerű. A tányér forgáspontja t. i. az álláspont felibe függélyesen beállittatván, a

tányér egy talpas szintező által vizszintessé tétetik. E czélból a szintező két átalellenben fekvő csavar irányába helyeztetvén, egyik fel- a másik lecsavartatik, mig a buborék a helyére beáll; azután a szintező a másik csavarpár irányába tétetik, s a műtétel ismételtetik, mig a buborék mind a két állásban bejátszik. Végre a csavarok gyengén s egyformán behúzatnak, hogy a tányér az állványhoz szoruljon, s az irányzó a tárgyakra sorjában beállíttatván, a vonasz éle mellett a tányér szélén rövid sugárkák húzatnak, s a tárgyak neveivel, vagy számaival megjelöltetnek. Meg kell jegyezni, hogy egy pár, körülbelül derékszög alatt fekvő vonalat MM', NN' a vonasz mindkét oldalán ki kell húzni azért, hogy a tányér középpontját a papiroson meg lehessen találni; a többiek 1, 2, 3 . . . csak egy oldalon húzatnak.

Ha a mérést egy másik álláspонton folytatni kell, akkor a műtétel az előbbiek szerint történik azon megjegyzéssel, hogy a tányér üres oldalát kell azon tér felé fordítni, melybe az irányvonalak esnek, hogy a sokféle sugárok zavart ne okozzanak. Végre ha a tányér egészen megtelt vonalakkal, a papirost le kell venni és ujat kell felragasztani, melyen a munkálat folytattatik.

4) Ezen előadásból látni való, hogy a Zollman tányérja nem egyéb közönséges szögmérőnél, minő p. o. az Astrolabium azon különbséggel, hogy abban a szögek természetes nagyságban állanak elő; mig ebben a szögek mértékei fokokban és perczekben olvastatnak le. A Zollman tányérján metszéspontok soha sem állanak elő, mint a mérő-asztalon, hanem a nyert szögeket egy rajztáblán utólagosan kell még szerkeszteni, hogy térkép álljon elő.

5) A Zollman tányérjával mért szögeket a rajztáblára kétképen lehet felrakni:

a) Ha a papiros még a tányéron van, húzzunk a forgáspontból egy kört, mely a sugárkákat metszi. Erre a czélra körzőt használni ritkán lehet; mert a forgáspont többnyire nincsen megjelölve; hanem a vonasz hátulsó részén egy csorbát kell metszeni, s a rajzón hegyét bele illesztvén, a vonaszt körül kell forgatni. A kör átmérőjét egy körzővel levévén, annak felével mint sugárral a térkép megfelelő pontjából szintén kört kell húzni, melynek körületén aztán a tányérról levett húrokat az illető helyen fel lehet rakni, s a pontokat a szög csúcsával összekötni.

b) Ha a papiros a tányérról már le van véve, akkor először is annak középpontját kell meghatározni, melyből t. i. a sugárkák húzattak. E czélból a papiros közepébe egy darabka papirost kell ragasztani, mivel ez a csap miatt át van lyukasztva, s a mindkét oldalon kihúzott sugárokat MM', NN' összekötvén, ezek metszéspontja lesz a kivánt középpont. Ezen most egy finom tű szúratik keresztül, s a térképnek megfelelő pontjában merőlegesen beszúratik. Ezáltal a szögek csúcsai a papiroson és a térképen egymás felibe esnek. Végre a papiros úgy fordíttatik, hogy a szögnek a térképen adott szára a papiroson megfelelő sugárral összeessék; akkor a többi sugárok finom tűvel átszúratnak, s a pontok a szög csúcsával sugárok által összeköttetnek.

6) A Zollman tányérja által a mérő asztalt javítni gondolták. Zollman t. i. abban a véleményben volt, hogy az asztalnak azon tulajdonsága, miszerint az álláspont nem mindig az asztal forgáspontjába, hanem a táblán akárhol is eshetik, az asztal felállitását igen nehezíti; mert ha az asztal tengelye körül forgattatik, az álláspont kimozdul helyéből, ennélfogva a tájékozás által a központositás elrontatik, s a szögmérés csak közelitő feloldás jellemét viseli.

Aki a mérő-asztalról szóló §-kat figyelemmel átolvasta, meggyőződik ezen állitás túlzott voltáról; mert a 190. §. útmutatása szerint az asztalt úgy fel lehet állítni, hogy a hátra maradt külpontosság s tájékozási hiba az elkerülhetlen hiba határát át nem hágja. Az asztallali felvételtől pedig nagyobb tökélyt kivánni, mint a melyet a rajzolatban láthatóvá tenni lehet, képtelenség. A Zollman tányérjával egy hibaforrás bedugatik, de helyette ujak nyittatnak fel, melyek t. i. a szögek átrajzolásából erednek. De különösen nélkülözzük benne azon tulajdonságot, hogy alakok rajta nem képződnek; tehát netaláni hibák, melyek hamis pontok beirányzásából származnak, könnyen elrejtve maradnak; mig a mérő-asztalon az alaknak a természetteli folytonos összehasonlitása igen sok tévedésnek felfedezésére és eltávolitására vezet.

*196. §. Höschel tűkör-körzője.

1) Ezen műszer (219. ábra) a tűkörhatodtól csak abban különbözik, hogy az a körív helyett a megfelelő húr hosszát méri meg, melyet aztán vagy szöggé át lehet alakítni, vagy pedig a térképen az illető helyen közvetlen fel lehet tenni. E czélból a tűkörhatodnak egyik oldala *A*, valamint az Alhidade *B* is 4—5″-nyire meg van hosszabítva, és körző módjára aczél hegyekkel felszerelve; a *C* és *D* tűkrök pedig, melyek közül az utolsóba irányvonás van vésve, úgy vannak helyezve, hogy ha a körző szárainak hegyei összeesnek, a tűkrök egymással párhuzamosok legyenek. Ezen vonás a tűkrön azért szükséges, mert a távcső helyett csak egyszerű néző cső *E* használtatik, melynek szemvége egy lyukacskával 0 van ellátva, a tárgyi nézgeszálat pedig a vonás ábrázolja. Végre az *F* ív, mely a tűkörhatodnál fokokra beosztatott, ezen műszernél csak szorító gyanánt használtatik, melyhez az Alhidade *G* csavar által szoríttatik; noha olyan tűkör-körzők is vannak, melyeken beosztott kör is létezik, melyen tehát a szöget mind a húr, mind pedig a megfelelő ív által meg lehet mérni.

2) Ezen műszerreli szögmérés a tűkörhatoddalival mindenben megegyez azon megjegyzéssel, hogy a tárgyakat a kisebb tűkör vonásán kell egymás felibe állítni. Ez megtörténvén, a szárak hegyei közt lévő húr hosszát c egy hüvelykléptékkel meg kell mérni, s a szöget α ezen képlet szerint lehet kiszámítni:

$$\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{c}{2r},$$

vagy ha a szöget szerkeszteni akarjuk, a rajztáblán azon helyen, hol a szögnek feküdnie kell, a körző szára hosszával egy kört kell húzni, erre a húr hosszát kétszer egymásután feltenni, s a pontot a csúcscsal összekötni.

Akármelyik módot használjuk a kettő közül, a körző szára hosszát r ösmernünk kell. Ezt közvetlen mérés által meghatározni nem lehet, mert a körző forgáspontja megjelölve nincsen. Célszerű tehát valamely ösmeretes szöget a körzővel megmérni, s a húr hosszát egy léptéken leolvasni; ekkor a fentebbi egyenletből lesz:

$$r=\frac{c}{2\sin\frac{\alpha}{4}}.$$

3) Ezen műszer a szöget önként érthetőleg a természetes lejtős síkban méri meg. De minthogy az legtöbb esetekben a vizszintes vetülettől csak keveset különbözik, tábori méréseknél, — mely czélra a műszer hordozhatósága miatt különösen alkalmatos, s igen nagy pontosság nem szükséges, — a vetület helyett vétetik, s a rajztáblára közvetlen feltétetik a nélkül, hogy a 181. §-ban előadott parallaxis figyelembe vétetnék.

*197. §. Douglas Reflectora.

1) Ez egy félkörből *A* (220. ábra) áll, melynek végei egy széles vonasszal *B* vannak összekötve, és karimája fokokra beosztva. A kör középpontja körül az Alhidade *D* foroghat, melylyel egy Noniussal ellátott ív *F* áll kapcsolatban. Ezen 2′-et lehet olvasni. Mind az Alhidade, mind a *B* vonasz egymás felé forduló élei tökéletesen egyenes vonalakat képeznek, s a forgásponton *C* mennek keresztül. A forgás csapja át van törve, és a középpont *C* a vonasz élén egy pontocskával meg van jelölve. A *B* vonasz végén egy másik csap *M* körül egy második vonasz *G* foroghat, mely hosszában át van törve, úgy hogy a rovátek oldalai párhuzamos egyenes vonalakat képeznek. Ezen rovátékba egy peczek *K* van illesztve, melynek vastagsága a rovátek hézagjával egyenlő, s a *D* vonaszon szilárdul úgy van megerősitve, hogy a *C* pont *K* és *M*-től egyenlő távban álljon, azaz: $CK = CM$ legyen. Ezenkivül az *M* pontban, valamint az Alhidadén is *E*-nél, tűkrök vannak megerősitve, melyek az illető vonaszok forgásaiban részt vesznek, és tükrödző oldalaikat egymás felé forditják. Az *M* tűkör felületén a forgáspontban egy vonás van bemetszve, mint azt a tűkörkörzőnél és tűkörvonasznál láttuk; a *G* vonasz végén pedig egy kis szemnézge *N* van felállitva. Mind a nézge, mind a tűkrök merőlegesen állanak a műszer síkjára, s ezen utóbbiak síkjai egymáshoz párhuzamos állást nyernek, ha a *B* és *D* vonaszok élei egymást érintik, és a Nonius mutatója 0^0-on áll.

2) Ezen műszernek hatása következő. Gondoljuk a 221. ábrában, hogy a *D* és *B* vonaszok élei egymást érintik, s a tűkrök síkjai párhuzamosok; ezen állásban a *C*, *M*, *K* pontok bizonyos fekvést nyernek egymáshoz, melyet az idom ábrázol. Ha most az Alhidade *D* valamely szöggel α tengelye körül forgat-

tatik, akkor a *CK* vonal is ugyanazon szöggel fog fordulni; mivel a *K* peczek fekvése, a vonasz éléhez képest, nem változik. A *K* pont tehát *K'*-be fog átmenni, s a *KM* vonal *K'M'*-é lesz. Ugyde a feltétel szerint $CK = CM$, tehát KMK' is $= \frac{1}{2}\, KCK'$, mivel az elsőbb körületi, az utolsó pedig középponti szöget képez, ugyanazon ív *KK'* felett. Tehát az Alhidade fordulási szöge két annyi, mint a nézgevonaszé. Ugyanezen viszony áll a tűkrök forgásai közt is, minthogy ezek a vonaszokon szilárdul vannak megerősitve. Ha tehát az *E* tűkör α szöggel fordult, azalatt az *M* tűkör $\frac{1}{2}\, \alpha$-val fordul ugyanazon oldalra. Tehát a tűkörsíkok közt bezárt szög lesz $= \alpha - \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\alpha$, azaz: az Alhidade forgásszöge kétszer annyi, mint a tűkörsíkok közt bezárt szög.

Más oldalról a 60. §. szerint a beeső és kétszer viszszavetett sugárok közt befoglalt szög is kétszer annyi, mint tűkörsíkoké. Tehát az $MON\sphericalangle = PCQ\sphericalangle$, és a *D* és *B* vonaszok élei közt befoglalt szöget közvetlen fel lehet tenni az illető helyen a térképre.

3) A Reflector szerkezete azon tulajdonságokon kivül, melyek a tűkörhatodnál elószámláltattak, megkivánja, hogy a *B* és *D* vonaszok élei tökéletesen az Alhidade forgáspontján menjenek keresztül. Továbbá hogy a *G* vonasz rovatékjának egyenes párhuzamos oldalai legyenek, annak középvonala az *M* forgásponton menjen keresztül, s a *K* peczek a rovátékot minden hézag nélkül betöltse. Mindezen tulajdonságokat közvetlen megvizsgálni igen nehéz; legczélszerűbb egy kis, közép, és legnagyobb szöget, melyet még a műszerrel megmérni lehet, mind ezzel, mind pedig valamely más szögmérővel megmérni, s ha a különbség a megengedhető hibát át nem hágja, a műszer használható. Ritkán fog ez kielégitő mértékben beteljesedni, s ámbár a beosztott körön 2'-et le lehet olvasni, a hiba 3—4-szer nagyobb is fog lenni. Mind a mellett tábori czélokra a műszer a legkényelmesebbek és leghasználhatóbbak közé tartozik.

IV. SZAKASZ.

Egyes idomok felvétele.

198. §.

Feladat. Egy sokszöget csupán mérőlánczczal felvenni.

Feloldás. 1) Átlók által. Bontsuk fel a sokszöget átlók által csupa háromszögekre (222. ábra), mérjük meg ezeknek minden oldalait, és szerkeszszük az idomot a papiroson a 91. §. 1. utmutatása szerint. Hogy a felvétel eredménye kielégitő legyen, a szétbontásban olyan rendet kell követni, hogy az alapvonallal átalellenben fekvő szög, melynek csúcsa a meghatározandó szomszéd pontba esik, 90°-tól minél kevesebbet különbözzék. 45°-on alul és 135°-on felüli metszésszöget el kell kerülni. A 222. idomban *AB*-t vehetjük kiindulási alapnak, melyhez a *C* és *D* pontok kapcsoltatnak, azután jobbra *AC*-ből az *E*, és *AE*-ből az *F* pont, valamint balra *AD*-ből a *G* pont állapíttatik meg. Hogy a munka jóságáról meggyőződést szerezzünk magunknak, szükség egy pár próba-átlót mérni, és azt a rajzolatban nyert hasonnevű vonallal összehasonlítni. Ilyen próbavonalak a *CF* és *BG* átlók.

A munka folyamatából látni való, hogy a pontok megállapitása egymástól függő, ennélfogva a mérési hibák annál inkább összehalmozódnak, mennél több szögpontja van az alaknak. Ezért ezen módot csak kisebb telkek, egyes házhelyek, udvarok, kertek felmérésére lehet okszerűleg használni. Ezen czélokra pedig annyival is inkább alkalmatos, mert a méretekből a területet is ki lehet számítni, minthogy a $\triangle$-eknek minden oldalai ösmeretesek.

2) Sarkösszrendezők által. Válasszunk a sokszög közepe táján (223. ábra) egy sarkpontot *O*, mérjük meg az *OA*, *OB*, *OC* . . . sugárokat, valamint a köztök befoglalt szögeket is $\alpha, \beta, \gamma \ldots \zeta, \eta$ a lánczczal a 134. §. útmutatása szerint, és szerkeszszük az idomot a papiroson. Hogy a felvétel jó eredményt adjon, a szögmérés közben mind a sugárt, mind a húr hosszát legalább 0°01 pontossággal meg kell határozni, s szerkesztés köz-

ben pedig a sugár hosszát legalább 5"-nek kell venni. Az utolsó szög η szorosan véve a sokszög megállapitására nem szükséges, minthogy az a többiek által már meg van határozva; mindazáltal czélszerű azt is megmérni, s a munka helyes voltát onnan lehet megösmerni, hogy a húrok a kör körületét egészen körülfogják. Ellenkező esetben a hiba az egyes ívek közt egyenlőn elosztatik. A sugárok mérésének helyes voltát nehány oldalakon történt próbamérések, és a papiroson a szerkesztés által nyert hosszak összehasonlitása által lehet megitélni.

199. §.

Feladat. Egy sokszöget szögtűkörrel, vagy prismával felvenni.

Feloldás. 1) Ha a szögtűkörrel 90°-ú szöget lehet kitűzni. Válasszunk tengelyül (224. ábra), egy tetszésszerinti egyenes vonalat, legczélszerűbben a sokszög egy átlóját, 0,5, mely a sokszöget hosszában körülbelől két egyenlő részre metszi. Tűzzünk ki ezen tengelyben közép tájon egy harmadik rudat is C azért, hogy mérés közben annál biztosabban az egyenes vonalban maradjunk. Jelöljük meg a sokszög pontjait rudakkal olyan rendben, a mint azok metszékei egymás után következnek, tehát jelen idomban 1, 8, 2, 7, 3, 6, 4, sorban. Ezután a 0 pontból kiindulván, a lánczhúzó a lánczot a tengely hosszában kifesziti, a végpontot egy szöggel megjelöli, a mérnök a lánczon előre menvén a tűkörrel, az első rendező lábpontját felkeresi, s a megfelelő metszéket x a lánczon leolvasván, egy kézi vázban, melyet a sokszögről szabad szemmel készít, az illető helyen felirja, s végre a rendezőt y is megméreti. E czélra egy öles rudat lehet használni; de ha a rendező 5 vagy több öl hosszú, czélszerűbb a lánczot alkalmazni, mely a rendező lábpontjából a pont felé kifeszíttetik, s a mérés annak módja szerint vitetik véghez. Némelyek a váz rajzolatát el is hagyják, s a méreteket egy naplóba irják be, feljegyezvén mind azon körülményeket, melyek a pontok fekvésére összeköttetésére minőségére stb. vonatkoznak. Ezután a láncz a tengelyen az előbbi fekvésbe visszahelyeztetvén, a mérnök a tűkörrel a közelébbi pont rendezőjének lábpontját felkeresi, s ha az még a lánczhúzásba esik, a műtételt a leirt rendben folytatja. Ha pedig a lánczba már több pont nem esnék, a láncz tovább húzatik, s a második húzásban az előbbi műtétel ismételtetik stb., mindaddig, mig az egész tengely fel lesz mérve, és minden pontok metszékei és rendezői meg lesznek határozva. Megemlítendő, hogy a metszékek mindig a kezdő ponttól, tehát folytonosan számláltatnak, s a rendezőknek jobb, vagy bal oldalt való fekvésére kellő figyelmet kell fordítni. Ha a rendező 1°-et meg nem halad, annak lábpontját egy kis gyakorlás után szabad szemmel is meg lehet határozni.

2) Ha egy egyenes vonalon *m*, *n* (225. ábra) több közbeeső pontot 1, 2 kell meghatározni, akkor a végpontoknak mindkét összrendezőit meg kell mérni; a közbeesők pedig már a metszékek által is tökéletesen meg vannak határozva.

3) A fentebbiekben előadott módot nem csak derék, hanem ferde összrendezőkre is lehet alkalmazni, s a pontoknak a papiroson való felrakására egy háromszög használtatik, melynek oldalai egymással olyan szöget képeznek, minő a tűkörrel a mezőn kitűzetett.

4) Emlitést érdemel még az összrendezők általi felvételnek módja, melyben a szögtűkör egészen nélkülöztetik, s a ferde összrendezők a mezőn a vonalak meghosszabbítása által állapíttatnak meg. Legyenek p. o. a 226. ábrában 1, 2, 3, 4, 5 már meghatározva, és 6, 7, 8, 9, 10 felveendők. Legyen *AB* a metszéktengely; hosszabbítsuk meg az 1, 10, 2, 9, 3, 8, 4, 7, és 5, 6 vonalakat, mig ezek a tengelyt metszik, és mérjük meg az x_{10}, y_{10}, x_9, y_9, x_8, y_8, x_7, y_7, x_6, y_6, összrendezőket. Ezek által a pontok tökéletesen meg lesznek állapítva; és ha a pontokat a papiroson rajzolni akarjuk, a metszékeket a tengelyre felrakván, ezeknek végpontjait a már meglevő pontokkal 1, 2, 3, 4, 5 össze kell kötni s ezekre a rendezőket fel kell rakni.

II. F e l o l d á s 60° v a g y 45° a l a t t h a j l o t t ö s s z- r e n d e z ő k k e l. Ha a szögtűkörrel vagy prismával 60 vagy 45°-ú szöget lehet kitűzni, következőképen lehet működni. Miután a metszék-tengely 0,4 (227. ábra) a mezőn kitűzetett, a láncz a vonal hosszában kifeszittetik, s a mérnök a lánczba eső rendezők lábpontjait felkeresi először a 4, másodszor a 0 pont felé fordulva arczczal, s mind a két rendbeli metszékeket, melyek egymástól egy vonással vannak megkülönböztetve, leolvassa. Ha ekképen az egész tengely felméretett és a metszékek meghatároztattak, ezek a papiroson kicsinyített mértékben felrakatnak, s egy háromszöggel a rendezők húzatnak; ekkor az ugyanazon pontra vonatkozó két rendbeli rendezők egymást a szögpontban metszik. Meg kell jegyezni, hogy mérés közben az első és második rendbeli metszékek nem mindig ugyanazon rendben következnek egymás után; ennélfogva a pontok neveire éber figyelemmel kell lenni, hogy hibák ne csússzanak a felvételbe.

Az összrendezők által a szögpontok egymástól függetlenül állapittatnak meg; ezokból a mérési hibák helyhez kötve maradnak és össze sem halmozódnak. Ennélfogva az összrendezők általi felvétel a legjobbak közé tartozik.

200. §.

Feladat. Theodolit vagy Astrolabiummal egy sokszöget felvenni.

I. Feloldás. Sarkösszrendezők által. 1) Állítsuk fel a szögmérőt a sokszög közepe táján egy pontban, és mérjük meg azon szögeket α, β, γ, δ, ε, ζ, melyeket a szögpontok felé irányzott vonalak egymással bezárnak. Ha a szögmérés egyszerű módon történik (152 §.), akkor az eredmény egymástól független fog lenni; ha pedig az szorzás által eszközöltetik, akkor a hibák összehalmozódnak, s a szögek összege 360^0-tól különböző fog lenni. Ezen esetben a hibát az egyes szögek közt egyenlő részekre el kell osztani; mivel nincsen semmi ok egyik szögre nagyobb hibát róni, mint a másikra. Végre a sugárok OA, OB, $OC \dots OG$ lánczczal megméretnek. Ha a Theodolit távcsője távmérővé van alakítva (117—122. §§.), akkor a láczmérés helyett távmérést lehet alkalmazni, s akkor ezen mód egyike fog lenni a legkényelmesebb és leggyorsabb felvételi rendszereknek.

2) Az idomot a papiroson kétképen lehet lerajzolni, u. m. szerkesztés által, ha t. i. a megmért szögek a 170. és 171. §-okban előadott módok, vagy műszerek által közvetlen felrakatnak; vagy pedig számítás segélyével, ha t. i. a megmért vonalak- és szögekből a szögpontok derék összrendezői kiszámittatnak, s ezek rakatnak fel a papirosra. Az első mód rövidebb, és közönséges esetekben kielégitő eredményt ád; noha elkerülhetetlen, hogy a mérési hibákhoz a szerkesztésiek ne csatlakozzanak, s ezáltal az eredmény tökélyének ne ártsanak. Az utóbbi a legtökéletesebb és legkönnyebben felrakható adatokat

szolgáltatja mindazok közt, melyek a pontoknak felrajzolására használtatnak; s ezért fontosabb esetekben kizárólag alkalmazandó.

Tekintsük OA-t x tengelynek, akkor lesz:

$$x_A = OA. \qquad y_A = 0,$$
$$x_B = OB.\cos\alpha, \qquad y_B = OB.\sin\alpha,$$
$$x_C = OC.\cos(\alpha+\beta), \qquad y_C = OC.\sin(\alpha+\beta),$$
$$x_D = OD.\cos(\alpha+\beta+\gamma), \qquad y_D = OD.\sin(\alpha+\beta+\gamma),$$

. . . .

mely kifejezésekben a sinus és cosinus jeleiből tökéletesen meg lehet ösmerni, minő irányban kell az összrendezőket felrakni.

201. §.

II. Feloldás. Metszés által. 1) Válasszunk a sokszögön kivül vagy belül, a mint czélszerűbbnek látszik, egy alapvonalat AB (228 ábra), melynek oly fekvéssel kell bírni, hogy a szögpontokhoz az A és B pontokból húzott sugárok egymást körülbelől 90° alatt messék; honnan a módszer nevét is vette. 45 és 135°-on kivül eső metszésszögeket nem kell megengedni. Mérjük meg ezen alapvonal hosszát, valamint azon szögeket is, melyeket az $A0$, $A1$, $A2$ . . . és $B0$, $B1$, $B2$ . . . sugárok az AB alappal bezárnak. Akkor minden szögpontra nézve egy $\triangle$ áll elő, melyben egy oldal t. i. az alapvonal, és a mellette fekvő szögek ösmeretesek. Ezeket tehát szerkeszteni lehet, valamint a szögpontok összrendezőit számitás által is meg lehet határozni.

2) Legyenek p. o. az n pontnak összrendezői keresendők, akkor lesz:

$$x_n = An.\cos A_n, \qquad y_n = An.\sin A_n,$$

minthogy pedig az ABn $\triangle$-ből

$$An = AB.\frac{\sin B_n}{\sin(A_n + B_n)},$$

ezt helyettesitvén, lesz:

$$x_n = AB.\frac{\sin B_n.\cos A_n}{\sin(A_n + B_n)}, \qquad y_n = AB.\frac{\sin B_n.\sin A_n}{\sin(A_n + B_n)},$$

mely képletben n helyett sorjában 0, 1, 2 . . .-t kell tenni, hogy a szögpontok összrendezői sorjában meghatároztassanak.

3) Ezen feloldás a szögpontokat egymástól egészen függetlenül szolgáltatja, ennélfogva a mérési hibák nem gyülhetnek össze. Ezért ezen mód a legjobbak közé tartozik annyival inkább, mert a legkedvezőtlenebb esetekben is alkalmazható.

202. §.

Feladat. Adva lévén egy alapvonal AB (229. ábra), melynek egyik vége B hozzáférhetlen: egy harmadik pont C fekvését meghatározni.

Feloldás. Mérjük meg az A és C szögeket, akkor a $\triangle$-ben egy oldal és két szög ösmeretessé lesznek, ennélfogva az feloldható; és ha AB x tengelynek, A pedig az összrendezők kezdőpontjául vétetik, a C pont összrendezőit következőképen lehet meghatározni:

$$x = AC \,.\, cosA, \qquad y = AC \,.\, sinA.$$

Ugyde
$$AC = AB \,.\, \frac{sin(A + C)}{sinC}, \quad \text{tehát}$$

$$x = AB \,.\, \frac{sin(A + C)\; cosA}{sinC}, \quad y = AB \,.\, \frac{sin(A + C)\; sinA}{sinC}.$$

203. §.

Feladat. Adva lévén egy alapvonal AB (230. ábra), melynek mind a két végpontja hozzáférhetlen : két más pontot C, D meghatározni.

Feloldás. Mérjük meg az α, β, γ, δ szögeket s nevezzük a BAC szöget u, a CBA szöget v-nek, akkor az ABC $\triangle$-ből lesz:

$$AC : BC = sinv : sinu.$$

Továbbá az ACD $\triangle$-ből lesz:

$$AC : CD = sin\gamma : sin(\alpha + \gamma), \text{ és a } CBD \ \triangle\text{-ből,}$$
$$CD : BC = sin(\beta + \delta) : sin\delta$$

Ezen két utolsó arányt egymással összekötvén, lesz:

$$AC : BC = sin\gamma\, sin(\beta + \delta) : sin\delta\, sin(\alpha + \gamma).$$

Tehát az $AC : BC$ viszony kétféle értékeit egymással összekötvén, lesz:

$$sinv : sinu = sin\gamma\, sin(\beta + \delta) : sin\delta\, sin(\alpha + \gamma),$$

vagy
$$\frac{sinv}{sinu} = \frac{sin\gamma \,.\, sin(\beta + \delta)}{sin\delta \,.\, sin(\alpha + \beta)}.$$

Ide járul még az ABC $\triangle$-ből

$$u + v = 180 - (\alpha - \beta).$$

Ezen két egyenletből az ösmeretleneket u, v ki lehet számítni. Az utolsó egyenletből t. i. lesz:

$$v = 180 - (\alpha - \beta + u) \ldots \odot$$

ezt helyettesitvén, lesz:

$$\frac{\sin(\alpha-\beta+u)}{\sin u}=\frac{\sin\gamma\,.\,\sin(\beta+\delta)}{\sin\delta\,.\,\sin(\alpha+\gamma)},$$

vagy szétbontván, rövid átváltoztatás után lesz:

$$\cot g u = -\cot g(\alpha-\beta)+\frac{\sin\gamma\,\sin(\beta+\delta)}{\sin\delta\,\sin(\alpha+\gamma)\,\sin(\alpha-\beta)}\ldots☽$$

Ha ezen képlet szerint u kiszámittatott, az ABC és $ABD\triangle$-eket fel lehet oldani, mivel mindkettőjökben három-három darab ösmeretessé lett, s a C, D pontok összrendezőit is könnyen ki lehet számítni.

2) Czélszerűbb lesz a feloldás következőképen. A fentebbiek szerint találtatott:

$$\frac{\sin v}{\sin u}=\frac{\sin\gamma\,\sin(\beta+\delta)}{\sin\delta\,\sin(\alpha+\gamma)}.$$

Akármi legyen az egyenlet jobb oldalának értéke, létezik egy olyan szög, melynek tangense azzal egyenlő, minthogy a tangensek 0 és ∞ közt mind igen-, mind nemleges értelemben mindenféle értékeket felvehetnek. Tehát lehet tenni:

$$tg\varphi=\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}\,\frac{\sin(\beta+\delta)}{\sin(\alpha+\gamma)}\ldots\odot$$

s akkor a fentebbi egyenletből lesz:

$$\frac{\sin v}{\sin u}=tg\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Innen következik kivonás és összeadás által:

$$\frac{\sin v-\sin u}{\sin v+\sin u}=\frac{\sin\varphi-\cos\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi},\quad\text{vagy}$$

$$\frac{\cos\frac{v+u}{2}\,\sin\frac{v-u}{2}}{\sin\frac{v+u}{2}\,\cos\frac{v-u}{2}}=\frac{\cos 45^0\,\sin(\varphi-45^0)}{\sin 45^0\,\cos(\varphi-45^0)},\quad\text{végre}$$

$$tg\frac{v-u}{2}=tg(\varphi-45^0)\,tg\frac{v+u}{2}.$$

Ugyde a fentebbiek szerint $\frac{v+u}{2}=90^0-\frac{\alpha-\beta}{2}$, ezt helyettesitvén lesz:

$$tg\frac{v-u}{2}=tg(\varphi-45^0)\,\cot g\frac{\alpha-\beta}{2}\ldots☽$$

E szerint a két ösmeretlennek félösszege és félkülönbsége meg lévén határozva, összeadás által a nagyobbikat, kivonás által pedig a kisebbiket fogjuk nyerni. Megemlitendő, hogy a ℑ) képletben $^1/_2\ (v-u)$ számszerint mindig $< 90^0$, minthogy egy fentebbi egyenlet szerint $^1/_2\ (v+u) < 90$, annyival inkább tehát $^1/_2\ (v-u)$; de azt + vagy — jellel kell venni a szerint, a mint az érintő értéke igen- vagy nemleges.

204. §.

F e l a d a t. Adva lévén egy négyszögben két átalellenben fekvő oldal $AB = a$, $CD = b$ (231. ábra), és az átalellenben lévő szögek α, β, γ, δ, melyek közt ezen összefüggés létezik, $\alpha + \gamma = \beta + \delta$: a négyszöget feloldani.

F e l o l d á s. Nevezzük a BAD szöget u, a BCD szöget v-nek, akkor az ABC $\triangle$-ből lesz:

$$a : AC = sin\gamma : sin(u + \alpha + \gamma),$$

szintén az ACD $\triangle$-ből

$$AC : b = sin(v + \beta + \delta) : sin\alpha.$$

Ezeket egymással összekapcsolván, lesz:

$$a : b = sin\gamma\, sin(v + \beta + \delta) : sin\alpha\, sin(u + \alpha + \gamma),$$

vagy:

$$\frac{sin(v + \beta + \delta)}{sin(u + \alpha + \gamma)} = \frac{a}{b}\frac{sin\alpha}{sin\gamma}.$$

Hasonlóképen az ABD $\triangle$-ből lesz:

$$a : BD = sin\delta : sinu,$$

szintén a BCD $\triangle$-ből:

$$BD : b = sinv : sin\beta.$$

Ezeket egymással összekötvén lesz:

$$a : b = sinv \cdot sin\delta : sinu \cdot sin\beta,$$

vagy:

$$\frac{sinv}{sinu} = \frac{a}{b}\frac{sin\beta}{sin\delta}.$$

Tegyük rövidség okáért:

$$\beta + \delta = \alpha + \gamma = p, \qquad \frac{a}{b}\frac{sin\alpha}{sin\gamma} = tg\varphi, \qquad \frac{a}{b}\frac{sin\beta}{sin\delta} = tg\psi\text{-nek},$$

akkor a nyert egyenleteket igy lehet irni:

$$\frac{sin(v + p)}{sin(u + p)} = tg\varphi \;\ldots\; 1), \qquad \frac{sinv}{sinu} = tg\psi \;\ldots\; 2).$$

Az első egyenletből lesz:

$$\frac{sin(v + p) + sin(u + p)}{sin(v + p) - sin(u + p)} = \frac{sin\varphi + cos\varphi}{sin\varphi - cos\varphi}, \qquad \text{vagy}$$

$$\frac{\sin\left(\frac{v+u}{2}+p\right)\cos\frac{v-u}{2}}{\cos\left(\frac{v+u}{2}+p\right)\sin\frac{v-u}{2}}=\frac{\cos(\varphi-45^0)}{\sin(\varphi-45^0)},\quad \text{vagy}$$

$$tg\left(\frac{v+u}{2}+p\right)cotg\frac{v-u}{2}=cotg(\varphi-45^0).$$

Hasonlóképen lesz a második egyenletből:

$$tg\frac{v+u}{2}Cotg\frac{v-u}{2}=Cotg\,(\psi-45^0)\ldots 3)$$

Ezeket egymással elosztván, lesz:

$$\frac{tg\left(\frac{v+u}{2}+p\right)}{tg\frac{v+u}{2}}=\frac{cotg(\varphi-45^0)}{cotg(\psi-45^0)}.$$

Ezen egyenletből ismét lesz:

$$\frac{tg\left(\frac{v+u}{2}+p\right)+tg\frac{v+u}{2}}{tg\left(\frac{v+u}{2}+p\right)-tg\frac{v+u}{2}}=\frac{cotg(\varphi-45^0)+cotg(\psi-45^0)}{cotg(\varphi-45^0)-cotg(\psi-45^0)};$$

ebből rövid átváltoztatás után lesz:

$$\frac{\sin(u+v+p)}{\sin p}=\frac{\sin(\psi+\varphi-90^0)}{\sin(\psi-\varphi)};$$

s végre $$\sin(u+v+p)=\sin p\frac{\cos(\varphi+\psi)}{\sin(\varphi-\psi)}\ldots\odot$$

Melyik negyedbe esik ezen szög, így lehet meghatározni. Minthogy p azon szöget jelenti, mely alatt az AD és BC átlók egymást O-ban metszik, az AOB és COB $\triangle$-ekből önként érthető, hogy $u+p<180^0$, hasonlóképen $v+p<180^0$. Ezen egyenletlenségeket összeadván, lesz:

$$u+v+p<360^0-p,\quad \text{vagy}\quad \frac{u+v}{2}<180^0-p.$$

Ha ekképen $\frac{v+u}{2}$ meghatároztatott, a $\frac{v-u}{2}$ értékét a 3) képletből lehet nyerni, t. i.

$$tg\frac{v-u}{2}=tg\frac{v+u}{2}tg(\psi-45^0)\ldots☽$$

A feloldás határozatlan marad, ha a négy pont egy kör körületében fekszik. Ekkor ugyanis $\alpha=\beta$, $\gamma=\delta$, $u=v$, mivel ezek közös húrok felett álló körületi szögek; tehát $tg\varphi = tg\psi = 1$, vagyis $\varphi = \psi = 45^0$, következésképen: $\cos(\varphi + \psi) = 0$, $\sin(\varphi - \psi) = 0$, $\sin(u + v + p) = {}^0/_0$.

2) Ezen feladatot akkor lehet használni, ha az a és b oldalak már előbbi mérésekből ösmeretesek, de ezen vonalak hosszant egyik végpontból a másikig látni nem lehet. Az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, szögek mérés által nyeretnek, és a fentebbiek szerint ezen feltételhez vannak kötve:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta.$$

Ha ezen összegek az elkerülhetlen hibák miatt egy kis különbséget mutatnak, úgyhogy

$$\alpha + \gamma - (\beta + \delta) = \varepsilon,$$

akkor a hibát az egyes szögek közt egyenlően el kell osztani azaz:

α helyett $\alpha - \frac{\varepsilon}{4}$, β helyett $\beta + \frac{\varepsilon}{4}$,

γ » $\gamma - \frac{\varepsilon}{4}$, δ » $\delta + \frac{\varepsilon}{4}$-t kell tenni, s a fentebbi számításban ezen kijavitott értékeket kell használni.

205. §.

F e l a d a t. Adva lévén három hozzáférhetlen pont a mezőn, egy negyedik hozzáférhetőnek fekvését meghatározni.

F e l o l d á s. Legyen a 232. ábrában ABC a három adatott pont, melyeknek egymáshozi fekvése az $AB = c$, $BC = a$, és a B szög által van megállapítva, D pedig a meghatározandó pont. Mérjük meg ebben az $ADB = m$, és $BDC = n$ szögeket, s nevezzük a DAB szöget u, és a BCD szöget v-nek, akkor lesz az ABD $\triangle$-ből

$$c : BD = \sin m : \sin u,$$

hasonlóképen a BCD $\triangle$-ből

$$BD : a = \sin v : \sin n.$$

Tehát
$$c : a = \sin m \sin v : \sin n \sin u,$$

vagy
$$\frac{\sin v}{\sin u} = \frac{c \sin n}{a \sin m}.$$

Továbbá a négyszög szögeinek összegéből lesz:

$$u + v = 360^0 - (B + m + n).$$

Ezen egyenletek a 203. §-éival hasonló alkotással bírván, a feloldás is hasonló fog lenni, t. i. ha

$\frac{c\ sinn}{a\ sinm} = tg\varphi$-nek tétetik, lesz:

$$tg\frac{v-u}{2} = tg(\varphi - 45^0)\,tg\frac{v+u}{2}.$$

Minthogy pedig egy fentebbi egyenletből folyik:

$$\frac{u+v}{2} = 180^0 - \frac{B+m+n}{2} \ldots \odot$$

ezen értéket helyettesítvén, lesz:

$$tg\frac{v-u}{2} = tg(45^0-\varphi)\,tg\frac{B+m+n}{2} \ldots \mathbb{D}$$

E szerint az ösmeretlen szögeknek félösszege és félkülönbsége, mely utóbbi mindig $<$ 180°-nál, miután a félösszeg is kisebb 180-nál, — meg lévén határozva, az ösmeretlen szögek is könnyen kiszámíttathatnak.

A feloldás határozatlan marad, ha a négy pont egy kör körületében fekszik. Ekkor ugyanis

$B+m+n = 180^0$, tehát $\frac{B+m+n}{2} = 90^0$, és $tg\frac{B+m+n}{2} = \infty$.

Továbbá BAC szög $= BDC$ szög $= n$, és BCA szög $= BDA$ szög $= m$, ennélfogva az ABC △-ből következik:

$$c\ sinn = a\ sinm,$$

tehát $tg\varphi = 1$, vagy $\varphi = 45^0$.

Ezen értékeket az egyenletben helyettesitvén, lesz:

$$tg\frac{v-u}{2} = 0\cdot\infty, \text{ azaz: határozatlan.}$$

Valóban a kör körületének minden pontja eleget tesz a feladat feltételeinek.

206. §.

F e l a d a t. Adva lévén a mezőn három hozzáférhetlen pont, A, B, C (233. ábra), két hozzáférhető pontnak D, E fekvését meghatározni, ha D-ből C-t, E-ből pedig A-t látni nem lehet.

F e l o l d á s. Mérjük meg a D és E pontokban az m, n, p, q, szögeket, akkor az ABD △-ből lesz

$$c : BD\,sinm : sinu,$$

hasonlóképen a BDE △-ből

$$BD : BE = sinp : sinn,$$

szintén a BEC △-ből

$$BE : a = sinv : sinq.$$

Ezen arányokat összekapcsolván, lesz:

$$c : a = sinm \cdot sinp \cdot sinv : sinn \cdot sinq \cdot sinu,$$

vagy
$$\frac{sinv}{sinu} = \frac{c\ sinn\ .\ sinq}{a\ sinm\ .\ sinp}.$$

Továbbá az 5 szög szögei összegéből következik:

$$u + v = 540^0 - (B + m + n + p + q).$$

Ezen egyenletek az előbbi §-éihoz igen hasonlítnak, tehát a feloldás is hasonló módon történik. Tegyük tehát

$$\frac{c\ sinn\ .\ sinq}{a\ sinm\ .\ sinp} = tg\varphi \ldots \odot$$

akkor lesz:
$$tg\frac{v-u}{2} = tg(\varphi - 45^0)\ tg\frac{v+u}{2},$$

vagy
$$tg\frac{v-u}{2} = tg(45^0 - \varphi)\ cotg\left(\frac{B+m+n+p+q}{2}\right) \ldots ☽$$

Ha mind az 5 pont egy kör körületében fekszik, akkor $u = 180 - p$, $v = 180 - n$.

Könnyű átlátni, hogy ezen feloldás még akkor is használható, ha A és C közt kettőnél több pont vétetik fel azon feltétel alatt, hogy minden álláspontból a két szomszéd-, és a B pontot látni lehet, s a szögeket meg lehet mérni.

207. §.

Feladat. Egy sokszöget Theodolit vagy Astrolabiummal körületből felvenni.

Feloldás. 1) Mérjük meg a körületi darabokat a kellő számmal és működjünk a sokszögtan útmutatása szerint. (Lásd 15.—52. §-okat).

Különösen figyelmezni kell arra, hogy két párhuzamos, vagy egymás felé csak kis szög alatt hajló oldal méretlen ne maradjon és az ösmeretlen oldallal párhuzamos, vagy csak közel párhuzamos fekvésű oldalak magmérésére kiváló gond fordíttassék; mert ezek az eredményre igen nagy befolyást gyakorolnak.

2) Ha a sokszögnek minden szögei meg vannak mérve, azok összegének az elméleti összeggel meg kell egyezni; ha a különbség tűrhető, a hibát a szögek közt egyenlőn el kell osztani.

3) Ha ezen kivül még az oldalak is mind megmérettek, akkor a mérési hibák eloszlatását a valószinűség alapján az úgynevezett legkisebb négyzetösszegek elmélete szerint

kellene véghezvinni; de ezen elmélet a gyakorlatban igen hosszadalmas lévén, Winklerrel a gyakorlatra nézve elegendő közelitéssel azon elvből fogunk kiindulni, hogy az oldalak hibái a szögpontok összrendezőiben az oldalak vetületeivel arányos hibákat okoznak.

Legyenek egy sokszögnek pontjai sorjában 0, 1, 2, . . . n, ezeknek összrendezői x_0, x_1, x_2 . . . x_n és y_0, y_1, y_2 . . . y_n. Ha a sokszög oldalainak az összrendezők tengelyeire gondolt vetületei (mint a 22. §. példájában) p, q-val jelöltetnek, az $n+1$-dik pontnak összrendezői lesznek:

$$y_{n+1} = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_n\,,$$
$$x_{n+1} = q_0 + q_1 + q_2 + \ldots + q_n.$$

Ha most a sokszög hibátlan volna, akkor $y_{n+1} = 0$, és $x_{n+1} = 0$ volna, minthogy a sokszög $n+1$-dik pontja a 0-ikkal azonos; ellenkező esetben ezek a zárpont összrendezőit fogják szolgáltatni. Adjuk össze mind az igen-, mind a nemleges p-ket, ezek csaknem egyenlő összegeket fognak adni, tehát az y_{n+1}-et is két egyenlő részre kell osztani, melyek közül egyiket az igenleges, másikat a nemleges p-kre kell aránylagosan elosztani. A pótlékokat, melyeket a p eleibe irt $\triangle$ által akarunk jelölni, a társas szabály szerint kell kiszámítni, és igen-, vagy nemlegesnek venni a szerint, a mint y_{n+1} igen- vagy nemleges, és a p-ből algebrailag levonni. Nevezzük az igenleges p-k összegét P-nek, akkor lesz az előbbi szabály szerint:

$\triangle p_0 = \frac{y_{n+1}}{2} \cdot \frac{p}{P} = y_{n+1} \cdot \frac{p_0}{2P}$, hol $2P$ a $+$ jellel vett p-k összegét jelenti. Nevezzük ezt $= \mathfrak{P}$-nek, akkor a pótlék képleteit igy lehet irni:

$$\triangle p_0 = y_{n+1} \cdot \frac{p_0}{\mathfrak{P}},$$
$$\triangle p_1 = y_{n+1} \cdot \frac{p_1}{\mathfrak{P}},$$
$$\triangle p_2 = y_{n+1} \cdot \frac{p_2}{\mathfrak{P}},$$

. . . .

. . . .

és a kiigazított p-k, melyeket megkülönböztetés végett egy vonással akarunk ellátni, lesznek:

$$p'_0 = p_0 - \triangle p_0,$$
$$p'_1 = p_1 - \triangle p_1,$$
$$p'_2 = p_2 - \triangle p_2,$$

. . . .

. . . .

Hasonlóképen lesz, ha az igenlegesnek vett q-k összegét $= \mathfrak{Q}$-nak nevezzük:

$$\Delta q_0 = x_{n+1} \cdot \frac{q_0}{\mathfrak{Q}},$$

$$\Delta q_1 = x_{n+1} \cdot \frac{q_1}{\mathfrak{Q}}$$

$$\Delta q_2 = x_{n+1} \cdot \frac{q_2}{\mathfrak{Q}},$$

. . . .

. . . .

és a kiigazított q-k, melyek szintén vonással jelöltetnek, lesznek:

$$q'_0 = q_0 - \Delta q_0,$$
$$q'_1 = q_1 - \Delta q_1,$$
$$q'_2 = q_2 - \Delta q_2,$$
$$q'_3 = q_3 - \Delta q_3,$$

. . . .

. . . .

P. o. egy 7 szögben következő p és q számíttattak ki:

$p_0 =$	100·⁰40,	$q_0 = -$	37·⁰48,
$p_1 =$	78· 98,	$q_1 =$	66· 90,
$p_2 = -$	57· 57,	$q_2 =$	202· 35,
$p_3 =$	38· 60,	$q_3 =$	30· 13,
$p_4 = -$	89· 23,	$q_4 = -$	57· 67,
$p_5 = -$	80· 81,	$q_5 = -$	105. 05,
$p_6 =$	10· 03,	$q_6 = -$	98· 60.

Ebben $y_7 = 0{\cdot}{}^0 40$, $x_7 = 0{\cdot}{}^0 58$, $\mathfrak{P} = 457^0$, $\mathfrak{Q} = 596^0$, tehát

$\Delta p_0 = 0{\cdot}{}^0 08$	$p'_0 =$ 100·⁰32	$\Delta q_0 = 0{\cdot}{}^0 04$	$q'_0 = -$ 37·⁰52
$\Delta p_1 = 0{\cdot}\ 08$	$p'_1 =$ 78· 90	$\Delta q_1 = 0{\cdot}\ 07$	$q'_1 =$ 66· 83
$\Delta p_2 = 0{\cdot}\ 04$	$p'_2 = -$ 57· 61	$\Delta q_2 = 0{\cdot}\ 19$	$q'_2 =$ 202· 16
$\Delta p_3 = 0{\cdot}\ 04$	$p'_3 =$ 38· 56	$\Delta q_3 = 0{\cdot}\ 03$	$q'_3 =$ 30· 10
$\Delta p_4 = 0{\cdot}\ 08$	$p'_4 = -$ 89· 31	$\Delta q_4 = 0{\cdot}\ 06$	$q'_4 = -$ 57· 73
$\Delta p_5 = 0{\cdot}\ 08$	$p'_5 = -$ 80· 89	$\Delta q_5 = 0{\cdot}\ 10$	$q'_5 = -$ 105· 15
$\Delta p_6 = 0{\cdot}\ 00$	$p'_6 =$ 10· 03	$\Delta q_6 = 0{\cdot}\ 09$	$q'_6 = -$ 98· 69

és ha ezen kijavított számokkal y_7, x_7 újolag kiszámittatnak, a zárhiba egészen elenyészik.

208. §.

Feladat. Egy sokszöget tájolával felvenni.

Feloldás. A tájolával mind azon módok szerint lehet felvenni, melyek fentebb az Astrolabiumra nézve előadattak, s az eljárás is változatlan marad, csupán a körületbeli felvétel tér el lényegesen az előbbitől, ezért csak ennek előadására szoritkozunk.

1) A körületi szögeknek a tájolávali meghatározására elegendő, ha csak minden második szögpontban méretnek meg az összeszögellő oldalak elhajlásai, ezek által a sokszögnek minden szögei meg vannak állapitva. Ugyanis jelentsék a 234. ábrában a nyilvesszők a delejes déllőket, a 0. 2, 4, 6, . . . pontokban α a jobb, β a bal oldali irányok elhajlásait, hozzájok kapcsolván mutatóul a beirányzott pontok neveit, akkor a sokszög szögei lesznek:

$$
\begin{aligned}
(0) &= \beta_1 - \alpha_7,\\
(1) &= 360^0 - \beta_1 + \alpha_1 = 360^0 + \alpha_1 - \beta_1,\\
(2) &= \beta_3 - \alpha_1,\\
(3) &= 360^0 - \beta_3 + \alpha_3 = 360^0 + \alpha_3 - \beta_3,\\
(4) &= \beta_5 - \alpha_3,\\
(5) &= \alpha_5 - 180^0 + 180^0 - \beta_5 = \alpha_5 - \beta_5,\\
(6) &= 360^0 - \alpha_5 + \beta_7 = 360^0 + \beta_7 - \alpha_5,\\
(7) &= 180^0 - \beta_7 + \alpha_7 - 180^0 = \alpha_7 - \beta_7.
\end{aligned}
$$

Ezen kifejezésekben következő szabályszerűség mutatkozik. Miután a delejes elhajlások rendben egymás után irattak, úgy hogy az α és β egymással váltakoznak, vonjuk le az elsőt a másodikból, a másodikat a harmadikból s i. t., s ha a maradék tagadó volna, adjunk hozzá 360^0-ot: ezek a sokszög szögeit rendben fogják szolgáltatni. A maradéknak akkor lesz — jegye, ha a mutató a jobb és bal irány közt a 0-án keresztül ment; azért kell a kicsinyítendőhöz 360^0-at adni, minthogy a számozást 360^0-on túl is kell folytatni.

2) A sokszöget a papiroson kétképen lehet szerkeszteni, u. m. vagy a sokszög szögeiből, melyek az előbbi szám útmutatása szerint kiszámittattak, vagy a megmért elhajlásokból.

Az első mód az Astrolabiummal mért szögek szerkesztésétől semmiben sem különbözik.

A második a tájola által eszközöltetik ilyeténképen: Húzzunk a papiroson a kiindulási pontban egy egyenes vonalat, mely a pont delejes déllőjét ábrázolja; illesszük a tájola keleti vagy nyugoti oldalát ezen vonal mellé, és forditsuk a rajztáblát, mig a tű északi vége a 0 pontra mutat. Ekkor a tábla tájékozva lesz; azaz, a papiroson húzott vonal a hely delejes déllőjével össze fog esni, vagy ha a tájola absolut elhajlások megmérésére nem volna kiigazítva, azzal egy bizonyos szöget fog képezni.

Most a táblát ezen fekvésben megerősítjük, hogy el ne mozduljon, s a tájola ugyanazon élét a ponthoz illesztvén, forditjuk azt, mig a tű északi vége sorjában α_7 és β_1 szögekre mutat, s húzunk a tájola éle mellett mindannyiszor finom vonalakat. Ezek a papiroson húzott déllőhöz ugyanazon fekvésben lesznek, melyben a megfelelő vonalak a mezőn valának, ennélfogva a sugárok közt bezárt szög a mezei szöggel egyenlő fog lenni, s ha a sugárokra az oldalhosszak a léptékről feltétetnek, az 1 és 7 pontok meg lesznek állapitva. Ezután a tájola ugyanazon oldalát az 1 ponthoz illesztjük, s a tájolát ugy forditjuk, hogy a tű α_1-re mutasson, s egy finom sugárt húzván, erre az (1,2) oldal hosszát feltesszük; ezután a tájola élét a 2 ponthoz illesztjük s fordítjuk, mig a tű β_3-at mutat s i. t., mig minden pont szerkesztve lesz.

Ezen szerkesztési módot különösen ajánlja azon körülmény, hogy ha a tájola szelenczéje nem volna egészen hatás nélkül a tűre, az ebből eredő hiba a szerkezetből egészen kiesik, mivel a tű mind a felvétel, mind a szerkesztés közben egyenlő fekvésbe jövén a szelencze oldalához, a hiba is ugyanaz marad, ennélfogva a szerkezetből egészen kiesik.

3) A tájolának jó tulajdonságai közt kitünő az, hogy a szögmérés minden szögpontban egymástól függetlenül történvén, a hibák össze nem halmozódnak, mint azt más szögmérőkkeli munkálatoknál tapasztaltuk. Továbbá a tájola által olyan körülmények közt is meg lehet a sokszöget állapítni, melyek közt más szögmérőkkel czélt nem lehetne érni. P. o. (235. ábra). Legyen AB egy megmért alapvonal, C, D hozzáférhetlen pontok, melyekben a szögmérőt felállítni nem lehet, E, F két hozzáférhető pont, honnan csak C és D látható. Ezen 6 szögben astrolabiummal csak 6 szöget lehet megmérni, tehát az oldallal együtt 7 darab van adva, holott 9-re van szükség, hogy a sokszöget fel lehessen oldani. Ellenben, ha a felvétel tájolával történik, az $ACED$ 4 szögben az A és E pontokban az elhajlások megméretvén, a C és D szögek is meg lesznek határozva. Ezeken kivül az ABC és ABD $\triangle$-ekből az AC és AD oldalak meg lévén állapitva, a négyszögben 6 körületi darab van adva; tehát az teljesen meg van határozva. Ugyanaz áll a $BCFD$ 4 szögre nézve is; tehát a sokszög feloldható.

4) Más oldalról a tájola használhatóságát tetemesen korlá-

tozza az, hogy a szögeket legfeljebb 8—10′ pontossággal lehet vele megmérni, tehát csak 20—30° távban lévő pontokat lehet vele elegendő pontossággal felvenni, nagyobb távban már a szöghiba el nem nézhető befolyást gyakorolván. Ellenben csekélyebb fontosságu munkálatoknál, minők az erdei vágások faj-elkülönzések erdei utak völgyek patakok stb. felvétele, ha azok birtokhatárokat nem képeznek, ennélfogva nagyobb eltéréseket is eltűrnek, a tájolát igen előnyösen lehet használni.

209. §.

Feladat. Mérő asztallal egy sokszöget felvenni.

Első feloldás. Sarkösszrendezők által. (236. ábra). Válasszunk a sokszög közepe táján egy álláspontot *O*, hasonlóképen a táblán egy megfelelőt *o*, melyet ugy kell felvenni, hogy az alak a papirosra ráférjen. Állitsuk be ezt a földön megjelölt *O* felett függélyesen, s az asztaltáblát vizszintessé tévén és kellő módon megszoritván, irányozzunk az *O* pontból sorjában a sokszögnek minden pontja felé, s húzzunk a vonasz éle mellett finom vonalakat. Végre mérjük meg az *OA, OB, OC . . . OF* sugárokat, és rakjuk fel azokat kicsinyített mértékben a papiroson megfelelő sugárokra. Ekképen egy sokszög áll elő, mely a mezeivel minden tekintetben hasonló; mivel a sugárok közt bezárt szögek mind a kettőben egyenlők, azoknak szárai pedig egymással állandó viszonyban állanak.

Ezen idomban a legáltalánosabb esetet vettük fel, t. i. hogy a vonasz éle az iránysíkkal egy kis szöget képez; azért van a papiroson rajzolt idom a mezőn lévőtől elfordulva. Önként érthető azonban, hogy ha az iránysík a vonasz élével összeesik, akkor a papiroson lévő vonalak a mezei hasonfekvésüekkel párhuzamosak lesznek.

210. §.

Második felodás. Metszés által. (237. ábra) Válasszunk a sokszögön kivül vagy belül alkalmas helyen egy alapvonalat *AB*, melynek végpontjaiból a sokszög pontjait látni lehet, s a sugárok egymást jó szög alatt metszik. Mérjük meg ezen vonalat, és tegyük fel kicsinyítve a táblára olyan fekvésben, hogy a sokszög a táblára ráférjen. Ezután az asztalt az *A* pontban felállitván ugy, hogy a, A felett függélyesen álljon, s azt B felé tájékozván, húzzunk az a ponton keresztül a szögpontok felé irányvonalakat, jelöljük meg ezeket a pontok neveivel, melyek rendesen 1, 2, 3 . . . sorszámokból állanak. Megemlitendő, hogy ha a sugárok igen sűrün esnek egymás mellé, a számok két három sugárt is takarnak; tehát megkülönböztetésül a szám mellé a sugárra egy pontot kell csinálni. Ekképen minden szögpont meg lévén irányozva, az asztalt a B pontra átvisszük, A-ban egy rudat hagyván hátra. Ott az asztalt ismét felállitjuk ugy, hogy b, B felett függélyesen álljon, és A felé tájékozzuk. Végre a b ponton keresztül a szögpontok felé irányvonalakat húzunk, melyek a hasonnevű sugárokat metszik, s a metszéspontokat egy finom tűvel átszúrjuk. Ezek rendben egymással összeköttetvén a kivánt idomot fogják szolgáltatni. Ugyanis az $AB1$, $ab1$, $AB2$, $ab2$, stb. △ párok hasonlók lesznek, minthogy a megfelelő szögek egymással egyenlők; ennélfogva a megfelelő oldalak egymással állandó viszonyban fognak állani, s az egész pontok rendszere hasonló idomokat fog képezni.

Ezen mód a gyakorlatban előmetszés név alatt ösmeretes, és legáltalánosabb használatnak örvend.

211. §.

Feladat. Adva lévén a mezőn és az asztaltáblán két pont A, B, a, b (238. ábra), melyek közül egyik hozzáférhetlen: egy harmadik pontot C felvenni.

Feloldás. Állitsuk fel az asztalt a hozzáférhető pontban A annak rendje szerint, tájékozzuk B felé, és húzzunk a-n keresztül C felé irányvonalat a szükséges őrvonalkákkal együtt. Jeleljük meg ezen vonalon szabad szemmel azon pontot, hová c valószinüleg esni fog, mit körülbelől 1"-nyi térben mindig meg lehet becsülni. Ezután a C pontra átmenvén az asztallal, állítsuk be a megjelelt pontot függélyesen C felett, tájékozzuk az asztalt A felé, hol e végett egy rudat kell felállítni, s húzzunk b-n keresztül B felé irányvonalat; ez az előbbi sugárt a c pontban fogja metszeni. Ugyanis az ABC és abc △-ek hasonlók lesznek, mivel a szerkesztésnél fogva az A, a, és C, c megfelelő szögek egymással egyenlők; ennélfogva a C és c pontok egymásnak megfelelők fognak lenni. Azon körülmény, hogy c nem esik tökéletesen össze a megjelölt ponttal, mely a földön lévő *C* pont felibe függélyesen beállittatott, legfeljebb csak egy kis külpontossági hibát von maga után, mely mint feljebb láttuk, ha a külpontosság 1"-et meg nem halad, már 40—50⁰ távra sem jön figyelembe. Egyébaránt a feladat feloldása annál biztosabb, mennél hosszabb a tájékozási vonal, és mennél közelebb esik *C* a 90⁰-hoz.

Ezen feladat oldalmetszés név alatt ösmeretes.

Ha *B*-n kivül még egy harmadik pont *D* is adva van a papiroson, akkor *d*-n keresztül *D* felé szintén irányvonalat kell húzni, s a sugárnak a két első metszéspontján kell keresztül menni, minthogy az *BACD* négyszög *abcd*-vel hasonló; tehát az átlók által bezárt szögeknek is egyenlőknek kell lenni.

212. §.

Feladat. Adva lévén a mezőn és a táblán két hozzáférhetlen pont *A*, *B*, *a*, *b*, (239. ábra): két más kitűzött pontot *C*, *D* felvenni.

Első feloldás. Állitsuk fel az asztalt a *C* pontban, a megfelelő pontot c' a táblán olyan helyen vévén fel, hol annak valószinüleg esnie kell, s az asztalnak körülbelől olyan fekvést adván, hogy az *ab* vonal az *AB*-hez képest szabad szemmel itélve helyesen legyen tájékozva és húzzunk a c' ponton keresztül *A*, *B* felé irányvonalakat, valamint *D* felé is őrvonalkákkal együtt. Ezután menjünk az asztallal *D* pontba, válasszuk d'-et a vonalon úgy, hogy $c'd'$ a szemmértékkel megbecsült *CD* távnak körülbelől megfeleljen, s ezen pontot *D* felett függélyesen beállitván, tájékozzuk a táblát *C* felé. Végre húzzunk d'-ből *A*, *B* felé irányvonalakat, melyek a c'-ből húzott sugárokat a', b'-ben fogják metszeni. Ezen műtétel alatt egy négyszög $a'b'c'd'$ áll elő a papiroson, mely a mezei *ABCD* négyszöghöz hasonló, minthogy az a', b' pontok előmetszés által származnak; ennélfogva $a'b'$, *AB*-hez képest, helyesen van tájékozva. Ugyde tulajdonképen az *ab* vonalnak kell *AB*-hez képest helyes tájékozással birni; tehát szükség *ab*-t azon irányba hozni, melyben most $a'b'$ fekszik. E czélra tegyük a vonasz élét az $a'b'$ vonalhoz, és az irányzón keresztül nézvén, jegyezzünk meg magunknak a távolban valamely pontot, mely épen az irányszálon látszik; vagy ha semmi pontot sem találnánk, tűzzünk ki az irányban 60—100⁰ távolban egy rudat *M*. Ezután a vonasz élét az *ab* vonalhoz illesztvén, forditsuk a táblát ugy, hogy az iránysík ismét ugyanazon pontra mutasson. Ekkor az asztal helyesen lesz tájékozva, s a *d* pont teljes meghatározására csak az szükséges, hogy az *a*, *b* pontokon keresztül *A*, *B* felé irányvonalak húzassanak, melyek egymást a *d* pontban fogják metszeni. Végre a *c* pont meghatározása végett húzzunk *d*-n keresztül *C* felé irányvonalat, s az asztallal *C*-re visszamenvén, állitsuk fel azt *D* felé vissza tájékozván, és húzzunk *a* és *b*-n keresztül *A* és *B* felé irányvonalakat; ezek a *d*-ből húzott sugárt egy közös pontban fogják metszeni, ha a műtétel helyesen vitetett véghez; ellenkező esetben pedig több metszéspontokat szolgáltatnak, s ilyenkor az egész műtételt ismételni kell.

Második feloldás (240. ábra). Válasszunk az adatott vonalon egy pontot *C*, állítsuk fel az asztalt ezen pontban, az *ab* vonalnak egy megfelelő pontját helyezvén függélyesen *C* felibe, tájékozzuk az asztalt a távolabbi pont felé; de biztositás kedveért az irányzót az ellenkező irányban is fel kell tenni a vonal mellé, s ha az iránysík egy kevéssé eltérne a ponttól, mi rendesen a külpontossági hibából ered, az eltérést a tájékozási vonalak hosszai viszonya szerint el kell oszlatni ugy, hogy az iránysík az *A*, *B* pontok mellett egy oldalra menjen el; vagy pedig a táblát párhuzamosan oldalt kell tolni, mig az iránysíkok tökéletesen az *A*, *B* pontokon mennek keresztül. Ezután az *ab* vonalon, az álláspontnak megfelelő pontból *c'* húzunk egy negyedik kitűzött pont *D* felé irányvonalat őrvonalkákkal együtt, s az asztalt a *D* pontra átvivén, állitsuk fel, az irányvonalnak egy olyan pontját helyezvén függélyesen *D* felibe, mely körülbelől a *d* pontnak megfelel, s tájékozzuk az asztalt *C* felé, hol egy rudat kell felállítni. Ekkor az asztal helyesen fog tájékozva lenni, s a *d* pont az *a*, *b* pontokon keresztül *A*, *B* felé húzott vonalak metszéspontja által állapittatik meg. Ugyanis ezen esetben az *ABD* és *abd* △-ek hasonlók lesznek, minthogy azoknak megfelelő szögei egymás közt egyenlők, ennélfogva a *d* pont is *D*-nek megfelelő fog lenni. Megemlítendő még, hogy a *d* pont nem fog a *c'*-en keresztül húzott sugárra esni, minthogy *c'* csak szabad szemmel lévén választva, valószinüleg hibás; sőt inkább a *c* pontot most az által lehet meghatározni, hogy *d*-ből *C* felé irányvonalat húzunk, mely az *ab* vonalat *c*-ben metszi.

Ezen mód az előbbihez képest azon előnynyel bir, hogy csak két asztalállást igényel, és közvetlen tájékozást szolgáltat, mig az előbbi csak hosszas szerkesztés után vezet ugyanazon czélhoz; de hiányzik benne a szükséges ellenőrzés, miután csak két sugár metszi egymást, mi akkor is megtörténik, ha a műtétel közben valahol hiba történt. Ennélfogva a metszéspontban feltétlenül bizni nem lehet.

Ezen feladat ábráiban, valamint a következőkben is az asztalon lévő idom egyszerűség kedveért a mezeivel párhuzamosnak van rajzolva; de ez a fentebbiek szerint nem okvetetlenül szükséges, hanem az egész előadás legkisebb változást sem szenved, ha az asztalon lévő idom a mezeihez képest olyan szöggel el van fordulva, mely az iránysík és a vonasz éle közt befoglalt szöggel egyenlő.

213. §.

Feladat. Adva lévén három hozzáférhetlen pont *A*, *B*, *C*, *a*, *b*, *c* : egy negyediket *D* felvenni.

Első feloldás. Pothenot volt az első, mintegy 180 évvel ezelőtt, ki ezen fontos ugynevezett 4 pont feladatát szerkesztés utján feloldotta, kitől azután Pothenot feladatának is neveztetett. Szerinte a feloldás következőképen vitetik véghez. Miután az asztal (241. ábra) a *D* pontban vizszintesen felállittatott, húzzunk egy kürülbelől a *D* felett függélyesen álló pontból *A*, *B*, *C* felé irányvonalakat, melyek egymással *m*, *n* szögeket fognak képezni. Azután rajzoljuk fel az *ab*, és *ba* oldalak mellé az *m*, *n* szögeket ugy, hogy $bat = m$, és $bct' = n$ legyen, húzzunk az *a* és *c* pontokon keresztül *at* és *ct'*-re merőlegeseket, és messük ezeket az *ab*, és *bc* oldalak középpontjaiból felemelt merőlegesekkel; ezek az *o* és *o'* metszéspontokat fogják szolgáltatni, és az ezen pontokból *oa* és *o'c* sugárokkal leirt körök, melyek a *b* ponton mennek keresztül, egymást a keresett *d* pontban fogják metszeni. Ugyanis a szerkezetből következik, hogy az *at* és *ct'* vonalak az illető körök érintői lesznek, ennélfogva a *bat*, és *bct'* szögek érintő és húr által képeztetnek. Ugyde ezek a megfelelő körületi szögekkel egyenlők; tehát $bda = bat = m$, és $bdc = bct' = n$; és a *d* pontban az *ad*, *bd*, *cd* sugárok közt bezárt szögek ugyanazok, melyek a mezei *D* pontban megmérettek.

Ezen feloldásnak csekély gyakorlati becse van részint azért, mert a körök középpontjai többnyire a táblán kivül esnek; részint azért, mert ha a köröket húzni lehetne is, azok egymást többnyire igen hegyes szög alatt metszik, ennélfogva a metszéspontot felösmerni igen nehéz.

Második feloldás. Bohnenberger szerint (242. ábra) rajzoljuk fel az asztaltáblán az ac oldal mellé a más két oldallal átalellenes szögeket m, n, úgy hogy $cae = n$, és $ace = m$ legyen. Ezen szögek szárai egymást egy pontban e metszik, s ha a be vonalat húzzuk, két szög p és q áll elő. Ezeket az ac másik oldalára felrakjuk, ugy hogy $acd = p$, $cad = q$ legyen, s a metszéspont lesz a keresett d pont. Ugyanis itt két pár hasonló $\triangle$-ek állanak elő, u. m. $aoe \backsim cod$, és $coe \backsim aod$, minthogy az o-nál levő csúcsszögek egyenlők; továbbá a szerkesztés szerint $p = p$, és $q = q$; tehát a harmadik párnak is egyenlőnek kell lenni, azaz: $ado = m$, $cdo = n$.

Hogy pedig a d pontban a három sugár egymást metszi, a fentebbi hasonló $\triangle$-ekből könnyen meg lehet mutatni. Ugyanis tegyük fel egy pillanatra, hogy az e és a pontokból húzott vonalak a be vonalat d és d'-ben metszik, akkor az aoc és cod hasonló $\triangle$-ekből folyik:

$$ao : oe = od : oc,$$

hasonlóképen a coe és aod hasonló $\triangle$-ekből lesz:

$$co : oe = od' : oa,$$

vagy a kültagokat egymással felcserélvén:

$$ao : oe = od' : oc.$$

Ezen két aránynak három megfelelő tagjai azonosok, tehát a negyediknek is azonosoknak kell lenni, azaz: $od = od'$. Tehát d és d' összeesnek egymással.

Ezen feloldás sokkal jobb a Pothenoténál, ámbár még hiányzik benne egy útmutatás a szögek kényelmes és pontos felrakására. Ezen hiányt tökéletesen lehet pótolni, s az által a módot a gyakorlatban tökéletesen lehet használhatóvá tenni.

Harmadik feloldás. 1) A szögek felrakása az irányzó vonasz által következőképen eszközölhető. Minthogy az m szögnek bal szára az AD, jobb szára pedig a BD vonal által képeztetik, ezen szöget pedig a C csúcsban úgy kell feltenni, hogy annak bal szára az ac vonal legyen: helyezzük a vonasz élét az ac oldalhoz, forditsuk az asztalt, mig az iránysík az A ponton megyen keresztül, irányozzunk e-ből B felé, s húzzuk a ce sugárt. Ekképen az ace szög annál tökéletesebben egyenlő fog lenni m-el, mennél közelebb esik c, az asztal forditása után, a D ponthoz, és mennél távolabb áll A, a D ponttól. Hasonlóképen, minthogy az n szög a BD és CD vonalak által képeztetik, hol az első a bal, az utolsó a jobb szárat jelenti; ezen szöget pedig az a csúcspontban ugy kell feltenni, hogy annak jobb szára a ca vonalba essék: helyezzük a vonasz élét a ca vonalra, forditsuk az asztalt, mig az iránysík C felé mutat, s húzzunk a-n keresztül B felé irányvonalat ae. Ekképen a $cae = n$ szög is fel lesz rajzolva, s a sugárok egymást az e pontban fogják metszeni, melyről az előbbi feloldásban megmutattuk, hogy az a bd vonalban fekszik. A be vonalat tehát bd helyett tájékozási vonal gyanánt lehet használni. E czélból a vonasz élét a be vonalra helyezvén, mellette finom sugárt húzunk, s forditjuk az asztalt, mig az iránysík a B pont felé fog mutatni, azután az a és c pontokon keresztül A és C felé irányvonalakat húzunk, melyek a be sugárt a d pontban fogják metszeni.

2) Ha az asztal forditása által az a és c pontok D-től nagyobb távban esnének, hogysem az eredő külpontossági hibát el lehetne hanyagolni: akkor az asztaltáblát az állványon párhuzamosan oldalt kellene mozdítni, mig a külpontosság egészen elenyészik, vagy legalább jelentékenységét elveszti.

3) Ha a sugárok, melyek hátra felé húzásától a feladat h á t r a m e t s z é s n e k is neveztetik, nem egy pontban találkoznának: jele volna, hogy az asztal tájékozása nem tökéletes.

4) Az a, e, c, d pontok mindig egy kör körületében feküsznek. Ugyanis a 242. ábra szerint a négyszög szögeinek

összege: $$2(m + n + p + q) = 360^0,$$
tehát $$m + n + p + q = 180^0,$$
azaz: az átalellenes szögek összege $= 180^0$, mely tulajdonság csak a környégyszögnek felel meg.* Innen következik, hogy d és e az ac húrnak ellenkező oldalaira esnek. Ha tehát d a húrhoz közeledik, e attól távozik. Ha d az a, b, c pontokon keresztül gondolt kör körületébe esik, akkor e, b-vel azonos, s a feloldás bizonytalan lesz; mivel akármint helyezzük a vonaszt a b ponthoz, s tájékozznk az asztalt a vonal után, a sugárok mindig egy pontban metszik egymást, s a metszéspontok a kör körületében

fognak feküdni. Kitűnik ez a Pothenot-féle szerkezetből is, melynek körei ezen esetben egymást takarják, ennélfogva végtelen sok metszéspontot szolgáltatnak. Ezen kivételnek egy különös esete áll elő, ha a négy pont egy egyenes vonalban van; mivel az egyenes vonalat egy végtelen nagy sugárú körív darabnak lehet tekinteni. Ezen esetekben tehát a faladatot feloldani nem lehet. Ha a *d* pont a körön belül van, akkor *e* a háromszögön kivül esik *b* felé, mig egyszer *d* az *ac* oldalba lép, midőn *e* végtelen távba esik. Ekkor tehát *e* nincsen meghatározva, de nem is szükséges, mivel az asztalt *ac* után lehet tájékozni. Ha a *d* pont az *ac* oldalt átlépi s a háromszögbe esik, akkor *e* az alsó oldalra ugrik át, mig *d*, *b*-vel összeesik, *e* pedig az *abc* kör körületében foglal helyet. Végre ha *d*, a △-ből *b*-nél kilép, *e* a kör és az *ac* oldal közé esik.

5) Figyelemmel kisérvén az *e* pontnak különböző fekvését, könnyen meg lehet itélni, mikor várhatni jó feloldást, és mikor nem? T. i. mennél távolabb esik *e* . . . *b*-től, annál pontosabban lehet a vonaszt hozzájok illeszteni, s annál tökéletesebben lesz az asztal tájékozva. Ez pedig akkor történik, ha a *D* pont az *ABC* △-ben, vagy azon kivül, de annak csúcsa *B* felé fekszik. Ellenben a feloldás igen tökéletlen lesz, ha a *D* pont az *AC* oldal felé, s az *ABC* kör körületéhez közel fekszik, minthogy akkor *e* is igen közel fog *b*-hez esni.

6) Az *e* ponton kivül még más két pont is van, melyeket a *D* pontban az asztal tájékozására lehet használni. Ezek közül egyik *f* (243. ábra) a *DA*, a másik *g* pedig a *DC* vonalban fekszik. Ugyanis a *DA*, *DB*, *DC* sugárok szorosan véve három szöget *m*, *n*, *p* képeznek egymással, melyeknek a sugárokhoz és a △ oldalaihoz való fekvése minden tekintetben hasonló. Ha tehát az *m*, *n* szögeknek az *ac* oldal mellé rajzolása által a *db* sugáron az *e* pont származott, akkor az *m*, *p* szögeknek a *cb* oldal mellé ugyanazon szabályok szerinti felrakása által a *da* sugáron egy pont *f*, valamint az *n*, *p* szögeknek az *ab* oldal mellé rajzolása által a *de* sugáron egy pont *g* fog előállani, melyek az *e*-vel hasonló tulajdonságúak, és vele egyaránt használtathatnak.

7) Néha megtörténik, hogy a tájékozási pont *e* (224. ábra) a táblán kivül esik. Ilyenkor következőképen lehet a dolgon segítni. Húzzunk a tábla szélén fekvő pontból *e'*, *ae*-vel párhuzamost,

mely az *ac* oldalt *a'*-ben metszi. Ezen párhuzamost az irányzóval lehet szerkeszteni oly módon, hogy midőn az asztal második fekvésében *a*-ból *B* felé irányozunk, és az *ae* vonalat húzzuk, *e'*-ből szintén *B* felé irányozunk. Azután húzzunk *a'*-ből *ba*-hoz párhuzamost. E czélból a vonasz élét a *ba* vonalhoz illesztvén, átnézünk az irányzón, megjegyzünk magunknak egy távol lévő pontot, melyre az irányzó mutat, vagy ha semmi tisztán kivehető pont nem volna az irányzó síkjában, fordítjuk az asztalt, mig ezen feltételnek elég nem tétetik s a vonasz élét az *a'* ponthoz illesztvén, ugyanazon pont felé irányozunk, s a vonalat húzván, a *b'* metszéspontot nyerjük. Ezen szerkeztés által az *a'b'ce'* négyszög áll elő, mely *abce*-vel hasonló, mivel a szerkesztés szerint a megfelelő szögek egymással egyenlők, a megfelelő oldalak pedig egymással olyan viszonyban állanak, mint *ac*: *a'c*, mely oldalak a hasonló △ párok *abc* ∽ *a'b'c*, és *ace* ∽ *a'ce'* közt közösök. Tehát *b'e'* ∥ *be*. Ennél fogva a *b'e'* vonalat *be* helyett az asztal tájékozására lehet használni, mivel azon csekély távolság, melyben *b'e'*, *be*-től áll, csak igen kis külpontossági hibát von maga után, melynek befolyása annál kisebb, mennél hosszabb a *DB* vonal, és már 100°-nyi távra is egészen elenyészik.

Negyedik feloldás. Terítsünk az asztalra egy ív tiszta átlátszó papirost, és azt megerősítvén, húzzunk rajta körülbelől a *D* pont felett függélyesen eső pontból *A*, *B*, *C* felé iránysugárokat. Ezután forditsuk vagy helyezzük a papirost az asztaltáblán úgy, hogy a nevezett sugárok a megfelelő pontokon *a b*, *c* menjenek keresztül; ekkor a sugárok sarkpontja a *d* pontba fog esni, melyet egy finom tűvel a táblára át lehet szúrni.

214. §. Közvetett feloldások. Lehman módja.

Ha az asztal a mezőn kitűzött *D* pont felett helyesen fel van állítva és tájékozva, akkor az *a*, *b*, *c* pontokon keresztül az *A*, *B*, *C* felé húzott irányvonalak valamint a mezőn a *D* pontban, úgy a papiroson is *d* pontban metszik egymást. Ugyanis az irányvonalak által mind a mezőn, mind a papiroson hasonló △-ek képeztetnek, melyekben az oldalak viszonya állandó, ennélfogva a belőlök összetett négyszögek is hasonlók lesznek. De ha az asztal nincsen jól tájékozva, akkor a sugárok által a papiroson alkotott △-ek a mezei hasonnevüekkel nem lesznek hasonlók, s egymás mellé tétetvén, még csak négyszöget sem fognak alkotni, hanem egy csúcspont helyett három áll elő, melyek az ugynevezett hiba $\triangle$-et foglalják magok közt.

1) Ezen hibaháromszögből a valódi *d* pont fekvését Lehman szerint következő törvények szerint lehet megitélni.

a) Feltévén, hogy az asztal hibás tájékozása miatt helyökből kimozdult *a, b, c* pontokból a megfelelő mezei pontok *A, B, C* felé gondolt vonalakat a térben párhuzamosaknak lehet tekinteni, a helyesen tájékozott asztal ugyanazon pontjaiból ugyanazon mezei pontok felé gondolt vonalakkal, tehát mind a két vonalrendszer az *m, n* szögeket zárja be egymás közt: akkor a valódi *d* pontból a hibás sugárokra húzott függélyek p_a, p_b, p_c, a *da, db, dc* hosszakkal egyenes viszonyban állanak.

Ugyanis legyen (245. ábra) *abc* az adatott $\triangle$ a papiroson, *d* a keresett negyedik pont, melyben a helyes tájékozásnak megfelelő sugárok *ad, db, cd* egymást metszik, *aa'*, *bb'*, *cc'* pedig a hibás tájékozás után húzott vonalak; az utolsó vonalrendszerben a két első sugár γ, a két utolsó α-ban metszi egymást, melyek közül az első a *dab*, az utobbi pedig a *dcb* körök kerületeiben feküsznek, minthogy a feltétel szerint a sugárok által bezárt szögek *m, n* az asztal elfordulása után is változatlan maradnak. Innen következik, hogy $da\gamma$ szög $= db\gamma$-val, mivel mind a ketten egy körnek körületi szögei, s a közös $d\gamma$ íven állanak. Hasonlóképen $db\alpha$ szög $= dc\alpha$-val, ugyanazon oknál fogva; tehát mind a három egyenlő egymás közt. Ha most a *d* pontból az *aa'*, *bb'*, *cc'* sugárokra merőlegesek húzatnak, hasonló $\triangle$-ek állanak elő, melyeknek oldalai egymással arányosak, azaz:

$$p_a : p_b : p_c = da : db : dc.$$

Látni való, hogy ezen törvény tulajdonképen csak addig érvényes, mig azon feltétel áll, hogy az asztalnak pontjaiból mind a helyes, mind a hibás tájékozás után a mezei pontokhoz gondolt sugárok a térben párhuzamosoknak tekinthetők. Ezen feltételnek akkor van elég téve, ha vagy az asztal pontjainak kimozdulása, ennélfogva a tájékozási hiba nem igen tetemes, vagy ha a mezei pontok *A, B, C*, a *D* ponttól oly távol esnek, hogy az asztal pontjainak helyökbőli kimozdulása, mely 3—4‴-et ritkán halad meg, azokból még a megengedhető szögmérési hibánál kisebb szög alatt látszik. Legyen p. o. az asztalnak egy pontja a forgásponttól 10"-nyi távban, s az asztal 15°-al hibásan tájékozva, akkor a pont 10" *arc* 15° = 2·"6-el van helyéből kimozdulva. Tegyük fel, hogy $DA = 400°$, akkor a 2·"6 parallaxisa legroszabb esetben, ha t. i. az *DA*-ra merőleges, $= \frac{2 \cdot 6}{400 \times 72} = 0 \cdot 00009$, körülbelől 20" fog lenni. Ezen esetben tehát a fentebbi törvényt még érvényesnek lehet tekinteni.

b) Ha az álláspont *D* az *ABC* △-ben van, akkor a *d* pont is a hiba-△-be esik. Ugyanis, ha a 246. ábrában a hibásan tájékozott asztalon az *a*, *b*, *c*, pontokból *A*, *B*, *C* felé irányvonalak húzatnak, ezek egymást az *adb*, *dbc* körök körületein fogják metszeni, s a hibaháromszög az α, β, γ, vagy az α', β', γ' fekvésbe jön a szerint, a mint az asztal egyik, vagy másik oldalra van elfordulva, a *d* pont minden esetre a háromszögben van.

c) Ha a *D* pont (247. ábra) az *ABC* △-ön kivül, de annak egyik csúcsa előtt áll: akkor a *d* pont is a hiba-△-ön kivül, még pedig úgy fekszik, hogy a hiba-△ a középső sugárnak egyik, a *d* pont pedig annak másik oldalán foglal helyet. Ezen tételnek helyes volta az ábrából, melyben α β γ és α' β' γ' a hiba-△ lehető fekvéseit ábrázolják, könnyen megérthető.

d) Ha a *D* pont az *ABC* △-ön kivül, de annak egyik oldala előtt (248. ábra) s az *ABC* pontokon keresztül húzható kör körületén belül fekszik: akkor a *d* pont is a hiba-△-ön kivül épen úgy esik, mint az előbbi esetben találtuk, mint ezt az ábra nyilván mutatja.

e) Ha a *D* pont az *ABC* △-ön kivül, annak egyik oldala előtt, s az *ABC* kör körületén kivül esik: akkor a *d* pont is a hiba-△-ön kivül a hiba-△-el együtt a középső sugárnak ugyanazon oldalán fekszik, mint ezt a 245. ábrából könnyen meg lehet érteni.

2) Ezen törvények alkalmazása igen egyszerű. Miután t. i. az asztal a *D* pontban felállittatott, s a mennyire szabad szemmel megitélni lehet, helyesen tájékoztatott, húzzunk az *a*, *b*, *c* pontokon keresztül *A*, *B*, *C* felé irányvonalakat, s a *d* pont fekvését a Lehman törvényei szerint megitélvén, válasszunk szabad szemmel egy pontot, mely az arányosságnak lehetőleg jól megfelel; ez a *d* ponttól nem igen messze fog esni. Most helyezzük a vonasz élét ezen pontra, és *a*, *b*, *c* körül a legtávolabbikra,

és az asztalt ezen vonal után ujolag tájékozván, húzzunk az *a, b, c* pontokon keresztül *A, B, C* felé új irányvonalakat, ezek már igen kis hiba-△-et fognak alkotni, melyben a *d* pont fekvését még nagyobb pontossággal meg lehet itélni, mint az előbbiben lehető volt; s ha a műtétel még egyszer ismételtetik, a hiba rendesen teljesen el van háritva, kivévén azon esetet, midőn a *D* pont fekvése kedvezőtlen; midőn tehát csak többszöri ismétlés után közeledik az asztal a tökéletes tájékozáshoz, s ilyenkor a feloldásban bízni nem lehet.

215. §. Netto módja.

Az előbbi feloldásnál a *d* pont, valamint a tájékozási vonal is csak szabad szemmel választatott. Netto a szemmérték tökéletlenségét mértani szerkesztés által igyekezett pótolni, mely a tájékozási vonal meghatározására egy pontot szolgáltat, minők Bohnenberger feloldásánál az *e*, *f*, *g* pontok valának. Ő szerinte fel kell állítni az asztalt a *D* pontban annak rendje szerint, és szabad szemmel tájékozván, húzni kell *a*, *b*, *c*-n keresztül *A*, *B*, *C* felé irányvonalakat. Ezután fordítni kell az asztalt 4 — 5 csavarfordulással s az *a*, *b*, *c* pontokon keresztül ujra irányokat húzni. Ekképen két hiba-△ áll elő. Most kössük össze (249. ábra) a β, β' metszéspontokat egyenes vonallal, ez a *b* pontból húzott sugárokat *p* és *q*-ban fogja metszeni; azután a βp, és βq darabkákat tegyük fel merőlegesen *pq*-ra a *p* és *q* pontokban, s a végpontokat *r*, *s*, kössük össze egy egyenes vonallal; ez a *pq* vonalat egy pontban *o* fogja metszeni, mely a *bd* vonalban fekszik, ennélfogva tájékozási vonalat szolgáltat. Ugyanis ha az *a*, *d*, *c* pontokon keresztül egy kört húzva gondolunk azon feltétel alatt, hogy az asztal elfordulása a sugárok közötti szögekben érezhető változást a térben még nem okoz, az *a* és *c* pontokon keresztül húzott irányvonalak ezen kör körületében fogják egymást metszeni, tehát β és β' ezen kör körületében vannak, s ha ezen pontokon keresztül a *bp* és *bq* sugárokkal párhuzamosak húzatnak, ezek egymást ugyancsak azon kör körletében az *e* pontban fogják metszeni, mely a Bohnenberger feloldásában találtatott *e* ponttal azonos; minthogy $a\beta e$ szög $= ade = a\beta' e$, és $e\beta c$ szög $= edc = e\beta' e$ szöggel. Tehát a $\beta\beta'$ egyenest húzván, két pár hasonló △ fog keletkezni, u. m. $e\beta o \backsim bpo$, és $e\beta' o \backsim pqo$, melyekben következő arányok állanak:

$$\begin{array}{l} \beta p \; : po = eb : bo \\ \beta' q : qo = eb : bo \\ \hline \beta p \; : po = \beta' q : qo \end{array}, \text{ tehát}$$

Ezen arány az rpo és soq △-ben van szerkesztve, melynél még csak azt kell megjegyezni, hogy ha mind a két hibaháromszög a b pontból húzott sugároknak ugyanazon oldalán fekszik: akkor a d pont is a két hiba-háromszögtől ugyanazon oldal felé van, s akkor a pr és qs darabokat is a pq vonalak ugyanazon oldalára kell feltenni, mint az a 250. idomban látszik.

Első pillanatra úgy látszik, mintha a Netto tájékozási pontja előnynyel birna a Bohnenbergeré felett azon esetben, ha e a b ponthoz közel esik, minthogy ekkor o nagyobb távban fog b-től esni; de ezen előny igen kétessé válik, ha meggondoljuk, hogy ezen esetben a két hiba-△ nagyságra nézve egymástól igen keveset különbözik, ennélfogva a rs és pq vonalak igen hegyes szög alatt metszik egymást úgy, hogy az o pontot szigorún meghatározni nem lehet.

216. §.

Az előbbi tökéletes mértani szerkezet helyett egy egyszerűbbet is lehet használni, mely a keresett pontot eleinte csak közelítve szolgáltatja ugyan, de ismételve alkalmaztatván, a valódi d ponthoz mindig közelebb vezet, és különösen egyszerűsége által ajánlkozik. Ez abban áll, hogy miután az asztal pontjaiból az előbbi mód szerint két különböző tájékozásnál a mezei pontok felé irányvonalak húzattak, s ekképen két hiba-△ állott elő, a legszélső egynevű pontok α, α', és γ, γ' (251. ábra) egyenes vonalak által összeköttetnek. Ezen vonalak egymást egy pontban o fogják metszeni, mely még a keresett d ponttól ugyan különbözik, minthogy ez két körív metszése által képeztetik, holott o ugyanazon körök húrjai által állittatik elő. De ha az irányzó vonasz bo mellé helyeztetik, s az asztal B felé irányoztatik: az a, b, c pontokon keresztül újra huzott sugárok egy sokkal kisebb hiba-△-et fognak képezni, mely a közelebbivel hasonló módon összeköttetvén, egy újabb pontot o' fog szolgáltatni, mely már a d ponttól alig fog különbözni. Biztosság kedveért az asztalt bo' után újra kell tájékozni, s a három pont felé iránysugárokat húzni. Ezek vagy tökéletesen egy pontban metszik egymást, s ezen esetben a *d* pont tökéletesen meg van határozva s az asztal is teljesen van tájékozva; vagy pedig még egy igen kis hiba-háromszögecske áll elő. Ekkor a fentebbi szerkesztést a közelebbi hiba-háromszöggel ismételni kell, s a metszéspont *o*", a *d*-től nem fog különbözni, és csak az van még hátra, hogy az asztal *bo*" után tájékoztassék.

217. §.

Csekélyebb fontosságu felvételeknél az asztalt a delejtű után is lehet tájékozni, s a három sugár csak egy kis hiba-△-ecskét fog képezni, minthogy a tájékozási hiba 10'et alig fog meghaladni, s a hiba-△-ből a *d* pont fekvését a Lehman törvényei szerint egyszerre el lehet találni.

A Lehman törvényei még akkor is kitünő szolgálatot tesznek, ha a pontot oldalmetszés, vagy a Bohnenberger módja szerinti közvetlen hátrametszés által akartuk meghatározni, de valamely közbejött hiba miatt a meghatározás nem sikerült, s egy pont helyett egy hiba-△ keletkezett. Ilyenkor az asztal tájékozása hibás lévén, az asztalt egy kevéssé fordítni kell, s a fordítás nagyságát a Lehman törvényei szerint lehet megitélni.

218 §.

1) Ha a fentebb előadott metszési feladatokat egymással összsehasonlítjuk, kitűnik, hogy az e l ő m e t s z é s csak két asztalállást igényel, akárhány pontot kelljen meghatározni; ennélfogva a részletek felvételére különösen alkalmatos.

Az o l d a l m e t s z é s minden pont megállapitására külön asztalállást kivánván, a részletek felvételére igen fáradságos volna; de annál czélszerűbb az asztal álláspontjának a papiroson való meghatározására, ha a mezőn olyan pontot vettünk állásnak, mely az asztalon még meghatározva nincs. Ezen feloldás czélszerűsége még növekedik, ha az álláspontból köröskörül több pont látható, melyek már a papiroson fel vannak véve, minthogy az ezek felé intézett irányvonalak mindnyájan a keresett pontban metszvén egymást, a műtétel helyes voltáról bizonyságot tesznek.

Ugyanaz áll a h á t r a m e t s z é s r ő l is.

2) Az oldal- és hátrametszés közötti viszonyt illetőleg kétséget nem szenved, hogy az oldalmetszés egyszerűbb alapon

nyugszik, s az asztal tájékozását közvetlenebb módon szolgáltatja, mint a hátrametszés; ennélfogva kevesebb hibának van kitéve. A gyakorlatban oldalmetszés a szabály, hátrametszés a kivétel, s mindkettőnek a maga helyén és idején való alkalmazásából lehet a tudományos műveltségű mérnököt megösmerni, ki a körülményeket mindig a munka gyarapítására tudja felhasználni.

3) Az elő-, oldal- és hátrametszés használhatósága közötti viszonyt, s egyiknek a másik fölötti előnyét következő példából lehet megérteni. Tegyük fel, hogy a 252. ábrában látható *MN* dülőt akarjuk felvenni, melynek pontjai 1, 2, 3 . . . karókkal ki vannak tűzve, s asztalállási pontokul az *E* és *F* dombok ajánlkoznak, melyeknek fekvése a dülőhöz képest kedvező; de ezek még nincsenek az asztalon meghatározva; az *A*, *B* pontokból pedig, melyek már az asztalon fel vannak véve, a dülő nem látszik, és *C* hozzáférhetlen. Ha a mérnök csupán az előmetszést akarná használni, akkor először fel kellene az asztalt *B*-nél állítni, innen az *E*, *F* pontokra irányvonalakat húzni; azután el kellene az asztallal az *A* pontba menni, s onnan az *E* és *F* pontokat metszeni. Ezután el kellene az asztallal az *E* pontba menni, s az 1, 2, 3 . . . pontok felé irányvonalakat húzni; s végre azokat az *F* pontból metszeni. Ennélfogva a dülő felvételére négy asztalállás volna szükséges.

Ha a mérnök az oldalmetszést is akarja használni, akkor először az asztallal a *B* pontra megyen, és húz az *E* és *F* pontok felé irányvonalakat. Innen az *F* pontra megyen, tájékozza az asztalt *B* felé, oldalt metszi a pontot *A* és *C*-ről, és húz az 1, 2, 3 . . . pontok felé irányvonalakat. Végre az *E* pontra megyen az asztallal, tájékozza *B* felé, oldalt metszi a pontot *A*, *C*, és *F*-ről, s metszi az 1, 2, 3 . . . pontokat. E szerint 3 álláspontból végezte azon munkát, melyhez az előbbi mód szerint 4 álláspont volt szükséges.

Végre, ha a hátrametszést is akarja használni, akkor mindjárt az *F* pontra megyen az asztallal, hátrametszi a pontot *A*, *B*, *C*-ből, és húz az *E*, 1, 2, 3 . . . felé irányvonalakat. Ezután átmegyen az asztallal az *E* pontba, tájékozza azt *F* felé és oldalt metszi a pontot, *A* *B*, *C* pontokról; végre metszi az 1, 2, 3 . . . pontokat. Ekképen a munka csak két asztalállást igényelt.

219. §.

Feladat. Egy sokszöget asztallal körületből felvenni.

Első Feloldás. 1) Állitsuk fel az asztalt a sokszög valamelyik szögpontjában *A* (253. ábra), válasszunk a papiroson egy megfelelő pontot *a*, ugy, hogy az idom a táblára ráférjen, és húzzunk a szomszéd *B* és *G* pontok felé irányvonalakat őrvonalkákkal együtt, minthogy az asztalt ezen vonalak után kell tájékozni, s az *AB*, és *AG* oldalakat megmérvén, rakjuk fel kicsinyített mértékben az illető sugárokra. Ezáltal a *b* és *g* pontok meg lesznek állapitva. Ezután menjünk a *B* pontra, *A*-ban egy rudat hagyván hátra, állitsuk fel az asztalt, *b*-t *B* felett függélyesen helyezvén; tájékozzuk vissza *A* felé és húzzunk *C* felé irányvonalat őrvonalkákkal együtt; és a *BC* oldalt megmérvén, tegyük fel azt a lépték szerint a megfelelő sugárra stb., mig a sokszögnek minden pontja meg lesz határozva.

2) Minhogy ezen mód szerint az elkerülhetlen mérési hibák összehalmozódnak: meg kell ragadni minden alkalmat, hogy a munka helyes voltáról meggyőződést szerezzünk magunknak. E végre, ha valamely szögpontból p. o. *D*, egy már felvett pont *B* látható, vissza kell reá irányozni, s ha a munka jó: a sugár a papiroson megfelelő *b* ponton fog keresztülmenni, vagy pedig, ha könnyen megeshetik, időről időre a már felvett pontokhoz átlókat kell mérni, s a méreteket a papiroson megfelelő hosszakkal a lépték szerint össze kell hasonlítni. A tapasztalás tanitása szerint mindig fognak kis különbségek mutatkozni, melyeknek nagyságából a munka jóságára következtetést lehet vonni.

3) Ha a sokszögnek egész körülete felvétetett, az utolsó pontban *G* az elkerülhetlen hibák összehalmozódása miatt egy pont helyett rendesen kettőt *g*, *g'* fogunk találni, azaz: a sokszög nem fog bezáródni, és *gg'* a zárhiba. Ha ez a közönséges hosszmérésben megengedhető hibát, tehát az egész körületnek $^1/_{1000}$-ed részét meg nem haladja, akkor a felvétel igen jó, s a zárhibát el lehet oszlatni, hogy az a zárpontra egyedül ne nehezedjék. De ezen pontosságot ritkán fogjuk elérni, minthogy itt az oldalak megmérésében történt hibákhoz még a szögek hibái is járulnak; hanem $^1/_{600}$—$^1/_{400}$ pontossággal is meg lehet elégedni a szerint, a mint a mérés több, vagy kevesebb nehézséggel jár. Ha a zárhiba sokkal nagyobb, mintsem azt az

elkerülhetlen hibák összehalmozódásából ki lehetne magyarázni, akkor valószinűleg a mérés közben valamely szarvas hiba történt, s ezt fel kell keresni, és ki kell igazítni.

4) Mennél hosszabbak a sokszög oldalai, annál kevesebb befolyást gyakorolnak az elkerülhetlen hibák a felvételre. Igyekezni kell tehát a sokszöget oly kevés pontok által kitűzni, a mint csak lehet, s az átugrott pontokat, ha azok a sokszög alakjának megállapitására szükségesek, vagy derék-, vagy sarkösszrendezők által kell meghatározni, mely műtételnél a kitűzött oldalak metszéktengelyekül szolgálnak. A műtétel a 254. ábrából könnyen megérthető, melyben *A*, *B*, *C*, *D* . . . az asztalálláspontokat, 1, 2, 3 . . . pedig az összrendezők által megállapitandó pontokat jelentik.

5) Különösen czélszerű a részletek felvételére a sarkrendszernek egy módositása, mely abban áll, hogy a sugárok helyett a sokszög oldalai méretnek meg, és tétetnek fel az asztalon a sugárokra. Miután t. i. (255. ábra) az *AB* vonal megméretett és az asztalra feltétetett, az *A* álláspontból az 1, 2, 3 pontok felé irányvonalak húzatnak, s az *A*1, 1.2, 2.3, 3.*B* oldalak megméretvén, az illető sugárokra feltétetnek; s ha a műtétel helyesen vitetett véghez, a 3.*B* oldal végpontjának a már az asztalon feltett *b* ponttal össze kell esni, stb. Ezen műtétel annál tökéletesebb eredményt ád, mennél kisebb szögeket zárnak be a sugárok az oldalakkal. Ugyanis a papiroson minden szögpont tulajdonképen egy egyenes vonalnak egy körívvel való metszése által származván, a metszéspont fekvését annál tökéletesebben meg lehet itélni, mennél közelebb esik az egyenes vonal a kör középpontjához, minthogy akkor a metszésszög közel 90^0-ot fog tenni.

Második feloldás. 6) Állitsuk fel az asztalt az *A* pontban (256. ábra), és miután a táblának kellő fekvést adtunk, s a megfelelő *a* pontból *B* és *H* felé irányvonalakat húztunk, tegyük fel a tájola déllőjét *uv* a 188. §. 2 szerint a táblára. Végre az *AB* és *AH* oldalakat megmérvén, tegyük fel a méreteket a lépték szerint az illető sugárokra. Ezután menjünk az asztallal a *C* pontra, válasszuk a *c* pontot szemmérték szerint, állitsuk fel az asztalt a *C* pontban és tájékozzuk a tájola segitségével. E szerint az asztal a *C* pontban az előbbivel párhuzamos fekvést nyervén, ha a *b* pontból *B* felé irányvonalat húzunk, s a megmért *BC* oldal hosszát lépték szerint a sugárra feltesszük, a *c* pont az asztalon meg lesz határozva. Innen most D felé irányvonalat húzunk, s a CD oldalt a sugárra feltévén, miáltal a d pont az asztalon meg lesz állapítva, az asztallal az E pontba megyünk, s i. t.

Ezen felvételi mód különösen az által ajánlkozik, hogy az asztal felállitása csak minden második pontban lévén szükséges, félannyi állomás áll elő, mint az előbbi mód szerint. Továbbá az asztal tájékozásai egymástól függetlenül történvén, a tájékozási hibák összehalmozódhatnak. Csak az kár, hogy a tájolávali tájékozás 10′-ig kétséges lévén, csak 20—30° hosszú oldalaknál lehet a szögpontok fekvését kellő pontossággal meghatározni. A részletek felvételét a fentebbiek szerint lehet itt is intézni.

7) Néha megesik, hogy a sokszögnek egy kis darabja a táblára nem fér, de annak másik oldalán elég üres hely van a hiányzó rész lerajzolására. Ilyenkor a sokszög felvett részének az asztal szélén eső két pontját m, n (257. ábra) egyenes vonallal össze kell kötni, s ehez a táblának üres részén párhuzamost $m'n'$ kell húzni. E czélból a vonasz élét az mn vonalra tesszük, s az asztalt fordítjuk, mig az iránysík valamely igen távol lévő pontra mutat; azután m'-en keresztül ugyanazon pont felé szintén irányvonalat húzunk, s erre az mn vonalat egy körzővel feltesszük, úgy hogy $m'n' = mn$ legyen. Hasonlóképen lehet az m pont tájékozási vonalával ab is párhuzamost $a'b'$ húzni az m' pontban; ámbár azon esetben, ha az ab és $a'b'$ közötti táv a papiroson 1—2″-et meg nem halad, vagy ha az asztal a tájola után van tájékozva, az $a'b'$ vonal egészen szükségtelenné válik, s az asztalt az m' pontban az ab vonal után is lehet tájékozni. Ekképen a sokszög egészen felvétetik, s a zárpont az n' pontban fog előállani épen úgy, mint az az n pontnál keletkezett volna, ha a sokszöget egy darabban lehetett volna felvenni.

220. §.

Ha a zárhiba a fentebb emlitett határt át nem hágja, a sokszögnek egyes pontjai közt eloszlattatik.

E czélra Winkler következő szabályokat állít fel: (258. ábra).

1) A sokszöget nem kell egyhúzomban felvenni, hanem a körület felét a kezdőponttól a bal, másik felét pedig jobb felé kell felvenni, hogy a zárpont körülbelől a körület közepére

e essék. Ekképen mind a két zárpont valószinűleg közelebb fog esni a valódi ponthoz, mintha a zárpont más sarokpontban választatnék.

2) A zárvonalat ee_1 felezni kell, s ezen pontot e' kell a valódi pont gyanánt tekinteni.

3) Az *abcde* részt úgy kell átváltoztatni, hogy az *ae* átló a kiigazított ae'-vel egyenlő legyen és azzal összeessék, a többi szögpontok metszékei pedig aránylag változzanak. E czélból az *ae* átlóra a *b, c, d* pontokból merőlegeseket kell húzni, s a metszéspontokból *m, n, p* a zárvonallal párhuzamosokat kell szerkeszteni, melyek az ae' átlót m', n', p' pontokban fogják metszeni. Ezen pontokból azután az ae' átlóra merőlegeseket kell felemelni, s a rendezőket változatlanul fel kell rakni, úgy hogy $bm = b'm'$, $cn = c'n'$, $dp = d'p'$ legyenek.

4) Hasonlóképen kell az $ahgfe_1$ részt is átváltoztatni $ah'g'f'e'$-re.

5) Ha a sokszög valamely más sokszög körületében lévő két ponthoz csatlakozik, akkor a kiigazitás a 259. ábrából látható. Az előbbi számokban adott utasitás szerint t. i. az *abcde* rész $ab'c'd'e'$-re, a $hgfe_1$ rész pedig $hg'f'e'$-re változik.

Ezen szerkesztésnek mathematikai törvényét így lehet kifejezni: hogy mind a metszékek, mind a rendezők változásai a metszékekkel közel egyenes viszonyban állanak.

6) Midőn a sokszögnek körülete igen szakgatott, előre és hátra nyúló öblökkel van megrakva, a fentebbi eloszlatás módja nem ád egészen kielégitő eredményt; hanem czélszerűbb a zárhibát a 207. §. útmutatása szerint az oldalak vetületei közt osztani el aránylagosan; a ráforditott munkát az eredmény jobb volta eléggé megjutalmazza. A műtétel folyamatja következő. Miután az előbbiek szerint a sokszög az asztallal felvétetett, s a zárpont a körület közepe táján választatván, a papiroson az n és n' zárpontok származtak: felézzük ezen zárvonalat az N pontban, húzzunk a kezdő pontból N-hez egy átlót, melyet metszéktengelynek tekintünk; mérjük meg léptékkel sorjában a szögpontok összrendezőit, és mindegyiket a következőből levonván, számitsuk ki a különbségeket, ezek sorjában az oldalaknak az összrendező tengelyekre gondolt vetületeit, vagyis a p és q-kat fogják szolgáltatni. Legyenek a tengelyen felül lévő részben:

az n pont összrendezői y_n, x_n,
az N pontéi » o, x_N,
a p-k számszerinti összege P,
a q-k » » Q, akkor:

$$\Delta p_0 = y_n \frac{p_0}{P}, \qquad \Delta q_0 = (x_n - x_N)\frac{q_0}{Q},$$

$$\Delta p_1 = y_n \frac{p_1}{P}, \qquad \Delta q_1 = (x_n - x_N)\frac{q_1}{Q},$$

. . . .

. . . .

tehát a kijavított vetületek lesznek:

$$p'_0 = p_0 - \Delta p_0, \qquad q'_0 = q_0 - \Delta q_0,$$

$$p'_1 = p_1 - \Delta p_1, \qquad q'_1 = q_1 - \Delta q_1,$$

. . . .

. . . .

Hasonló képletek származnak a tengelyen alól lévő részre nézve is, azon különbséggel, hogy itt

y_n helyett y_n'

x_n » x_n' P, és Q helyett az illető értékeket kell tenni. A $\frac{p}{P}$, $\frac{q}{Q}$ törtek mind a két részben igenleges értékeket nyernek, mert azoknak számlálóik és nevezőik mindig egyenlő jelekkel bírnak; tehát a pótlékok jelei mindig az y_n, $x_n - x_N$, y_n', $x'_n - x_N$ jeleivel egyenlők.

P. o. Legyenek egy 11 szögnek megmért összrendezői ezek:

a felső részben:		az alsó részben:	
$y_0 =$ 0⁰	$x_0 =$ 0⁰	$y_0 =$ 0⁰	$x_0 =$ 0⁰
$y_1 =$ 80·2	$x_1 = -$ 78·8	$y_{10} = -$ 55·3	$x_{10} = -$ 59·7
$y_2 =$ 146·5	$x_2 =$ 43·5	$y_9 = -$ 118·9	$x_9 =$ 20·3
$y_3 =$ 125·7	$x_3 =$ 322·8	$y_8 = -$ 83·0	$x_8 =$ 284·2
$y_4 =$ 67·3	$x_4 =$ 298·7	$y_7 = -$ 105·6	$x_7 =$ 390·2
$y_5 =$ 1·2	$x_5 =$ 407·3	$y_6 = -$ 58·1	$x_6 =$ 435·0
		$y_5' = -$ 1·2	$x_5 =$ 402·7

ezekből lesznek a vetületek:

$p_0 =$ 80·⁰2	$q_0 = -$ 78·⁰8	$p_0 = -$ 55·⁰3	$q_0 = -$ 59·⁰7
$p_1 =$ 66·3	$q_1 =$ 122·3	$p_{10} = -$ 63·6	$q_{10} =$ 80·0
$p_2 = -$ 20·8	$q_2 =$ 279·8	$p_9 =$ 35·9	$q_9 =$ 263·9
$p_3 = -$ 58·4	$q_3 = -$ 24·1	$p_8 = -$ 22·6	$q_8 =$ 106·0
$p_4 = -$ 66·1	$q_4 =$ 107·6	$p_7 =$ 47·8	$q_7 =$ 44·8
		$p_6 =$ 56·9	$q_6 = -$ 32·3

Itt a felső részben

$y_n = y_5 = 1{\cdot}{}^{0}2,\ x_N = \frac{x_5 + x_5'}{2} = 404{\cdot}{}^{0}5$, tehát $x_n - x_N = 1{\cdot}{}^{0}8$,

$P = 291^0,\quad Q = 612^0,$

az alsó részben pedig $y_n' = y_5' = -1{\cdot}{}^{0}2,\quad x_n' - x_N = -1{\cdot}{}^{0}8,$

$P' = 282^0,\quad Q' = 587^0.$

Ezekből a pótlékok következő értékeket nyernek:

a felső részben:		az alsó részben:	
$\Delta p_0 = 0{\cdot}{}^{0}34$	$\Delta q_0 = 0{\cdot}{}^{0}23$	$\Delta p_0 = -0{\cdot}{}^{0}24$	$\Delta q_0 = -0{\cdot}{}^{0}19$
$\Delta p_1 = 0{\cdot}\ 27$	$\Delta q_1 = 0{\cdot}\ 36$	$\Delta p_{10} = -0{\cdot}\ 28$	$\Delta q_{10} = -0{\cdot}\ 24$
$\Delta p_2 = 0{\cdot}\ 08$	$\Delta q_2 = 0{\cdot}\ 82$	$\Delta p_9 = -0{\cdot}\ 15$	$\Delta q_9 = -0{\cdot}\ 81$
$\Delta p_3 = 0{\cdot}\ 24$	$\Delta q_3 = 0{\cdot}\ 08$	$\Delta p_8 = -0{\cdot}\ 09$	$\Delta_8 = -0{\cdot}\ 32$
$\Delta p_4 = 0{\cdot}\ 27$	$\Delta q_4 = 0{\cdot}\ 31$	$\Delta p_7 = -0{\cdot}\ 20$	$\Delta_7 = -0{\cdot}\ 14$
		$\Delta p_6 = -0{\cdot}\ 24$	$\Delta_6 = -0{\cdot}\ 10$

és a kijavított vetületek lesznek:

$p_0' = 79{\cdot}{}^{0}86$	$q_0' = -79{\cdot}{}^{0}03$	$p^{0\prime} = -55{\cdot}{}^{0}06$	$q_0' = -59{\cdot}{}^{0}51$
$p_1' = 66{\cdot}\ 03$	$q_1' = 121{\cdot}\ 94$	$p_{10}' = -63{\cdot}\ 32$	$q_{10}' = 80{\cdot}\ 24$
$p_2' = -20{\cdot}\ 88$	$q_2' = 278{\cdot}\ 48$	$p_9' = 36{\cdot}\ 05$	$q_9' = 264{\cdot}\ 71$
$p_3' = -58{\cdot}\ 64$	$q_3' = -24{\cdot}\ 18$	$p_8' = -22{\cdot}\ 51$	$q_8' = 106{\cdot}\ 32$
$p_4' = -66{\cdot}\ 37$	$q_4' = 107{\cdot}\ 29$	$p_7' = 47{\cdot}\ 70$	$q_7' = 44{\cdot}\ 94$
		$p_6' = 57{\cdot}\ 14$	$q_6' = -32{\cdot}\ 20$

végre a kijavított összrendezők:

$y_0 = 0^0$	$x_0 = 0^0$	$y_0 = 0^0$	$x_0 = 0^0$
$y_1 = 79{\cdot}\ 86$	$x_1 = -79{\cdot}\ 03$	$y_{10} = -55{\cdot}\ 06$	$x_{10} = -59{\cdot}\ 51$
$y_2 = 145{\cdot}\ 89$	$x_2 = 42{\cdot}\ 91$	$y_9 = -118{\cdot}\ 38$	$x_9 = 20{\cdot}\ 73$
$y_3 = 125{\cdot}\ 01$	$x_3 = 321{\cdot}\ 39$	$y_8 = -82{\cdot}\ 33$	$x_8 = 285{\cdot}\ 44$
$y_4 = 66{\cdot}\ 31$	$x_4 = 297{\cdot}\ 21$	$y_7 = -104{\cdot}\ 84$	$x_7 = 391{\cdot}\ 76$
$y_5 = 0{\cdot}$	$x_5 = 404{\cdot}\ 5$	$y_6 = -57{\cdot}\ 14$	$x_6 = 436{\cdot}\ 70$
		$y_5 = -0$	$x_5 = 404{\cdot}\ 5$

7) Ha a zárhiba nagyobb, mintsem megengedhető volna, akkor valahol tetemesebb hibát ejtettünk a mérésben, s azt fel kell keresni és ki kell igazítni. Ezen feladat a sokszögtanban bőven tárgyaltatott, csak azt kell megemlítni, hogy az asztallali felvételnél a zárpontban fekvő szög soha sem lévén meghatározva, a feloldás a 48. és 49. §. útmutatása szerint eszközöltetik.

IV. SZAKASZ.

Egész határok felvétele.

221. §.

Az előbbi szakaszban megösmerkedtünk azon módokkal, melyek egyes telkek felvételénél alkalmazásba jőnek. Ugyanazok szolgálnak zsinórmértékül nagyobb kiterjedésű területek, sőt egész határok felvételénél is; csak azt kell megjegyezni, hogy a mérési elkerülhetlen hibák összehalmozódásának megakadályozása végett nem elég a telkeket sorjában egymásután felvenni, hogy ekképen a részekből az egész keletkezzék; hanem megfordítva először az egész határt kell szemügyre venni, ezt czélszerű helyeken kitűzött rudak és csóvák által a legegyszerűbb alakokra felbontani, nem vévén figyelembe egyelőre az egyes telkek mezsgyéit, hanem a pontok kitűzésében a lehető legpontosabb meghatározhatási képességet tartván szem előtt, s ezen pontoknak egymáshozi fekvését nagy tökélylyel meg kell határozni. Azután ezen főpontokhoz a körülötte fekvő dülőket és egyes telkeket hozzá kell csatolni és felvenni; csak annyira terjeszkedvén ki minden főpont körül, mig az elkerülhetlen hibák összehalmozódása észrevehető nem lesz. Ekképen a főpontok ugyanannyi középpontokat, a hozzá kapcsolt területek pedig egymástól többé-kevésbbé független csoportokat fognak képezni, melyek a főpontok közötti összefüggés által forrnak össze egy egészszé.

A munka ezen elrendezését röviden úgy szoktuk kifejezni, hogy a felvételnél mindig nagyból kicsinybe kell dolgozni.

222. §.

A szerint, a mint a felvétel különböző eszközökkel és módok szerint vitetik véghez, az egész határnak egyszerű alakokra való felbontása is különböző módon történik.

1) Ha a határ felvételére valamely szögmérő eszközt akarunk használni: akkor kiválólag a metszési mód ajánlkozván a felvételre, a csóvákat olyan helyeken kell kitűzni, melyek a

legtágasabb kilátást szolgáltatják. Ezen csóvák egymással egyenes vonalak által összekötve gondoltatván, egy háromszöghálónak sarkpontjait fogják képezni, melynek oldalait, ha egy alapvonal és a szükséges számú szögek megmérettek, mind számítás, mind szerkesztés utján meg lehet határozni. Ezen műtétel, mely a △ hálónak felvételét czélozza, háromszögelésnek neveztetik. Ez vagy háromszögtani, ha a szögmérés theodolit vagy astrolabium által történik, a pontok fekvésének meghatározása pedig háromszögtani számítás által eszközöltetik; vagy pedig rajzoló — graphicai, — ha az egész műtétel a mérőasztallal szerkesztés által vitetik véghez.

2) Ha a felvételt csupán láncz és szögtűkör által akarjuk eszközölni: akkor a határt legczélszerűbben párlagokra lehet beosztani, melyeknek oldalai vagy egyenlők, vagy a körülményekhez képest különbözők is lehetnek. A párlagok sarkpontjai rudakkal megjelöltetnek, azoknak oldalai pedig a közelökbe eső pontok felvételére tengelyekül használtatnak.

A párlagok helyett háromszögeket is lehet egyszerű alakok gyanánt használni, melyeknek oldalai közvetlen mérés által meghatároztatnak, s a részletes felvételre metszéktengelyekül használtatnak.

223. §.

A háromszögelést nagyobb pontossággal kell véghezvinni, mint a részletes felvételt. Ugyanis a háromszögháló oldalai sokkal nagyobbak lévén, mint a részletes felvétel pontjainak egymástóli távjai, az elkerülhetlen hibák pedig a vonalak hosszaival körülbelől egyenes viszonyban növekedvén, a pontok fekvésében megeshető hibák is sokkal nagyobbak lesznek, mint a részletes felvételnél úgy, hogy míg ezek a rajzolatban még alig vehetők észre, a háromszögelésben már tetemes értékeket nyernek, melyeket elhanyagolni nem lehet. Vegyük fel p. o., hogy a részletes felvételnél a pontok közép távja $= 50^0$, s a mérés pontossága $= {}^1/_{1000}$, akkor ezen hossznak közép hibája $= 0 \cdot {}^0 05$, olyan kis mennyiség, melyet már a 40, 50-es léptékekről levenni alig lehet, s a térképen el lehet hanyagolni. A háromszögelésben a középtáv alig lesz kisebb 500^0-nél, ennek ${}^1/_{1000}$ része $= 0 \cdot {}^0 5$, tehát olyan nagy mennyiség, melyet a fentebbi léptékeken már elhanyagolni nem szabad. Ha tehát az 500^0 hosszú vonalat olyan pontossággal akarjuk meghatározni, hogy a hiba a léptéken még észrevehető ne legyen, azaz 0·⁰05-et meg ne haladjon, azt nem $^1/_{1000}$, hanem $^1/_{10000}$ részig kell pontosan meghatározni, minthogy 0·⁰05, 500⁰-nek $^1/_{10000}$ részét teszi. Ezt csak úgy lehet elérni, ha mind a hossz-, mind a szögmérésekben tökéletesebb szerkezetű műszereket használunk, vagy ha csak középszerű műszerekkel rendelkezhetnénk, a háromszögek elrendezését úgy intézzük, hogy a mérési hibák befolyása a lehető legkisebb mértékre szorittassék.

224. §. A $\triangle$-ek legjobb alakja.

Legyenek egy $\triangle$ oldalai *a, b, c,* annak szögei *A, B, C,* akkor ezek közt következő egyenletek léteznek:

$$a \sin B - b \sin A = o,$$
$$a \cos B + b \cos A - c = o.$$

Tegyük fel, hogy ezen mennyiségek mindnyájan változnak, akkor lesznek:

$$(a + \triangle a) \sin(B + \triangle B) - (b + \triangle b) \sin(A + \triangle A) = o,$$
$$(a + \triangle a) \cos(B + \triangle B) + (b + \triangle b) \cos(A + \triangle A) - (c + \triangle c) = o.$$

Ezen egyenleteket kifejtvén, az előbbieket figyelembe vévén és a másodrendű kis mennyiségeket elhagyván, lesznek:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle a . \sin B + \triangle B . a \cos B - \triangle b . \sin A - \triangle A . b \cos A = o \\ \triangle a \ \cos B - \triangle B . a \sin B + \triangle b . \cos A - \triangle A . b \sin A - \triangle c = o \end{array}\right\} \odot$$

1) Tegyük fel most, hogy a háromszögben egy oldal *c*, és a mellette fekvő két szög *A*, *B* van megmérve; ezeknek hibái $\triangle c$, $\triangle A$, $\triangle B$ egymástól függetlenek, mert abból, hogy egyikben hiba történt, nem következik, hogy a másikban is hibának kellett történni; ellenben az *a*, *b* oldalakban származó hibák $\triangle a$, $\triangle b$ már azoknak függvényei lesznek.

A $\triangle a$ meghatározása végett küszöböljük ki $\triangle b$-t a két egyenletből, akkor lesz:

$$\triangle a = \frac{\triangle c \sin A}{\sin C} + \frac{\triangle A . b}{\sin C} + \triangle B . a \operatorname{Cotg} C,$$

vagy ha ezen egyenletet *a*-val osztjuk, némű átváltoztatás után lesz:

$$\frac{\triangle a}{a} = \frac{\triangle c}{c} + \triangle A \frac{\sin B}{\sin A \sin C} + \triangle B \operatorname{Cotg} C.$$

Hasonlóképen lesz, ha *A*, *B*, *a*, *b*-t egymással felcseréljük:

$$\frac{\triangle b}{b} = \frac{\triangle c}{c} + \triangle B . \frac{\sin A}{\sin B \sin C} + \triangle A . \operatorname{Cotg} C.$$

Vegyük ezen egyenletekben $\triangle A$ és $\triangle B$ helyett a gyakorlatban előjöhető legnagyobb hibát, melyet ω-val akarunk jelölni, akkor a legroszabb eset áll elő, s a képletek, melyek az a és b oldalakban a hosszegységre eső hibát jelentik, ezekké válnak:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\triangle a}{a} &= \frac{\triangle c}{c} + \omega\left(\frac{sin B}{sin A\; sin C} + cotg C\right) \\ \frac{\triangle b}{b} &= \frac{\triangle c}{c} + \omega\left(\frac{sin A}{sin B\; sin C} + cotg C\right)\end{aligned}\right\} \;☽$$

A háromszög-hálózat akkor lesz legczélszerűbben berendezve, ha az elkerülhetlen hibák minden irányban egyformán terjednek, azaz:

$$\text{ha}\quad \frac{\triangle a}{a} = \frac{\triangle b}{b},$$

ez pedig ezen feltételtől függ: $\frac{sin B}{sin A} = \frac{sin A}{sin B}$, vagy $A = B$.

Az egyenszárú háromszög tehát a legelőnyösebb alak a hálózat képzésére, s ezek közt is azon eset, midőn $C = 90$, a legkedvezőbb, mert akkor az ω együtthatója a legkisebbé lesz, u. m: $= 1$. De ezen alaknak azon hátránya van, hogy az alapháromszögre következő háromszögek mindinkább kisebbedő oldalakat kapnak, s ez által az egy bizonyos tér betöltésére szükséges háromszögek száma mód nélkül szaporodik. Ez okból az egyenoldalú háromszöget vesszük minta-alaknak, melynél az ω együtthatója ugyan egy kissé nagyobb az előbbinél, t. i. $= \sqrt{3}$, de a különbség nem nagy. Sőt ha a szögek 2—3" pontossággal megméretnek, a háromszögeket egyenlőtlen oldalakkal is lehet venni, melyekben a szögeknek 30 és 120° közt mindenféle értékök lehet.

Ha p. o. $A = 30^0$, $B = 120^0$, $C = 30^0$, $\omega = 5''$, akkor $\frac{\triangle a}{a}$-nak az ω-tól függő tagja még csak 0·0001, a $\frac{\triangle b}{b}$-é pedig csak 0·00007. Ellenben ha $\omega = 1'$, akkor annak befolyása a hosszegységre az oldalakban az egyenoldalú háromszögnél is nagyobb 0·0005-nél.

2) Ha a háromszögben két oldal s a bezárt szög b, c, A, van megmérve, akkor $\triangle b$, $\triangle c$, $\triangle A$ független mérési hibák, $\triangle a$ pedig ezeknek függvénye fog lenni, és meghatároztatik, ha a fentebbi ⊙ egyenletekből $\triangle B$ kiküszöböltetik. E szerint rövid átváltoztatás után lesz:

$$\triangle a = \triangle b.\, cos C + \triangle c.\, cos B + \triangle A.\, b\, sin C \ldots \;☽',$$

vagy $\triangle a = \frac{\triangle b}{b} . \, b \cos C + \frac{\triangle c}{c} . \, c \cos B + \triangle A . \, b \sin C$

Ha az oldalakat hibátlanoknak vesszük, akkor lesz:

$$\triangle a = \triangle A . \; b \sin C,$$

hol $b \sin C$ az A pontból az a oldalra húzható merőlegest jelenti. Mennél kisebb ezen merőleges hossza, annál kisebb lesz az a-ban eredő hiba; igen tompa háromszögben tehát a szögmérési hiba az oldalra igen csekély befolyást fog gyakorolni.

Ha a háromszögnek többi szögeiben eredő hibákat akarjuk meghatározni, az ⊙ egyenletekből $\triangle a$-t kell kiküszöbölni, és $\triangle B$-t keresni. Ekképen lesz:

$$\triangle B = \triangle b . \frac{\sin C}{a} - \triangle c \cdot \frac{\sin B}{a} - \triangle A \cdot \frac{b \cos C}{a} \ldots ♁$$

és ha B helyett C-t, b helyett pedig c-t teszünk, hasonlóképen lesz:

$$\triangle C = \triangle c . \frac{\sin B}{a} - \triangle b \cdot \frac{\sin C}{a} - \triangle A \cdot \frac{c \cos B}{a} \ldots ♁$$

Vegyük most a hibákat egyenkint szemügyre, tekintsük p. o. egyedül a b oldalt változandónak, a többi adatokat pedig változatlanoknak, akkor a $\triangle b \cdot \frac{\sin C}{a}$ értéke legnagyobb lesz, ha $C = 90^0$; mert akkor $\sin C$ legnagyobbá, a pedig legkisebbé válik, minthogy a merőleges távolság legkisebb. Ugyanaz áll a c oldalra nézve is, csak b helyett c-t, B helyett pedig C-t kell tenni. Az oldalakból eredő hibák a keresett szögekben tehát olyan háromszögeknél igen nagyok, melyekben a megmért szög A igen kicsiny, és $b = c$, mert ekkor mind a igen kicsiny, mind pedig $B = C$ közel $= 90^0$ fog lenni, tehát a Sinus a legnagyobb értékéhez közel fog lenni. Ha pedig az A szöget vesszük egyedül hibásnak, s a többi adatokat változatlanoknak tekintjük: akkor $\triangle B$ legnagyobb lesz, ha $C = 180^0$, azaz: $A = o$, mert akkor $\cos C = -1$ legnagyobbá, $a = c - b$ pedig legkisebbé válik. Hasonló eredményhez jutunk $\triangle C$-re nézve, ha B-t C-vel, és b-t c-vel felcseréljük.

225. §. Theodolittali háromszögelés.

1) Ha a háromszögelés theodolittal történik, s a szögek 2—3″-nyi pontossággal megméretnek, a háromszögháló pontjait nagyobb részint előmetszés által, azaz egy oldal és a két mellette

fekvő szög által lehet megállapítni, s csak a fő háromszögekben kell mind a három szöget megmérni, hogy a mérési hibákat el lehessen oszlatni. Alapnak egy $400-500^0$ hosszú vonal elegendő, de azt rúddal kell megmérni, hogy az az egésznek $^1/_{10000}$ részéig biztos legyen. A szögpontokat a dombok és magaslatok tetején kell felállítni, kivévén az alapvonal végpontjait, melyeket lapályos helyen úgy kell választani, hogy a hosszmérést minden akadály nélkül és kényelmesen lehessen eszközölni. Ha az alapvonal valamely ferde síkon feküdnék, annak hajlásszögét a theodolittal meg kell mérni, hogy a ferde hossznak vizszintes vetületét meg lehessen határozni. Különös figyelmet kell fordítni a tornyok meghatározására, mivel azok a helység térképének az országos felmérésbe illesztésére csatlakozási pontokul szolgálnak. Azokat tehát legalább is két háromszög által kell megállapítni, s a közös oldalak értékei közt a számtani középet kell venni. A munka folyamatja a 260. ábrából megérthető. Itt a fő háromszög *CDI*, melynek alakja az egyenoldalúhoz közelít, s melynek mind a három szögét meg kell mérni, s a hibát el kell oszlatni. A *CD* oldalt az *E*, *F*, *G*, ð, *I* pontokra nézve alapvonalnak lehet tekinteni; a *C*, *D* pontokban tehát a sugároknak a *CD* vonallal képzett szögeit kell megmérni, hogy azok a △-ek feloldására közvetlen használhatók legyenek. Hasonlóképen lehet a *DI* oldalt a *H*, *K*, ð, *M* pontokra nézve alapul venni, s a szögeket a *D*, *I* pontokban a *DI* oldallal kell megmérni. A még hátra lévő *N*, *L* pontokat az *MI* alapvonalból lehet meghatározni. E végre az *M* pontnak megállapitását szigorúbban kell eszközölni, mint a háló többi közönséges pontjaiét, s a *DIM* △-ben az *M* szöget is meg kell mérni, hogy ekképen mind a három szög meg lévén mérve, a hibát el lehessen oszlatni. E szerint ha a *CD* oldal hossza ösmeretes, a háromszögeket egymásután fel lehet oldani. Hátra van még tehát annak a megmért *AB* alapvonalbóli meghatározása. E czélból az *ABC* és *ABD* △-ekben minden szöget meg kell mérni, s az oldalakat kiszámítván, mind a *CBD*, mind a *CAD* △-eket fel kell oldani, melyekben a *BC*, *BD*, *AC*, *AD* oldalak az előbbi számitásból ösmeretesekké lettek, a *DBC* és *DAB* szögek pedig a *B* és *A* pontokban megmért szögekből vannak összetéve. Vagy pedig az *ACBD* □-ben meg kell mérni a *D* és *C* szögpontokban az *AB* átlóval átellenben lévő szögeket, valamint az *AD* és *AC* sugároknak a CD átlóval képzett szögeit, s a □-et fel lehet oldani. A torony a CD♁ és DI♁ △-ekből lévén meghatározva, a D♁ hosszra nézve két eredmény áll elő, melyek közt a számtani középet kell venni.

2) Ha a △-ek mind fel vannak oldva, az összrendezők kiszámitásához kell fogni. Ezeknek kezdőpontjául legczélszerűbb egy olyan pontot választani, melyből a legtöbb szögpontok felé húzattak irányvonalak. Ilyen itt a D pont. Tengelyül akármely irányban húzott egyenes vonalat lehet választani; de szokásban van az x tengelyt a helység tornyán keresztül menő csillagászati déllővel párhuzamosnak venni, melynek északi ága $+X$, déli pedig $-X$-el jelöltetik; az Y tengely pedig a X tengelyre merőlegesen állittatik. Miképen kell az X tengely irányát meghatározni, később fogjuk látni; most tegyük fel, hogy az meg van határozva, s annak valamely fő △ oldallal, p. o. DC-vel képzett szöge $= \omega$, mely Azimut nevet visel, meg van mérve. Gondoljunk most a szögpontokból az x tengelyre merőlegeseket, akkor az összrendezők meghatározására szükséges tudni a sugárok hosszait és azoknak azimutjait vagy a tengelytőli elhajlásait. Az elsők a △-ek feloldása által már meghatároztattak, az utóbbiakat pedig a megmért szögekből könnyen össze lehet állítni, ha az egész háromszögelésről egy kis rajz készíttetik, mely a pontok fekvését szem elé állítja. Jelen esetben a

DA sugár azimutja $= -(ADC$ szög $+ \omega)$
DE » » $= -(EDE$ » $+ \omega)$
DF » » $= -(FDC$ » $+ \omega)$
DG » » $= -(GDC$ » $+ \omega)$
DC » » $= -\omega$
DB » » $\begin{cases} = -\omega + CDB \text{ szög, vagy} \\ = ADB \text{ szög} + DA \text{ azimutja} \end{cases}$
D♁ » » $= -\omega + CD$♁ szög
DI » » $= -\omega + CDI$ »
DM » » $= DI$ azimutja $- MDI$ szög
DH » » $= DI$ » $+ IDH$ »
DK » » $= DI$ » $+ IDK$ »

Ezen pontokra nézve azután

$x =$ sugár hossza $\times$ az azimut cosinusával
$y =$ sugár hossza $\times$ az azimut sinusával.

Hátra vannak még az N, L pontok, melyekre D-ből irányvonalak nem húzattak. Ezek összrendezőinek meghatározása végett gondoljunk az M pontból az X, Y tengelyekkel párhuzamosokat, melyeket X', Y'-el akarunk jelölni; ekkor az MD sugárnak az MX' tengelytőli elhajlása, azaz a DMX' szög $= DM(-X)'$ szög $+ 180^0$, azaz: az M kezdőpontban az MD vonal azimutja $=$ a D kezdőpontban DM azimutjával $+ 180^0$. Tehát:

az ML azimutja $= MD$ azimutja $- DMI - IML$ szögek,
» MN » $= MD$ » $- DMI - IMN$ »

és az összrendezők x', y' ugyananzon törvények szerint számittatnak ki, mind feljebb láttuk. De ezen összrendezőket, az összehasonlítás könnyitése végett, az előbbi kezdőpontra D kell visszavinni. E végett ha az N pontnak a D pontra vonatkozó összrendezőit x_N, y_N, az M pontra nézve x'_N, y'_N, az M pont összrendezőit pedig x_M, y_M-nek nevezzük, lesz:

$$x_N = x'_N + x_M,$$
$$y_N = y'_N + y_M,$$

mely egyenletekben a mennyiségek jeleit figyelembe kell venni.

Példa. Legyenek a megmért szögek ezek:

Szögek	Pótlék	Szögek	Pótlék
A álláspont:		$EDC = 23^0\ 55'\ 24''$	
$BAD = 61^0\ 20'\ 42''$	$-2''.0$	$CD\mathfrak{b} = 36\ \ 8\ \ 28$	
$CAB = 55\ \ 31\ \ 25$	$+2.\ 3$	$CDI = 58\ \ 42\ \ 16$	$-1''.3$
B álláspont:		$MDI = 37\ \ 12\ \ 22$	$+1.\ 0$
		$IDK = 25\ \ 38\ \ 35$	
$ABC = 70\ \ 24\ \ 38$	$+2.\ 3$	$IDH = 61\ \ 7\ \ 52$	
$DBA = 83\ \ 15\ \ 17$	$-2.\ 0$	I álláspont:	
C álláspont:		$DIC = 73\ \ 45\ \ 30$	$-1.\ 3$
$BCA = 54\ \ 3\ \ 50$	$+2.\ 3$	$DIM = 58\ \ 42\ \ 8$	$+1.\ 0$
$DCG = 42\ \ 5\ \ 20$		$HID = 30\ \ 20\ \ 10$	
$DCF = 71\ \ 36\ \ 53$		$KID = 74\ \ 35\ \ 27$	
$DCE = 109\ \ 49\ \ 45$		$MIN = 25\ \ 6\ \ 36$	
$\mathfrak{b}CD = 45\ \ 3\ \ 5$		$MIL = 75\ \ 31\ \ 18$	
$ICD = 77\ \ 32\ \ 18$	$-1.\ 3$	$DI = 27\ \ 46\ \ 0$	
D álláspont.		M álláspont:	
$ADB = 35\ \ 24\ \ 7$	$-2.\ 0$	$IMD = 84\ \ 5\ \ 27$	$+1.\ 0$
$GDC = 84\ \ 2\ \ 0$		$NMI = 78\ \ 30\ \ 25$	
$FDC = 48\ \ 31\ \ 15$		$LMI = 43\ \ 9\ \ 38$	

Az alapvonal hossza $AB = 435 \cdot {}^{0}38$.

A DC vonal az X tengelylyel $\omega = 6^0\ 10'\ 20''$ szöget zár be.

Az ABC △-ben a szögek összege $= 179^0\ 59'\ 53''$, tehát hiányzik $7''$, ezt három részre osztván, esik egyre pótlékul $+ 2 \cdot'' 3$.

Az ABD △-ben a szögek összege $= 180^0\ 0'\ 6''$, tehát felesleg $6''$, ezt három részre osztván, esik egyre $- 2''$.

A CDI △-ben a szögek összege $= 180^0\ 0'\ 4''$, tehát felesleg $4''$, ebből esik egy szögre $- 1 \cdot'' 3$.

Végre a DIM △-ben a szögek összege $= 179^0\ 59'\ 57''$, tehát hiányzik $3''$, ebből esik egy szögre $+ 1''$.

A szögeket tehát kiigazítván, a △-ek feloldása következő eredményt szolgáltat:

△	Adott darabok.	Keresett darabok.
ABC	$AB = 435 \cdot {}^{0}38$ $A = 55^0\ 31'\ 27 \cdot'' 3$ $B = 70\ 24\ 40 \cdot 3$ $C = 54\ 3\ 52 \cdot 3$	$BC = 443 \cdot {}^{0}2778$ $AC = 506 \cdot 5980$
ABD	$AB = 435 \cdot 38$ $A = 61\ 20\ 40$ $B = 83\ 15\ 15$ $D = 35\ 24\ 5$	$BD = 659 \cdot 5088$ $AD = 746 \cdot 3582$
BCD	$BC = 443 \cdot 2778$ $BD = 659 \cdot 5088$ $B = 153\ 39\ 55 \cdot 3$	$D = 10\ 32\ 27 \cdot 3$ $C = 15\ 47\ 37 \cdot 4$ $CD = 1074 \cdot 92$
ACD	$AC = 506 \cdot 5980$ $AD = 746 \cdot 3582$ $A = 116\ 52\ 7 \cdot 3$	$D = 24\ 51\ 37 \cdot 7$ $C = 38\ 16\ 15$ $CD = 1074 \cdot 92$
ECD	$CD = 1074 \cdot 92$ $C = 109\ 49\ 45$ $D = 23\ 55\ 24$	$E = 46\ 14\ 51$ $DE = 1399 \cdot 89$
FCD	$CD = 1074 \cdot 92$ $C = 71\ 36\ 53$ $D = 48\ 31\ 15$	$F = 59\ 51\ 52$ $DF = 1179 \cdot 47$
GCD	$CD = 1074 \cdot {}^{0}92$ $C = 42^0\ 5'\ 20''$ $D = 84\ 2\ 0$	$G = 53^0\ 52'\ 40''$ $DG = 891 \cdot {}^{0}97$

△	Adott darabok.	Keresett darabok.
CD♁	*CD* = 1074· 92 *C* = 45 3 5 *D* = 36 8 28	♁ = 98 48 27 *D*♁ = 769· 84
CDI	*CD* = 1074· 92 *C* = 77 32 16·7 *D* = 58 42 14·7 *I* = 43 45 28·7	*DI* = 1517· 60
DI♁	*DI* = 1517· 60 *D* = 22 33 46·7 *I* = 20 6 40	♁ = 137 19 33·3 *D*♁ = 769· 83
DIK	*DI* = 1517· 60 *D* = 25 38 35 *I* = 74 35 27	*D* = 79 45 58 *DK* = 1486· 70
DIH	*DI* = 1517· 60 *D* = 61 7 52 *I* = 30 20 10	*H* = 88 31 58 *DH* = 766· 75
DIM	*DI* = 1517· 60 *D* = 37 12 23 *I* = 58 42 9 *M* = 84 5 28	*DM* = 1303· 69 *IM* = 922· 58
IML	*IM* = 922: 58 *I* = 75 31 18 *M* = 43 9 38	*L* = 61 19 4 *ML* = 1018 22
IMN	*IM* = 922· 58 *I* = 25 6 36 *M* = 78 30 25	*N* = 76 22 59 *MN* = 402· 82

Az összrendezők kiszámítása következő táblából látható:

A pontok nevei	A sugár hossza	Azimut	*x*	*y*
	Kezdő pont: *D*.			
D	—	—	0	0
C	1074·⁰92	— 6° 10′ 20″	1068·⁰69	— 111·⁰57
A	746· 36	— 31 1 58	639· 53	— 384· 77
B	659· 51	4 22 7	657· 59	50· 24
E	1399· 89	— 30 5 44	1211· 17	— 701· 96
F	1179· 47	— 54 41 35	681· 68	— 962· 53
G	891· 97	— 90 12 20	— 3· 20	— 891· 96
♁	769· 84	29 58 8	666· 91	584· 56
I	1517· 60	52 31 55	923· 18	1204· 51
H	766· 75	113 39 47	— 307· 74	702· 28
K	1486. 70	78 10 30	304· 66	1455· 15
M	1303· 60	15 19 32	1257· 33	344· 57
	Kezdő pont: *M*, a tengelyek az előbbiekkel párhuzamosak:			
M	—	—	0	0
L	1018· 22	68 4 26	380· 21	944· 57
N	402· 82	32 43 39	338· 87	217· 78
	Ezek a *D* kezdő pontra áttétetvén, következő eredményeket adnak:			
	Kezdő pont *D*.			
L	—	—	1637· 54	1289· 14
N	—	—	1596· 20	562· 35

226. §. Astrolabiummali háromszögelés.

1) Ha a mérnöknek csupán egy jobb szerkezetü astrolabium áll rendelkezésére, melyen legfeljebb 1′-et lehet leolvasni: akkor a háromszögeket egymással összefüggésben a legjobb alakhoz közelitőleg kell kitűzni (261. ábra), hogy a hibák befolyása a legkisebb mértékre szorittassék; az alapvonalat legalább olyan hosszúnak kell venni, minő a △ oldalak középhossza (700—800⁰);

különösen pedig a $\triangle$-eknek minden szögeit meg kell mérni, hogy a mérési hibákat el lehessen oszlatni. A tornyok tengelyeibe eső szögeket is meg kell mérni, ha szintén kényteleníttetnénk is azokat csúcson kivül mérni meg, s utólagosan tenni át a torony tengelyére. A torony tengelyét annak belsejébe a szögmérő által kivülről lehet levetítni s két oldalról kitűzni, hogy az áttételi adatokat kellő pontossággal meg lehessen mérni.

2) A szögmérés bevégeztetvén, a hibák kiegyenlítéséhez kell fogni. Ezt egész szigorúsággal a legkisebb négyzetösszegek elmélete szerint kellene véghezvinni; de ez tulságos munkába kerülvén, a gyakorlatra nézve elég közelítéssel következő utat lehet követni.

a) Minden $\triangle$-ben a szögek összege 180°-ot tévén, a különbséget a szögek közt egyenlően el kell osztani.

b) Ha több $\triangle$-ek egy pont körül feküsznek és azt egészen körülfogják: a közös pontban összeszögellő szögek összegének 360°-t kell adni; a különbséget tehát a szögek közt el kell osztani. Ez által az *a*) alatti kiigazitás egy kis változást szenved, s a középső szögekhez adott pótlékokat a körületi szögekben ellenkező pótlékok által kell ellensúlyozni.

c) Néha megtörténik, hogy egy pontban összeszögellő két oldal közt két vagy több rendbeli háromszögek feküsznek; az ezen oldalak közt befoglalt szögek összegeinek egyenlőknek kell lenni.

Milyen rendet kell ezen kiigazitásokban követni, az a körülményektől függ, s az eredmény mindig más fog lenni a szerint, a mint egyik vagy másik úton indulunk. Mennél kisebbek a pótlékok, annál jobb az eredmény, s a legvalószinűbb kiegyenlítés az volna, melyben a pótlékok négyzeteinek összege legkisebb. Legtanácsosabb a $\triangle$ háló közepéből kiindulni s a szélek felé haladni; ekképen a hátramaradt hibák befolyása csekélyebb fog lenni.

Egy példából az egész műtétel könnyen érthető lesz. Jeleljük a szögek értékeit a szögpontok neveivel, hozzájok csatolván mutatóul a $\triangle$-ek neveit, melyeket a folyó számokkal 1, 2, 3 . . . 14 akarunk jelölni, s nevezzük a szögek összegének 180°-tóli eltéréseit ε-nak, akkor *a*) szerint következő egyenletek származnak:

$A_1 + C_1 + E_1 - 180^0 = \varepsilon_1$		$\frac{\varepsilon_1}{3}$-t,
$A_2 + E_2 + F_2 - 180 = \varepsilon_2$		$\frac{\varepsilon_2}{3}$ »
$A_3 + F_3 + G_3 - 180 = \varepsilon_3$		$\frac{\varepsilon_3}{3}$ »
$A_4 + G_4 + D_4 - 180 = \varepsilon_4$		$\frac{\varepsilon_4}{3}$ »
$A_5 + D_5 + B_5 - 180 = \varepsilon_5$	tehát	$\frac{\varepsilon_5}{3}$ »
$A_6 + B_6 + C_6 - 180 = \varepsilon_6$	a	$\frac{\varepsilon_6}{3}$ »
$\eth_7 + C_7 + A_7 - 180 = \varepsilon_7$	szögekből	$\frac{\varepsilon_7}{3}$ »
$\eth_8 + A_8 + D_8 - 180 = \varepsilon_8$	egyenként	$\frac{\varepsilon_8}{3}$ »
$\eth_9 + D_9 + H_9 - 180 = \varepsilon_9$	le kell	$\frac{\varepsilon_9}{3}$ »
$\eth_{10} + H_{10} + K_{10} - 180 = \varepsilon_{10}$	vonni	$\frac{\varepsilon_{10}}{3}$ »
$\eth_{11} + K_{11} + I_{11} - 180 = \varepsilon_{11}$		$\frac{\varepsilon_{11}}{3}$ »
$\eth_{12} + I_{12} + M_{12} - 180 = \varepsilon_{12}$		$\frac{\varepsilon_{12}}{3}$ »
$I_{14} + M_{14} + L_{14} - 180 = \varepsilon_{14}$		$\frac{\varepsilon_{14}}{3}$ »
$L_{15} + M_{15} + N_{15} - 180 = \varepsilon_{15}$		$\frac{\varepsilon_{15}}{3}$ »

Vegyük most szemügyre az 5, 6 és 7, 8 $\triangle$ párokat, ezekben *c*) szerint: $A_5 - \frac{\varepsilon_5}{3} + A_6 - \frac{\varepsilon_6}{3}$-nek egyenlőnek kellene lenni $A_7 - \frac{\varepsilon_7}{3} + A_8 - \frac{\varepsilon_8}{3}$-el. Nevezzük a különbséget $\varkappa$-nak, akkor $^1/_2\varkappa$-t a nagyobbikból le kell vonni, a kisebbikhez pedig hozzá kell adni; tehát az egyes szögekre esik pótlékul $^1/_4\varkappa$, a B, C, D, $\eth$ szögeire pedig $^1/_8\varkappa$, melyet az A-hoz kapcsolt pótlékkal mindig ellenkező jellel kell venni, hogy az *a*) szerinti kiigazitás el ne romoljék. E szerint

$$\left.\begin{array}{l}\text{az 5)}\\ \text{» 6)}\\ \text{» 7)}\\ \text{» 8)}\end{array}\left\{\begin{array}{c}\text{három-}\\ \text{szögek}\\ \text{szögei}\\ \text{kiigazítva}\\ \text{lesznek:}\end{array}\right\}\begin{array}{l} A_5-\frac{\varepsilon_5}{3}-\frac{\varkappa}{4}, D_5-\frac{\varepsilon_5}{3}+\frac{\varkappa}{8}, B_5-\frac{\varepsilon_5}{3}+\frac{\varkappa}{8},\\ A_6-\frac{\varepsilon_6}{3}-\frac{\varkappa}{4}, B_6-\frac{\varepsilon_6}{3}+\frac{\varkappa}{8}, C_6-\frac{\varepsilon_6}{3}+\frac{\varkappa}{8},\\ A_7-\frac{\varepsilon_7}{3}+\frac{\varkappa}{4}, C_7-\frac{\varepsilon_7}{3}-\frac{\varkappa}{8}, \mathfrak{H}_7-\frac{\varepsilon_7}{3}-\frac{\varkappa}{8},\\ A_8-\frac{\varepsilon_8}{3}+\frac{\varkappa}{4}, \mathfrak{H}_8-\frac{\varepsilon_8}{3}-\frac{\varkappa}{8}, D_8-\frac{\varepsilon_8}{3}-\frac{\varkappa}{8},\end{array}\right.$$

Továbbá a *b*) szerint:

$A_1-\frac{\varepsilon_1}{3}+A_2-\frac{\varepsilon_2}{3}+A_3-\frac{\varepsilon_3}{3}+A_4-\frac{\varepsilon_4}{3}+A_5-\frac{\varepsilon_5}{3}-\frac{\varkappa}{4}+A_6-\frac{\varepsilon_6}{3}-\frac{\varkappa}{4}-360=0$-nak kellene lenni. Nevezzük a különbséget δ nak, akkor azt az 1, 2, 3, 4 $\triangle$-ekre el kell osztani, az 5 és 6 szögeket változatlan hagyván, hogy az előbbi kiigazítás el ne romoljék. Esik tehát az A pontban egy szögre $\frac{\delta}{4}$, a körületi szögekre pedig $\frac{\delta}{8}$, hogy az *a*) szerinti kiigazítás helyt álljon. E szerint:

$$\left.\begin{array}{l}\text{az 1)}\\ \text{» 2)}\\ \text{» 3)}\\ \text{» 4)}\end{array}\left\{\begin{array}{c}\text{három-}\\ \text{szögek}\\ \text{szögei}\\ \text{kiigazítva}\\ \text{lesznek:}\end{array}\right\}\begin{array}{l} A_1-\frac{\varepsilon_1}{3}-\frac{\delta}{4}, C_1-\frac{\varepsilon_1}{3}+\frac{\delta}{8}, E_1-\frac{\varepsilon_1}{3}+\frac{\delta}{8},\\ A_2-\frac{\varepsilon_2}{3}-\frac{\delta}{4}, E_2-\frac{\varepsilon_2}{3}+\frac{\delta}{8}, F_2-\frac{\varepsilon_2}{3}+\frac{\delta}{8},\\ A_3-\frac{\varepsilon_3}{3}-\frac{\delta}{4}, F_3-\frac{\varepsilon_3}{3}+\frac{\delta}{8}, G_3-\frac{\varepsilon_3}{3}+\frac{\delta}{8},\\ A_4-\frac{\varepsilon_4}{3}-\frac{\delta}{4}, G_4-\frac{\varepsilon_4}{3}+\frac{\delta}{8}, D_4-\frac{\varepsilon_4}{3}+\frac{\delta}{8}.\end{array}\right.$$

Végre szintén *b*) szerint:

$\mathfrak{H}_7-\frac{\varepsilon_7}{3}-\frac{\varkappa}{8}+\mathfrak{H}_8-\frac{\varepsilon_8}{3}-\frac{\varkappa}{8}+\mathfrak{H}_9-\frac{\varepsilon_9}{3}+\mathfrak{H}_{10}-\frac{\varepsilon_{10}}{3}+\mathfrak{H}_{11}-\frac{\varepsilon_{11}}{3}+\mathfrak{H}_{12}-\frac{\varepsilon_{12}}{2}+\mathfrak{H}_{13}-360^0=0$-nak kellene lenni, de legyen a különbség δ': akkor ezt a 9, 10, 11, 12, 13 $\triangle$-ekre kell elosztani; tehát a $\mathfrak{H}$ pontban egy szögre esik $\frac{\delta'}{5}$, a körületben fekvő szögekre pedig a fentebbieknél fogva $\frac{\delta'}{10}$, tehát:

$$\left.\begin{array}{r} \text{a } 9) \\ \text{» } 10) \\ \text{» } 11) \\ \text{» } 12) \\ \text{» } 13) \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c}\text{háromszögek szögei ki-}\\ \text{igazítva lesznek:}\end{array}\right\} \begin{array}{lll} \eth_9 - \frac{\varepsilon_9}{3} - \frac{\delta'}{5}, & D_9 - \frac{\varepsilon_9}{3} + \frac{\delta'}{10}, & H_9 - \frac{\varepsilon_9}{3} + \frac{\delta'}{10}, \\ \eth_{10} - \frac{\varepsilon_{10}}{3} - \frac{\delta'}{5}, & H_{10} - \frac{\varepsilon_{10}}{3} + \frac{\delta'}{10}, & K_{10} - \frac{\varepsilon_{10}}{3} + \frac{\delta'}{10}, \\ \eth_{11} - \frac{\varepsilon_{11}}{3} - \frac{\delta'}{5}, & K_{11} - \frac{\varepsilon_{11}}{3} + \frac{\delta'}{10}, & I_{11} - \frac{\varepsilon_{11}}{3} + \frac{\delta'}{10}, \\ \eth_{12} - \frac{\varepsilon_{12}}{3} - \frac{\delta'}{5}, & I_{12} - \frac{\varepsilon_{12}}{3} + \frac{\delta'}{10}, & M_{12} - \frac{\varepsilon_{12}}{3} + \frac{\delta'}{10}, \\ \eth_{13} - \frac{\delta'}{5} & & \end{array}$$

A 14) 15) $\triangle$-ekben csak az *a*) szerinti kiigazítás van helyén, tehát:

$$\begin{array}{r} \text{a } 14) \\ \text{» } 15) \end{array} \left\{\begin{array}{l}\text{háromszögek}\\ \text{szögei kiiga-}\\ \text{zítva lesznek:}\end{array}\right\} \begin{array}{lll} I_{14} - \frac{\varepsilon_{14}}{3}, & M_{14} - \frac{\varepsilon_{14}}{3}, & L_{14} - \frac{\varepsilon_{14}}{3}, \\ L_{15} - \frac{\varepsilon_{15}}{3}, & M_{15} - \frac{\varepsilon_{15}}{3}, & N_{15} - \frac{\varepsilon_{15}}{3}. \end{array}$$

3) Ha a kiegyenlités rendjét megváltoztatjuk, az előbbitől egy kissé eltérő eredményhez jutunk. Az 5, 6, 7, 8 $\triangle$-ek szögei az előbbi módon állíttatnak elő, mivel azoknál a kiegyenlítés rendjét okszerűen változtatni nem lehet; menjünk át tehát az A és $\eth$-ban összeszögellő szögekre.

A *b*) szerint:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 - \frac{\varepsilon_5}{3} - \frac{\varkappa}{4} + A_6 - \frac{\varepsilon_6}{3} - \frac{\varkappa}{4} - 360 = 0 \\ \eth_9 + \eth_{10} + \eth_{11} + \eth_{12} + \eth_{13} + \eth_7 - \frac{\varepsilon_7}{3} - \frac{\varkappa}{8} + \eth_8 - \frac{\varepsilon_8}{3} - \frac{\varkappa}{8} - 360 = 0 \end{array}\right\}\text{nak}$$

kellene lenni. Nevezzük a különbségeket δ, δ'-nek: akkor ezeket az első 4, illetőleg 5 szögre kell elosztani, a két utolsó változatlan maradván. Azok tehát lesznek:

$$A_1 - \frac{\delta}{4},\ A_2 - \frac{\delta}{4},\ A_3 - \frac{\delta}{4},\ A_4 - \frac{\delta}{4},\ \eth_9 - \frac{\delta'}{5},\ \eth_{10} - \frac{\delta'}{5},$$
$$\eth_{11} - \frac{\delta'}{5},\ \eth_{12} - \frac{\delta'}{5},\ \eth_{13} - \frac{\delta'}{5}.$$

Végre az *a*) szerint $A_1 - \frac{\delta}{4} + C_1 + E_1 - 180 = 0$-nak kellene lenni; de legyen a különbség ε_1: akkor ezt a C és E szögekre el kell osztani, az A változatlan maradván, s hasonlóképen kell a többi $\triangle$-ekben működni.

Tehát a kiigazított szögek lesznek:

$$
\begin{array}{llllll}
\text{az} & 1) & \triangle\text{-ben} & A_1 - \frac{\delta}{4}, & C_1 - \frac{\varepsilon_1}{2}, & E_1 - \frac{\varepsilon_1}{2}, \\
\text{a} & 2) & \text{»} & A_2 - \frac{\delta}{4}, & E_2 - \frac{\varepsilon_2}{2}, & F_2 - \frac{\varepsilon_2}{2}, \\
\text{»} & 3) & \text{»} & A_3 - \frac{\delta}{4}, & F_3 - \frac{\varepsilon_3}{2}, & G_3 - \frac{\varepsilon_3}{2}, \\
\text{»} & 4) & \text{»} & A_4 - \frac{\delta}{4}, & G_4 - \frac{\varepsilon_4}{2}, & D_4 - \frac{\varepsilon_4}{2}, \\
\text{»} & 9) & \text{»} & \eth_9 - \frac{\delta'}{5}, & D_9 - \frac{\varepsilon_9}{2}, & H_9 - \frac{\varepsilon_9}{2}, \\
\text{»} & 10) & \text{»} & \eth_{10} - \frac{\delta'}{5}, & H_{10} - \frac{\varepsilon_{10}}{2}, & K_{10} - \frac{\varepsilon_{10}}{2}, \\
\text{»} & 11) & \text{»} & \eth_{11} - \frac{\delta'}{5}, & K_{11} - \frac{\varepsilon_{11}}{2}, & I_{11} - \frac{\varepsilon_{11}}{2}, \\
\text{»} & 12) & \text{»} & \eth_{12} - \frac{\delta'}{5}, & I_{12} - \frac{\varepsilon_{12}}{2}, & M_{12} - \frac{\varepsilon_{12}}{2}, \\
\text{»} & 13) & \text{»} & \eth_{13} - \frac{\delta'}{5}. & &
\end{array}
$$

A 14) és 15) △-ek kiigazítása az előbbi számban találttal azonos

Ezen két különböző kiegyenlítést egymással összehasonlítván, a melyikben a pótlékok számszerinti értékeinek összege kisebb, azt kell megtartani, s a △-ek feloldására használni.

4) A △-ek feloldása ilyen renddel történik. Az *AB* alapvonalból kiindulván, keressük sorjában az *AC*, *AE* és *AF* vonalakat. Ezután ismét *AB*-re menvén vissza, a másik oldalról keressük az *AD*, *AG* és *AF* vonlakat. Ekképen *AF* kétképen határoztatván meg, a különbségből a mérés pontosságát meg lehet itélni. Ezután keressük az $A\eth$ hosszát elébb az *AC*, azután az *AD* oldalból, s a két eredmény közötti számtani középet vegyük a $\eth$ körül fekvő △-ek feloldásában alapvonalul. Ekképen a $\eth D$, $\eth H$, $\eth K$, $\eth I$, $\eth M$, *IM*, *ML*, *MN*, oldalak egymásután elő fognak állani.

5) A pontok összrendezőinek meghatározása végett válaszszuk az *A*-t kezdő pontul, gondoljunk ezen keresztül a torony déllőjéhez párhuzamost, melyet metszék-tengelynek tekintünk. Nevezzük az $A\eth$ fővonal azimutját ω-nak: akkor ha a kiigazított szögeket a mérés által nyertektől egy vonással akarjuk megkülönböztetni, következő kifejezések származnak (lásd 225. §.).

$$x_{♁} = A♁ \,.\, cos\omega,$$
$$x_C = AC \,.\, cos(\omega - A_7'),$$
$$x_B = AB \,.\, cos(\omega - A_7' + A_6'),$$
$$x_D = AD \,.\, cos(\omega - A_7' + A_6' + A_5'),$$
$$x_G = AG \,.\, cos(\omega - A_7' + A_6' + A_5' + A_4'),$$
$$x_F = AF \,.\, cos(\omega - A_7' + A_6' + A_5' + A_4' + A_3'),$$
$$x_E = AE \,.\, ocs(\omega - A_7' + A_6' + A_5' + A_4' + A_3' + A_2'),$$

$$y_{♁} = A♁ \,.\, sin\omega,$$
$$y_C = AC \,.\, sin(\omega - A_7'),$$
$$y_B = AB \,.\, sin(\omega - A_7' + A_6'),$$
$$y_D = AD \,.\, sin(\omega - A_7' + A_6' + A_5'),$$
$$y_G = AG \,.\, sin(\omega - A_7' + A_6' + A_5' + A_4'),$$
$$y_F = AF \,.\, sin(\omega - A_7' + A_6' + A_5' + A_4' + A_3'),$$
$$y_E = AE \,.\, sin(\omega - A_7' + A_6' + A_5' + A_4' + A_3' + A_2').$$

Tekintsük most a következő pontokra nézve ♁-t kezdő pontnak, gondoljuk a tengelyeket az előbbiekkel párhuzamosoknak, akkor a 225. §. 2. szerint a $♁A$ vonal azimutja ω' egyenlő lesz az $A♁$ vonal azimutjával $+ 180^0$, s a pontok összrendezői, melyeket egy vonással akarunk megkülönböztetni, lesznek:

$$x_H' = ♁H \,.\, cos[\omega' - (♁_8' + ♁_9')],$$
$$x_K' = ♁K \,.\, cos[\omega' - (♁_8' + ♁_9' + ♁_{10}')],$$
$$x_I' = ♁I \,.\, cos[\omega' - (♁_8' + ♁_9' + ♁_{10}' + ♁_{11}')],$$
$$x_M' = ♁M \,.\, cos[\omega' - (♁_8' + ♁_9' + ♁_{10}' + ♁_{11}' + ♁_{12}')],$$

$$y_H' = ♁H \,.\, sin[\omega' - (♁_8' + ♁_9')],$$
$$y_K' = ♁K \,.\, sin[\omega' - (♁_8' + ♁_9' + ♁_{10}')],$$
$$y_I' = ♁I \,.\, sin[\omega' - (♁_8' + ♁_9' + ♁_{10}' + ♁_{11}')],$$
$$y_M' = ♁M \,.\, sin[\omega' - (♁_8' + ♁_9' + ♁_{10}' + ♁_{11}' + ♁_{12}')].$$

Ezután a hátra lévő pontokra nézve M-et vesszük öszrendezők kezdő pontjának, s a tengelyeket szintén párhuzamosan fektetvén az előbbiekhez, az $M♁$ azimutja ω'' egyenlő lesz a $♁M$ azimutjával $+ 180^0$, tehát az összrendezők, melyeket két vonással fogunk megkülönböztetni, lesznek:

$$x_L'' = ML \,.\, cos[\omega'' - (M_{12}' + M_{14}')],$$
$$x_N'' = MN \,.\, cos[\omega'' - (M_{12}' + M_{13}' + M_{14}')],$$
$$y_L'' = ML \,.\, sin[\omega'' - (M_{12}' + M_{14}')],$$
$$y_N'' = MN \,.\, sin[\omega'' - (M_{12}' + M_{13}' + M_{14}')],$$

Végre a ♁, *M* pontokra vonatkozó összrendezőket az *A* pontra áttévén, az előbbi §. útmutatása szerint lesznek:

$$
\begin{aligned}
x_H &= x_H' + x_{♁}, & y_H &= y_H' + y_{♁}, \\
x_K &= x_K' + x_{♁}, & y_K &= y_K' + y_{♁}, \\
x_I &= x_I' + x_{♁}, & y_I &= y_I' + y_{♁}, \\
x_M &= x_M' + x_{♁}, & y_M &= y_M' + y_{♁}, \\
x_L &= x_L'' + x_M, & y_L &= y_L' + y_M, \\
x_N &= x_N'' + x_M, & y_N &= y_N'' + y_M.
\end{aligned}
$$

227. §. Szelvények.

Miután a szögpontok összrendezői meghatároztattak, a szelvények megállapitásához kell fogni. Kisebb határok térképei egy asztaltáblára is ráférnek; a nagyobbakéi több táblát vesznek igénybe, és egy olyan lap, melyre a határnak egy része felvétetik, s z e l v é n y n e k — Sectio — neveztetik.

A szelvények rendesen párlag alakban rendeztetnek egymás mellé, melyeknek hosszuk 25″, szélességök pedig 20″, noha az asztaltábla jóval nagyobb, úgy hogy a széleken 2″ széles karima üresen marad. Ha tehát a térkép kicsinyitése $1'' = m^0$ által fejeztetik ki, azon tér, mely egy asztaltáblára fér, $25m^0$ hosszú, és $20m^0$ széles. Ezen tér egyenes vonalak által van körülvéve, melyek, a hová esnek, a telkek mezsgyéit keresztül-kasul metszik, úgy hogy azoknak egy része egyik, más része pedig a másik szelvénybe esik. Ezen kellemetlen körülményt úgy lehet elhárítni, hogy a szelvények nem töltetnek be egészen a négyszög széleig, hanem természetes határok által vétetnek körül, minők p. o. az utak, árkok, mezsgyék stb. Ekképen ugyan egy kissé kevesebb tér fog egy lapra férni, de a telkek szétdarabolása, melyből tetemes hibák eredhetnek, elhárittatik.

1) Ha a szelvényeket párlag alakban egészen be akarjuk tölteni, rajzoljuk be egy kézi rajzba (260. ábra), mely a háromszögelést kis léptékben ábrázolja, a határ kerületét. E czélra már meglevő régi térképeket, szükség esetében a szemmérték szerinti felvételt elegendő pontossággal lehet használni. Ezután húzzunk a határszélek mellett az *X* és *Y* tengelyekkel párhuzamosokat, melyek egymást O_1-ben metszik; rakjuk fel ezen vonalak egyikére a szelvény hosszát $= 25m^0$, másikára annak szélességét $= 20m^0$ ugyanazon lépték szerint, melyben a kézi rajz készitve van, és húzzunk az előbbiekhez párhuzamosokat; ezek

párlagokat fognak egymás közt képezni, melyek az egyes szelvényeket ábrázolják, s ezen rajzban egy pillanatra látni lehet, melyik szelvénybe melyik pont esik. Hogy ezen szelvények fekvése megállapittassék, szükség az O_1 pontnak összrendezőit a kézi rajzban megmérni, a többi szögpontokéi azután egyszerű számitás által meghatározhatók. Tegyük fel p. o., hogy a felvételi lépték $1'' = 40^0$, tehát a szelvények hossza $= 1000^0$, szélessége $= 800^0$, s az

$$O_1 \text{ összrendezői } \xi_1 = -375^0, \quad \eta_1 = -1025^0,$$

akkor az

$$\begin{array}{llrcl}
O_2 & \text{metszékei} & \xi_2 = \xi_1 + 1000^0 & = & 625^0, \\
O_3 & \text{»} & \xi_3 = \xi_1 & = & -\ 375\ , \\
O_4 & \text{»} & \xi_4 = \xi_1 + 1000 & = & 625\ , \\
O_5 & \text{»} & \xi_5 = \xi_1 & = & -\ 375\ , \\
O_6 & \text{»} & \xi_6 = \xi_1 + 1000 & = & 625\ , \\
\text{az } O_2 & \text{rendezői} & \eta_2 = \eta_1 & = & -1025\ , \\
O_3 & \text{»} & \eta_3 = \eta_1 + \ 800^0 & = & -\ 225\ , \\
O_4 & \text{»} & \eta_4 = \eta_1 + \ 800 & = & -\ 225\ , \\
O_5 & \text{»} & \eta_5 = \eta_1 + 2.800 & = & -\ 575\ , \\
O_6 & \text{»} & \eta_6 = \eta_1 + 2.800 & = & -\ 575\ ,
\end{array}$$

E szerint a szelvények szögpontjainak összrendezői meg lévén határozva, a benne eső háromszögelési pontok összrendezőit a szelvények szögpontjára lehet áttenni, hogy a pontokat az asztaltáblára könnyebben fel lehessen rakni. Tekintsük tehát az I. szelvényben $O_1 O_2$-t x tengelynek, $O_1 O_3$-at pedig y tengelynek, s különböztessük meg az új összrendezőket a régiektől egy vonással, akkor lesz:

$$\begin{array}{ll}
x_G' = x_G - \xi_1 = \ 371 \cdot {}^0 80, & y_G' = y_G - \eta_1 = 133 \cdot {}^0 04, \\
x_F' = x_F - \xi_1 = 1056 \cdot 68, & y_F' = y_F - \eta_1 = \ 62 \cdot 47, \\
x_A' = x_A - \xi_1 = 1014 \cdot 53, & y_A' = y_A - \eta_1 = 640 \cdot 23.
\end{array}$$

Az F és A pontok tehát a szelvény határain kivül esnek, ha szinte ez a kézi rajzban azokon belül látszik is, de azért ráférvén a táblára, felrajzoltatnak, minthogy annál jobb, mennél több biztos pont van feltéve az asztalra.

Hasonlóképen a II. szelvényben, megtartván a tengelyek irányait, a pontok összrendezői lesznek:

$x_F{}' = x_F - \xi_2 = 56\cdot{}^{0}68,$ $y_F{}' = y_F - \eta_2 = 62\cdot{}^{0}47,$
$x_E{}' = x_E - \xi_2 = 586\cdot 17,$ $y_E{}' = y_E - \eta_2 = 323\cdot 04,$
$x_A{}' = x_A - \xi_2 = 14\cdot 53,$ $y_A{}' = y_A - \eta_2 = 640\cdot 23.$

A III. szelvényben lesznek:

$x_D{}' = x_D - \xi_3 = 375\cdot{}^{0}00,$ $y_D{}' = y_D - \eta_3 = 1025\cdot{}^{0}00,$
$x_B{}' = x_B - \xi_3 = 1032\cdot 00,$ $x_B{}' = x_B - \eta_3 = 275\cdot 24,$
$x_{♁}{}' = x_{♁} - \xi_3 = 1041\cdot 00,$ $y_{♁}{}' = y_{♁} - \eta_3 = 809\cdot 56.$

A IV. szelvényben lesznek:

$x_B{}' = x_B - \xi_4 = 32\cdot{}^{0}59,$ $y_B{}' = y_B - \eta_4 = 275\cdot{}^{0}24,$
$x_{♁}{}' = x_{♁} - \xi_4 = 41\cdot 91,$ $y_{♁}{}' = y \;\; - \eta_4 = 809\cdot 56,$
$x_C{}' = x_C - \xi_4 = 443\cdot 69,$ $y_C{}' = y_C - \eta_4 = 113\cdot 45,$
$x_M{}' = x_M - \xi_4 = 632\cdot 33,$ $y_M{}' = y_M - \eta_4 = 119\cdot 57,$
$x_N{}' = x_N - \xi_4 = 971\cdot 20,$ $y_N{}' = y_N - \eta_4 = 787\cdot 35.$

Az V. szelvényben lesznek:

$x_H{}' = x_H - \xi_5 = 67\cdot{}^{0}26,$ $y_H{}' = y_H - \eta_5 = 127\cdot{}^{0}28,$
$x_K{}' = x_K - \xi_5 = 679\cdot 66,$ $y_K{}' = y_K - \eta_5 = 880\cdot 15.$

A VI. szelvényben lesznek:

$x_I{}' = x_I - \xi_6 = 298\cdot{}^{0}18,$ $y_I{}' = y_I - \eta_6 = 629\cdot{}^{0}51,$
$x_N{}' = x_N - \xi_6 = 971\cdot 20,$ $y_N{}' = y_N - \eta_6 = -12\cdot 65,$
$x_L{}' = x_L - \xi_6 = 1012\cdot 54,$ $y_L{}' = y_L - \eta_6 = 714\cdot 14.$

2) Ha a szelvényeket természetes határokkal akarjuk környezni, azoknak megállapitását következőképen kell eszközölni. Rajzoljuk be a kézi rajzba a főbb utakat patakokat árkokat stb., ezek a határt kisebb-nagyobb szakaszokra dülőkre fogják osztani. Azután metszeni kell egy levél papirosból egy négyszöget, mely a szelvényt azon lépték szerint ábrázolja, melyben a kézi rajz készittetett, s ezt a rajzban egy szakasz felibe helyezvén, úgy hogy annak oldalai az összrendező tengelyekkel párhuzamosok legyenek, a szakasz pedig körülbelől a négyszög közepébe essék, rajzoljuk be a négyszög körületét és mérjük meg egy sarkpontnak összrendezőit ugyanazon léptékkel, melyben a kézi rajz készittetett. Ugyanaz ismételtetik a többi szakaszokra nézve is, úgy hogy annyi szelvény származik, a hány szakaszból áll a határ. Ekképen a szelvények meg lesznek állapitva. A megállapitás egymástól függetlenül történik, s a szelvények (261. ábra) a széleken egymást többé-kevésbbé takarni fogják, vagyis közös öveket képezni fognak, melyekbe a szakaszok határai esnek.

Megemlítendő, hogy a szelvények sarkpontjainak összrendezőit elég csak közelítve, vagy kerekszámmal meghatározni, mivel egy kis hiba azokban csak azon következést húzza maga után, hogy a felvett rész a szelvény keretjében egy kicsit oldalt mozdul, mi mindaddig ártalmatlan, mig a felveendő tér a táblára ráfér.

A szelvények sarkpontjai ekképen meg lévén határozva, a szelvénybe eső háromszögelési pontok összrendezőit az előbbi szám útmutatása szerint át lehet változtatni, úgy hogy a kezdő pont a szelvény sarkpontjába essék.

228. §. A pontok felrakása az asztaltáblára.

1) A pontok felrakása a szelvényben következőképen történik. Először egy 25" hosszú és 20" széles párlag rajzoltatik az asztaltáblára. Ezt legegyszerűbben az átló segitségével lehet eszközölni, melynek hossza $= \sqrt{25^2 + 20^2} = 32 \cdot'' 015$. Ezen mértéket t. i. egy rudas körzővel a léptékről levévén, a táblán keresztben feltesszük, s annak végpontjaiból 25" és 20" hosszú sugárokkal köríveket húzunk, melyek egymást a párlag másik két sarkpontjában fogják metszeni, s a munka helyes voltát onnan lehet megösmerni, hogy a nyert pontok közötti táv a fentebbi átlóval egyenlő. Czélszerű e czélra sárgarézből egy rámát készíttetni, melynek négy szögében a párlag sarkpontjai finom átfúrt lyukacskák által vannak megjelölve. Ezen lyukacskák egy vékony tűvel a táblára átszúratván, a párlag sarkpontjait nagy tökélylyel szolgáltatják.

Azután a párlag oldalait a nézgevonasz mellett rajzónnal egész szigorúsággal ki kell húzni, és a hosszabb oldalakat a körzővel 5, a rövidebbeket pedig 4 egyenlő részre osztván, a megfelelő osztálypontokon keresztül az oldalakhoz párhuzamos vonalakat kell húzni. Ezek által a szelvény csupa 5" oldalhosszú négyzetekre oszlik, melyekbe a beeső pontokat be lehet rajzolni, a négyzetek oldalait összrendező tengelyek gyanánt tekintvén.

2) A szelvények oldalainak beosztása szükségtelenné válik, ha a mérnöknek egy 30" hosszú rudas körző, vagy noniuslépték áll rendelkezésére. Ezekkel t. i. a szelvény keretjében a pontok összrendezőit közvetlen fel lehet rakni oly módon, hogy a metszékek a négyszögnek két átalellenben fekvő, a rendező pedig

annak másik két oldalára feltétetnek, s a megfelelő pontok egyenes vonalak által összeköttetvén, a metszéspont egy finom tűszúrással megjelöltetik. Ezen felrakás módja a legtökéletesebb, mivel a legegyszerűbb szerkezet által eszközöltetik, s a pontok meghatározásában 1—2 ezredrész hüvelyknyi pontosságot könnyen el lehet érni.

229. §. Rajzoló háromszögelés.

Az asztallali háromszögelést kétféleképen lehet véghezvinni; ugymint: általánosan, az egész határra nézve egy lapon, vagy külön-külön minden szelvényre nézve. Az első módot akkor kell használni, ha a határ négynél több szelvényt szolgáltat; mivel több szelvényeket csak úgy lehet hibátlanul egymással összekapcsolni, ha azoknak fekvése egy közös összrendező tengelyre vonatkozólag van meghatározva. Ellenben négy szelvényt kellő óvatossággal ilyen összrendező rendszer nélkül is össze lehet kapcsolni, a nélkül, hogy a csatlakozási vonalaknál észrevehető hiba mutatkoznék.

1) Az általános háromszögelés az asztallal így vitetik véghez: válasszunk a háromszögelésre nézve olyan kis léptéket, hogy az egész határ egy asztaltáblára ráférjen. Legyen p. o. a határ köztudomás szerint 9000 hold, melynek legnagyobb hossza körülbelől $= 4000^0$, szélessége pedig $= 3000^0$, akkor az asztal hosszában 1"-re esik $^{4000}/_{25} = 160^0$, széltében pedig $^{3000}/_{20} = 150^0$. Tehát $1'' = 160^0$ minden esetre elegendő kicsinyitést fog szolgáltatni. Válasszunk most egy lapályos helyen 800—1000⁰ hosszú alapvonalat *AB*, (262. ábra), ezt megmérvén, tegyük fel az asztalra olyan fekvésben, hogy a határ a táblára ráférjen, mit csak gyakorlás és edzett szemmérték által lehet eltalálni. Tűzzünk ki az alapvonaltól oldalt egy magasan álló helyen egy pontot *D*, melyben az alapvonal végpontjaiból jövő sugárok egymást közel 90^0 alatt metszik, a többi pontokat pedig a dombok és magaslatok tetején tűzvén ki. Ezután az asztalt az *A* pontban felállítván s az *AB* vonal után tájékozván, melynek irányában őrvonalkák húzattak, irányozzunk minden látható pont felé, minők *C*, *E*, *F*, *G*, *D*, *K*, ♁, és húzzunk a papiroson sugárokat őrvonalkákkal együtt. Innen az asztallal a *B* pontra menvén s azt a *BA* vonal után tájékozván, húzzunk a látható pontok *D*, ♁, *H*, *K*, *I*, *L*, *M*

felé sugárokat őrvonalkákkal együtt. Azután az asztallal a *D* pontra megyünk, tájékozván azt az *A* pont felé, s ellenőrizzük a tájékozást a *DB* iránynyal. Ha az eddigi műtétel kellő figyelemmel vitetett véghez, az irányzó vonasz éle az utóbbi vonalra helyeztetvén, az iránysík a *B* ponton fog keresztülmenni, vagy legalább az eltérés igen csekély fog lenni. A *D* pontban tehát a sugárok metszéspontját egy finom tűszúrással meg kell jelölni, s ebből minden látható pont felé, minő *G*, *F*, *E*, *C*, ♁, *M*, *L*, *I*, *K*, *H*, irányvonalakat kell húzni. Ezek közül némelyek már két előbbi sugár metszéspontján fognak keresztülmenni, mint p. o. ♁-nál, hol a sugárok egy pontban találkozván s a metszési szögek is jók lévén, a pontot át lehet szúrni. Mások, mint *K*-nál, rosz metszésszöget mutatván, a pontot elég biztosan meg nem határozzák, tehát azt átszúrni még nem szabad. Végre némelyek az első metszést, vagy épen az első sugárt szolgáltatják. Innen megyünk az asztallal egy olyan pontra, mely már legalább két sugár metszése által meg van határozva, de nem tökéletesen, s egy harmadik sugár által véglegesen mehatározható. Ilyen a *C* pont, melyben az asztalt *A* felé lehet tájékozni, *D* felől pedig ellenőrizni, és ♁-ból oldalt metszeni. Ekképen a sugárok jó szög alatt s egy pontban metszvén egymást, a metszéspontot át lehet szúrni, s az *E*, *F*, *G*, *H*, *I* pontok felé sugárokat kell húzni őrvonalkákkal együtt. Ezek közül *F*, *G*, *H*-ban három sugár jó metszésszög alatt találkozván, a pontokat át lehet szúrni. Innen az *E* pontba megyünk az asztallal azért, hogy azt az *F* pontból oldalt lehessen metszeni és átszúrni; azután pedig *I*-be, hol az asztalt *D* felé tájékozván, *B* és *C* felől ellenőrizvén, a pontot *H*-ból oldalt lehet metszeni és átszúrni. Innen *K*, *M*, *N*, *L* felé sugárokat húzván, az *M* pontot át lehet szúrni. Végre az asztalt *N*-ben felállitván s a pontot *M* felől oldalt metszvén, *L* felé kell irányozni, s a pontot átszúrni.

Az egész munka folyamatában következő szabályokat kell szem előtt tartani.

a) Az alapvonal mellett kitűzött pontban, mely a harmadik asztal-állást képezi, a metszésszögnek 90°-tól keveset kell különbözni, hogy a pont meghatározása két sugár metszése által lehető legtökéletesebb legyen.

b) Minden következő pontot legalább három sugár metszése által kell méghatározni, s a metszési szögeknek 60^0 alól nem szabad lenni. Két sugár metszése semmi biztosságot nem nyujt, mivel azok mindig metszik egymást, ha szinte hibások volnának is.

A harmadik sugárból eredő ellenőrzést már a harmadik álláspontban is lehet alkalmazni, ha az alapvonal közepe táján egy pont tűzetik ki a vonalban, s ennek fekvése az alap megmérése alkalmával meghatároztatik. Ez a táblára feltétetvén, az oldalmetszéshez a harmadik sugárt fogja szolgáltatni.

c) Ha az asztalt több pont felé lehet tájékozni, az elsőbb asztalállások felé intézett tájékozási vonalak nagyobb bizodalmat érdemelnek a későbbieknél; kivévén ha a távok tetemesen kisebbek volnának, midőn a hosszabb tájékozási vonalnak kell adni az elsőbbséget.

d) Mennél kevesebb asztalállással lehet a háromszögelést bevégezni, annál jobb eredményt lehet várni, mivel minden későbbi asztalállásban ujabb hibák követtetvén el, a tájékozás bizonytalanabb lesz.

e) Az irányzásra távcsöves vonaszt kell használni, hogy mind az irányzás, mind a tájékozás lehető legnagyobb tökélylyel eszközöltethessék, s a pontokat csak akkor kell átszúrni, ha a sugárok egy pontban találkoznak. Mert a lépték igen kicsiny lévén, a hibák igen nagy befolyást gyakorolnak. Ezért nem szabad az irányzásnál tűt sem használni, s a pontokat igen finom tűszúrással kell megjelölni, hogy azok a mathematikai pontokhoz közeledjenek.

2) Miután a pontok az asztallal felvétettek, a határ körülete berajzoltatik, s a szelvények beosztásához lehet fogni. E célból a helység tornyán keresztül menő déllő meghatároztatván, s annak iránya az asztaltáblára feltétetvén, az X tengelyül választatik. Ezután a határ körülete mellett az X és Y tengelyekhez párhuzamosok húzatván, a szelvények keretei a 227. §. útmutatása szerint legnagyobb szigorúsággal berajzoltatnak, és minden egyes négyszögbe eső pontok összrendezői, ezen négyszög két oldalát vevén fel tengelyül, a legnagyobb pontossággal megméretnek azon léptékkel, mely szerint a háromszögelés van szerkesztve, s egy jegyzőkönyvbe feliratnak. Ez azért történik, hogy ha idővel az asztal összehúzódnék s a méretek a papiroson változást szen-

vednének, az eredeti helyes méretek birtokában legyünk. Ezen pontokat azután minden egyes szelvényben azon lépték szerint kell felrakni, mely a részletek felvételére választatott, mely rendesen 3—4-szer nagyobb a háromszögelési léptéknél. Innen megérthető, hogy a szelvények beosztásában és a pontok összrendezőinek megmérésében a legnagyobb szigorúságot kell követni, mert minden hiba, mely a háromszögelésben elkövettetett, a részletes felvételben 3—4-szer nagyítva jön elő és igen szembetünővé lesz.

A pontok felrakása a szelvényekben azon módon történik, mint az a 228. §-ban előadatott; mivel egyre megyen, akár számitás, akár pedig a léptékkeli mérés által jutottunk az összrendezők ösmeretére.

230. §. Részletes háromszögelés.

1) A részletes háromszögelés az általánostól lényegesen nem különbözik. Abban is egy megmért alapvonalból kell kiindulni, de erre 500—600⁰ elegendő, mivel a pontok közötti közép táv ezen hosszat meg nem haladja. Különbség csak abban mutatkozik, hogy a lépték a részletes felvételi léptékkel azonos, minthogy a részletek mindjárt a háromszögelt táblára vétetnek fel. Ez okból a háromszögelés jobb eredményt fog szolgáltatni, minthogy a mérési hibák nagyobb léptéknél csekélyebb befolyással birnak. A szelvények mindig természetes határok által vétetnek körül, s egymáshoz képest olyan fekvést nyernek, hogy a felveendő dülők a táblára jól ráférjenek, (263. ábra), a köztök eddig feltételezett párhuzamosság pedig szükségtelen. A szelvények összeállitása végett szükséges a széleken pontokat tűzni ki, s ezeket a szelvényeken közösen felvenni, úgy hogy p. o. *a*, *b*, *c* az I. és II.; *c*, *d*, a II. és III.; *c*, *e*, *f* a III. és IV.; végre *c*, *g* az I. és IV. szelvények közt csatlakozási pontokul szolgálnak.

2) Minden szelvényre külön alapvonalakat kell mérni; de ha a helyiség ezt nem engedné, a pontokat egyik szelvény széléről a másikra át lehet rajzolni, s ezen pontok közötti hosszakat alapvonalak gyanánt lehet tekinteni. Ezen pontokat vagy derék-, vagy sarkösszrendezőkkel lehet felrakni.

Az első mód szerint a szélső pontokat *a*, *c* (az I. szelvényen) egyenes vonal által összekötvén, erre *b*-ből merőlegest húzunk;

ezután a II. szelvény szélén, kellő helyen az *ac* hosszat feltévén, a *b* összrendezőit berajzoljuk.

A második mód szerint felállítjuk az asztalt a még üres táblával a *D* pontban, választjuk a táblán a megfelelő *b* pontot kellő helyen, fordítjuk az asztalt, hogy a felveendő dülő a táblára ráférjen, és húzzunk *b*-ből *a* és *c* felé irányvonalakat, melyekre az első tábláról a *ba* és *bc* hosszakat körzővel felrakjuk. E szerint az *a*, *b*, *c* pontok át lesznek téve, és kiindulási pontokul használtathatnak. De minthogy a pontok meghatározása annál bizonytalanabb, mennél távolabb esnek az alapvonaltól s mennél több asztalállás által jutottunk hozzájok: ezen átrajzolt vonalak hosszai a valóságos hosszaktól egy kicsit különbözni fognak, s a második szelvényre áttétetvén, épen olyan hibára adnak okot, mintha az alapvonal roszul volna megmérve, azaz: a II. szelvény léptéke az I-étől egy kicsit különbözni fog. Ezért nem tanácsos a pontokat a második szelvényről a harmadikra ismét áttenni, hanem okvetetlen megmért alapvonalból kell kiindulni; különben az elkerülhetetlen hibák összehalmozódván, a léptékekben különböző szelvényeken érezhető különbség fogna mutatkozni.

3) Összehasonlítván egymással a háromszögelésnek különböző módjait, azt találjuk, hogy a háromszögtani háromszögelés mind a használandó léptéktől, mind a határ nagyságától független lévén, a legjobb eredményt szolgáltatja. Valóban theodolittal a hosszakban $^1/_{10000}$, astrolabiummal pedig $^1/_{4000}$ pontosságot könnyen el lehet érni. Ezért nagyobb fontosságú és kiterjedésű felvételeknél mindig ezt kell használni.

Az asztallali általános háromszögelés annál nagyobb hibáknak van kitéve, mennél kisebb a lépték, azaz: mennél nagyobb a határ. Azért czélszerűbb nagyobb kiterjedésű határokat két, körülbelől egyenlő részre osztani, és mindeniket külön háromszögelni. Ekképen a léptéket kétszer nagyobbnak lehet választani, s a hibák befolyása is azon viszonyban csökken.

A részletes háromszögelés kis határoknál a legczélszerűbb, mivel az legkevesebb előkészületeket igényel, és az eredmény pontossága a részletek felvételénél megkivántatóval egyenlő. Azért ez leggyakrabban is alkalmaztatik.

231. §. Előmunkálatok.

Mind a háromszögtani, mind az általános asztallali háromszögelés által csak kevesebb számú pontokat lehet megállapítni, ha a munkát rendkivül nehezítni nem akarjuk, úgy hogy egy szelvényre legfeljebb 3—4, sőt néha 1—2 esik. Szükség tehát azon a téren, melyre a szelvény esik, még több (10—12) rudat tűzni ki, úgy hogy minden kitünő ponton, mely a részletes felvételnél álláspontul szolgálhat, egy rúd legyen kitűzve.

1) Ha a felrakott pontok hozzáférhetők, akkor a többiek meghatározása a mérő asztallal épen úgy történik, mint a részletes háromszögelésnél előadatott. Csak azt kell megjegyezni, hogy a háromszögelést egészen be kell végezni, mielőtt a részletek felvételéhez fognánk, mert ha egyik vagy másik pontot félig meghatározva hagyjuk, azt később az asztaltábla változása miatt kellő tökélylyel meghatározni nem lehet, és igy kiindulási pontul sem lehet használni.

2) Ha az asztalon két vagy három hozzáférhetlen pont van felrakva, akkor uj pontokat a 212. és 213. §-ok útmutatása szerint lehet meghatározni.

3) Ha az asztalon csak egy pont van feltéve, akkor az asztalt egy szomszéd szelvényben eső látható pont felé kell tájékozni. Előbb tehát ezen vonal irányát a szelvény szélein meg kell határozni. Legyen a 264. ábrában m, n két szomszéd szelvényben eső pont, azoknak összrendezői a szelvények sarkpontjaiból O, O' számitva x, y és x', y' a szelvény oldalhosszai a, b, akkor az mn vonalat, s n-en keresztül az a oldalhoz párhuzamost húzván és az y rendezőt meghosszabítván, az npm, nqr és nst hasonló $\triangle$-ek származnak, melyek következő arányokat adnak:

$$mp : pn = qr : qn, \text{ vagy } y'-y : a-x+x' = qr : x'$$
$$mp : pn = st : ns, \quad \text{»} \quad y'-y : a-x+x' = st : a-x'$$

Ezekből a qr és st darabokat ki lehet számítni, és a szelvény szélein az illető helyeken fel lehet rakni. Ezen arányok a pontok fekvéséhez képest különböző módon alakulnak, de az előbbiek nyomán könnyen felállíthatók.

4) Hasonló módon lehet egy szelvényben két pontot összekötő vonalnak őrvonalkáit is kiszámítni, mi különösen akkor

fog szükséges lenni, ha a pontok nem igen távol esnek egymástól. Ezen esetben (265. ábra) az *mpn, mqr* és *nst* hasonló $\triangle$-ekből következő arányok folynak:

$$mp : pn = mq : qr, \text{ vagy } (x'-x) : (y'-y) = x : qr$$
$$mp : pn = st : sn, \text{ » } (x'-x) : (y'-y) = st : (b-y').$$

5) Legyen az asztalra egy egyetlen pont *n* (266. ábra) feltéve, és az asztal a 3) szerint tájékozva; hogy több pontot meg lehessen határozni, egy alapvonalat kell megmérni. Legyen ez *AB*, és húzzunk *N*-ből az *A*, *B*, pontok felé iránysugárokat. Ezután az a' pontot szabad szemmel felvévén, állítsuk fel az asztalt az *A* pontban, tájékozzuk *N* felé, irányozzunk *B* felé, s tegyük fel a sugárra az *AB* hosszát $a'b'$. Ha most b' a másik sugárra esik, akkor az a' pont el van találva, ellenkező esetben húzni kell $b'b \parallel na'$, és $ba \parallel b'a'$-val, ekkor *b* és *a* lesznek a *B* és *A*-nak megfelelő pontok a papiroson. Ekképen három pontra szert tévén, az ösmeretes módok szerint többeket is lehet meghatározni.

6) Ha valamely szelvénybe egy háromszögelési pont sem esnék, mi csak a határszéleken jöhet elő, hol a szelvénybe néha csak igen kis darabka esik a határ területéből: akkor a szelvény sarkpontjaiból, vagy a szelvények közös oldalában fekvő valamely meghatározott pontból kell kiindulni. E czélból a kiindulási pontokat a szomszéd szelvényben nagy figyelemmel fel kell venni, minthogy a csonka szelvény tájékozása ezen pontok helyes meghatározásától függ.

7) Végre ki kell tűzni a mezőn a szelvény sarkpontjait, hogy a mérnök felvétel közben magát a szelvény határai közt tarthassa. Erre nézve állítsuk fel az asztalt egy sarokhoz legközelebb eső háromszögelési pontban, tájékozzuk azt annak rendje szerint, s a vonasz élét az állás- és a szelvény sarkpontjához illesztvén, tűzzünk ki az iránysíkban egy rudat. Végre az állás- és sarkpont közötti távot a tábláról levévén s a léptékkel megmérvén, a hosszat a kitűzött vonalon a lánczczal lemérjük. Ekképen a sarkpont meg lesz határozva, és egy rúddal megjelöltetik. Ugyanezen műtétel ismételtetik a többi sarkpontokban is.

232. §. A háromszögelés megvizsgálása.

Az előbbi §-ban hallgatva feltettük, hogy a háromszögelési pontok helyesen vannak az asztaltáblára felrakva. De ez nem mindig van így, kivált ha a háromszögelés általánosan asztallal vitetett véghez, sőt a háromszögtani háromszögelésnél is jöhetnek elő hibák, melyek ritkán a szögmérésből, gyakrabban az összrendezők áttételéből, legtöbbnyire pedig azoknak felrakásából származnak. Mielőtt tehát a részletes háromszögelést meg lehetne kezdeni, szükséges a pontokat megvizsgálni, s a nagyobb hibákat felkeresvén kiigazítani, a kisebbeket pedig szerkesztés által eloszlatni.

I. Ha az asztalon 4 vagy több háromszögelési pont van feltéve, melyek közt legalább kettő *A*, *B* hozzáférhető, akkor az asztalt az *A* pontban felállitván s *B* felé tájékozván, a többi pontok felé irányvonalak húzatnak. Most többféle esetek jöhetnek elő, u. m.

a) Minden irányvonal az illető ponton megyen keresztül a papiroson. Akkor valószinűleg minden pont helyes, mivel nem valószinű, hogy valamely pontnak elmozdulása épen az illető sugár irányában történt volna, s ekképen az az észlelés elől elvonja magát. Egész biztosság végett a másik pontra *B* kell menni az asztallal, s azt *A* felé tájékozván, a többi pontok felé kell irányozni. Ekkor vagy minden irányvonal a papiroson a megfelelő ponton megyen keresztül, vagy egyik s másik egy kissé eltér; a sugárokat ilyenkor ki kell húzni, s a metszéspontokat kell a valóságos pontok gyanánt venni.

b) Minden sugár a megfelelő ponton megyen keresztül a papiroson, egyen kivül. Akkor ezen pont hibás, s az *A* és *B* pontokból előmetszés által határoztatik meg.

c) Minden sugár egyenlő szögeltérést mutat az illető pontból. Ekkor a tájékozási vonal, illetőleg a *B* pont hibás. Most tehát az asztalt egy másik pont *C* után kell tájékozni, s azt fogjuk találni, hogy minden sugár a megfelelő ponton megyen keresztül, kivévén *B*-t. E felé tehát irányvonalat húzunk s az asztalt *B* pontban felállítván, *A* felé tájékozzuk, s a megfelelő *b* pontot oldalmetszés által határozzuk meg.

d) Minden sugár más-más szögeltérést mutat. Ekkor vagy az *a* pont hibás, vagy minden pontban többkevesebb hiba van. Hogy ezt el lehessen dönteni, menjünk az asztallal a *B* pontra, tájékozzuk azt *C* felé, ha a többi sugárok mind az illető pontokon mennek keresztül, *A*-n kivül: akkor csak *a* hibás, s a hibát épen úgy lehet kijavítni, mint az előbbi szám alatt a *b* ponttal történt. Ha pedig az irányok itt sem találtatnak helyeseknek, akkor több hiba létezik. Tegyük fel, hogy a pontok kimozdulása az illető hosszaknak $^1/_{1000}$ részét meg nem haladja, akkor a hibát el lehet oszlatni; mi úgy történik, hogy az egymástól legtávolabb álló két pontot hibátlannak vesszük, s ezen vonalból mint alapból kiindulván, az *a*, *b* pontokat a 212. §. útmutatása szerint meghatározzuk; a többiek azután ezekből előmetszés által állapittatnak meg.

II. Ha az asztalon három pont van feltéve, melyek közül kettő *A*, *B* hozzáférhető: akkor az asztalt *A*-ban felállítván s *B* felé tájékozván, húzzunk *C* felé irányvonalakat. Most következő esetek állhatnak elő:

a) Az irányvonal a *c* ponton megyen keresztül. Ekkor (267. ábra) a *B* pontban az asztalt felállítván s *A* felé tájékozván, húzzunk *b*-n keresztül *C* felé irányvonalat; ha ez a *c* ponton megyen keresztül, minden rendben van; ha pedig az *ac* oldalt *c'*-ben metszi, akkor *cc'* darabot, ha az $< \frac{ac}{1000}$, felezni kell, s a felező pontból *c''*, *C* felé irányozni. Ez az *ab* oldalt *b''* pontban metszi, s a kijavított pontok *b''*, *c''* fognak lenni; a hiba tehát az *a* és *b* pontokra el fog oszlani.

b) Az irányvonal nem megyen a *c* ponton keresztül. Ekkor nem lehet eldönteni, hogy melyik pont hibás, hanem mindeniken kell egy kicsit igazítni, hogy egyre lehető csekély valtozás essék. Átmegyünk tehát az asztallal a *B* pontra, itt az asztalt *A* felé tájékozván, húzunk *C* felé irányvonalat; ha a sugár a *c* ponton megyen keresztül, akkor a *B* pont helyesen van meghatározva, s a hibát az előbbi pont útmutatása szerint *a* és *c* közt el kell osztani. Ha pedig a sugár *c* mellett menne el (268. ábra), akkor a metszéspontot *c'*, *c*-vel összekötvén, a *cc'* darabot, ha az $< \frac{ac}{1000}$-nél, felezvén, az előálló *c''* pontból a *b* és *a* pontokat oldalmetszés által kell meghatározni: ekképen a kijavított *a'*, *b'* pontok fognak előállani.

III. Ha az asztalon 4 vagy több pont van feltéve, de csak egyhez lehet férni, akkor az asztalt felállítván, s valamelyik pont felé tájékozván, a többiek felé irányvonalak húzatnak s épen azon esetek állhatnak elő, melyeket az I. alatt előszámláltunk. Az *a*) *b*) *c*) esetekben tehát az asztalt mindig helyesen lehet tájékozni, s legfeljebb egy pontot fogunk hibásnak találni. Most kitűzünk egy új pontot *M*, húzunk felé irányvonalat, s meghatározzuk a megfelelő *m* pontot oldalmetszés által. Ezen pontban azután mind azon sugárok találkoznak, melyek helyes pontoknak felelnek meg; ellenben a hibás pontokon keresztül húzott sugárok oldalt mennek el, és a hibás pontok véglegesen előmetszés által határoztatnak meg.

Ellenben ha a *d*) alatti eset forog fenn, akkor valószinűleg az álláspont hibás, noha a többiek is hibások lehetnek. Határozzuk meg tehát az *a* pontot a többiekből hátrametszés által, s ha négy sugár metszi egy pontban, akkor mind a négy megfelelő pont helyes, s az *a* pont ki van igazítva. Ha pedig csak három sugár metszi egymást, akkor még a három közül mindenik, tehát az álláspont is hibás lehet, mivel ha a hátrametszés szabályai szigorúan alkalmaztatnak, a sugároknak mindig egy pontban kell találkozni, ha szintén egyik vagy másik pont hibásan volna is feltéve az asztalra. Kitetszik ez a 213. §. 1 feloldásából, melyben a körök mindig metszik egymást, ha szintén a három adatott pont közül valamelyik rosz helyen állana is a papiroson, de a keletkező négyszög a mezeivel nem hasonló, ennélfogva a negyedik pont is hibás. Ellenőrzésül tehát mindig egy negyedik sugárra van szükség. E célból tűzzünk ki egy negyedik pontot *M* a mezőn, húzzunk felé a kiigazított *a* pontból iránysugarat, és határozzuk meg a megfelelő *m* pontot a papiroson oldalmetszés által. Ha ezen pontban mind a négy sugár metszi egymást, akkor a kiigazítás helyesen történt; ellenkező esetben nincs más mód, mint az egymástól legtávolabbi két pontot helyesnek venni, s ezekből a 212. §. szerint az *a* és *m* pontokat, s ezekből a többieket előmetszés által meghatározni.

IV. H a a z a s z t a l o n h á r o m p o n t v a n a d v a, d e k ö z ü l ö k c s a k e g y, *A* h o z z á f é r h e t ő, akkor az asztalt *A*-ban felállítván (269. ábra), s egy másik pont *B* felé tájékozván, a harmadik *C* felé irányvonalat húzunk. Ha ezen sugár a megfelelő ponton megyen keresztül, akkor valószinűleg minden pont helyes. Nagyobb biztosság végett tűzzünk ki a mezőn egy negyedik pontot *M*, húzzunk felé irányvonalat, s az asztalt *M*-ben felállítván, határozzuk meg az *m* pontot oldalmetszés által. Ekkor a sugárok vagy egy pontban találkoznak, s ekkor minden rendben van; vagy pedig két metszéspont *m*, *m'* áll elő: akkor az *mm'* darabot, ha az $< \frac{am}{1000}$-nél, felezni kell, s a középpontot kell valódi pontnak tekinteni; a *b* és *c* pontokat pedig előmetszés által ki kell igazítni.

Ha pedig a sugár nem a *c* ponton menne keresztül, akkor a hibát az *ab* és *ac* sugár közt el kell oszlatni, úgy hogy mind *b*, mind *c* egyenlő szögeltérést mutasson, a többit az előbbi szerint kell intézni.

V. Ha az asztalon 4 vagy több hozzáférhetlen pont van feltéve, akkor válasszunk a mezőn egy álláspontot, s határozzuk meg a papiroson megfelelő pontot hátrametszés által, s ha minden sugárok egy pontban metszik egymást, akkor valószinűleg minden rendben van. De ha csak három sugár metszi egymást, a negyedik pedig oldalt megyen el, akkor valamelyik pont hibás, s a legtávolabbi két pontot kell a 212. §. szerinti feloldásban kiindulásul venni.

VI. Ha három hozzáférhetlen pont van adva, akkor határozzunk meg egy negyediket hátrametszés, s ebből egy ötödiket oldalmetszés által. Ha ezen utóbbi pontban mind a négy sugár találkozik, akkor minden rendben van; ellenkező esetben a legtávolabbi két pontot kell hibátlannak tekinteni, s az előbbi számokban adott útmutatás szerint működni.

233. §. Azimut.

Feladat. Valamely állópontnak azimutját meghatározni.

Feloldás. 1) Állítsuk fel a Theodolitot egy tiszta derült napon azon álláspontban, melyre nézve az azimutokat meg kell határozni, és azt kellő módon vizszintessé tévén, irányozzuk a távcsőt azon pont felé, melynek azimutjáról van szó, s olvassuk le a vizszintes körön a mutatók állásait, melyeknek számtani közepét *b*-vel akarjuk jelölni. Ezután a szögmérőt nyugodtan hagyván, várjuk be azt éjt; ekkor nyissuk fel az Alhidadét, irányozzuk a távcsőt a keleti égen valamely tündöklő álló csillagra, úgy hogy az a szálak metszéspontján menjen keresztül, s olvassuk le a mutatók állásait mind a vizszintes, mind a magassági körön, melyeket

a és m-el jelelünk. Nagyobb biztosság kedveért még néhányszor ismételni kell ezen műtételt 4—5^m idő hézagokban s a leolvasásokat, melyeket mutatókkal fogunk egymástól megkülönböztetni, fel kell irni. Ezután meg kell várni, mig a csillag nehány óra mulva a nyugoti égen lemenő félben van; be kell állítni a magassági kör mutatóját az utolsó és legnagyobb magassági szögre, fordítni kell az Alhidadét, kisérvén a csillagot, mig az ismét tökéletesen a szálak metszéspontján megyen keresztül, s a vizszintes kör mutatójának állásait le kell olvasni, melyeket egy vonással fogunk ez előbbiektől megkülönböztetni, s igy sorjában folytani kell az észlelést minden magassági szögnél. Utoljára reggel be kell a távcsőt a tárgyra irányozni, s ha a munka jól sikerült, a leolvasás b' az elsőtől csak annyit fog különbözni, a mennyit egy szögmérésben még el lehet nézni. Ha most két ugyanazon magassági szögre vonatkozó a-ból a számtani középet vesszük: ez a déllő irányának felel meg, mivel az álló csillagok a déllőtől egyenlő távban egyenlő magasan állanak, és egyenlő, de ellenkező azimuttal birnak. Ezen eredményekből azután a számtani középet kell venni. Legyen a csillagon tett észleletek száma $2n$, akkor a déllő irányának megfelelő lelolvasás a vizszintes körön lesz $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_1' + a_2' + a_3' + \cdots}{2n}$,

s ezt a két b számtani közepéből levonván, a keresett azimut, déltől nyugot felé $+$ jellel számítva, lesz:

$$\text{Azimut} = \frac{b + b'}{2} - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_1' + a_2' + \cdots}{2n}$$

2) A 225. §. háromszögelésében az azimutot a D álláspontban különösen a C pontra nézve kell megmérni, s ω ottan a déllő északi ágától van számítva. Tehát lesz:

$$\omega = 180^0 + \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_1' + a_2' + a_3' + \cdots}{2n} - \frac{b + b'}{2}.$$

De ezen Azimut még egy kis javítást igényel, mivel az X tengely a ♁ déllőjével párhuzamosan van választva, mely a D pont déllőjével észak felé összehajlik. Ezért ω egy kicsit kisebbedik. Ezen kis javítást 91. §. 7. szám ⊙ képlete szerint lehet meghatározni azon megjegyzéssel, hogy abban a helyett D♁, $\alpha - \delta$ helyett pedig a ♁ azimutját (CD♁ $- \omega$) kell tenni.

Tehát az ω javitéka lesz:

$$\Delta\omega = \frac{D\mathfrak{d}}{R} \cdot tg\varphi \; sin\,(CD\mathfrak{d} - \omega),$$

és a kijavított $\omega =$ az észlelt $\omega - \Delta\,\omega$.

234. §.

Feladat. Valamely álláspontban a mérő asztalon a déllőt meghatározni.

Feloldás. 1) Állítsuk fel az asztalt egy verőfényes napon, tájékozzuk azt annak rendje szerint, húzzunk egy tetszés szerinti pontból 5—6″ sugárral körívet, és a középpontban egy 5″ hosszú peczket függélyesen felállítván, figyeljünk, midőn a peczek árnyékának vége délelőtt és délután a kör körületébe esik. Jeleljük meg ezen pontokat, és felezzük a köztök lévő ívet. Ezen felező pont a kör középpontjával összeköttetvén, a déllő vonalat fogja szolgáltatni. Ugyanis az árnyék végpontjain keresztül gondolt körsugárok közt befoglalt szög a nap kettős azimutját szolgáltatja, melyet a déllő két egyenlő részre oszt.

Nagyobb biztosság kedveért több központos köröket lehet húzni, s az árnyék végeit mindeniken délelőtt és után megjelölni. A felező pontoknak mind egy egyenes vonalban kell feküdni, s a netaláni különbségeket el kell oszlatni.

2) A peczek árnyékának végét a félárnyék miatt igen nehéz megösmerni; jobb tehát a peczek helyett egy 1″ széles lemezt (270. ábra) alkalmazni, melynek alsó vége derékszög alatt fel van hajtva, hogy a lemezt az asztalon függélyesen lehessen felállítni; felső végén pedig középen egy kúp alakú lyuk *a* van fúrva. Ezen lyuknak vetülete *a*′ a lemez alsó élén meg van jelölve, s azon pontot kell az asztalon a kör középpontja felibe állítni. Ezen lemez árnyékában a lyukon átmenő napsugárok egy világos köröcskét képeznek, melynek középpontját igen jól meg lehet becsülni s át lehet szúrni, midőn az az asztaltáblán húzott körök körületébe esik.

3) Ha a vonasz éle az iránysíkkal nem párhuzamos, akkor az asztalon lévő vonalak a mezei megfelelő vonalaktól ugyanazon szög alatt hajolván el, melyet a vonasz éle az iránysíkkal bezár, az azimutok is ugyanazon szöggel lesznek hibásan meghatározva, következésképen a déllő is ugyanazon szöggel lesz

hibás. Ezen hibát úgy lehet elhárítni, ha az asztalt a délelőtti észlelés előtt a szokott módon, délután pedig szintén az észlelés előtt úgy tájékozzuk, hogy a nézgék a tábláról lefelé legyenek fordulva. Ekkor az asztal a párhuzamos fekvéstől az ellenkező oldalra lévén elfordítva, az azimutban is az ellenkező hiba fog származni, téhát a déllő a hibától ment fog lenni.

4) Hasonlóképen lehet a valódi delejes déllőt is meghatározni az asztalon, ha a tájola teljesen ki van igazítva. T. i. tájékozzuk az asztalt a szokott mód szerint, s határozzuk meg a delejes déllőt a 188. §. 2 szerint. Ezután tájékozzuk az asztalt úgy, hogy a vonasz felfordítva, a nézgékkel lefelé helyeztessék a tájékozási vonal mellé, s határozzuk meg ujolag a delejes déllőt. Ez az előbbivel egy szöget fog bezárni, melyben az iránysíknak a vonasz élétőli elhajlása kétszer foglaltatik, s az ezen szöget felező vonal a valódi delejes déllőt szolgáltatja. A csillagászati és delejes déllők irányai közötti különbség a h e l y d e l e j e s e l h a j l á s á t adja.

235. §. Részletes felvétel.

1) A részletes felvétel az asztallal, a hol csak lehet, előmetszés által eszközöltetik. Álláspontokul már a háromszögelés által meghatározott pontok választatnak, noha szükség esetében olyan pontokon is fel lehet az asztalt állítni, melyek még meghatározva nincsenek, s azokat oldal- vagy hátrametszés által kell megállapítni a papiroson. Az álláspontokat olyan helyeken kell választani, hogy azokból a felveendő dülőt be lehessen látni, s a metszésszögek 90° körül legyenek. Ezért czélszerű, ha az alapvonal a dülő hosszával körülbelől párhuzamosan, attól 100—200° távban fekszik; mert ha az közelébb vagy épen a felveendő dülőben volna, a pontok nagyobb része rosz metszésszöget nyerne. Más oldalról pedig 400—500°-nél nagyobb távba sem kell nézgékkel irányozni, különben a tiszta látás igen megnehezedik s az irányzási hibák befolyása, mely a távval egyenes viszonyban nő, igen károssá válik. Hegyes vidéken a völgynek egyik oldalát a másikról kell felvenni, hogy az irányvonalak a völgy felett nagy magasságban menjenek el; mert ha az álláspont a felveendő vidékkel a hegynek ugyanazon lejtőjén van, akkor az irányvonalak közel a földszinén huzódván el, gyakran a legkisebb

természeti egyenetlenségekben fák- bokrokban stb. jelentékeny akadályokra találnak. A világitásra is különös figyelmet kell fordítni; mert a nap ellen vagy igen roszul, vagy épen nem lehet látni, minthogy a tárgyak árnyékos oldalaikat fordítják a néző felé.

2) Ha a dülőt két álláspontból nem lehet felvenni, minthogy a pontok egy részét a második álláspontból nem lehet látni, vagy rosz metszésszögek keletkeznek : akkor egy harmadik álláspontot kell felvenni, s a hiányzó pontot onnan metszeni. Ha pedig csak nehány pont marad meghatározatlan : azokat a mérő lánczczal a 198. §. 1 szerint kell megállapítni.

3) Mielőtt az asztallali munkához fognánk, ki kell tűzni az egész dülőt. Célszerű azon részt, melyet egy alapvonalból egyhuzomban fel akarunk venni, természetes határok — útak árkok széles mezsgyék terméktelen területek stb. által környezni azért, hogy ha egyik vagy másik álláspont egy kissé hibásan volna meghatározva, s az egész dülő egy kicsit oldalt mozdulna helyéből a térképen, a hiba az ezt környező terméketlen területbe essék. Ezen szabály azon elven alapul, hogy mennél nagyobb valamely telek értéke, annál nagyobb gondot kell annak felvételére fordítni, s az értéktelen területben nagyobb hibát is el lehet nézni.

A kitűzés tárgyait teszik az egyes telkek szántóföldek rétek szőllők a közbezárt terméketlen területekkel együtt, minők kőhányások árkok széles mezsgyék stb. Különösen figyelembe kell venni a határdombokat oszlopokat árkokat mezsgyeköveket, melyek a határok megjelölésére szolgálnak; valamint egyes kitünő tárgyakat, minők az utak szélein felállított keresztek szentek oszlopai tilalomfák kútak és ágasok egyedül álló fák épületek stb., melyek igen becses, szilárd és változatlan pontokat szolgáltatnak. Ezen utóbbi pontokat a mérnök már távolról látván, kitűzés nélkül is felveheti, a telkeknek pedig sarok- és görbüléspontjait karókkal kell megjelölni úgy, hogy a karók által képzett alakok a mezei térek alakját híven ábrázolják. Ha a mezsgyék görbületeit szigoruan felösmerni nem lehet, akkor a karókat olyan távban kell egymástól leszúrni, hogy a köztök lévő görbe vonalat még egyenesnek lehessen tekinteni, vagyis az egyenes vonalnak a görbétőli eltérése a papiroson észrevehető ne legyen. A karók

1-en kezdve folyó számokkal jelöltetnek, s egy dülőben, a körülményekhez képest, 5—600 karó is kitűzetik. Átaljában gyakorlott mérnökök annyi karót kivernek egyszerre, a mennyit egy nap alatt fel lehet venni. Többet kitűzni nem tanácsos, mivel tapasztalás szerint éjjel a karók gyakran kivesznek, s az elvesztett pontok helyét felkeresni igen nagy fáradságba s időveszteségbe kerül; kevesebbet pedig azért nem, mert a munka többszöri félbeszakasztása, s az asztal felállítása sok időt elrabol. A karókat olyan rendben kell egymás után kitűzni, hogy egyiktől a másikhoz a legrövidebb úton lehessen eljutni. Ezért ha a szántóföldek 40—50° széles táblákból állanak, akkor czélszerű a mezsgyéken fel s alá menni (271. ábra), mint 1-től 10-ig látható. Ellenben ha a földek keskenyek, akkor czélszerűbb a dülőn keresztül egyik mezsgyétől a másikhoz menni, mint az a többi karóknál látható. Kezdőknek ajánlatos a felveendő dülőről szabad szemmel egy kézi rajzot — Brouillon — készítni, s ebbe a pontokat a megfelelő számokkal együtt feljegyezni. Gyakorlott mérnököknél ezen rajz hiányát a kifejlődött áttekintési és helyemlékező tehetség eléggé pótolja. Legfeljebb csak olyan helyeken kell jegyzeteket csinálni, hol a pontok összeköttetésében kétség támadhat, mint p. o. 28-tól 39-ig. Ezen jegyzet a 272. ábra szerint néz ki s a kétséget tökéletesen elhárítja. Hogy a figuráns, — ki a pontokat sorjában felkeresi s a lobogós rudat minden pontban felállítja, hogy az asztalon arra irányozni lehessen, — a karókat könnyen fellelhesse, a karók állása által igazíttatik útba. E czélból legczélszerűbbnek látszik a karóknak tiszta lapos oldalát fordítni azon táj felé, hol a következő pontot keresni kell; ekkor a beírt oldal hátra felé fog nézni, s a figuráns már távolról látván a számot tudja, hogy jól megyen, s a keresgéléssel időt nem veszít.

A hogy van a telek kikarózva, úgy vétetik az fel a papiroson; ezért a kikarózás igen fontos dolog, s a munka helyes voltára nézve lényeges tényező. Némely helyeken a telkek mezsgyéit, különösen a szántóföldek végein, az úgynevezett f o r d u l ó k o n megösmerni igen nehéz, sőt néha a réteknél mezsgyék nem is léteznek. Kétes esetekben a határokat a tulajdonosok által kell megjelöltetni, s a szerint kell kitűzni. Ha a mezsgyék olyan keskenyek, hogy azokat a térképen láthatókká tenni nem lehet, akkor azokat felezni kell, s egyik felet az egyik, másikat a másik telekhez kell csapni. Ha pedig az — mint hegyes vidékeken szokott lenni — tetemes szélességgel bír, akkor mind a két szélén ki kell tűzni. Futó árkokat utakat csatornákat stb., csak egy oldalról kell kikarózni, s azoknak szélességét megmérvén, be kell rajzolni a térképbe. Átaljában a kikarózásnál mindig a haszonvehető földnek alakját kell szemügyre venni, a vele határos terméketlen terület magától is kijön, ha a körülötte lévő értékesebb területek felvétetnek.

4) A kikarózás után a pontok beirányzásához kell fogni; noha ha két mérnök dolgozik együtt, a karózást az irányzás nyomban követheti, s a munka egy harmadrésszel gyorsabban halad. E czélra a figuráns a lobogót az első számú ponton felállítja, s a mérnök az asztalt annak rendje szerint felállítván, a lobogót beirányozza, s a vonalat a papiroson szintén 1-el megjelöli. Ekkor egy adott jelre a figuráns odább megyen, s a lobogót a 2-ős számu ponton felállítván, a mérnök az irányzást folytatja stb., mig minden pont egész az utolsóig be van irányozva. Ezen jel, mely az asztal és a figuráns közt a telegraphnak bizonyos nemét képezi, egyszerűen abban áll, hogy ha a figuráns a lobogót a ponton felállítja, az asztal mellett egy segéd, kinek kötelessége a figuráns felé nézni s a lobogót figyelemmel kisérni, egy lobogós rudat szintén felállít; miután pedig a mérnök az irányzást teljesítette, ezen vezényszóra »le« a lobogót a földre lehajtja, oldalvást lassan egy környegyedet írván le a légben. Ezen jelre a figuráns lobogóját szintén lehajtja s odább megyen. Ha a figuráns az 5-ös vagy 10-es számu karóhoz jött, ott a lobogót 4—5-ször jobbra balra hajtogatja a légben, s ha az asztalon következő szám szinte 5-ös vagy 10-es, tehát a karón lévő számmal egyezik, akkor az asztalnál lévő jeladó szintén hasonló csóválással felel, s minden rendben van. Ha pedig az asztalon következő szám nem volna összhangzásban a karón lévővel: akkor a lobogóst egy bizonyos jeladással vissza kell küldeni az előtte lévő 5-ös vagy 10-esre, s az irányzást ismételni, nagyobb figyelemmel kisérvén azt, nehogy másodszor is az előbbi hibába essünk. Ezen hibának többféle okai lehetnek; p. o. megtörténhetik, hogy a karókon egy szám hiányzik, vagy kétszer jön elő, vagy a figuráns egy karót átugrott, vagy nem vette észre az

asztalnál adott jelt, tehát az asztalon ezen karóra két irányvonal húzatott és két szám iratott rá stb. Hasonló hibák követtethetnek el az asztalnál is. Azért kell a figuránst az 5-ös vagy 10-es pontra visszaküldeni, hogy a mérnök egy biztos pontból indulhasson ki, melyről meg van győződve, hogy mind a mezőn, mind az asztalon ugyanazon számmal van megjelölve. Ilyen pedig egyedül csak az 5-ös vagy 10-es, melyben a figuránsnak csóválni kell a lobogóval. Néha megtörténik, hogy a figuráns az asztalt jól látja, de őt az asztaltól nem látják, tehát a rudat nem is állítják fel. Ilyenkor igyekezzen a figuráns a rúd felemelése által a lobogót láthatóvá tenni, sőt ha szükséges, p. o. ha a pont egy fa megett áll, a rudat a vonalba a fa előtt kell felállítni, hogy arra irányozni lehessen. Ha a mérnök valamely pontot teljességgel nem lát, akkor a figuranst odább küldi s a számot feljegyzi, hogy a pontot utólagosan a szomszéd pontokból láncczal lehessen meghatározni. Némely esetekben az asztalnál a lobogóval adott jeleket helyi akadályok miatt a figuráns nem láthatja. Ilyenkor egy síppal kell jelezni, melynek hangja a legtávolabb pontokra is elhat; de ezen jelzés sokkal több időt igényel mint az előbbi, mivel a hang sokkal lassabban halad mint a világosság; ezért csak szükség esetében ajánlható.

Meg kell említni, hogy az asztalon a sugárokat rövidre nem kell húzni, hogy később azokat meghosszabbítni ne kellessen, s a számokat körülbelől azon helyre kell irni, hová a pontok esni fognak. Ekkor a második irányzás alkalmával a metszés sokkal gyorsabban fog menni, s a munka biztossága is növekedni fog; mert a sürűn egymás mellett eső sugárokon a számok keresgélése igen fárasztó munka, s gyakran a legjobb akarat mellett is hamis metszéspontok szúratnak keresztül.

Minden 50-ik pont után, s időközben is, ha valaki az asztal lábaihoz ért, vagy gyanítjuk, hogy az asztal fekvésében változás történt, a vonasz élét a tájékozási vonal mellé kell tenni, s a nézgéken keresztül nézvén, a hibát ki kell igazítni. Ugyanezen óvatossággal kell eljárni akkor is, ha a következő asztalállás felé irányvonalat kell húzni, s az őrvonalkákat el nem kell felejteni.

5) Miután a sugárok az első álláspontban mind meghúzattak, az asztal a második álláspontba vitetik át, s ha a pont már az asztalon meg van határozva, az asztal annak rendje

szerint felállittatik. Ellenkező esetben a pontot oldalmetszés által kell meghatározni. Ezután az irányzást ismét elölről kell kezdeni, de a sugárokat csak röviden kell húzni, hogy az illető sugár átmetszessék, s a metszéspontot finom tűvel mindjárt át kell szúrni. Ha a munka egy olyan pontig halad, melyről jegyzés van téve, az összekötő vonalat mindjárt ki kell húzni, hogy később zavar ne támadjon, s a metszéspontok mind meghatároztatván, azokat olyan rendben össze kell kötni, mint azok a mezőn összekapcsolva vannak. A mezsgyék kihúzását mindig a legkönnyebb részen kell kezdeni s lassanként a nehezebb részekre átmenni, mig végre a legbonyolódottabb részek is kioldódzanak. Igen nagy könnyebbségre van ezen munka közben, ha a mérnök maga volt jelen a kikarózásnál, mert az egész helyiséget ösmeri, különösen pedig kedvező azon körülmény, ha a felvett dülő szem előtt fekszik, s egyes pontokat nagyjában meg is lehet irányozni; hogy kétes esetekben el lehessen igazodni. Kezdőknek ajánlani lehet, hogy az átszúrt pontok mellé a megfelelő számokat irják, s a mezsgyék kihúzásában a kézi rajzot vegyék segitségül. Bevégezvén a munkát, s a kimaradt nehány pontokat is berajzolván, a papirost törlővel ki kell tisztítani, hogy a következő munkára elő legyen készitve, s a sokféle vonalak és számok miatt zavar ne támadjon; a karókat pedig a dülőből mind ki kell húzatni, hogy másnap használatra készen álljanak.

236. §.

Olyan dülőkben, melyekben a mezsgyék körülbelől párhuzamosan fekvő vonalakat képeznek, (252. ábra) a felvételt következő módon is lehet eszközölni. A dülőnek körületét fel kell venni az előbbi mód szerint, s a szélső mezsgyék pontjait 2, 11 és 4, 10 rudakkal megjelölvén, a keletkező átlók közepe táján *m* és *n*-ben szintén rudakat kell felállítni, s a megfelelő vonalakat a papiroson rajzónnal kihúzni. Ekkor a figuráns a legszélső pontból kiindulván, minden mezsgyén megáll, s a lobogót az átlóba beállítja; a mérnök pedig az asztalon a rúdra irányoz és az átlót metszi; ez által a rúd helye a papiroson meg van határozva s a munka folytattatik, mig minden átló egyenként felvétetett. Ha a földek igen keskenyek, mint p. o. a kenderföldek, melyeknek szélessége gyakran 1—2°-et meg nem halad, akkor az átlókat lánczczal kell átmérni, s a méreteket a térképen felrakni. Végre a metszéspontok a körület megfelelő pontjaival összeköttetvén, a mezsgyék kihúzatnak. Ezen mód, noha megtörténik, hogy egyik vagy másik mezsgyén a metszéspont nem egészen a görbületi pontba esik, ennélfogva elméletileg véve az előbbinél hátrább áll, gyakorlati szempontból itélve figyelmet érdemel, mivel a pontok nagyobb részint csak egyszeri irányzás által határoztatván meg, a munka tetemes időnyereséggel jár, s jól alkalmazva, kielégitő eredményt szolgáltat.

237. §. Erdők felvétele.

Az erdők felvétele rendesen körületből történik, noha azon rész, mely a szántóföldekkel s más nyilt területekkel határos, ezeknek felvétele által más módon már meg van határozva. A felvétel tárgyai : a határok, melyek rendesen utakkal, azoknak szélein helyenként határdombokkal vannak megjelölve. Továbbá egyes birtokrészek közötti határok vágások útak patakok irtások különböző fanemek határai stb. Ezeknek felvételénél különösen a birtokok határaira kell figyelmet fordítni, a többieknél nagyobb eltéréseket is el lehet nézni. A felveendő körületben helyenként jeleket kell a fákba vágni, s ezen fákat felvenni. Ezek később a beosztásnál biztos kiindulási pontokat szolgáltatnak. A felvételeknél mindig a legközelebbi háromszögelési pontból kell kiindulni s egy olyanhoz csatlakozni, és a zárhibát el kell oszlatni. Ha az irtásokon háromszögelési pontok meghatározva nem volnának, vagy a 231. §. 5 szerint kell álláspontokra szert tenni, vagy az útakon kell bejutni. Az első mód rendesen jobb eredményt fog adni a másodiknál.

Az erdők felvételénél asztal helyett az astrolabiumot és felvételi tájolát haszonnal lehet alkalmazni annyival inkább, mert ezeknél a szögmérési hibát előlegesen el lehetvén oszlatni, a zárhiba is csekélyebb fog lenni.

238. §. Belső telkek felvétele.

Ez a legfáradságosabb munkálatok közé tartozik, minthogy a részletek nagy száma, s a kilátás hiánya azt igen szaporátlanná teszi. Ebben következő elvek szolgálnak zsinórmértékül:

1) Ha a helység egy part tövében fekszik, melyről a házak közé lehet látni: akkor a felvételt a metszési mód szerint lehet eszközölni, s álláspontokat a dombon kell választani. 4⁰-es rudak rendesen ki fognak a házak teteje fölött látszodni, s azon nehány pontokat, melyek nem látszodnak, utólagosan lánczczal lehet meghatározni.

2) Ha a helység síkságon fekszik, akkor a háromszögelés alkalmával az utczák végein csóvákat kell felállítni, s ezeket meghatározván, a helység felvételénél kiindulási pontokul kell használni. Ezután az utczák hosszában a görbületeken karókat vervén a földbe, sokszögeket kell képezni, melyeknek oldalai minél hosszabbak legyenek, s azokat a legnagyobb szigorral fel kell venni. Csatlakozási pont gyanánt az utczák keresztpontjában vert karó, vagy néha a helység tornya szolgál, mely rendesen ilyen helyen van épitve. A sokszög oldalai megmérése alkalmával minden ház kapuja előtt karót kell leverni a vonalba, s ennek fekvését a lánczczal meg kell határozni, és felrakni a térképen. Továbbá az utczának két oldalát, minden benne lévő tárgyakkal együtt, minők a kutak hidak vizfolyások csatornák kövezetek járdák, továbbá a házhelyek és épületek sarkai stb. derék összrendezőkkel, vagy ha az utczák szélesek, és jó metszésszögeket lehet várni, előmetszés által fel kell venni. Hasonlóképen vétetik fel a helységnek a földek felé néző körülete is azon alkalommal, midőn a földek felvétetnek. Ekképen a helység vázlata fel lévén véve, csak a belső pontok meghatározása van még hátra. E czélra legegyszerűbben a mérő asztalt, s a tájékozó tájolát lehet használni, mert ha bár a tájékozás 8 — 10 perczig hibás is, az az előjövő rövid vonalaknál, melyek 20 — 30⁰-et ritkán haladnak meg, káros hatást még nem gyakorol. Az asztalt tehát az udvar közepén felállitjuk úgy, hogy a kapun keresztül az utczán lévő karót látni lehessen, azt a tájolával tájékozzuk, s a nevezett pontra a papiroson megfelelőből irányozván, a megmért hosszat a sugárra feltesszük. (Lásd 219. §. 6. szám). Ekképen az asztalállás meg lévén határozva, a telek s az épületek sarkpontjait sarkösszrendezők által felrakjuk. Ha egy álláspontból nem lehetne minden pontot látni, egy második álláspontot kell választani, s azt az előbbiből meghatározván, a részletek felvételét folytatni kell, mig a telek egészen fel van véve. Hasonlóképen kell a többi házhelyeknél is működni.

Néha az épületek felvétele nem szükséges, csupán a telek területe forog szóban. Akkor minden második telket át lehet ugorni, minthogy az a szomszéd telkek körülete által már meg van határozva.

3) Egyes esetekben a szögtűkröt is lehet a házhelyek felvételére használni. T. i. a kapu előtt lévő karóban az utcza hosszában fekvő tengelyre merőleges vonalat emelvén fel, ezt metszéki tengelynek tekintjük, s a telek szögpontjait s az épületek sarkait összrendezők által határozzuk meg. Ha ezen tengely nem érne a telek végéig, akkor rá ismét merőlegest, s erre ismét merőlegest lehet felemelni, mig a teleknek minden pontja meg lesz állapitva. Hogy ezen tengelyeket nagy gonddal kell kitűzni, minthogy a hibák összehalmozódnak, önként érthető.

Olyan esetekben, midőn a telkek az utczai vonalra ferdén állanak, nem czélszerű derékszög alatt menni be az udvarba, mivel akkor a merőleges tengely igen hamar a telek oldalába ütközik, s új merőlegesek kitüzése elkerülhetlen; hanem jobb a tengelyt ferde szög alatt fektetni a sokszög oldalához, s a hajlásszöget egy astrolabiummal, vagy legalább lánczczal mérni meg.

239. §.

A metszési rendszert igen szépen lehet alkalmazni várak és megerősitett helyek felvételénél, melyek nyilt térrel vannak körülvéve, és belől egy, vagy több magas tárgyak, p. o. tornyok, zászlós árboczok stb. léteznek, melyek a nyilt térről mindenünnen látszodnak. A munka folyamatja következő: Választunk a nyilt téren egy elegendő hosszú alapvonalat *AB*, (273. ábra) azt megmérvén, feltesszük az asztalra oly fekvésben, hogy a felveendő tér a táblára férjen. Ezután az asztalt az *A* pontban felállitván, azt *B* felé tájékozzuk, irányozunk a nevezett kitünő magas tárgyakra *M*, *N* . . . valamint a körületnek szögpontjaira is, a mennyiben azok az álláspontból látszodnak. Innen a *B* pontra menvén, az asztalt *A* felé tájékozzuk, metszük az *M*, *N* . . . pontokat, valamint a körületnek *A*-ból beirányzott pontjait is, s irányozunk tovább a következő pontokra s egy kitűzött álláspontra *C*, az őrvonalkákat el nem felejtvén. Ezután megyünk a *C* pontra, tájékozzuk az asztalt *B* felé, meghatározzuk az álláspontot *M*, *N*-ből oldalmetszés által, metszük továbbá a *B*-től megirányzott pontokat, és irányozunk tovább a következő pontokra valamint a kitűzendő új álláspontra is *D*, s i. t., mig az egész körület fel lesz véve.

Ezen műtétel szerint az álláspontok egymástól függésben határoztatnak meg ugyan; de minthogy mindig több pontok lesznek, melyekből az álláspontot oldalt lehet metszeni, a munka eredménye igen kielégitő fog lenni, s a zárpontban csekély hiba fog mutatkozni.

Még jobb eredményt lehet reményleni, ha a térben három kitünő pont létezik, mert akkor az álláspontokat egymástól függetlenül hátrametszés által lehet meghatározni.

240. §.

A metszési rendszernek oly számos gyakorlati előnyei vannak, hogy az a felvételi módok közt méltán első helyet érdemel. Mindazáltal nem lehet annak alkalmazásában elég óvatosságot ajánlani, ha azt akarjuk, hogy annak fogyatkozásai a jó tulajdonságokat háttérbe ne szorítsák. Különösen következő pontokra kell figyelmet fordítni.

1) A részletes felvétel léptéke ne legyen igen kicsiny; mert egy részről a hibák befolyása a pontok megállapitásában a kicsinyítéssel egyenes viszonyban nő; más részről pedig a méreteket mind a térkiszámitásban, mind a beosztásban a térképről körző által kellvén levenni s a léptékkel összehasonlítni, az ebben ejthető hiba is a kicsinyítéssel növekedik. Legczélszerűbb 1"-re 40—50 ölet számítni, s ekkor még $^1/_2$'-at meg lehet különböztetni.

2) Igyekezni kell a szelvényt lehető rövid idő alatt bevégezni, hogy időközben az asztaltábla változást ne szenvedjen. Mert ha egyszer az összement : a térképnek a mezei alakokkali hasonlósága elromlott, s a feladatok nagyobb része, melyek a hasonlóságra vannak alapítva, kivihetlenné válik. Ezen czélt az első szám alatti szabály hatalmasan előmozdítja; mert ha a lépték nagyobb, a szelvényre kevesebb terület fér, s a felvétel kevesebb időt kiván.

3) Minden dülő felvételénél egy háromszögelési pontból kell kiindulni, a második és harmadik asztalállást oldalmetszés által is lehet meghatározni. De több, mint két oldalmetszést

egymás után alkalmazni nem tanácsos, hanem ismét haromszögelési pontra kell menni. Ekképen az asztalállások egymástól függetlenebbek lesznek, s a tájékozási hibák összehalmozódása meggátoltatik; miután feltesszük, hogy a háromszögelési pontok nagyobb szigorral vannak meghatározva, mint azt a részletes pontoktól kivánni lehet.

4) Ha az asztalon az egyenetlen összehúzódásnak nyomai mutatkoznak, mit arról lehet észrevenni, hogy a tájékozási vonalak nagyobb eltéréseket mutatnak, mint a háromszögelés alkalmával tapasztaltatott : akkor a részletek felvételére csupán az előmetszést kell használni, olyan pontokat választván álláspontokul, melyek a háromszögelés által meghatároztattak; az asztalt pedig azon pont felé kell tájékozni, melyből a felveendő pontokat metszeni akarjuk. Ezáltal a felveendő pontok az alapvonalhoz kapcsoltatván, ennek változásában aránylagos részt vesznek, s a szomszéd dülőkhöz képest csekélyebb eltérést fognak mutatni, mint ha azok valódi helyükön állanának, holott a szomszéd dülők már helyökből kimozdultak. Ha ezen szabályt szem előtt tartjuk, a dülő pontjaiban becsúszó hibák alig lesznek észrevehetők. Mert tegyük fel, hogy egy 600° hosszú alapvonalnak mind a két végpontja elmozdult helyéből, s ez által a vonal hossza 0·°6-el változott, tehát a változás az egésznek $^1/_{1000}$ részét teszi: akkor mind azon pontok fekvésében, melyek ezen alapvonalból felvétetnek, szintén $^1/_{1000}$ hiba fog lenni, mi még elnézhető. A telkek szélei- és hosszában eredő hibákat tehát még el lehet hanyagolni, de az egész dülő a szomszédhoz annyival fog közeledni a papiroson, a mennyivel az alapvonal ahoz közeledett. A hiba a dülő szélein fog szembetünőleg mutatkozni, hol két különböző alapvonalból felvett területek összeszögellenek.

5) Hogy tehát az ezen elmozdulásból eredő hiba káros következést ne vonjon maga után, az egész dülőt az azt környező út, vagy haszonvehetlen terület széléig egy alapvonalból kell felvenni, s ezen értéktelen térnek csak azon oldalát kell kikarózni, mely a dülővel határos, a másik oldalt pedig a másik dülővel kell felvenni. Ekképen a hiba az értéktelen térbe fog szoríttatni. Ugyanezt kell szem előtt tartani az egész szelvénynél is, ha az természetes határok által vétetik körül; határ-utak vagy más területek a szelvények összeillesztése által önként előállanak.

6) Kérdés alá jöhet, hogy ha két mérnök dolgozik egy kézre, miképen kell a munkát köztök megosztani? Legczélszerűbbnek látszik, ha a felelős mérnök a kikarózást veszi át, a segéd pedig az asztalt a háromszögelési ponton felállítván, a pontokra irányoz. Mert ügyes kikarózás a munkát tetemesen előmozdítja; különösen pedig a felelős mérnök az egész vidékkel szemlátomásból megismerkedvén, a felvétel helyes voltáról könnyebben kezeskedhetik. Ellenben az asztalfelállítás egy már meghatározott pontban, s az irányzás olyan egyszerű műtételek, melyeket egy elméleti ösmeretekkel nem biró, de ügyes egyén is könnyen végezhet. Kitűzés közben a felelős mérnök körülnéz, hogy honnan lehet a pontokat legjobban metszeni s az álláspontot kitűzi, a segéd pedig azt beirányozza. Az oldal-, illetőleg hátrametszést, valamint a részletes pontok metszését is maga viszi véghez a mérnök, a segédre csak az irányzást bízván, valamint a pontokat is maga köti össze. Ekképen a fáradságos, mégis tökéletlen kézi rajz egészen nélkülözhetővé válik, s a munka gyorsan halad.

241. §.

A szelvények térképpé összeállítása a háromszögelés különböző módja szerint különbözőképen történik, ú. m.

1) Ha a szelvények párlag alakuak s egymást érintik, akkor a rajztáblán először a párlagokat kell nagy tökélylyel felrajzolni, a részletes felvétel szelvényeinek az összehúzódás által változott közép méreteit vévén oldalak gyanánt. Azután minden egyes szelvényt a megfelelő párlagra fektetvén, a részletes pontokat finom tűvel át kell szurkálni.

2) Ha a szelvények egymással érintésben nincsenek, hanem egymást részben takarják: akkor először a háromszögelési pontokat kell az összrendezők által felrakni a táblára azon lépték szerint, mely az összehúzódott szelvényeknek megfelel; (l. 193. §. V) azután minden szelvényt a maga helyére kell helyezni, úgy hogy a megfelelő háromszögelési pontok egymás felibe essenek; mit az által lehet legegyszerűbben eszközölni, hogy a szelvény és a tábla megfelelő pontjain finom tűk szúratnak keresztül, s ekképen azok mintegy egymásra szögeztetnek, a részletes pontok pedig átszúratnak.

3) Ha a háromszögelés szelvényenkint vitetett véghez:

akkor a széleken felvett közös háromszögelési pontokat kell egymás felibe helyezni; s ha a pontok, kiváltképen a harmadik, negyedik szelvénynél nem esnének tökéletesen egymásra, minthogy itt a hibák már halmozódva mutatkoznak: akkor az egyes szelvényeket egy kissé oldalt kell mozdítni, a tűket egy keveset ferdén szúrván be a táblába. Ekképen a hibát el lehet oszlatni.

4) Némelyek a szelvényeket a csatlakozási vonalakon összeragasztják, s ekképen azokat egy egész térképpé egyesítik. Ez olyaténképen vitetik véghez, hogy az egyik szelvény széle a csatlakozási vonal mentében levágatik, a másikon pedig egy kis-újjnyi szélességü karima hagyatik. Ekkor a papiros szélei hátul élesre faragtatnak, hogy a két ív szélei egymásra tétetvén, csak egy papiros vastagsággal bírjanak, s enyvvel összeragasztatnak. De ezen gyakorlat nem ajánlható, mivel a szelvények szélei az összeragasztás által könnyen egyoldalú változásokat szenvednek, s a térkép dúczos, ránczos lesz. Továbbá a térképek nagy határoknál igen tetemes kiterjedést nyervén, további műtételekre, p. o. térkiszámitás, másolásra stb. igen kényelmetlenek. Czélszerűbb tehát a szelvényeket egyenkint hagyni; ezeket nagy tárczába el lehet tenni, hol sík alakjokat megőrzik, s az előbbiek szerint akármikor össze lehet állítni a nélkül, hogy a térkép az eredetitől legkevésbbé is különböznék.

242. §. Láncz és szögtűkörreli felvétel.

Ha egy határt csupán lánczczal és szögtűkörrel akarunk felvenni, következőképen kell működni.

1) Tűzzünk ki a határ közepén keresztül, annak hosszában egy egyenes vonalat *AE* (274. ábra), s azt nagy pontossággal megmérvén, minden 100^{0}-ben verjünk be a földbe erős karókat, s jelöljük meg ezeket sorjában 1, 2, 3-al, minden negyedikben pedig állitsunk fel csóvákat *A, B, C, D* stb.

2) Ezen csóvákban emeljünk fel az *AE* vonalra merőlegeseket, jeleljük meg ezeket előlegesen rudakkal, melyek az *AF* vonaltól 3—400 öl távban mind a két oldalt felállíttatnak. A derékszög kitűzését a legnagyobb szigorral kell eszközölni, sőt egy kis kézi távcsőt is lehet segitségül venni, mely mind az egyenesen, mind a tűkörből jövő sugárokat felfogván, a képek összeesését nagyobb pontossággal megitélni engedi, mint a sza-

bad szem. A derékszög helyes voltáról tanuskodik, ha minden merőlegesben a három kitűzött rúd egy-egy egyenes vonalban fekszik. Ezen merőlegesek egy kis távcső segitségével egész a határszélekig meghosszabbíttatnak, s előlegesen rudakkal megjelöltetnek.

3) Egy ilyen merőleges vonal, mely körülbelől szintén a határ közepén megyen keresztül, annak az AE tenglyelyeli metszéspontjából C kezdve, szintén nagy szigorral lemérettetik, s minden 100 ölben karók veretnek le, minden negyedik százban pedig rudak állittatnak fel. Ezen rudakban ismét merőlegesek emeltetnek fel, melyek tehát az AE tengelylyel párhuzamosak lesznek, a két rendbeli merőlegesek metszéspontjai felkerestetnek és rudakkal kitűzetnek, az előleges rudak kihúzatván. Ekképen a határ csupa 400° oldalhosszú négyzetekre oszlik fel, melyeknek oldalai egyenlőségéről a legszélsőbb parallelákon próbamérések által meg lehet győződni, hol a hiba nagyítva mutatkozik.

Más próba abban áll, hogy a négyszögek átlói irányában a rudaknak egyenes vonalakban kell állani, s a négyszögek oldalaival 45°-ot kell képezni.

4) A fő négyszögek ki lévén tűzve, a százas karókban merőlegesek emeltetnek fel mind az AE, mind az FCG tengelyre; ezek a négyzetek oldalait 100° hosszú darabokra fogják osztani, s a metszéspontok karókkal megjelöltetvén, szintén 1, 2, 3-mal számoztatnak, megkülönböztetésül vonásokat tévén hozzájok, melyekkel a négyszögek szögpontjai is el vannak látva.

Ekképen a határnak vázlata négyszögelés által meg lévén állapitva, a részletes felvételhez lehet fogni.

5) A részletes felvételnél minden dülőben először a körületet kell felvenni. Legyen p. o. az I. dülő felveendő, akkor tűzzük ki a tengelyeknek azon pontjait, melyekben azok a dülő körülete, vagy azoknak meghosszabbítása által metszetnek, mint a, b, c, d, e, f, mérjük meg ezen pontoknak a közelebbi százas karóktóli távjait, tehát az AA' tengelyen a $3'a$ és $3b$, a BB' tengelyen a $3c$ és $3'd$, a CC' tengelyen a $3'c$ és $3f$ darabokat. Ezen méretek által a felvett pontok teljesen meghatároztatnak. Vegyük most az *abcfed* sokszöget szemügyre, ez a dülőt egészen körülfogja, s ennek oldalait metszéktengelyeknek tekintvén, a körületbeli görbületi sarok- és mezsgyék végpontjait derék ösz-

rendezők által fel lehet venni. Minthogy pedig a dülő jobb oldala az *fe* tengelytől igen messze esik, válasszunk a *de* és *cf* vonalakon az oldal irányában pontokat *g, h*, és a *gh* vonalat tekintsük a nevezett körületre nézve metszéktengelynek.

Átaljában szabályul lehet venni, hogy **minden metszéktengely kezdő és végpontját vagy a főtengelyeken, vagy a főtengelyek közt kitűzött átlókban kell felvenni, s a tengelyeket a felveendő körülethez közel kell választani**, hogy a rendezők minél rövidebbek legyenek, s a munka gyorsabban haladjon.

6) Ezen szabálynak haszna abban áll, hogy minden metszéki tengely hosszát, melyet közvetlen mérés által nyertünk, s mely 400°-et meghaladván többé kevésbé hibás fog lenni, a négyszögelés által nyert méretekkel össze lehet hasonlítni s a hibát el lehet oszlatni, feltévén, hogy a vázlat vonalâi pontosan vannak kitűzve, s a kezdő és végpontnak megállapítása eléggé hibátlan. Ezen utóbbi körülmény pedig a dolog természeténél fogva feltehető, mert ezen méretek 100°-nél kisebbek lévén, a mérési hiba 0°·1-et meg nem fog haladni.

Ezen összehasonlítás egyszerű számítás által eszközöltetik. Legyen p. o. a *de* átló (275 ábra) hossza keresendő. Gondoljunk *e*-ből $B'C'$-hez párhuzamost, akkor egy derék $\triangle$ áll elő, melynek befogói $C'e - B'd$, és $B'C'$ ösmeretesek; tehát

$$de^2 = (C'e - B'd)^2 + B'C'^2.$$

Ha tehát a mérés által nyert *de* a számítás által talált értéktől különbözik, a különbséget δ el kell osztani, s az egyes metszékekre x eső pótlékokat $\triangle x$ ezen arányból lehet meghatározni:

$$de : \delta = x : \triangle x.$$

Ezen pótlékok minden metszékre nézve kiszámíttatnak, s ha már észrevehető értéket adnak, az illető metszékekhez hozzáadatnak, illetőleg azokból levonatnak.

Hasonlóképen történik a *gh* átló kiszámítása is. Gondoljunk t. i. az *e, h, f, g* pontokon keresztül $B'C'$-el párhuzamosokat, akkor a hasonló $\triangle$-ekből következő arányok származnak:

$$de : dh = \begin{cases} (C'e - B'd) : du\,, \\ \quad B'C' \quad\;\; : hu\,, \end{cases}$$

$$cf : cg = \begin{cases} (C'f - B'c) : cv\,, \\ \quad B'C' \quad\;\; : gv\,. \end{cases}$$

Ezekből azután lesz:

$$gh^2 = uv^2 + (uh - vg)^2.$$

7) Az összehasonlításnak ez a legbiztosabb, de nem egyedüli módja, hanem azt szerkesztés által is lehet eszközölni. A *de*, *cf*, *gh* vonalakat t. i. a térképről le lehet venni, s a léptékkel megmérvén, a közvetlen mérés eredményével össze lehet hasonlítni.

8) Ha a dülő körülete felvétetett, a mezsgyék meghatározásához lehet fogni. E végre a dülőnek azon vidékein, hol a mezsgyékben görbületek mutatkoznak, átlók tűzetnek ki; ezek a főtengelyig, jelen esetben az *ad* és *gh* vonalakig meghosszabbíttatnak, és a végpontoknak a közelebbi százas karóktóli távjai megméretnek. Végre az átlók átméretnek, feljegyezvén minden mezsgyében azon ölek számát, melyeket a láncz mutat; sőt ha két átló közt a meszgye görbülést mutatna, ezt is legalább szabad szemmel meg lehet becsülni. Ha az átló hossza a számitás által nyert eredménytől különbözněk, a különbséget el kell osztani, s az egyes metszékeket aránylag változtatni. Ekképen két, három átló által az egész dülőnek belseje fel lesz véve.

Ezen műtétel a többi dülőknél is ismételtetik, s a méretek egy rajztáblán kicsinyített mértékben felrakatnak. Ezen szerkesztés tökéletesen abban a rendben vitetik véghez, a mint a mérés a mezőn eszközöltetett.

8) Néha célszerűbb lehet a határ területén négyszögek helyett háromszögeket tűzni ki, s ezeknek oldalait közvetlen mérés által határozni meg. Az egyes dülők, és az azokban fekvő pontok felvétele az előbbiek szerint történik.

9) Ámbár az ezen §-ban előadott felvételi mód a léptéktől egészen független: még sem ajánlható igen kis léptéket választani, mivel akkor a méreteket a térképről levenni, és a léptékkel kellő pontossággal megmérni nem lehet; s ha a térkiszámitásnál nagyobb részint a közvetlen mérés által nyert adatokat lehet is használni, mindazáltal a beosztásnál és más célokra a lépték használata elkerülhetetlen lévén, tetemes hibák forrásáva válik. Ezért azon gyakorlatnak, miszerint $1'' = 100^0$-nek vétetik, pártolója annál kevésbbé lehetek, mennél kevésbbé forog fen a szükség ilyen kis lépték választására. Mert ha a térképet egy darabban nem lehetne rajzolni, annak nagy volta miatt; nincsen semmi akadály, azt két darabban késziteni, melyek egymástól vagy

egyenes vonal által vannak elválasztva, vagy természetes határok által vannak bekerítve. A franczia mérnökök a mérő asztalt már régen más szögmérővel pótolják. Ezt ugyan én a mérőasztal elleni igazságtalanságnak tartom; de mégis ideje volna nálunk is legalább annak fogyatkozásait fontolóra venni, s azok közül a legártalmasabbat, a kicsinyítés felcsigázását elkerülni, ha a térkép rendeltetését félreismerni, s a birtokviszonyokba avatatlan kezekkel markolni nem akarunk.

243. §. Hitelesités.

A térkép nyilvános használatra szánt instrumentum lévén, melynek mind a hatóságok, mind a magánosok hitelt adni utalva vannak, mielőtt hitelesnek elismertetnék, megvizsgáltatik. De a felelős mérnöknek is érdekében fekszik, az alárendelt segédek által készitett munkákat megvizsgálni, hogy azoknak jóságáról meggyőződést szerezhessen magának: ellenkező esetben pedig a hibás helyeket felfedezvén, kiigazíthassa. Különben azok a hivatalos vizsgálat — hitelesités — alkalmával napfényre jövén, a munka elvetését vonhatják magok után, s a közönségnek a mérnökben vetett bizodalmát megingatják.

A térkép megvizsgálása különböző módon eszközöltethetik, ú. m.

1) Ha a szelvény még az asztaltáblán van: akkor az asztalt egy alkalmas helyen felállitván, az álláspontot a legnagyobb szigorral hátrametszük; azután a szomszédban fekvő dülőnek két hosszú oldalán rudakat állitván fel, ezekre irányvonalakat húzunk, melyek a papiroson megfelelő vonalakat metszik. Ezen metszéspontokat egyenes vonallal összekötvén, a mezőn kitűzött átlónak képe áll elő, mely a mezsgyéket metszi. Ezután a figuráns az átlónak a mezsgyéket metsző pontjaiban a lobogót felállitván, a mérnök az asztalon ezen pontokra irányoz, s ha a vonalak az átlónak a mezsgyéket metsző pontjain mennek keresztül: akkor a felvétel helyes, ellenkező esetben az eltérésből a hiba nagyságát meg lehet itélni. Az egész műtétel a 236. §-ban előadott felvételi móddal rokon.

Magában értetik, hogy ezen vizsgálati mód csak addig ad biztos eredményt, mig az asztaltábla az összehúzódás által változást nem szenvedett, úgy hogy az álláspontot egész szigorúsággal meg lehet határozni; különben a vizsgálatnál mutatkozó hibák nagyobb részint a vizsgálati műtétel által okoztatnának, s belőlök a munka minőségét megitélni nem lehetne.

2) Ha a szelvény az asztaltábláról már levan véve, vagy az egész térkép össze van állitva, akkor a dülőkön keresztül lánczczal átlókat kell mérni s azon méreteket, melyekben az átló a mezsgyéket metszi, sorjában le kell olvasni, s a térképen megfelelő vonalakkal összehasonlítni. Az átlóknak végpontjait vagy háromszögelési, vagy más szilárd pontokban kell választani, melyek a felvétel alkalmával meghatároztattak, minők a határdombok kövek stb., s ha a hosszak 5—600 ölnél $^1/_{1000}$ vagy $^1/_{800}$ részig helyeseknek találtatnak, akkor a munka helyes. Hegyes vidéken, kedvezőtlen körülmények közt rövidebb vonalak megmérésével is meg kell elégednünk, s ilyen esetekben 1—200° hosszú vonalaknál $^1/_{600}$ résznyi hibát is el lehet nézni, mivel azok absolut értékei még csekélyek.

Ezen átlókat úgy kell választani, hogy azok a mezsgyéket jó szög alatt messék; különben az egyenes vonaltóli eltérés, ha az a vonal hosszára még káros hatást nem gyakorol is, a mezsgyék metszéspontjaiban érezhető változást okoz. Legyen a metszésszög α, az egyenestőli eltérés p, akkor a metszéspont kimozdulása helyéből a lánczvonalon $= p \cot g \alpha$, mely már 45°-nál egyenlő az egyenestőli eltéréssel, kisebb szögeknél pedig még sokkal nagyobb.

Némely mérnökök tüskön bokron keresztül a torony irányában igen hosszú, több dülőket keresztülmetsző átlókat mérnek próba gyanánt. Elnézve az előbb felhozott körülménytől, hogy az átló fekvése egyik vagy másik dülőhöz képest kedvezőtlen lehet. tehát a mérés által felfedezett hibák nagy része bizonyosan a próbamérés rovására irható, ezen módot ajánlani nem lehet, Mert igen hosszú vonalakban az elkerülhetetlen mérési hibák már olyan nagyra növekednek, hogy a próbamérés méreteiben bízni nem lehet, s ha történetesen a próbamérési hiba ellenkező értelemben hat, mint a felvételben elkövetett hiba: akkor az összeg a megengedhető hiba határát ághághatja, s a térkép helyes volta feletti itéletet meghamisíthatja. Továbbá kétséget sem szenved, hogy a térkép, mint gyarló kéz munkája, elkerülhetlen hibákkal bír, melyek helyenként összehalmozódnak s érezhetőkké lehetnek. Ezen hibákat a mérnöknek lehetőleg a haszonvehetlen és csekély értékű helyekre kell terelni, minők p. o. a dülők közti útak, árkok stb. Ha tehát egy átló több dülőkön megyen keresztül, megtörténik, hogy az első dülőben a méretek a mező és térkép közt megegyeznek egész a dülő széléig, de a másik dülő szélén már ugrás mutatkozik, s ezen hiba a következő mezsgyékben állandó marad. Ezen esetben tehát az egész dülő el van helyéből mozdulva egy darabbal, de azért az egyes telkek méretei hibátlanok s a hiba, mely az útban mutatkozik, a munka jóságának nem árt. Czélszerűbb tehát a dülőket egyenkint vizsgálni meg, s nehány 4—500^0 hosszú vonalból a munka minőségét egész biztossággal meg lehet itélni.

3) Ha egy erdős vidék térképét kell megvizsgálni, akkor vagy a körületnek egy darabját kell felvenni az asztallal, vagy ha lehet, egy pár átlót kell kitűzni és megmérni az erdőn keresztül. A felvételi mód tökéletlensége miatt olyan nagy pontosságot nem lehet várni, mint nyilt téren, hanem $^1/_{500}$, sőt igen meredek, bokros és szaggatott körületben $^1/_{400}$ pontossággal is meg lehet elégedni.

VI. SZAKASZ.

A térkép kidolgozása.

244. §.

A felvétel által egy térkép áll elő, mely a telkek alakját és nagyságát kicsinyített mértékben ábrázolja. Ezek a telkek alaptulajdonságai gyanánt tekintendők, melyekről a térképnek teljes felvilágosítást kell nyujtani; de általok a térkép rendeltetése még nincsen kimerítve, hanem megkivántatik, hogy az a telkeknek egyéb tulajdonságairól is értesitést adjon. Ezen tulajdonságok vagy a telkeknek gazdászati használatára, vagy a földszinnek emelkedési vagy domborzati viszonyaira vonatkoznak.

E szerint a térképeket meg szoktuk különböztetni gazdászati és helyszinrajzi (topographicus) térképekre.

Az elsőkben a különféle földművelési tárgyak, mint p. o.

a szántóföldek szőlők rétek legelők kertek erdők, valamint a természet és mesterség által alkotott művek, minők a folyóvizek patakok források csatornák hidak révek útak töltések épületek stb. megjelölésére fordíttatik legnagyobb gond, s részint különböző jelek, részint különböző színek által tétetnek felismerhetőkké.

Az utóbbiaknál a föld domborzatának megismertetése a főczél, mint azt a katonai czélokra készített térképeken látjuk; de az más technikai munkálatoknál is, p. o. vasuti vonalak csatornázások feltöltések, sőt néha egyes épületek tervezésénél is fontos szerepet játszik. Ezen térképeket néha színezve is, de többnyire csak fekete rajzolatban szokták készítni.

A domborrajzok készitésének elméletét ezen könyv végén fogjuk tárgyalni; itt tehát csak a gazdasági térképek kiállitásáról fogunk szólani.

245. §.

A térképek rajzolása a rajztannak egy ágát képezi, azért részletekbe ereszkedni nem akarunk; csupán csak nehány általános szabályt fogunk megemlítni, melyek a dolog természetével szoros kapcsolatban vannak.

1) A térképen az alakok lévén a főtárgy, mindenekelőtt ezekre kell a fő figyelmet fordítni. Ezért minden olyan rajzmodort, mely az alakok körvonalainak megsértését vonja maga után, minő p. o. az árnyékolás, mellőzni kell.

2) A körvonalakat egyforma tökéletesen fekete s annál vékonyabb vonalakkal kell kihúzni, mennél nagyobb a térkép kicsinyítése, mivel a vonal vastagságából a méretekre háramló bizonytalanság annál nagyobb.

3) A szinezésnél minden földnemű festékeket, melyek a papirost eltakarják, ennélfogva a körvonalakat elfödik, ha lehet, kerülni kell, és csak átlátszó növénylébőI álló festékeket kell használni.

4) A színek lehetőleg állandók legyenek, melyek idő folytán meg nem változnak.

5) Azok minden megjelölendő tárgyakra nézve lehetőleg a természethez hívek, s azzal megegyezők legyenek. E szerint a szántóföldeket a felszántott föld sárgásbarna, a szőllőket a szőllővessző veresesbarna, a réteket a zamatos zöld, a legelőket fa-

kóbb, az erdőket sötétzöld színnel kell jelölni. A vizeket kék, a kőépitményeket veres, a fából készülteket sárga színnel szokták festeni.

6) Mennél nagyobb valamely terület, annál higabban, vagy vízzel jobban feleresztve kell a festéket alkalmazni; mivel az a nagy tér miatt úgy is elég hatással bir.

7) Olyan színeket, melyek lassan száradnak, azért foltokat nem okoznak, csak egyszer, s mindjárt azon erőben kell feltenni a papirosra, milyennel annak birni kell. Ilyenek a zöld, a barna szín. Ellenben a gyorsan száradókat, minők a carmin és a tus, jobb gyengébben, s kétszer rakni fel egymásután a papirosra, megszáritván azt előbb; igy nem fognak olyan könnyen foltokat okozni.

8) Hogy a színekben összhangzás legyen, legelőször a legnagyobb területhez tartozót kell feltenni, s ehhez kell a többinek alkalmazkodni. Igen kirivó sötét szinezés kellemetlen benyomást okoz; más oldalról pedig a fakó halvány szinezés is olyan képet ád a rajznak, mintha az már régi kopott volna.

9) A földművelési tárgyak, természeti és mesterségi művek megjelölésére alkalmazott, s többé kevésbbé szabad tetszés szerint választott jegyeknél is a mennyire lehet a természetnek megfelelő alakokhoz kell közeledni. Ezeket némelyek vizszintes vetületben, mások oldalnézetben, mintegy a földre lefektetve rajzolják. Az elsőbb modor következetesebb, de nem oly világos és érthető képet ád, mint a második és csak művészi kidolgozásnál ád kielégitő eredményt. Ezen szempontból kell a fák bokrok szőllőtőkék füvek sás homokbuczkák kőbányák stb. jelvényeit megitélni. Ezek vagy mindjárt a körvonalak kihúzása után rajzoltatnak, s ha a térkép feketén készen van és tiszta vizzel leöntetett, vagy gyengén lemosatott, hogy a felesleges tus eltávolittassék, utoljára festékkel bevonatik; vagy pedig megforditva a körvonalak kihúzása, és a térkép lemosása után a festékeket lehet felrakni, azután ezekre rajzolni fel nem egészen fekete tussal a műveleti jelvényeket. Mind a két mód alkalmazható. Az utóbbi ügyes kezek közt rendesen élénkebb szabatosabb eredményt ád; de ügyetlen rajzolónál könnyen nagy baj forrásává válik, mivel a kimosás nehézségei miatt a hibák kijavitását, a nélkül hogy szembe ne tünjenek, csaknem lehetlenné teszi.

246. §.

A használt festékek:

1) D o h á n y l é, sárgásbarna, szántóföldekre.

2) K é k v i t r i o l, (Grünspan). | Egymással keverve pázsit-zöld színt adnak.

3) K e r e s z t b o g y ó l é, (Rhamnus tinctoria).

4) B e r l i n i k é k

5) C a r m i n.

6) Chinai fekete t u s.

7) U j z ö l d, fák árnyéklására.

8) T e r r a d i s i e n a kősziklák stb. szinezésére használtatik. S z ő l l ő k dohánylé carmin és tus keverékével szineztetnek. E r d ő k czélszerűen előbb fakó hamuszinű tussal, azután ha a festék megszáradt, pázsit-zöld színnel vonatnak be, mi szép sötétzöld színt ád s mindenesetre természetszerűbb, mint a némelyek által használt tiszta fakó, vagy hamuszín szürke tus színe.

247. §. Irás.

A legszebben kidolgozott térkép is csak akkor fog kellemes benyomást gyakorolni a szemlélőre, ha az szépen van megirva. Ezért az irásra kitünő gondot kell fordítni. Az irás, valamint a rajzolási modor is nagyobbrészt az izlés dolga; mindazáltal itt is lehet néhány általános szabályokat felállítni, melyek zsinórmértékül szolgálnak, u. m.

1) Az irásra mindennemű betűket lehet használni; de a nyomtatási álló és dült betűk czélszerűbbek, mert jobban szembetűnnek, mint az irásbeli vagy folyó betűk.

2) Mennél egyszerűbb az irás, annál inkább megfelel az a fő feltételnek, melyet mindenesetre az olvashatóságban kell keresnünk. Ezért czikornyás betűket kerülni kell.

3) Az irást a térképen olyan helyre kell helyezni, hol az az alakok körületét meg nem sérti. A neveket a megnevezendő tárgyakba, vagy azok közelébe kell irni, hogy azok jelentéséről semmi kétség se támadhasson.

4) Az irásnak a szükséghez képest különböző irányt lehet adni; de a betűket különböző helyeken fővel egymás felé fordítni nem kell, mert az az olvashatóság rovására történnék.

5) A betűk nagyságát a tárgy fontosságához kell mérni.

6) A czímlapokon művészibb kidolgozást lehet adni a be-

tűknek, mivel azoknak alkalmazására elég tér van. Ezért azoknál a törtbetűk (Fracturschrift) árnyéklattal, sőt színezett modorban is hatályosan alkalmazhatók.

248. §. Másolat.

Ha valamely eredeti térképről másolatot kell levenni, ez két különböző feltétel alatt kivántatik, t. i. a másolat léptéke vagy ugyanaz, a mi az eredetié, vagy attól különbözik. Ezen utolsó esetben a másolat léptéke rendesen kisebb, mint az eredetié; mert ha a térképet nagyítni kellene, a benne lévő hibák is aránylag nagyíttatnának, s az eredmény ritkán fogna kielégitő lenni.

Ha a másolat léptéke az eredetiével egyenlő, akkor következő módokat lehet alkalmazni:

1) Ráfektetjük az eredetit a kellőleg felragasztott papirosra, és a pontokat finom tűvel á s z u r k á l j u k. Ha a tű igen finom és a papirosra merőlegesen kezeltetik: akkor a másolat az eredetivel egészen megegyezik, s igen jó eredményt szolgáltat. A papiros fel lehet már vászonra is ragasztva, a nélkül, hogy az a mód használatát korlátozná; azért a szelvények térképpé összeállitásakor mindig ezen módot szoktuk használni. De sokszori ismétlés után az eredeti térkép pontjai a tűszúrások miatt kitágulnak, s a pontosságot egészen elvesztik.

2) Ü v e g e n á t r a j z o l j u k az eredeti térképet. Néha csak pillanatnyi használatra kell a másolatot készítni; ekkor vastag papiros helyett, szalma vagy olajjal bekent papirost, vagy másolati vászont lehet használni, mely olyan vékony, hogy ha az eredeti térképre boríttatik, a vonalak átlátszodnak, s tussal kihúzathatnak. A vászonra még festeni is lehet, a nélkül, hogy a festék elfolynék a felületen. Ezen mód gyors alkalmazhatósága miatt különösen vázlatok (Skizze) gyors készítésére használtatik.

3) A vastag rajzoló-papiros átlátszósága tetemesen növekedik, ha világosság vettetik a papiroson keresztül. Ezen czélra szolgál a m á s o l ó - a s z t a l, mely egy falábakon megerősített ferde fekvésű üvegtáblából áll, s alatta egy tűkör van helyezve, mely a világosságot a papiroson át a szembe veti.

Ha a másolat léptéke különbözik az eredetiétől: akkor következő módokat lehet alkalmazni.

4) Bevonjuk az eredetit egy négyzet hálóval, melyet lószőrszálaknak egy rámában kifeszítése által is lehet előállítni, s a másolati táblára egy hasonló négyzethálót rajzolunk, melynek méretei az eredetiéhez úgy állanak, mint a másolat és az eredeti léptékei. Az egyes pontok fekvését a megfelelő négyzetek szerint vagy szabad szemmel, vagy körző segítségével aránylagosan kell az eredetiről a másolatra áttenni a szerint, a mint kisebb vagy nagyobb pontosság kivántatik meg.

5) Húzzunk a térképen keresztül egy összrendező rendszert, s az egyes pontokat ennek tengelyeihez képest meghatározván, azokat aránylagosan átváltoztatva tegyük fel a másolatnak hasonfekvésű összrendező tengelyeire. Czélszerű a tengelyeket olyan vonalak irányába fektetni, hol igen sok pont van egy rakáson, s egy térképen annyi ilyen rendszert lehet felvenni, a mennyit szükségesnek látunk; csak arra kell vigyázni, hogy ezen rendszerek egymással összeköttetésben legyenek.

249. §.

Az előbbi §-ban megkivántatott, hogy az eredeti térképről levett vonalak bizonyos viszony szerint átváltoztatva tétessenek át a másolatra. Ezen átváltoztatást egyszerűbb esetekben egy körzővel próbálgatás által is lehetne eszközölni: de ez igen fáradságos munka volna. Ennek könnyítésére különböző műszerek vannak használatban, u. m.

1) Két lépték, egyik az eredeti, másik a másolat számára. Legyen p. o. egy térkép $^2/_3$ részre kicsinyítendő, akkor készitünk két léptéket, melyek egymáshoz ugy vannak, mint $1 : {}^2/_3 = 3 : 2$-höz. Az egyiken lehet venni $1'' = 30^0$, a másikon $1'' = 20^0$-nek. Ha most az eredetiről egy hosszat leveszünk, ezt a húszas léptékkel megmérjük; azután a nyert számnak megfelelő hosszat a 30-as léptékről le kell venni, s ez a hossznak $^2/_3$ része fog lenni.

Mind a két léptéket ugyanazon rend szerint kell beosztani és számozni, akkor a leolvasás könnyebb, és hibáktól mentebb fog lenni.

A Galiläi-féle arányos körző (Proportional-Zirkel) (276. ábra.) Ennek körzőforma csuklóval ellátott, párhuzamos élű szárai vannak, s a csukló forgáspontjából mind a két száron egyenlő részekre beosztott egyenes vonal van húzva, és a beosztás folyó számokkal számozva. Tegyük fel most, hogy egy vonalat egy körzővel levettünk a térképről, s ezt p. o. $^2/_3$ részre kell változtatnunk: akkor az arányos körző nyilását ugy kell beállítnunk, hogy a körző hegyei a 60-as számu pontokba illjenek, ennélfogva a 60—60 átló a körzővel levett vonal hosszával egyenlő legyen. Most ezen nyilást megtartván, a körzővel a 40—40 átló hosszát kell levenni; ez lesz a keresett vonal. Épen ugy lehetne a hosszakat más két olyan pontnál is levenni, melyeknek viszonya egymáshoz 3:2, p. o. 30 és 20, vagy 90 és 60, 120 és 80 stb.

3) Áttételi körző (Reductions-Zirkel) (277. ábra). Ez egy négyágu körző, melynek csuklóját helyéből tetszés szerint ki lehet mozdítni, és minden állásban meg lehet szorítni, hogy a körző kinyitására szilárd fekvésű forgástengelyt szolgáltasson. E végre a körző szárain parallel oldalu nyilások vannak áttörve, a csukló pedig ezen nyilásokba illő, gyengén hasáb alakú darabokba van csinálva, melyek a csukló szoritó csavarja által a nyilásokba gyengén benyomatnak. A körző felső lapján beosztás van alkalmazva, melynek vonalai mellé a kicsinyítési viszonyok $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4 \ldots {}^1/_{10}$ vannak felirva; a hasábon pedig egy mutató vonás van húzva. Célszerű a másik lapon egy más beosztást alkalmazni, mely előáll, ha a körző szárának hossza 100 egyenlő részre osztatik, s ezen beosztásnak azon része, mely a körző lapos oldalára esik, bevésetik és számoztatik.

Ezen műszer alkalmazása igen egyszerű. Ha p. o. a térképet felényire kellene kicsinyítni: akkor a mutató vonást $^1/_2$-re kell beállítni, s a csukló szoritó csavarját meghúzni. Ezután a körző hosszabbik szárával a vonalat a térképről levévén, a rövidebb szárak hegyei közt lévő hossz lesz az átváltoztatott vonal.

Miképen kell a viszonyszámoknak megfelelő osztályvonalakat meghatározni, következőből érthető. Legyen $AB = CD = l$, $AO = x$, az eredeti viszony száma $= E$, a másolaté $= M$; akkor az AOC és DOB hasonló háromszögekből lesz:

$$l - x : x = E : M, \text{ s innen } x = l \frac{M}{E + M}.$$

Könnyű átlátni, hogy a hegyeket összekötő vonalnak a nyilásokkal párhuzamosan s a forgásponton O kell keresztül menni, különben a háromszögek nem volnának hasonlók. A beosztás csak addig helyes, mig a körző szárainak hossza nem változik. Ezért ezen körzőt nehéz készítni és óvatosan kell kezelni, hogy a hegyek el ne romoljanak.

250. §. Pantograph.

Ezen, Scheiner Kristóf jezsuita által a XVII. század első felében feltalált műszer az előbbiektől hatása által lényegesen különbözik; mert ezzel a térkép másolata közvetlen rajzolás, nem pedig egyes pontok felrakása által állíttatik elő. Ezen műszer két alakban készíttetik.

1) A régibb szerkezet a 278. ábrából látható. Ebben *ABCD* egy párlagot ábrázol, melynek sarkpontjai csuklókkal vannak felszerelve úgy, hogy annak szögét tetszés szerint lehet változtatni. Az *AB* és *BC* rudak hosszában helyökből elmozdítható, de minden állásban megszorítható tokok, s ezeken a készülék lapjára merőlegesen álló csővecskék vannak megerősítve. Ezek közül *F*-ben egy henger alakú, végén irónnal ellátott, könnyen mozogható peczek van helyezve, melyet, ha az irón hegye elkopik, hogy tisztábban írjon, súlyocskák által tetszés szerint meg lehet terhelni. Ezen peczek úgy van felszerelve, hogy ha a rajzoló az irón működését meg akarja szüntetni, azt egy zsinór meghúzása által könnyen felemelheti. *O*-ban egy középponti forgástengelyt képző, s egy nehéz ólom súlyban megerősített peczek van beillesztve; s végre *E*-nél egy lyukban szintén egy hegyes aczélpeczek van megerősitve. Egyébaránt az *F* és *E*-ben lévő peczkeket egymással fel is lehet cserélni. Az *ABF, BOC, ADE* és *FOE* pontoknak egyenes vonalakat kell képezni. Az egész készülék, hogy könnyebben mozoghasson, 4 könnyű kerekecskén nyugszik, melyek mind függélyes, mind vizszintes tengelyek körül igen könnyen foroghatnak.

2) Ha ezen műszer a felhozott feltételeknek eleget teszen: akkor akármely irányban mozdíttatik ki az *E* peczek helyéből egy egyenes vonalban EE', — miközben a készülék mind az *O* forgástengely körül fordúl, mind pedig az *A, B, C, D* csuklókban is fordulások mennek véghez, — az *F* pont mindig egy, az EE'-vel párhuzamos, és ezzel állandó viszonyban lévő egyenes vonalat FF' fog leírni.

Ugyanis az F', *O*, E' pontok ezen mozgás után is szintén egyenes vonalban fognak esni. Mert az FBO és FAE hasonló háromszögekből lesz:

$$FB : BO = FA : AE,$$

úgyde $F'B' = FB$, $A'B' = AB$, $B'O = BO$, és $A'E' = AE$, tehát helyettesítvén, ezen aránynak is állni kell:

$$F'B' : B'O = F'A' : A'E'.$$

Ezen arány a készüléknek a mozgás utáni állására vonatkozik, melynél az $A'B'F'$, $B'OC'$, $A'D'E'$ vonalak a szerkezetnél fogva egyenesek lenni meg nem szűntek; tehát az $F'OE'$ vonalnak is egyenesnek kell lenni, mint FOE volt, az első állásban.

Továbbá ugyanazon háromszögpárokból következik:

$$FO : OE = FB : BA,$$

$$F'O : OE' = F'B' : B'A'.$$

úgyde $FB = F'B'$, $BA = B'A'$, tehát

$$FO ; OE = F'O : OE'.$$

E szerint az OFF' és OEE' háromszögeknek két megfelelő oldalai párhuzamosak lévén, és állandó viszonyban állván egymáshoz, ezen háromszögek hasonlók; ennélfogva a harmadik oldalaknak is párhuzamosoknak és ugyanazon állandó viszonyban állóknak kell lenni.

Innen következtetni lehet, hogy ha az E peczek egy sokszögnek karimáján körül vezettetik: az F irón egy alakot fog leírni, mely a körüljárt sokszöghöz hasonló; mivel a megfelelő oldalak egymással párhuzamosak s állandó viszonyban állanak egymáshoz.

3) Hogy az F, O, E, egy egyenes vonalba eső pontokat fel lehessen találni, a BG és BC rudacskák be vannak osztva, s az F és O tokok mutatókkal ellátva, melyeket a megfelelő osztálypontokra kell beállítni. Miképen kell ezen beosztást eszközölni, hogy az egymásnak megfelelő pontok egy egyenesbe essenek, így lehet meghatározni. Legyen $AB = l$, $BF = x$, $BO = y$, $AE = l'$, az eredeti viszonyszáma E, a másolaté M, akkor a fentebbi háromszögekből lesz:

$$x : l = FO : OE = FF' : EE' = M : E,$$

és $$x : y = l + x : l'.$$

Az első arányból következik:

$$x = l\frac{M}{E},$$

az utóbbiból

$$y = \frac{l'x}{l + x}.$$

Ezen egyenlet világosan mutatja, hogy y, x-el nem egyenes viszonyban növekedik; azaz: ha a BG vonal egyenletesen van is beosztva, a BC beosztása nem egyenletes, hanem B-től C felé kisebbedő részekből áll. Helyettesítsük x helyett a fentebbi értéket, akkor lesz:

$$y = l' \frac{M}{E + M}.$$

Az x és y értékeit az áttételi viszony $\frac{M}{E}$ különböző értékeire nézve kiszámitván, a nyert eredmények a BF és BC rudakra feltétetnek, és a vonások mellé a viszonyszámok iratnak. De ezen beosztáson kivül rendesen még egy másik is van a pantographon alkalmazva. Az $AB = l$, t. i. rendesen 40 részre osztva gondoltatik, s ezen részek B-n túl is G felé felé felrakatnak. A beosztás a BC rúdon is a y képlete szerint eszközöltetik, s az egymásnak megfelelő pontok mind a két rúdon egyenlő számokkal jelöltetnek meg.

Ezen egyenlőtlen beosztás a pantograph készitését igen nehezíti; azért már ma rendesen az újabb vagy majlandi pantographot szokták csinálni.

251. §. Majlandi pantograph.

1) A majlandi pantograph szerkezete a 279. ábrából látható. A, B, C, D szintén egy csuklókkal ellátott párlagot ábrázol, mely az EF keresztrúd által két kisebb párlagra osztatik. Az EF rúd végein szintén csuklókkal ellátott tokok vannak, hogy azokat az AB és CD rudak hosszában tetszés szerint tolni és megerősítni lehessen. Ott, hol az AC átló az EF rudat metszi, egy tok s ezen egy cső van megerősítve, melybe a forgástengelyt képző peczek van illesztve. Az aczélpeczek A-nál, az irón pedig C-nél van helyezve. Az AEB, DFC, EOF és AOC pontoknak egyenes vonalakban kell lenni. A $BA = CD$, és FE hosszak egyenlő számú egyenlő részekre vannak beosztva, és egyenlő módon számozva. A kivitel és a mozgások könnyítése végett a párlagnak AD oldalát el is lehet hagyni, mint azt a Bécsben készült pantographokon lehet látni.

2) Hogy valamely áttételi viszonynak melyik osztályvonal felel meg, így lehet meghatározni. Legyen $AB = l$, $BE = CF = x$, $BC = l'$, $FO = y$, akkor a CFO és CBA hasonló háromszögekből lesz:

$$x : l - x = CO : AO = M : E, \quad \text{és}$$
$$x : y = l : l'.$$

Ezekből következnek:

$$x = l\frac{M}{E+M},$$
$$y = x\frac{l'}{l} = l'\frac{M}{E+M}.$$

Látnivaló, hogy ezen képletek szerint y épen úgy képződik l'-ből, mint x, l-ből, tehát mind a kettőt egyenletes beosztással lehet ellátni. A bécsi pantographokon $AB = BC = 24''$, s egy hüvelyk még 10 részre van beosztva; de ezen beosztás mellett még $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ . . . $^1/_{20}$-nek megfelelő vonások is vannak húzva. Az iró peczek felemelésére szolgáló szerkezetet a gépészek különféleképen csinálják, s a műszer szemlélése által könnyen meg lehet érteni.

252. §.

A pantograph használata igen egyszerű.

1) Legelőbb is az irónt kell kúp alakra meghegyezni, hogy annak hegye a henger alakú tartó tengelyébe essék. Ennek megvizsgálására a pantographhoz rendesen egy kis cső van hozzáadva, melynek fenekén a tengelynek végpontja meg van jelölve; ebbe kell tehát az irón hegyének találni. Azután a mozogható tokok mutatóit a beosztásnak azon pontjaira kell beállítni, és megszorítni, melyek az áttételi viszonynak megfelelnek, s a készüléket egy széles asztalra az eredeti térkép mellé helyezvén úgy, hogy az aczélpeczekkel a térképnek minden pontját el lehessen érni, az irón alá a másolati ívet úgy kell fektetni, hogy a másolat a papirosnak kellő helyére essék. Ezen fekvésben az íveket az asztaltáblához széles és lapos fejű szögecskékkel több helyen le kell foglalni, hogy a kerekecskék a papiros szélén könnyen átgördülhessenek. Most a rajzolást meg lehet kezdeni, figyelvén arra, hogy az aczélpeczek szorosan az alak karimáján járjon; s valahányszor egy idom körül van kerítve, s az aczélpeczket más sokszögre kell átvinni, az irónt fel kell emelni, hogy haszontalan vonalakat

ne rajzoljon. Ha az irón gyenge vonalakat húz, súlyocskákat kell rá rakni; s ha igen vastag vonalakat csinál, újra kell hegyezni.

2) Ha az eredeti térkép olyan nagy, hogy azt az aczél-peczekkel egyszerre körülkerítni nem lehet, vagy ha a térkép több szelvényekből van összetéve: akkor darabonként kell a másolást véghezvinni. Mihelyt egy darab, vagy szelvény készen van, a készüléket el lehet mozdítni, úgy intézvén a dolgot, hogy az aczél-peczek a következő darabot, illetőleg szelvényt elérje, s az iró peczek a másolatnak azon helyére essék, a hol a másolat folytatása következik. Mindenek előtt az eredeti és másolati térképeket párhuzamos fekvésbe kell hozni. Ezt eleinte szabad szemmel lehet eszközölni, azután próba gyanánt az aczélpeczket az eredetinek valamely pontjára állítjuk, s a forgástengely súlyát addig mozdítjuk ki helyéből, míg az irópeczek is a másolat megfelelő pontja felibe esik. Ezután az aczélpeczket az eredeti térképnek egy másik, az előbbitől igen távol eső pontjára helyezzük; ha az irópeczek szintén a másolat megfelelő pontjára mutat, akkor a parallelismus helyes, s a beállitás tökéletes. Ellenkező esetben egyik vagy másik íven egy kicsit fordítni s a próbát ismételni kell, míg az egészen összevág.

253. §.

A pantograph szerkezete igen összetett lévén, hibáktól ritkán ment, különösen a holt mozgások elkerülése igen nagy nehézséggel jár. Ennek megvizsgálása legegyszerűbben következő módon eszközölhető.

1) A mutatókat úgy beállítván, hogy az $E:M = 1:1$ legyen, nyújtsuk ki a készüléket, hogy a peczkek a forgásponttól lehető távol essenek. Ezen állásban a forgási csuklókat megszorítván, szúrjunk be mind a két peczekkel finom pontokat az asztalba. Ezután fordítsuk át a készüléket 180^0-al, a nélkül, hogy a vonaszok hajlásszögei változást szenvednének, akkor a peczkeknek ismét a lyukakba kell esniök. Ugyan ezt kell ismételni a peczkek olyan helyzetében is, midőn azok a forgásponthoz lehetőleg közel vannak beállítva.

2) Másoljunk le egy nagy méretű rendszeres idomot, p. o. egy kört, vagy egy négyzetet, melyet sárgaréz-lemezből lehet

kimetszeni, és hasonlítsuk össze előbb a másolatnak különböző átmérőit, vagy oldalait és átlóit egymással, azután pedig az eredetinek megfelelő méreteivel.

3) Még finomabb próbát ád, különösen a holt mozgások felfedezésére, ha az irókészülékbe irón helyett egy aczélhegyet erősítvén meg, a készülékkel valamely irást lemásolunk. A másolaton nem szabad semmi olyan csúcsoknak, szögletességeknek látszodni, melyek az eredetin hiányoznak. Ezen próbát ritka pantograph állja ki.

4) A pantographphal nagyobb pontosságot elérni, mint a mely egy irónnal kedvezőtlen körülmények közt rajzolt térképtől várható, nem lehet, s a hibák annál nagyobb befolyással lesznek a rajzolásra, mennél kisebb a lépték. Azért a pantographot csak átnézeti térképek készitésére lehet használni; olyanok rajzolására, melyek térszámításra, vagy beosztásra használtatnak, az teljesen alkalmatlan.

254. §. Felragasztás.

Ezen szakasz záradékául legyen megemlítve, miképen kell a térképet vászonra felhúzni, mint ezt azon eredeti térképeknél látjuk, melyeket a mérnök az illető birtokosok használatára készít. Ezek a hitelesítés által nyilvános okmányokká válván, a gyakori használat által az elrongyollásnak igen ki vannak téve, s az időelőtti szétszakadástól a vászonra való felfeszítés által óvatnak meg.

A felhúzást mindig a tiszta papirossal a másolás előtt kell véghezvinni, s ha a papiros tökéletesen meg van száradva, akkor kell csak a másolathoz fogni. Már készen lévő térképek a felhúzás által megnedvesedvén, könnyen változást szenvednek s pontosságukat elvesztik.

A felhúzás módja ez: legelőbb a kellő széles és hosszú vászondarabot kifeszítvén a rajztáblán, annak széleit szögekkel meg kell erősítni. Ezután egy nagy ecsettel keményítőből főtt csirízt kenvén a vászonra, ezt tenyérrel egyformán el kell mázolni a táblán, hogy a szövet a deszkához ragadjon. Ha néhol fehér foltok látszodnak a vásznon, ez annak a jele, hogy ott a vászon alatt légbuborékok vannak; ezeket a tenyérreli dörzsölés által ki kell hajtani, míg az egész felület egyenletes szürke színt nyer, s a vászon egész felületén a deszkához van tapadva. Ezután a rajzoló papiros hátát szintén gyengén be kell kenni csirízzel, s rá tévén azt a vászonra, egész felületén rá kell dörzsölni. Ha hólyagok mutatkoznának, azokból tűszúrások által a léget ki kell ereszteni a papiros alól, s addig dörzsölni, mig a papiros egész felülete a vászonhoz tapad.

Ha két vagy több ív papirost kell egymás mellé ragasztani, akkor azokat egy ujjnyi szélességben egymásra kell fektetni, de hogy a papiros vastagabb ne legyen mint más helyen, az ívek széleit előbb egy éles késsel ferdén le kell faragni, azután kell a vászonra ragasztani.

A vászonra kellőleg felhúzott rajzolat a deszkától elválik, de a papirost a vászonról levenni nem lehet. A felhúzott térkép nincs annyira kitéve a nedvesség általi változásnak, mint a tiszta papiros, és vagy tárczába, vagy ha az igen nagy, fahengerre gyöngyölve és vastag tokokba pakolva századokig eltartanak.

II. OSZTÁLY.
Térmértan.

I. SZAKASZ.
Térmeghatározás.

255. §.

A felvétel czélja a térkép előállítása által nagy részben el van érve, s ezzel a mérnöki munkálatok igen sok esetekben be vannak végezve. De midőn birtokszabályozás elkülönzés tagosztály kisajátitás megváltás osztozás stb. forognak fenn, hátra van még a tér meghatározása, illetőleg annak bizonyos feltételek szerinti beosztása. Ezen műtételek egyszerűbb esetekben a mezőn közvetlen véghezvitt mérések által is véghezvihetők; de a feladat többnyire olyan bonyolódott, hogy az annak feloldására szükséges adatokat a közvetlen mérésektől kölcsönözni ritkán lehet, hanem azokat a térképről kell levenni. Ezen osztályban tehát: ha másképen nyilván kikötve nincs, a méréseket mindig a térképen kicsinyített mértékben véghezvíve kell gondolnunk, s a beosztást előbb a térképen hajtjuk végre, az eredményt azután később kell a mezőn kitűzni.

256. §.

Valamely terület nagyságáról kétképen lehet fogalmat szerezni, u. m.:

1) Ha az egyszerű idomba, p. o. három- vagy négyszögbe átváltoztatva állíttatik elő, mely alakban két tért egymással egyszerű mértani törvények szerint össze lehet hasonlítni.

2) Ha annak nagysága a téregységgel összehasonlítva, tehát számokban fejeztetik ki.

Az elsőbb tisztán szerkesztési módokra vezet; az utóbbi pedig számitási alapokra fektetett feloldásokat szolgáltat. Az utóbbi nagyobb fontossággal bír, mert a legösszetettebb esetekben is alkalmazható; mig az előbbi csak egyszerűbb példákban ád kielégitő eredményt. Mindazáltal a szerkesztési feloldások kivált ellenőrködési czélokból mint gyorsabb, s kellő figyelemmel s óvatossággal alkalmazva, igen haszonvehető módok is figyelmet érdemelnek.

257. §. Átváltoztatás.

1) Miképen kell egy sokszöget mássá átváltoztatni, melynek egygyel kevesebb szöge van, az elemekben előadatik, megjegyezvén, hogy az átváltoztatás szabályai még akkor is érvényesek, ha a sokszög oldalai egymást metszik. Tulajdonképen mindegy, akármely pontokat és akármilyen renddel pusztítjuk el : de itt is, mint mindenütt, oda kell törekedni; hogy a metszési szögek jók legyenek, különben az átváltoztatás eredménye kevésbbé lesz kielégitő. Ha ezen szabályok egymásután kellő számmal alkalmaztatnak, a sokszög végre egy háromszöggé változik.

2) Egy sokszögnek háromszöggé átváltoztatása a gyakorlatban igen egyszerű és gyors módon következőképen hajtható végre: meghosszabbítván (280. ábra) a sokszögnek egyik 1,9 oldalát, a rajzháromszög egyik élét az 1,3 pontokhoz illesztjük, s a háromszöget párhuzamos mozgással a 2 pontra tolván, a háromszög élének azon pontját *a*, melyben az az alapot metszi, egy finom tű hegyével megjelöljük. Ezután a háromszög élét *a*,4-re beállítván, azt ismét párhuzamosan eltoljuk, míg az a 3 ponton megyen keresztül, s a metszéspontot *b* a tűvel ismét megjeleljük, s i. t. Jelen esetben a 4 pontnál meg lehet állapodni, s a 4,*b* átló lesz a háromszög egyik oldala. Ezután a 9 pontból kiindulván, hasonló módon határozzuk meg a *c*, *d*, *e*, *f* pontokat, s a 4,*f* átló képezi a háromszög második oldalát, a harmadikat *fb* ábrázolván.

3) Még kényelmesebben lehet az átváltoztatásra a 281. alakban látható készüléket használni. Ez áll két körülbelől 6″ hosszú 4‴ széles egyenlő szélességű párhuzamos élű egy pont körül körző módjára forogható vonaszból *a*, *b*, melyeknek forgási tengelye át van törve, s egy finom ponttal megjelölve. A belső

élek ferdén le vannak metszve, s a forgásponton mennek keresztül. Ehez tartozik továbbá egy 12—16″ hosszú 1″ széles egyenes vonasz *c*, mely elég súlylyal bír, hogy helyéből könnyen ki ne mozduljon. Ezen készüléknek használata következő : az *a* vonasznak belső élét a sokszögnek valamelyik, p. o. 9,1 oldalához, a *c* vonaszt pedig annak külső fokához helyezvén, a forgáspontot a sokszögnek 1 pontjára beállítjuk s a *b* szárat kinyitjuk, míg annak éle az 1,3 pontokon megyen keresztül, mint az idomban látszik. Ezután a *c* vonaszt lenyomván, hogy helyéből ki ne mozduljon, párhuzamosan toljuk a készüléket, míg a *b* szár éle a 2 ponton megyen keresztül, mint ezt a pontozott vonal mutatja. Ekkor a forgáspont a *d* pontba fog esni. Most lenyomván a készüléket, a *b* szárat ismét forgáspontja körül fordítjuk, mig annak éle a 4 ponton megyen keresztül, ezután a készüléket párhuzamos mozgással 3-ra visszatoljuk. Végra a *b* szár élét a 4 pontra fordítván, az él mellett egy finom vonalat húzunk, mely, mint az a munka folyamából könnyen kiderül, nem más fog lenni, mint az előbbi idomnak 4,*b* átlója, s a készülék különböző állásaiban a forgáspont helyei az előbbi idomnak *a* és *b* pontjaival tökéletesen azonosok. A sokszög másik oldalát hasonlóképen lehet átváltoztatni, azon különbséggel, hogy most a *b* szárat kell a *c* vonasz mellé fektetni, s a forgáspontot legelőször a 9 pontra kell beállítni, mely az alapvonalnak bal végpontját képviseli.

4) Hasonló czélra szolgál a franczia mérnök Laur által szerkesztett készülék is. Ez egy 8″ hosszú vonaszból *a* (282. ábra) áll, melynek közepe hosszant át van törve, s a nyilásban egy tengelye körül forogható henger *b* van helyezve, melynek alsó része a vonasz alsó lapján túl egy kissé kiáll. A forgás tengelye a vonasz élével párhuzamossá van csinálva. Ha az ember ezen készülékre előre vagy hátra gyengéd nyomást gyakorol, a henger tengelye körül gördül, s a vonasz éle párhuzamosan halad a kellő irányban. A műtétel ezen műszerrel is épen az, mint az előbbi 2. pontban két rajzháromszöggel mutattatott, s az alapvonal metszéspontjait is szintén finom tűvel kell megjelölni; a különbség csak a párhuzamos mozgás létrehozására szoritkozik.

258. §. Térszámitás.

Egy egyenes vonalak által határolt idomnak térfogatát számitás által következőképen lehet meghatározni:

1) Bontsuk fel a sokszöget átlók által háromszögekre, s minden egyes háromszögben mérjük meg az alapot a, és a magasságot m, akkor a térfogat lesz:

$$T = \frac{am}{2}.$$

A háromszögek magasságait nem szükség berajzolni, hanem a körző egyik hegyét a háromszög csúcsában beszúrván, a másikat az alapvonalig kinyitjuk úgy, hogy a körző két hegyét összekötő vonal az alapra szabad szemmel merőlegesen álljon, s ha a körző hegyével egy körívecskét írván le, az alap ezt érinteni látszik, akkor a magasság helyesen van levéve a térképről.

2) Ha a háromszög térfogatát a mezőn közvetlen tett mérésekből, a térkép hozzájárulta nélkül kell meghatározni, akkor czélszerűbb a háromszög oldalait megmérni, s a térfogatot ezekből számítni ki az ösmeretes képlet szerint:

$$T = \sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)},$$

hol
$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

3) Bontsnk fel a sokszöget párhuzamos vonalak által trapeziumokra, ekkor ha a párhuzamos oldalakat a, b, a magasságot m-el jelöljük, a terület lesz:

$$T = \frac{(a+b)\,m}{2}.$$

A trapeziumok magasságának meghatározása végett czélszerű a párhuzamosokra merőleges vonalat húzni az egész sokszögön keresztül, s a magasságot nem közvetlen, hanem mindig egy bizonyos ponttól kezdve venni le, s egymásbóli levonás által állítni elő. Ilyeténképen a hibák összehalmozódása meggátoltatik.

4) Válasszunk egy tetszésszerinti fekvésű összrendezőtengelyt, mely czélra egy a sokszöget hosszában közép tájban metsző átló legalkalmasabb, s határozzuk meg az egyes pontok összrendezőit; akkor a 32. §. szerint lesz:

$$T = {}^1/_2 \left\{y_0(x_1 - x_n) + y_1(x_2 - x_0) + \ldots + y_n(x_0 - x_{n-1})\right\}.$$

Ha a kezdőpont egy sarokpontba esik, s az x tengely egy másik sarokponton megyen keresztül, akkor a képletből két tag kiesik, s a munka csekélyebbé válik. A méretek kényelmes meghatározása végett czélszerű az összrendezőket a térképen berajzolni, mely munka közben különösen a rendezők derékszögű állására kell figyelmezni, hogy a metszékek megmérése hibás ne legyen.

259. §.

Minő alakot kell a háromszögeknek és trapezeknek adni, hogy a térkiszámitás a legkisebb hibának legyen kitéve, következő elmélkedésből lehet megitélni.

1) Vegyük szemügyre az $ABCD$ négyzetet (283. ábra), melynek oldalhossza $AB = a$. Tegyük fel, hogy ezen méret meghatározásában $BE = \triangle a$ hiba követtetett el; ez által a tér hibás lesz a $BCFE$ és $DFGH$ párlagok összegével. Ezen utóbbit azon feltevés mellett, hogy $\triangle a$ csak igen csekély elkerülhetlen hiba, melynek négyzete $CFGK$ az előbbi párlagokhoz képest elenyészik, az előbbivel egyenlőnek lehet venni. Ha tehát a térben lévő hibát $\triangle T$-nek nevezzük, elegendő pontossággal lesz:

$$\triangle T = 2 \,.\, BECF = 2 \,.\, a \triangle a.$$

Legyen most a meghatározandó párlag $AB'C'D'$, melynek alapja $AD' = 2a$, és magassága $AB' = {}^1/_2 a$, akkor a terület ugyanaz marad, de a területben megejthető hiba a $B'C'F'E'$ és $D'F'H'G'$ párlagok által képviseltetik. Az alap és magasság megmérésében megeshető hibák egymástól mind értékökre, mind jelökre nézve különbözők lehetnek, úgy hogy ezen két párlagot néha össze kell adni, néha ki kell vonni egymásból, hogy a térfogati hiba valóságos értékéhez juthassunk. De mi a legroszabb esetet akarjuk szemügyre venni, t. i. azt, midőn a két hiba summázódik, s a mérési hibák helyett, minthogy azok valóságos értékeit nem ösmerjük, a valószinüleg előjöhető legnagyobb értéket helyettesítjük. Ezen esetben mind az alap-, mind a magasságban ejtett hibát egyenlőnek kell vennünk, mivel a méretek a papirosról vétetvén le, a mérési hiba a vonal hosszától független. (109. §.) A térfogat hibája tehát, legroszabb esetben, elegendő pontossággal lesz:

$$\triangle T = B'E'C'F' + D'C'K'H' = (2 + {}^1/_2) \cdot a \triangle a.$$

Hasonlóképen, ha az alapot ismét kettőzzük, a magasságot pedig felezzük, hogy a terület ne változzék, lesz:

$$\triangle T = (4 + {}^1/_4)\, a \triangle a, \text{ s i. t.}$$

Ezen kifejezésekből látni lehet, hogy a mérési hibák befolyása a térkiszámitásra legkisebb, ha a párlagnak alapja és magassága egyenlő. Egy kis eltérés ezen egyenlőségtől ugyan nagy befolyást nem gyakorol, minthogy a hiba még azon esetben is, ha az alap a magassághoz úgy áll, mint 2 : 1, a legkedvezőbb alaknak megfelelő hibához úgy viszonylik, mint $(2 + {}^1/_2) : 2 = 5 : 4$, de a befolyás innen kezdve csaknem az alap viszonyában növekedik.

A mi itt a párlagra nézve előadatott, a háromszögre is alkalmazható. Ha t. i. az *ABD* háromszögben (284. ábra) mind a magasságot, mind az alapot hibásnak vesszük, a terület az előbbiek nyomán a *BDE* és *DEH* háromszögek összege által fejeztetik ki. Húzzunk az *E* és *H* pontokon keresztül a háromszög oldalaihoz párhuzamosokat, és egészítsük ki az *ABD* háromszöget *ABCD* párlagra: akkor látni való, hogy *BED* háromszög $= {}^1/_2$ *BECF* párlaggal, mivel azoknak alapjai és magasságai egyenlők; hasonlóképen:

DEH háromszög $= {}^1/_2 \cdot$ *HDFG* párlaggal; a háromszög területében előálló változás tehát fele a vele egyenlő alapú és magasságú párlagénak, valamint a háromszög területe is fele az illető párlag területének. Az előbbi számban kifejtett képleteket tehát csak 2-vel kell osztani, hogy azok a háromszögre alkalmazhatók legyenek, de ezen osztó a viszonyokból kiesik. Ezen viszonyok tehát a háromszögnél is érvényesek.

3) A trapeziumnál alapul a két párhuzamos oldal közötti középet kell gondolni, s a párlagra nézve kifejtett viszonyok alkalmazhatók lesznek.

4) Ezen elmélkedésből azon következtetést lehet húzni, hogy a sokszögnek háromszögekre vagy trapeziumokra szétbontásánál oda kell törekedni, hogy az alap a magasságtól tetemesen különböző ne legyen, mit az átlók kellő megválasztása által nagy részben el lehet érni.

260. §.

Ha valamely tér egy részben, vagy egészen görbe vonal által van bekerítve, annak meghatározása különböző módon eszközölhető:

1) Ha a görbe vonal olyan általános szabály szerint van

képezve, melyet egyenlet által ki lehet fejezni, minők a másodrendű görbék stb.: akkor annak területét meghatározni a felsőbb mennyiségtan tanítja.

A nélkül, hogy ezen tan tárgyalásába bocsátkoznánk, szabad legyen némely nevezetesebb eredményeket kiemelnünk, melyeket elemi úton is ki lehet fejteni. (Lásd Tatai mértan, Mocnik mértan, forditotta Arenstein, Komménovich mértan) u. m.

a) A hajtalék térfogata $T = {}^2/_3 \cdot AB \times CD$. (285. ábra).

b) A kerülék térfogata $T = ab\pi$ (286. ábra).

2) A földmértanban előforduló görbevonalak legtöbbnyire egészen rendetlenek, és a térképen egyes pontok felvétele, s azoknak szabad kézzel való folytonos összekapcsolása által állanak elő; az azok által bekerített idom térfogatát tehát mathematikai szigorral meghatározni nem lehet; de nem is szükséges, mivel már maga a görbe vonal húzama is az egyes pontok által csak közelitőleg lévén megállapítva, ha az általa bekerített alak területét mathematikai pontossággal határoznók is meg: az is csak közelítőleg adná a térfogatot. Meg kell tehát elégednünk olyan közelitő feloldásokkal, melyekről biztosak vagyunk, hogy a hátramaradt elméleti hiba a görbe vonal rajzolása által ejtett hibát meg nem haladja. Ezek közt nevezetesebbek következők:

261. §. I-ső mód.

Rajzoljunk a görbe vonalba, vagy a köré egyenes vonalak által egy sokszöget. Számitsuk ki ennek térfogatát, valamint az elmetszett darabokét is, ezeket hajtaléki metszeteknek tekintvén, mit annál biztosabban lehet tenni, mennél rövidebb azoknak magassága az alaphoz képest. Ennek oka az, hogy minden görbe vonalnak kis darabkáját egy megfelelő hajtalék ívvel annál kisebb hiba nélkül fel lehet cserélni, mennél rövidebb az ív.

Legyen u. i. a görbe vonalnak egyenlete $y = f(x)$, ezen függvényt négyzetre emelvén, lesz:

$$y^2 = [f(x)]^2 = F(x).$$

Minthogy minden, bizonyos határok közt folytonos függvényt a változó hatványai szerint rendezett sorba ki lehet fejteni, melynek együtthatói ugyanazon határok közt véges értékeket nyernek: fejtsük ki $F(x)$-t is ilyen sorba, s lesz:

$$y^2 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

Ezen sor tehát a nevezett határok közt a függvény helyett tehető, s a görbe vonal folyama törvényének algebrai kifejezése gyanánt tekinthető. Ezen sor többé kevésbbé összetartó fog lenni, s a szerint kevesebb vagy több tagokat szükség belőle igénybe venni, hogy az y^2 értéke a valósággal megegyező legyen. De akárminő legyen is általában véve a sor összetartása: ez mindenesetre annál nagyobb fog lenni, mennél kisebb értékeket helyettesitünk x helyett; mert akkor annak felsőbb hatványai mind nagyobb mértékben csökkennek, úgy hogy az azokkal sorzott tagok, a sor elsőbb tagjaihoz képest, elhanyagoltathatnak. Tegyük fel most, hogy x^2 már olyan csekély értékű, hogy azt többé figyelembe venni nem szükséges, akkor az egyenlet következő tagokra szoritkozik:

$$y^2 = A + Bx,$$

mely a hajtalék ösmeretes egyenlete.

A hajtalékot tehát úgy lehet tekinteni, mint egy érintő görbét, melynek pontjai az érintkezési helyen a valódi görbe vonallal jó darabon összeesnek, s az eltérés csak az érintkezési ponttól távolabb eső részeken lesz észrevehető.

262. §. II-ik mód. Egyentávu rendezők.

Legyen a meghatározandó tér (287. ábra) egy görbe vonal AB, és egy egyenes CD között két, a CD-re merőleges vonal által elzárva; osszuk be CD-t, azt x tengelynek tekintvén, tetszésszerinti $= n$ számu egyenlő részekre, és húzzunk ezen osztálypontokon keresztül merőlegesen rendezőket $y_0, y_1, y_2 \cdots y_n$: akkor, ha a közöttök bezárt ívdarabokat egyeneseknek lehet tekinteni, a tér csupa trapeziumokra oszlik. Nevezzük a CD tengelynek egy osztályrészét a-nak, akkor a terület lesz:

$$T = a\left\{\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\right\}, \quad \odot$$

mely egyenletet igy is lehet irni:

$$T = a\left\{\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right\} \ldots \quad ☽$$

Minő pontosságot ád ezen képlet, a kör területén meg lehet vizsgálni. Legyen a kör sugára $= 1$, osszuk be ezt 10 egyenlő részre, tehát $a = 0 \cdot 1$, és számítsuk ki a kör egyenletéből a 0, 0·1, 0·2, 0·3 . . . 0·9 metszékeknek megfelelő rendezőket; ezek sorjában tesznek:

$y_0 = 0,$	$y_6 = 0·9164,$
$y_1 = 0·4359,$	$y_7 = 0·9539,$
$y_2 = 0·5999,$	$y_8 = 0·9797,$
$y_3 = 0·7142,$	$y_9 = 0·9950,$
$y_4 = 0·8000,$	$y_{10} = 1·0000.$
$y_5 = 0·8660,$	

Ezekből találtatik $T = 0·7761$, holott a körnegyednek ösmeretes térfogata $= \pi/_4 = 0·7854$. A különbség a térfogat $^1/_{100}$ részénél nagyobb, tehát a pontosság nem igen nagy.

263. §. III-ik mód. Simpson képlete.

1) Sokkal nagyobb tökélylyel lehet a térfogatot meghatározni a Simpson képlete által, mely az előbbitől elvben különbözik, a mennyiben a vonal görbületét a hajtaléki mód alkalmazása által számba veszi. Legyen ismét a 287. idomban a CD tengely páros számú, $2n$ egyenlő részekre beosztva, s vegyük a két első, vagyis az $ABFC$ részt szemügyre. Ha ebben az AE húrt húzzuk: az alak egy trapeziumra és egy metszetre oszlik, mely utóbbit hajtalék alakúnak tekintjük. Az $ABFC$ darab területe tehát lesz:

$$t' = (y_0 + y_2)\,a + {}^2/_3\, AE \times GH.$$

Minthogy pedig az AE és GH ösmeretlenek, ezeket adott mennyiségekkel kell kifejezni. E végre húzzuk az AI vonalat FE-re és GH-t AE-re merőlegesen, akkor két hasonló háromszög áll elő, u. m. $GHK \backsim AEI$, mivel mind a kettő derékszögű, s két-két oldalaik egymásra merőlegesen állanak. Tehát áll ezen arány:

$$AE : AI = GK : GH.$$

Honnan következik:

$$AE \times GH = AI \times GK.$$

Továbbá

$$AI = 2a,\ \ GK = GL - KL = y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2} = \frac{2y_1 - y_0 - y_2}{2}.$$

Ezen értékeket helyettesítvén, rövid összehúzás után lesz:

$$AE \times GH = a(2y_1 - y_0 - y_2),\quad \text{és}$$
$$t' = {}^1/_3 a(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Hasonlóképen lesz a következő pár részekre nézve:

$$t'' = \frac{1}{3}a(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

. . . .

$$t^{(n)} = \frac{1}{3}a(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Ezen egyenleteket összeadván, lesz végre:

$$T = \frac{1}{3}a\{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\}.$$

Alkalmazzuk ezen képletet a fentebbi §.-ban felhozott esetre, akkor lesz: $T = 0{\cdot}7817$, s a hiba majdnem $\frac{1}{200}$. A Simpson képlete tehát ugyanazon adatokból csekélylyel nagyobb számitási fáradsággal 2-szerte jobb eredményt adott, mint az előbbi képlet.

2) A gyakorlatban mind a két képletre nézve a rendezők a papiroson körző és lépték által közvetlen méretnek meg, de az a értékét czélszerűbb a tengely hosszának megmérése, és a részek számával való osztás által határozni meg azért, mert a mind a két képletben nagy számmal van szorozva, tehát a benne lévő hiba nagy befolyással van a területre. Ezen hibát tehát lehetőleg csökkenteni kell. Ezen czél az előadott eljárás szerint tökéletesen elérhető, mivel a mérési hiba a papiroson kellő óvatosság mellett a vonal hosszától független lévén, a tengely hosszában nagyobb hibát ejteni nem fogunk, mint akármely más vonalnál, s ebből a-ra csak $\frac{1}{n}$, illetőleg $\frac{1}{2n}$-rész esik.

3) A 262. és 263. §.-ban előadott képleteket még akkor is lehet alkalmazni, ha a tér egészen görbe vonal által van bekeritve azon különbséggel, hogy ezen esetben a rendezők helyett az egész téren keresztül húzott párhuzamos átlókat kell tenni. Ugyanis ha a 288. idomon keresztül egy átlót CD húzunk, mely a két szélső érintőt egymással merőlegesen összeköti, s a rendezőket mind a két oldalt egyenlő távolban húzva gondoljuk, a kifejtett képleteket a térnek mind a két darabjára külön lehet alkalmazni; s ha ezen két darab területei összeadatnak, a képlet jobb oldalán az egynevű rendezők összegei lépnek fel rendezők gyanánt, miáltal a fentebb felhozott szabály igazolva van.

264. §. Térmeghatározási segédeszközök.

A térkiszámitási munka a részletek nagy száma miatt igen fárasztó, és részint leolvasási, részint irási és számitási hibáknak oly nagy mértékben ki van téve, hogy az eredményt tévedésektől csak megfeszitett figyelem és a munka ismétlése által lehet megóvni. Az ujabb korban különösen az országos felmérések (Kataster) behozatala óta sokféle kisérletek tétettek olyan segédeszközök feltalálására, melyek által ezen munkát könnyítni és biztosabbá tenni lehessen. Az erre irányzott törekvéseket három osztályba lehet sorozni a szerint, a mint azok vagy a méretek könnyebb levételére, vagy a számitás könnyebbitésére, vagy mind a kettőnek megkimélésére vonatkoznak.

A) Az első csoportba tartoznak:

1) a Nonius léptékek, melyek kivált összrendező rendszer alkalmazásánál nem csak a rendezők berajzolását szükségtelenné teszik, hanem a mérést is könnyítik. A 289. idomban látható készülék az osztrák katasternél már régen használtatik. Ez áll egy 12—16" hosszu vonaszból *A*, melynek egyik éle egyenlő részekre van bosztva. Egy hüvelyket czélszerű 20 részre beosztani, s egy osztályrész, katastralis léptéknél (1" = 40°) 2°-et jelent. Ehez járul egy derékszögű háromszög *B*, melynek rövidebb befogója Noniussal van ellátva. Ez által az *A* léptéken egy osztályrész még 20 egyenlő részre osztható, s a Nonius által leolvasható legkisebb mérték $^1/_{10}$ öl. A háromszög hoszszabbik befogójának éle ferdén le van metszve, s egy hüvelyk 40 egyenlő részre beosztva. Ezen osztályzaton tehát az egyes öleket közvetlen, azoknak tizedrészeit pedig becsülés által le lehet olvasni.

Ha ezen készüléket a sokszög mellé fektetjük, s a háromszög élét valamely sarokpontra beállítjuk: ennek metszékét a vonaszon, rendezőjét pedig a háromszög élén kell leolvasni.

Ezen készüléknek gyenge oldala az, hogy a rendezőt nem lehet vele olyan pontosan megmérni, mint a metszéket, s a háromszög oldalán lévő beosztás igen sűrű lévén, a szemet igen rontja.

2) Ezen tökéletlenség egy általam tett módosítás által, mely azonban a készülék alapelvét érintetlenül hagyja, el lehet háritni. Én t. i. a *B* háromszöget (290. ábra) 45° szöggel veszem, s feszitőjével fektetem a vonaszhoz. Erre van a Nonius metszve, s a befogók minden beosztás nélkül ferdén lemetszett élekkel vannak ellátva. Ha most a háromszögnek előbb egyik, azután másik befogójának éle állíttatik be a sokszög sarokpontjaira, s

a Nonius állása mindkét ízben leolvastatik, ezen adatokból a 258. §. 4 nyomán igen egyszerűen ki lehet a térfogatot számítni. Gondoljuk ugyanis a Nonius 0 pontját a vonasz beosztásának 0 pontjára beállítva, akkor a derékszög csúcsa egy bizonyos helyre fog esni a papiroson, melyet az összrendezők kezdőpontjául, az OX, OY vonalakat pedig, melyek a háromszög száraival összeesnek, összrendezők tengelyeinek választjuk. Legyenek az AO és BO befogók és a feszitő AB közt befoglalt szögek egyelőre α és $90-\alpha$, m a sokszögnek egy pontja, melynek összrendezői $Op=x$ és $Oq=pm=y$. Most toljuk az AOB háromszöget jobb kéz felé, mig BO az m ponthoz ér, tehát $B''O''$ állásba jön: ekkor a Nonius 0 pontja egy olyan útat hagy hátra, mely BB''-vel egyenlő; minthogy a Nonius a háromszög feszitőjén szilárdul lévén megerősítve, annak minden pontja egyenlő útat hagy maga után. Nevezzük a Noniuson leolvasott mértéket a-nak, úgy hogy $BB''=a$ s húzzunk a B pontból $B''O''$-ra merőlegest Bs, mely mp, vagy y-al párhuzamos és egyenlő, akkor a $BB''s$ háromszögből következik:

$$Bs = BB'' \cdot sin(90-\alpha), \quad \text{vagy} \quad y = a \, cos\alpha.$$

Hasonlóképen, ha a háromszögnek AO befogóját az m pontra beállítjuk, mi által az $A'O'$ állásba jön, s ha a Nonius 0 pontja által leírt útat, mely AA'-el egyenlő, b-nek nevezzük, továbbá A' pontból AO-ra merőlegest bocsátunk, miáltal At egyközű és egyenlő lesz $Ap=x$-el: akkor az $AA't$ háromszögből lesz:

$$A't = AA' \cdot sin\alpha, \quad \text{vagy} \quad x = b \, sin\alpha.$$

Ezen összefüggés a szögpontok összrendezői és a leolvasások közt minden pontra nézve érvényes. Ha tehát a szögpontokat azoknak öszrendezőit és a megfelelő leolvasásokat 0, 1, 2 ... n mutatókkal akarjuk megkülönböztetni egymástól, ezen egyenletek rendszere áll elő:

$$\begin{array}{ll} y_0 = a_0 \, cos\alpha, & x_0 = b_0 \, sin\alpha, \\ y_1 = a_1 \, cos\alpha, & x_1 = b_1 \, sin\alpha, \\ \vdots & \vdots \\ y_n = a_n \, cos\alpha. & x_n = b_n \, sin\alpha. \end{array}$$

Ezen értékeket a 258. §. 4. képletben helyettesítvén, lesz:

$$T = \frac{sin\alpha \, cos\alpha}{2} \left[a_0 (b_1 - b_n) + a_1 (b_2 - b_0) + \ldots + a_n (b_0 - b_{n-1}) \right],$$

vagy:

$$T = \frac{\sin 2\alpha}{4}\left[a_0(b_1 - b_n) + a_1(b_2 - b_0) + \ldots + a_n(b_0 - b_{n-1})\right],$$

úgyde $\alpha = 45^0$, tehát $\sin 2\alpha = \sin 90^0 = 1$;
az utolsó egyenletet tehát így is lehet irni:

$$T = \frac{a_0}{2}\left(\frac{b_1}{2} - \frac{b_n}{2}\right) + \frac{a_1}{2}\left(\frac{b_2}{2} - \frac{b_0}{2}\right) + \ldots + \frac{a_n}{2}\left(\frac{b_0}{2} - \frac{b_{n-1}}{2}\right) \ldots \odot$$

azaz: ha a 258. §. 4. képletben, a zárjegyben x, y helyett a leolvasás által nyert a és b felezett értékei helyettesíttetnek, a sokszög térfogata fog kijönni, s a kettőveli osztás is megkiméltetik. Hogy pedig az a és b felezése könnyű módon eszközöltethessék, csak arra van szükség, hogy a vonasz beosztásán minden egyes hossz annak fél értékére legyen számozva. Ekkor a leolvasások már a felezett a és b-ket fogják szolgáltatni.

Ezen szerkezetnek előnyei a kettővel való osztás megkimélésén kivül különösen abban állanak, hogy a méreteket egyenlő pontossággal lehet meghatározni, s az osztályrészek a léptéken kétszer olyan nagyok lévén, mint az előbbi szerkezetnél, a szemet annyira meg nem viselik.

A vonaszon 2 hüvelyket czélszerű 40 egyenlő részre, s a Nonius által egy ilyen részt még 10 részre osztani. Ekkor a legkisebb leolvasható mérték katasztralis léptéken lesz $= 0^0{\cdot}1$, s ezen pontosság a gyakorlatban tökéletesen kielégitő.

265. §. Szorzó tábla.

B) A második csoportban kitünő helyet foglal el

1) a szorzó tábla. Ennek szerkezete különböző lehet, s a hozzá kapcsolt bevezetésből könnyen megérthető. Ezen helyen tehát csak Crelle tábláját fogjuk értelmezni, mely Berlinben 1857-ben Reimer könyvárusnál jelent meg.

Ezen táblában bennfoglaltatik minden egy, két, és három számjegyből álló számok közt lehető szorzat, kivévén azokat, melyek 0-án végződnek.

A tábla szerkezete a mellékelt mutatványból, mely annak egy lapját ábrázolja, könnyen megérthető.

95	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	
1	0	95	190	285	380	475	570	665	760	855	95
2	1	96	191	286	381	476	571	666	761	856	90
3	2	97	192	287	382	477	572	667	762	857	85
4	3	98	193	288	383	478	573	668	763	858	80
5	4	99	194	289	384	479	574	669	764	859	75
6	5	100	195	290	385	480	575	670	765	860	70
7	6	101	196	291	386	481	576	671	766	861	65
8	7	102	197	292	387	482	577	672	767	862	60
9	8	103	198	293	388	483	578	673	768	863	55
11	10	105	200	295	390	485	580	675	770	865	45
12	11	106	201	296	391	486	581	676	771	866	40
13	12	107	202	297	392	487	582	677	772	867	35
14	13	108	203	298	393	488	583	678	773	868	30
15	14	109	204	299	394	489	584	679	774	869	25
.											.
.											.
.											.
.											.
.											.
.											.
95	90	185	280	375	470	565	660	755	850	945	25
96	91	186	281	376	471	566	661	756	851	946	20
97	92	187	282	377	472	567	662	757	852	947	15
98	93	188	283	378	473	568	663	758	853	948	10
99	94	189	284	379	474	569	664	759	854	949	05

Ezen táblában a nagyobb jegyekkel irt szögletszám az egyik szorzót jelenti, a másik pedig két részre van szakítva. A százas számjegy az első vizszintes sorban, az egyes és tizes pedig baloldalon az első függélyes oszlopban foglaltatik. A szorzat szintén két darabra van szakítva, t. i. a százas és felsőbb rangú jegyek ott állanak, hol a százas oszlopot a tizes és egység vizszintes vonala metszi, a tizes és egység pedig ugyanazon vizszintes sorban jobb kéz felé a legutolsó oszlopban van feljegyezve. Keressük p. o. 95 × 612 értékét.

A 600-as oszlopban, a 12-ős vizszintes sorban találtatik 581, ugyanazon sor végén 40, tehát

$$95 \times 612 = 58140.$$

Ha a szorzók közül egyik vagy másik 0-án végződik, ezek elhagyatnak, s a fenmaradt számok közötti szorzat a táblában felkerestetik, s végre az elhagyott 0-ák hozzá ragasztatnak, p. o. 950 × 120 lenne keresendő. A* tábla szerint 95 × 12 = 1140, tehát 950 × 120 = 114000.

A terület kiszámitásánál gyakran előjön, hogy a szorzandók 4 számjegyből állanak. P. o. 225°3 × 132°·4 keresendő, s a szorzatban csak egész □°-ket kell figyelembe venni. A számitás így fog történni. A tábla szerint:

$$\begin{array}{rcrcr} 225^{0} & \times & 132^{0} & = & 29700\,\square^{0} \\ 225 & \times & 0{\cdot}4 & = & 90 \\ 0.3 & \times & 132 & = & 40 \\ \hline & & \text{Összesen} & = & 29830\,\square^{0}. \end{array}$$

2) Megemlítendők ezen helyen a szorzó gépek, melyek által a szorzás mechanikai módon eszközöltetik, s ha azok biztos mozgással bírnak, igen gyorsan és hibátlanul adják a keresett eredményt. Különösen emlitést érdemel ezen gépek közt az, melyet Thomas Párisban készít, és öt, hat számjegyekből a szorzatot, valamint a hányadost is bámulatos eredménynyel szolgáltatja. A gép leirása igen messze vezetne, és mégis nehezen lenne érthető. Ezért az olvasót a gépre magára utalom, mely már hazánkban is több példányban létezik, s aránylag csekély ára miatt, tágasabb körökben is elterjedésre méltó, melyekben hosszasabb számitások a rendes foglalkozások közé tartoznak.

266. §. Planimeterek.

C) A harmadik csoporthoz tartoznak a Planimeterek, melyek közül megemlítendők a négyzet tábla. Ez áll egy üvegtáblából, melynek egyik lapján egyenlő távban egymást derékszög alatt metsző egyközű egyenes vonalrendszerek vannak beedzve vagy rajzolva. Ezen vonalak tehát, melyeket nagyobb áttekinthetőség végett különböző vastagságban, vagy színekkel lehet alkalmazni, bizonyos nagyságú négyzeteket zárnak magok közé. A 291. idomban a vastag vonalak közt fekvő négyzetek □ hüvelykeket, vagyis katasztralis léptéken osztrák holdakat, a vékony vonalak között lévők $^1/_{16}$ □"-et, azaz 100 □ ölet, végre a vékony és a pontozott vonalak közé esők $^1/_{64}$ □", azaz 25 □ölet jelentenek. Ha a tábla beos ztását más egységre, p. o. 1200 □ öles holdakra akarnánk fektetni, akkor vastag vonalakkal párlagokat fognánk szerkeszteni, melyeknek oldalhosszaik 30 és 40 léptékölek volnának. Az első oldalt 3, az utóbbit 4 egyenlő részre osztván, az ezen osztáspontokon keresztül húzott vékony párhuzamosak közt 100 □° foglaltatnék, s i. t.

Ezen táblának használata abban áll, hogy azt az idomra fektetvén, az idom körületén belől fekvő nagy, közép, és kis négyzeteket megszámláljuk, a nem egészen teljes négyzeteket pedig megbecsüljük.

267. §. Wagner térszámitó készüléke.

Ebben az alapgondolat ez: ha két háromszögnek alapvonalai egyenlők, a területek a magasságokkal egyenes viszonyban állanak; tehát azon háromszöget, melynek térfogatát meg akarjuk határozni, át kell változtatni egy bizonyos meghatározott alapú háromszögre, s ennek magasságát kell megmérni. Ezen magasság megmérése egy beosztott vonasz által eszközölhető, melynek osztályvonalain a hosszak értékei helyett a megfelelő térfogatok vannak feljegyezve. A készülék következőképen van szerkesztve (292. ábra): *LM* egy derékszög alatt hajlott egyenes élű vonasz, *N* egy derék háromszög, melynek egyik befogója az *L* vonaszhoz van fektetve, a másik szélén pedig egy vékony szögecske *O* van megerősítve. Az *OK* hossz adja a normalis háromszög alapját, melyre minden más háromszöget át kell változtatni. *P* hasonlóképen egy derék háromszög, melynek rövidebb befogója az *M* vonasz éléhez illesztetik, a hoszabbik pedig be van osztva, s a térfogat leolvasására szolgál. Az *LM* vonasz derékszögének csúcsában (az *A* pontban) szintén egy finom szögecske van megerősítve, s az *A* és *O* szögecskékhez egy egyenes vonaszt *Q* lehet illeszteni, mely a *P* beosztását metszi.

Ha most az *M* vonasz élét a meghatározandó háromszög alapvonalára, a derékszög csúcsát az alap végpontjára *A*, az *N* háromszöget a háromszög csúcsára *C*, a *P* háromszöget pedig az alapvonal második végpontjára *B* beállitjuk, a *Q* vonasz élét az *A* és *O* szögecskékhez illesztjük: ez a beosztást *E* pontban fogja metszeni, s a leolvasott szám a térfogatot fogja szolgáltatni. Ugyanis az *N* háromszögnek a *C* pontra beállitása által a háromszög csúcsa *C*-ből *O*-ba tétetik át, s az *ABC* háromszög *ABO*-vá változik a nélkül, hogy a térfogat változnék. Ezután a

P és *Q* beállitása által az *ABO* háromszögből *ADE* lesz, hol *OD* ‖ *DE*, tehát *AD* = *KO*. A térfogat tehát most sem változik, de a háromszög alapja a normalis háromszögével egyenlő lesz. Tehát a magasságon a tért lehet leolvasni, ha a lépték helyesen van készitve. Ezen készüléknek gyengéje az, hogy a *Q* vonasz éle a *P*-ét többnyire igen ferde szög alatt metszi, tehát a metszéspontot meghatározni biztosan igen nehéz.

268. §. Laur olarythmusa.

1) Ez áll (293. ábra) egy átlátszó szarutáblán egy derékszögű párlag alakú térben *ACBD* rajzolt vagy vésett egyenoldalú mentelék rendszerből, melynek közös középpontja *C*, közös végérintői a párlag oldalai *CA* és *CB*, közös tengelye pedig *CE* által képeztetnek. Ezen mentelékek tengelyhosszai számtani haladványban növekednek, s számokkal vannak ellátva, melyek a térfogatra vonatkoznak. A táblán a *CB* és *CA* oldalakhoz még számos párhuzamos egyenes vonalak vannak húzva.

Ha ezen készülék segitségével egy derékszögű párlag térfogatát akarjuk meghatározni, fektessük a táblát a párlag felibe ugy, hogy annak *CB* oldala a párlag alapjára *CG*, a *C* pontok pedig egymásra essenek; ekkor a *K* sarokpont valamely mentelékre, vagy kettő közé fog esni. Első esetben a mentéléken lévő szám adja a térfogatot, az utolsóban pedig a pont fekvését a két mentelék közt meg kell becsülni, s a két megfelelő szám közé interpolálni.

2) Ha a meghatározandó idom egy háromszög *MNO*: akkor az alapot *MN*, *CG*-hez párhuzamosan, *M*-et *CA*-ra, a csúcspontot *O* pedig *CB*-re kell állítni, az *N* pontnak megfelelő leolvasást pedig kettővel kell osztani, mivel a háromszög fele a vele egy alapú és magasságú párlagnak.

3) Ha végre a meghatározandó alak egy rendetlen négyszög *MPNO* volna, akkor annak egyik átlóját *MN* a *CG* oldallal párhuzamosan *M*-et *CA*-ra, *O*-t *CB*-re kell beállítni, s a *P* és *N* pontokon keresztül *CB* és *CA*-val parallelákat gondolni, ahol ezek egymást metszik, *Q*-ban kell a leolvasást végrehajtani. Ez lesz a terület kettős értéke, mivel a négyszög területe egyenlő egy háromszög térfogatával, melynek alapja a négyszög átlójával,

magassága pedig a négyszög két átellenes csúcsából ezen átlóra húzott merőlegesek összegével egyenlő.

4) Ezen készüléknek elmélete az egyenoldalú menteléknek a végérintőkre vonatkozó egyenletében alapszik, mely következő:

$$xy = \frac{1}{2}a^2.$$

hol x, y a mentelék valamely pontjának összrendezőit, a pedig a valóságos féltengely hosszát jelenti. Ezen egyenlet azt mondja, hogy a mentelék minden pontjánál a metszék és rendező által alkotott párlag térfogata állandó mennyiség. Húzzunk a mentelék csúcsából egy rendezőt, akkor a párlag négyzetté válik, melynek térfogata az előbbi párlagéval egyenlő. Ha tehát a mentelékhez ezen négyzet térfogata iratik, ez a párlag térfogatát is fogja szolgáltatni. Miképen kell a mentelékek valóságos tengelyeit választani, hogy azok bizonyos térfogatoknak feleljenek meg, így lehet elintézni. A fentebbiek szerint:

$$xy = \frac{1}{2}a^2,$$

vagy ha xy helyett a párlag térfogatát T tesszük:

$$T = \frac{1}{2}a^2.$$

Innen lesz $a = \sqrt{2T}$, vagy ha holdakban akarnók a térfogatot leolvasni, és 1 hold $= m\,\square^0$, H pedig a holdak számát jelenti, akkor $T = mH$, és

$$a = \sqrt{2mH}.$$

Ezen méretet C pontból a tengely irányára CE feltévén, a menteléket szerkeszteni és rajzolni lehet.

Mind a Wagner, mind a Laur készülékénél czélszerű a sokszöget előbb háromszögre átváltoztatni, s ennek területét mérni meg a készülékkel.

269. §. Alder hárfája.

1) Ez egy 8—10" nagyságú négyszögű merev rámából áll (294. ábra), melynek két átalellenes oldalán egyenlő távban lyukak vannak fúrva, s ezekbe lószőr szálak vannak behúzva. Ezen egymással párhuzamos szálak katasztralis lépték szerint 2°·5 távban vannak egymástól, de hogy 5, 10, 20, 40 öleket is meg lehessen különböztetni, különböző szinű és vastagságú szálak vannak alkalmazva. Ezen szálak 1 hüvelyktér hoszant czélszerűen ilyen renddel következnek egymás után: 1) vastag fekete, 2) finom fekete, 3) veres, 4) finom fekete, 5) sárga, 6) finom fekete, 7) veres,

8) finom fekete, 9) fehér, 10) finom fekete, 11) veres, 12) finom fekete, 13) sárga, 14) finom fekete, 15) veres, 16) finom fekete s i. t. ismét elölről kezdve. Ha ezen rámát az idomra fektetjük: az a párhuzamos szálak által rögtön egyenlő magasságú trapeziumokra bontatik szét, melynek kiszámitása a 262. §. ⊙ egyenlete szerint megyen véghez. Tehát

$$T = a\left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\right).$$

A trapeziumban a parallelák közötti számtani közép mindig a magasság közepében van; ezen helyre pedig a szálak közt mindig egy olyan esik, mely vagy szinével, vagy vastagságával feltűnik. Ezen szálaknál tehát a képlet által szükségelt közép párhuzamosokat közvetlen le lehet venni a térképen, s a szerint, a mint az idom karimája nagyobb vagy kisebb görbülésekkel bír, a sűrűbben vagy ritkábban eső színes szálakat lehet választani.

2) A fentebbi képlet továbbá azt mutatja, hogy a térfogat meghatározására csak a közép parallelák összegét kell tudni, nem pedig egyenkint azokat. Két vagy több vonalat egy körzővel egyszerű műtétel által össze lehet adni a nélkül, hogy azoknak hosszát számokban ösmerni szükséges volna. A zárjegyben kijelentett összegezést tehát egy körzővel kell véghezvinni, s az összeget a körző hegyei közé eső táv fogja ábrázolni. A térfogat ezen távtól függ, s a körzőt úgy lehet felszerelni, hogy a legnagyobb nyilásnak egy bizonyos kerek számú térfogat, p. o. 1 vagy 2 hold feleljen meg a szerint, a mint a párhuzamosok közötti táv kisebb vagy nagyobb. A legnagyobb nyilás állandó volta egy körív alakú, csavarlépésekkel ellátott, 1 vonal vastag merev huzal által biztosittatik, melynek egyik vége a körző másik szárán egy nyiláson megyen keresztül. Ezen huzalon egy anyacsavar van, melyet a huzal hosszant mozgásba lehet hozni s arra szolgál, hogy a körző szárát feltartóztassa; hogy pedig ezen anyacsavar helyt álljon, egy ellencsavarkával van lefoglalva. Miképen kelljen ezen anyát beállítni, hogy a körző nyilása bizonyos térfogatot adjon, könnyű belátni. Legyen p. o. a párhuzamosak közötti táv $= 10^0$, s azt akarjuk, hogy a körző egész nyilásának megfelelő tér 2 hold $= 2400\ \square^0$ legyen, akkor $\frac{2400 \square^0}{10^0} = 240^0$, tehát a léptékről a körző hegyei közé

240°-et kell levenni, s az anyacsavart a körző szárához érintkezésig kell közelítni, s ezen állásban az ellencsavarral leszorítni.

3) Ha a körző nyilása munkaközben megtelik, mielőtt az összegezés bevégeztetnék: a körző hegyével gyenge szúrást kell tenni a papirosba, s ezen pontból kiindulva, a summázást tovább folytatni, feljegyezvén, hogy hányszor telt meg a körző: annyiszor kell azután az illető kerek számú területet venni. Némely körzőknél a megtelés számlálására egy kis fogaskerek van alkalmazva, mely minden megtelésnél egy foggal fordúl.

4) Midőn a parallelák summázása véget ér, a körző többnyire nincs egészen megtelve; az ezen nyilásnak megfelelő térfogatot tehát külön kell meghatározni. Erre egy kis lépték szolgál, melyen a területet közvetlen le lehet olvasni. Ennek szerkezete következő. Legyen a lépték 1" = 40°, s a parallelák közötti táv = 10°, akkor a középparallelán 1" hossznak $40^0 \times 10^0 = 400 \square^0$ felel meg. A léptéken tehát 1"-et 400 □°-el kell számozni, s ezen hosszat négy részre osztván, az egyes százakhoz jutunk. Az első százat még 10 részre lehet osztani, melyek a 10-es □°-ket fogják szolgáltatni.

5) A hárfa egy szálát rendesen a sokszög egy oldalára lehet beállítni, de végül többnyire egy három- vagy négyszög marad, melyet külön kell meghatározni.

Ezen műszer igen gyors és jó sikerrel alkalmazható.

270. §. Vetli térszámitó gépe.

1) Minden eddig előadott térkiszámitási eszközöket felülmulja a Vetli, helvécziai mérnök gépe nem csak egyszerűség, hanem pontosság és az igen egyszerű kezelés következtében, csaknem hibázhatlanság tekintetéből is. Ezen gép t. i. akármilyen egyenes vagy görbe vonalakkal kerített idom területét elméletileg tökéletesen, gyakorlatilag pedig olyan pontossággal méri meg, melyet a többi készülékeknél hasztalan keresünk. Ennek (294. ábra) alkotó részei: egy 10—12 hosszú 6" széles fémtábla *A*, melynek hosszában három rudacska *a*, *a*, *a* van párhuzamosan megerősítve. Ezen rudacskák egy három lábon nyugvó kerekekkel ellátott oszlopnak szolgálnak mozgási talapul, melyeken ezt — mint a vasúton a kocsikat — legkisebb oldalmozgás nélkül előre vagy hátra lehet tolni. Ezen oszlopon, az

A táblára merőlegesen egy tengely *b*, s ennek közepén egy dob *c* van megerősítve, mely a tengelylyel együtt forog. Az *a* rudacskákra s a *b* tengelyre merőlegesen, tehát az *A* táblával párhuzamos fekvésben 4 vezető csiga közt egy 12″—14″ hosszú vonasz *d* van beszorítva, melyet előre és hátra lehet tolni, és az legkisebb oldalmozgással sem bir. Ezen vonasznak két végén egy ezüst huzal szál *e* van megerősítve, mely a vonasz mentében a *c* dobot egyszer körülövedzi úgy, hogy ha a vonasz előre vagy hátra tolatik, a huzal a dobra feltekergődzik, s ez által a *b* tengely forgásba hozatik. A vonasz egyik végén egy hegyes peczek *f* van helyezve, melyet egy csőben feljebb vagy lejjebb lehet emelni ugy, hogy annak hegye a rajztáblát, melyre a készülék munka közben tétetik, csaknem érinti. Ezen leirásból látni való, hogy az *f* peczeknek két egymástól független mozgása van, egyik az *a* vonasz irányában, mely közben a dob egyenes vonalban mozdul ki helyéből, de tengelye körül nem forog; másik a *d* vonasz irányában, mely közben a dob helyben marad, hanem tengelye körül forog. Ha az *f* peczek ezen két iránytól különböző irányban tolatik: akkor a dob mind a kétféle mozgásban részt vesz. A *b* tengely felső végén továbbá egy finom papirral bevont üveg tábla *l* van a tengelyre merőlegesen megerősítve, mely tehát a tengelylyel együtt forog. Ezen táblával egy aczél karikának *g* éle van érintkezésben, melynek tengelye *h* egy rámában vizszintes fekvésben úgy van helyezve, hogy ez meghosszabbítva a *b* tengelyt metszi. A *h* tengelyen továbbá egy mutató *i* van megerősítve, s ennek forgáspontja egyszersmind középpontja egy beosztott körnek *k*, melynek beosztása a *g* karika forgásának meghatározására szolgál. Ezen forgás számának egészeit egy másik kerekecskén létező beosztáson, annak tört részeit pedig a *k* osztályrészein lehet leolvasni.

2) A készüléknek használata ez: az *A* tábla a meghatározandó idom mellé tétetvén oly módon, hogy az *f* peczek annak körületét mindenfelé könnyen elérhesse, az *f* peczek az idom körületének valamely pontjára beállittatik, s a mutató állása mind a két beosztáson leolvastatik. Legyen ezen szám $= p$. Ezután az *f* peczek folytonosan az idom körületén vitetik, mig az ismét a kezdő ponthoz jut, s a mutatók állása ismét leolvastatik. Legyen ez $= q$. Akkor lesz:

$$T = q - p,$$

□ hüvelykekben, vagyis catastralis léptéknél osztrák holdakban.

3) Gondoljuk ugyanis a készüléket az *a* rudacskákon addig tolva, mig a *g* karikának érintőpontja a *b* tengelylyel összeesik: akkor az *f* pont egy bizonyos helyet fog a táblán elfoglalni, melyet az összrendezők kezdőpontjául választunk, ennek tengelyeit pedig az *f* pont két fő mozgása irányába fektetjük. Ha most az *f* végét az idom körületének valamely pontjára M állitjuk (296. ábra), melynek összrendezői MP és OP, akkor a *b* tengely a *g* karikának érintő pontjától szintén MP távba jön. Mozdítsuk most az *f* peczket a körületnek végtelen kis darabkáján MM', akkor a *c* dobról egy darab huzal tekergődzik le, melynek hosszát MQ ábrázolja. Ezen huzal darabka a dob körületén egy ívecskét fogott körül, melynek középponti szögét α-nak akarjuk nevezni, s ha a dob sugára és a huzal félvastagsága összegét r-nek nevezzük, lesz:

$$MQ = r\alpha \ldots \odot$$

Az üvegtábla a tengelylyel szilárd összeköttetésben áll, tehát ennek is α szöggel kellett fordulni. Továbbá a *g* karika érintési pontja az üvegtábla tengelyétől MP távban van, mely távot — ámbár az tulajdonképen változó mennyiség, minthogy az *f* peczek az MM' íven vitetvén, az X tengelytől eltávozik — állandónak lehet tekinteni, mivel ezen eltávozás az MM' ív végtelen kicsinysége miatt az MP rendező hosszában csak végtelen kis változást idéz elő, mely a véges MP-hez képest elenyészik. Tehát az üvegtábla forgása közben a *g* karika érintési pontja egy kis körívet ir le, melynek hossza $= MP \times \alpha$. Ezen ív a *g* karika karimájára a surlódás által változás nélkül áttétetik, minthogy mind a karikának, mind az üveg táblának forgási iránya az érintéspontban azonos. Nevezzük a *g* sugarát R, és az emlitett ívnek megfelelő középponti szöget a karikán β-nak, akkor az ív hossza lesz $= R\beta$, tehát ezen egyenlet áll:

$$MP \times \alpha = R\beta \ldots ☽$$

Szorozzuk az $\odot$ és ☽ egyenleteket egymással, akkor lesz:

$$MQ \times MP = Rr\beta,$$

ugyde $MQ \times MP$ az $MPP'Q$ párlag területét jelenti, melyet az $MM'P'P$ trapeziummal fel lehet cserélni, mivel az elhanyagolt $MM'Q$ kis háromszögecske a már úgy is végtelen kis trapeziumhoz képest végtelen kicsiny, tehát:

$$MM'P'P = Rr\beta.$$

Gondoljuk az idomot végtelen sok trapeziumra szétbontva, akkor lesznek:

$$M'M''P''P' = Rr\beta',$$
$$M''M'''P'''P'' = Rr\beta''.$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Ezen egyenletek algebrai összege a keresett tért fogja szolgáltatni. Ugyanis mig az f peczek a tér felső karimáján LMN mozog, a g karika mindig egy irányban forog, a β szögek tehát summázódnak, s a megfelelő tér lesz $LMNZV$. Midőn pedig a peczek a tér alsó karimáján NUL halad, a g karika ellenkező irányban forog, az illető β-k tehát levonódnak az előbbi összegből s a megfelelő terület $NULVZ$ is levonandó lesz, marad tehát az $MNUL$ tér, melynek értéke:

$$T = Rr(\beta + \beta' + \beta'' + \ldots + \beta_n).$$

A térfogat meghatározására ezen képlet szerint csak a g karika összes forgási szögét kell tudni, melyhez lehet jutni, ha a karika állását a munka kezdetén és végén leolvassuk, s a leolvasásokat egymásból levonjuk. Nevezzük ezen számokat B, B'-nek, akkor lesz:

$$T = Rr(B' - B).$$

A Starke által Bécsben készített Vetli-féle készülék ugy van csinálva, hogy a g karika egyszeri körülforgásának $2\square''$ felel meg bécsi mértékben. Az előbbi egyenlet szerint tehát

$$2\square'' = Rr \, . \, 2\pi, \quad \text{vagy} \quad Rr = \frac{1}{\pi}\square'',$$

s a dob és karika sugárainak ezen egyenletnek eleget kell tenniök. Ezen értéket helyettesítvén lesz:

$$T = \frac{B'}{\pi} - \frac{B}{\pi}\square''\text{-ben},$$

hol B és B'-t ívmértékben kell venni. De a Starke szerkezetében a félkör van egységül véve, s ez van 100 egyenlő részre beosztva. Nevezzük a B és B'-nek ezen uj beosztáson megfelelő leolvasásokat p és q-nak, akkor ezen arányok állanak:

$$\pi : 1 = B : p,$$
$$\pi : 1 = B' : q.$$

Ezekből következnek $p = \frac{B}{\pi}$, $q = \frac{B'}{\pi}$, tehát végre

$$T = p - q, \ \square''\text{-ben.} \ \text{ð}$$

4) A Vetli gépe elméletileg véve tökéletesen adja az idom térfogatát, s a gyakorlatban csak a két főmozgásban előjöhető tökéletlenség okozhat hibát. Ezen két főmozgásnak egyenes vonalakban, egymásra merőlegesen kell történni, s minden oldal- vagy holt mozgástól mentnek kell lenni. Különösen megkivántatik, hogy a vonasznak felső lapja ne ingadozzék, különben a peczek hegye kimozdulna helyéből. Ha a két fő mozgás nem volna egymásra merőleges, hanem φ szöget zárna be, akkor a nyert térfogatot még $sin\varphi$-vel kellene szorozni, mivel ezen esetben az $MM'P'P$ trapezium térfogata is $MQ \times MP \times sin\varphi$ által fejeztetnék ki. Egy kis eltérés a derékszögtől nem ártalmas, mivel a sinus 90^0 körül igen kevéssé változik.

5) A Starke által készített készülékekhez egy táblácska van adva, melyre két meghatározott térfogatú kör van bevésve. Ha az f peczek ezen kör körületén hordoztatik körül, a leolvasott térfogatnak a táblára vésett számmal meg kellene egyezni; a különbség ritkán lesz nagyobb 1□"-nek 1—2 ezred részénél. Ha a műtétel egy papiroson rajzolt idomnál alkalmaztatik, a különbség valamivel nagyobb lesz, mert lehetlen a peczek hegyét egész szigorúsággal az idom karimáján vezetni; de azért a hiba ekkor sem haladja meg a térnek 0.001 részét, és kisebb-nagyobb területnél igen keveset különbözik egymástól.

6) Megemlítendő még, hogy a kezdő pontot M mindig olyan helyen kell a körületben választani, hol a karima az a rudacskákkal közel párhuzamos; ekkor nem fog hibát okozni, ha talán nem tökéletesen a kezdő pontban történnék is a megállapodás. Ha munka közben az f peczek kiugornék az idom karimájából: azt ellenkező irányban vissza kell vezetni, s a hiba magától kijavul. Az egyszerre megmérhető tér 48—50 □".

271. §. Amsler térszámitó gépe.

1) Hasonló elvekre, de sark-összrendező rendszerre van az Amsler, helvécziai tanár térszámitó gépe is alapítva, mely Starke által némely módositással Bécsben is készittetik. Ennek szerkezete következő: (297. ábra) A egy 5" hosszu pálczácska, melynek egyik vége derékszög alatt le van hajtva, s a C peczekben végződik; a másikon egy tengelye körül forogható kiálló karimával ellátott, és sima részén 100 egyenlő részre beosztott kerek

D van helyezve; közép tájban pedig E-nél egy csukló van, mely a B rudacskát az A pálczával összekapcsolja. A B rudacska másik végén egy gömbcsukló van, mely F-nél a K nehéz súlyba van mélyítve. Ezen pont körül a B rudacska szabadon mozoghat, míg E-nél a mozgás a rajztáblára — melyre az egész készülék helyeztetik — merőleges tengely EE' körül történik. A D kerék tengelyének a CE vonallal párhuzamosnak kell lenni. Hogy ezt egész szigorúsággal elő lehessen állítni, Starke az A pálczácskát két darabból csinálja, melyek a k igazitó csavarkák által kapcsoltatnak össze. A kerek forgása számát egy második kerekecskén lehet leolvasni, mely a D tengelyétől végtelen csavar által nyeri forgását, s beosztással van ellátva. Az A pálczácskát meg lehet hosszabbítni, vagy rövidítni. E végre az egyik végén cső alakú, melybe egy másik cső A' van dugva, s egy szoritó csavar M által összekapcsolva. A C peczek ezen A' cső végéről nyúlik lefelé. Az egész készülék egy sima táblára tétetvén, a K súly mozdulatlan marad, az A pálcza pedig a C helyén és a D kiálló karimáján nyugszik, s ha C helyéből kimozdíttatik, a készülék az E és F csuklók körül igen könnyen mozog, a D kerek pedig tengelye körül forog.

2) A készülék használata a Vetliéhez hasonló. T. i. azt a meghatározandó idom mellé, vagy ha bele fér, belé helyezvén, a C peczket a körület valamely pontjára beállítjuk, s a kerekek állását a mutatókon leolvassuk. Ezután körülvezetvén azt az idom körületén, míg a kiindulási ponthoz visszatér, s a mutatók állását ismét leolvassuk. A különbség adja a térfogatot azon egységben, melyre a beosztás vonatkozik, midőn az F pont a körületen kivül van. Ha pedig ez az idomba esik: akkor az előbbi különbséghez még egy állandó mennyiség járul, mely egyszer mindenkorra meg van határozva.

3) Ezen eljárásnak alapja következő: Legyen a 298. ábrában $CE = a$, $ED = b$, $EF = c$, s a C peczek a körületnek egy pontjára beállítva. Vigyük odább a peczket egy végtelen kis darabkával CC' a körületen, akkor D, D'-ig, E, E'-ig fog mozdulni, mig F mozdulatlan marad. Keressük most a végtelen keskeny ötszög $CC'E'FE$ térfogatát. Ezt három részből lehet összetéve gondolnunk, azaz:

$$CC'E'FE = OCC' - OEE' + EFE'.$$

Húzzunk OC és OE sugárokkal korívecskéket CG és EI, akkor OCC' és OEE' helyett az OCG és OEI körsectorokat lehet tenni, mivel az elhanyagolt háromszögecskék a már ugy is végtelen kis sectorokhoz képest elenyésznek. Nevezzük az OE hosszat ϱ, a $COC' \measuredangle \alpha$, $EFE' \measuredangle \beta$-nak, akkor lesz:

$$OCG = \frac{(a+\varrho)^2}{2}\alpha,$$

$$OEI = \frac{\varrho^2}{2}\alpha,$$

$$EFE' = \frac{c^2}{2}\beta,$$

Ezeket a fentebbi kifejezésben OCC', OEE' és EFE' helyett tévén, rövid összehuzás után lesz:

$$CC'E'FE = \frac{a^2}{2}\alpha + a\varrho\alpha + \frac{c^2}{2}\beta.$$

Ezen képletben ϱ olyan mennyiség, melyet megmérni nem lehet; ezt tehát más megmérhető vagy adott mennyiségekkel kell kifejezni.

A C peczek mozgása által a D kerek a DD' úton halad. Ezen útat DK és KD' ösztevőkre lehet szétbontani, s a mozgást két mozgássá oszlatni. Az első, mely a DK úton történik, a surlódás által a D kerek karimájára változatlan áttétetik; a második, mely a KD' út irányába esik, a D kerekre befolyással nincsen, mivel a mozgás a tengelylyel párhuzamos, vagyis a kerek karimájára merőlegesen megyen véghez. Ezen mozgás következtében tehát a D kerek egy kis fordulást csinál, melynek ívhossza a kerek karimáján DK. Nevezzük a kerek sugárát r, az ívnek megfelelő középponti szöget γ-nak, akkor lesz:

$$DK = r\gamma,$$

másrészről pedig az ODK derőkháromszögből lesz:

$$DK = (\varrho - b)\alpha$$

tehát $(\varrho - b)\,\alpha = r\gamma$, vagy $\varrho\alpha = b\alpha + r\gamma$.

Ezen értéket fentebb helyettesitvén, lesz:

$$CC'E'FE = \frac{\alpha^2}{2}\alpha + ab\alpha + \frac{c^2}{2}\beta + ar\gamma.$$

Hasonlóképen, ha a peczket egy végtelen kis darabkával ismét odább visszük a körületen

$$C'C''E''FE' = \frac{a^2}{2}\alpha' + ab\alpha' + \frac{c^2}{2}\beta' + ar\gamma'.$$

. . . . s i. t.

Ha ezen műtételt figyelemmel kisérjük: észrevesszük, hogy a CE vonal egy bizonyos állásig balra, onnan kezdve jobbra, s igy az idomhoz képest majd bal, majd jobbkéz felé ingadozik, mig végre a kiindulási helyre visszatér. Ezen ingadozás közben a D kerek is majd balra, majd jobbra fordul, a mint azt épen a körülmények hozzák magukkal. Szintén az előbbihez hasonló balra, jobbra lengés fog az EF vonalon is mutatkozni. Tegyük fel most, hogy az α, β, γ szögek a kezdő állásból balkézre való mozgásnál állitó jelekkel vétetnek, akkor a mértan elvei szerint az ellenkező, vagyis jobbkéz felé történt mozgás által képzett szögeket tagadó jellel kell gondolnunk. Ugyanaz áll a CO, EO és EF vonalak mozgása által képződött sectorok területeiről is. Ha most tehát a fentebb kifejtett végtelen számú egyenleteket összeadjuk: a területek összege a keresett térfogatot fogja szolgáltatni, mivel a körületen kivül eső részek mind állitó, mind tagadó jellel előjövén, egymást lerontják.

Tehát lesz:

$$T = \frac{\alpha^2}{2}(\alpha + \alpha' + \ldots) + ab(\alpha + \alpha' + \ldots) + \frac{c^2}{2}(\beta + \beta' + \ldots)$$
$$+ ar(\gamma + \gamma' + \ldots).$$

Tegyük fel most, hogy a forgáspont F az idomon kivül van, akkor $\alpha + \alpha' + \ldots = 0$, és $\beta + \beta' + \ldots = 0$, mivel a CO, és EF vonalaknak ugyanazon fordulást kell visszafelé tenniök, melyet előre tettek, hogy a kiindulási fekvésbe visszatérjenek; holott ez a γ-ra nézve nem áll, minthogy a D kerek más úton megyen vissza, mint a melyen előre ment.

Tehát lesz: $T = ar(\gamma + \gamma' + \ldots)$.

Ezen kifejezésben csak a γ-k összegének ösmerete kivántatik meg, ezt pedig a kerek fordulatainak számából meg lehet határozni, csak a kerek első és utolsó állását kell leolvasni, s ezeket egymásból levonni. Legyenek ezen leolvasások Γ és Γ', akkor lesz: $T = ar(\Gamma' - \Gamma)$.

A bécsi készülék ugy van csinálva, hogy ha a kerek egyet fordul: a megfelelő terület $= 10 \square''$ bécsi mértékben, vagyis catastralis léptéken 10 osztrák hold; tehát

$$10\square'' = ar \,.\, 2\pi, \quad \text{vagy} \quad ar = \frac{5}{\pi}\square''.$$

Innen következik:

$$T = \frac{5\Gamma'}{\pi} - \frac{5\Gamma}{\pi}, \ldots \square''\text{-ben.}$$

A kerek karimáján nem Γ olvastatik le, mely ívmértéket jelent, hanem a körnek egy tizedrésze van egységül véve, vagyis a kör körülete $=10$ egységgel. Tehát ha a D kereken tett leolvasásokat p és q-val jeleljük, ezen arányok állanak:

$$2\pi : \Gamma = 10 : p,$$
$$2\pi : \Gamma' = 10 : q,$$

honnan következik:

$$p = \frac{5\Gamma}{\pi},$$

$$q = \frac{5\Gamma'}{\pi}.$$

Ezen értékeket helyettesitvén, végre lesz:

$$T = q - p, \quad \square''\text{-ben} \ldots \text{ð}$$

4) Ha a forgáspont T a térben van valahol a körületen belül : akkor

$$\alpha + \alpha' + \ldots = 2\pi, \quad \beta + \beta' + \ldots = 2\pi,$$

mivel a CO és EF vonalak egyszer egészen körülfordulnak. Ekkor tehát lesz:

$$T = (a^2 + 2ab + c^2)\pi + ar(\gamma + \gamma \ldots),$$

mely kifejezés a fentebbitől csak egy állandóban C különbözik, hol $C = (a^2 + 2ab + c^2)\pi$.

Könnyű megmutatni, hogy ezen állandó egy körnek térfogatát jelenti, melynek karimáját a peczek úgy irja le, hogy a kerek nem forog, hanem csak csúszik. Ezen eset akkor áll elő, ha a D kerek síkja meghosszabbítva az F ponton megyen keresztül. Ezen esetben $q-p$ azon gyürű térfogatát ábrázolja, mely a kör karimája és az idom körülete között foglaltatik, és állító vagy tagadó értéket nyer a szerint, a mint ezen gyürű a körön kivül vagy belül fekszik. Ezen állandó értéke a bécsi készüléken már meg van határozva, s a mellékelt leirásban, mely mellesleg legyen mondva igen zavart, feljegyezve. Ezen szám a k. József műegyetem birtokában lévő készüléken $= 191{\cdot}30\,\square''$.

Megemlítendő még, hogy a peczket a körületnek mindig olyan pontjára kell először beállítni, hol az *A* pálcza a karimával körülbelől párhuzamos fekvésben van; ekkor ha nem jövünk is vissza tökéletesen a kiindulási pontra, a hiba a leolvasásban alig lesz észrevehető.

5) Az Amsler-féle készüléket a Vetliével összehasonlítván feltűnik, hogy mindkettőnek képletében két vonalas tényező fordul elő, melyek a Vetliénél körsugárokat, Amslerénél pedig az egyik egy körsugárt, a másik pedig egy pálczahosszat jelentenek. A körsugárok hosszát változtatni nem lehet, mivel azok egyszer mindenkorra meg vannak csinálva, de egy pálczát könnyen lehet rövidebbé vagy hosszabbá tenni, s ez által a tér egységét is változtatni.

Ezen szempontból itélve az Amsler-féle készülék elméletileg tökéletesebb mint a Vetlié, s nagyobb tért is lehet vele egyszerre megmérni, minthogy az egész 250 □″-ig terjed. De gyakorlatilag véve a Vetlié jobb eredményt ád, mert ezen, becslés által még 0.001 □″-t is lehet le olvasni, holott az Amslerén becslés segítségével is csak 0·01 □″ lehet nyerni. A Vetli készülékét tehát apró telkecskék, az Amslerét pedig egész dülők területének meghatározására, vagyis ellenőrségi számításoknál czélszerűbben lehet használni.

6) Mind a két készüléken a mérést szorozni is lehet, t. i. kétszer, háromszor körül lehet járni az idom karimáját és a leolvasási különbséget a szorzás számával osztani.

7) Az Amsler készülékhez is van egy próbakör adva, melynek területe a táblácskára rá van vésve. Ezen kör segítségével a *D* kerek tengelyének az *EC* vonallali párhuzamos voltát is meg lehet vizsgálni. E végre körül kell a *C* peczket a kör karimáján hordozni kétféle fekvésben, először úgy, hogy a *K* súly a körhöz lehetőleg közel, másodszor, hogy attól lehetőleg távol legyen. Az eredménynek meg kell egyezni egymással, s ha az *EC* vonal hossza helyes, ezen eredménynek a körre vésett ösmeretes számmal egyezni kell. Ezen kört lehet használni próba gyanánt azon esetben is, ha más egységre akarnók a készüléket beállítni, mint a melyre már kiigazítva van.

8) Ezen átalakítást egy példán érthetővé lehet tenni. Adjon p. o. a készülék 1200 □ öles holdakat $1'' = 50^0$ léptéknél. Nevezzük az ezen egységnek megfelelő hosszát az *A* pálczának a'-nak, akkor ezen egyenletnek kell állani:

$$2a'r\pi = \frac{10.1200}{50^2} \square'',$$

ugyde az előbbi elrendezésnél volt

$$2ar\pi = \frac{10.1600}{40^2} = 10\square'',$$

tehát $$a' : a = \frac{12}{25} : 1 = 12 : 25.$$

A pálcza hosszát tehát e szerint kell átalakítni. A kör területe $= t\square''$, ez az uj mérték szerint teszen $\frac{50^2}{1200} = \frac{25}{12}t$ holdat. Ha tehát a pálcza hossza helyes, ennek kell kijönni, ha a kör térfogatát az ujonnan berendezett készülékkel megmérjük, s minthogy a pálcza hosszát alig lehet mindjárt az első próbára eltalálni, addig kell azt változtatni, míg a mérés az említett eredményt szolgáltatja.

272. §. Mérlegelés.

Végre valamely idomnak térfogatát mérlegelés által is meg lehet határozni. E czélból az idomot, annak karimáján, a papirosból ki kell vágni, s bele egy lehetőleg nagy négyzetet rajzolván, ezt szintén ki kell metszeni. Ha most mind az idom, mind a négyzet súlyát egy finom mérleggel megmérjük azon feltevés mellett, hogy a papiros mindenütt egyenlő tömöttségű, a súlyok a területekkel egyenes viszonyban fognak állani. Tehát csak a négyzet térfogatát kell még közvetlen mérés által meghatározni, s az idom térfogatát az arányból ki lehet számítni.

273. §. Hibák. Háromszög.

Minő befolyással vannak a méretekben előjöhető hibák a térkiszámításra, következő módon lehet meghatározni.

Legyen az idom egy háromszög; ennek térfogata

$$T = \frac{am}{2}.$$

Tegyük fel, hogy mind a, mind m változik, akkor T is változni fog, s ha a változásokat a betü eleibe helyezett Δ által jelel-jük, lesz:

$$T + \Delta T = \frac{(a + \Delta a)\ (m + \Delta m)}{2}.$$

Ezen egyenletből a fentebbit levonván, a műtételeket végrehajtván, és a másodrangú kis mennyiségeket elhanyagolván, elég közelitéssel lesz:

$$\Delta T = \frac{a\Delta m + m\Delta a}{2} \ldots \odot$$

Ha ezen egyenletet az elsővel elosztjuk, lesz:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta m}{m} \ldots ☽$$

Most a hibákra nézve többféle esetek jöhetnek elő, u. m.

a) Ha a mérési hibák onnan erednek, hogy a térkép a léptékhez képest változott, (midőn p. o. a papiros összemegyen): akkor a hibák a vonalak hosszával egyenes viszonyban állanak, azaz:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta m}{m} = \mu,$$

tehát

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\mu \ldots ♂$$

A térfogatban előforduló hibának a térfogathozi viszonya tehát állandó mennyiség s egyenlő a vonalhibának a vonalhozi viszonya kettős értékével. Ha p. o a vonalak $^1/_{800}$-ad részökkel változtak, a térfogat $^1/_{400}$ résszel fog változni.

b) Ha az adatok a mezőn közvetlen lánczmérés által határoztattak meg: akkor a tapasztalás tanitása szerint a vonalakban megeső hibákat a vonalak hosszával aránylagosaknak, de mind igen-, mind nemleges értelemben lehet venni, minthogy a mérés mind kelleténél kevesebbet, mind többet adhat. Tehát

$$\frac{\Delta a}{a} = \pm \frac{\Delta m}{m} = \pm \mu.$$

Ha most mind a két hibát egyenlő jellel vennők: a térfogat hibája az előbbi esetével egyenlő lenne, s lehető legnagyobb eredményt fogná szolgáltatni. Ha pedig azokat ellenkező jellel vennők, a hibák egymást lerontanák. Mind a két szélsőség egyaránt valószinűtlen, hanem a közép hibát kell szem előtt tartanunk, melynek értékét a legkisebb négyzetek elmélete szerint az egymástól független hibák négyzetei összegéből húzott négyzetgyök szolgáltatja. Tehát a fentebbi ☽ egyenletből lesz:

$$\frac{\Delta T}{T} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2}$$

s a fentebbi feltevést figyelembe vévén, lesz:

$$\frac{\triangle T}{T} = \pm \mu \sqrt{2} \ldots ♂$$

A lánczmérésnél a μ értékét középszámmal 0·0015-nek lehet venni. Ezen értéket helyettesítvén, lesz:

$$\frac{\triangle T}{T} = \pm 0{\cdot}0021,$$

mint a térkiszámitási hiba közép értéke. A hibának a térhezi viszonya tehát ezen esetben is állandó menynyiség, de jele bizonytalan.

c) Ha a méretek a térképről vétetnek le, akkor a vonalak megmérésében megesheтő hibák egymástól függetlenek, s mind igen- mind nemleges értelemben egyaránt előjöhetnek. A ⊙ és ☽ egyenletek tehát a *b*) értelmében ezekké változnak:

$$\triangle T = \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^2 \triangle m^2 + m^2 \triangle a^2}, \quad \frac{\triangle T}{T} = \pm \sqrt{\left(\frac{\triangle a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\triangle m}{m}\right)^2}.$$

Ezen kifejezésekben $\triangle a$ és $\triangle m$ kisebb nagyobb, egyébaránt a vonal hosszától független értékeket jelentenek. Vegyünk helyettük egy közép értéket ω, melyet a 109. §. szerint 2—3 ezeredrész hüvelyknek lehet tenni, akkor az előbbi képletek ezekké változnak:

$$\triangle T = \pm \frac{\omega \sqrt{a^2 + m^2}}{2} \ldots ♀, \quad \frac{\triangle T}{T} = \pm \omega \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{m^2}} \ldots ♃$$

Ezen képletből kétféle tanuságot merítünk. Először: mennél nagyobb a és m, azaz a térfogat: annál nagyobb absolut hibától lehet tartani, de annál kisebb lesz a viszonylagos hiba. Tehát nagyobb területeket aránylag pontosabban lehet meghatározni, mint kisebbeket. Másodszor: a térfogat meghatározásában ejthető hiba a háromszög alakjától függ. Legkedvezőbb esetben, ha $a = m = \pm \sqrt{2T}$, lesz:

$$\triangle T = \pm \omega \sqrt{T}, \text{ és } \frac{\triangle T}{T} = \pm \frac{\omega}{a} \sqrt{2} = \pm \frac{\omega}{\sqrt{T}},$$

mint a *b*) alatti esetben, minden más körülmények közt pedig annál nagyobb, mennél inkább különbözik a az m-től (L. 259. §.) Legyen p. o. egy háromszögben $a = 3''$, $m = 1''$, $\omega = 0{\cdot}''003$, akkor:

$$\triangle T = \pm \frac{0{\cdot}003}{2} \sqrt{1 + 9} = \pm 0{\cdot}0048 \,\square'', \quad \text{és}$$

$$\frac{\triangle T}{T} = \pm \frac{0{\cdot}0048}{3/2} = \pm 0{\cdot}0032$$

274. §. Trapezium.

A trapezium területe $T = \frac{(a+b)m}{2}$.

Ebből hasonló módon lesz:

$$\Delta T = \frac{(a+b)\,\Delta m + m\,\Delta a + m\,\Delta b}{2} \ldots \odot \quad \text{vagy}$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta(a+b)}{a+b} \ldots ☽$$

Az a) alatti esetben ezen egyenlet is ugyanazon eredményre vezet, melyet a háromszögnél találtunk, u. m.:

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\mu \ldots ♂$$

A b) alatti eset a gyakorlatban elő nem fordulván elmellőzhető.

A c) alatti esetben, megtartván az előbbi §. helyettesitéseit, a $\odot$ és ☽ egyenletek ezekké változnak:

$$\Delta T = \pm \frac{\omega}{2} \sqrt{(a+b)^2 + 2m^2} \ldots ♀$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \pm\, \omega \sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{2}{(a+b)^2}} \ldots ♃$$

A hiba legkisebbé lesz, ha $(a+b)^2 = 2m^2$, s ezen esetben

$$\Delta T = \pm\, \omega\, m = \pm\, \omega \sqrt[4]{2}\, \sqrt{T},\quad \frac{\Delta T}{T} = \pm \frac{\omega}{m} \sqrt{2} = \pm \frac{\omega \sqrt[4]{2}}{\sqrt{T}},$$

valamivel nagyobb, mint az egyenterületű háromszögnél.

275. §. Sokszög.

Ha egy sokszög háromszögekre bontatik fel, s ezek által számittatik ki, akkor

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n,$$

hol T_1, T_2 . . . T_n az egyes háromszögek térfogatait jelentik. Ugyde az a) alatti esetben a 273. §. ♂ szerint:

$$\Delta T_1 = 2\mu T_1,$$
$$\Delta T_2 = 2\mu T_2,$$
$$\vdots$$
$$\Delta T_n = 2\mu T_n.$$

Ezen egyenleteket összeadván, lesz:

$$\Delta T = 2\mu(T_1 + T_2 + \ldots T_n) = 2\mu T,$$

vagy
$$\frac{\Delta T}{T} = 2\mu \ldots ♁$$

A háromszögre nézve talált képlet tehát a sokszögre nézve is érvényes.

A *b*) alatti esetben lesz:
$$\Delta T = \pm \sqrt{(\Delta T_1)^2 + \ldots (\Delta T_n)^2},$$
úgyde a 273. §. ♂ szerint:
$$\Delta T_1 = \pm T_1 \mu\sqrt{2},$$
$$\Delta T_2 = \pm T_2 \mu\sqrt{2},$$
$$\vdots$$
$$\Delta T_n = \pm T_n \mu\sqrt{2},$$
ezeket összeadván lesz:
$$\Delta T = \pm \mu . \sqrt{2} . \sqrt{T_1{}^2 + T_2{}^2 + \ldots + T_n{}^2},$$
$$\text{vagyis } \frac{\Delta T}{T} = \pm \mu \sqrt{2} . \sqrt{\frac{T_1{}^2 + T_2{}^2 + \ldots + T_n{}^2}{(T_1 + T_2 + \ldots + T_n)^2}}.$$
A gyökmennyiség mindig kisebb mint 1, tehát a sokszög területének meghatározásában a pontosság foka nagyobb, mint a vele egyenlő nagyságú háromszögnél. Ha a háromszögek közül, melyekre a sokszög felbontatott, egy a többiekhez képest igen nagy: akkor a többieket a gyökjegy alatt el lehet hanyagolni, s a gyökmennyiség közel $= 1$ lesz. Ez a legroszabb eset. Ellenben, ha a háromszögek egymással egyenlők, akkor a gyökmennyiség $= \sqrt{\frac{1}{n}}$, a hiba tehát ezen határok közt ingadozik:
$$\frac{\Delta T}{T} = \pm \mu\sqrt{2}, \quad \text{és} \quad \frac{\Delta T}{T} = \pm \mu \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

A *c*) alatti esetben lesz, a ♀ és ♃ képletek szerint
$$\Delta T = \pm \sqrt{(\Delta T_1)^2 + (\Delta T_2)^2 + \cdots + (\Delta T_n)^2}$$
$$= \pm \frac{\omega}{2}\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + \cdots + a_n{}^2 + m_1{}^2 + m_2{}^2 + \cdots + m^2},$$
mely képletekből az előbbihez hasonló következtetéseket lehet húzni.

276. §. Folytatás.

Midőn a sokszög trapeziumokra bontatik fel, s a magasságok helyett mindig a paralleláknak az elsőtől való távjai méretnek meg, ha a parallelák sorjában a_0, a_1, a_2, $\cdots$ a_{n-1}, a_n, a távolságok pedig t_1, t_2, t_3 $\cdots$ t_{n-1}, t_n-nek neveztetnek, a térkiszámitás képlete ez:

$$T=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}(a_0+a_1)\,t_1+(a_1+a_2)(t_2-t_1)+(a_2+a_3)(t_3-t_2)+\cdots\\ \qquad\qquad+(a_{n-1}+a_n)(t_n-t_{n-1})\end{array}\right\},$$

vagy rövid kifejtés és összehúzás után

$$T=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}a_0t_1+a_1t_2+a_2(t_3-t_1)+a_3(t_4-t_2)+\cdots\\ \qquad+a_{n-1}(t_n-t_{n-2})+a_n(t_n-t_{n-1})\end{array}\right\},$$

vagy

$$T=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}t_1(a_0-a_2)+t_2(a_1-a_3)+t_3(a_2-a_4)+\cdots\\ \qquad+t_{n-1}(a_{n-2}-a_n)+t_n(a_{n-1}+a_n)\end{array}\right\}.$$

Ha ezen kifejezésekben minden előforduló mennyiségeket változtatunk, a változásokra nézve ezen képlet áll elő:

$$\triangle T=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}t_1\triangle a_0+t_2\triangle a_1+(t_3-t_1)\triangle a_2+\cdots\\ +(t_n-t_{n-2})\triangle a_{n-1}+(t_n-t_{n-1})\triangle a_n\\ +(a_0-a_2)\triangle t_1+(a_1-a_3)\triangle t_2+\cdots\\ +(a_{n-2}-a_n)\triangle t_{n-1}+(a_{n-1}+a_n)\triangle t_n\end{array}\right\}.$$

Ezen kifejezés különösen azon esetre alkalmazandó, midőn a méretek a térképről vétetnek le. Ekkor lehet tenni:

$$\triangle a_0=\triangle a_1=\triangle a_2=\cdots=\triangle t_1=\triangle t_2=\cdots=\pm\omega,$$

és a térfogat közép hibája lesz:

$$\triangle T=\pm\frac{\omega}{2}\sqrt{\begin{array}{l}t_1^2+t_2^2+(t_3-t_1)^2+\cdots+(t_n-t_{n-2})^2+(t_n-t_{n-1})^2\\ \quad+(a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+\cdots+(a_{n-2}-a_n)^2+\\ \qquad\qquad+(a_{n-1}+a_n)^2.\end{array}}$$

Hasonló módon lehet a többi térkiszámitási képleteket a vizsgálat alá venni, s a méretek hibáinak befolyását megitélni, de több részletekbe ereszkedni nem akarunk.

277. §.

Ha egy egész szelvény részleteinek térmeghatározásáról van szó : a munkát a legnagyobb rendben kell véghezvinni, hogy az hibáktól ment legyen. A méreteket egy jegyzőkönyvbe kell beírni, hogy azokat idővel is fel lehessen találni, s szükség esetében a térképpel össze lehessen hasonlítni. A jegyzőkönyv célszerű szerkezetének schemája ez:

Darab szám	Idom szám	Alap	Magasság	Térfogat				
				egyenként	összesen	javiték	pótlék	végleges
3807	1	125·03	47·03	2963				
	2, 3	150· 7	53· 4, 72· 3	9471				
	4	125· 3, 134· 9	63· 4	8248	20682	—45·3	49·5	20686
		x	*y*					
3808	0	0	0					
	1	35·07	119·05					
	2	76· 9	—85· 3					
	3	153· 4	92· 7					
	4	238· 5	53· 7					
	5	207· 6	—87· 3					
	6	160· 3	—20· 7	.	14081	—30·8	33·8	14084

Ezen irásmódból egy pillanatra kitűnik, hogy melyik szám minő idomhoz tartozik, p. o. a 3807-ik darabban 2 és 3 kettős háromszögeket képeznek közös alappal; 4 pedig trapeziumot, mert kettős alapja, de csak egy magassága van.

A térfogatot elég csak egész □ ölekben számítni, tizedrészek csak kivételes esetekben vétetvén figyelembe, mivel ezek rendesen már az elnézhető hiba határai közé esnek. Az idomok térfogatai összegét azután az összeg rovatba kell beírni, mely a darab nyers térfogatát szolgáltatja, és az elkerülhetlen hibák és a lépték változása miatt még javitást és pótlékot igényel. Ezek az illető rovatokba iratnak, s a három rovat algebrai összege adja a végleges eredményt.

278. §. Kiegyenlítés.

A részletes kiszámitás eredménye, mint minden emberi munka, ki lévén téve az elkerülhetlen mérési hibák befolyásának, a valóságtól többé kevésbbé mindigk ülönböző fog lenni. Szükség tehát megvizsgálni, milyen nagy a hiba, s azt, ha a megengedhető hiba határait még át nem hágja, az egyes darabok közt el kell oszlatni, ellenkező esetben pedig fel kell keresni és kijavítni.

Az eloszlatás következőképen vitetik véghez:

1) Ha a szelvény egészen megtölt párlag alakú, akkor

annak térfogatát az oldalaknak többszöri s pontos megmérése által meg kell határozni. Legyen ez T. Ezután ki kell számítni az egyes dülők térfogatait, nem ügyelvén a bennök lévő részletekre. Ha ezeket sorjában A, B, C, D-nek nevezzük, akkor, ha minden hibátlan volna, ezen egyenletnek kellene állani:

$$A + B + C + D = T.$$

De már itt is egy kis különbséget K fogunk találni, azaz:

$$A + B + C + D - T = K.$$

Ezen különbséget tehát az egyes térfogatokhoz aránylagosan el kell osztani a társas szabály szerint (273. §. 1.). Ha ezen javításokat, melyeket az A, B, C, D-hez kapcsolni kell, hogy a fentebbi különbség elenyésszék, (A), (B), (C), (D)-nek nevezzük, következő arányok állanak elő:

$$(A + B + C + D) : A = K : (A),$$
$$(A + B + C + D) : B = K : (B),$$
$$(A + B + C + D) : C = K : (C),$$
$$(A + B + C + D) : D = K : (D),$$

honnan a javításokat ki lehet keresni, s a kijavított dülők térfogatai lesznek:

$$A' = A + (A),$$
$$B' = B + (B),$$
$$C' = C + (C),$$
$$D' = D + (D),$$

2) Ha a szelvény nincs egészen megtelve : akkor az üresen maradt részt külön dülőnek tekintjük, melyre szintén javítás esik.

Ha pedig a szelvény természetes határok által volna bekerítve (227. §.) : akkor a felvett rész körül egyenes vonalak által egy kevésoldalú sokszöget írunk le, s ennek térfogatát kiszámítván, ezzel hasonlítjuk össze a dülők és a köröskörül lévő üres tér összegét.

3) A dülők térfogatai e szerint meg lévén állapítva, összehasonlítjuk velök az egyes darabok összeadása által nyert eredményeket, s a különbségeket ugyanazon módon oszlatjuk el, mint előbb előadatott. Az egyes darabokra eső javításokat a jegyzőkönyv illető rovatába (277. §.) beírjuk.

4) Ezen utóbbi számítás rendesen igen terjedelmes lévén, czélszerű egy kis táblát készítni, melynek segitségével a javítás kiszámitása egyszerű összeadássá változik. Legyen t. i. a darabok

összege $\dot{O}$, a dülő és a darabok összege közötti különbség K, akkor ezen arányt lehet felállítni:

$$\ddot{O} : K = 1000 : x,$$

ebből azután az ezer sokasainak megfelelő javításokat 10000-ig egyszerű szorzás, vagy sommázás által, valamint a százasoknak és tízeseknek megfelelőket 10-el, illetőleg 100-al, osztás által lehet előállítni. Legyen p. o. egy dülőben $\ddot{O} =$ 122535 □°, holott annak térfogata a kijavítás után . . 122267 □°-nek találtatott, a különbség tehát . . . . . . $K =$ 268 □°.

Ebből lesz: $x = \frac{268 \times 1000}{122535} = 2{\cdot}19$ □°, a táblácska tehát következő alakokat veszen fel:

Térfogat	Javítás	Térfogat	Javítás	Térfogat	Javítás
1000	2·19	100	0·22	10	0·02
2000	4·38	200	0·44	20	0·04
3000	6·57	300	0·66	30	0·07
4000	8·76	400	0·88	40	0·09
5000	10·95	500	1·10	50	0·11
6000	13·14	600	1·31	60	0·13
7000	15·33	800	1·53	70	0·15
8000	17·52	800	1·75	80	0·18
9000	19·71	900	1·97	90	0·20
10000	21·90	1000	2·19	100	0·22

Legyen most egy teleknek térfogata a 277. §. szerint 20682 □°, a kijavítás kiszámitása igy megyen véghez:

20000-re esik = 43·80,
600-ra » = 1·31,
80-ra » = 0·18,

összes javítás = 45·29,

az illető rovatba tehát irni kell = — 45·3 □°.

279. §. Pótlék.

A részletek kiszámitása által nyert eredmények csak akkor fogják a térfogatok valódi értékeit szolgáltatni, ha a térkép kicsinyítési viszonya a felvétel óta változatlan maradt, és a kiszámitásnál ugyanazon lépték használtatott, melylyel a felvétel történt. Ez ugyan feltehető, ha a papiros üveg- vagy vastáblára van felragasztva; de ha az asztaltábla fából van csinálva, vagy a papiros a tábláról már le van szakitva, ez gyakran tetemesen összehuzódik, s a kicsinyitési viszony érezhető változást szenved.

Ha a lépték a felvétel kezdetétől fogva fel van rajzolva a térképre: feltehetjük, hogy ez is aránylagosan megyen össze a térképpel, tehát az összehuzódás a térkiszámitásra károsan hatni nem fog; de ezen feltevés csak kivételes esetekben fog beteljesedni, legtöbbnyire a lépték csak azon iránynak megfelelő változást vévén fel, melyben az rajzolva van, a más irányokban fekvő méreteket pedig hibásan fogja adni. Czélszerűbb tehát a térkiszámitást egy sárgarézre vésett tökéletes lépték által eszközölni, s a térkép összehuzódásából eredő változást számitás által tudni be a térfogatba. Ugyanezen módot kell alkalmazni, valahányszor egy térkiszámitó készülék jön alkalmazásba, mert ezek mindig az összehuzódott alakok térfogatát mérik meg, magok pedig a teljes mértékre vannak alapítva.

Ennek kiszámitása végett határozzuk meg a papiros összehuzódását több irányban, s vegyük közöttök a számtani középet (lásd 193. §.) Legyen ez az l hosszra nézve $\triangle l$, tehát a közöttök lévő viszony:

$$\frac{\triangle l}{l} = \mu,$$

akkor a térfogat változási viszonya lesz $= 2\mu$. (273. §. 1). P. o. a 193. §-ban 90″ összement 0·″103-el, tehát

$$\frac{\triangle l}{l} = \frac{0{\cdot}103}{90} = 0{\cdot}0012 = \mu.$$

Ennélfogva $\frac{\triangle T}{T} = 0{\cdot}0024$, és a 277. §-beli 20682 — 45·3 területre esnék: $20636{\cdot}7 \times 0{\cdot}0024 = 49{\cdot}5$.

Ezen ezetben is legczélszerűbb egy táblácskát készítni, s a pótlékot ennek segitségével számítni ki. A pótlékot mindig hozzá kell adni a nyers térfogathoz, minthogy a papiros a leszakítás után mindig kisebb lesz, sohasem nagyobb.

280. §. Hibafelkeresés.

Ha valamelyik dülő és a részletek közötti különbség olyan nagy volna, hogy azt el nem lehetne tűrni: akkor azt fel kell keresni és ki kell igazítni. Ezen fáradságos munkát következőképen kell rendezni. A dülőt egy mezsgye által körülbelől két egyenlő részre szakítván, ezeket kiszámítjuk, nem figyelvén a bennök lévő többi mezsgyevonalakra. Ezután a darabok ösmeretes térfogatait összeadván, az eredményeket egymással összehasonlítjuk. Azt fogjuk találni, hogy az egyik rész térfogata helyes, de a másiké a részletes kiszámítás által nyerttől különbözik. Ezen részt tehát egy mezsgye által ismét két részre szakítjuk, s i. t., mig folytonos aprózás által a hibás darab esméretére jutunk, melynek méreteit a jegyzőkönyvben felirtakkal összehasonlítván, a hibás adat fel fog fedeztetni.

II. SZAKASZ.

Beosztás.

281. §.

A beosztási feladatok a gyakorlatban két, egymástól lényegesen különböző körülmény közt jönnek elő, u. m. a föld minősége vagy mindenütt egyenlő, tehát egyenlő területeket egymással fel lehet cserélni, vagy pedig a föld minősége különböző helyeken különböző. Ekkor nem a területek nagysága, hanem azoknak értéke irányadó, s egyenlő értékeket lehet csak egymással felcserélni a nélkü!, hogy egyik, vagy másik illető ne károsodjék.

Az első, egyszerűbb esetben a feladatokat mind szerkesztés mind számitás segitségével fel lehet oldani; az utóbbiban kivétel nélkül számitást fogunk használni.

A feloldásra szükséges adatokat lehet ugyan egyes esetekben a mezőn közvetlen is megmérni : de ez ritkán történik. A feloldás legtöbbnyire a térképen kicsinyített mértékben vitetik véghez, s a nyert eredmények utólagosan tétetnek át a mezőre.

282. §. Illetőség.

Az elmetszendő részek vagy közvetlen adva vannak, vagy az egésznek meghatározott tört részét ábrázolják, vagy azoknak egymáshozi viszonya van adva.

Első esetben a részt minden további előkészités nélkül ki lehet metszeni.

Az utóbbiakban elébb a részeket meg kell határozni. Ez a második esetben minden további útmutatás nélkül véghezvihető, a harmadikban pedig a társas, vagy osztályszabály szerint eszközöltetik. Legyen az egész beosztandó terület T, az egyes illetőségek $t_1, t_2, t_3, t_4 \ldots$, ezeknek egymáshozi viszonyszámjai $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$, akkor ezen arányok állanak:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \cdots : T = \alpha : t_1 = \beta = t_2 = \gamma : t_3 = \cdots$$

honnan következik:

$$t_1 = T \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma + \cdots}, \; t_2 = T \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma + \cdots}, \; t_4 = T \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma + \cdots}$$

283. §. Első eset. A föld minősége mindenütt egyenlő.

Feladat. Egy háromszöget ABC tetszésszerinti számú, egymáshoz adott viszonyokban álló részekre beosztani úgy, hogy az osztályvonalak a C csúcsponton menjenek keresztül.

Feloldás. Osszuk be a C csúcscsal átalellenes oldalt AB a kivánt számú és viszonyú részekre, s az osztálypontokat kössük össze a C csúcscsal; a keletkező háromszögek a kivánt részeket fogják adni. Mert ezen háromszögeknek közös magasságuk lévén, térfogataik az alapokkal állanak egyenes viszonyban.

284. §.

Feladat. Egy sokszöget tetszésszerinti számú, és adott viszonyú részekre beosztani úgy, hogy az osztályvonalak a kerületnek egy adott pontján M (299. ábra) menjenek keresztül.

I. Feloldás. Szerkesztés által. 1) Változtassuk át a sokszöget egy háromszöggé, s osszuk be ezt a 283. §. szerint a kivánt részekre. E szerint az egyes illetőségek háromszögek alakjában fognak adva lenni, s ezeket kell egyenként a sokszögből lemetszeni. E végre legyen az első lemetszendő háromszög ABC. Húzzuk a sokszögben az M pontból az első átlót Mb, változtassuk át az ABC háromszöget $AB'C'$-re úgy, hogy az alap $AB' = Mb$ legyen, s tegyük fel ennek magasságát $C'D$ a sokszög a pontjából Mb-re merőlegesen, úgy hogy $ah = C'D$ legyen, s húzzunk h-ból Mb-hez párhuzamost : ez a bc oldalt, vagy ennek meghosszabbítását metszeni fogja m-ben, s Mm lesz a keresett határvonal. A második osztályrészt a maradék $Mmcdef$ sokszögből hasonlóképen kell elmetszeni s i. t.

B e b i z o n y í t á s. Az Mm vonal rendesen egy négyszöget, ritkán egy háromszöget metsz el, melynek térfogata az $AB'C'$ háromszögével egyenlő, u. i.

$$Mmba = \frac{Mb \cdot ah}{2},$$

$$AB'C' = \frac{AB' \cdot C'D}{2},$$

úgyde a szerkezet szerint $Mb = AB'$, $ah = C'D$, tehát a térfogatok is egyenlők.

1) Megtörténhetik, hogy a h-n keresztül húzott párhuzamos (301. 302. ábrák) a bc oldal meghosszabbítását metszi, s az m pont vagy a térbe, vagy azon kivül esik. Ezen esetben csak az $Mabc$ négyszöget lehet az osztályrész egy darabja gyanánt használni, a még hiányzó Mcm darabot pedig az $Mcde$ . . . sokszögből kell az előbbi mód szerint hozzá metszeni. Ha pedig az ekként nyert pont még most sem esnék a sokszög karimájába : a műtételt ismételni kell, mig ezen feltételnek elég tétetik.

2) Ha ah kisebb, mint az Mab háromszög magassága: akkor az m pont az ab oldalra esik, de azért a terület helyes, mint azt könnyen be lehet látni.

285. §.

II. F e l o l d á s. S z á m í t á s á l t a l. Húzzunk az M pontból (302. ábra) minden sarkpontba átlókat, s számítsuk ki a keletkező háromszögek területeit u_1, u_2, u_3, u_4, u_5. Ezeket összeadván, kijön a sokszög területe U. Tegyük fel, hogy a sokszögnek területe már előbbi kiszámítások által megállapittatván, T-nek találtatott; az ujabb számításban ejtett hiba tehát $T - U = K$, s ebből az egyes u_1, u_3, . . . u_5-ra eső javitásokat ki kell számítni, s azokat kijavítni (l. 278. §.).

Ezután számítsuk ki az egyes illetőségeket, t_1, t_2, t_3-t. Ezek a 282. §. szerint lesznek:

$$t_1 = T\frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma \ldots}, \; t_2 = T\frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma + \ldots}, \text{ s i. t.}$$

Most hasonlítsuk össze t_1-et a háromszögekkel sorjában. Legyen $u_1 < t_1$, de $u_1 + u_2 > t_1$, a különbség $u_1 + u_2 - t_1 = K$.

Ezen darabot az Mcb háromszögből az Mc felől lévő oldalon el kell metszeni. Legyen ez Mcm, akkor u_2 és K háromszögeknek magasságuk közös lévén, területeik az alapokkal lesznek egyenes viszonyban. Tehát ezen arány áll:

$$u_2 : K = bc : cm,$$

honnan cm-et kiszámítván, a cb oldalon c pontból fel lehet tenni.

2) A második osztályrészre nézve a számítás ilyen alakot veszen fel: az u_2-ből maradt $K < t_2$, de $K + u_3 > t_2$, tehát a különbség $K' = K + u_3 - t_2$. Ezt az Md oldal mellett kell az u_3-ból elmetszeni. Az elmetszés egy második mód szerint így is eszközölhető: K' egy háromszöget fog képezni, melynek alapjául az Md átlót lehet venni. Tehát annak magassága lesz:

$$m = \frac{2K'}{Md},$$

ezt az alap valamely pontjában merőlegesen feltévén, s a végpontból az alaphoz párhuzamost húzván, egy metszéspontot n fogunk a cd oldalon nyerni, hová a határvonalnak mennie kell.

3) Mind a két feloldás egymástól függetlenül adja a határvonalakat; tehát ha valamelyiken egy kis hiba esik is, az a többire ki nem hat. Az előleges hibaeloszlatás pedig biztosít a felől, hogy a beosztás maradék vagy hiány nélkül fog véghezmenni, ezért ezen mód különös figyelemre érdemes.

286. §.

F e l a d a t. Egy sokszöget bizonyos adott számú és viszonyú részekre úgy beosztani, hogy a határvonalak a körületnek bizonyos adott pontjain M, N, P menjenek keresztül.

I. F e l o l d á s. S z e r k e s z t é s á l t a l. Változtassuk át a sokszöget egy háromszöggé, és osszuk be ezt a 283. §. szerint a kellő számú és viszonyú részekre. Azután messük el az első illetőséget a 284. §. szerint az M pontból kiindulván. A maradékból messük el a második illetőséget az N pontból indulván ki, s így tovább. Az utolsó darab magától fennmarad.

II. F e l o l d á s. S z á m í t á s á l t a l. Húzzunk az M pontból átlókat, míg az elmetszett háromszögek összege nagyobb lesz az első illetőségnél, s bizonyossá válik, hogy a határvonal melyik háromszögbe esik. Ekkor a határvonalat a 285. §. szerint meg lehet állapítni, s a térképen ki lehet húzni. Legyen ez Mm.

Most a második illetőségre nézve induljunk ki az N pontból, és húzzuk az átlókat sorjában, kiszámítván az általok elmetszett háromszögeket, mig az összeg ismét nagyobb lesz mint a második illetőség, s ez által kimutatja, hogy a határvonal melyik háromszögbe esik. Legyen ezen határvonal Nn. Most a P pontból kell kiindulni s hasonlóképen működni, míg a Pp határvonalhoz jutunk, s i. t.

3) Könnyű átlátni, hogy az ekképen megállapított határok egymástól függenek, ennélfogva az egyikben ejtett hiba, minden következőre kihat. Ezért az utolsó osztályrész sohasem lesz tökéletes, hanem a hibák összehalmozódása miatt a valóságtól többé kevésbbé el fog ütni. A hibát ezen darabban hagyni nem lehet, hanem azt az m, n, p határpontok változtatása által ki kell javítni. Ezen kijavításra nézve általános szabályokat felállítni nem lehet, mivel az alakok minden esetben másképen képződnek; csak annyit mondhatni, hogy a legelső pont legcsekélyebb változtatást kiván, s ez a pontok sorjában mindinkább növekedik.

287. §.

Feladat. Egy háromszöget (303. ábra) ABC egy oldalhoz AB párhuzamos vonalak által tetszés szerinti számú és viszonyú részekre beosztani.

I. Feloldás. Szerkesztés által. 1) Osszuk be a háromszöget az A pontból kellő számú és viszonyú részekre és legyenek ezek ACa, aAb, bAB. Ezután keressük Ca és CB, továbbá Cb és CB közt a mértani középeket. Legyenek ezek Cm, Cn; akkor mm', nn' vonalakat AB-vel párhuzamosan húzván, ezek lesznek a beosztás határvonalai.

Bebizonyítás. Hogy a CAa, aAb, bAB háromszögek az elmetszendő részekkel egyenlők, az a 283. §-ból ösmeretes; csak azt kell tehát bebizonyítni, hogy $Cmm' = CAa$, $Cnn' = CAb$. E végre hasonlitsuk össze előbb a CAa és CAB háromszögeket. Ezeknek A közös csúcsok, BC közös alapvonalok lévén, térfogataik ugy állanak mint alapjaik, tehát:

$$ABC : ACa = CB : Ca.$$

Azután hasonlítsuk össze az ABC és Cmm' hasonló háromszögeket. Ezeknek térfogatai ugy állanak, mint a hasonfekvésű oldalak négyzetei, azaz:

$$Cmm' : ABC = Cm^2 : CB^2.$$

Ezen arányokat egymással szorozván, lesz:

$$Cmm' : ACa = Cm^2 : Ca \,.\, CB.$$

Hogy tehát $Cmm' = ACa$ legyen, szükség, hogy legyen

$$Cm^2 = Ca \,.\, CB, \text{ vagy } CB : Cm = Cm : Ca.$$

Hasonlóképen lehet a szerkesztés helyes voltát a többi osztályrészekre nézve is bebizonyítni.

2) A mértani közép szerkesztése végett húzzunk CB felett egy félkört, emeljünk fel a és b-ből BC-re merőlegeseket; ezek a kör karimáját u és v-ben fogják metszeni, és a Cu és Cv húrok lesznek a keresett mértani középek.

3) Ha az osztályvonalaknak valamely más iránynyal kell párhuzamosaknak lenni (304. ábra): akkor húzunk az A pontból ezen irányhoz párhuzamos átlót AD, s most Ca és CD, továbbá Cb és CD, a másik oldalon pedig BC és BD közt kell a mértani középeket keresni. Legyenek ezek Cm, Cn és Bq, akkor mm' nn' és qq' fogják a határvonalakat ábrázolni.

288. §.

II. Feloldás. Számitás által. 1) Legyenek az elmetszendő területek a 282. §. szerint kiszámitva:

$$t_1 = T\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma\ldots},\quad t_2 = T\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots},\ \ldots$$

Ösmeretes dolog, hogy a hasonló háromszögek térfogatai ugy vannak, mint a hasonfekvésű oldalak négyzetei, tehát:

$$t_1 : T = Cm^2 : CB^2, \quad \text{vagy} \quad Cm = CB \,.\, \sqrt{\frac{t_1}{T}},$$

hasonlóképen lesz:

$$Cn = CB \,.\, \sqrt{\frac{t_1 + t_2}{T}}.$$

. . . .

Ezen kifejezésekben t_1, t_2, t_3 . . . helyett azoknak értékeit tévén, a fentebbi egyenletek ezekké válnak:

$$Cm = CB \,.\, \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}},$$

$$Cn = CB \,.\, \sqrt{\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}}.$$

. . . .

2) Ha az osztályvonalaknak valamely más iránynyal kell párhuzamosoknak lenni, akkor a háromszög csúcsából ezen irány-

hoz párhuzamos átlót húzván, ez a háromszöget két darabra szakítja, melyeknek térfogatai kiszámittatnak. Legyenek ezek T_1 és T_2. Most ez előbbi kifejezésekben T helyett T_1 és T_2-t, CB helyett pedig CD, illetőleg BD-t kell tenni, megjegyezvén, hogy mindenik háromszögben csak annyi osztályrész eshetik, a mennyi bele fér.

289. §.

Feladat. Egy nyilt négyszögből egy adott nagyságú tért az alaphoz párhuzamos vonal által elmetszeni.

I. Feloldás. Szerkesztés által. Legyen az elmetszendő terület az ABC háromszög által ábrázolva.

Változtassuk el ezt egy más háromszöggé, melynek alapja $AB' = MN$, s rajzoljuk be annak magasságát a négyszögbe, úgy hogy $MNP\triangle = AB'C'\triangle$. Húzzuk továbbá $PQ \parallel MN$, továbbá $NR \parallel MQ$. Most keressük QR és QP közt a mértani középet. Legyen ez $= QS$, s húzzuk $ST \parallel NR$; akkor $TU \parallel MN$ lesz a határvonal.

Bebizonyítás. Legyen az $AB'C'$ térfogata t, annak magassága m, $MN = a$, $PQ = b$, akkor

$$t = \frac{am}{2}.$$

Legyen továbbá a trapezium ösmeretlen oldala $TU = y$, magassága x, akkor állani kell ezen egyenletnek:

$$(a + y)\,x = 2t = am,$$

hasonlóképen az NVT és NRP hasonló háromszögekből az alapokat a magasságokkal arányba állítván, lesz:

$$y - a : b - a = x : m, \quad \text{vagy}$$
$$(y - a)\,m = x\,(b - a).$$

Ezen két egyenletet egymással szorozván, egyszerű összehúzás után lesz: $\quad y^2 = ab$, vagy $a : y = y : b$,

mely által a fentebbi szerkezet igazolva van.

II. Feloldás. Számítás által. Keressük egy háromszög magasságát m, melynek tétfogata t, alapja a; az lesz:

$$m = \frac{2t}{a}.$$

Ezen hosszat a térképen feltévén, húzzunk annak végpontján MN-hez párhuzamost, mérjük meg ennek hosszát, s legyen az b. A bebizonyítás szerint ezen egyleteknek kell állani:

$$(a+y)\,x = am,$$
$$(y-a)\,m = x\,(b-a).$$

Ezen egyenletekből szorzás által előáll:

$$y^2 = ab\,, \quad \text{vagy} \quad y = \sqrt{ab}\,,$$

s ezt az első egyenletben helyettesítvén, lesz:

$$x = \frac{am}{a+\sqrt{ab}} = \frac{m}{1+\sqrt{\frac{b}{a}}}.$$

Ezen magasságot az MN vonalra merőlegesen fel kell tenni, s ugyanott keresztül vele párhuzamost húzván, ez fogja a kivánt területet elmetszeni.

III. Feloldás. Ezen szigorú feloldás helyett a mérnökök igen sokszor egy közelítő módot szoktak használni, mely következő alapon nyugszik. A trapez térfogata egyenlő lévén a közép parallelának szorozmányával a magasságba, midőn a közép parallela s a térfogat ösmeretesek, a magasságot megnyerjük, ha a tért a közép parallelával elosztjuk. Jelen esetben ugyan a közép parallela fekvése a térképen adva nincsen, de azt szabad szemmel egy kis gyakorlás által olyan közel el lehet találni és meg lehet mérni, hogy az abban ejtett hiba a magasságra csak csekély befolyást fog gyakorolni; annyival inkább, mivel a magasság legtöbb esetekben tetemesen kisebb lévén mint a közép parallela, annak hosszában egy kis hiba a magasságban csak csekély változást okoz. Ellenőrzés végett czélszerű a talált magasságot a térképen feltenni, s annak végpontján keresztül az alaphoz párhuzamost húzván, mind a két parallelát megmérni, és a belőlök képzett számtani középpel a területet még egyszer osztani: az új magasság a valóságoshoz még közelebb fog esni, noha azt tulajdonképen csak végtelen sokszori ismétlés után éri el. A gyakorlatban már az első ismétlés után olyan csekély hiba marad hátra, hogy azt egészen el lehet hanyagolni.

290. §.

Feladat. Egy sokszöget (306. ábra) az AB vonalhoz párhuzamosak által tétszésszerinti számú és viszonyú részekre beosztani.

I. Feloldás. Szerkesztés által. Változtassuk át a sokszöget háromszöggé, s osszuk be ezt a 283. §. szerint a kivánt részekre. Ekképen az egyes illetőségek háromszögek alakjában lesznek adva. Most bontsuk szét a sokszöget AB-hez parallelák által trapeziumokra, vágjuk el az első illetőséget az első trapeziumból a 289. §. 1 szerint. Legyen a határvonal mm'. Most a második illetőséget az mm' vonaltól kezdve kell elmetszeni. Legyen ennek határa nn'; de ez még átváltoztatást kiván, mivel az u és v háromszögek az idom karimáján kivül esvén, ezeket a második osztályrésznek adni nem lehet. Az u és v háromszögeket tehát egygyé változtatván, az összeget a CD vonaltól kezdve kell elmetszeni, s a végleges határvonal pp' fog lenni. Megtörténhetik, hogy ezen háromszögecskék közül egyik vagy másik kivonandóképen lép fel, de ez a mód alkalmazásában lényeges változást nem okoz; a határvonalnak mindig az egész sokszögön keresztül egyik oldaltól a másikig kell menni.

II. Feloldás. Számítás által. Bontsuk fel a sokszöget párhuzamos átlók által trapeziumokra, s számitsuk ki ezeknek térfogatait u_1, u_2, u_3 . . . u_n. Legyen ezeknek összege U. Ha a sokszögnek területe már más uton ösmeretes, és $= T$, akkor a különbséget $T - U = K$ el kell oszlatni. Most kiszámitjuk az illetőségeket a 282. §. szerint, s ezeket összehasonlítjuk a trapeziumok térfogataival. Legyen tehát $u_1 > t_1$, ekkor a fölösleget $u_1 - t_1 = K$ az ab vonaltól hátra felé el kell metszeni a 289. §. 2 szerint, s az mm' határvonalat fogjuk nyerni.

A második osztályrészre nézve legyen $K < t_2$, $K + u_2 < t_2$, de már $K + u_2 + u_3 > t_2$, akkor a felesleg lesz:

$$K + u_2 + u_3 - t_2 = K',$$

s ezt ismét a cd vonaltól hátrafelé kell elvágni, miáltal a pp' határvonal fog keletkezni, s i. t.

291. §.

Feladat. Egy trapeziumból (307. ábra), kivánt nagyságú részeket elmetszeni.

Feloldás. Legyen a trapez két párhuzamos oldala a, b, magassága m. Gondoljuk a F két oldalt meghosszabbítva, mig egymást E-ben metszik. Ezen háromszög ABE-nek magassága M, és térfogata $\triangle$ könnyen kiszámitható. Ugyanis ha BF-t párhuzamosan húzzuk AC-hez, két hasonló háromszög áll elő, u. m. ABE és BFD, melyeknek oldalai a magasságokkal arányosak, tehát lesz:

$$b-a : a = m : M, \text{ vagy } M = \frac{am}{b-a}.$$

Ebből és az alapból következik a terület

$$\Delta = \frac{aM}{2}.$$

Gondoljuk most, hogy az első osztályrészt t_1 a GH vonal metszi el, s nevezzük a trapezium magsságát x_1-nek, akkor a 288. §. nyomán lesz:

$$\Delta : \Delta + t_1 = M^2 : (M + x_1)^2.$$

Innen következik:

$$M + x_1 = M \sqrt{\frac{\Delta + t_1}{\Delta}}.$$

Hasonlóképen lesz a második osztályrészre nézve, ha a magasságot az AB vonaltól számítván, x_2-vel jelöljük:

$$M + x_2 = M \sqrt{\frac{\Delta + t_1 + t_2}{\Delta}}.$$

Ezen magasságok az E pontra, mint kezdő pontra vonatkoznak. Hogy azokat az AB vonaltól lehessen számlálni, M-t le kell vonni belőlök.

Ezen mód haszonnal különösen akkor alkalmazható, ha a tagosítás folytán az útak szabályozása által hosszú, egyenes oldalú dülők állanak elő, melyekből több illetőség kitelik. A képletek logarok használatára alkalmasok, s gyorsan és biztosan czélhoz vezetnek.

292. §.

Az előbbiek útmutatása szerint egy dülőt bizonyos számú és nagyságú részekre úgy is be lehet osztani, hogy a dülőnek egyik oldala a területek viszonya szerint legyen beosztva az illetők közt. Ezen feltételnek akkor lesz gyakorlati fontossága, ha ezen oldal az illetőknek vagy hasznot, vagy kárt okoz. Mind a két esetben méltányos, hogy minden illető birtokarány szerint részesüljön belőle.

Sőt ha a dülő meglehetősen rendszeres alakú, akkor annak két átellenes oldalát is be lehet a birtokarány szerint osztani. De ekkor az egyes mezsgyék nem lesznek egyenesek, hanem a két végpontot összekötő vonal által elmetszett darabhoz a hiányzó részt, illetőleg a felesleget háromszög alakjában kell feltenni, melynek alapjául a nevezett egyenes vonalat kell tekinteni.

Sőt tovább mehetünk. Egy kis megfontolással egy dülőt úgy is be lehet osztani, hogy az egész karima az illetők közt a térek viszonya szerint osztassék be, csak oda kell törekedni, hogy egy egyenes vonal, vagy ha czélszerűbbnek látszik, egy törött vonal által a dülő hosszában két részre vágassék, melyek közül mindenik az osztályrészek egy csoportját foglalja magában. Az egyes osztályrészek közötti mezsgyék azután ezen fővonalra fognak kiszögelleni. Lehetőleg el kell kerülni, hogy az idom belsejében hegyes szögek alatt messék a vonalak egymást, mivel a csúcsok az illető birtokosokra nézve hozzáférhetlenségök miatt rendesen haszonvehetlenek lesznek.

293. §.

Feladat. Egy görbe vonal által kerített tért a körületben adott pontokon keresztül menő egyenesek által adott számú és nagyságú részekre beosztani.

Feloldás. Húzzunk a 308. ábrába az adatott M, N pontokon keresztül szabad szemmel egyenes vonalakat, melyekről gondoljuk, hogy körülbelől a kivánt tereket metszhetik el. Számítsuk ki ezen területeket, s a számítási hibákat az előbbiek útmutatása szerint oszlassuk el, hogy a munka végén sem felesleg, sem hiány ne mutatkozzék.

Tegyük fel, hogy az MM' által elmetszett tér kevés, a hiány legyen K. Ekkor ezen tért háromszög alakjában kell elmetszeni, melynek alapja MM'. A magasság tehát lesz:

$$m = \frac{2K}{MM'}.$$

Ezen magasságot az alapra merőlegesen feltévén, s annak végpontján az alaphoz párhuzamost húzván, az oldalt egy pontban M'' fogja vágni, és az MM'' vonal fogja a kivánt tért már igen közelítve elmetszeni. Egy kis javítás csak azért szükséges, mivel az elmetszett tér az $M'M''$ görbesége miatt nem háromszögű, mint a képletben feltéve volt, hanem azon kis segmentumocskával kisebb, mely a görbe vonal és a húr közt fekszik. Kérdés tehát, ha a terület a segmentum térfogatával változik, mennyivel kell változni annak magasságának is? E végre a fentebbiek szerint volt:

$$m = \frac{2K}{MM'},$$

gondoljuk, hogy mind m, mind K változik, akkor lesz:

$$m + \triangle m = \frac{2(K + \triangle K)}{MM'},$$

ezeket egymásból levonván lesz:

$$\triangle m = \frac{2 \triangle K}{MM'},$$

hol $\triangle K$ alatt a segmentum térfogatát kell érteni, s azt $+$ vagy $-$ jellel kell venni, a szerint, a mint az elmetszett terület kevés, vagy sok. A megtalált $\triangle m$-et m-hez algebrailag hozzáadván, a kijavított magasságot fogjuk megkapni; melyet a térképre feltévén, s ujolag parallelát húzván az alaphoz, egy kijavított metszéspontot fogunk nyerni.

2) Másképen így is lehet működni. Akárminő legyen az $M'M''$ ív, az $MM'M''$ tér egy háromszögtől csekély mértékben fog elütni, s az elmetszett tér a valóban elmetszendőtől csak kevéssé fog különbözni. Két háromszögnek területe pedig, ha azoknak alapjaik egyenlők, a magasságokkal vannak egyenes viszonyban. Ha tehát a hibátlan határvonalat húzva gondoljuk, s ennek magasságát x-nek nevezzük, ezen arányt lehet felállítni:

$$K' : K = m : x,$$

hol K' az MM'' által elmetszett, de még nem egészen helyes területet, m pedig a hozzá tartozó magasságot jelentik. Ezen arány ugyan jelen esetben csak közelítő értékkel bír, de a valósághoz annyival inkább közeledik, mennyivel kisebb volt a hiba.

294. §.

F e l a d a t. Egy görbe vonal által kerített tért párhuzamos vonalak által adott számú és nagyságú részekre beosztani.

F e l o l d á s. Húzzunk először szabadszemmel párhuzamos vonalakat, melyekről gondoljuk, hogy a kellő nagyságú darabokat foglalják magok közt. Azután a tereket kiszámítván, a netalán ejtett hibát oszlassuk el. Ezután az első darabot az első illetőséggel összehasonlítván, a hiányt messük hozzá párlag alakjában. Legyen a hiány K, az alap lesz NN' (308. ábra), tehát a magasság:

$$m = \frac{K}{NN'},$$

s ezt a térképen feltévén, húzzunk annak végén keresztül NN'-hez párhuzamost, ez lesz a közelítő határvonal. De ez még javítást igényel, mivel az elmetszett darab a körület görbe volta miatt nem párlag alakú, s az előbbi §. nyomán a magasság javítása lesz:

$$\triangle m = \frac{\triangle K}{NN'},$$ tehát a kijavított maggasság $= m + \triangle m$.

Vagy ha az arányt akarjuk használni, lesz:

$$K' : K = m : x,$$

minthogy ez a párlagra nézve is érvényes.

295. §.

F e l a d a t. Egy dülőt vizszintes vonalak által beosztani.

F e l o l d á s. Legyenek a 309. ábrában AB, CD olyan vizszintes vonalak, melyekkel párhuzamosan kell menni a mezsgyevonalaknak. Húzzunk a dülőn keresztül a vizszintesekre merőleges átlókat EF, GH. Osszuk be ezen átlókat annyi részre és olyan viszonyban, a minőben a területeknek kell egymáshoz állani, s a megfelelő osztálypontokat kössük össze egymással. Ekképen egy beosztás áll elő, mely már a feladat feltételének közelitőleg eleget tesz; csak a területek kivánnak még egy kis javítást, minthogy a darabok hosszai nem lévén egyenlők, a területek nem fognak a szélességekkel teljesen egyenes viszonyban lenni. A kijavítások következő módon eszközöltetnek: számítsuk ki az egyes elmetszett darabokat I, II, III, IV, s ha az összeg a dülő ösmeretes térfogatától különböznék, a hibát oszlassuk el. Most hasonlítsuk össze I-et az első illetőséggel, s a felesleget messük el párlag alakjában, melynek alapjául az *abcd* törött vonal hosszát kell venni. A magasságot kiszámitván, a tört vonalnak minden darabjára merőlegesen fel kell tenni, s párhuzamosokat húzni az *abcd* tört vonalhoz.

A második darabra nézve összehasonlítjuk I + II-őt a két első illetőség összegével, s a felesleggel hasonlóképen kell bánnunk, s i. t.

2) Gyakran megtörténik, hogy a dülő egyik oldala, p. o. *AB* nem vizszintes, hanem attól tetemesen elüt, akkor az első illetőséget szabad szemmel kell elmetszeni egy vizszintes által, mi az előbbi feladatok nyomán semmi nehézséggel nem jár. Ilyeténképen a dülő maradéka két vizszintes oldal által lévén bekerítve, a többi osztályrészek kimetszésére az előbbi pontban előadott szabály alkalmazható.

3) Néha a hosszak a dülő két oldalán igen különböznek egymástól. Ilyenkor czélszerű lesz az elmetszendő részeket két csoportba rendezni, s ezeket előlegesen egy-egy darabban metszeni ki, s csak ezután fogni a magasságok beosztásához. Ilyeténképen a magasságok kisebb javításokat igényelvén, az elhanyagolás, különösen az az által ejtett hibák, hogy az alakot párlagnak tekintjük, pedig nem az, csekélyebb befolyást fognak gyakorolni.

296. §. Második eset. A terület minősége különböző helyeken különböző.

Midőn a föld minősége különböző helyeken különböző, a birtokviszonyok meghatározására a *kiterjedés* ösmerete nem elegendő, hanem a *föld minőségét* is számításba kell venni. Ezen két tényező közreműködése által határoztatik meg — különben egyenlő körülmények közt — a telek *haszonvétele*, vagy *jövedelmezése*, s ez az, melynek a beosztás és kicserélés után is változatlan kell maradni.

A telkek *jövedelmezése* azoknak *értékével* egyenes viszonyban áll, azért ezen két fogalmat egymással fel lehet cserélni, úgy mint az egyenlő jóságú földeknél, a *területekkel* történt, melyek szintén a jövedelem viszonyában állanak egymáshoz. Ezért a következőkben mindig a *telkek értékeiről* fogunk szólani.

297. §. Becslés.

1) A föld minőségéről kétképen lehet fogalmat szereznünk; ú. m. 1-ször meghatározzuk a téregység értékét pénzben. Ez a föld jóságával egyenes viszonyban fog állani, azért *jósági coefficiensnek* is neveztetik.

2-szor : meghatározzuk az értékegységre menő tér nagyságát □ ölekben. Ez a föld jóságával fordított viszonyban áll.

Az értékegység nálunk holdnak neveztetik. A különböző minőségű telkek, különböző classis- vagy osztályba esőknek mondatnak; azon □ ölek száma pedig, melyek egy holdra mennek, classis coefficiensnek neveztetik.

2) Ha valamely teleknek területe $= T$, jósági coefficiense $= j$, annak értéke:

$$E = jT.$$

Ha pedig a classis coefficiens c van adva, akkor az érték, vagy a megfelelő holdak száma:

$$H = \frac{T}{c}.$$

Innen látni való, hogy együttható első esetben mint szorzó, másodikban mint osztó szerepel. Ha tehát valamely osztási feladat feloldására egyik esetben a képletek kifejtettek : ezeket a másik esetre rögtön át lehet tenni, csak a jósági- vagy classis együttható helyett annak visszás értékét kell tenni.

3) Ha valamely határ megbecsülésével az egyes dülőkre nézve megállapitott együtthatók közt közös tényező volna, ezt el lehet hagyni. Ekképen az együtthatók viszonyszámokká válnak, melyek által a számítás kisebb számokkal s egyszerűbben eszközöltetik. A végeredményekben azután a nevezetteket ismét helyre lehet állítni, csak szorozni kell a nyert értékeket a jósági együtthatóknál az elhagyott tényezővel, a classis coefficienseknél pedig osztani. A hossz- és térméretek változatlan maradnak. Legyenek például a jósági együtthatók □ ölenként $j_1 = 10$ xr. $j_2 = 15$ xr. $j_3 = 20$ xr., vagy a classis coefficiensek $c_1 = 1100$ □°, $c_2 = 1200$ □°, $c_3 = 1300$ □°, akkor az elsőket 5-el, az utóbbiakat pedig 100-al rövidítvén, így is lehet venni:

$$j_1 = 2,\ j_2 = 3,\ j_3 = 4,\ c_1 = 11,\ c_2 = 12,\ c_3 = 13.$$

298. §.

Feladat. Adva lévén egy határban a dülők térfogatai és jósági együtthatói, a határt meghatározott számú és értékű részekre beosztani.

I. Feloldás. 1) A birtokosok úgy egyeztek meg egymás közt, hogy egy bizonyos rendben kapják ki illetőségüket, s először az első dülő osztassék be; ha ez elfogy, a másodikra jőjjön a sor s i. t. Osszuk be a határt (310. ábra) először szabadszemmel

I, II, III darabokra úgy, hogy azok, a mennyire szabadszemmel megitélni lehet, az egyes illetőségeknek megfeleljenek. Számítsuk ki az elmetszett területeket, s hasonlítsuk össze a dülők ösmeretes térfogataival; ha különbséget találnánk, ezt oszlassuk el. Legyen most az első illetőség $= e_1$, ezt az I. tér értékével összehasonlítván, egy különbséget K_1 találunk. Ezen különbségnek megfelelő tért ki lehet számítni, t. i.

$$t_1 = \frac{K_1}{j_1},$$

s ezen tért az előbbiek nyomán az előleges mezsgye mellett ki lehet metszeni. Ekképen a feladat azon esetre vitetett vissza, midőn a tér jósága mindenütt egyenlő.

A második illetőségre nézve hasonlítsuk össze az I + II értékét az $e_1 + e_2$ illetőségekkel, a különbséget szintén térré átváltoztatva, messük el a második osztály-vonalnál, s i. t.

2) Ezen feloldás különösen akkor használható, ha a dülők egymás mellett egy sorban feküsznek, s a jóságok közötti különbség igen csekély, úgy hogy az illetőkre nézve mindegy, akármelyik dülőből kapják ki illetőségüket.

299. §.

II. Feladat. Egyszerűbb esetekben, ha a dülők rendszeres és körülbelől párhuzamos fekvésű szalagokat képeznek, s a birtokrészek száma minden dülőben egyenlő, mint rendesen úrberi birtoknál szokott lenni : úgy lehet a beosztást intézni, hogy minden illető a maga részét minden dülőből teljesen kikapja, s az egész mégis egy összefüggő darabot képezzen. E végre (311. ábra) osszuk be a dülőket egymástól függetlenül úgy, hogy a részek mindenik dülőnél ugyanazon rendben jőjjenek egymásután. A mezsgyék nem fognak ugyan egy pontban találkozni, de azokat összefüggő tört vonalakká könnyen át lehet változtatni.

Ezen módnak becse különösen abban áll, hogy az a dülők megbecslésétől egészen független.

300. §.

III. Feloldás. 1) Legáltalánosabb módja a feladat feloldásának az, ha a mezsgyék az egész határon egyenesen húzatnak keresztül; s vagy bizonyos adott pontokból M, N, P, (312. ábra) indulnak ki, vagy egymással párhuzamosak.

Első esetben húzzunk az M, N, P pontokon keresztül átlókat, melyekről gondoljuk, hogy a kellő darabokat metszhetik el. Számítsuk ki az elmetszett területeket dülőnként különkülön, s ha az összeg a dülő ösmeretes térfogatától különböznék, a különbséget oszlassuk el. A térfogatokról menjünk át az értékekre, s az MM' átló által elmetszett darab értékét hasonlítsuk össze az első illetőséggel. Ekképen egy különbséget K_1 fogunk találni, melyet az MM' átló mellett a térképen háromszög alakjában fel kell tenni. Legyen ezen háromszög szabadszemmel itélve $MM'M''$. Kérdés: milyen nagy lesz annak magassága? E végre keressük előbb az ezen vidékre eső közép jósági együtthatót $= i$. Ezt következő módon lehet meghatározni: Az $MM'M''$ alakba esik a j_1 és j_3 jóságú dülőkből körülbelől egyenlő, j_2-ből körülbelől hétszer olyan nagy rész, tehát lesz:

$$i = \frac{1 \cdot j_1 + 7 \cdot j_2 + 1 \cdot j_3}{9},$$

Osszuk el az elmetszendő értéket ezen együtthatóval, akkor a megfelelő térfogatot fogjuk nyerni; tehát lesz:

$$t_1 = \frac{K_1}{i},$$

s végre a magasság:

$$m = \frac{2t_1}{MM'}.$$

Ezen magasságot a térképen fel kell rajzolni, és a végponton keresztül az alaphoz párhuzamost kell húzni (285. §. 2). Mennél pontosabban vagyunk képesek a területek viszonyát megbecsülni, annál pontosabb lesz az i értéke, s annál pontosabban lesz a magasság meghatározva. Ellenőrség végett szükség az elmetszett darabnak területét dülőnként külön-külön, s ezekből annak értékét meghatározni. Rendesen egy kis különbséget $\triangle K_1$ fogunk találni, s most ismét az a kérdés, mennyivel kell a magasságot változtatni, hagy az érték $\triangle K_1$-el változzék? E végre keressük a fentebbi egyenletekben a 294. §. nyomán a változásokat, ezek lesznek:

$$\triangle t_1 = \frac{\triangle K_1}{i}, \quad \triangle m = \frac{2 \cdot \triangle t_1}{MM'} = \frac{2 \cdot \triangle K_1}{i \cdot MM'},$$

ezen változást algebrailag az előbbi magassághoz adván, az új magasságot $m + \triangle m$ szintén az MM' alaptól kell feltenni.

2) A magasság kijavítását egy arány által is lehet eszközölni. Ha t. i. az elmetszett darab értéke már igen keveset hibázik,

az értékek a magasságokkal igen közel egyenes viszonyban fognak állani. Nevezzük tehát az eddig elmetszett darab értékét K^1-nek, melynek magassága m, a valódi értéknek K megfelelő magasságot pedig x-nek; akkor ezen arányt lehet felállítni:

$$K^1 : K = m : x.$$

Hasonlóképen kell a többi osztályrészekre nézve is cselekedni.

301. §.

Második eset. Ha a mezsgyéknek párhuzamosoknak kell lenni egymással, osszuk be a határt párhuzamosok által szabadszemmel a kellő részekre, s az elmetszett téreket kiszámítván s a talált különbségeket kiegyenlítvén, hasonlítsuk össze ez elmetszett darabok értékeit az illetőségekkel, s a hiányokat messük el trapeziumok alakjában; mit annál biztosabban lehet tenni, mivel a trapeziumok magassága mindig csekély lévén, a jósági határok görbülései elhanyagoltathatnak. Csak az a kérdés, minő magasságot kell adni a trapeziumoknak, hogy azoknak értékei helyesek legyenek? E végre legyen MN (313. ábra) egy ilyen előleges határvonal; j_1, j_2, j_3 a különböző jósági együtthatók, az elmetszendő érték $= K$, ha az egyes dülőkbe eső trapeziumok közép alapjait a_1, a_2, a_3-nak, a közös magasságot pedig m-nek nevezzük, ezen egyenletnek kell állani:

$$K = (a_1 j_1 + a_2 j_2 + a_3 j_3) m, \text{ honnan következik}$$

$$m = \frac{K}{a_1 j_1 + a_2 j_2 + a_3 j_3},$$

vagy classis coefficiensek által kifejezve:

$$m = \frac{H}{\frac{a_1}{c_1} + \frac{a_2}{c_2} + \frac{a_3}{c_3}}.$$

Ezen magasságot a térképen fel kell rajzolni, s ellenőrzés végett a trapeziumok párhuzamos vonalait külön-külön megmérvén, a belőlök képzett számtani középeket még egyszer az előbbi képletbe kell a_1, a_2, a_3 . . . helyett helyettesítni. (Lásd 289. §. 3.).

Ugyanezen eljárást kell a többi osztályrészek kimetszésénél is követni.

302. §.

A fentebbiekben előadott módok, minden egyszerűségök daczára is, a sokszori ismétlés által fárasztókká lesznek. Különösen az alapoknak az együtthatókkali szorzása vagy osztása sok számítási hibákra ád alkalmatosságot; ezért tehát igyekeztek ezen munkán könnyítni. E végre szorzási táblák készíttettek, melyekből a szorozmány, vagy hányados értékét a leggyakrabban előforduló együtthatókra nézve egyszerűen ki lehet írni. De ezen táblák a mérnököt igen sokszor cserben hagyják, nem lévén azok minden, a gyakorlatban előforduló együtthatóra nézve kiterjesztve.

Czélszerűbbnek látszik, ha a mérnök, Naszluhácz szerint, minden külön jóságú dülőre nézve külön léptéket készít, melyen a vonal hossza helyett annak az együtthatóvali szorozmánya vagy hányadosa olvastatik le. Ezen léptékek készítését következő példán lehet megérteni: Legyen három különböző dülőben a □ öl 8, 10, 15 krra becsülve, a térkép léptéke $1'' = 40^0$: akkor az első dülőre nézve a léptéket úgy kell készítni, hogy $1'' = 8 \,.\, 40 = 320$ legyen, tehát $\frac{1''}{3{\cdot}2} = 100$, melyet azután a szokott mód szerint apróbb részekre lehet osztani.

A 2-dik dülőre nézve $1'' = 10 \,.\, 40 = 400$, tehát $\frac{1''}{4} = 100$.

A 3-dik » » $1'' = 15 \,.\, 40 = 600$, tehát $\frac{1''}{6} = 100$.

Ha a dülők classis szerint vannak becsülve, s a classis-coefficiensek 1100, 1150, 1200 □ ölek volnának: akkor az első dülőre nézve $1'' = \frac{40}{1100}$, innen következik $110'' = 4$, vagy $2{\cdot}''75 = 0{\cdot}1$. Ezt azután szintén apróbb részekre lehet osztani a tizedes rendszer szerint.

A 2-dik dülőre nézve lesz $1'' = \frac{40}{1150}$, tehát $115'' = 4$, vagy $28{\cdot}''75 = 1$, vagy végre $2{\cdot}''875 = 0{\cdot}1$.

A 3-dik dülőre nézve lesz $1'' = \frac{40}{1200}$, tehát $30'' = 1$, vagy $3'' = 0{\cdot}1$.

Az első esetben az egységek alig lesznek láthatók, mit nem lehet csudálni, miután azok a feltevés szerint krajczárokra vonatkoznak. Az utolsóban pedig nagyobb részint kis tizedes törteket fogunk leolvasni, mivel ezek holdakat jelentvén, rendesen az egységnek csak tört részeit fogják tartalmazni.

Ezen léptékekről kell tehát az alapokat levenni; de a nyert magasságokat a térkép rendes léptékéről kell levenni, s a térképen felrajzolni.

Ezen léptékeket azon czélra is lehet használni, ha a telkeknek területei helyett, közvetlen azoknak értékeit akarnók meghatározni, mit a mérnök rendesen utólagos számítás által szokott nyerni.

303. §. Tagosítás.

Tagosítás alatt értjük azon műtételt, midőn egy határnak birtokosai sokszor nagy számra menő szétszórt telkeiket egy tagban vagy legalább kevés számú darabokban kivánják magoknak kihasíttatni; feltévén, hogy ezen kicserélés által az illetők sem nem nyernek, sem nem veszítnek.

A tagosítás nemzetgazdászati szempontból igen nagy fontosságú, mivel a birtokos a tagosított birtokot jobban felhasználhatja, azt körülkerítheti, rajta majorságot építhet, azt csekélyebb erővel megmívelheti és javíthatja, mint midőn a birtok szét van szórva, és sokszor órányira kell a hely szinére mennie, hogy ott az egy pár óráig tartó munkát végezhesse. A tagosítás felszabadítja a birtokot igen sok tehertől, minők p. o. az aratás utáni, és az ugaron való közlegeltetés, s a birtokost a föld kizáró birtokába helyezi vissza, melyből az szokás, gazdálkodási előitéletek, sokszor üzleti visszaélések által kiforgattatott.

Ezért a magyar törvényhozás meghagyja, hogy ha vagy a földesuraság, vagy a közbirtokosok közül valamelyik, vagy a volt úrbéresek többsége a tagosítást kivánja, a másik félnek azt ellenezni nem szabad. Az uraság és közbirtokosok viselik a tagosítási költségeket, a volt úrbéresek pedig gyalog és szekeres napszámokkal járulnak a munkához.

A tagosítás a mérnöki felvételen kezdődik; ezt követi az összeirás, melynél fogva mindenik teleknek birtokosa, jellege kipuhatoltatik és feljegyeztetik, s ekképen minden egyes illetőnek birtoka nyilvánvalóvá tétetik.

Erre következik az osztályozás. A földesúr és közbirtokosok egymásközt a telkeket annyi osztályba sorozhatják, a mennyit a földek jóságának megállapitására szükségesnek tartanak. De az úrbéri birtokokra nézve az osztályok az úrbéri törvények által az egész országra nézve meg vannak állapítva. Ezen osztályzat nem felel meg minden esetben tökéletesen az igazságnak, mert néha a hold egyenértékűségének biztosítására több osztályra volna szükség, mint a mennyit a törvény rendel : ezért a törvényszék az úrbéresek részére rendesen a határ javát szokta odaitélni, melyen sokféle jóságú részek nem jönnek elő. A classificatio szakértők és a helyszínnel ösmeretes bizalmi férfiak által szokott eszközöltetni, a mérnök csak mint tanácsadó veszen részt benne. Az úrbéresek kezei közt lévő feleslegföldek, irtások, foglalások részben vagy egészben az uraság birtokába mennek át, vagy megváltás útján az úrbéresek kezei közt maradnak. Erre nézve, valamint a legelő- és erdőrész megállapítására, s más kérdések elintézésére nézve, vagy szabad egyezkedés, vagy a törvényszék itélete határoz. Hasonlóképen intéztetik el, hogy melyik dülő legyen az úrbéreseké, milyen renddel kapják ki illetőségüket stb.

Az úrbéri illetőségek már az összeirás által rendesen ösmeretesek lesznek, de az uraságiak többnyire nem a tényleges birtokok, hanem azon jogok szerint hasíttatnak ki, melyek a birtokosokat az örökösödés rendje szerint megilletik, s a leszármazási táblák szerint vezettetnek le.

Mind ezen adatok a mérnöknek a hatóság és az illető felek által adatnak kezéhez, ő csak a kivitel technikai részéért felelős. Ezen kivitelt illetőleg, a birtokoknak a kihasitás után lehetőleg kikerekített, rendezett állapotban kell lenniök. E végre némely szükségfeletti útak megszüntetnek, mások kinyittatnak. Különösen figyelni kell arra, hogy a szükségtelen, s a régi birtokállapot által feltételezett görbületek egyenes vonalak által váltassanak fel, s az úrbéri birtokok az uraságiaktól útak által legyenek elválasztva, hogy későbben foglalások ne történhessenek, s mindenik fél a maga birtokához könnyen hozzáférhessen.

A mérnök a határ felett két telekkönyvet készít; az egyik a tagosítás előtti birtokállapotot, a másik pedig a kihasítás utánit foglalja magában. Ezen könyvekből kivehető minden egyes darabnak birtokosa sorszáma fekvése jellege, ha az rendszeres alakú, annak méretei, különösen pedig annak térfogata és classisa. A telekkönyv épen olyan nyilvános és hiteles okmány, mint a térkép; azért azt, mielőtt elfogadtatnék, vizsgálat alá szokták vetni. E végre a vizsgáló mérnök kiszámítja a térképen több telkeknek térfogatait, s azokat a telekkönyvi adatokkal összehasonlítja. A vizsgálat eredménye a telekkönyvben feljegyeztetik, és a munka a vizsgáló hatóság által jónak találtatván, hitelesnek nyilváníttatik.

304. §. Kihasítás.

Ha a beosztási terv az illetők beleegyezését megnyerte, a kihasításhoz lehet fogni. E végre legelőbb az útak vonalait kell a mezőn kitűzni, olyan szilárd pontokból indulván ki, melyek a mezőn feltalálhatók, s a térképen is fel vannak véve. Ilyenek a határkövek, dombok, a felvétel idejekor a földbe vert és megőrzött karók, rudak stb. A kitűzendő pontok összrendezői ezen szilárd pontokon keresztül húzott vonalakra, mint tengelyre vonatkoztatván, előbb a térképen meghatároztatnak, azután a mezőre lánczmérés által áttétetnek.

Az útak kitűzése által a beosztás vázlata meg lévén állapítva, az egyes tagok kitűzéséhez lehet fogni. Ha a mezsgyék nem párhuzamosak egymáshoz, azoknak sarokpontjait kell felkeresni, s ezeknek a legközelebbi szilárd pontoktóli távjait a térképen levévén, a méreteket a hely szinén lánczczal fel kell rakni.

Ha a mezsgyék párhuzamosak: akkor legczélszerűbb a merőleges magasságokat tenni át a mezőre az alap két végén. Ezek a beosztási naplóból rendesen számokban ösmeretesek lévén, nagyobb pontossággal fognak adva lenni, mintha a méreteket a térképtől kellene kölcsönözni. Próba gyanánt meg lehet mérni a térképen azon szöget, mely alatt a párhuzamos mezsgyék a dülőt bekeritő vonalakat metszik, s a magasságoknak megfelelő ferde vonalak hosszait ki lehet számítni. Legyen ezen szög α, a ferde vonal f, a magasság m, akkor a ferde vonal

$$f = \frac{m}{sin\alpha}.$$

Általában az egész kitűzésben, a felvétel elveihez híven, mindig nagyból kicsinybe kell dolgozni.

305. §. Határváltoztatások.

A beosztási feladattal rokon a határváltoztatás is. Ez akkor jön alkalmazásba, midőn két szomszéd megegyezik egymás közt a birtokuk közt lévő igen görbe vagy törött határvonalat — mezsgyét, — melynek fentartása igen sok költséget okoz, egyenes vonal által cserélni fel, a nélkül, hogy ezen változtatás által egyik vagy másik fél károsodnék.

1) Ezen munka könnyű kivitele végett fel kell a szóban lévő mezsgyét venni a mellette fekvő részekkel együtt, melyek még a változtatási térbe esnek. Ha a föld minősége mindenütt egyenlő, az átváltoztatást mind szerkesztés, mind számítás által lehet eszközölni. Az elsőbe egyszerűsége miatt ereszkedni nem akarván, csupán a másodikat fogjuk egy pár szóval érinteni. Legyen a két szomszéd A és B (314. ábra), húzzunk egy vonalat MN, melyről gondoljuk, hogy az az új határvonalat ábrázolhatná. Ez által A nyeri az a és b téreket, és elveszti a c és d-t. Tegyük fel, hogy

$$a + b < c + d, \text{ a különbség lesz:}$$

$$K = c + d - (a + b),$$

s ezen tért B-ből az MN vonal mellett vagy háromszög, vagy trapez alakjában el kell metszeni. (Lásd 293., 294. §§.).

2) Ha A és B különböző jóságú volna, akkor K alatt a térek értékeinek bülönbségét kell érteni, s a megfelelő tér nagyságát a 300. 301. §§. szerint kell meghatározni.

MÁSODIK RÉSZ.

Függélyes mérés.

I. OSZTÁLY.

Szorosan vett magasságmérés.

306. §.

A szorosan vett magasságmérés egyes tárgyak magasságának meghatározásával foglalkozik. Ezen tan körébe tartozik p. o. egy épület fa hegy stb. magasságának, valamint a folyó-vizek tavak stb. mélységének megmérése.

307. §. Magasság.

Valamely pont magassága alatt, absolut értelemben véve, annak a föld mathematikai felületétől, melyet a nyugvó tenger színével azonosnak gondolunk, való függélyes távját kell értenünk. Igy szoktunk a föld valamely pontjának a tenger színe feletti magasságáról szólani.

A mélység a magasságnak ellentéte, tehát nemleges magasságnak tekintendő.

De a közönséges életben magasság alatt többnyire két pont absolut magasságának különbségét szokták érteni. Így kell egy torony, egy fa magasságát s egy folyó mélységét értelmezni. Itt a magassági méret kezdőpontja a föld, illetőleg a folyó physikai felszine, honnan a magasság vagy mélység fel- és lefelé számíttatik.

A magassági különbség meghatározására a tenger szinéből kiindulni csak ott lehet, hol az közel van; de ott sem szükséges, hanem elegendő, ha az egyik ponton keresztül egy valódi vizszintes felületet fektetve gondolunk, s a másik pontból erre egy függélyes vonalat húzunk. Ez adja a két pont közötti magassági különbséget. Vagy másképen : egy tetszés szerint választott ponton keresztül húzunk egy vizszintes felületet, s erre mind a két pontból, melyeknek magassági különbségét keressük, függélyes vonalakat bocsátunk le : ezeknek különbsége fogja a magassági különbséget szolgáltatni. Ezen módok azon alapulnak, hogy a föld középpontjától különböző távban gondolt vizszintes felületek, a gyakorlati esetek határai közt, párhuzamosoknak tekinthetők; s a mennyiben a földet gömbnek lehet venni, ezen tulajdonság feltétlenül érvényes.

Ha a két pont közül egyiknek tenger feletti magassága ösmeretes, a másiké meghatároztatik, ha ahhoz a magassági különbséget hozzáadjuk, vagy ezt abból levonjuk a szerint, a mint az alsóbb, vagy a felsőbb pontból indultunk ki.

308. §.

A magasságmérést közvetlen csak akkor lehet véghezvinni, ha a magasság nem igen nagy és hozzáférhető. Noha a közvetlen mérés rendesen nagyobb pontosságot szolgáltat, mint a közvetett : mindazáltal tetemesebb magasságok meghatározásánál többnyire ezen utóbbihoz szoktunk folyamodni, valahányszor a körülmények egy függélyes állású háromszög képzését megengedik, s ebben a szögek megmérésére szükséges kilátás nem hiányzik.

A mélységet mindig közvetlen kell megmérni, mivel az irányzás feltételei hiányoznak.

E szerint a magasságmérés is h o s s z- és s z ö g m é r é s e k r e vitetik vissza. Mind a hossz, mind a szög vagy függélyes, vagy vizszintes, vagy ferde irányú lehet, s azok vegyesen egyik és másik síkban fekhetnek.

309. §. Mértékek.

A függélyes irányban lévő hosszak megmérésére szolgálnak :

1) R u d a k, melyek a 10-es vagy a 12-ős rendszer szerint vannak beosztva, s Nonius segélyével $^1/_{1000}$ ölet, vagy 1 vonalat, az uj mérték szerint 1 millimétert is le lehet rajtok olvasni.

A vizek mélységének megmérésére szolgáló rudak végén egy széles tányér van megerősítve, hogy a rúd az iszapba ne süppedjen.

2) Zsinórok. Ezek vagy szabad kézzel kezeltetnek, vagy egy, tengelye körül forogható hengerre vannak feltekerve, végökre rendesen egy nehéz súly van kötve, hogy függélyesen kifeszítve maradjanak.

Néha ezen zsinórok hossza igen nagy, s akkor azok vastag kötelekkel cseréltetnek fel, és súlyok is aránylag sokkal nagyobb. Mennél nagyobb a mélység : annál nehezebb megitélni, mikor ér a kötél vége annak fenekére, mivel a rákötött súly, a kötéléhez képest, mindinkább elenyészik. Ezért a mélységi mérések (Sondiren) hibái is a mélységgel együtt növekednek.

310. §. Magassági szög. Zenit-táv.

Magassági szög alatt értjük azt, melyet valamely ferde irányú egyenes vonal a maga vizszintes vetületével képez.

Néha olyan magassági szögek is jönnek elő, melyeknek mindkét szára ferde irányú, noha azok egy függélyes síkban vannak.

Zenit-távnak neveztetik azon szög, melyet egy ferde irányú vonal a függélyes vonallal bezár.

Magassági szög és Zenit-táv, ugyanazon álláspontban, mindig ugyanazon függélyes síkban feküsznek, és 90^0-ra egészítik ki egymást.

311. §. Magassági szögmérők.

1) A magassági szögmérésre szolgáló műszerek közt első helyen áll a Theodolit. Ez (165. ábra) mai időben mindig magassági körrel van felszerelve, s az Alhidadén vagy Noniusok, vagy górcsövek vannak megerősítve. Rendesen a kör forog a távcső tengelye körül, a mutatók pedig mozdulatlanok. A magassági, néha a vizszintes kör Alhidadéján, a magassági kör síkjával párhuzamosan, egy szilárd fekvésű szintező van megerősítve, mely a vizszintes kör tengelyének függélyes állását s közvetve a magassági kör Alhidade mutató vonalának fekvését ellenőrzi; s ha az egy kissé hibáznék : az eltérés meghatározására szolgál.

2) A Theodolittól lényegesen nem különbözik sem a Borda-

kör, ha annak limbusa függélyes állásba van hozva, sem a magassági kör, mely különösen csillagászati használatra van készítve. Ezen készüléknek beosztott köre 18—24″ átmérőjű lévén, tetemes súlylyal bír; ezért a tengely körüli forgás könnyítése s a távcső áthajlásának meggátolása végett gondosan van ellensúlyozva. A távcső szemüvege prismával van felszerelve, mely a sugárokat vizszintes irányban tériti el, hogy az észlelő könnyen hozzájok férhessen, s a láttér megvilágitására egy tűkörkészülék van alkalmazva, hogy az irányszálakat éjjel is lehessen látni.

3) Hogy az ezen műszerekkel való magassági szögmérés helyes eredményt adjon, megkivántatik:

a) Hogy a limbus síkja a távcső forgástengelyére merőleges legyen. Ezen kelléknek már a gépész által elég van téve. Egy kis eltérés a 144. §. szerint itélhető meg, és soha sem bír a szögmérésre érezhető befolyással.

b) Hogy a távcső irányvonala fel- és lehajtás közben függélyes síkban mozogjon, mi akkor fog történni, ha az irányvonal a forgástengelyre merőleges, s ez vizszintes fekvésű. Ezen tulajdonság a vizszintes szögmérésnél is megkivántatott, tehát a kiigazitás által már helyre van állítva. Egy kis eltérést a 175. §. 1, 2 szerint lehet megitélni, s az olyan csekély befolyással bír, hogy figyelembe venni ritkán szükséges.

A távcső tengelyét a szögmérés előtt az által szoktuk vizszintessé tenni, hogy a vizszintes, vagy azimutkör tengelyét függélyes állásba hozzuk. De ez nem okvetlen szükséges, hanem elegendő, ha a távcső tengelye egy szintező által közvetlen vizszintessé tétetik, s az azimutkör tengelyének a függélyes iránytól előre-, vagy hátradülése a fentebb említett szintező által meghatároztatik.

c) A távcső irányvonalának a forgástengelyén, s ennek a magassági kör középpontján kell keresztülmenni. Hasonló tulajdonságok az azimutkörre nézve is megkivántattak, s az eltérések részint áthajtás, részint átalellenes Noniusok által tétetnek hatástalanokká. (Lásd 149. 150. §§.).

312. §. Tetőpont.

Ha a távcső az azimutkör tengelyével párhuzamos állásba hozatik, a Nonius 0 pontja a magassági körnek valamely pontjára fog mutatni, mely a kör tetőpontjának neveztetik. Ennek meghatározási módja következő (315. ábra). A magassági kör síkját függélyes állásba hozván, legyen TT' az azimutkör tengelyével párhuzamos átmérő; irányozzuk a távcsőt valamely magasan látszó, távol lévő pontra A, s olvassuk le a Noniust a, melyet mi egyszerűség végett a távcső irányvonalával összeesőnek gondolunk. Legyen a kör kezdőpontja O, akkor a leolvasott ív lesz $Oa = \alpha$. Most fordítsuk az azimutkör Alhidadéját 180°-al annak tengelye körül, akkor a magassági kör is egy fél fordulást csinál TT' körül, s az irányvonal OA' állásba jön, hol AOT szög $= A'OT$ szöggel; egyszersmind a és a'-be, és o, o'-be mennek át. Most hajtsuk át a távcsövet, mig az irányvonal ismét OA irányba jön: ekkor a Nonius mutatója az $a'a$ ívet futja át, s a leolvasandó ív lesz $o'a'a = \beta$. Ha most $o'a'$, mely oa-val egyenlő, és $o'a'a$ ívek közt a számtani középet vesszük: ez a T pontnak fog megfelelni, mely az a' és a közt középen van. Tehát ha a tetőpontnak megfelelő leolvasást τ-nak nevezzük, lesz:

$$\tau = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Ezen képlet kifejtésénél a kört 0-tól 360-ig folyton számozva gondoltuk; de némely magassági körökön a számozás csak 180°-ig megyen, s itt ismét elölről kezdődik. Ezeknek azon előnyük van, hogy mind a két Nonius egyenlő számú fokokat mutatván, a Nonius felcseréléséből a szögmérésbe hiba nem csúszhat be. Ezen esetben a fentebbi képletben β helyett $180 + \beta$-t kell tenni, s a tetőpontnak megfelelő szám lesz:

$$\tau = \frac{\alpha + \beta}{2} + 90^0.$$

Vonjunk le ebből 90°-ot, akkor a vizszintes iránynak megfelelő leolvasást fogjuk nyerni, s ha ezt v-nek nevezzük lesz:

$$v = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

313. §. Astrolabium.

Sokkal egyszerűbb az előbbi műszereknél, de csekélyebb pontosságot is szolgáltat az Astrolabium, mint magassági szögmérő. Ennek állványán a dió tokja oldalt ki van metszve, hogy a dió nyakát vizszintes fekvésbe lehessen hozni, miáltal a félkör függélyes állást nyer. Ezen függélyes állást egy, a félkör hátulsó oldalán megerősített függöny által lehet megvizsgálni, mely egyszersmind a 0 és 180°-ot összekötő átmérő vizszintessé tételére szolgál. Ha a félkört ezen átmérőtől lefelé fordítjuk s azt úgy erősítjük meg : a műszer élére egy talpas szintezőt lehet tenni, s ezzel lehet a 0 és 180°-nak megfelelő átmérőt vizszintes fekvésbe hozni. A használat előtt a vizszintes mérésre vonatkozó tulajdonságokon kivül meg kell még vizsgálni, valjon a 0 és 180°-ot összekötő vonal vizszintes-e, midőn a műszer a függöny, vagy szintező által fel van állítva? (collimatio hiba). A vizsgálat a 312. §.-ban előadottól csak abban különbözik, hogy a függönyt, vagy szintezőt a félkör mindkét állásában szigorúan be kell állítni. A leolvasások igen közel egyenlők lesznek egymáshoz mivel a számozás kettős, t. i. jobbról balra, és megfordítva halad. A leolvasások közötti számtani közép a magassági szöget, a félkülönbség pedig a collimatio hibát fogja szolgáltatni. (Lásd 162. §.).

314. §. Magassági szögmérés.

1) Egyszerűen. E végre állítsuk fel a műszert az álláspontont, az azimutkör tengelyét egész szigorúsággal függélyes állásba hozván; irányozzuk a távcsőt a magassági pontra, és állítsuk be a vizszintes szálat előbb durván, később a finom csavar segitségével a czélpontra, s olvassuk le a Noniusokat. Ezen leolvasások számtani közepéből, és a tető-, illetőleg vizszintes pontnak megfelelő leolvasásból vegyük a különbséget : ez lesz a pontnak zenit-távja, illetőleg magassági szöge.

2) Kétszerezve. Az azimutkör tengelyét szigorúan függélyessé tévén, állítsuk be a távcsőt a czélpontra, s olvassuk le a Noniusokat. Legyen ezeknek számtani közepe $= \alpha$. Ezután fordítsuk az azimutkör Alhidadéját tengelye körül 180°-al, s a távcsőt áthajtván, irányozzuk ismét a czélpontra és olvassuk le a Noniusokat. Legyen ezeknek számtani közepe $= \beta$, ekkor ha a zenit-táv z-nek neveztetik, s a körbeosztás 0-tól 360°-ig számláltatik, az a 312. §. értelmében lesz

$$2z = \beta - \alpha, \quad \text{tehát} \quad z = \frac{\beta - \alpha}{2} \cdots \odot$$

Ha pedig a számozás 180°-ról ismét 0-ra ugrik, akkor lesz :

$$2z = 180 + \beta - \alpha, \quad \text{tehát} \quad z = 90^0 + \frac{\beta - \alpha}{2},$$

Minthogy pedig $z = 90^0 - m$, ha m a magassági szöget jelenti, ezt helyettesítvén lesz:

$$m = \frac{\alpha - \beta}{2} \cdots ☽$$

Ezen utolsó mód szerint tehát a kör tetőpontjának ösmerete nem szükséges; továbbá a távcső áthajtása által az onnan eredő hiba is kiesik az eredményből, ha a távcső irányvonala nem megyen a forgástengelyen keresztül, minthogy ezen hiba az eltérés egyenlő, de ellenkező volta miatt szintén egyenlő, de ellenkező módon hat. Végre a kettőveli osztás által a leolvasási hibák is csekélyebb értékre szoríttatnak. Ezért rendesen ezen módot szokták használni.

Magában értetik, hogy egy pár észlelettel nem fogjuk beérni, hanem azokat ismételvén, a mágassségi kör egyenlő fekvésében tett észleletekből a számtani középet fogjuk venni, s ezeket fogjuk a fentebbi ⊙ és ☽ képletekben α és β helyett tenni.

315. §. Correctiók.

Az előbbi §. útmutatása szerint nyert zenit-táv, vagy magassági szög még több okból hibás lehet. Ezek közt nevezetesebbek:

1) Az azimutkör tengelyének a függélyes állásból előre vagy hátra dülése. Ezt a szilárd fekvésű szintező állásából fogjuk megösmerni és kiszámítni. Legyen a buborék végének helye a kör első állásában elől e, hátul h, a másodikban e' és h'. Számítsuk a méreteket, mint legtöbbnyire történni szokott, a szintező közepéből mind a két oldalra állító értelemben : akkor a 138. §. 7 szerint, melyben j helyett e-t, b helyett pedig h-t kell tenni, a tengely dülési szöge, azaz a correctio lesz:

$$corr. = \frac{(e + e') - (h + h')}{4r},$$

hol állitó érték hátra, tagadó pedig előre dülést jelent. Ezen correctiót tehát algebrai értelemben a zenit-távból le kell vonni, a magassági szöghöz pedig hozzá kell adni.

2) A távcsőnek önsúlya alatti áthajlása. Legyen a 315. ábrában CA egy anyagi nehéz vonal, mely C pontban meg van erősítve, és a vizszintessel m szöget zár be, B annak

súlypontja, P annak súlya, mely B pontban függélyes irányban hat, bontsuk fel ezt derékszög alatt két mellék erőre p és q, melyek közül az első B pontban CA-ra merőlegesen, az utolsó pedig a vonal hosszában hat. Az utóbbi a C pont ellenállása miatt hatást nem gyakorolhatván, az AC vonal görbítésére csupán az első működik. Ennek nagysága pedig, az erőműtan elvei szerint:

$$p = P \, . \, cosm.$$

Gondoljuk most az AC vonalat vizszintes fekvésben, akkor arra a súlypontban az egész P súly fog hatni, és feltehetjük, hogy az áthajlások a hajlitó erőkkel aránylagosak fognak lenni. Nevezzük az AC és $A'C$ vonalak áthajlási szögeit Θ és Θ_0-nak, akkor lesz:

$$\Theta : \Theta_0 = Pcosm : P = cosm : 1,$$

tehát
$$\Theta = \Theta_0 \, cosm.$$

3) Hogy tehát az áthajlási hiba értékét meg lehessen határozni, a cső magassági szögén kivül annak vizszintes áthajlását kell tudni. Ezt pedig a következőképen lehet meghatározni. Állítsunk fel egymással szemközt két távcsövet A és B, úgy hogy azok körülbelől vizszintes síkban, s a Theodolit távcsőjével egyenlő magasságban legyenek. Irányozzuk ezeket egymásra és állítsuk a szemcsöveket végtelen távra : ekkor az egyik távcső látterében a másiknak irányszála képét látni lehet. Állítsuk ezen képre a távcső irányszálát, akkor a két távcső irányvonalait párhuzamos fekvésbe hoztuk. Most tegyük a Theodolitot a két távcső közé, és annak szemcsövét szintén végtelen távra állítván, irányozzuk annak szála képét a távcső kettős mozgása által az A szálára s a Noniust olvassuk le. Ezután a távcsőt áthajtván, tegyük ugyanazt a B távcsőre nézve is. Ekképen két leolvasást kapunk, melyeknek különbsége 180^0 leend, ha a távcső át nem hajlik; ellenkező esetben a 180^0-tóli eltérés az áthajlás kettős értékét fogja szolgáltatni. Ezen hibát a zenit-távhoz mindig hozzá kell adni, a magassági szögből pedig le kell vonni; egyébaránt azt a kisebb mintájú Theodolitoknál ritkán lesz szükség figyelembe venni.

A tetőpont meghatározása ezen hibától független, de a vizszintes ponté annak legnagyobb befolyása alatt áll.

316. §. Sugártörés.

1) A magassági szög eddig talált értéke látszónak neveztetik, mivel a tárgy a szemben ezen szög alatt látszik.

De ettől a valódi különbözik, mivel a tárgyból kijövő világosságsugárok a lég sugártörő képessége miatt görbe úton hatolván át a légrétegeken, a tárgy ezen görbe vonal utolsó eleme, vagyis az érintő irányában látszik lenni, holott annak valódi iránya a görbe vonal két végpontját összekötő húr által képeztetik. Legyen a 317. ábrában A az álláspont, B egy pont a föld felületén; a B-ből jövő világosságsugár BA görbe úton fog a szembe jutni, melynek utolsó eleme az AE érintővel összeesik. A B pont tehát AE irányban fog látszodni; holott annak valóságos iránya az AB egyenes vonal. Ha tehát AT vizszintes vonalat ábrázol, $EAT\sphericalangle$ a látszó, $BAT\sphericalangle$ a valódi magassági szög fog lenni; a kettő közötti különbség EAB pedig sugártörési szögnek (Refractio) neveztetik.

2) A légköri sugártörés olyan pontokra nézve, melyek a föld légkörén kivül vannak, melyeknek sugárai tehát a légkör minden rétegét átfutják, vagyis a csillagászati sugártörés elméleti úton Laplace, Bessel s legújabban Bauernfeind vizsgálódásai által meg van határozva, és táblákba összeállítva. De ezen táblák eredményei körülbelől 10^0 magasságig sokszor a valóságtól tetemesen eltérnek, jeléül annak, hogy a föld felületéhez közel eső rétegek gyakran rendellenes állapotban vannak, s az elmélet által követelt feltevésektől tetemesen eltérnek. Még inkább áll ez a földi sugártörésre nézve, melyet Laplace szintén elméleti úton igyekezett kifejteni, de ezen kifejtés annyi feltevéseken nyugszik, melyeknek érvényes volta csak a légkör normalis állapotában bír némű valószinűséggel, s a helyi körülmények, különösen pedig a verőfény és szél által olyan nagy megzavartatásnak van kitéve, hogy annak gyakorlati hasznát venni nem lehet. Eddigelé a tapasztalás nyomán a Refractiót a világosságsugár két végpontján keresztül gondolt függélyesek között fekvő szöggel egyenes viszonyban szokták felvenni. Ha tehát azt ϱ-val jelöljük, lesz:

$$\varrho = k\omega.$$

hol k sugártörési együtthatónak neveztetik, és észleletek által határoztatik meg.

3) Ezen észlelés következő módon eszközöltetik. Mérjük meg ugyanazon időben az A és B pontokban a magassági szögeket $EAT = \alpha$, és $EBT' = \beta$, akkor az ABC síkháromszögben lesz: $$90 + \alpha - \varrho + 90 - \beta - \varrho' + \omega = 180^0,$$
honnan következik:
$$\varrho + \varrho' = \alpha - \beta + \omega.$$
A világosság útjának alakja tulajdonképen előttünk ösmeretlen, csak annyit mondhatunk, hogy az igen lapos görbe vonal, s homorú oldalát a föld felé fordítja. Legtöbb esetekben tehát azt egy érintő kör által lehet helyettesítni. Ezen feltevés szerint:
$$\varrho = \varrho' = k\omega,$$
s ezen értéket a fentebbi egyenletben helyettesítvén, végre lesz:
$$k = \frac{\alpha - \beta + \omega}{2\omega}.$$

Ilyeténképen a refractio együtthatója többek által meghatároztatván, egy kissé különbözőnek találtatott. Az angolok azt $= 0{\cdot}1$, a francziák $= 0{\cdot}08$, Corabeuf $= 0{\cdot}0642$, Gauss $= 0{\cdot}0653$ Bessel $= 0{\cdot}0685$, Struve $= 0{\cdot}0618$-nak találták.

Baeyer később észrevette, hogy az az évszakok, sőt a napnak különböző órái szerint is változik, és észleleteiből azon következtetést húzta, hogy a refractio együtthatója egész éven keresztül délben $= 0$, napkelet és nyugatkor pedig $= 0{\cdot}1066$, időközben pedig az idővel aránylagosan változik.

Sabler a refractio együtthatója értékét a képnek a távcsőben mutatkozó nyugalmi állapotából igyekezett meghatározni. Ha t. i. a távcsőt valamely igen távol lévő tárgyra irányozzuk, annak képe reggel napfelköltekor igen ingadozik, mely nyugtalanság hovatovább csökken, 7—8 óra tájban a kép egészen nyugodt lesz, de ezután ismét ingadozni kezd, mig végre a nyugtalanság délután 1 óra tájban a legnagyobb fokra hág, úgy hogy verőfényes időben gyakran semmi kép sem látszik. Délután a nyugtalanság ismét csökken, s 4—5 óra körül a kép ismét nyugodttá válik egész estig, midőn ismét egy kis ingadozás áll be. Ő úgy találta, hogy a legnyugodtabb kép állapotának megfelelő, vagyis normalis sugártörés $= 0{\cdot}088\ \omega$, s ez, a dél pillanatától előre és hátra számítva, rendesen a napfelkölte vagy lemente és a déli pillanat között lévő időnek $^2/_3$-ára esik. Ezen időtől kezdve előre és hátra felé a kép állapota fokonként változván, a normalis sugártöréshez correctiókat kell adni. Ezen correctiók sorozata következő:

igen nyugodt képnél . . = 0,
nyugodt képnél . . . . = $\mp$ 3·"8,
csaknem nyugodt képnél = $\mp$ 8· 5,
kissé nyugtalan képnél . = $\mp$ 14· 3,
nyugtalan képnél . . . = $\mp$ 22· 6,
igen nyugtalan képnél . = $\mp$ 39· 0.

A — jel a két legnyugodtabb kép ideje közötti szakra, tehát körülbelől reggeli 8 órától délutáni 4-ig, a + jel az ezen időszakon kivül eső észleleteknél alkalmazandó.

4) Ezen vizsgálódásból kitűnik, hogy a földi refractio mindeddig nincs olyan pontosan meghatározva, mint óhajtandó volna; s ez okból szükséges a magassági méréseket úgy intézni, hogy a refractio értékére szükség ne legyen, vagy ha azt elkerülni nem lehet, csak akkor kell észlelni, mikor a képek nyugodt állapotban vannak.

317. §. Tűkörhatod. Pistorkör.

A magassági szögmérők közt kitünő helyet foglal el a tűkörhatod és Pistorkör. Ezek, különösen a tengeren, a nap magasságának megmérésére igen czélszerűk, és általános alkalmazásban vannak.

A magasságmérést kétképen lehet velök véghezvinni:

1) Egy segéd horizon segitségével, mely czélra egy tányérba öntött higany, viz, olaj vagy más folyadék, vagy pedig egy szintező által vizszintessé tett sík tűkörfelület szolgál. Ha ezen horizon az álláspontban (318. ábra) A helyeztetik, s a C pontban, olyan közel a tűkörhöz, a mint csak lehet, a hatod síkja függélyesen tartatik, a B-ből jövő közvetlen sugár BC, és a tűkör által visszavetett sugár AC közt bezárt szög BCA méretik meg. Legyen ez $=\alpha$, a parallaktikus szög B-nél $=p$, a magassági szög az A pontban m, akkor:

$$2m = \alpha + p, \text{ tehát } m = \frac{\alpha + p}{2}$$

A parallaktikus szög értékét az ABC háromszögből, melyben AB, AC és α ösmereteseknek tekinthetők, lehet meghatározni. Igen távol lévő pontra nézve, minő p. o. a nap, ezen szög elenyészik.

Ha a tűkör síkja nem volna egészen vizszintes: akkor annak hajlásszögét a függélyes sík irányában egy szintezővel meg kell mérni, és azt a magassági szöghöz algebrailag adni. Ezen correctio a 315 §. szerint számítandó.

2) A tengeren a magassági szöget a tenger horizonjával szokták megmérni, mely a távcsőben tisztán látható egyenes vonal alakjában tűnik fel. Az igy nyert magassági szög egy kissé kelleténél nagyobb, mivel a tenger horizonja a szemnek a tenger színe feletti állása miatt a szemen keresztül gondolt vizszintes sík alá sülyedve látszik; ezen sülyedmény befolyását tehát a megmért magassági szögből le kell vonni. Legyen a 319. ábrában A az álláspont, ennek magassága a tenger szine felett $AD = a$, AT egy vizszintes vonal, B a tenger horizonjának egy pontja, $CD = R$, $BD = t$. A B-ből jövő sugár, mely a valódi horizont B-ben érinti, BA görbe vonalat ír le, annak utolsó eleme, mely az AB' érintővel összeesik, mutatja azon irányt, melyben a B pont látszik, s a TAB' szög a horizon sülyedményének neveztetik.

Ennek meghatározása végett húzzunk B-hez egy érintőt BE, akkor ha a TAB' szöget x-nek nevezzük, s figyelembe vesszük, hogy a $B'AB$ szög $= ABE$ szög $= k\omega$, mint refractio szögek, az AEB háromszögből lesz:

$$90^0 + x + k\omega + 90^0 - \omega + k\omega = 180^0,$$

vagy

$$x = \omega(1-2k) = \frac{t}{R}(1-2k).$$

Továbbá a DAB és DEB igen hegyes háromszögekben a DA és DE oldalak az átalellenben lévő szögekkel igen közel egyenes viszonyban állanak, tehát:

$$DA : DE = (\tfrac{1}{2}\omega - k\omega) : \tfrac{1}{2}\omega,$$

DE pedig egy ösmeretes mértani tétel szerint harmadik arányos a kör szelője EG és az EB érintőhöz, azaz:

$$DE = \frac{EB^2}{EG},$$

hol EB helyett elég közelítéssel t-t, s EG helyett $2R$-et is lehet tenni. Ezeket helyettesítvén, az előbbi arányból lesz:

$$a : \frac{t^2}{2R} = (1-2k) : 1, \quad \text{és} \quad t = \sqrt{\frac{2Ra}{1-2k}}.$$

Ezen értéket az x képletében helyettesítvén, végre lesz:

$$x = \sqrt{\frac{2(1-2k)\,a}{R}},$$

és ha $k = 0{\cdot}0653$, $R = 3266608$ Toisenak vétetik, a sülyedmény másodperczekben lesz:

$$x'' = 150{\cdot}49\sqrt{a},$$

hol a-t szintén Toiseban kell venni.

318. §. Reductio.

Legyen a 320. ábrában A a magassági kör középpontja, $AC = a$ ennek magassága a föld szine felett, $BD = b$ egy D-ben függélyesen felállított rúd. A magassági szög mérésekor a távcső a rúdnak végpontjára B irányoztatik, tehát az AB vonalnak megfelelő magassági szög α' méretik meg; holott némely esetekben a CD vonalra vonatkozót α kellene megmérni: milyen nagy a kettő közötti különbség? Ennek meghatározása végett húzzunk AE-t $\parallel$ CD-hez, akkor az ABE háromszögből lesz:

$$sin(\alpha' - \alpha) = \frac{BE}{AE} \cdot sin(90 + \alpha' + \omega).$$

BE helyett minden gyakorlati esetben lehet tenni $= b - a$, mint szintén AE helyett CD-t, mely vagy közvetlen adva van, vagy a vizszintes táv $CF = t$ által meghatározható. Első esetben lesz, ha még $sin(\alpha' - \alpha)$ helyett az ívet tesszük:

$$\alpha' - \alpha = -\frac{b-a}{AE}\, cos(\alpha' + \omega), \ldots \odot$$

az utóbbi esetben pedig az $OCD\triangle$-ből, ha R a föld sugárát jelenti, lesz:

$$CD = \frac{R sin\omega}{cos(\alpha + \omega)},$$

és ha még $R sin\omega$ helyett a vizszintes távolságot t tesszük, elég közelitéssel lesz:

$$AE = \frac{t}{cos(\alpha + \omega)}.$$

Ezeket helyettesítvén, ha még $sin(\alpha' - \alpha)$ helyett az ívet, s az egyenlet jobb oldalán α helyett mindenütt α'-et teszünk, elegendő közelitéssel lesz:

$$\alpha - \alpha' = -\frac{(b-a)}{t}\Big(cos(\alpha' + \omega)\Big)^2, \ldots \odot' \text{ hol } \omega = \frac{t}{R}.$$

Ha a távolság nem igen nagy, akkor ω-t el lehet hanyagolni, és lesz:

$$\alpha - \alpha' = -\frac{b-a}{t} \cos\alpha'^2 \ldots \odot''$$

A sugártörés befolyása ezen feladatra alig lesz valaha észrevehető.

319. §. Magasságmérés rudakkal.

Egy fa vagy ház magasságát, ha hozzá lehet férni, a legegyszerűbb szerszámokkal, rudakkal és lánczczal is kielégitő pontossággal több módon meg lehet mérni.

1-ső m ó d. Állitsunk fel a tárgy mellett egy sík téren függélyesen egy rudat, mérjük meg ennek hosszát, és mind a két tárgy árnyékának hosszát: akkor a nap sugárait párhuzamosoknak tekinthetvén, a függélyes vonalak és azoknak árnyékai közt hasonló háromszögek állanak elő, s a magasságok ugy állanak egymáshoz, mint az árnyékok. Könnyű átlátni, hogy ezen módnál csak az kivántatik meg, hogy a tárgyak párhuzamos síkokon álljanak; legnagyobb nehézséget az árnyékok végpontjainak megitélése fog okozni, mivel azok mindig el vannak mosódva.

2-ik m ó d. Állitsunk fel a megmérendő magassággal AB (321. ábra) egy függélyes síkban két függélyes rudat CD, EF ugy, hogy az A, C, E pontok egy egyenes vonalban legyenek; mérjük meg a rudak hosszait a BF, DF távokkal együtt: akkor az E pontból BF-hez párhuzamost gondolván, két hasonló háromszög áll elő, melyekből lesz:

$$DF : BF = CD - EF : AB - EF,$$

honnan következik:

$$AB = EF + \frac{BE.(CD - EF)}{DF}.$$

Mennél kisebb DF, annál nagyobb lesz a benne ejtett hiba befolyása az eredményre; azért az első rudat lehető hosszúnak, a másodikat lehető rövidnek kell venni.

320. §. Famérők. (Dendrometer).

A fák magasságának megmérésére az erdőszetben igen nagy gyakorlati fontossággal birván, többféle műszerek találtattak fel ezen feladatnak kényelmesebb feloldására. Ezen ugynevezett f a m é r ő k (Dendrometer) mind azon feltételre vannak alapitva, hogy az álláspontnak a fátóli távja csak nehány öl, ennélfogva nézgék teljesen kielégitő szolgálatot tesznek. Ezek közt nevezetesebb:

1) Winkler famérője. Ez egy négyszögü táblácskából áll (322. ábra), melynek egyik élén *ab* nézgék vannak alkalmazva, oldalán pedig az irányvonallal párhuzamosan, egy vagy több beosztott vonal *de* van húzva. A *c* pontból egy igen könnyen mozogható függélyes vonasz *cf* lóg le, melynek éle meghosszabbítva a *c* ponton megyen keresztül, és szintén be van osztva. A *de* beosztás kezdőpontja *o*, a *c*-ből leeresztett merőleges lábpontjában van. Ezen merőleges vonal hosszát gondoljuk 60 egyenlő részre beosztva, s ezen részeket az *o* pontból jobbra és balra, valamint a vonasz élén is felrakva. A tárgynézge *mn* két részből áll, melyek közül egyik *n* szilárd állású, a másiknak *m* pedig egy csavar által parallel mozgást lehet adni, s ezen mozgást egy Noniussal 0·01 hüvelyk pontossággal meg lehet mérni.

2) Ezen műszernek használata ez: A műszerrel a fától 60′ távolságban megállapodván, irányozzunk előbb a fa tető-, azután annak lábpontjára, s a függöny állását a *de* vonalon mindkét ízben leolvasván, a leolvasások összege fogja a fa magasságát szolgáltatni, mint azt a keletkező háromszögek hasonlóságából könnyen meg lehet mutatni. Egyszersmind a vonasz élén leolvasott mérték a ferde irányvonal hosszát *Aa* fogja adni. Ha most még a tárgynézge hegyei közé a fatörzsök átmérőjét beállítjuk, mit a csavar által elég kényelmesen lehet véghezvinni: akkor egy arányból a fa vastagságát is meg lehet határozni; t. i. a ferde táv úgy áll a vastagsághoz, mint a nézge hossza a nézgén leolvasott mértékhez, feltévén, hogy a mutató 0-án áll, midőn a hegyek egymást érintik; különben a collimatio-hibát a leolvasásba be kellene számítni.

321. §. Sanlaville famérője.

1) Ennek szerkezete a 323. ábrából könnyen megérthető. A szemnézge *O* egy beosztott pálcza *F* végén látható, melyet egy tokban ki- és be lehet tolni, s ezenkivül a *D* tányér tengelye körül fel- és le lehet hajtani, s minden állásban egy csavar által meg lehet szorítni. A tárgynézgén *E*, mely a *C* függélyes oszlopon meg van erősitve, két vizszintes szőrszál van kifeszítve, s a közöttök lévő táv = 0·36 hüvelyk. A műszernek ezen részei távmérő gyanánt szerepelnek, s általok az álláspontnak a fától való távja meghatároztatik.

A *C* oszlop felső négyszögü része szintén be van osztva, s ennek hosszában egy tokot *K* lehet fel- és letolni, melynek alsó vizszintes éle irányvonal gyanánt szolgál. Ez a magasságmérő rész.

Végre a *K* tokkal keresztben egy beosztott, s Noniussal ellátott pálczácska *g* látszik, végén kiálló hegygyel *a* ellátva, mely a fa vastagságának megmérésére szolgál.

2) A műszer használata következő: a fatörzs mellé egy rudat állítván, melyen 1^0 távban egymástól két pont van megjelölve, a műszert $10-12^0$ távolságban a fától függélyesen felállítjuk, az irányzót a rúd felé fordítván, az *F* pálczát annyira toljuk ki- vagy befelé, mig a hajszálak, a szemlyukon átnézve, a pontokat metszik, s a pálczát ezen állásban a csavarral megszorítván, a mutató állását leolvassuk. Legyen ez $= t$, s az álláspontnak a rúdtóli távja $= T$, akkor ezen arány áll elő:

$$T : t = 72'' : 0{\cdot}''36, \quad \text{tehát}$$

$$T = 200\, t'' = \frac{25}{9} t^0.$$

A *t* helyett az *F* pálczán a megfelelő *T* van felirva, ennélfogva a leolvasás közvetlen a távot szolgáltatja.

Ezután emeljük a *K* tokot, míg annak alsó széle a megmérendő magassági ponton áll, s a magasságot leolvassuk. Legyen ezen leolvasás $= m$, a fa magassága pedig a rúd alsó czélpontjától kezdve $= M$, akkor ismét ezen arány áll:

$$M : m = T : t = 72 : 0{\cdot}36,$$

tehát $$M = 200 m'' = \frac{25}{9} m^0.$$

Az *m* helyett hasonlóképen az *M* értéke van az osztályvonal mellé irva, úgy hogy itt is közvetlen a magasság olvastatik le.

Végre beállítjuk az *a* nézgét a törzs vastagságára, s a *g* léptéken a Noniust leolvassuk; legyen a leolvasás $= v$ a törzs vastagsága pedig $= V$, akkor ezen arány áll:

$V : v =$ irányvonal hossza a fáig: irányvonal hossza a nézgéig $= T : t = 72 : 0{\cdot}36$, tehát $V = 200 v'' = \frac{25}{9} v^0$.

Ezen méretet szintén a valóságos vastagságok szerint lehet számozni.

322. §.

F e l a d a t. Egy hozzáférhető magasságot szögmérővel meghatározni, ha annak a műszertőli távja még nem olyan nagy, hogy a föld görbülését és a sugártörést szükség volna figyelembe venni.

I. F e l o l d á s. Legyen a 324. ábrában a magasság $AB = M$, mérjük meg az alapvonalat $BC = t$, a műszernek a föld feletti magasságát $DC = i$, tegyük fel ezen méretet egy rúdon és állitsuk fel ezt a tárgy mellett úgy, hogy $BE = DC$ legyen. Ezután mérjük meg az A és E pontoknak megfelelő magassági szögeket α, β, ekkor az ADE háromszögből találtatik:

$$M = i + \frac{t \sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha} \cdots \odot$$

2) Miképen kell az álláspontot választani, hogy adott körülmények közt a mérés legjobb eredményt adjon, így lehet megvizsgálni. Gondoljuk, hogy t, α, M változnak Δt, $\Delta\alpha$, ΔM-el, akkor lesz:

$$M + \Delta M = i + (t + \Delta t)\frac{\sin(\alpha + \Delta\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \Delta\alpha)},$$

s ezen egyenleteket egymásból levonván, lesz:

$$\Delta M = (t + \Delta t)\frac{\sin(\alpha + \Delta\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \Delta\alpha)} - t\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha},$$

s rövid kifejtés után, mely közben $\cos\Delta\alpha = 1$, és $\sin\Delta\alpha = \Delta\alpha$-nak lehet venni, előáll:

$$\Delta M = \frac{t \cos\beta \, . \, \Delta\alpha}{\cos\alpha \cos(\alpha + \Delta\alpha)} + \Delta t \frac{\sin(\alpha + \Delta\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \Delta\alpha)}.$$

Minthogy $\Delta\alpha$, Δt, csak igen kis mennyiségeket jelentenek, melyeknek felsőbb hatványait s egymássali szorozmányait az első hatványhoz képest el lehet hagyni, az utóbbi egyenletet elég közelítéssel így is lehet írni:

$$\Delta M = \frac{t \cos\beta \, . \, \Delta\alpha}{\cos\alpha^2} + \Delta t \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha}.$$

Osszuk ezen egyenletet a legelső egyenlettel, akkor lesz:

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta t}{t} + \frac{\cos\beta \, . \, \Delta\alpha}{\cos\alpha \sin(\alpha + \beta)}.$$

Ezen képlet világosan mutatja, hogy a t befolyása az M meghatározására állandó; mivel az közvetlen mérés által határoztatik meg; ezen esetben pedig $\frac{\Delta t}{t}$ állandó mennyiség.

Az α-ra való tekintetből a mérés annál jobb eredményt fog adni, mennél nagyobb a $\triangle\alpha$ nevezője, a számláló változatlan mennyiség lévén. A nevezőt pedig így is lehet átváltoztatni:

$$cos\alpha\ sin(\alpha + \beta) = {}^1/_2\ sin(2\alpha + \beta) + {}^1/_2\ sin\beta.$$

Ezen alakban látszik, hogy a nevező legnagyobb lesz, ha $sin(2\alpha + \beta) = + 1$, vagy $2\alpha + \beta = 90^0$, tehát $\alpha = 45^0 - \frac{\beta}{2}$.

Ha a ꝗC sík vizszintes fekvésű, tehát $\beta = 0$, akkor a magassági szög legkedvezőbb esetben $= 45^0$.

II. Feloldás. Mérjük meg (325. ábra) a magassági szögeket $\alpha; \beta$, az A és B pontokra nézve, reducáljuk azokat a műszer lábpontjára C. Ezen reductiók a 318. §. ⊙ szerint lesznek:

$\triangle\alpha = \frac{i}{AC} cos\alpha$, $\triangle\beta = \frac{i}{BC} cos\beta$, hol i a műszer magasságát jelenti a föld színe felett, ꝗ$C = t$, AC pedig az AꝗC $\triangle$-ből határozandó meg, t. i. $AC = \frac{t\ cos(\beta - \triangle\beta)}{cos(\alpha + \triangle\alpha)}$, vagy közelítve $AC = \frac{t\ cos\beta}{cos\alpha}$. Azután az $\alpha + \triangle\alpha$, és $\beta + \triangle\beta$ szögekkel α és β helyett számitsunk az előbbi feloldás ⊙ képlete szerint.

323. §.

Feladat. Egy hozzáférhetlen pontnak A (326. ábra) magasságát egy hozzáférhető pont C felett meghatározni, ha a föld görbülése és a sugártörés elhanyagolható.

I. Feloldás. 1) Tűzzünk ki az A pont irányában egy alapvonalat CD, mérjük meg ennek hosszát $= t$, és mérjük meg a C és D pontokban a magassági szögeket α, α', γ. A műszer magasságát czélszerű mind a két ízben egyenlőnek venni, különben az egyik álláspontban a magassági szögeket a másik állásponti kör középpontjának a föld színe feletti magasságára kellene áttenni. Most az $AC'D'$ háromszögből következik:

$$D'C' : AC' = sinA : sinD',$$

minthogy pedig

$$D'C' = t,\ A \text{ szög} = \alpha' - \alpha,\ D \text{ szög} = 180^0 - (\alpha' - \gamma),$$

ezeket helyettesítvén lesz:

$$AC' = t\,\frac{sin(\alpha' - \gamma)}{sin(\alpha' - \alpha)}.$$

Most az AGC' derék háromszögből lesz:

$$AG = AC' \,.\, sin\alpha = t \,.\, \frac{sin(\alpha' - \gamma)\, sin\alpha}{sin(\alpha' - \alpha)},$$

$$C'G = AC' \,.\, cos\alpha = t \,.\, \frac{sin(\alpha' - \gamma)\, cos\alpha}{sin(\alpha' - \alpha)}.$$

2) Ha az AB tárgy nagyságát kellene meghatározni, akkor még a β, és β' szögeket is meg kellene mérni, és az ABC' háromszögből lenne:

$$AB = t \,.\, \frac{sin(\alpha' - \gamma)\, sin(a - \beta)}{sin(\alpha' - \alpha)\, cos\beta}.$$

Hasonlóképen találtatik az ABD' háromszögből:

$$AB = t \cdot \frac{sin(\alpha - \gamma)\, sin(\alpha' - \beta')}{sin(\alpha' - \alpha)\, cos\beta}.$$

Mind a két értéknek egyenlőnek kellene lenni egymással, ha a mérések hibátlanok volnának; a különbség a munka jóságának megitélésére alkalmatos.

II. Feloldás. Tűzzünk ki egy alapvonalat CD tetszésszerinti irányban, s tegyük fel általánosság végett, hogy az a vizszintessel γ szöget zár be, tehát DCD' szög $= \gamma$. Mérjük meg a C pontban az A és D pontokon keresztül gondolt függélyes síkok közt befoglalt vizszintes szöget α, a magassági szöggel együtt m; hasonlóképen mérjük meg a D pontban a hason tulajdonságu szögeket β és n : akkor a $CD'A'$ vizszintes háromszögeket fel lehet oldani, t. i.

$$CA' : CD' = sin\beta : sin(\alpha + \beta),$$
$$D'A' : CD' = sin\alpha : sin(\alpha + \beta),$$

tehát $$CA' = t \cdot \frac{cos\gamma\ sin\beta}{sin(\alpha + \beta)},\quad D'A' = t\frac{cos\gamma \,.\, sin\alpha}{sin(\alpha + \beta)}.$$

Ezután az ACA' és ADA'' derék háromszögekből lesz:

$$AA' = CA' . tgm, \quad AA'' = DA'' . tgn.$$

Ezen egyenletekbe a fentebbi kifejezéseket helyettesítvén, s megjegyezvén, hogy $DA'' = D'A'$, lesz:

$$AA' = t\frac{cos\gamma\ sin\beta\ tgm}{sin(\alpha + \beta)}, \quad \text{és} \quad AA'' = t\frac{cos\gamma\ sin\alpha\ tgn}{sin(\alpha + \beta)}.$$

Ezen két magasság különbségének a C és D pontok magasságkülönbségével egyenlőnek kellene lenni, ha a mérések hibátlanok volnának, tehát ezen egyenlet:

$$AA' - AA'' = t\, sin\gamma,$$

a munka jóságának próbája gyanánt használható.

324. §.

Feladat. Két pont közt a magassági különbséget meghatározni, ha a távolság igen nagy, és egy háromszögelésből, vagy akármely más úton ösmeretes.

I. Feloldás. Ha a magassági szögek mind a két pontban egy időben megméretnek. Legyenek a valódi magassági szögek α, β (317. ábra), a föld sugára R, a középponti szög ω, az ösmeretes táv $t = AD$ ív. A valóságos magasság

$$BD = m = BC - AC.$$

Az ABC háromszögből pedig

$$BC : AC = sin(90^0 + \alpha) : sin(90^0 - \beta),$$

tehát

$$BC = R\frac{cos\alpha}{cos\beta}.$$

Ezen értéket helyettesítvén lesz:

$$m = R\frac{cos\alpha - cos\beta}{cos\beta} = \frac{2Rsin\frac{\beta-\alpha}{2}\,sin\frac{\beta+\alpha}{2}}{cos\beta}.$$

Az ABC háromszögből továbbá következik:

$$90^0 + \alpha + 90^0 - \beta + \omega = 180^0,$$

tehát

$$\beta - \alpha = \omega,$$

Ezen értéket helyettesitvén, lesz:

$$m = \frac{2Rsin\frac{\omega}{2} \cdot sin\frac{\beta+\alpha}{2}}{cos\beta}.$$

Ezen kifejezésben α és β a valódi magasságokat jelentik, melyek a látszó magassági szögekkel α', β' a 316. §. szerint ezen összefüggésben állanak:

$$\alpha = \alpha' - k\omega, \quad \beta = \beta' + k\omega.$$

Ezeket összeadván lesz:

$$\beta + \alpha = \beta' + \alpha',$$

továbbá a β egyenletében $k\omega$ helyett a 316. §-ból annak értékét helyettesitvén, lesz:

$$\beta = \beta' + \frac{\alpha' - \beta' + \omega}{2} = \frac{\beta' + \alpha' + \omega}{2}.$$

Ezen értékeket helyettesítvén, végre lesz:

$$m = 2Rsin\frac{\omega}{2} \cdot \frac{sin\frac{\beta' + \alpha'}{2}}{cos\frac{\beta' + \alpha' + \omega}{2}},$$

hol $2R sin\frac{\omega}{2}$ helyett, az AD húr hosszát jelenti, az ív hosszát t is lehet tenni. Ennélfogva lesz:

$$m = t \frac{sin\frac{\alpha' + \beta'}{2}}{cos\frac{\alpha' + \beta' + \omega}{2}}.$$

II. Feloldás. Ha a magassági szög csak az A pontban van megmérve, akkor lesz:

$$BC : AC = sin(90^0 + \alpha) : sin(90^0 + \alpha + \omega), \text{ tehát}$$

$$BC = R \cdot \frac{cos\alpha}{cos(\alpha + \omega)},$$

ezt helyettesítvén, lesz:

$$m = R\frac{cos\alpha - cos(\alpha + \omega)}{cos(\alpha + \omega)} = 2R\, sin\frac{\omega}{2} \cdot \frac{sin\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right)}{cos\,(\alpha + \omega)}.$$

Úgyde a fentebbiek szerint $\alpha = \alpha' - k\omega$, tehát

$$m = 2R\, sin\frac{\omega}{2} \cdot \frac{sin\left(\alpha' + \omega\frac{1-2k}{2}\right)}{cos\,(\alpha' + \omega\,(1-k))} = t\frac{sin\left(\alpha' + \omega\frac{1-2k}{2}\right)}{cos\,(\alpha' + \omega\,(1-k))},$$

hol k helyett a 316. §-ban talált értéket kell tenni, és

$$\omega'' = \frac{t}{R sin 1''}.$$

325. §. Barometerrel való magasságmérés.

A barometerreli magasságmérés feladatát Laplace, Poisson, Gauss, Bessel, Ohm és mások néműleg különböző szempontból véve fejtették meg. Mi a Laplace nyomdokain indulván, következő analysist követünk:

1) Gondoljunk a föld színe felett egy függélyes irányú, igen vékony légoszlopot; messünk ki ebből z magasságban a tenger színe felett vizszintes síkok által egy végtelen kis magasságú rétegecskét, melyet prisma alakúnak lehet tekinteni. Legyen ennek keresztmetszése f, magassága dz, g a z magasságban uralkodó nehézségi gyorsulás, s a lég absolut sűrűsége, p a réteg felső lapjának téregységére a felette lévő légoszlop által gyakorolt nyomás, a réteg alsó lapjára gyakorolt hasonnemű nyomás pedig $p + dp$, minthogy ez rétegről rétegre változik: akkor a réteg

oldalaira intézett egyenlő, de ellenkező irányú vizszintes nyomások egymást lerontván, az egyensúly fennállására csak az szükséges, hogy a rétegnek alsó lapjára felülről és alulról ható függélyes nyomások egyenlők legyenek, azaz:

$$pf - gfsdz = (p + dp)f,$$

$$\text{azaz: } -gsdz = dp,$$

hol dz — jellel van véve azért, mert ha p növekedik, z csökken. Nevezzük a tenger színére vonatkozó hasonnemű mennyiségeket 0^0 hőmérséknél g_0, s_0, p_0-nak, a föld sugárát r-nek, s tegyük fel, hogy az egész megmérendő légoszlop hőmérséke t mindenütt egyenlő, a lég kiterjedési együtthatója pedig $= \alpha$: akkor a Mariotte és Gay-Lussac egyesített törvényei szerint a sűrűségek közt ezen összefüggés áll:

$$s = s_0 \frac{p}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha t},$$

továbbá a nehézség törvénye szerint:

$$g = g_0 \frac{r^2}{(r + z)^2}.$$

Ezeket helyettesítvén, lesz:

$$-\frac{g_0 \; s_0 \; r^2}{p_0(1 + \alpha t)} \cdot \frac{dz}{(r + z)^2} = \frac{dp}{p},$$

és ha z' és z'' határok közt egészelünk, melyeknek p' és p'' felelnek meg, a közönséges logarok modulusát M-nek nevezvén, lesz:

$$\frac{g_0 \; s_0 \; r^2}{p_0(1 + \alpha t)} \left(\frac{1}{r + z''} - \frac{1}{r + z'} \right) = \frac{1}{M} \log \frac{p''}{p'},$$

vagy

$$\frac{g_0 \; s_0 \; r^2}{p_0(1 + \alpha t)} \frac{(z' - z'')}{(r + z'') \; (r + z')} = \frac{1}{M} \log \frac{p''}{p'},$$

s ha még rövidség végett $z'' - z' = m$-nek tétetik, rövid átváltoztatás után lesz:

$$m = \frac{p_0(1 + \alpha t)}{M g_0 \; s_0} \left(1 + \frac{z''}{r} \right) \left(1 + \frac{z'}{r} \right) \log \frac{p'}{p''}.$$

Úgyde a lég nyomását a higanyoszlop súlyával szoktuk megmérni; még pedig ha δ a higany sűrűségét, melyet mindenütt állandónak lehet venni, b_0 a higanyoszlop hosszát, mind a kettőt 0^0 hőmérséknél a tenger színén véve, továbbá b', b'' ugyanazt a megmérendő magasság alsó és felső végpontjain, T' és T'' a higanynak megfelelő hőmérsékeit, és β annak kiterjedési együtthatóját jelenti, lesz:

$$p_0 = \delta g_0 b_0,$$
$$p' = \delta(1-\beta T')g'b'$$
$$p'' = \delta(1-\beta T'')g''b''.$$

Ezekből következik:

$$\frac{p'}{p''} = \frac{b'}{b''} \cdot \frac{1-\beta T'}{1-\beta T''} \cdot \frac{g'}{g''};$$

s minthogy még $\frac{g'}{g''} = \left(\frac{r+z''}{r+z'}\right)^2$, ezeket helyettesítvén, lesz:

$$m = \frac{\delta b_0}{Ms_0}(1+at)\left\{log\frac{b'}{b''} + log\frac{1-\beta T'}{1-\beta T''} + 2\,log\frac{1+\frac{z''}{r}}{1+\frac{z'}{r}}\right\} \times \left(1+\frac{z''}{r}\right)\left(1+\frac{z'}{r}\right).$$

Ezen képletben b_0, s_0, g_0 ... φ geogr. szélességre vonatkoznak. Nevezzük a megfelelő mennyiségeket a 45^0 szélesség alatt (b_0), (s_0), (g_0)-nak, akkor a Mariotte törvénye szerint:

$$s_0 : (s_0) = b_0 g_0 : (b_0)(g_0), \quad \text{vagy} \quad s_0 = (s_0)\frac{b_0\, g_0}{(b_0)\,(g_0)},$$

ezt helyettesítvén, lesz:

$$m = \frac{\delta(b_0)\,(g_0)}{M(s_0)\,g_0}(1+\alpha t)\left\{log\frac{b'}{b''} + log\frac{1-\beta T'}{1-\beta T''} + 2log\frac{1+\frac{z''}{r'}}{1+\frac{z'}{r}}\right\} \times \left(1+\frac{z''}{r}\right)\left(1+\frac{z'}{r}\right).$$

2) Ezen képletben $\frac{\delta(b_0)}{M(s_0)}$ állandó mennyiség, melyet Ramond háromszögtani magasságmérésekkel való összehasonlítás által határozott meg, és 9437 Toise = 18393 méter = 9697·6 bécsi ölnek találta [1]); α közép nedvességű légnél a Réaumur-féle scala minden fokjára nézve = $^1/_{200}$, t helyett pedig Poisson szerint az alsó és felső állomáson észlelt léghőmérsék közép értékét szokták venni, azaz : $t = \frac{t' + t''}{2}$.

3) A $log\frac{1-\beta T'}{1-\beta T''}$ értékét, melyben β a Réaumur-féle scala min-

---

[1]) Sztoczek, a k. magyar természettudományi társulat közlönye VII. kötetében közzétett egyik értekezésében, ezen állandót a lég nyomása és annak sűrűsége felett Párisban tétetett észleletekből 18400 méternek számította, mely a fentebbi, közvetett mérésekből nyert eredménytől igen kevéssé különbözik.

den fokjára nézve $= {}^1/_{4440}$, egyszerűbb alakra így lehet hozni:

$$log \frac{1-\beta T'}{1-\beta T''} = log(1-\beta T') - log(1-\beta T''),$$

elég közelítéssel $= - M\beta T' + M\beta T'' = - M\beta (T' - T'')$, minthogy pedig $M = 0{\cdot}43429$, tehát $M\beta$ igen közel $= {}^1/_{10000}$, ennélfogva lesz:

$$log \frac{1-\beta T'}{1-\beta T''} = - \frac{T' - T''}{10000}.$$

Hasonló kifejtés után lesz:

$$2 log \frac{1+\frac{z''}{r}}{1+\frac{z'}{r}} = \frac{2M(z''-z')}{r} = \frac{2M}{r} m = 0{\cdot}86859 \frac{m}{r},$$ vagy bécsi ölekre vonatkozólag $= 0{\cdot}000000259\ m$.

4) A gyorsulások természettani törvények szerint a másodperczingák hosszával egyenes viszonyban állanak, melyet $a + b\ sin\varphi^2$ által lehet kifejezni, hol Laplace szerint $a = 0{\cdot}^m 99097$, $b = 0{\cdot}^m 0051535$. E szerint

$$\frac{(g_0)}{g_0} = \frac{a + {}^1/_2 b}{a + b\ sin\varphi^2}.$$

Ha az osztást véghezvisszük, és a $\frac{b}{a}$ kis mennyiség második és felsőbb hatványait elhanyagoljuk, végre lesz:

$$\frac{(g^0)}{g^0} = 1 + 0{\cdot}00260\ cos 2\varphi.$$

5) Végre

$$\left(1 + \frac{z'}{r}\right)\left(1 + \frac{z''}{r}\right) \text{ közel} = 1 + \frac{z' + z''}{r} = 1 + \frac{2z' + m}{r}.$$

Ezen átváltoztatásokat mind figyelembe vévén, a képlet ilyen alakot ölt magára:

$$m = 9697{\cdot}6 \left(1 + \frac{t' + t''}{400}\right)\left\{log \frac{b'}{b''} - \frac{T' - T''}{10000} + 0{\cdot}86859 \frac{m}{r}\right\} \times$$
$$(1 + 0{\cdot}00260\ cos 2\varphi)\left(1 + \frac{2z' + m}{r}\right) \cdots ☽,$$

bécsi ölekben. A képlet jobb oldalán előforduló m helyett a többi factorokból nyert közelítő értéket kell tenni.

6) Gauss ezen képlet egyszerűbb alkalmazása végett táblákat számított ki, melyek Stampfer Logar tábláiba, s ezen könyv végén is felvétettek. (VI. tábla). Ezek három részből állanak.

Az első magában foglalja a $log\left[9697{\cdot}6\left(1+\frac{t'+t''}{400}\right)\right]$ értékeit 5 tizedes jegyekben, argumentuma: $(t'+t'')$, a hőfok tizedes részeire eső pótlékok külön oszlopban kiszámitva találtatnak.

A másodikban foglaltatik $log(1+0{\cdot}00260\,cos2\varphi)$, argumentuma : φ.

A harmadikban $log\left(1+\frac{2z'+m}{r}\right)$, argumentua : $logm$.

A $log\frac{b'}{b''}-\frac{T'-T''}{10000}+0{\cdot}86859\,\frac{m}{r}$ értékeit közvetlen kell kiszámítni, mivel az igen sok változó mennyiséget foglalván magában, táblába össze nem állitható. Nevezzük ezen mennyiséget rövidség végett U-nak, a táblákból átvett mennyiségeket logI, logII, logIII-nak, akkor lesz:

$$logm = log\mathrm{I} + logU + log\mathrm{II} + log\mathrm{III}.$$

A hőmérsékeket mind Réaumur-féle fokokban kell venni; a barometerscala akármely egységre vonatkozhatik, mivel a higanyoszlop hosszainak csak viszonya jön elő a képletben. A magasság bécsi ölekben fog kijönni.

Példa. Humboldt észleletei szerint találtatott:

a Chimboraço tetején $b''=167{\cdot}'''2$, $T''=10{\cdot}^0 0\ C$, $t''=-1{\cdot}^0 6\ C$,
a déli tenger színén $b'=337{\cdot}'''7$, $T'=25{\cdot}^0 3\ C$, $t'=25{\cdot}^0 3\ C$,

$$\varphi = 1^0 45'.$$

Legelőbb is a hőmérsékeket Réaumur scalára kell változtatni ezen képlet szerint: $4C=5R$. E szerint a hőmérsékek átváltoztatva lesznek:

$$\begin{array}{rl} T'' = & 8{\cdot}^0 0\ R, \\ T' = & 20{\cdot}^0 24R, \\ \hline T'-T'' = & 12{\cdot}^0 24R, \end{array} \qquad \begin{array}{rl} t'' = & -1{\cdot}^0 28R, \\ t' = & 20{\cdot}^0 24R, \\ \hline t'+t'' = & 18{\cdot}^0 96R, \end{array}$$

$$\text{Ezután}\quad \begin{array}{rl} logb' = & 2{\cdot}52853, \\ -\frac{T'}{10000} = & -0{\cdot}00202, \\ \hline & 2{\cdot}52651, \end{array} \qquad \begin{array}{rl} logb'' = & 2{\cdot}22324, \\ -\frac{T''}{10000} = & -0{\cdot}00080, \\ \hline & 2{\cdot}22244. \end{array}$$

Innen $U = 2{\cdot}52651 - 2{\cdot}22244 = 0{\cdot}30407.$

$log U = 9{\cdot}48297 - 10,$
$log I = 4{\cdot}00557$
95
6
$log II = 0{\cdot}00112$
közelitő $log m = 3{\cdot}49067$
$log III$ (3·49-re) $= 0{\cdot}00039$
$log U$ javitása $= 0{\cdot}00114$
végleges $log m = 3{\cdot}49220$
$m = 3106{\cdot}{}^0 0$ bécsi mértékben.

$log m = 3{\cdot}49$
$log \frac{0{\cdot}8686}{r} = 0{\cdot}41 - 7,$
$0{\cdot}90 - 4,$
ennek megfelelő szám, vagyis
az U javitása $= 0{\cdot}00080,$
$log\ U$ javitása $= 0{\cdot}00114,$
(t. i. $log U$-nál tab. Diff. 1·43,
$1{\cdot}43 \times 80 = 114.$)

326. §.

Ha a magasság nem igen nagy, vagy csekélyebb pontossággal is meg lehet elégedni : előnyösen lehet a Koriska által számitott táblákat is használni, melyek a »Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt 1855. VI. Band« czimű munkában jelentek meg, s a magyar tud. akademia által »meteorologiai észleletek tételére« kiadott »utasitásba« is átvétettek. Ezek szintén három részből állanak.

Az első rész a barometer-állásoknak 0°-ra áttételére szolgál, és párisi vonalakra van alkalmazva.

A második magában foglalja a magasság nyers értékét, azaz : $log \frac{b'}{b''} = m_0$ a tenger színe felett, bécsi ölekben. Mind a két, 0°-ra áttett barometer-leolvasásnak megfelelő magasságot tehát külön kell ezen táblából keresni, s egymásból levonni.

A harmadik magában foglalja a magasság-különbségnek a léghőmérséktől eredő változását, azaz : $m_0 \frac{t' + t''}{400}$. Ennek két bejárása van, egyik az első függélyes rovatban, az előbbi tábla szerint talált magassági különbség; a másik, az első vizszintes sorban, a $t' + t''$ értékét jelenti 0°—10°-ig. Ha a hőmérsék 10°-t meghalad, abból egy tizedest el kell vágni, s ugy kell a táblában keresni; a nyert számban pedig a tizedes pontot egy számjegygyel jobb kéz felé kell mozdítni.

A geographiai szélesség-, és a gyorsulás változékonyságából eredő részek a képletben elhanyagoltattak.

Példa. Legyen $b'' = 283{\cdot}'''40\ p.$ $T'' = 13{\cdot}^{0}0\ R.$ $t'' = 11{\cdot}^{0}3\ R.$
$b' = 327{\cdot}\ 52$ $T' = 19{\cdot}\ 2$ $t = 19{\cdot}\ 2$

Az első táblából . . . . . . $280'''$-ra, 13^{0}-ra esik $= 279{\cdot}'''18$,
Correctio . . . . $3{\cdot}\ 4$-re, 13^{0}-ra esik $= 3{\cdot}\ 39$,

tehát . . . $283{\cdot}'''40$ 0^{0}-ra áttéve $= 282{\cdot}'''57$.

Hasonlóképen . . . . $320'''$-ra, 19^{0}-ra esik $= 318{\cdot}'''63$,
$7{\cdot}52$-re, 19^{0}-ra esik $= 7{\cdot}\ 47$,
$0{\cdot}^{0}2$-ra esik $= -0{\cdot}\ 02$.

tehát . . . $327{\cdot}'''52$ 0^{0}-ra áttéve $= 326{\cdot}'''08$.

A második táblából . . . . . . $282'''$-ra esik $= 749{\cdot}^{0}0$,
az arányos részek rovatából . . . $0{\cdot}\ 5$-re esik $= -7{\cdot}\ 5$,
$0{\cdot}\ 07$-re esik $= -1{\cdot}\ 0$.

tehát . . . $282{\cdot}''57$-nek megfelel $= 740{\cdot}^{0}5$.

Hasonlóképen . . . . $326'''$-ra esik $= 138{\cdot}^{0}4$,
az arányos részek rovatából . . . $0{\cdot}\ 08$-ra esik $= -1{\cdot}\ 0$,

tehát . . . $326{\cdot}'''08$-nak megfelel $= 137{\cdot}^{0}4$.

A magassági különbség tehát . . . . $740{\cdot}^{0}5$,
$-\ 137{\cdot}\ 4$,

$m_0 = 603{\cdot}^{0}1$.

$t' + t'' = 30{\cdot}^{0}5$.

A harmadik táblából . . . . 600^{0}-re, 30^{0}-ra esik $= 45{\cdot}^{0}0$,
$0{\cdot}^{0}5$-re esik $= 0{\cdot}\ 1$.

Végleges magassági különbség $= 648{\cdot}^{0}2$ b. m.

327. §.

1) Ezen táblából könnyen meg lehet itélni, hogy milyen hibától lehet félni, ha a barometer és hőmérők leolvasásai egy kevéssé hibások. $^{1}/_{10}'''$ hiba a barometeren $1{\cdot}^{0}2$, egész $1{\cdot}^{0}7$ hibát okoz a magasságban; a léghőmérsékben 1^{0} hibának $\frac{m}{400^{0}}$, a higany hőmérsékletben pedig körülbelől 1^{0} hiba felel meg a magasságban. Ebből következik, hogy a barometerreli magasságmérést igen óvatosan kell tenni, hogy a helyi körülmények az adatokat meg ne hamisítsák. A barometert árnyékos helyre kell függeszteni, hogy a sugárzó meleg hatásától ment legyen, a léghőmérőt, mely a barometerhez külön van adva, szintén árnyékos helyre

s a léghuzamnak kitéve kell felfüggeszteni, s a leolvasással néhány perczig várakozni, míg a higany a külső lég hőmérsékét magába felvette, a barometeren megerősített hőmérőt elébb kell leolvasni, mint a barometerállást, hogy a testből kisugárzó meleg annak állására káros hatást ne gyakoroljon. Általában véve, az egész észlelésnek gyorsan kell menni, hogy az egyidejüségnek elég tétessék. Mind a két állásponton, ha csak lehet, egy időben kell észlelni; erre tehát két észlelő és két műszer szükséges. De ezeket egymással össze kell előbb hasonlítni, hogy egyiket a másikra át lehessen tenni. Ha a mérési idő az egyik állomáson bizonytalan, akkor a másikon óránként az egész nap folytán észlelni kell, hogy a másik állomási észlelési időre interpolálni lehessen. E czélra figyelembe veendő, hogy rendes körülmények közt, midőn csakis lehet a magassági méréshez fogni, mind a barometer, mind a hőmérő változásai olyan egyenletesek, hogy azokat a lefolyt időszakokkal egyenes viszonyba lehet tenni. A munka bevégzése után ismét össze kell hasonlítni a műszereket, hogy ha időközben egyik vagy másikon változás történt volna, ez nyilvánosságra jőjjön. A geogr. szélességet elég csak fokokban ösmerni, úgy mint azt minden földabroszon meg lehet határozni.

2) De ezen, az észlelő ügyességtől függő hibaforrásokon kivül megemlítendők még azon hibák is, melyek a képlet kifejtése alkalmával tett feltevések be nem teljesedéséből erednek. Ezek közt nevezetesebbek: a légoszlop hőmérsékének a $\frac{t'+t''}{2}$-től való különböző volta, mely helyi körülmények befolyása következtében néha az észlelési hibát tetemesen túlszárnyalhatja. Különös befolyással bír erre a nap melege, úgy hogy verőfényes időben jó mérést kapni alig lehet. Továbbá a kifejtésnél a légrétegek egyensúlyi, azaz a mathematikai földszinével párhuzamos gömbfelületet képző állapotban gondoltattak, holott ez jóformán soha sincs egészen úgy, hanem a légrétegek a különböző felmelegedés következtében gyakran hullámzó, a szelek által okozott felháborodás folytán pedig a föld physikai felületével párhuzamos állapotba jöhetnek. Ez okból szeles idő a magasságmérésre alkalmatlan. De két egymástól több mértföldnyire eső pont magassági különbségét is csak sokszor ismételt mérések által lehet elegendő pontossággal meghatározni, melyek tehát különböző körülmények

közt vitetvén véghez, a szabályellenesség befolyásától többé kevébsé mentek. Megemlítendő még a lég nedvességtartalmának befolyása is a magassági mérésre, mely a felvett közép értéktől tetemesen különböző lehet a szerint, a mint az időjárás vagy folyton száraz, vagy pedig folyton esős. Mind ezen befolyások a barometerreli magasságmérés becsét tetemesen csökkentik, s annak alkalmazását csak elővizsgálati czélokra szorítják.

328. §.

Hasonlóképen lehet a hőmérő általi magasságmérést is megitélni. Tudnivaló, hogy a forró víz hőmérséke a légnyomástól függ; ez által lehetővé lesz a lég nyomását, tehát közvetve a helynek a tenger színe feletti magasságát is hőmérő által határozni meg, csak arra van szükség, hogy azon helyen, melynek magasságát akarjuk megmérni, vizet forrásba hozzunk, s ennek hőmérsékét egy igen érzékeny hőmérő által meghatározzuk. Dr. E. F. Auguszt kifejtése szerint a 0^0-ra redukált, s méterben vett barometer-állás b és a forró víznek Celsius fokokban vett hőmérséke t közt következő összefüggés van:

$$log b = \frac{23{\cdot}945371t,}{800 + 3t} - 2{\cdot}2960383,$$

ha ezen értéket a 325. §. ☽ képletbe helyettesítjük, a tenger színén pedig a 0^0-ra redukált barometer-állást $= 760$ mm-nek vesszük: a pontnak a tenger feletti magassága bécsi ölekben fog kijönni. Hogy a magasságmérés jól sikerüljön, szükséges egy igen érzékeny hőmérőt alkalmazni, melyen a forrpont közelében nehány fokot igen nagy pontossággal, a foknak még századrészét is le lehessen olvasni. E czélra Morstadt egy sajátságos alakú hévmérőt készített (328. ábra), melyben az alsóbb fokoknak megfelelő kiterjedést a higanyon leolvasni nem lehet, de az utolsó fokokra eső csődarab 10—12 hüvelyk hosszú és igen finom átmérőjű. A vízforralásra egy, oldalról fedett edényt kell használni, hogy a vízgőz el ne széledjen, s ez által annak hőmérséke ne csökkenjen; a hőmérőt a forró víz felibe a gőzbe kell tartani. (Lásd Gintl Höhenmessen mit dem Thermometer. Wien, 1835).

II. OSZTÁLY.

Lejtmérés.

329. §.

Lejtmérés alatt értjük a föld physikai felszíne emelkedési viszonyainak meghatározását. Ez tehát szintén magasságmérés, de azon különös esetben, hogy a megmérendő pontok a föld felszínén egymástól kisebb-nagyobb távolságban feküsznek, vagyis a magassági különbségek a föld felületén választott pontok közt kerestetnek, mint azok csatornázási lecsapolási szabályozási ut- és vasuti építkezéseknél, és más technikai czélok elérésére szolgáló mérnöki munkálatoknál megkivántatnak.

330. §. Esés. Lejtő.

Valamely két pontnak magassági különbsége esésnek neveztetik. Ha az első vagy kiindulási pont magasabban fekszik a második vagy következőnél: akkor az esés igenleges, ellenkező esetben nemleges. A nemleges esés tehát emelkedést jelent.

Az esés vagy általános (absolut), midőn a magassági különbség valamely hosszegységben, p. o. ölekben a tizes vagy tizenkettős beosztás szerint, némely tartományokban lábakban, a tizenkettős rendszer szerint, az uj mérték szerint méterekben fejeztetik ki, tekintet nélkül a pontok közötti távolságra; vagy viszonyos (relativ), midőn az a távolsághoz mérve határoztatik meg. Ezen utóbbit, mely lejtő nevet is visel, többféleképen szokták kifejezni, u. m.

a) Megállapítják a vizszintes irányban gondolt hosszegységre eső magassági különbséget rendesen valamely alsóbb rendü hosszegységben, p. o. $3'''$, 1^{0}-re.

b) Egy törtszám által, melynek számlálója 1, nevezője pedig azon vizszintes távolság, melynek 1 magassági különbség felel meg, p. o. $^{1}/_{150}$, vagy 1 : 150 annyit jelent, hogy az esés 150 hosszegységre 1 hosszegység. Ezen kifejezés szerint a vizszintesség $\frac{1}{\infty}$, vagy $1 : \infty$, a függélyesség pedig $\frac{1}{0}$ vagy $1 : 0$ által ábrázoltatik. Látni való, hogy a lejtő ezen kifejezése nem más, mint a hajlott vonal hajlásszögének háromszögtani érintője.

c) Százalékokban, melyeknél a 100 hosszegységnek megfelelő magassági különbség jelöltetik ki, p. o. $0{\cdot}2\%$, azaz: 100 hosszegységre esik 0·2 olyan hosszegységnyi esés. Ezen mód szerint 0% vizszintes, $\infty\,\%$ pedig függélyes vonalat jelent.

331. §. Valódi és látszólag vizszintes közötti különbség.

A 307. §.-ban előadatott, hogy két pont magassági különbségének meghatározására csak az szükséges, hogy egy tetszésszerinti vizszintes felülettől a két pontig függélyesen lemérjünk, s ezen méreteket egymásból levonjuk; ezen különbség fogja a keresett magassági különbséget adni. E szerint a lejtmérés teendői lényegesen a vizszintes felület előállitására, és a függélyes vonal megmérésére szoritkoznak.

A vizszintes felület, mint már neve is mntatja, a nyugvó vizszin által ábrázoltatik, s a 12. §. szerint gömbnek tekinthető, melynek sugarát minden gyakorlati esetben a tenger színének megfelelő gömb sugárával érezhető hiba nélkül fel lehet cserélni. Egy hosszú csatorna álló vize által tehát vizszintes felület állíttatik elő, s a meghatározandó pontoktól csak ennek vizszinéig kellene lemérni; az ezek között lévő különbség a pontok magassági különbségét egész szigorral fogná szolgáltatni.

De ezen eset igen ritkán fordul elő. A vizszintes felület helyett legtöbbnyire egy látszólag vizszintes irányvonalat szoktunk előállítni, mely a gömbfelülettel az álláspontban érintkezik; de attól annál inkább eltér, mennél hosszabb a vonal. Ha tehát ezen vizszintes irányvonaltól mérünk le a föld szinéig: ezen méretből le kell vonni azon darabot, mely a gömb felületén kivül esik, s ezen darabot a valódi és látszólag vizszintes közötti különbségnek nevezzük. Legyen *C* (329. ábra) a földgömb középpontja, *AB* a föld felületének keresztmetszése, *DG* egy vizszintes irányvonal, mely a lég sugártörő hatásának következtében görbe, *DF* a megfelelő gömbfelület keresztmetszése, *DE* pedig ennek érintője a *D* érintési pontban: akkor *GB* lesz a megmért függély, és GF a levonandó correctio. Ennek meghatározása következőképen eszközölhető:

$$GF = EF - EG,$$

úgyde a 12. §. szerint:

$$EF = \frac{2Rsin\frac{\alpha^2}{2}}{cos\alpha}, \text{ vagy elég közelitéssel} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{R},$$

hol t a vizszintes távolságot, és R a földgömb sugárát jelenti. Továbbá a 317. §-ban mondottak szerint, melyek itt is alkalmazhatók:

$$EG : EF \text{ igen közel} = k\alpha : {}^1/_2\alpha = 2k : 1,$$

hol k a sugártörési együtthatót jelenti. Tehát

$$EG = 2k \,.\, EF.$$

Ezeket helyettesitvén lesz:

$$GF = \frac{1-2k}{2}\,\frac{t^2}{R}.$$

k közép értékkel $= {}^1/_{13}$, $R = 3356805$ bécsi öl; tehát ha a GF correctiót f-nek nevezzük, lesz:

$$f = 0{\cdot}0000001295\ t^2 \text{ bécsi ölekben.}$$

Ezen képlet szerint van számítva a VII. tábla, melyből a bécsi ölekben vett távolságoknak megfelelő magassági correctiókat ki lehet irni. Ebből látni lehet, hogy a valódi és látszatos vizszintes közti különbség 100° távolságon alul még 0·°001-et meg nem halad; de az a távval négyzetes viszonyban növekedik. Százon alul lévő távoknak megfelelő f-et a táblából ugy lehet nyerni, ha a távot 10-el, a tábla eredményét pedig 100-al osztjuk.

332. §. Lejtmérő műszerek.

1) A vizszintes irányvonal előállitására különös, ugynevezett lejtmérő műszerek szolgálnak. Ezeket három osztályba lehet sorozni. Az elsőbe tartoznak azok, melyeken a vizszintes irányvonal egy folyadék felülete által magától a mérnök hozzájárulta nélkül előáll. A másodikban az irányvonal egy szabadon mozgó inga által hozatik vizszintes fekvésbe. A harmadiknál ezen czélra egy szintező szolgál, melyet a mérnöknek kell beállítni, és ha az helyéből kimozdulna, ismét helyre kell igazítni.

2) Az első csoportba tartozik a közlőcsöves lejtmérő, (Canalwaage). Ez egy bádogból készült 10—12" hosszú, két végén

derékszög alatt felhajtott csőből áll, melyet egy csapban végződő háromlábú állványon meg lehet erősítni. A cső két végén 3—4″ hosszu üvegcsövek vannak beragasztva. Ha ezen edénybe víz öntetik : annak felülete a két üvegcsőben egyenlő magasságban fog megállapodni s a víz felületének meghosszabbitása a vizszintes iránysíkot fogja szolgáltatni. Ezen iránysík kitűzése végett a szemet 10—12 hüvelykkel hátrább a hátulsó csőnél úgy kell helyezni, hogy a víz felületei a két csőben egymással összeessenek, vagyis egy síkot képezni látszodjanak; ezen sík a mérőrúdon a leolvasandó méretet el fogja metszeni. Ezen beállitás egy kissé nehéz és tökéletlen, minthogy a víz a hajcsövességnél fogva az üveg falain felemelkedik s egy kevéssé elmosódott, nem eléggé tisztán látható határokat képez. Ezért ezen műszertől csak csekély pontosságot lehet várni.

3) Jobb eredményt lehet reményleni, ha az üvegcsövek helyett négyszögü bádog csövek alkalmaztatnak, s ezekbe a víz szinén uszó koczkák helyeztetnek, melyeknek felső lapjokon a csőből kiálló nézgék vannak megerősítve. Ha ezek ugy vannak csinálva, hogy a nézgék a víz felületétől egyenlő magasságban állanak : akkor az irányvonal a víz szinével párhuzamos fog lenni. A nézgék kettős iránysíkkal vannak fölszerelve, ugy hogy azokon előre is, hátra is lehet irányozni; de ezeknek össze kell esni, vagy legalább egymáshoz igen közel és párhuzamosan kell állani. A műszert szabad szemmel közel vizszintes fekvésben kell felállítni, hogy az úszók szabadon mozoghassanak. Ilyen műszerek elefántcsont úszóval higanyra készitve Németországban igen el vannak terjedve és egyszerűbb esetekben kielégitő eredménynyel használtathatnak.

333. §. Ingás lejtmérők.

1) Mielőtt a művészek a szintezőket azon pontossággal tudták készítni, minővel azok mai nap kiállíttatnak, a távcső vizszintessé tételére az inga használtatott, mely magától a mérnök hozzájárulta nélkül teljesítette azt, a mit a szintezővel csak hoszszasabb és folytonos figyelmet igenylő beállítás után lehet elérni. De ezen műszerek ma már elévültek részint azért, mert az inga a legkisebb léghuzamot vagy rázkodást is megérezvén, igen könynyen mozgásba jön, s ezáltal az irányzást nehezíti; részint azért,

mert ezen műszerek csak csekély pontosságot szolgáltatnak. Ma már csak kisebbszerű műszerek készíttetnek ezen elv szerint, melyektől tehát nagy pontosságot nem követelünk. Ezek közé tartoznak:

2) A Mayer-féle lejtmérő. (330. ábra). Ennek kerek, függélyes állású tányérja van, mely egy pálcza alakú állványon kettős csuklón van felfüggesztve, s önsúlya által függélyes állásba helyezkedik. A tányér középpontjában vizszintes tengely körül az Alhidade foroghat, melyen egy távcső van a tányér síkjával párhuzamos fekvésben megerősítve. A tányér karimája be van osztva, s az osztályrészek a lejtőt $^0/_0$-ban szolgáltatják.

3) A kézi inga-lejtmérő. Ez áll egy vizszintes, ék alakú tengely körül ingó nézgecsőből (331. ábra), melynek alsó részéből egy nehéz kar nyúlik le. Az egész egy tágas tokban van helyezve, melyet szabad kézben úgy kell tartani, hogy az ék alakú tengely lehetőleg vizszintes fekvést nyerjen. Ha a szabadon ingó távcső nyugalomba jön, az irányvonal a vizszintes vonalat tűzi ki. Ezen műszerek előleges méréseknél, kémszemléknél (Recognoscirung), s ott, hol a mérnök különben a szemmértékre volna utalva, mint könnyen hordozható műszerek, hasznos szolgálatot tehetnek.

334. §. Szintezős lejtmérők.

1) Sokkal nagyobb fontossággal birnak azon lejtmérők, melyekben az irányvonal egy szintező által tétetik vizszintessé. Ezek a tudomány zsenge korában csak a lejtmérésre okvetetlen szükséges alkotórészekkel, és mozoghatósággal voltak felruházva; később azonban azokon kivül még más, részint vizszintes, részint magasságmérési czélra megkivántató szervekkel is láttattak el. Különösen pedig a kiigazítás kényelmesebb eszközlése végett, sajátságos szerkezetek alkalmaztattak, minők p. o. a távcsőnek, vagy szintezőnek, vagy mindkettőnek ágyában való megfordíthatósága.

2) Minden szintezős lejtmérőnek el kell látva lenni egy irányzóval s egy szintezővel, melyek egymással szilárd összeköttetésben állanak. A szintezőnek egyik végén igazító csavarkával kell felszerelve lennie, hogy ha az irányzó vizszintes fekvésbe hozatott, a buborékot a cső közepére, mint annak legtermészetesebb és legbiztosabb helyére, be lehessen állítni. Ezen két,

egymással összekapcsolt rész rendesen egy vizszintes fekvésű tengely körül mozoghatósággal bír, s egy finom csavar által, mely a műszer alsó részéből kinyuló karra van helyezve, gyengéd mozgásba hozható, hogy ez által a szintező buborékját középre be lehessen állítni. Végre az egész készüléknek egy függélyes tengely körül vizszintes irányban foroghatónak kell lenni, hogy az irányvonalat a horizonnak akármelyik pontja felé lehessen igazítni. Ezen feltételeknek legegyszerűbben eleget teszen a

3) Vega lejtmérőnézgéje, melynek szerkezete a 332. ábrából könnyen megérthető. Ezen műszeren mind a függélyes (*A*), mind a vizszintes tengely (*B*) fekvését csak szemmérték szerint lehet előállítni. Finom mozgás, a parány és igazítócsavarok kivételével, a műszeren hiányzik.

4) Egy kissé tökéletesebb ennél a Liesganig-féle lejtmérő (333. ábra). Ezen már a vizszintes tengely (*B*) helyreállítására egy végtelen csavar *a* van alkalmazva, mely egy fogas sectornak *b* fogai közé vág, s a beállítás helyes voltának megismerésére egy kis szintező *c* szolgál, mely a *B* tengelylyel párhuzamosan van helyezve. Ha ezen szintező az *a* végtelen csavar által beállíttatik, az irányszál is vizszintes fekvésbe jön. A műszert a vizszintes síkban finomul egy kevéssé (mintegy 5⁰-al) oldalt is lehet mozdítni egy másik végtelen csavar *e* által, mely a műszer *C* karjának két végén bemetszett fogak közé hat, de azokból ki is emelhető, úgy hogy a távcsőt a *g* tengely körül 180⁰-al is lehet fordítni, a nélkül, hogy a finom mozgás ez által legkisebb hiányt szenvedne. De azt 180⁰-tól igen különböző szög alatt fordítni nem lehet, mert akkor a parány csavar a szintezőre nem hatván, ezt be sem lehetne állítni. Ezen esetben az egész műszert az állványcsap körül lehet csak fordítni, mint a Vega lejtmérőnézgéjét.

4) Még tökéletesebb a Stampfer lejtmérőnézgéje és zseblejtmérője (334. ábra). Ezeknek már egy kis limbusok van, melynek vizszintessé tételére vagy egy dió, vagy ennek alsó, prisma alakú folytatványaira oldalt ható 4 csavarka *a*, *a* szolgál. A távcső az elsőbbnél nem nagyít, minthogy annak mind tárgy-, mind szemlencséje egyenlő gyútávú; a távcsővel tehát előre is, hátra is lehet irányozni, a zseb-lejtmérőnél pedig a távcső 5—6-szor nagyít.

5) Némely gépészektől, mint Breithaupt és mások, igen gyakran találunk kisebb lejtmérő műszereket paránycsavar nélkül. Ezek a Theodolit mintájára három csavarlábon állanak, s a szintező épen úgy, mint a Theodolitnál, ezen lábcsavarok által állíttatik középre. De hogy ezeknek kezelése sokkal nehezebb és időrablóbb, mint azon műszereké, melyekben a paránycsavar közvetlen a szintező vége alatt van helyezve, bizonyára mindenki el fogja ösmerni, a ki valaha egy Theodolitot szintezett, és meggondolja, hogy a lejtmérésnek pontossága különösen a szintezőnek tökéletes beállitásától feltételeztetik; a szintező pedig részint a földnek a mérnök lábai alatt való süppedése, részint a napsugároknak az állvány lábaira való hatása, s a szélnek a műszerre való nyomása következtében középről mindig ki ki mozdúl. Kétséget sem szenved, hogy sokkal könnyebb egy irányvonalat az irányzás pillanatában a szintezővel, mely közvetlen a szintező végére hat, vizszintessé tenni, mint egy egész síkot, melynek beállitására szolgáló csavarok többnyire nem is esnek a libella irányába, s csak combinált csavarmozgatás által lehet a buborék elmozdulását elenyésztetni. Ezért ezen szerkezet ajánlatosnak nem mondható.

6) Azon műszereknél, melyeken a függélyes tengelyt A csak szabad szemmel lehet beállítni (335. ábra), egy kis hiba ered a mérésben akkor, midőn a nevezett tengely a függélyes iránytól elhajlik, s a vizszintes tengely B, A-tól oldalt nagyobb távban fekszik. A B tengely ugyanis a műszernek az A tengely körüli forgatása közben emelkedik vagy sülyed, s ezen emelkedés legnagyobb értéke igen közel $= d\alpha$, ha d a B által leirt kör átmérőjét, α pedig az A tengelynek a függélyestőli elhajlását jelenti, mely egyszersmind ezen kör síkjának legnagyobb hajlásszögével egyenlő. Minthogy pedig az irányvonalat mindig vizszintesre kell beállítni, s ennek távolsága a B tengelytől állandó marad: az iránysíknak is emelkedni, vagy sülyedni kell a szerint, a mint a műszer az A tengely körül forgattatik. Ezen hiba annál nagyobb, mennél nagyobb d, és α. Legyen p. o. $d = 5''$, $\alpha = arc\ 2^0 = 0{\cdot}035$, akkor a legnagyobb hiba $4'''$-at meghalad, tehát már el nem hanyagolható. Ellenben ha α csak $= arc 2'$, akkor a hiba 60-szor kisebb, tehát még egészen figyelem nélkül hagyható. Ha tehát a lejtmérést ezen hibától mentté

akarjuk tenni, a műszert úgy kell szerkeszteni, hogy abban vagy *d*, vagy *α*, vagy — a mi legbiztosabb — mind a kettő 0 legyen. Ez okból a tökéletesebb lejtmérő műszereken az *A* tengely függélyessé tételére csavarok vannak alkalmazva, melyek vagy a Theodolit, vagy a mérő asztalfő mintája szerint vannak berendezve, s ezeknek segítségével az *A* tengelyt ha nem tökéletesen, — mivel a csavarok rendesen igen durva lépésüek — de oly közel függélyes állásba lehet hozni, hogy ha *d*, 5—6″-et meghaladna is, ebből az iránysíkra nézve még káros emelkedés nem következnék.

335. §.

A tökéletesebb lejtmérő műszerek kivétel nélkül vizszintes limbussal vannak felszerelve, hogy azok által vizszintes szögeket is lehessen mérni, vagy kitűzni, s többnyire magasságmérő készülékkel vannak ellátva, mely vagy egy magassági ívből áll, vagy pedig a paránycsavar van e czélból beosztással ellátva, hogy annak mozgását, s ebből az irányvonal emelkedését meg lehessen mérni. Ezek közt legnevezetesebbek:

1) A Stampfer-féle kis lejtmérő (336. ábra). Ennek szerkezete a zseblejtmérőétől keveset különbözik. A *B* tengely egy ágas ágain keresztül menő csavarok hegyei által képeztetik, melyek a távcső oldalain fúrt lyukacskákba hatnak, ennélfogva a nevezett *B* tengely az irányvonallal egyenlő magasságban van, s a szintező a távcsőn szilárd fekvésben van megerősítve. A vizszintes kör 2 pár emelő csavaron nyugszik, s ezek által tétetik vizszintessé. A paránycsavar karimája 100 részre van beosztva, s a csavar 40—42 forgással bír, melyeket az *m* scalán lehet leolvasni. A távcsőnek a magassági irányban durva mozgása nincsen, s a magassági szög, melyet ezen műszerrel meg lehet mérni, 8—10 fokra terjed.

2) A Stampfer-féle nagy lejtmérő (337. ábra). Az előbbitől abban különbözik, hogy a távcsőt ágyából ki lehet emelni, s megfordítva lehet visszahelyezni, a szintező pedig a távcső ágyai közt szilárdul meg van erősítve. A *B* tengely külpontos, s az irányvonal alatt $2^1/_2$″ távolságban fekszik. Ezen külpontosság heves megtámadásoknak volt kitéve, s abban a magasságmérésnek tetemes hibaforrását vélték felfedezni; de a mint én »Poggendorf Annalen« CXXX-ik kötetében megmutat-

tam, ezen hibaforrásból sem a lejt-, sem a távmérésre jelentékeny hiba nem hárulhat. A limbus szintezésére két csavar és két átalellenes rugó szolgál.

3) Némely lejtmérőknél a szintező a távcső alsó oldalán szilárd állásban van megerősítve (338. ábra), úgy hogy az a távcsővel egy testet képez, s azzal együtt megfordíttatik.

4) Másoknál a szintező cső, mint az előbbinél, szintén a távcsővön van megerősítve, de tok nélkül; az üvegcső belől öblösre van kiköszörülve úgy, hogy annak minden irányban gondolt hosszmetszete összevágó, egymásfelé forduló ívmetszeteket ábrázol. Ezen elrendezésnél a távcsőt ágyából kiemelni nem szükséges, csupán csak tengelye körül kell azt fordítni úgy, hogy a szintező egyszer a távcső alá, máskor a távcső fölé kerekedjék; mint azt a kiigazítás előadásánál tüzetesen fogjuk látni.

5) A Kraft-féle lejtmérő (339. ábra) egészen az Astrolabium mintájára van készítve, rövid vizszintes B csappal, magasságmérő ívvel, egy Noniussal, melyen csak egyes perczeket lehet leolvasni. Mind a távcsőt, melynek irányvonala külpontosan $1^1/_2''$-el van a B tengely felett, mind a szintezőt, mely a távcsőre helyeztetik, ki lehet ágyából venni, és megfordítva tenni vissza helyére. A műszernek mind vizszintes, mind a függélyes síkban durva és finom mozgása van.

6) A Breithaupt-féle nagy lejtmérő (340. ábra) egészen a Theodolit mintája szerint van készítve, hosszu B tengelylyel, melyet ágyából ki lehet emelni, és megfordítva visszahelyezni. Ezen a tengelyen a távcsővön kivül még két átalellenben fekvő magasságmérő ív van megerősítve két Noniussal ellátva, melyeken $10''$-et lehet leolvasni. A paránycsavar a B tengelyből lefelé nyuló kar végén van helyezve s annak feje be van osztva, melynek segítségével a magassági szögben egyes másodperczeket le lehet olvasni. Mind a vizszintes, mind a függélyes irányban durva és finom mozgással bír.

7) Az Ertl-féle lejtmérő szerkezete is (341. ábra) a Theodolitéra emlékeztet. Ennek B tengelye szintén hosszú, de ágyából ki nem vehető. Ezzel egy teknő C van összeköttetve, mely a távcsőnek ágyúl szolgál. A távcsőt ágyából ki lehet venni, és megfordítva tenni vissza, a szintező pedig a távcsőre tétetik fel, s szintén megfordítható. A B tengely végén egy

magasságmérő ív van megerősítve, s egy Noniussal ellátva, melyen 1′-et lehet leolvasni. Mind a vizszintes, mind a függélyes irányban durva és finom mozgással van ellátva.

336. §. Lejtmérő léczek.

1) A magassági méretek meghatározására szolgálnak a lejtmérő léczek. Ezek rendesen 7′, vagy $1^0 \cdot 2$ hosszú, $1^1/_2$″ széles, 1″ vastag rudak, melyeket össze lehet egymással kapcsolni, hogy 2^0-nél nagyobb magasságot is meg lehessen velök mérni; egész hosszukban hüvelykekre vagy $^1/_{100}$ ölekre, az uj mérték szerint centiméterekre vannak beosztva és számozva. Ezen léczekre az irányzás könnyítése végett, egy 8″ magas, és 10″ széles, hátul négyszögű tokkal ellátott tábla tolatik; ennek közepén egy lyuk van kimetszve, hogy a rúd beosztását látni lehessen, s a tábla közepének — melyre az irányzást intézni kell — megfelelő pont egy mutató vonással van megjelölve, kapcsolatban egy Noniussal, melynek segítségével egyes vonalakat vagy $^1/_{1000}$ öleket, illetőleg millimétereket le lehet olvasni.

2) A táblán a czélpontot, melyre az irányszálat kell beállítni, különböző módon szokták megjelölni, melyeket a 342. tábla *a*, *b*, *c*, *d* ábrái mutatnak. Ezekben a vonalzott rész veresre, a világos pedig fehérre van festve, hogy a táblát nagyobb távra lehessen látni.

Az *a* tábla a legkevésbbé czélszerű, noha azon a középpont a leghatározottabban látszik megjelölve lenni; de nagy távban az irányszál a veres és fehér közötti határvonalat elfedvén, a mérnök az egész tábla felezésére van utalva, azaz: csak az által képes az irányszálat a tábla közepére beállítni, hogy a táblának az irányszál felett és alatt látszó részei egyenlőségét megbecsüli, mi a tábla tetemes magassága miatt jókora bizonytalanságnak van kitéve. Legyen p. o. a tábla szélessége 8″; ez 100 ölre, szabad szemben 23, egy 20-szor nagyító távcsőben pedig 460 másodpercz alatt látszik; s ha a távcső irányszála 10 másodperczet eltakar, marad még 450 másodpercz, melyet két egyenlő részre kell osztani. Tegyük fel, hogy a felezésben csak $^1/_{100}$ részt hibázunk, ez már 4·2 másodperczet teszen, holott a távcsőben már $^1/_2$ másodperczet látni lehet. Az sem segít semmit, ha a felezést az által akarnók biztosítni, hogy a táblát addig toljuk fel vagy le, mig a fehér és veres közötti határvonal az irányszál mögött elő kezd tűnni; mert akkor a hiba a szál által eltakart szög felét meghaladja, mely szintén 4—5 másodperczet teszen. Ezt könnyen lehet észlelni, ha a tábla többször említett közép vonalát előbb az irányszál alsó, azután annak felső szélére állitjuk, s a Noniust mindkét ízben leolvassuk; a különbség a hiba kettős értékét fogja szolgáltatni.

A *b* tábla már czélszerűbb. Ebben a fehér csík középen 1″ széles; ezt tehát mindaddig, mig az irányszál el nem födi, 8—10 szer nagyobb pontossággal lehet felezni, mint az előbbit; de ha azt az irányszál eltakarja: akkor az előbbivel egyenlő nehézség merül fel.

A *c* tábla a *b*-től csak abban különbözik, hogy a fehér csík középső része keskenyebb, mint a széleken; tehát kis távra a felezést még biztosabban lehet teljesítni, mint a szélesebb csíkon.

Legczélszerűbb a *d* tábla, melyet Stampfer hozott be a gyakorlatba. Ebben a fehér és vörös mezők a középpontban összeszögellő czikkeket képeznek, melyeknek 80°-ot meghaladó szögét az irányszállal igen könnyen lehet felezni, akármilyen nagy részt takar is el az irányszál.

3) A nálunk szokásos lejtmérő léczeket a 343. ábra mutatja. Ezeknél a két rúd *a*, *b* egymás mellett van, két kengyellel *c*, *d* összetartva és egy szoritó csavarral *e* összeszorítva. Az *a* rúd alulról felfelé 0-tól 7′-ig vagy 1·°2-ig, az uj mérték szerint 2·3 méterig, s az első hüvelyk még vonalakra $^1/_{1000}$ ölekre, illetőleg millimèterekre van beosztva, melyek a *b* rúd beosztásánál Nonius szerepet játszanak. A *b* rúd számozása alul ott kezdődik, hol az *a* rúdé felül végződött. Ha tehát a céltábla középpontja, illetőleg annak Noniusának 0 pontja az *a* rúd legfelsőbb vonására beállittatik, s az *a* rúd *b* mellett felemeltetik : az *a* rúd alsó lapja által a *b* rúdon elmetszett leolvasás a céltáblának a *b* rúd alsó lapjától mért magasságát szolgáltatja. Ha pedig az *a* rúd vége nem egészen egy vonásra esnék : akkor a még hátra lévő s az *a* rúd végeig érő hézagot az első hüvelyk beosztásán lehet leolvasni. Ezen szerkezetü rudaknak azon hátrányuk van, hogy a céltáblát a kettős rúdon letolni nem lehet, mert az a *c* kengyelen fennakad. Ha tehát a magasság az *a* rúd hosszánál kisebb : a rudakat szét kell szedni; ha pedig nagyobb : akkor azokat ujra össze kell állítni.

4) Ezen hiányon segítve van a 344. ábrában látható szer-

kezet által, melynél a rudak egymás mögött fecskefark alakú rovatékban vannak egymásba illesztve, s az *e* csavar által minden állásban összeszoríthatók. A tábla tokja két darabból áll, *k*, *k*; melyek közé a fecskefark alakú rész benyúlik, mint az a keresztmetszésből tisztán látszik. Ezen szerkezetnél a táblát egész az *a* rúd alsó végéig lehet letolni, anélkül, hogy azt a *b* rúd akadályozná. A rúd felső végén pedig egy kiálló lemezecske *m* van megerősítve, melyen a tábla tokja fennakad, midőn annak Noniusa az *a* rúd legfelsőbb vonását elérte. Ha tehát a táblának még feljebb kell mozdulni, az egész *a* rudat kell a *b* rúd mellett felfelé tolni, s az *a* rúd első hüvelykén lévő Noniuson a méretet leolvasni, mint az az előbbi számban előadatott.

5) Némely vidékeken egy, két öl hosszu rúd mindkét végén csigák vannak alkalmazva (345. ábra), melynek rovatékába egy, két végével a czéltábla alsó és felső széléhez kötött feszes zsinór van helyezve. Ezen zsinórt meghúzván, a táblát fel és le egyformán mozgásba lehet hozni. A leolvasás a tábla tokján hátul vagy oldalt lévő Nonius által eszközöltetik.

6) Ujabb időben czéltábla nélküli rudak is gyakran használtatnak közvetlen egyes hüvelykekre, vagy $^1/_{100}$ rész ölekre, az uj mérték szerint centiméterekre való beosztással. Ezen rudak szélessége 3″, hogy a számokat kellő nagyságban rájok lehessen irni. A hüvelyknél apróbb méreteket becslés által kell leolvasni; noha némelyek még a hüvelyknek apróbb részekre való beosztása által is igyekeztek a becslés hiányain segítni. De ezen apróbb beosztás nagyobb távra egészen összefolyván, csekély hasznot hoz. Legczélszerűbb az egyes hüvelykeket 1‴ vastagságu vonások által jelölni meg; ezeket 15—20-szor nagyító távcsővel 130°re még szépen lehet látni. A számoknak 2″ magasságot lehet adni s minden czikornya nélkül egyforma vastagságu vonásokkal kell irva lenni.

337. §. Felállitás.

1) Azon lejtmérő műszerek, melyeken a limbus hiányzik, a lejtmérésre kellő módon elő vannak készitve, ha azoknak (*A*) tengelye az állvány lábai által szabadszemmel függélyessé tétetett, s a szintezőkben a buborék az illető csavarok által középre beállittatott.

2) Ha a műszernek limbusa van: akkor ezt vizszintessé kell

tenni, hogy az (A) tengely függélyes állásba jőjjön. Erre nézve mindenek előtt a szintező érintőjét a cső középpontjában párhuzamossá kell tenni a limbus síkjával. Ezen állapot a parány-csavarnak bizonyos állása által feltételeztetik, s mindjárt megváltozik, mihelyt a paránycsavar forgattatik. Ennek előállitása végett forditsuk az Alhidadét ugy, hogy a szintező egy lábcsavar irányába essék, s a szintezőt ezen lábcsavar által középre állitván, fordítsuk az Alhidadét 180⁰-al tengelye körül; ha a szintező buborékja helyéből kimozdul, a különbség a parallelismus elleni kettős hibát fogja mutatni, s azt félig a parány-, félig a lábcsavar által kell elhárítni. Ezen felezést a legtöbb esetben csak szabad szemmel lehet végrehajtani, ennélfogva a műtételt egy párszor ismételni kell, mig a megforditás után a szintezőben semmi különbség sem mutatkozik. De olyan műszereknél, melyeknek paránycsavarja be van osztva, mint a Stampferé, ezen felezésre a csavar beosztását lehet felhasználni olyaténképen, hogy a szintezőt az első fekvésben a lábcsavarral beállitván, a paránycsavar állását leolvassuk; azután az Alhidadét 180⁰-al megforditván, a szintező buborékját a paránycsavarral ujra beállitjuk, s annak állását leolvassuk. Ekkor a két leolvasás közötti számtani közép fogja a csavar azon állását szolgáltatni, melynél a szintező a limbus síkjával párhuzamos fekvéssel bir. Ezen számot Stampfer »Anleitung zum Nivelliren« czimű munkácskájában M-el jelöli, és az minden Stampfer-féle műszernél már a gépész által meghatározva a műszer szekrényébe ragasztott kezelési utasitáson fel van jegyezve. Az Alhidade megforditása végett czélszerű a limbus beosztását felhasználni. A parallelismus ekképen helyre lévén állitva, a limbust épen ugy, mint a Theodolitot, vagy a mérőasztalt vizszintessé lehet tenni.

3) De azon műszerekben, melyek paránycsavarral vannak felszerelve, melylyel tehát a szintezőt minden egyes irányzásnál egész szigorral be lehet állítni, a limbus vizszintessége ellen 20—30 másodperczny hibát is el lehet nézni; mert ezen hiba egyrészről a távcső irányvonalának emelkedésére még észrevehető befolyást nem gyakorol (lásd 334. §.); más részről pedig a vizszintes irányszál fekvésére sem hat oly ártalmasan, hogy abból a magassági méretre jelentékeny hiba keletkeznék. Ugyanis legyen a 346. ábrában AB a limbussal párhuzamos fekvésü szál, mely

a CD vizszinteshez ω szög alatt hajlik; ha a céltáblát a szálak metszéspontjától oldalt $ob = r$ távban állitjuk be a szálra, a beállitási hiba $ba = h$ a diaphragma síkjában lesz:

$$h = r\omega.$$

Nevezzük a tárgynak megfelelő részét H-nak, annak távját T, a kép távját a távcső láttani középpontjától t-nek; akkor a 72. §. szerint:

$$H : h = T : t,$$

tehát a hiba a magassági méretben lesz:

$$H = h\frac{T}{t} = \frac{Tr\omega}{t}.$$

Legyen p. o. $T = 150^0$, $r = 0{\cdot}1''$, $t = 15''$, $\omega = arc\ 1' = 0{\cdot}0003$, akkor H még csak $0{\cdot}^00003$; tehát egészen elhanyagolható. Másként áll a dolog azon műszerekre nézve, melyeken a paránycsavar hiányzik. Ezeknél a szintezőt csak a lábcsavarok által lehet beállítni, s a buborék csak akkor marad az Alhidade forgatása közben mozdulatlan, ha a forgási tengely függélyes. Ezt tehát a legnagyobb szigorral kell beállítni.

4) Ha a 2) szerint a paránycsavar azon állása meghatároztatott, melynél a szintező érintője a limbus síkjával párhuzamos: czélszerű azt valamely módon megjelölni, hogy azt minden állomáson újra keresni ne kelljen. Ezt különböző módon lehet eszközölni. A Stampfer zseblejtmérőjén ezen állásban egy peczkecske n érinteni látszik az alatta lévő lemezt, mely a peczek irányában át van fúrva, hogy az a csavarforgást ne akadályozza. A nagyobb Stampfer-féle mintákon a paránycsavar állását annak beosztásán le lehet olvasni, s a nyert számot, melyet Stampfer M-nek nevez, fel kell jegyezni. A magassági ívvel ellátott műszereken a Nonius állását kell leolvasni, s ha az 0^0-tól különböznék, a hibát ki kell javítni, vagy legalább feljegyezni. Az olyan műszereken pedig, melyeken sem beosztott csavar, sem magassági ív nincsen, lesz olyan alkotó rész, mely a szintezővel együttesen az állványhoz tartozó valamely mozdulatlan darab mellett mozog; ezeken keresztül egy vonást kell húzni, s jövőben, valahányszor a műszert fel akarjuk állítni, előbb a vonásokat egymásra kell állítni.

338. §. Rectificatio. I. Az irányszálnak a limbussal párhuzamossá tétele.

Az előbbi §-ban megemlittetett, hogy az irányszál a limbus síkjával párhuzamossá tétetik. Ez azon czélból történik, hogy a tárgy képét ne kellessen egész szigorúsággal mindenkor az irányszálak metszéspontjára beállítni, mi időveszteséggel jár; hanem szabad legyen azt a függélyes száltól oldalt is állítni a vizszintes szálra a nélkül, hogy ezen körülmény a rúdon leolvasott méretben változást okozna. Más szóval egy vizszintes irányvonal helyett egy vizszintes iránysíkot akarunk előállítni.

Az irányszálnak a limbussal való párhuzamosságát úgy lehet megvizsgálni, hogy a távcsőt valamely tisztán látható távol lévő tárgy felé fordítván, a vizszintes fekvésü szálat a parány-csavar által egész szigorral ráállítjuk. Ezután az Alhidadét jobbra balra fordítván, ha a tárgy mindig az irányszálon marad: akkor ez a forgási síkkal párhuzamos. Ellenkező esetben a hibát vagy az egész távcsőnek, vagy csak a szemcsőnek, néha pedig csak a diaphragma csövecskéjének oldalt fordítása által lehet elhárítni a szerint, a mint azt a távcső különböző szerkezete megkivánja.

Némely műszereken a távcsőnek azon állása, melyben a szál a limbus síkjával párhuzamos, egy érintkező csavar által meg van állapítva, mint a Stampferénál; másoknál pedig a távcsőt tengelye körül forgatni lehet, s a szál beállítását csak szabad szemmel lehet eszközölni; mint azt Kraft lejtmérőjénél látni lehet.

339. §. II. Az iránysíknak a szintező érintőjével párhuzamossá tétele.

A lejtmérő műszer fő tulajdonsága az, hogy a szintező vagy az inga megállapodásakor az irányvonal, vagy sík vizszintes fekvéssel bírjon. Ezen tulajdonságot így is lehet kifejezni, hogy az irányvonalnak a szintező érintőjével párhuzamos, vagy az inga függélyes vonalával merőleges fekvésben kell lenni. Ezen kelléket egész általánosságban többféleképen lehet megvizsgálni, és a mutatkozó hibát kijavítni.

I. mód. Választunk egy körülbelől vizszintes síkságon (347. ábra) a távcső erejéhez képest 20—100° hosszu vonalat *AB*, melynek végei kemény szilárd pontokkal vannak megjelölve, (szükség esetében karókat kell leverni a földbe). Azután a lejtmérő műszert az A pontban felállítván úgy, hogy a távcső szemlyuka az A pont felett függélyesen álljon, a szintezőt egész szigorral középre állítjuk, s irányozunk a B pontban felállított mérő léczre úgy, hogy a czéltábla középpontja a láttér közepe táján a vizszintes irányszálon álljon, s a léczen a Noniust leolvassuk. Legyen ezen leolvasás l. Ezután megmérjük a műszer irányvonala magasságát az A pont felett legegyszerűbben a szemlyuk közepétől az alatta függélyesen fekvő A pontig. Legyen ez i. Tegyük fel most, hogy az irányvonal a távcső közepén keresztül gondolt vizszintes felett x magasságban metszi a rudat, ha az A és B közötti esést E-nek nevezzük, ez a 307. §. szerint a valódi és vizszintes közötti különbség figyelembe vételével lesz:

$$E = l - x - f - i.$$

Ezen egyenletben két ösmeretlen lévén, u. m. E és x, szükség még ugyanazon mennyiségek közt egy második összefüggést keresni. E czélból megyünk a műszerrel a B pontba, a rúddal az A pontba, s ismételjük az A pontban tett méréseket; s ha a leolvasásokat egy vonással akarjuk az előbbiektől megkülönböztetni, tekintetbe vévén, hogy az esés az előbbivel egyenlő, de ellenkező értékű, x és f pedig a dolog természeténél fogva változatlan maradnak, következő egyenlethez jutunk:

$$-E = l' - x - f - i'.$$

Ezen két egyenletet összeadván, rövid összehúzás után lesz:

$$x = \frac{l + l'}{2} - \frac{i + i'}{2} - f.$$

Ha most $x = 0$-nak találtatik: akkor az irányvonal már vizszintes, ellenkező esetben a czéltáblát x-el kell eltolni, még pedig ha $x > 0$, lefelé; ha $x < 0$, felfelé. Ezáltal a czéltábla a távcső vizszintes síkjában — Horizon — foglal helyet, s a távcső irányvonalát a czéltáblára kell beállítni, hogy ez vizszintessé legyen. Ezen beállítás a műszerek különféle szerkezete szerint különböző módon történik. Az ingás műszereknél az inga szárán, csekélyebb hiba esetében az irányszál csavarkáin kell változtatni, míg a hiba egészen elenyészik. A paránycsavar nélküli műszereknél rendesen csak a távcső diaphragmájának csavarkáival lehet segítni. Azoknál végre, melyek paránycsavarral vannak ellátva, ezzel kell a távcsőt a czéltáblára beállítni, s minthogy ezen műtétel által a szintező buborékja is kimozdul helyéből, azt a szintező végén lévő correctio-csavarka által ujra középre kell állítni, mint azelőtt volt.

II. mód. A fentebbi két egyenletből kivonás által következő egyenletet lehet nyerni:

$$E = \frac{l - l'}{2} - \frac{i - i'}{2}.$$

Ezen egyenlet az A és B közötti esést szolgáltatja a műszer hibájától menten, s a kiigazításnak egy más módjára vezet. A B pontban felállított műszer távcsőjén keresztül gondolt vizszintes sík t. i. az A pontban álló mérőléczet $i' - E + f$ magasságban metszi. A céltáblát tehát ezen magasságra kell megerősítni; azután a távcső irányvonalát az előbbi számban előadott módok egyike szerint a céltáblára kell állítni. Ha a műszer az A pontban állíttatik fel: akkor a távcső vizszintese a B pontban lévő rudat $i + E + f$ magasságban metszi; különben az egész eljárás változatlan marad.

Ezen módot, mely ha egyszer az A és B közötti esés meg van határozva, a műszernek csak egyszeri felállítását igényli, előnyösen lehet használni, ha a mérnök állandóan a munka helyén tartózkodik, és AB ösmeretes szilárd pontokat ábrázolnak, melyeknek esése állandó marad.

III. mód. Lemérünk a mezőn (348. ábra) két egyenlő távot $AC = BC$, s a műszert a C pontban felállítván, s a szintezőt egész szigorúsággal beállítván, irányozunk a B és A pontokban felállított rudakra. Legyenek a rudakon leolvasott méretek l, l', akkor az A és B közötti esés lesz:

$$E = l - l',$$

még akkor is, ha az irányvonal nem vizszintes; mert a hiba, a két táv és a hajlásszögek egyenlő volta miatt mind a két oldalon egyenlő lévén, a különbségből egészen kiesik. Ezután a műszerrel az A pontra megyünk; itt azt felállítván, a műszernek az A pont feletti magasságát megmérjük, s a céltáblát a mérő léczen $i + E + f$-re állítván, a léczet a B pontban felállítjuk; végre az irányvonalat a céltáblára irányozzuk a szerint, a mint az a különböző műszerekre nézve a 2) alatt előadatott, s a szintező hibáját kijavítjuk.

4) Ezen rectificatio által a szintezőnek a limbushoz való fekvése is megváltozván, a 337. §-ban előadott műtételt ujra kell ismételni.

340. §. Ugyanaz, ha a távcsőt ágyából ki lehet venni.

Az előbbi §-ban előadott kiigazítási módok ugyan akárminő szerkezetű lejtmérő műszernél egyaránt alkalmazhatók, de két álláspontban való felállítást, s többféle műtételeket vévén igénybe, az eljárást igen fárasztóvá és nehézkessé teszik. Ezen munka tetemesen egyszerűbbé lesz, ha a távcsövet ágyából ki lehet venni, és megfordítva lehet visszatenni. Ekkor ugyanis a távcső mértani tengelyének a szintezővel való párhuzamosságát egy álláspontból lehet megvizsgálni, s csak a távcső irányvonalát kell még annak mértani tengelyével párhuzamossá tenni, hogy a szintező beállitásából az irányvonal vizszintességére is következtetni lehessen. Ezen műszereknél tehát mindenekelőtt a távcső irányvonalát annak mértani tengelyével, azután a távcső mértani tengelyét a szintező középpontjának érintőjével párhuzamossá kell tenni. Az irányvonal helyett iránysíkot is lehet érteni, mint az a 338. §-ban eléggé indokolva volt.

1) Az első pontra nézve: irányozzuk a távcsőt valamely távol lévő tisztán látható tárgyra; állítsuk be a vizszintes szálat az emelő vagy a paránycsavar által annak valamely pontjára, és forgassuk a távcsövet tengelye körül 180 fokkal. Ha a szál a tárgyon marad: akkor az iránysík a távcső forgástengelyével már párhuzamos; ellenkező esetben az eltérés a kettős hibát mutatja, melyet a diaphragma csavarkáival kell felezni. Hasonlóképen lehet a függélyes szálat is kiigazítni, noha az szorosan véve nem is szükséges.

A Breithaupt-féle lejtmérő műszernél a távcsőt forgatni nem lehet, de annak tengelyét ágyaiból ki lehet emelni, és annak végeit felcserélve lehet visszatenni az ágyakba. Az eredmény ugyanaz. A vizszintes szál mind a két esetben megfordíttatik úgy, hogy annak végei helyet cserélnek, azon különbséggel, hogy míg az előbbi műszereken a távcső forgatása közben annak mértani, egyszersmind forgástengelye változatlan marad, a Breithaupt-féle műszernél a távcső mértani tengelye a megfordítás után a forgástengelyre merőleges síkban akárminő állásba jöhet, s csak a szintező beállitása által hozatik bizonyos állandó fekvésbe. A szintezőt tehát mind a két izben középre be kell állítni, s az irányvonal eltérését, mely a kettős hibát ábrázolja, a diaphragma csavarkáival szintén felezni kell.

2) A második pontra nézve az eljárás a műszerek szerkezetének különbféleségе szerint különböző; nevezetesen:

a) Azon műszereknél, melyeken a szintező vagy a távcsővel van szilárd kapcsolatban, tehát a távcsővel együtt mozdul ki helyéből, vagy pedig a távcső ágyával van összekötve, s a távcső kiemelése közben helyét nem változtatja, válasszunk a mezőn egy 100—120^0 hosszú, körülbelől viszintes vonalat, állítsuk a műszert annak egyik végpontjában, a másikban pedig a mérő léczet, és a szintezőt egész szigorúsággal középre állítván, irányozzuk a czéltáblát a vizszintes szálra. Ezután a távcsőt ágyából kivévén, annak két végét egymással felcserélve fektessük ismét az ágyakba. Czélszerű a távcsőt mértani tengelye körül is fordítni 180^0-al, ekkor az előbbi pont alatti kijavitásban hátramaradt valamely csekély hiba a végeredményből kiesik. Ezután fordítsuk az Alhidadét szintén 180^0-al tengelye körül, hogy a távcső ismét a czéltábla felé nézzen, és állítsuk be a szintezőt újra egész szigorúsággal a középre. Ha az irányszál ismét a czéltáblán áll: akkor az irányvonal a szintező érintőjével párhuzamos, tehát vizszintes; ha pedig attól eltér: az eltérés a kettős hibát mutatja. Mert feltévén, hogy az irányvonal a szintezőtől felfelé megyen, az a megfordítás után ugyanazon szög alatt, de az ellenkező irányban, azaz: lefelé fog mutatni, s az Alhidade megfordítása után a rudat épen annyival fogja a vizszintes alatt metszeni, a mennyivel azt az első ízben felül metszette. Ezen esetben tehát a hibát felezni kell. Czélszerű e végett a czéltáblát mind a két izben az iránysíkba beállítni, s a rúd magasságát leolvasni. Legyenek a leolvasások l, l', akkor a távcsőn keresztül gondolt vizszintes a rudat $\frac{l+l'}{2}$ magasságban fogja metszeni. A czéltáblát tehát ezen magasságra kell beállítni, s a távcsőt a paránycsavar által a czéltáblára irányozván, a szintezőt, annak correctio-csavarkája által ujra középre állítni.

b) Ha a szintezőt is ki lehet ágyából venni, és megforditva tenni fel a távcsőre: akkor csak a szintező lábainak hosszát kell egyenlővé tenni épen ugy, mint azt a Theodolitnál láttuk. E végre a szintező buborékját középre be kell állítni, azután a szintezőt megfordítni; ha a buborék előbbi helyében állapodik meg, a műszer hibátlan. Ha pedig az helyéből kimozdul: akkor a hibát a szintező corectiocsavarkájával felezni kell, s a munkát egypárszor ismételni, mig a hiba egészen elenyészik. Ezen munkát tehát a szobában is végre lehet hajtani.

3) A 2-ik szám alatt előadott eljárás feltételezi, hogy a távcső gyűrűi, melyekkel az az ágyakban nyugszik, egyenlő átmérőjüek. Mert a megforditás által tulajdonképen csak a gyűrűknek azon vonala tétetik a szintező érintőjével párhuzamossá, azaz vizszintessé, mely az ágyakat érinti. Ez rendesen a gyűrűknek legalacsonyabb pontjait összekötő vonal szokott lenni, (noha némely műszereknél ezen érintkezési pontok 60°-al oldalt esnek a legalsóbb ponttól); ebből tehát a gyűrűk középpontjait összekötő vonalnak, mely a távcső mértani tengelyét ábrázolja s melylyel már az irányvonal párhuzamossá tétetett, vizszintessége csak akkor következik, ha azoknak átmérői egyenlők. Ha tehát a műszer ezen feltételnek eleget nem tesz: a kiigazitásban egy állandó hiba fog maradni, melyet nem fogunk észrevenni, mert az irányvonal mind a két izben ugyanazon darabbal mutatván hibásan a rúdon, a hiba a számtani középben is bennmarad. Ezen hiba a gyűrűk sugárai nagyságától és azoknak egymástóli távjától függ, s a 146-dik §-ban kifejtett módon, melyhez egészen hasonló, meghatározható. Legyenek a gyűrűk sugárai r, r', azoknak távja d, az érintkezési ponthoz húzott sugárnak a függélyestőli elhajlása φ, s a keletkező hiba δ, akkor:

$$\delta = \frac{r - r'}{d \cos\varphi},$$

d . . . 6″-nál ritkán nagyobb, φ Stampfernál = 60°; ezen adatokkal, ha $r - r' = 0{\cdot}''0001$ volna is, a rectificatioban hátramaradt hiba 3·5 másodperczet meghaladna, melyet már elhanyagolni nem lehet.

4) A gyűrűk egyenlősége szükségtelen, ha a műszer szintezője a 335. §. 4. szám szerint van készitve. Ekkor ugyanis a szintező lábai valóban a távcső mértani tengelyéig érnek, s ha azok egymással egyenlők, azaz, a szintező érintője a távcső tengelyével párhuzamos: az fog maradni azután is, ha a távcső tengelye körül 180°-al forgattatott. A buborék tehát nem fog helyéből kimozdulni. Ellenben ha a párhuzamosság hiányzik, a szintező buborékjának kimozdulása a párhuzamosság elleni hiba kettős értékét fogja mutatni, melyet a szintező csavarkája által kell felezni.

341. §.

A lejtmérési hibák három fő kútfőből erednek, u. m. a rectificatio, a szintezés és irányzás tökéletlen voltából. Mind a háromnak algebrai kifejezése ugyanaz, t. i.

$$\triangle l = t\delta,$$

hol l a rúdon való leolvasást, $\triangle l$ az abban az észlelés által ejtett hibát, t a céltáblának a műszertől való távját, és δ az irányvonalnak a vizszintestől való eltérését jelenti.

1) A Rectificatio-hibát annyival nagyobb szigorral kell elháritni, mivel az állandóan hat; de pontosság által az olyan csekély mértékre leszállitható, hogy kellő óvatosság mellett az eredményre káros hatást nem gyakorolhat. Mind a mellett megmarad a műszerben a legszigorúbb kiigazitás után is a gyűrűk átmérőjének nem egyenlő voltából eredő hiba, minthogy az magát a kijavitás elől elvonja. A gyűrűk egyenlőségét tehát különösen kell megvizsgálni, következő módon:

a) Igazítsuk ki a műszert előbb a 340. §. szerint; azután keressük a kiigazitási hiba x értékét a 339. §. szerint; ez a gyűrűk egyenlőtlenségéből eredő hiba.

b) Állítsunk fel két távcsőt A és B a 315. §. szerint egymással szemközt és párhuzamosan, s a lejtmérő műszert távcsőjével együtt közéjök helyezvén, állítsuk be annak szálkeresztjét az Alhidade és paránycsavar mozgatása által az A szálkeresztjére. Ezután a lejtmérő távcsőjét ágyaiból kiemelvén, megfordítva tegyük vissza az ágyakba; ekkor a távcső szálkeresztjének a B távcső szálkeresztjén kell látszodni, az eltérés a δ hiba kettős értékét mutatván, mint azt könnyen meg lehet érteni.

c) Azon műszereknél, melyeknél mind a távcsőt, mind a szintezőt meg lehet fordítni, a gyűrűk átmérőjét a szintezővel lehet megvizsgálni. Állítsuk be t. i. a szintező buborékját középre, ezután fordítsuk meg mind a távcsőt, mind a szintezőt; ezen utóbbit azon czélból, hogy annak lábai hosszában hátramaradt hibácska az eredményből kiküszöböltessék. Ha a buborék az előbbi helyen jön nyugalomba: a gyűrűk átmérői egyenlők; ellenkező esetben a buborék elmozdulása a δ hiba négyszeres értékét fogja szolgáltatni. Legyen ugyanis (349. ábra) AB a szintező mindig vizszintes érintője; CD a távcsőnek azon vonala, melyen a szintező lábai nyugosznak, mely a szintező kiigazitása által szintén vizszintessé lett; EF a gyűrűk középpontjait összekötő vonal, melylyel az irányvonal párhuzamossá tétetett, GH a távcső ágyainak érintő vonala. Ezen utóbbi vonal minden műszernél gyakorlati okokból igen közel ugyanazon szög alatt hajlik EF-hez, mint a CD vonal, és a távcső megforditása által nem változik; holott a CD vonal a megfordítás által $C'D'$ fekvésbe megyen át. Legyen a CD és EF közötti szög $= \partial$, akkor az előbbi szerint a CD és GH közötti szög $= 2\delta$; tehát a $C'D'$ és GH közötti szög

$$\beta = 2 \,.\, (2\delta) = 4\delta.$$

Ezen tekintetből tehát a szintezőnek megfordithatósága igen becses tulajdonság, csak a lábaknak a szintező tokjával való összeköttetése elég szilárd legyen, hogy az változásoknak könnyen helyt ne adjon.

2) A szintező és irányzási hibák hatását egymástól elkülönítni nem szükséges, minthogy azok mindig együttesen lépnek fel és teljesen egyformán hatnak az eredményre. Ezen hatás ösmeretére juthatunk, ha az észlelést ismételjük, de minden leolvasás után mind a szintezőt, mind a céltáblát el kell mozdítni s ujra beállítni. A leolvasásokból nyert számtani közép az eredmény valószinű értékét, az egyes leolvasásoknak pedig a középtőli eltéréseiből tekintet nélkül a jelekre nyert számtani közép az átlagos hibát, mely a hiba közép értékétől igen keveset külömbözik, fogja szolgáltatni. P. o. legyenek a leolvasások:

1·329,
1·327,
1·330,
1·331,
1·329.

Ezeknek számtani közepe 1·3292.

Ebből az észleleteket levonván, a különbségek tekintet nélkül a jelekre, lesznek:

0·0002,
0·0022,
0·0008,
0·0018,
0·0002.

Ezeknek számtani közepe $\pm$ 0·0010, melyet mind $+$ mind $-$ jellel lehet venni, mivel az irányvonal épen úgy kelleténel feljebb, mint lejjebb mehet a vizszintesnél.

3) A helyesen készitett lejtmérő műszeren mind a szintező, mind az irányzó érzékenységének egyenlőnek kell lenni; mert az egyiknek nagyobb pontossága a másiknak csekélyebb érzékenysége miatt fel nem használható, hanem csak az észlelést nehezíti; a mennyiben a nagyobb pontosságot szolgáltató rész még olyan csekély hibácskákat is jelez, melyek már egészen a másik hiba határai közé esnek, melyeket tehát a mérnök legjobb akarat mellett sem képes elkerülni. Ha p. o. a szintező csak 3 másodpercz érzékenységgel bir, mig az irányzón már 1 másodperczet látni lehet, igyekezni fogunk már 1 másodpercz eltérést is kiigazítni, mert már az a távcsőben látszik; pedig azért az irány még a szintező miatt 3 másodperczczel hibás lehet. Az 1 másodpercz hibának eltávolitására fordított munka és idő tehát veszendőbe megyen.

4) A különböző lejtmérőműszerek által elérhető pontosságot Stampfer következő táblácskában foglalja össze.

A műszer	A távcső gyútávja	A távcső nagyitása	δ	Hány öl távra esik $\frac{1}{1000}$ öl hiba
Közlőcsöves lejtmérő . . .	—	—	$\frac{1}{2000}$	2º
Vega-féle nézgelejtmérő . .	—	—	$\frac{1}{15000}$	15
Stampfer-féle nézgelejtmérő .	—	—	$\frac{1}{20000}$	20
» zseblejtmérő .	4	6	$\frac{1}{60000}$	60
Liesganig-féle lejtmérő . .	22	10	$\frac{1}{70000}$	70
Stampfer-féle kis lejtmérő .	$8^1/_2$	12	$\frac{1}{100000}$	100
» nagy » .	13	25	$\frac{1}{200000}$	200

A 335. §-ban elősorolt többi műszereket is azoknak nagyságához képest a Stampfer-féle cathegoriába lehet sorozni.

342. §. Lejtmérési módok.

A lejtmérést közönséges műszerekkel kétféleképen lehet véghezvinni, u. m. a vonal végéből és annak közepéből.

I. A vonal végéből. 1) Állítsuk fel a lejtmérőműszert a már előre kikarózott vonalnak kezdőpontjában (0), (350. ábra) úgy, hogy a távcső szemlyuka a földön megjelölt pont felett függélyesen álljon, s a limbus síkját, vagy ha ez hiányoznék, az irányvonalat vizszintessé tévén, mérjünk le az irányzó szemlyukától a földön megjelölt pontig. Ezután forditsuk az irányzót a következő pontban függélyesen felállitott rúd felé. Ha az esés olyan nagy volna, hogy a vizszintes irányvonal az (1) pontban felállitott lécz felett vagy alatt menne el, vagy pedig az (1) pont olyan távol esnék (0)-tól, hogy a léczre kellő pontossággal irányozni nem lehetne: akkor a léczet egy közbenső ponton *a* kell felállítni. Ezután a szintezőt a paránymérő csavarral, ha az a műszeren létezik, vagy a lábcsavarokkal, ha a paránycsavar hiányzik, a legnagyobb szigorral középre állitván, a czéltáblát pontosan a vizszintes szálra kell beinteni. Czélszerű ezen intést nyugodt jelekkel, a kéznek, vagy nagyobb távra, egy zsebkendőnek fel- vagy lefelé tartása által vinni véghez, s azon pillanatban, midőn a czéltábla a vizszintes szálra jön, a jelt rögtön be kell húzni. Ha azután még egy kis eltérés mutatkoznék, az intést az előbbi módon ismételni kell. A segéd pedig, a mint a jelt megpillantja, a czéltáblát a léczen a jelzett irányban gyorsan fel- vagy lefelé tolja, mig a jel be nem huzatik; azután pedig csak lassan, mivel már csak kevés hiányzik, mig végre a jelt egészen behúzzák, s a leolvasásra intenek. Ekkor a táblát meg kell szorítni, és a Noniust leolvasván, a méretet egy jegyzőkönyvbe kell irni. A beirányzást legalább kétszer kell ismételni, hogy a munka jóságáról meggyőződést nyerhessünk, s ha a két leolvasás közötti különbség a műszer pontosságának megfelelő határok közé esik, a műszerrel tovább lehet menni.

A műszer következő álláspontja az *a* pont leend, melyen elébb a lécz állott, a lécz pedig a közelebbi pontra küldetik, s a munka az előbbi rendben folytattatik.

Hogy a föld görbülésének befolyását a lejtmérésbe be lehessen tudni, szükség a léczнek a műszer álláspontjától való távját vagy lánczczal, vagy legalább lépéssel megmérni, és azt a jegyzőkönyv illető rovatába feljegyezni.

2) Nevezzük a léczen leolvasott magasságot l, a műszer magasságát i, a földgörbülési correctiót f-nek, akkor az esés lesz:

$$E = l - i - f.$$

A jegyzőkönyv berendezését a következő schema mutatja:

A műszer állás-pontja	A rúd állás-pontja	Táv.	Műszer-magasság i	Magas-ság l	Correct. f	Javított magas-ság	Esés	
							egyenként	0 ponttól számítva
0	*a*	106°	0·°732	1·°325	0·°001	1·°324	0·°592	0·°592
a	1	98	0· 852	1· 257	0· 001	1· 256	0· 404	0· 996
1	2	90	0· 843	0· 126	0· 001	0· 125	—0· 718	0· 278
2	3	130	0· 802	2· 074	0· 002	2· 072	1· 270	1· 548
3	*b*	60	0· 787	0· 102	—	0· 102	—0· 685	0· 863
b	4	50	0· 803	0· 124	—	0· 124	—0· 679	0· 184
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.

Az utolsó rovat számai az egyes álláspontoknak a (0) ponttól számlált eséseit ábrázolják, s ezek az utolsóelőtti rovatban foglalt két-két pont közötti részletes esések algebrai összege által képeztetnek.

A számitás ellenőrzésére szolgál, ha az l-ek összegéből az i és f-ek összegét levonjuk; ekkor az utolsó pont esésének kell kijönni.

II. A vonal közepéből. 3) Állítsuk fel a lejtmérő műszert (351. ábra) a vonal kezdőpontjától előre olyan távban, hogy a kezdőpontban felállított lécz céltáblájára még jól lehessen irányozni, s a vizszintes irányvonal még a mérő léczet érje. Állítsuk be a szintezőt egész szigorral, irányozzunk a léczre az előbbi számban előadott mód szerint, és olvassuk le a magasságot. Ezután küldjük a léczet a következő pontra (1), az egész eljárást ismételvén. Ha az álláspontból még több pontot is lehet látni és biztosan beirányozni: akkor a léczet ezekre is el kell küldeni, s egy álláspontból annyi pontot felvenni, a mennyit csak lehet, a munka jóságának koczkáztatása nélkül. Ellenkező esetben, ha a rúddal már a következő (1) pontig sem lehetne menni: ekkor annyi közbeeső pontot kell felvenni, a mennyi szükséges.

4) Ha a műszer limbussal van ellátva, a műszer álláspontját a meghatározandó pontoktól oldalt is lehet választani. De ha a műszernek limbusa nincsen: akkor czélszerűbb az álláspontlal a lejtmérendő pontokat összekötő vonalnak közelében maradni, hogy a műszert az A csapon (334. §.) szükségen kivül forgatni ne kellessen, s a műszer magassága változást ne szenvedjen.

Meg kell továbbá még a léczeknek a műszertől való távjait is mérni, az illető correctiók maghatározása végett.

Ha a műszer első álláspontjából már tovább irányozni nem lehet: a lécz utolsó álláspontjában marad; a műszer pedig előre vitetik, olyan messze, hogy a táblára még irányozni lehessen, s a munka az előbbi rendben ismételtetik. Különös gondot kell az irányzásban azon pontokra fordítni, melyekre előre is, hátra is irányozunk, melyek a műszer különböző álláspontjait egymással összekapcsolják. Mert az ezekben ejtett hiba a többi következő pontokra is kihat.

5) Legyenek az I álláspontból II pont felé intézett irányvonalaknak megfelelő leolvasások sorjában l, l', az illető correctiók f, f', akkor a két pont közötti esés lesz:

$$E = (l - l') - (f - f').$$

A jegyzőkönyv berendezését következő schema ábrázolja:

Műszer állás-pontja	A rúd állás-pontja	Táv.	Magasság l	Correctio f	Javított magasság	Esés	
						egyenként	a 0 ponttól
I.	0	65⁰	0·⁰425	—	0·⁰425	—	0
	1	86	1· 488	0·⁰001	1· 487	1·⁰063	1·⁰063
II.	1	60	2· 106	—	2· 106		
	a	10	0· 105	—	0· 105	—2· 001	—0· 938
III.	*a*	85	1· 022	0· 001	1· 021		
	2	57	0· 820	—	0· 820	—0· 201	—1· 139
	3	63	0· 953	—	0· 953	0· 133	—1· 006

Az utolsó rovat itt is az utolsóelőttiben foglalt részletes esések summázása által áll elő, s a számítás ellenőrzése végett az első, a kapcsolati és az utolsó pontra előre intézett irányvonalak magasságai összegéből a hátra felé mért magasságok összegét le kell vonni; a különbség az utolsó pontnak a kezdőponttól számított esését fogja szolgáltatni.

6) Ezen két lejtmérési módot egymással összehasonlítván, kitűnik, hogy a végpontból való lejtmérésnél mind a rectificatióban hátramaradt hibácskák, mind a földgörbülési corectiók summázódnak; ezeket tehát még akkor sem kell elhanyagolni, ha egyen-

kint véve a legkisebb leolvasható mértéket el nem érnék is; hanem azoknak átlagos befolyását a végeredménybe be kell számítni. Holott a középből való lejtmérésnél ezen befolyásoknak csak különbsége mutatkozik az eredményben; a távok egyenlősége esetében tehát azok egészen kiesnek az eredményből. Továbbá a végpontból való lejtmérés több műszer-álláspontokat igényel, mint a középből való lejtmérés, tehát a munka haladását is tetemesen hátráltatja. A végpontból való lejtmérésnél a rúd hossza és a műszer magassága különbségét, azaz: 1·^{0}4-et meghaladó esést egy álláspontból meghatározni nem lehet; míg ezen mennyiség a középponti módnál csaknem az egész rúd hosszáig ér. Ezért a gyakorlatban csaknem kivétel nélkül az utóbbi módot szokták használni.

343. §.

Néha meredek hegyek oldalain 25—30 fokú hajlásszög alatt kell rövidebb vonalakat lejtmérni. Ilyen nagy hajlásszögeknél lejtmérő műszereket használni alig lehet, mert a távolság, melyre irányozni kell, igen rövid, csak 1—2 öl lévén, a távcső szemcsővét eléggé kihúzni nem lehet. Ilyenkor tehát egy érzékeny talpas szintező által lehet a munkát eszközölni olyanformán, hogy egy egyenes léczнek egyik végét (351. ábra) a földre helyezvén, azt a szintezővel vizszintessé tesszük, a másik végén pedig a mellette függélyesen felállitott rúdon a magasságot leolvassuk. A vizszintes rúdon egyszersmind az *a* és *b* pontoknak vizszintes távját le lehet olvasni. Ugyanezen munkát egy magasságmérő ívvel is végre lehet hajtani, mely egy, a vonal hosszában kifeszített zsinórra felfüggesztetik; de ezen, a bányamérnöki műszerek közé tartozó készülék kezelésére ezen helyen bővebben beereszkedni nem akarunk.

344. §. Stampfer lejt- és távmérési módja.

1) Legyen a 353. ábrában *A* és *G* két lejtmérendő pont a föld szinén. Állitsunk fel *A*-ban egy olyan lejtmérő műszert, melylyel magassági szöget lehet mérni, *G*-ben pedig egy kettős czéltáblával *C*, *D* ellátott függélyes állásu léczet; mérjük meg az α, β függélyes szögeket, melyek közül elsőbb a két czéltáblára intézett irányvonalak, az utóbbi pedig az alsóbb czéltáblára irány-

zott s a műszer vizszintes vonala által képeztetik; akkor a CD ösmeretes hossz, és az α, β szögekből a DE magasságot s a BE távot meg lehet határozni, s ekképen a lejtmérést közvetett magassági mérésre lehet visszavezetni.

2) Nevezzük $CD = d$, $DE = H$, $BE = D$-nek, akkor a BCD $\triangle$-ből lesz:

$$CD : BD = sin\alpha : sinC.$$

Ugyde a CBE $\triangle$-ből $C = 90^0 + \beta - \alpha$,

ezt helyettesitvén lesz:

$$BD = \frac{d \,.\, cos(\beta - \alpha)}{sin\alpha}.$$

Ezután a DBE $\triangle$-ből találtatik:

$$DE = H = BD \,.\, sin\beta,$$
$$BE = D = BD \,.\, cos\beta,$$

s a $\mathfrak{g}D$ értékét helyettesitvén, végre:

$$\left.\begin{aligned} H &= \frac{dcos(\beta - \alpha)\, sin\beta}{sin\alpha} \\ D &= \frac{dcos(\beta - \alpha)\, cos\beta}{sin\alpha} \end{aligned}\right\} \ldots \odot$$

A H képlete tehát az alsó czéltáblának a műszer vizszintes vonalától való merőleges távját szolgáltatja. Ha még ehhez a czéltáblának a rúd alsó végétől mért távját hozzáadjuk: azon magassági méretet kapjuk meg, melyet az előbbi módoknál közvetlen mérés által nyertünk, és l-nek neveztünk.

A D képlete hasonlóképen azon vízszintes távot szolgáltatja, mely az irányzó B tengelye (334. §.) és a rúd között foglaltatik. A lejtmérés ezen módjának a 342. §-ban előadottak felett azon előnye van, hogy egy álláspontból mind előre, mind hátra a rúd hosszánál nagyobb esést is lehet meghatározni úgy, hogy ezen mód szerint egyszerre 5 — 6, sőt olyan esetekben, midőn igen nagy pontosság nem szükséges, 30 — 40° esést is meg lehet mérni. Különösen megemlítendő az, hogy ezen mód szerint l tagadó mennyiség is lehet, mi a régi módoknál teljes lehetetlen. Ezért a Stampfer módja szerint hegyes vidéken a munka gyorsabban halad, valamint az is nem megvetendő előnynek mondható, hogy a munka teljesen a működő mérnök kezében van összpontosítva, a segédnek csak a rudat kell nyugodtan tartani. Ekképen mind a beirányzás, mind a leolvasások nagyobb biztossággal eszközölhetők, mint a régi mód szerint, melyben a mérnök a segéd ügyességére van utalva. Ezen mód szerinti lejtmérésnél továbbá a vizszintes távokat lánczczal megmérni is egészen felesleges; mert a megmért adatokból azokat mind a föld görbülésének betudása végett, mind szerkesztési czélokra, elegendő pontossággal meg lehet határozni.

345. §.

A Stampfer-féle műszerrel az α és β szögek a paránycsavar által határoztatnak meg. A műszert t. i. a 337. §. szerint felállítván, s a távcsőt a tárgy felé fordítván, forgatjuk a paránycsavart, mig a szintező buborékja egész szigorúsággal középen bejátszik, s a csavarállást h leolvassuk. Ezután a műszert mozdulatlan hagyván, forgatjuk szintén a paránycsavart, mig az irányvonal egymás után a C és D táblákra mutat, s a csavarállásokat o és u leolvassuk. Legyen most BK az irányvonalnak azon fekvése, mely a 0 csavarállásnak megfelel: akkor a h, o, u csavarállásoknak megfelelő függélyes szögek KBE, KBC, KBD mindegyike azoknak valamely függvénye fog lenni. Anélkül, hogy ezen függvény alakjának mértani fejtegetésébe bocsátkoznánk — melyet »Poggendorf Annalen« CXXX. kötetében megjelent értekezésemben fel lehet találni — minden függvény sorba lévén kifejthető, vegyük fel Stampferrel általános alakul ezen képletet:

$$KBE = ah + bh^2 + ch^3 + \dots$$
$$KBC = ao + bo^2 + co^3 + \dots$$
$$KBD = au + bu^2 + cu^2 + \dots$$

hol a, b, c, állandókat jelentenek; s ezeket egymásból levonván, lesznek:

$$KBC - KBD = \alpha = a(o - u) + b(o^2 - u^2) + c(o^3 - u^3) + \dots$$
$$KBE - KBD = \beta = a(h - u) + b(h^2 - u^2) + c(h^3 - u^3) + \dots$$

Stampfernek mérései szerint, a bécsi műegyetem műhelyéből kikerült, egy és ugyanazon mintáju műszereken a egymástól igen kevéssé különbözik, noha az a különböző mintáju műszereknél más-más értékkel bir (630″-től 750″-ig), b-nek mindig — jele és minden műszeren más értéke van (0·″05-től egész 0·″1-ig), c pedig azon határok közt, a meddig a szögmérés ér (8—10°), már olyan csekély értékű, hogy az egészen elhanyagolható. E szerint a Stampfer-féle műszereken a függélyes szög képlete elegendő pontossággal lesz:

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= a(o-u) - b(o^2-u^2)\\ \beta &= a(h-u) - b(h^2-u^2)\end{aligned}\right\}\ldots\mathfrak{D},$$

mely kifejezésekben az első tag a szög nyers értékét, a második pedig az onnan eredő correctiót jelenti, hogy a csavar hossza nem tökéletesen a szögnek megfelelő ívvel, hanem annak húrjával egyenlő. Ugyanezen második tagban foglaltatik továbbá a csavar metszésében találtató valamely kis tökéletlenségnek befolyása is a szögmérésre; de a mely a bécsi műhelyből kikerült ilynemű műszereknél igen csekély.

3) Az a és b állandók meghatározása végett meg kell mérni a műszerrel két ösmeretes szöget, melyeket egy bizonyos függélyes hossznak két különböző ösmeretes távban, vagy két különböző hossznak ugyanazon távban felállitása által lehet nyerni. Az eljárás a 118. §-ban előadottal teljesen megegyezik. A bécsi műszereken ezen állandók már igen nagy pontossággal meg vannak határozva, s a műszer ládája tetején fel vannak jegyezve. És ha a műszer jól kezeltetik, ezen állandók évekig változatlan maradnak. Idővel azonban ujra meghatározandók.

346. §. Stampfer táblái.

Minthogy α és β, 8—10°-ot meg nem haladnak, Stampfer a számitás könnyítése végett a 344. §-ban előadott H és D képleteit sorokba kifejtette, melyek következő alakokat nyertek:

$$\left.\begin{aligned}H &= d\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{2}{3}\frac{\beta^3}{\alpha} - \frac{1}{3}\beta\alpha + \beta^2\right)\\ D &= d\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha} - \frac{1}{3}\alpha + \beta\right)\end{aligned}\right\}\ldots\mathfrak{d}$$

A H képletében a két, a D-ben pedig az egy méretet meghaladó tagok elhanyagoltattak. Ezen képletekben azután α és β helyett a $\mathfrak{D}$ egyenletek helyettesittettek, s az eredmény lett:

$$H = d\left(\frac{h-u}{o-u} - \frac{2}{3}a^2\frac{(h-u)^3}{o-u} + \frac{b}{a}(h-u) - \frac{b}{a}\frac{(h-u)^2}{o-u} + a^2(h-u)^2\right)$$

$$D = d\left(\frac{1}{a(o-u)} + \frac{b}{a^2}\frac{o+u}{o-u} - \frac{a(h-u)^2}{o-u} + a(h-u)\right).$$

Ezen kifejezésekben a és b-t ívmértékben kell venni. Ha tehát a műszernek állandói másodperczekben vannak adva: azokat $\sin 1''$-el szorozva kell ezen képletekben helyettesítni. Ezen képletek tagjairól azután Stampfer táblákat készített, melyekből azoknak értékeit egyszerűen ki lehet írni. Ezen táblákban $a = 636 \cdot'' 6$, $b = 0 \cdot'' 07$-nek van véve. De ezen táblák csak azon műszereknél eléggé kényelmesek, melyeknek állandói a táblákéitól nem igen különböznek, másoknál bizonyos állandó coefficiensekkeli szorozást igényelnek. Ezen táblák Stampfer »Anleitung zum Nivelliren« czímű munkácskájában feltalálhatók.

347. §. Az én tábláim.

Én ezen műszerekhez más táblákat számitottam, melyek minden Stampfer-féle műszerekre egyaránt alkalmazhatók, s a m. tud. Akad. 1859-ki értesitőjében megjelentek. Ezeknek kifejtése szintén a fentebbi δ egyenletekből indul ki, és következő eredményre vezet:

$$\log H = \log d + \log(h-u) - \log(o-u - \mathfrak{M}\frac{b}{a}(h-o)$$
$$-\frac{\mathfrak{M} \sin 1''^2 a^2}{3}(h-o)(h-o+h-u)\left(1-2\frac{b}{a}(h+o)\right).$$

$$\log D = \log d - \log(a \sin 1'') - \log(o-u) + \mathfrak{M}\frac{b}{a}(o+u)$$
$$-\mathfrak{M} \sin 1''^2 a^2 (h-o)(h-u)\left(1-2\frac{b}{a}(o+o)\right) - \frac{\mathfrak{M} \sin 1''^2 a^2}{3}(o-u)^2,$$

hol $\mathfrak{M}$ a *Brigg log* modulusát jelenti. Ezen képletek tagjait két táblába (VIII. és IX. táblák) lehet rendezni.

1) A VIII. táblában foglaltatnak a *logH* és *logD* negyedik tagjai, vagyis: $\mathfrak{M}\frac{b}{a}(h-o)$ és $\mathfrak{M}\frac{b}{a}(o+u)$. Az elsőbbnek jele mindig ellenkező a $(h-o)$ jelével; a másodiké mindig $+$. Ezen táblának két bejárása és argumentuma van, u. m. baloldalt az első függőleges oszlopban $h-o$, vagy $o+u$ argumentummal, és felül az első vizszintes sorban $\frac{b}{a}$ argumentummal. $\frac{b}{a}$ minden műszernél más szám lévén, egyszer mindenkorra kiszámittatik. Legyen p. o. valamely műszernél $a = 641''$, $b = 0 \cdot'' 085$, tehát $\frac{b}{a} = 0{\cdot}000133$. Ezen műszernél a táblának 0·00013, és 0·00003-mal jelölt rovatai szükségesek, még pedig az elsőbb változás nélkül; az utóbbinak értékeit 10-el osztva, mert a táblában lévő számok tizszer nagyobb argumentumra szólanak, mint a kérdés alatt levők. A nyert számokat utóbb össze kell adni.

2) A IX. tábla magában foglalja ezen tagokat:

$$\frac{\mathfrak{M}sin1''^2}{3}a^2(h-o)(h-o+h-u)\left(1-2\frac{b}{a}(h+o)\right)\cdots ♂$$

$$\frac{\mathfrak{M}sin1''^2}{3}3a^2(h-o)(h-u)\left(1-2\frac{b}{a}(h+o)\right)\cdots ♃$$

$$\frac{\mathfrak{M}sin1''^2}{3}a^2(o-u)^2\ldots ☾$$

melyek alkotásukra nézve olyan egyformák, hogy mindnyájukat egy tábla által lehet kifejezni. Az elsőnek jele —, ha $h>o$, vagy $h<u$, úgyszintén ha $o>h>u$, és egyszersmind $h-o+h-u<0$, azaz: ha a vizszintes irányvonal a rúd felett vagy alatt megyen el, vagy a rúd alsó felét metszi; ellenben annak jele $+$, ha $o>h>u$, és egyszersmind $h-o+h-u>0$, azaz: a vizszintes irányvonal a rúd felső felét találja.

A másodiknak jele —, ha $h>o$ vagy $h<u$, azaz: a vizszintes irányvonal a rúd felett vagy alatt megyen el; ellenben $+$, ha $o>h>u$, azaz: ha a vizszintes irányvonal a rudat metszi.

A harmadik jele mindig —.

Ezen esetek közül a gyakorlatban azok fontosak, melyekben a vizszintes a rúd felett vagy alatt megyen el, a többiekben a correctiókat többnyire el is lehet hagyni.

Ezen táblának egy bejárása van, az első függőleges rovatban balról, s argumentuma:

♂-hoz . . . $m+log(h-o)+log(h-u+h-o)-2\mathfrak{M}\frac{b}{a}(h+o)$,

♃-hoz . . . $n+log(h-o)+log(h-u)-2\mathfrak{M}\frac{b}{a}(h+o)$,

☾-hoz . . . $m+2log(o-u)$,

hol $m=2loga$, $n=log3+2loga$, tehát minden műszerre nézve állandó mennyiségek, s egyszer mindenkorra kiszámittatnak. A tábla argumentuma 8·5-től 9·5-ig terjed ki; ennél nagyobbak elő nem fordulnak. Ha pedig valamely esetben az argumentum 6·5 és 7·5, vagy 7·5 és 8·5 közé esnék: azt 2, illetőleg 1 hozzáadása által 8·5-nél nagyobbá kell tenni, s a megfelelő táblai számot első esetben 100, az utóbbiban 10-el kell osztani, mint ez a *log* természetéből önként következik. Megjegyzendő, hogy ezen képletekben $h-o$, $h-u$, $h-u+h-u$ mennyiségeket mindig $+$ jellel kell venni, ha szinte egyik vagy másik közülök tagadó volna is. Az m, n s az argumentumban kiszámítandó logarokat elég 4 tizedes jegygyel venni. Sőt ha $h-o$, $h-u$, és $h-o+h-u$ kisebb 20-nál, 3 tizedes jegy is elég. Az $m+2log(o-u)$ számításában csak két tizedes jegyet kell venni. Az $\mathfrak{M}\frac{b}{a}h-o)$ értékét a VIII. táblából lehet átvenni, jele mindig —.

3) Példák. Legyenek $a=737\cdot''4$, $b=0\cdot''0436$, $d=1^0$, ezen számoknak következő állandók felelnek meg:

$$logd=0,$$
$$log(asin1'')=0\cdot55327-3,$$
$$m=5\cdot7354,$$
$$n=6\cdot2125,$$
$$b/a=0\cdot000059.$$

A mérés következő számokat adott:

$h=39\cdot895$,	ezekből következnek: $h-u=39\cdot020$,
$o=\ 2\cdot054$,	$o-u=\ 1\cdot179$,
$u=\ 0\cdot875$,	$h-o=37\cdot84$,
	$h-o+h-u=76\cdot86$,
	$h+o=42$,
továbbá:	$o+u=2\cdot9$,

$log\,39\cdot020=\ \ 1\cdot59119$,	$m=5\cdot7354$,
$-log\ \ 1\cdot179=-0\cdot07151$,	$log\,37\cdot84=1\cdot5780$,
VIII. tábla $=-\ \ \ 97$,	$log\,76\cdot86=1\cdot8857$,
IX. tábla $(9\cdot197)=-\ \ 536$,	$-$ VIII. tábla $=-\ \ 22$,
$logH\ \ =\ \ 1\cdot51345$,	IX. tábla arg. $=9\cdot1969$.

Ennek megfelelő $H=32\cdot^0617$, mely a szigorú képlet eredményével egészen egyezik.

A táv kiszámítására nézve lesz:

$-log(asin1'')=-0\cdot55327+3$,	$n=6\cdot2125$,
$-log\,1\cdot179\ \ =-0\cdot07151$,	$log\,37\cdot84=1\cdot5780$,
VIII. tábla $=-\ \ \ 8$,	$log\,39\cdot02=1\cdot5913$,
IX. tábl. $(9\cdot3796)=-\ \ 815$,	$-$ VIII. tábla $=-\ \ 22$,
$logD=\ \ 2\cdot36715$.	IX. tábla arg. $=9\cdot3796$.

Ennek megfelelő . . . $D=232\cdot^089$,
a szigorú képlet ád . . $D=232\cdot87$-et.

4) A valódi és látszatos vizszintes különbsége f volt a 331. §. szerint:

$$f=0\cdot0000001295\ D^2 \text{ bécsi öl.}$$

Tegyük ebben D helyett annak a csavarforgások által kifejezett közelítő értékét, azaz:

$$D = \frac{d}{a sin 1''(o-u)},$$

akkor lesz: $$f = \frac{5510 d^2}{a^2 (o-u)^2}.$$

Ennek értékei a X-ik táblában vannak kiszámítva, mely tehát a Stampfer-féle lejtmérésnél a VII. tábla helyét pótolja. Argumentumai : a, és $(o-u)$.

5) Ha a magassági szög 4^0-ot meghalad, azt a limbus vizszintes állapotában megmérni nem lehet, mert csak a fél csavarhossz áll rendelkezésünkre mind fel-, mind lefelé. Ilyenkor tehát Stampfer szerint a limbust ferde, körülbelől a földszinével párhuzamos fekvésbe kell hozni úgy, hogy a limbusnak legnagyobb hajlásszöge az irányvonal függélyes síkjába essék. Ekkor az egész csavar hossza rendelkezés alá jön, de a vizszintes irányvonalnak megfelelő csavarállás többé nem a csavar közepe tájára (M) fog esni, hanem attól fel- vagy lefelé, s ezáltal a távcső vizszintes vonala is emelkedni vagy sülyedni fog. Nevezzük a műszer magasságának ezen változását g-nek, akkor ezt a 334. §. szerint elég pontossággal ki lehet fejezni ezen képlet által:

$$g = r\gamma,$$

hol r a B tengelynek az A tengelytőli távját, s γ a limbus hajlásszögét jelenti, mely 4^0-ot meg nem halad. Ha tehát a vizszintesnek megfelelő csavarállást a limbus vizszintes helyzetében M, annak ferde fekvésében pedig h-nak nevezzük, a 345. §. ☽ képletek szellemében lehet tenni:

$$\gamma = a \, sin 1''(h-M),$$
$$g = r \, a \, sin 1''(h-M).$$

Legyen a paránycsavaron k fordulat hossza $= {}^1/_{100}$ öl, mit körzővel könnyen meg lehet mérni, akkor igen közel

$$2rka \, sin 1'' = {}^1/_{100} \text{ öl},$$

mert a csavarnak a B tengelytőli távja közel $= 2r$, tehát

$$ra \, sin 1'' = \frac{1}{200k},$$

tehát $$g = \frac{h-M}{200\,k} \text{ bécsi öl},$$

melyet a talált H-hoz kell adni. Ezen kifejezés a XI. táblában van kiszámítva, és $+$ vagy $-$ jellel veendő a szerint, a mint $h >$ vagy $< M$. A tábla argumentumai: k, és $h-M$. Legyen a fentebbi példában $M=22{\cdot}6$, $k=30$, akkor a

$$\begin{array}{lr} \text{X. táblából (740,1·15)-re esik} & = -0{\cdot}^{0}008, \\ \text{a XI. táblából (30,15)-re} \quad \text{»} & = +0{\cdot}\ 003, \\ \hline \text{Javítás} & = -0{\cdot}005, \end{array}$$

tehát végleges $H = 32.^{0}617 - 0{\cdot}^{0}005 = 32{\cdot}^{0}612$.

348. §. Stampfer műszerének birálata.

Stampfer az ő lejtmérési módja, de különösen műszere által a mérnöki gyakorlatnak lényeges szolgálatot tett, s noha a csavarnak mind szögkülönbségek, mind absolut magassági szögek meghatározására alkalmas volta már régen ösmeretes volt, mert az elsőbbet már az öregebb Mayer Tóbiás, az utóbbit Stampfer elösmerése szerint, Hogrewe ajánlotta: mindazáltal tényleges eredményt először Stampfer mutatott fel, s az eredményben való bizodalmat az ő műszerei alapították meg. Mind ezen elismerés mellett is, melyet ezen műszereknek megadni kötelességünknek ösmerjük, nem lehet azoknak némely hiányait figyelmen kivül hagynunk, melyek különösen az újabb időben fontossá lett vasúti munkálatok folytán kezdettek érezhetőkké lenni, s ezek:

a) Hogy a műszernek durva magassági mozgása nincsen, tehát egyenes vonal kitüzésére hegyes vidéken nem alkalmas.

b) Hogy midőn a magassági szög 4^{0}-ot meghaladván, a fél csavarhossz a szögmérésre nem elég, s a műszeren a durva mozgás hiánya miatt, a limbust kell ferde állásba hozni, a kezelés igen hosszadalmas kényelmetlen és fárasztó. A műszer tehát épen azon esetre nincsen kellőleg felszerelve, melyben annak túlnyomósága minden más lejtmérő műszer felett jelentékenyebb kezd lenni.

c) Hogy a műszerrel megmérhető magassági szög ($8 - 10^{0}$) nem elég nagy, s a gyakorlatban $15 - 20^{0}$ megmérhetése is óhajtandó volna.

Az első pontban megemlített hiány a Starke által újabb időben készített műszereken el van hárítva, melyeken a távcső, épen úgy, mint a távcsöves vonaszon, egy vizszintes csap körül fel s alá mozoghat, s minden állásban megszorítható; a paránycsavar-készülék pedig a csap másik végén van helyezve. De ezen változtatást már meglevő Stampfer-féle műszereken alkalmazni tetemes költség nélkül nem lehet.

A második pontra nézve én a műszer szerkezetében egy módosítást ajánlottam, és a magyar mérnök-egylet közlönye 1-ső kötetében közzé is tettem, melyet nehány forint költséggel minden meglévő műszeren alkalmazni lehet.

A harmadik hiányon segítni nem lehet, mert az a műszer szerkezetének elvében gyökeredzik. Stampfer csavarja t. i. az emelkedési szög húrját, vagy szigorúbban mondva, a húr változását méri meg. A húr 8 — 10°-ig az ívtől olyan kevéssé különbözik, hogy a magassági szöget a sor két első tagja által (lásd 345. §. ☽) elég pontossággal ki lehet fejezni. De ha a szög 12 — 20°-ra emelkedik: a sor elhanyagolt, következő tagjai már annyira nőnek, hogy azokat elhagyni nem lehet. Ennek következtében a *H* és *D* képletei, s az azokhoz szükséges táblák olyan terjedelmesek lesznek, hogy azoknak gyakorlati alkalmazása csaknem lehetetlenné válik. Én tehát ezen hiányok kikerülése végett később a szögmérésnek egy egészen más elvét hozom javaslatba, mely szerint a csavarral a húr helyett az ív méretik meg a nélkül, hogy a szögmérés pontossága, és a műszer szilárdsága csekélyebb volna, mint az, melyet a Stampfer-féle műszeren becsülni tanultunk.

349. §. Javitásom a Stampfer-féle műszeren.

Az előbbi §. *b* pontjára vonatkozó javitásom a 354. ábrában látható. Ezen szerkezet a Stampferétől csak abban különbözik, hogy Stampfernél *K* az Alhidadét ábrázolja, mely közvetlen a *J* tányéron nyugszik, és csak a tányér síkjában mozoghat; az én módositásomnál pedig *K* és *J* közé egy harmadik darab *C* van igtatva, mely az Alhidade szerepét játsza. Ennek két oldalán csapágyakban végződő oszlopocskák *D* vannak helyezve, *K*-ból pedig két oldalt csapok *E* nyúlnak ki, melyek ezen ágyakban nyugosznak. *C*-ből továbbá egy keskeny kar *a* nyúlik ki, melyre egy, a *K*-n megerősitett tengely *b* körül forogható Excentricum *F* támaszkodik, a *G* rugó pedig az Exentricumot az *a* karhoz nyomja. Az Excentricum karimáján, a tengelytől különböző távban, három sík darab *m*, *n*, *p* van reszelve, s ha az ember a *b* tengelyt annak forgantyújával fordítja : majd egyik, majd másik jön az *a* karral érintkezésbe. A rajzban az Excentricum a középső síkon *n* nyugszik, s ezen állásban *K* a tányérral körülbelől párhuzamos. Ezen állapotban kell meghatározni a csavar állását (*M*), (lásd 337. §.), melynél a szintező a limbus síkjával párhuzamos. Ha pedig a *b* tengely egy negyedkörrel előre, vagy hátra fordíttatik, mig az *m* vagy *p* síkok jönnek az *a* karral érintkezésbe : akkor *K* körülbelől 4⁰-al hajlik fel- vagy lefelé. Ekképen a távcsőnek három rendes állása van, melyeknél az egyikből a másikba való átmenetel a *b* tengelynek egy negyed körrel való forditása által egy pillanatban létrehozatik; mig a Stampfer útmutatása szerint (lásd Anleitung zum Nivelliren §. 54.) a limbusnak ferde állásba való hozatalára megkivántatik, hogy a paránymérő csavar az (*M*) állásba beállittatván, s az egész műszert az állvány-csapon úgy forditván, hogy egy lábcsavaron keresztül gondolt átmérő a rúd felé legyen irányozva, a szintezőt ezen vonalra keresztben kell állítni, s a limbusnak ezzel párhuzamos átmérőjét szigorúan vizszintessé kell tenni; ezután lehet csak a limbust egyik lábcsavar által ferde, a földszinnel körülbelől párhuzamos fekvésbe hozni.

Az általam ajánlott javitásnak még azon előnye is van, hogy a távcsőnek durva magassági mozgást kölcsönöz, tehát az előbbi §. *a* pontjában előhozott hiányon is nagy mértékben segítve van.

350. §.

1) Az eddig ösmeretes, magasságmérésre felszerelt lejtmérőkön a szögmérés vagy csavarral — a Stampfer-féle mód szerint a chorda, vagy némelyiknél a tangens megmérése által, — vagy egy beosztott ív segitségével eszközöltetik. Az elsőbb mód a 348. §-ban előadottaknál fogva csak 8—10-ig ád kielégitő eredményt; az utóbbi csak azon pontosságra képes, melyet egy Nonius leolvasása által el lehet érni; s ezen tökéletlenségen még az által sem lehet segítni, ha — mint a Breithaupt-féle műszeren — a paránymérő csavar be is van osztva; mert ha a szöget ugy akarnók megmérni, hogy az egész fokokat a beosztáson olvasnók le, a mutatót egy fok vonásra beállitván, a hiányzó részt pedig a csavarral mérnők meg, a mutató beállitásában ejtett hiba a szögben bennmaradna, s a csavarrali mérés nagyobb pon-

tossága ezen mit sem segítne. A csavar tehát a beosztott körnek feltétlenül eleibe teendő, de óhajtandó, hogy a szöget 20—25°-ig meg lehessen vele mérni, anélkül, hogy a képletek bonyolódottabbak, a kezelés nehézkesebb legyen, s a csavar nagyobb kopásnak ki legyen téve, mint a Stampfer-féle műszeren tapasztaltatik.

2) A Stampfer-féle lejtmérésnél az α és β szögek megmérésében ejtett hibák a magasságra egymástól különböző befolyást gyakorolnak. Jelöljük az α, β szögekben ejtett hibákat $\triangle\alpha$, $\triangle\beta$-nák s az ezekből a H-ban keletkező változásokat $\triangle H\alpha$ és $\triangle H\beta$-nak: akkor felsőbb számitás által következő kifejezéseket lehet kifejteni:

$$\frac{\triangle H_\alpha}{H} = -\frac{\cos\beta}{\cos(\alpha-\beta)}\,\frac{\triangle\alpha}{\sin\alpha},\quad \frac{\triangle H_\beta}{H} = \frac{\cos(\alpha-2\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}\,\frac{\triangle\beta}{\sin\beta};$$

minthogy pedig α és β csak kis szögeket jelentenek, elég közelitéssel lehet irni:

$$\frac{\triangle H_\alpha}{H} = -\frac{\triangle\alpha}{\alpha},\quad \frac{\triangle H_\beta}{H} = \frac{\triangle\beta}{\beta}.$$

Ezekből lesz:

$$\triangle H_\alpha : \triangle H_\beta = -\frac{\triangle\alpha}{\alpha} : \frac{\triangle\beta}{\beta},$$

s minthogy közelítve $H = d\frac{\beta}{\alpha}$, az utolsó arányt igy is lehet átváltoztatni:

$$\triangle H_\alpha : \triangle H_\beta = H\,.\,\triangle\alpha : d\,.\,\triangle\beta.$$

Ezen képlet világosan mutatja, hogy az α és β szögek megmérésében ejtett hibák a magasságra különböző körülmények közt különböző hatást gyakorolnak, s ha azt akarjuk, hogy ezen befolyás egyenlő legyen, azaz:

$$\triangle H_\alpha = \triangle H_\beta,$$

akkor a mérési hibák közt ezen összefüggésnek kell állani:

$$H.\triangle\alpha = d.\triangle\beta,\ \text{vagy}\ \triangle\alpha : \triangle\beta = d : H.$$

Mennél nagyobb a magasság, annál kisebb hibát szabad az α szögben megengednünk. Ezen feltételnek eddigelé egy magasságmérő sem teszen eleget, először azért, mert mind az α, mind a β megmérésére mindnyájoknál csak egy és ugyanazon organum létezik; másodszor azért, mert minden eddigi műszereknél a szögmérés az irányok észlelése, tehát egymásután következő actiók által eszközöltetvén, — melyek közben a műszer állványát absolut mozdulatlan állapotban kell gondolnunk, — minden változás, mely időközben az állvány állásában beállott, az α,

β szögekre egyformán kihat, s a leolvasásokat egyformán meghamisítja. Ezen befolyás az ismételt észleleteknél mutatkozó különbségekben világosan látszik. Az α szög megmérésére tehát egy egyedüli actio két egymásutáninál előnyösebb, s a pontosság fokozásának hathatós tényezőjévé válhatik.

3) Egy elméletileg tökéletes lejt- és magasságmérő műszer conceptiójában tehát következő elveket kell irányadókul tekintenünk:

a) A távcsőnek durva és finom mozgással kell bírni, hogy a műszer vonalak kitüzésére alkalmatos legyen.

b) A magasságmérés csavar által eszközöltessék, s 20—25°-ig terjedjen; de a csavar az ívet, ne pedig annak valamely háromszögtani függvényét mérje, a nélkül azonban, hogy nagyobb kopásnak legyen kitéve, mint az, mely a Stampfer csavarján tapasztaltatott. Végtelen csavar tehát teljességgel nem használható, mert ennél csak egy-két forgás lévén mindig érintkezésben, a kopásnak igen ki van téve.

c) Az α és β szögek megmérésére külön szervek legyenek alkalmazva, melyeknek pontossági képessége legalább 3 : 1 viszonyban álljon egymáshoz.

d) Az α szög, melynek befolyása a magasságra sokkal nagyobb a β-énál, egy egyedüli actio által méressék meg. Kivétel csak azon esetben engedtetik meg, ha a táv kicsiny, azaz, az α szög igen nagy, midőn abban a rendesnél nagyobb hiba sem ártalmas.

e) A paránycsavar, mint a műszernek legbecsesebb része, csupán csak szögmérésre használtassék, nem pedig más mellék czélokra; hanem ezekre külön organum legyen alkalmazva.

351. §. Új lejtmérő műszer.

1) Ezen elvek által vezéreltetve szerkesztettem egy új lejtmérő műszert, mely a 354-ik ábrában látható. Ez általában véve az Ertl-féle műszerhez leginkább hasonlít; állványa a Reichenbach-féle, limbusa *C*, Alhidadéja *D*, durva és finom mozgással ellátva, s két Noniussal felszerelve, melyeken egyes perczek olvastatnak le. Az Alhidadéból két egymással átalellenben álló oszlop *E* emelkedik fel, melyeknek tetején a *B* tengely nyugszik, felülről egy trapezium alakra kimetszett, három oldalról érintkező

födél által lefoglalva. A *B* tengely két végén, az *E* oszlopokon belül, concentricus csapok vannak esztergályozva, melyekre az *F* áttört oldalrészek vannak tolva, ezen oldalrészek pedig két végükön az *U* alakú keresztkapcsok *k* által össze vannak foglalva, s ekképen egy kosárt képeznek, mely a *B* tengelyen, attól függetlenül könnyen foroghat, de oldalmozgással nem bír. A *B* tengely közepén szintén *U* alakra van görbítve, hogy a távcsővet a *k* keresztkapocs völgyeletébe lehessen fektetni, s a távcső tengelye a *B* tengelylyel egyenlő magasságba essék. A távcsőt ágyából ki lehet venni és megfordítni, a szintező a távcsőre helyeztetik, s fedő lemezek által lefoglaltatik, hogy a távcső vagy a szintező a műszerről le ne essék. Az *F* kosár egyik oldalából egy erős kar *G* nyúlik le, végén egy csavarkával *a* ellátva; az *E* oszlop alsó részén pedig *c*-nél egy lyuk van fúrva, melybe egy gyengén kúp alakú csap illik. Ha ezen csap, mely a rajzban csak keresztmetszésben látszik, a lyukban előre tolatik: annak kiálló végébe az *a* csavar vége felakad, s ekképen a kosár, illetőleg az abban fekvő távcső, vagy az azon nyugvó szintező és az Alhidade közt egy állandó fekvés hozatik létre, melyet a szintezőnek a limbussal való párhuzamossá tetelére fel lehet használni. Ha pedig azon csap a lyukból kihúzatik: ezen fekvésben egy gyenge rugó által biztosítva van; a *G* kar az *a* csap előtt elmehet, s a távcső durva mozgása akadályt nem talál. A *B* tengelyen, a *G* karon belül, egy erős concentricus környegyed *M* van szilárdúl megerősítve. Ezen quadrans a *G* kar lapját érinti, és ezzel egy szorító csavar *b* által, melynek itt csak a vége látszik, összekapcsolható; de ezen kapcsolatot a *b* csavar megnyitása által meg is lehet szüntetni. Az *M* quadrans az Alhidadén vizszintes fekvésben lévő paránycsavarral *P* egy, vezető lemezek közt előre és hátra mozogható szánka *Q* által szilárd összeköttetésben áll oly módon, hogy a quadrans két oldalán, *e*, és *e'*-nél vékony lapos ruganyos lemezek vannak megerősítve, ezek a quadrans henger alakú felületén egymás mellett keresztben menvén el, a másik végükön a szánka két végén *f*, és *f'*-nél vannak megerősítve. A szánka pedig hosszában át van fúrva, a lyuk végén csavaranya van metszve, melybe a csavarorsó bele illik, s a csavar feje és az anya közt egy gyenge tekercsrugó által gyenge feszültség van előidézve. Ha a *P* paránycsavar forgattatik, a szánka előre vagy hátra mozog, ezáltal a quadrans hengerfelületén egyik lemez le-, a másik feltekergődzik. S ha még hozzátesszük azt, hogy az *ef* lemez a henger közepén fekszik s egy kissé szélesebb, mint az *e'f'*-el jelöltek, melyek amannak két oldalán feküsznek, hogy oldalnyomás elő ne állhasson; továbbá, hogy az *ef* lemezt egy, az *f* pontban helyezett csavarkával tetszés szerint lehet feszítni: egy minden tekintetben biztos magasságmérő készülék áll előttünk, mely csavarral az ívet méri. A csavarnak 120 forgása van, melyek közül 80 megyen 1"-re, egy forgás szögértéke 10—12'. A csavarfő 100 egyenlő részre van osztva, s minthogy a csavar igen finom metszésű, az egész forgások leolvasásának könnyitésére, a szánka vezeték keresztkapcsa *R* belsejében egy számláló készülék van helyezve, melynek két ablakocskája van egymás felett; a felsőbben a tizesek, az alsóbban az egyesek, a *g* csavarfőn pedig a mutató vonás által mutatott tört részek olvastatnak le. A csavarorsó fején még egy külpontos forgató csap *V* látszik; ezzel a csavart gyorsan lehet forgatni, mi a forgások nagy száma miatt különben hosszasabb időt venne igénybe. Ezen leirásból megérthető, hogy ha a *b* csavart megnyitjuk, a távcsőt durván fel s alá lehet mozgatni; ha pedig azt meghúzzuk: a távcsőt a paránycsavar által lehet mind fel-, mind lefelé mozgásba hozni, s ekképen a magassági szöget mind alólról felfelé, mind megfordítva meg lehet mérni, a mint épen azt a quadrans fekvése kivánja.

A távcső végre egészen az én távmérőm szerint van készítve, annak gyútávja 14—15", a tárgylencse közepén át van metszve, s az egyik fél a távcsőben szilárdul meg van erősítve, a másik egy mozogható táblácskába foglalva, melyet a *h* paránycsavarral fel- és lefelé lehet mozdítni. Ezen paránymérő szolgál az α szög megmérésére; a csavar egy forgásának szögértéke körülbelül 4'. Az egész forgásokat egy kis léptéken a távcsőfő oldalán, a tört részeket pedig a 100 részre beosztott csavarfőn lehet leolvasni. Ha a műszert közönséges lejtmérésre akarjuk használni, a mozogható lencsefélt hatályon kivül kell tenni, hogy a kettős képek zavart ne okozzanak. Erre szolgál egy a távcső belsejében helyezett, félkör alakú ellenző, melynek tengelye a távcsőből kiáll, s egy gombban *k* végződik. A ellenzőt ezen gombnál fogva a távcsőben keresztbe lehet állítni, s ekkor a mozogható lencsefélbe ható sugárok felfogatván, képet nem alkothatnak, hanem csak a másik lencsefél képe látszik egyedül.

2) Ezen műszernek elméletét egy külön füzetecskében közölni szándékozván, e helyen csak azt kivánom még megemlítni, hogy a műszerrel a Stampfer-féle képletek szerint is lehet mind a lejt- mind a távmérést eszközölni, ha a szögmérés a P parány-csavar által vitetik véghez, mi különösen akkor lesz előnyös, ha a rúd közel van a műszerhez, tehát az α szög az egész rúd hosszára nézve nagy, a midőn azt a távcső csavarja által, — melylyel körülbelől csak $2^1/_2{}^0$-ot lehet megmérni — csak úgy lehetne meghatározni, ha a célpontokat a rúdon közel választanók egymáshoz, azaz: a d-t kisebbnek vennők; mi azonban a szögmérés pontosságának hátrányára szolgálna.

352. §. Hosszmetszés.

1) A lejtmérés eredményét egy rajzolatban szokták szemlélhetővé tenni. Ezen rajzolat a földnek a lejtmérendő, kitűzött vonal hosszában gondolt metszését kiegyenesítve állítja előnkbe, azért az h o s s z m e t s z é s n e k (Längenprofil) neveztetik. Ezen rajzolatban (355. ábra) a lejtmért pontok közötti távok egy vizszintes vonalon AB felrakatnak, s ezen vonaltól fel- vagy lefelé, a mint azt a magassági vagy mélységi méretek kivánják, a kezdő pontra vonatkozó esések felrakatnak. Az AB vonal az úgynevezett ö s s z e h a s o n l í t á s i s í k o t vagy horizont ábrázolja, és ez vagy a hosszmetszés kezdőpontján, vagy valamely más adott, vagy néha csak tetszés szerint választott ponton van keresztül fektetve a szerint, a mint azt a körülmények kivánják. Az elsőbb esetben már a 0 pontra vonatkozó esések magok a felrakandó méreteket szolgáltatják; az utóbbiban a felrajzolandó méreteket úgy nyerjük meg, ha a 0 pontra vonatkozó esésekhez a 0 pontnak az összehasonlitási síktól számított esését algebrai értelemben hozzáadjuk. Az összehasonlítási síkot rendesen úgy szokták valasztani, hogy a lejtmérés egy, már meglevő szomszéd lejtméréssel összeköttetésbe hozható legyen; ezért az ennek valamely meghatározott pontján fektettetik keresztül. Ha pedig a lejtmérés önálló munkálatot ábrázol: az összehasonlitási síkot a vidék legmagasabb, vagy legalacsonyabb pontján szokták keresztül vezetni azért, hogy különböző jelű magassági

méretek ne jőjjenek elő. Így p. o. a Pest városi régibb lejtméréseknél az összehasonlitási sík a pozsonyi dunavízállás-mércze 0 pontján megyen keresztül; ellenben az újabb lejtmérésben az összehasonlitási sík a lánczhid nyugoti oszlopán lévő mércze 0 pontján keresztül vétetett fel, mely a Duna legkisebb vízállásának felel meg.

2) Ezen hosszmetszések ábrázolásánál azon különös eset fordul elő, hogy a hosszasági méretek sokszor mértföldekre terjedő vonalat képeznek, mig a magasságiak mindig csak kisebb, nehány öl nagyságra emelkednek. Továbbá a magassági méreteket rendesen igen nagy pontossággal — egész $^1/_{1000}$ ölig — mérjük meg; mig a hosszakban gyakran csak egyes öleket olvasunk le. Ezért szükséges, hogy a magassági méretek nagyobb lépték szerint rajzoltassanak fel, mint a hosszak; úgy hogy minden ilynemű térképeken két különböző lépték van felrajzolva. A léptékek közötti viszony a körülményektől függ, és 1 : 2-től 1 : 100-ig változik. Ekképen a lejtmérési rajzolat a lejtőt mindig eltorzítva állítja elõnkbe, úgy, hogy a gyengén hullámzó vidék is egész hegyek-völgyek alakjában mutatkozik.

3) A hosszmetszési rajzolatban végre a föld felületén látszó tárgyak házak vízfolyások erdők s más gazdasági művelési tárgyak, valamint a földben valószinűleg létező rétegek kősziklák stb. megjelöltetnek, s vagy feketén tussal, vagy színezve rajzoltatnak, s ekképen a térképnek nagyobb átlátszóság s tájékozási képesség adatik.

353. §. Keresztmetszések.

1) A hosszmetszés magában a föld felületének emelkedési viszonyait csak azon irányban állítja elõnkbe, melyben az ki van tűzve. De ez a föld felületének alakjáról még tiszta fogalmat bennünk ébreszteni nem képes; hanem e végre még k e r e s z t m e t s z é s e k — Querprofile — szükségesek. A keresztmetszéseket a hosszmetszéseknek akármely pontjain keresztül akárminő irányban lehet fektetni; de legczélszerűbb azokat a hosszmetszési vonalakra merőlegesen, vagy ha azok meg vannak törve, a polygonszöget felező vonal irányában helyezni.

2) A keresztmetszés mindig kapcsolatban van a hosszmetszés valamely pontjával, s annak lejtmérése a 342. §-ban elő-

adottaktól semmiben sem különbözik, megjegyezvén, hogy a keresztmetszés pontjait olyan sűrűn kell választani, hogy a föld felületén minden törés meg legyen határozva, s a vizszintes távokat is fel kell jegyezni, hogy a keresztmetszést rajzolatban előállítni lehessen. Annak kiterjedése a tárgyak természetétől függ. Igy p. o. útak épitésénél 10—15⁰ hosszú keresztmetszés elegendő; ellenben ártereknél a keresztmetszés a völgy egész szélességére kiterjed, a meddig t. i. az a vízáradásnak ki van téve.

3) A keresztmetszéseket rendesen nagyobb léptéken szokták rajzolni, mint a hosszmetszéseket, mert azokba az épitendő tárgyak részleteit be kell rajzolni, a leásások és feltöltések nagyságát láthatóvá kell tenni; ezek pedig a földmunka nagyságának meghatározására szükséges adatokat szolgáltatják.

354. §. Térlejtmérés.

Néha lecsapolásoknál udvarok utczák stb. feltöltésénél és szabályozásánál egész téreket kell lejtmérni. Ezen munkát többféleképen lehet berendezni, u. m.

1) Tűzzünk ki a felületnek azon pontjain, melyekben a folytonosság megszakad, s törések látszodnak, karókat; ezek egymással összekapcsoltatván háromszögeket képeznek s egy összefüggő hálózatot fognak alkotni, melynek sarokpontjainak magassági viszonyait egy vagy több állomásokból meg lehet határozni. Hogy a mérési hibák összehalmozódása meggátoltassék, a kapcsolási pontok magasságait nagyobb pontossággal kell meghatározni, mint a közbeesőkét.

2) Tűzzünk ki párhuzamos vonalak által egy négyzet hálót, a vonalakat olyan közel választván egymáshoz, hogy azok a földszinnek egy jelentékenyebb folytonosság-megszakadását se ugorják át. Czélszerű az egyik irányu vonalrendszert római, az azokra merőlegeseket pedig arabiai számokkal jelölni meg; ekképen minden pont két számmal lesz jelölve s annak fekvésében kétség nem támadhat. Ezután a pontokat egymásután lejtmérjük, a műszert alkalmas helyeken felállitván, s a kapcsolási pontokra különös figyelmet forditván, hogy a hibák összehalmozódása meggátoltassék.

3) Tűzzünk ki egy középpontból radialis irányú egyeneseket, jelöljük meg ezeken azon pontokat, melyekben a földszin

töréseket mutat. Ezen pontokat lejtmérvén, egy pontrendszert nyerünk, mely némely esetekben előnyösen felhasználható.

4) Hogy az 1) és 3) alatti pontrendszereket rajzolni lehessen, azokat fel kell venni, mely czélra maga a lejtmérő műszer tökéletesen elegendő pontosságot szolgáltat.

5) Ha a tér lejtmérése a körülményeknek megfelelő módon vitetett véghez s különösen tekintetbe vétetett, hogy a földszinén minden feltünő töréspont meg lett legyen határozva: akkor az eséseket a kezdő pont horizonjára számítván, azoknak egymással való összehasonlitásából a térnek legmélyebb és legmagasabb pontjait, valamint a földszinén létező völgyek és hátak folyamatját könnyen fel lehet keresni.

Minden pont, mely a két szomszédjánál mélyebben fekszik, a völgy fenekén van; minden pont ellenben, mely a két szomszédjánál magasabban van, a dombgerinczre esik. Ezen fenek, illetőleg gerinczpontok egymással összekötve képezik a völgy vagy dombhát folyamatját.

Egy olyan pont, mely minden körülötte lévő szomszédpontoknál magasabb, a domb csúcsát ábrázolja; valamint egy olyan pont, mely minden szomszédpontoknál köröskörül mélyebb, egy tölcsér fenekében fekszik.

Egy hegygerincznek azon pontja, mely a két szomszédgerinczpontnál alacsonyabb, nyereg nevet visel.

6) A térlejtmérés által nyert magassági méretekből könnyen meg lehet olyan pontokat határozni, melyekben bizonyos meghatározott magasságban gondolt horizon a föld felületét metszi; ezen pontok egymással összeköttetvén, egy összefüggő vizszintes vonalat — Niveaulinie — szolgáltatnak. Ezen vonalak a föld felületének alakjáról igen világos képet nyujtanak s a dombor-rajznak egy nemét képezik. A vizszintes vonal pontjainak felkeresése mind számitás, mind szerkesztés által eszközölhető; mindakettő azon feltevésen alapszik, hogy a földszinét két szomszéd lejtmért pont közt egyenesnek lehet tekinteni, ennélfogva a magassági különbségek a távokkal egyenes viszonyban változnak. Legyen a 356. ábrában AB az összehasonlítási sík, CD a földszín, t a CD pontok egymástól való vizszintes távja, a, b azoknak mélységi méretei, c az áthelyezendő horizon mélysége: akkor a CDE, és CGF hasonló $\triangle$-ekből lesz:

$$b-a : c-a = t : x,$$

honnan az x-et ki lehet számítni és az A pontból B felé fel lehet tenni. A szerkezeti feloldás az ábra megszemléléséből önként érthető, s bővebb magyarázatot nem kiván.

355. §.

Feladat. Egy pontból egy bizonyos irányban egy adott absolut esést e kitűzni.

Feloldás. Állítsuk fel a lejtmérő műszert az adott pont felett, fordítsuk a távcsőt a kivánt irány felé, állítsuk be a szintezőt egész szigorral, és mérjük meg a műszer magasságát i. Ekkor a léczen a czéltáblát $i+e$ magasságban megerősítvén, küldjük el a segédet a léczczel a vonal irányában, ki azt a földön felállitván, helyét előre vagy hátra addig fogja változtatni, mig a czéltábla a távcső irányvonalán fog megjelenni. Ha a táv olyan nagy volna, hogy a föld görbülését már figyelmen kivül hagyni nem lehetne: akkor az előbbi $i+e$ mérethez még az f-et kellene adni, s az $i+e+f$ magasságra kellene a czéltáblát megerősítni; mihez azonban már a táv közelitő ösmerete megkivántatik.

356. §.

Feladat. Egy ponton keresztül a földszinén egy vizszintés vonalat kitűzni.

Feloldás. Állítsuk fel a műszert körülbelől a kitűzendő vonalban olyan távol a kezdő ponttól, hogy a távcsővel még jól lehessen irányozni, s a szintezőt egész szigorral beállítván, mérjük meg a kezdő pontban felállított rúdon az irányvonal magasságát l, s ha a correctiót tekintetbe vesszük, a kijavított magasság lesz: $l-f$. Ezután a rudat más pontba áthelyezvén, melynek távja a műszer álláspontjától meghatároztatik, s az annak megfelelő f' kiszámíttatik, a czéltábla a léczen $i-f+f'$ magasságban megerősíttetik, és a rúd a földön felállíttatván, az az irányvonalra merőleges irányban, jobbra vagy balra addig mozdíttatik, mig a czéltábla az irányvonalban fog látszodni. Hogy a távcsővel a rudat folyton követni kell, s a szintezőt mindig szigorúan középre beállítva kell tartani, azt mondani is alig szükséges. Ekképen annyi pontot lehet egymásután meghatározni, a mennyi szükséges, s egy állásból addig folytatni a munkát, a meddig az irányzás biztossága ér. Ha már messzebb irányozni nem lehet: akkor a rúd az utolsó ponton marad, a műszer pedig előre vitetik, s a munka az előbbi útmutatás szerint folytattatik.

Látni való, hogy ezen műtétel a lejtméréstől csak abban különbözik, hogy ebben a rúd álláspontja mozdulatlan, s a czéltábla tolatik fel s alá; amabban pedig a czéltábla helye állandó a rúdon, a rúd álláspontja pedig változik.

357. §.

Feladat. A földszinén egy bizonyos pontból egy bizonyos lejtőt $= \frac{1}{m}$ kitűzni.

I. Feloldás, 1) Állítsuk fel az adott pontban a lejtmérő műszert, mérjük meg a műszer magasságát i; húzzuk ki a lánczot a műszer álláspontjából azon irányban, a melyben gondoljuk, kogy a kitűzendő lejtő fekszik, s a 10^0-nek megfelelő esést $e = \frac{10^0}{m}$, kiszámítván, állítsuk a czéltáblát a rúdon $i + e$ magasságra. Ezután a léczet a lánczvégén felállítván s a távcsőt a rúd felé irányozván, mozduljon a segéd a léczczel a láncz végével leirt körben fel- vagy lefelé, mig a czéltábla az irányszálra jön. Ekképen egy pontot találunk, mely a műszer álláspontjától mérve a kellő lejtőjű vonalban van.

2) Ha a kitűzendő lejtő iránya adva van: akkor a vonalban egy pontot felvévén, határozzuk meg ennek az állásponttól számított esését, vonjuk le ebből azon esést, mely a pont távolságára a lejtő szerint esik; a különbség azon magasságot fogja szolgáltatni, melyben a lejtős vonal a pontban felállított függélyest metszi.

II. Feloldás. Állítsuk a limbus síkját olyan nagy pontossággal vizszintesre, a mint csak lehet, s a műszer magasságát i a földszine felett megmérvén, küldjük el a léczet $20 - 30^0$ távra a műszertől; állítsuk be a czéltáblát egész szigorral a vizszintes irányvonalba, s olvassuk le a tábla magasságát l; ekkor a rúd távját t, a lejtőt $\frac{1}{m}$-nek jelölvén, a t-hez tartozó esés lesz $= \frac{1}{m}$, s ha a czéltáblát a léczen $l + \frac{t}{m}$ magasságban megerősítjük, s a léczet a földön ismét függélyesen felállítván, az irányvonalat a paránycsavar által a czéltáblára irányozzuk: a távcső irányvonala a vizszintes állású limbus felé olyan szög alatt fog hajolni, mely az $\frac{1}{m}$ lejtőnek megfelel. Most a czéltáblát a rúdon a műszer magasságára kell megerősítni, s olyan irányban előre küldeni, melyről gondoljuk, hogy a kivánt lejtőnek megfelel; az Alhidadét pedig a limbusnak függélyesen álló tengelye körül fordítván, a távcsőt a rúd felé kell irányozni. Ha a czéltábla az irányszálon van, a lécz lábpontja már helyes; ellenkező esetben a léczet fel- vagy lefelé, a földszin legnagyobb hajlása irányában addig kell mozdítni, s az Alhidadét utánna fordítni, mig a czéltábla egészen az irányvonalba jön.

III. Feloldás. Egyszerűbben lehet ezen feladatot feloldani olyan lejtmérőkkel, melyek magasságmérő szerekkel vannak ellátva. Ezeknél t. i. csak a lejtőnek megfelelő magassági szöget kell számítni, ezen képlet szerint:

$$tg\beta = \frac{1}{m},$$

azután a távcső vizszintes irányvonalának a műszeren β hajlást kell adni.

α) A Breithaupt-féle műszeren ezen hajlásszöget a Nonius által közvetlenül ki lehet tűzni; erre nézve tehát további magyarázat nem szükséges.

β) A Stampfer-féle műszeren, valamint az én műszeremen is előbb a β szögre eső csavarfordulatok számát kell meghatározni. Legyen a vizszintes irányvonalnak megfelelő csavarállás h, a keresett β szögnek megfelelő pedig n, akkor a szög képlete ez:

$$\beta = a(h-n) - b(h^2-n^2) = (h-n)\,[a-b(h+n)].$$

Ebből lesz: $$h-n = \frac{\beta}{a-b(h+n)}.$$

A számitásban a jobb oldal nevezőjének második tagja már az n ösmeretét feltételezi; de ezen tagot, mely az elsőhöz képest igen kicsiny, egyelőre el lehet hanyagolni, s az igy egyszerűsített képletből nyert értéket helyettesítni a második tagban; a másodszori számitás az n értékét mindig kellő pontossággal fogja adni.

γ) A Mayer-féle lejtmérőn végre az $\frac{1}{m}$ lejtőt csak $^0/_0$-ra át kell változtatni; az eredményt a limbuson közvetlen ki lehet tűzni.

Mind ezen műszereknél végre a távcsőnek adott hajlásszög alatt a műszer magasságában megerősített céltáblára épen úgy kell irányozni, mint az előbbi feloldásnál előadatott; a különbség csak a távcső hajlásszögének előállitására vonatkozik.

358. §.

F e l a d a t. Egy pont körül egy meghatározott lejtőjű kúpfelületet kitűzni.

F e l o l d á s. Állitsuk fel a műszert az adott pontban, mely a kúp tengelyét ábrázolja, állitsuk be a távcső irányvonalát azon hajlásszögre, mely a meghatározott lejtőnek megfelel, az előbbi II. és III. feloldások szabályai szerint. Ekkor a műszer magasságát megmérvén, s a céltáblát a léczen ezen magasságban megerősitvén, a léczet előre küldjük, mig olyan pontokat találunk, melyekben a lécz felállittatván, az irányvonal a céltáblát metszi. A rúd lábpontjai mindnyájan a kúp felületében fognak feküdni. Ha nem találnánk a földszinén olyan pontokat, melyek ezen feltételnek megfelelnének: ekkor a rudat a földön akárhol fel lehet állítni, be kell igazítni a céltáblát a vizszintes irányvonalba, s a leolvasott magasságból l a műszer magasságát i levonni; a különbség $l—i—f$ a rúd álláspontjának a kúpfelület alatt való mélységét fogja szolgáltatni, s melyet egy, a földbe vert rúdon maradandón meg lehet jelölni.

359. §.

F e l a d a t. Egy, három pont által meghatározott lejtős síkot kitűzni.

F e l o l d á s. Állitsuk a távcső irányvonalát egész szigorral párhuzamossá a limbus síkjával. Ezután húzzuk a limbus síkját annak emelő csavarjaival olyan fekvésbe, hogy az a kitüzendő síkkal szabad szemmel párhuzamos legyen. Most irányozzunk a távcsővel a meghatározott pontok felé; ha az irányvonal a pontok felett vagy alatt egyenlő távban megyen el: akkor a limbus síkja a kitűzendő síkkal párhuzamos, s a távcsővel ezen állásban épen ugy lehet lejtmérni, mintha a limbus vizszintes volna; csakhogy a szintezőt használni nem lehet, hanem helyette a meghatározott 3 pontra való irányzás szolgál biztositékúl, hogy az iránysík még helyéből ki nem mozdult. A többi műtételek a közönséges lejtmérésnél alkalmazottakkal egészen megegyeznek.

360. §.

Feladat. Egy pontból a földszinén egy bizonyos állandó lejtőjü vonalat kitűzni.

I. Feloldás. Állitsuk fel a lejtmérő műszert a vonal közelében, s a léczet a kezdőpontban felállitván, irányozzuk be a czéltáblát a vizszintesbe és mérjük meg annak magasságát l. Tekintetbe vévén a föld görbülését, a kijavított magasság lesz $l—f$. Ezután a kezdőpontból azon irányban, melyben a kitűzendő pont valószinüleg esni fog, 10^0-et lemérvén, számítsuk ki a lejtő szerint 10^0-nek megfelelő esést, $e = \frac{10^0}{m}$, s erősitsük meg a czéltáblát a rúdon $l—e—f+f'$ magasságban, s a léczet a láncz végén állitsuk fel. Ha a czéltábla az irányszálra esik: a pont helyes, különben a láncz végét jobbra vagy balra elmozditván, keressük azon pontot, mely az előbb előadott feltételnek eleget teszen. Ezután a pontot megjelölvén, ebből ismét 10^0-öl hosszú darabot mérünk le azon irányban, a melyben a kitűzendő vonalat fellelni gondoljuk, a czéltáblát pedig most $l—f—2e+f_2$ magasságban erősítjük meg a léczen, s a megfelelő pontot a földszinén az előbbiek szerint felkeressük, s i. t., végre az n-dik czéltábla magassága a léczen lesz:

$$l—f—ne+f_n.$$

Ha már tovább irányozni nem lehet: akkor a rúd az utolsó ponton marad, a műszerrel pedig előre megyünk, s a munkát az előbbi rendben folytatjuk, s i. t.

II. Feloldás. Ha a műszer irányvonalát ferde állásba akarjuk hozni, mint az a 357. §. II. és III. feloldásaiban előadatott: akkor a kitüzést mindig a végpontból kell véghezvinni. E czélból a műszert mindig a rúd helyére kell állítni, s a távcső hajlásszöge a vizszinteshez, és a czéltábla magassága is a léczen állandó marad; de az egy álláspontból kitüzendő vonal hosszára nézve semmi korlátok nem szükségesek, azért a munka mégis gyorsan halad.

361. §.

Feladat. Két adott pont között egy egyenletes lejtőjű vonalat kitűzni.

Feloldás. Válasszunk a két végpont A, B közt közbenső pontokat a, b, c, d, . . . olyaténképen, hogy azok szabad szemmel itélve a kitűzendő vonalba essenek. Mérjük meg ezeknek egymástól való vizszintes távjait olyan görbe vonalban, a mint azt a kitűzendő vonal folyamatja megkivánja, s határozzuk meg a pontok közt lévő eséseket. Legyenek az elsőbbek t_1, t_2, t_3, . . . t_n, az utóbbiak e_1, e_2, e_3, . . . e_n, akkor az egész vonalnak kiegyenesített hossza T, közelítve lesz:

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n.$$

A két végpont között lévő esés E pedig lesz:

$$E = e_1 + e_2 + e_3 \ldots + e_n.$$

Ezen adatokból az egész vonalnak megfelelő közép lejtő lesz:

$$\frac{1}{m} = \frac{E}{T}.$$

Számitsuk most ezen lejtővel a t_1 t_2 t_3 . . . t_n hosszaknak megfelelő eséseket; ezek a lejtmérés által nyert esésektől kölönbözni fognak.

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots \delta_n \text{-el},$$

tehát az a pontot δ_1-el el kell mozdítni helyéből, azaz, az a pontból, a kitűzött vonalra merőlegesen, ezen δ különbséget, mint absolut esést, ki kell tűzni. Azért kell pedig a pontnak a vonalra merőlegesen mozdulni ki helyéből, hogy a vonal hossza érezhetőleg ne változzék. Ezután a második pontot $\delta_1 + \delta_2$-el kell oldalt mozdítni, s i. t. A végpont helyben marad, mert a dolog természeténél fogva $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n = 0$. Ha az a, b, c . . . pontok ilyeténképen kiigazittattak, a kitűzést a meghatározott állandó lejtéssel $\frac{1}{m} = \frac{E}{T}$ szigorúbban lehet végrehajtani; a kitűzött vonalnak a kijavított pontokon a, b, c . . . kell keresztül menni, vagy csak csekély eltéréseket kell mutatni. Ha igen nagy szigorúság kivántatik, az igy szabatosabban kitűzött vonalat meg kell mérni, s a talált hosszat az eséssel még egyszer össze kell hasonlítni. Ha a lejtő valamit változnék: az egyes darabokra eső correctiókat meg kell határozni. A másodszori kitűzés eredményét mindig tökéletesen kielégitőnek fogjuk találni.

III. OSZTALY.

Domborrajzok.

362. §.

1) A magasság-, különösen pedig a lejtmérések adatokat szolgáltatnak a föld physikai felszine alakjának megitélésére. Ezen adatok vagy számokban vannak kifejezve, vagy hossz- és keresztmetszéseket ábrázoló rajzok alakjában vannak előnkbe állítva. Ha ezen méretek a térképen az illető pontoknál feljegyeztetnek, a hosszmetszések pedig a térkép karimáján felrajzoltatnak: a vidéknek domborzatáról már némű felfogást nyerünk. De ezen felfogás csak igen halvány és tökéletlen, s inkább helyi, mint általános természetű, részint azért, mert az adatok nem összefüggő állapotban, hanem szétszórva vannak a térképen, melyeknek egy egészszé összeillesztése élénk képzelő tehetséget igényel; részint azért, mert az adatok különfélesége az összeállítást igen nehezíti. Szükség volt tehát egy oly rajzolási módról gondoskodni, mely az emelkedési viszonyokat a vizszintes térképen összefüggésben ábrázolja, hogy a szemlélő magának az egészről világos fogalmat alkotni képes legyen. Egy ily rajz d o m b o r r a j z nak neveztetik.

2) Egy domborrajztól megkivántatik, hogy abban egyik pontnak s másik feletti magasságát megitélni, s minden pontban a földszine legnagyobb hajlásszögét és annak irányát felösmerni lehessen.

363. §.

1) A domborzat megjelölésével sokáig nem voltak tisztában a mérnökök. A legrégibb földabroszokon a hegyek madártávlatban vannak rajzolva s egymás háta mögé helyzett szénaboglyák alakját mutatják. Ezen rajzolási mód csak azt jelzi, hogy bizonyos helyeken hegyek vannak; de azoknak sem alakját sem meredekségét meghatározni nem képes.

2) Később a domborodásokat árnyékozás által igyekeztek láthatókká tenni, ép ugy, mint a festész a vásznon egy domború tárgy képét természethíven ábrázolni tudja. E czélból a hegyek alakját, bizonyos oldalvilágítást vevén fel, ecsettel világosabb és sötétebb tussal való befestés és elmosás által meglehetős sikerrel tudták előállítni. De ezen mód a hegyoldalak hajlásszöge fekvéséről semmi felvilágosítást sem nyujtott; ezért a czélnak meg nem felelt.

3) A mult század felé az ecsettel való elmosás helyett, ecsetvonások általi árnyékolással találkozunk. Ezen rajz készítésére egy széles, lapos ecset szolgált, melyet világos szinű tus festékbe mártván, egy fésű fogai közt keresztlühúztak. Ez által az ecset hajszálai egy egész sor vékony ecsetecskékre oszlottak szét, melyekkel a papiroson vékony hosszú vonásokat lehetett húzni. Ha ezen húzások a hegyoldal legnagyobb hajlásszöge irányában tétettek, és sűrűn egymás felett és mellett ismételtettek: az árnyékolásnak sajátságos neme állott elő, mely az elmosás felett azon előnynyel bírt, hogy már a hegyoldal hajlásszöge irányát is mutatta; de csak nagy léptéknél adott jó eredményt, kis léptéknél a megkivántató erős kanyarulatokat vele előállítni nem lehetett.

364. §. Lehmann módja.

1) Lehmann szász őrnagy volt az első, ki a domborrajz előállitásában mathematikai elvből indult ki, mely lényegében még mai nap is alkalmaztatik. Legyen CA (357. ábra) egy vizszintes sík; ha erre függélyes sugárok esnek, ezek a sík által mindnyáján felfogatnak, s a sík felett végtelen távban gondolt szemlélő előtt a sík a legnagyobb világitásban látszik. Ha most a sík C körül α szög alatt felemeltetik, akkor csak annyi sugár esik rá, mint annak vetületére CE; a sík világitási foka tehát csökken. Mennél nagyobb lesz az α szög, annál csekélyebb lesz annak megvilágitása; mig végre a függélyes állású sík egészen sötét lesz, mert egy világsugár sem esik rá. Ennélfogva a sík hajlásszöge és annak világossága között bizonyos összefüggés van; t. i. ha a vizszinteshez tartozó teljes világitást 1-nek vesszük, ezen arány származik:

$$1 : \text{világosság} = CA : CA \times cos\alpha = 1 : cos\alpha$$

tehát

$$\text{világosság} = cos\alpha.$$

2) Ha a teljes megvilágitást a fehér színnel ábrázoljuk, mely a rajzpapirosnak természetes színe, akkor a csekélyebb világitást a szürke, a sötétséget pedig a fekete szín fogja ábrázolni. A szürke színt a fehér és fekete vegyületével lehet előállítni olyaténképen, hogy bizonyos mennyiségű fehér festékhez egy bizonyos mennyiségű feketét vegyítünk; vagy pedig a fehért és feketét a megkivántató viszonyban felváltva egymás mellé rakjuk. Ha ezen színváltakozást olyan nagy távból szemléljük, hogy a színek összevegyüljenek, a szürke szín benyomását fogjuk érezni.

3) Könnyű átlátni, hogy valamely felületnek szürkesége felől a szemben keletkező benyomás nem a fehér és fekete felületek absolut nagysága, hanem csak azoknak egymáshozi viszonyától függ, úgy, hogy ugyanazon benyomást vastagabb, vékonyabb, sűrűbb, ritkább, hosszabb, rövidebb vonások által lehet előidézni, csak a szem távját válasszuk olyan nagynak, hogy a vonásokat egymástól megkülönböztetni ne lehessen. Ha tehát a fehér és fekete felületeket egyenlő hosszaságú egyközények alakjában gondoljuk: ezek a szélességekkel lesznek egyenes viszonyban.

Az egyközények hossza, és azoknak absolut szélessége egészen közömbös, s csak a fehér és fekete szélességei között lévő viszony ösmerete szükséges.

4) E szerint a szürke színt, mely egy bizonyos α szög világitási fokát méri, fekete vonásoknak a fehér papiroson egymás mellé felrakása által lehet előállítni, melyeknél a fehér hézagok szélességének a fekete vonás vastagságával bizonyos meghatározott viszonyban kell állani. Ezen viszonyt az α szögre nézve a felfogott és elveszett sugárok száma által fejezhetjük ki; azaz:

$$\text{fehér} : \text{fekete} = CE : EA = \cos\alpha : \sin.\ \text{vers}.\ \alpha.$$

Hogy tehát valamely hajlott síknak fekvését ábrázolni lehessen, csak arra van szükség, hogy a sík felületét sűrűn egymás mellett fekvő fekete vonásokkal behúzzuk, (straffiren), figyelmezvén arra, hogy a vonások a legnagyobb hajlásszög irányában feküdjenek, s a vonások vastagsága és a hézagok szélessége közötti viszony az előbbi aránynak megfeleljen.

365. §.

1) Ezen szigorú mathematikai törvény alkalmazása a gyakorlatban tetemes nehézséggel jár, mert kisebb szögeknél, —

melyek pedig a gyakorlati esetekben legtöbbször előfordulnak — mind a *cos.*, mind a *sin. vers.* csak lassan változik. Ezért a szigorú viszony $CE : EA$ helyett, a csak közelitő, de könnyebben előállítható viszonyt $BD : DA$ lehet tenni. E szerint:

$$\text{fehér} : \text{fekete} = (90^0 - \alpha) : \alpha.$$

Sőt tovább menvén az elhanyagolásban, minthogy 90^0-ú hajlásszögek összefüggő állapotban a természetben nem léteznek, csak mint sziklalapok, ezeknek alakját pedig természeti hűséggel lerajzolni nincs érdekünkben; némelyek a legnagyobb, tehát feketével jelölendő hajlásszögnek 45^0, mások 50, vagy 60^0-ot vettek fel. Ha mi 50^0-ot választunk, ezen arányt kapjuk:

$$\text{fehér} : \text{fekete} = 50^0 - \alpha : \alpha.$$

Helyettesítsünk ezen arányban α helyett 0^0-tól kezdve 5^0-onként növekedő szögeket, következő tábla áll elő:

0	Fehér	Fekete	Fehér : Fekete
0	50	0	fehér : —
5	45	5	9 : 1
10	40	10	4 : 1
15	35	15	7 : 3
20	30	20	3 : 2
25	25	25	1 : 1
30	20	30	2 : 3
35	15	35	3 : 7
40	10	40	1 : 4
45	5	45	1 : 9
50	0	50	— : fekete

Ezen lépték szerint a rajzolónak 9-féle viszonyt kell előállítni, és a térképen megkülönböztetni egymástól, ha a hajlásszögeket 5^0-onként meg akarja határozni; olyan munka, mely tetemes, és csak hosszú gyakorlás által nyerhető kézi ügyeséget kiván. (368. ábra).

2) Ezen munka nehézségein többféleképen igyekeztek segítni. Schienert, Schneider, Humbert és mások modora szerint a vonások nem mind simán, hanem némelyek közülök pontozva, mások reczésen rajzoltatnak. A sima, reczés és pontozott vonalak felváltva, és többféle rendben combináltatván, a szükséges különbfeleségeket könnyen ki lehet hozni. Így állott elő a Müffling-féle scala (369. ábra).

Ezen modor könnyen kivihető és megérthető eredményt ád, de a jeleknek mathematikai alapjuk nincsen, hanem azok csak önkény szerint választott — conventionalis — jelvényeknek tekinthetők.

3) Szebb eredményt lehet elérni a nélkül, hogy a kiviteli nehézségek tetemesen nagyobbodnának, ha a vonásokat nem tisztán fekete tussal, mint Lehmann, hanem három különböző sötétségü festékkel húzzuk a papiroson, úgy hogy a három legalsó fokot világos, a három középsőt barna, a három felsőt pedig sötétbarna festékkel húzzuk. Ekkor a tollal a 9 különböző sötétségi fok kihozatalára elég csak háromféle vonást begyakorolni, melyek p. o. 2 : 1, 1 : 1, 1 : 2 viszonynak megfelelnek. A rajzolat a crayon-rajzhoz fog hasonlítni; mig a fekete tussal 9-féle vastagságú vonásokkal rajzolt kép a tollrajz jellemét viseli magán.

366. §. Vizszintes rétegek.

1) A föld felületének alakjáról tiszta fogalmat nyerünk akkor is, ha a földszinét vizszintes felületekkel metszük, melyek egymás felett bizonyos meghatározott, legegyszerűbben állandó magasságban állanak, s az igy képződött rétegeknek metszésvonalait a térképre vetítve felrajzoljuk. A rétegek magassága a körülményekhez képest kisebb-nagyobb, de minden esetre csak olyan nagy lehet, hogy a metszésvonalak a föld felületének nevezetesebb töréseit át ne ugorják. Ha ez mégis megtörténnék: a rétegek közé eső árkokat, gátakat, s más keskeny folytonosság-megszakadásokat a Lehmann módja szerint, vonásokkal kell berajzolni. Általában véve a rétegek módja a vonások rendszerével szoros kapcsolatban áll, és összeegyeztethető; mert a vonásoknak a vizszintes vonalakra mindenütt merőlegesen kell állani. Ha tehát a Lehmann módja szerint akarnók is a domborrajzot készítni: czélszerű előbb a felületnek vizszinteseit, legalább szemmérték szerint, berajzolni, s a vonásokat ezekhez alkalmazni. Ezen vizszintes vonalak és a vonások fekvése a felület alakjától függ, s az egyszerű felületeken, melyekre akármely összetett hegylánczolatot felbontva képzelhetünk, a mértan elvei szerint könnyen meghatározható.

2) Megemlítendő, hogy akár a Lehmann-féle vonások, akár a vizszintes rétegek által akarjuk valamely domborzatot ábrá-

zolni, a magasság és mélység egészen egyenlő alakban tűnnek fel, úgy hogy a rajz egészen határozatlan hagyja, valjon egy pont a másik felett, vagy alatt fekszik-e? Ennek megitélése végett physikai törvényekhez kell fordulnunk, melyek szerint a mélységekben vizfolyások, árkok, patakok, tavak stb. képződnek, s ezen ösmertető jel által a mélységeket az emelkedésektől biztosan meg lehet különböztetni.

367. §. Hegyelemek.

Minden hegylánczolatban, legyen az bármily összetett alakú, nehány egyszerű mértani alakokat lehet megkülönböztetni. Ezek:

1) Sík (358. ábra). Ha ez vizszintes síkok által egyenlő vastagságú rétegekre metszetik: a képződő vizszintes vonalak egyenesek és párhuzamosok lesznek, melyek a vizszintes vetületben egymástól egyenlő távban álló, párhuzamos fekvésű egyenes vonalak alakjában mutatkoznak. A vonások pedig a vizszintesekre merőlegesen álló, egymástól egyenlő távban húzott, egyenlő vastagságú egyenes vonalak által ábrázoltatnak, melyek között a fehér és fekete, vagyis a szürkeség viszonya mindenütt állandó.

2) Vizszintes henger (359. ábra). Ha ezt rétegekre szétbontjuk: a vizszintes vonalak a henger tengelyével párhuzamos vonalak lesznek, s a térképen szintén párhuzamos egyenes vonalak által ábrázoltatnak. A vonások ezen esetben szintén párhuzamos egyenes vonalak alakjában tűnnek előnkbe; de ezek rétegenként különböző vastagságuak, mert a szürkeségi viszony rétegről rétegre változik.

3) Az egyenes körkúp. (360. ábra). Ennek vizszintesei egymástól egyenlő távban álló központos körök, a vonások pedig radialis irányban fekvő egyenlő vastagságú egyenes vonalak által képeztetnek, melyek közt a szürkeségi viszony mindenütt állandó. Minthogy pedig a vonások szétágaznak, a szürkeség állandó voltának előállitására szükséges, hogy a vonások is belülről kifelé vastagodjanak, vagy trapez alakúvá rajzoltassanak. Sőt a középpont körül, az első rétegben, egyik végén hegyes, másikon pedig vastag, háromszög alakú vonásokat kell rajzolni, s közbeeső segéd-vonásokat is iktatni be, hogy a viszony állandóságát elérni lehessen.

4) A gömb-kupola és üst. (361. ábra). Ennek viz-

szintesei a csúcstól a szélek felé mindinkább szűkülő párhuzamos körök által képeztetnek; a vonások pedig itt is radialis irányú egyenes vonalak által ábrázoltatnak, melyek a szürkeségi viszonyhoz képest a középtől kifelé mindinkább vastagodnak.

5) A szarv és szurdok. (362. ábra). Ennek vizszintes vonalai a csúcspontban legsűrűbben eső, a szélek felé mindinkább táguló, párhuzamos körök által ábrázoltatnak; a vonások pedig szintén radialis irányban fekvő egyenes vonalak által képeztetnek, melyek a szürkeségi viszonyhoz képest, a csúcspontnál legvastagabbak, a szélek felé pedig mindinkább vékonyodnak.

368. §.

Ha ezen legegyszerűbb alakok fekvése megváltozik: azoknak kinézése a rajzban az előbbiektől egészen különbözővé válhat. Például szolgálhatnak:

1) Egy ferde fekvésű henger. (366. ábra). Ennek vizszintesei hasonló fekvésű ellipticus görbe vonalak, melyek egymástól állandó távban vannak; vonásai pedig görbe vonalak, melyeknek azon két vizszintesre merőlegesen kell állani, melyek közt húzatnak. A fekete és fehér közötti viszony különböző helyen különböző, de a henger tengelyével párhuzamos vonalnak minden pontjában állandó.

2) Egy ferde fekvésű körkúp a 365. ábrában van ábrázolva. Ennek vizszintesei körök ugyan, de mindeniknek másmás középpontja van. A vonásoknak itt is merőlegesen kell mind a két vizszintesre állani, melyek közt vannak húzva; ezért ezek is görbék lesznek, és a szürkeségi viszonyhoz képest különböző helyeken különböző vastagsággal birnak. A maximum és minimum azon vonalra esik, mely a kúp csúcsát a vizszintes körök középpontjaival összeköti.

369. §. Összetett alakok.

Az egyszerű alakok egymással a legkülönfélébb csoportositásban jöhetnek elő, s vagy metszésvonalakat — éles gerinczeket, vályukat — képeznek, vagy érintkezőleg mennek át egymásba. A metszésvonalak vagy vizszintesek, vagy ferdék. Az első esetben azok a rétegek vizszinteseivel metszésbe nem jöhetnek, mivel a természetben a felsőbb rétegek az alsóbbak által mindig körülfogva találtatnak; előre hajló felületek — kivévén a sziklákat, melyeknek alakjával nem bajlódunk — physikai okoknál fogva nem léteznek. Az utolsóban a vizszintes vonalak a gerinczekben törést szenvednek. A vonások pedig az első esetben a gerinczre merőlegesen, az utolsóban ferdén esnek, és mindig élesen, a hajlásszögeknek megfelelő viszony szerint választott vastag vonásokkal rajzoltatnak.

Ha az átmenetel érintkezőleg történik egyik felületből a másikba: akkor kerekded alakú ormok és völgyek képződnek, s a vizszintes vonalak törései helyett kisebb-nagyob görbületű ívecskék foglalnak helyet, s a vizszintes vonalak folytonos görbék által ábrázoltatnak. Ezen ormokon és völgyeken a felületelemek hajlásszögei csak fokozatosan, nem pedig rögtön változnak; ezért a vonások rajzolásánál is a szürkeség viszonyában csak lassú, fokozatos átmenetelt kell szem előtt tartani.

Példa gyanánt szolgálnak:

a) K é t s í k, melyek egymást egy vizszintes gerinczben metszik (363. ábra). Ezeknek vizszintesei és vonásai a 367. §. 1-ben előadottaktól nem különböznek; csak a fekete és fehér közötti viszony más-más mind a két sík vetületében.

b) K é t s í k, melyek egy hajlott fekvésű gerinczben metszik egymást (364. ábra). Ebben a két sík vizszintesei egymáshoz hajolnak, s egymást a gerincz vetületében metszik; ugyszintén a vonások is.

c) V e g y e s a l a k (367. ábra), melyben a szelid átmenetelek, s az ezek által képzett ormok és völgyek igen tisztán látszodnak.

370. §.

1) A domborrajzok gyakorlati kivitelére nézve meg kell jegyezni, hogy valamint a térképi jeleknek jelvényeknek irásnak stb., úgy a vonásoknak is a térkép léptékével összhangzásban kell lenni; azaz: mennél nagyobb a lépték, annál vastagabb hosszabb vonásokat, és ritkábban kell azokat rajzolni; ellenben mennél kisebb a lépték, annál finomabb rövidebb és sűrűbb vonások kellenek. Közönséges kicsinyítésnél, mint azt felvételeknél szoktuk használni, 1" hosszra 30—35 vonást lehet húzni. Földabroszokon, melyeknek kicsinyítése sokkal nagyobb, mint a fel-

vételi térképeké, 1"-re 70—80 vonást találunk. A vonások száma tehát a térkép kicsinyítésétől függ; de az az ábrázolandó felület hajlásszögétől egészen független, azaz: akár vékony, akár vastag vonásokat kell húzni, azoknak száma ugyanazon térre, ugyanazon térképen állandó legyen; különben a domborrajz nem lesz egyöntetű, s a vonások összeolvadása nem fog az egész térképen mindenütt ugyanazon távolságban a szemlélőtől beállani, mi a csalódást tetemesen csökkenti.

2) A tanuló készitsen magának mindenek előtt egy domborléptéket, (368. ábra) mely egy, öt fokonként növekedő, hajlott lapokból összetett hengert képez. Ennek minden rétegein igyekezzék a legnagyobb szigorral a fekete és fehér közötti viszonyt vonásokkal előállítni. Ezen munkánál gyakorlás hiánya miatt körzőt és kihuzó tollat is lehet használni. A vonások az egymás alatt álló rétegekben nem huzatnak egyfolytában, noha azoknak száma ugyanazon hosszra egyenlő lévén, ez valósággal lehető volna, hanem minden következő sorban a vonások az előbbi sor vonásai közé helyeztetnek. Ezen váltakozás a szemnek kellemesebb, mint a végnélküli egyenes vonal. Ezen scala gyakori szemlélése által a szem megtanulja a fehér és fekete közötti viszonyt becsülni, s a rajzoló képessé lesz akármely adott hajlásszöget a térképen domborrajzban előállítni, vagy azt a térkép domborrajzáról leolvasni.

3) Ezután gyakorolni kell a kezet síkok rajzolása által párhuzamos, egyenlő vastagságú és távú egyenes vonalak húzásában, megjegyezvén, hogy $^1/_8$"-nél hosszabb vonalat húzni sikeresen alig lehet. Minden fokú vastagságra más, szélesebb, vagy keskenyebb orrú tollat kell használni, hogy a vonalat kellő vastagságban a tollra gyakorolt erőltetett nyomás nélkül lehessen húzni, akkor azok szebben sikerülnek, különösen a távok egyenlőségét biztosabban el lehet találni. Minden vonást maga felé húzzon a rajzoló, oldal felé húzott vonások ritkán sikerülnek. Ezért tehát a rajzoló a rajztáblát mindig úgy fordítsa, hogy a vizszintes vonal azon a helyen, a hol a vonást húzni kell, a két szemet összekötő vonallal, illetőleg a húzandó vonás a láttengelynek a papirosra gondolt vetületével párhuzamos legyen.

4) Ezután gyakorolni kell a kezet trapezium alakú egyenes vonalak húzásában, melyre kúp, gömb és szarv felületek példákat

szolgáltatnak. Így végre a görbe felületekre átmenvén, a vékonyodó vagy vastagodó görbe vonalak rajzolására kerül a sor.

A görbe felületek rajzolása végett be kell előbb rajzolni a vizszinteseket s ezekre helyenként az azokat merőlegesen átmetsző vonalakat; ezek a részletes vonások rajzolásánál irányadó váz gyanánt fognak szolgálni. Ha a vonások hossza két egymásután következő vizszintes közt $^1/_8$"-et meghaladna, egy közbenső réteget kell beigtatni. A felületek hajlásszögeit pedig vagy a természetben tett mérések, vagy más adatok, ha másképen nem, szemmérték szerint kell meghatározni. Jól készített domborminták, melyeken az egyenlő magasságú rétegeknek megfelelő vizszintes vonalak fel vannak rajzolva, ezen gyakorlatoknál kitünő szolgálatot tesznek, s a tanuló szemmértékének kiképzésére rajzolt előpéldányoknál sokkal czélszerűbbek. Ezen utóbbiak legfeljebb csak megtekintésre használtassanak, hogy a tanuló a készitendő rajz jellemét ne csak elméletből, hanem szemlátomásból is ösmerje.

371. §. Hegyek felvétele a természetben.

Ha egy hegyláncz domborzatát le akarjuk rajzolni: arra a szükséges adatokat részint vizszintes, részint magassági mérések által kell megszerezni.

1) Midőn a domborzatot nagy pontossággal kell kijelölni, mint az kicsinyben egyes házhelyek, épitési telkek térrajzán, nagyobb kiterjedésben pedig hegyi vaspályák tervezéséhez megkivántatik: a magassági viszonyokat lejtmérés által kell meghatározni, s e czélból vagy csak egyes hossz- és keresztmetszések vétetnek fel, vagy az egész tér lejtméretik (351. §.). Ezen adatokból azután a vizszintes vonalakat kellő pontossággal meg lehet állapítni, s a térképen be lehet rajzolni.

2) Ha a megkivántató pontosság nem olyan nagy, mint az előbbi esetben: akkor czélszerűbb egyes pontok magassági különbségeit határozni meg, a főbb pontokra nézve háromszögtani módon; a többiekre nézve barometerrel vagy aneroiddal, mely könnyen hordozhatósága miatt e czélra különösen alkalmas, és ezen egyes szétszórt adatokat a hegyoldalak hajlásszögeinek közvetlen megmérése által kiigazítni. Ezen méréseknél bizonyos rendszeres eljárást kell követni; mert egy részről a természetnek egy fontos, s az alakok jellemzésére befolyással biró pontját sem

szabad elmellőzni; más részről pedig tulságos részletezésbe sem kell ereszkedni, nehogy a műszer hibahatárain belül eső apróságok felvétele által szükségesképen ellenmondásokba keveredvén, ezek által az egésznek felfogása s átnézhetősége veszélyeztessék.

3) Legelőbb is a hegycsúcsokat kell meghatározni; ezekből a völgyekbe leereszkedvén, azoknak fenekeit minden töréseikkel együtt fel kell venni, követvén mindenütt a természet által képezett kanyarodásokat. Ezután a hegyormokat és gerinczeket kell megállapítni, felkeresvén szintén a természet által alkotott folytonosság-megszakadásokat. Ezek szolgáltatják a főbb metszések rajzolására megkivántató adatokat. A völgyek és hegyormok vagy gerinczek közötti tért, mely rendesen még sokkal nagyobb, hogysem azt a térképen szabad kézzel betölteni lehetne, átmetszések által tovább kell feldarabolni, hogy a képződő hegytörzsökök lehetőleg elemi alakúak legyenek. A felvett vonalakat, s az azokon választott pontokat a vizszintes vetületben berajzolván, egy hálózatot nyerünk, mely azokat kicsinyben híven ábrázolja. Azután a nyert magasságokat valamely összehasonlitási síkra vonatkoztatva, szintén hosszmetszésekbe összeállítsuk, s ezeken a bizonyos állandó vastagságú rétegeknek megfelelő vizszinteseket berajzoljuk. Ezek a hosszmetszéseket át fogják szelni, s a metszéspontok vetületei a térképen felrakatnak. Az így nyert, ugyanazon vizszintesre vonatkozó pontok végre folytonos húzás által összeköttetnek, gyakorlott szemmérték által segítvén ott, hol a pontok között nagyobb hézagok mutatkoznak. Ilyeténképen a térképen a rétegek vizszintesei meg lesznek határozva, s a rajz a magassági viszonyokról világos képet fog nyujtani.

4) Ha most a rétegeket a Lehmann-féle mód szerint vonásokkal akarjuk ellátni, előbb a különböző rétegekben lévő hajlásszögeket kell meghatározni. Ezek már több helyt közvetlen mérés által adva vannak, másutt a térképből a vizszintesek segitségével meghatározhatók. Legyen egy réteg magassága m, annak hajlásszöge α, akkor két szomszéd vizszintes közötti táv:

$$v = m \; cotg\alpha = m \; tg \, (90^0 - \alpha).$$

Rajzoljunk (370. ábra) egy egyenes vonal AB mellé sorjában 5^0, 10^0, 15, . . . szögeket, emeljünk fel AB-ra egy merőlegest: akkor erre a réteg magasságát $m = AC$ feltévén, s C-ből AB-hez egyközűt húzván, ez a szögek szárát metszi, és a CD vonalon elmetszett, és a C pontból számitott darabok CE a vetületet v fogják szolgáltatni. Ugyanis:

$$CE = AC.\,tg\,90^0 - \alpha)$$

ha tehát $AC = m$, lesz $CE = v$.

Ezen lejtőlépték segélyével, akármi legyen a réteg magassága, melynek mindig ösmeretesnek kell lenni, két szomszéd vizszintesnek akármely két pontja közt gondolt egyenes vonal hajlásszögét meg lehet határozni, s a vonásokat ezen hajlásszögeknek megfelelőleg lehet rajzolni; megjegyezvén ezen helyen is, hogy ha a vizszintesek közötti táv valahol a vonásoknak a gyakorlatban előjövő legnagyobb hosszát meghaladná, a szükséghez képest egy vagy több segédréteget, illetőleg vizszinteseket kell beigtatni.

372. §.

1) Ha a domborrajz a Lehmann-féle mód szerint van készítve, a földnek keresztmetszését a térképről könnyen elő lehet állítni. Legyen t. i. AB a kivánt keresztmetszés vetülete (368. ábra), mely a vonásokkal párhuzamos fekvésű; a v értékeit minden rétegből egyenkint levévén, egy összehasonlítási sík horizonjára fel kell rakni, s a nyert pontokban merőlegeseket húzván, ezeket a rétegeknek szürkeségi viszonyából megbecsült hajlásszögei alatt húzott vonalak által metszeni kell. Ezen metszésvonalak összefüggő alakja a földnek keresett átmetszését szolgáltatja; a merőlegesen elmetszett darabok pedig az összehasonlítási sík kezdőpontjára vonatkozó magassági méreteket jelentik.

2) Ha a keresztmetszés CD a vonásokat ferdén metszi, előbb a derékmetszés AB alakját kell keresni, ez által a rétegek magasságai meg lesznek határozva, s ezek a ferde metszésre nézve változatlan maradnak. Tehát csak a ferde metszésre vonatkozó v-ket kell a térképről levenni, a derékmetszésben talált magasságokat pedig változatlan megtartani. A metszés nem lesz olyan meredek mint a derékmetszés volt.

3) Sokkal egyszerűbb a dolog, ha a domborzat egyenlő vastagságú rétegeknek megfelelő vizszintesek által van ábrázolva. Ekkor a v értékeit a térképről kell levenni; a magasságok pedig

36*

a rétegek száma, és azoknak ösmeretes vastagságából önként következnek. Meg kell itt említni, hogy a vizszintesek közé eső dombcsúcsok fekvése a térképen mindig megjelöltetik és azoknak magassága mindig feliratik.

373. §.

1) Ha a térkép vizszintesek által van domborítva (371. ábra), egy állandó lejtőjű vonalat a térképen úgy lehet rajzolni, hogy a lejtőnek, s a réteg vastagságának megfelelő v-t a léptékről levévén, a körző egyik hegyét a kiindulási pontban a leszúrjuk, annak másik hegyét pedig a szomszéd vizszintes vonalra b helyezzük, s i. t. Ha a vizszintesek közötti táv igen nagy, vagy a lejtővonal egy rétegen az egyenestől igen különböznék, mi különösen völgyek és gerinczek közelében fog beállani: akkor ezen a helyen két-három új vizszintest kell beiktatni, s a v-t kétszer, háromszor kisebbnek kell venni (lásd $mnpqr$ . . .).

2) Hasonlóképen kell működni, ha a térkép két adott pontja közt egy állandó lejtőjű vonalat kell rajzolni. Itt a két pont közötti magassági különbséget a térképről le lehet olvasni, a kitűzendő vonal hosszát pedig, szintén a térképről, előlegesen szabadszemmel való berajzolás után, le lehet venni. Ezáltal $tg\alpha$ adva lesz, melyből, a réteg ösmeretes magassága tekintetbe vételével, a v értékét meg lehet határozni, illetőleg ha az m rétegvastagságot a lejtőléptéken feltesszük, az α-nak megfelelő v-t arról le lehet venni. Ezen nyilással most az előbbi pont útmutatása szerint kell bánni, csak azt jegyezvén meg, hogy ha az első pont nem tökéletesen valamely vizszintesre, hanem két vizszintes közé esnék: az első v meghatározására nem a teljes rétegvastagságot, hanem annak a pont fekvésének megfelelő aránylagos részét kellene venni. Az első próbára az eredmény ritkán fog teljesen kielégitő lenni; de ha a vonal hossza az első közelitő meghatározás után pontosabban ösmeretessé lett: a v javított értékét lehet keresni, s ezzel a munkát ismételni; mig végre a vonal tökéletesen az adatott végponton megyen keresztül, s a vizszintes hosszak is egyeznek.

HARMADIK RÉSZ.

A felsőbb földmértan elemei.

374. §. Fokmérés. Országmérés.

A felsőbb földmérési munkálatoknak két czéljuk lehet, t. i. vagy a földtest alakjának és nagyságának kipuhatolása lebeg szemünk előtt, s akkor a munka fokmérésnek neveztetik, vagy pedig azt akarjuk, hogy a mérések egy ország részletes felméréséhez megkivántató fő- és alappontokat szolgáltassák, ekkor az országmérésnek neveztetik. A két munka lényegben nem, hanem csak kiterjedésben különbözik egymástól, úgy hogy minden jól véghezvitt országmérés adatokat szolgáltat a fokméréshez is. A mérések mind a két esetben az állam költségén tétetnek, minthogy azok nem annyira egyesek, mint inkább a tudomány és a közügy érdekeinek szolgálnak és nagy költséggel járnak.

375. §. A fokmérés története.

1) Már az ó korban is tétettek kisérletek a földtest nagyságának meghatározására, de nem minden népnek volt tiszta fogalma annak alakjáról. A régi görög bölcsek a földet tányér alakúnak gondolták, melyet köröskörül víz környez. Az egyptomiak és chaldaeusok, s utánnok Aristoteles azt már helyesebben gömbalakúnak tartották és az alexandriai iskola tudósai Eratosthenes, Posidonius meg is kisérlették annak megmérését. E czélra elegendő egy délllő ívet, a megfelelő középponti szöggel együtt megmérni; ebből egy arány segitségével az egész karimát ki lehet számítni. De ezen mérések igen tökéletlenek voltak.

Jobb sikert mutattak fel az arab tudósok, kik a sennaari síkon megmértek 2^0 délllő ívet, s az északiabbnak hosszát 56, a déliebbét pedig $56^2/_3$ arab mértföldnek találták. Az elsőbb — a mennyire az arab mértékről némi tudomásunk van — 56363, az utóbbi 59057 Toisét ád.

Európában az első fokmérési kisérlet a XVI. században tétetett. Fernel a déllő ív egy fokának hosszát Páristól északra Amiens felé egy kocsikerék forgásai által meghatározván, azt 57070 Toise-nak találta.

2) Mindezen kisérletek azon hibában sínlenek, hogy az ív hossza közvetlen méretett meg, mi a helyszin physikai nehézségei miatt a kellő pontossággal alig eszközölhető. Schnellius német-alföldi tudós volt az első, ki 1615-ben egy az előbbitől lényegesen különböző módot hozott alkalmazásba, mely még mai nap is használatban van. Ő t. i. egy déllőnek két pontját (Alkmaar és Bergenopzoom) egy összefüggő háromszög-hálóval összekapcsolván, megmért egy oldalt a mezőn a háromszögek szögeivel együtt, és ezekből számítás által kereste a háromszögek oldalait, valamint a két végpont között befoglalt átlót is, azaz: a fent emlitett déllő ívet. Ekképen az északi szélesség 52-ik foka körül egy szélességi fok hosszát 55072 Toisenak találta. Később kétség merülvén fel benne munkájának helyes volta iránt, a mérést ismételte, de a munkát csak halála után Muschenbröck végezte be 1629-ben, ki 57033 Toiset talált.

3) Picard 1669-ben Francziországban Malvoisin és Amiens közt 57060 Toiset talált. Ezen munkát Cassini Domokos 1683—1700-ig a pyrenaei hegyekig, Lahire pedig Dünkirchenig folytatta, és Cassini közzététele szerint egy szélességi fok hossza

Páris	és	Bourges közt	= 57098	Toisenak
»	»	Amiens »	= 57060	»
»	»	Dünkirchen »	= 56970	»

találtatott. Innen azt következtették, hogy a szélességi fokok hossza az egyenlitőtől a sarkpontok felé kisebbedik, tehát a föld nem gömb, hanem hosszúkás forgási ellipsoid alakú. Ezen nézet ellenében Newton azon feltevésből indulván ki, hogy a föld eleinte folyós állapotban volt, azt állitotta, s ebben Huyghens által is támogattatott, hogy a földnek összenyomott forgási ellipsoid alakúnak kell lenni. Ezen állitást Richer azon tapasztalása is megerősítette, hogy a másodpercz-inga hossza Cayenne szigetén $4^0\,56'$ északi szélesség alatt $1^1/_2$ vonallal rövidebb, mint Párisban. Ezen időtől kezdve a fokmérés feladata egészen megváltozott, most már t. i. a mérések által azt kellett eldönteni, valjon a föld hosszúkás, vagy összenyomott elipsoid alakú-e? milyen nagy annak külpontossága, vagy lelapulása, és milyen nagyok annak tengelyei?

4) Csakhamar belátták, hogy a Picard-féle mérés a megmért ív rövid volta miatt nem alkalmatos arra, hogy a föld alakja feletti véleményre biztos alapot nyujthasson; hanem különböző szélességek alatt kell fokméréseket tenni. E czélból a franczia akademia javaslatára Bouger, La Condamine és Godin akademikusok 1735-ben Peruba küldettek, kik az egyenlitő alatt Tarqui és Cotchesqui között, egy 3⁰ hosszú déllő ívet megmérték. Ezen idő alatt egy második bizottság tagjai Maupertuis, Clairaut, Camus s mások Lapplandba utaztak, s a sarkkör alatt Torneától északra egy 1⁰ hosszú déllő ívet szintén megmérték; La Caille pedig a Cassini-féle méréseket Francziaországban ujra megvizsgálta. Ezen mérések következő eredményekre vezettek: egy szélességi fokív hossza volt

Péruban	0⁰	alatt	= 56753	Toise
Francziaországban	46⁰ 52′ 2″	»	= 57059·5	»
Lapplandban	66⁰ 20′ 0″	»	= 56405	»

tehát a Newton állitása igazolva lett. A föld lelapulását $^1/_{178}$-nak találták; ha pedig a három fokmérést párosával összefoglalták,

a pérui és francziaországi mérésekből $\frac{1}{324}$-t,

a pérui és lapplandi » $\frac{1}{209}$-t,

a francziaországi és lapplandi » $\frac{1}{115}$-t nyertek eredményül.

5) A franczia forradalom alatt elhatározta a nemzeti convent a természetre alapitott mérték- és súlyrendszer behozatalát és megbizta Delambre és Meehain csillagászokat, hogy a párisi déllőt ujra megmérjék és a munkát még tovább is folytassák. Ezen munka felülmul minden előbbieket pontosság tekintetéből s összekötvén Dünkirchent (51⁰ 2′ 8·″5 ész. szél.) a Montjoui erőddel Barcellonában (41⁰ 21′ 46·″58 é. szél.) egy 9⁰ 40′ 21·″92 hosszú déllő ívet határoz meg, melynek hossza 551584·72 Toise. Ebből és a pérui mérésből a lelapulást $\frac{1}{334}$-nek s a déllőkör negyedrészének hosszát 5130740·740 Toisenak találták, melynek

10 milliomodrészét vették törvényes hosszegységül méter név alatt. Ennek hossza tehát = 443·296 pár. vonal.

A franczia fokméréshez csatlakozik az ángol fokmérés Dunnon és Clifton közt (50° 37′ 8″—53° 27′ 32″ északi szélesség); ehez a dán fokmérés Hamburgtól Jütland északi csúcsáig; ehez az orosz Belin és Hochland szigete közt (52° 31′ 48″—60° 5′ 10″ északi szélesség). A dán fokméréshez csatlakoztak ezenkivül dél felé a hannoverai Göttingától Altonáig (51° 31′ 48″—53° 32′ 45″ ész. szél.); ehez a Hessen, Thüringia, Brandenburgon át Sléziáig, ettől Posenen, nyugoti Poroszországon keresztül, egész a Frische Haffig terjedő mérések, melyek a franczia, bajor és osztrák méréseket egymással összekapcsolják. Bessel és Baeyer keleti Poroszországban szintén vittek véghez egy fokmérést Memel és Trunz között, az orosz fokmérésnek a königsbergi csillagdával való összekötése végett.

Továbbá megmérték még a francziák a párhuzamos körív hosszát Brest és Strassburg közt, ehhez csatlakozik Zach tábornok mérése, továbbá a bajor és osztrák munkálatok, ugy hogy az atlanti tengertől egész Bukovináig az egész ív hossza meg van mérve.

Végre megemlitendő még két fokmérés Keletindiában, melyek a péruit mind kiterjedésökre, mind pontosságukra nézve jóval felülmulják. Az elsőbb Punnae és Namthabad (8° 9′ 38″—15° 6′ 1′ ész. szél.), a második Trivandeporum és Paudree közt (11° 44′ 53″—13° 18′ 49″ ész. szél.) fekszik.

6) Ezen mérések kimutatták, hogy a föld mathematikai alakja a forgási ellipsoidtól egy kevéssé különbözik. Bessel azt mondja felőle, hogy a föld valóságos mathematikai felülete a forgási ellipsoid felületéhez ugy van, mint egy hullámoktól zajló tó felülete annak nyugodt felszinéhez. Hol feküsznek az emelkedett helyek és a mélyedések, azt eddig megmondani nem tudjuk. Ezen kérdésre csak a most munkában levő európai fokmérés, mely Európa legnagyobb részére kiterjed, s melyben a mérések nemcsak a déllő, hanem a parallel körök irányában is az eddig elérhető legnagyobb pontossággal eszközöltetnek, lesz hivatva határozott feleletet adni.

376. §. Felosztás.

A fokmérési feladatoknak egyik legfontosabb része a kitűzött pontok geographiai fekvésének meghatározása. Ezt kétféleképen lehet véghezvinni, u. m. csillagászati és földmértani úton. Az elsőbb a feladatot az egyes pontoktól és a földtest alakjától függetlenül oldja fel; mig az utóbbi feltételezi, hogy a föld alakja és nagysága már közelitőleg ösmeretes. A kétféle eredmény közt mutatkozó különbségből a feltételben létező hibára lehet következtetni, s annak javítását eszközölni. A felsőbb földmértan tehát 3 szakaszra oszlik, s ezek:

I. A csillagászat elemei;

II. A tulajdonképeni felsőbb földmértan;

III. A földabroszok készitésének elmélete.

Ezeket megelőzi a legkisebb négyzetek elméletének rövid ösmertetése és követi egy toldalék a napórákról.

A legkisebb négyzetek elmélete.

377. §. Alapelv.

Minden feladat mathematikai alakba öltöztetve változó és állandó mennyiségek közötti relatiókban — egyenletekben — nyer kifejezést. Ezen állandó mennyiségek közt némelyek már a feladat természete által meghatározott számokból állanak; mások meg nagy pontossággal meg vannak már állapitva, mint p. o. a Ludolf számja π, a nehézség gyorsulása g, a természetes számok logarjai, a háromszögtani függvények, a mértékek közötti viszonyszámok, a fajsúlyok stb.; némelyek azonban még egyelőre határozatlanok, s azokat vagy közvetlen mérések által, vagy közvetett módon meg kell határozni; csak akkor mondhatjuk, hogy a feladat teljesen fel van oldva.

Ilyen esetekben rendesen több észlelést csinálunk, mint a mennyi a feladat feloldására okvetetlen szükséges azért, hogy a feloldást többféleképen lehessen teljesítni s ha az észlelési adatok hibátlanok volnának, a keresendő mennyiségeknek mindenkor ugyanazon értékeit kellene kapnunk, akármelyik combinatióját használtuk legyen az észleleteknek a feloldásra. Minthogy azonban az észleletek mindig kisebb-nagyobb hibával vannak terhelve, az eredmények sem lehetnek azonosok, hanem egymástól többé kevésbbé különbözők — egymásnak ellentmondók — lesznek. Ezen ellentmondásokból azután az észleletekben megejtett hibákra lehet következtetni. Mennél csekélyebbek az ellentmondások, annál kisebbek az észlelési hibák is, annál jobbak az észleletek. Ha tehát a keresendő mennyiségre nézve több különböző eredményre jutottunk, kérdés: melyik lesz ezek közül a legjobb? Felelet: egyik sem, minthogy mindenik csak bizonyos számú észleleteknek teszen eleget, a többieknek nem; hanem szükséges lesz egy olyan számitási módot állapitani meg, mely szerint a keresett mennyiségre minden észlelet befolyást gyakoroljon. Ilyen számitási mód volna p. o. az eredményekből a számtani középértéket venni, s ezt a közvetlen méréseknél alkalmazzuk is, de ezt inkább csak az érzék vezérlete, mint szigorú bebizonyitás alapján tesszük.

Nem lehet feladatunk az észlelési hibák megejthetése törvényeinek tüzetes és kimeritő fejtegetésébe bocsátkozni, inkább csak a gyakorlati alkalmazás czéljai lebegnek szemünk előtt. Ezért csak megemlítjük, hogy Gauss, Legendre, Laplace azon elvet állitották fel, hogy a feladatnak valamely észlelési sorozatból nyerhető minden feloldásai közt az a legjobb és a legvalószinűbb, melynél a fennmaradt ellentmondások négyzeteinek öszszege a legkisebb.

378. §. Az észlelési közép hiba.

1) Legyen, mint legegyszerűbb eset, egy vonal hossza közvetlen mérés által meghatározandó. Nevezzük a vonal igazi hosszát x-nek, a mérés által nyert eredményt l-nek, akkor ha a mérés az igazi eredményt adná, ezen egyenletnek kellene állani:

$$x - l = o, \quad \odot$$

Legyenek azonban a mérés által nyert számok $l_1, l_2 \ldots l_n$, ha ezeket l helyébe tesszük a fentebbi egyenletbe, az egyenlőség nem állhat meg. Hogy az megállhasson, szükség lesz előbb az l-ket kijavítni a megejtett hibák miatt. Legyenek ezen javitások $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n$, ezek egyszersmind az ellenmondásokat, vagy az észleleti hibákat ábrázolják. Ezen kijavitás után állani fognak ezen egyenletek:

$$\begin{array}{lcl} x - (l_1 + \delta_1) = o & & x - l_1 = \delta_1 \\ x - (l_2 + \delta_2) = o & \text{vagy} & x - l_2 = \delta_2 \\ \vdots & & \vdots \\ x - (l_n + \delta_n) = o, & & x - l_n = \delta_n \end{array} \Bigg\} \odot'$$

Ezen egyenletekből úgy kell az x-t meghatározni, hogy az ellentmondások négyzeteinek összege, melyet 2Ω-val akarunk jelölni, minimum legyen. Ezen minimum függvény következő:

$$2\Omega = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2,$$

vagy $\quad 2\Omega = (x - l_1)^2 + (x - l_2)^2, + \cdots + (x - l_n)^2.$ ☽

Külömbzékeljük ezt x szerint, s tegyük az első külömbzéki hányadost $= o$, akkor lesz:

$$x - l_1 + x - l_2 + \cdots + x - l_n = o,$$

honnan következik

$$x = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n}$$

vagy symbolicus alakban irva: $x = \frac{[l]}{n}$, ♁.

Ez az észleletek számtani közepét jelenti. A közvetlen mérésekből nyert számtani közép tehát a legjobb eredményt adja, noha az még sem az igazi értéke az x-nek, minthogy a fennmaradt hibák négyzeteinek összege nem lesz $= o$, hanem csak minimum.

2) Jelentse most x rövidség végett ezen nyert közép értéket, és hasonlítsuk össze azt az egyes mérésekkel, akkor megkapjuk a hátramaradt ellentmondásokat. Lesz t. i. mint fentebb:

$$\left.\begin{aligned} x - l_1 &= \delta_1 \\ x - l_2 &= \delta_2 \\ &\vdots \\ x - l_n &= \delta_n \end{aligned}\right\} \odot'$$

Ezeket összeadván, kapunk

$$nx - [l] = [\delta]$$

s minthogy $nx - [l] = o$, tehát $[\delta] = o$, azaz: ha az egyenletekben x helyett a minimumnak megfelelő értéket helyettesítjük, a fennmaradó hibák vagy ellentmondások algebrai összege $= o$.

Emeljük négyzetre azon hibákat, s vegyük belőlük a közép értéket, ennek négyzetgyöke egy mennyiséget ad, melyet az észleletek közép hibájának neveznek. Jelöljük ezt m-el, akkor ezen definitio szerint lesz:

$$m = \pm\sqrt{\frac{\delta_1{}^2 + \delta_2{}^2 + \cdots + \delta_n{}^2}{n}} = \pm\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n}} \quad ♂$$

A közép hiba igen alkalmatos az észleletek pontosságának megitélésére, s mennél kisebb a középhiba, annál jobbak az észleletek.

Nem egészen azon eredményre jövünk, ha az észlelési hibák négyzetei helyett ezen hibáknak számszerinti értékeit, azaz: valamennyit $+$ jellel véve összegezzük, s az összeget a hibák számával osztjuk. Az így nyert eredmény, mely átlagnak neveztetik, csekélyebb fontosságú esetekben a középhiba helyett használható a mérések pontosságának megitélésére.

379. §. A függvény középhibája.

Ha valamely mennyiség közvetlen meg nem mérhető, de megmérhető részekből van összetéve, melyek egymással mathematikai összefüggésben állanak: akkor a mérési hibák befolyását a mennyiségre következő elmélkedés által lehet meghatározni.

1) Ha az összefüggés linearis alakú, tehát a függvény alakja ez:

$$F = a + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_r x_r \odot$$

hol $a, a_1, a_2 \cdots a_r$ meghatározott állandókat, $x_1, x_2 \cdots x_r$ pedig egymástól függetlenül észlelendő mennyiségeket jelentenek, melyek sorjában $\delta_1, \delta_2 \cdots \delta_r$ hibáknak vannak kitéve : akkor az F-ben képződő hibát $\triangle$-val jelölvén, lesz általában:

$$\triangle = \alpha_1 \delta_1 + \alpha_2 \delta_2 + \cdots + \alpha_r \delta_r .$$

Ezen képletben az absolut állandó tag a nem fordul elő, annak tehát a függvényben képződő hibára befolyása nincsen.

Helyettesítsük ezen képletbe az egyes észleletekben megejtett hibákat, melyeket megkülömböztetésül felül 1, 2 . . . vonással ellátott betűkkel akarunk jelölni, akkor lesznek:

$$\triangle' = \alpha_1 \delta_1' + \alpha_2 \delta_2' + \cdots + \alpha_r \delta_r'$$
$$\triangle'' = \alpha_1 \delta_1'' + \alpha_2 \delta_2'' + \cdots + \alpha_r \delta_r''$$
$$\vdots$$
$$\triangle^{(n)} = \alpha_1 \delta_1^{(n)} + \alpha_2 \delta_2^{(n)} + \cdots + \alpha_r \delta_r^{(n)}$$

Emeljük fel ezen egyenleteket négyzetre, akkor kétféle tagok képződnek, u. m. az egyes tagok négyzetei, és azoknak kettős szorzatai. Az elsőknek általános alakja : $\alpha_i^2 \delta_i^2$, az utóbbiaké : $2a_i\, a_k\, \delta_i\, \delta_k$. Minden δ független egymástól, és úgy $+$, mint $-$ értelemben előfordulhat, s annál bizonyosabban elő fog fordulni, mennél nagyobb az észleletek száma. Ha tehát ezen egyenleteket összeadjuk, két két ilyen ellenkező jelű δ-val képződött tag egymást lerontja; ezért feltehetjük, hogy a kettős szorzatokat ábrázoló tagok összege $= o$, vagy legalább az észleletek számával a o határértékhez közeledik. Marad tehát összegül symbolikus irással:

$$[\Delta\Delta] = \alpha_1^2[\delta_1\delta_1] + \alpha_2^2[\delta_2\delta_2] + \cdots + \alpha_r^2[\delta_r\delta_r];$$

osszuk el ezen egyenletet az észleletek számával n, s jelöljük a képződő középhibákat $M_1\ m_1\ m_2 \cdots m_r$-vel, akkor lesz:

$$\left.\begin{aligned} M^2 &= a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + \cdots + a_r^2 m_r^2 \\ \text{vagy}\quad M &= \pm\sqrt{a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + \cdots + a_r^2 m_r^2} \end{aligned}\right\} \cdots \mathbin{☽}$$

2) Ha a függvényben az x-ek együtthatói mind egyenlők az egységgel, azaz:

$$F = x_1 + x_2 + \cdots + x_r\,, \quad \odot'$$

akkor lesz:

$$M = \pm\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_r^2} \quad ☽'$$

A linearis alakú függvények kezelése a legegyszerűbb, ennélfogva az attól eltérő alakokat előbb linearokká kell átváltoztatni, mit néha algebrai kifejtések, néha logarokra való átmenetel stb. által lehet eszközölni. Ha ezen módok közül egyik sem volna alkalmazható, akkor közelitő értékekből indulván ki, a függvényt sorba kell kifejteni, mely munkánál a fennmaradt különbségek második és magasabb hatványait az első hatvány mellett el lehet hanyagolni.

3) Legyen egy ilyen függvény

$$F(x_1\ x_2 \ldots x_r)$$

legyenek $x_1'\ x_2' \ldots x_r'$ az x-ek közelitő értékei, $\Delta x_1\ \Delta x_2 \ldots \Delta x_r$ az igazi és a közelitő értékek közötti külömbségek, tehát

$$x_1 = x_1' + \Delta x_1,\ x_2 = x_2' + \Delta x_2, \ldots x_r = x_r' + \Delta x_r.$$

Helyettesítsük ezeket a függvényben, s bontsuk fel azt a Taylor képlete szerint, akkor lesz:

$$F = F(x_1'\,x_2' \ldots x_r') + \frac{dF}{dx_1}\Delta x_1 + \frac{dF}{dx_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{dF}{dx_r}\Delta x_r \quad \odot''$$

hol a differential-quotiensekben az x-ek helyett azoknak közelitő értékét kell helyettesítnünk. Ezen függvény most linearis alakú, s ha $\delta_1\ \delta_2 \ldots \delta_r$ az eredeti függvényben az x-ek hibái voltak, ezek az uj függvényben a Δx-ek hibái lesznek. Lesz tehát:

$$\Delta = \frac{dF}{dx_1}\Delta x_1 + \frac{dF}{dx_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{dF}{dx_r}\Delta x_r,$$

s ha a középhibákra átmegyünk, lesz:

$$M = \pm\sqrt{\left(\frac{dF}{dx_1}\delta_1\right)^2 + \left(\frac{dF}{dx_2}\delta_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dF}{dx_r}\delta_r\right)^2} \quad ☽''$$

380. §. A számtani közép mennyiség közép hibája.

1) Alkalmazzuk ezen képleteket a 378. §-ban kifejtett számtani közép mennyiség közép hibájának meghatározására. A ♁ képlet igy is irható:

$$x = \frac{1}{n} l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \ldots + \frac{1}{n} l_n .$$

x tehát linear függvénye az l-eknek, δ_1 δ_2 δ_n az l-ek hibái, tehát a 379. §. ☽ képlete szerint az x közép hibája lesz:

$$M = \pm \sqrt{\frac{\delta_1{}^2}{n^2} + \frac{\delta_2{}^2}{n^2} + \ldots + \frac{\delta_n{}^2}{n^2}} = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n} \cdot \frac{1}{n}} .$$

Ugyde a 378. §. ♂ képlete szerint az egyes észleletek közép hibája:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n}},$$

tehát az észleletek számtani közepének közép hibája lesz:

$$M = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} . \quad ♃$$

2) Ezen eredményt azonban még tetemesen lehet javítani. Az itt használt m t. i. az észleleteknek a számtani középtől való eltéréseiből lett számítva, holott azt helyesebben azoknak az x igazi értékétől való eltéréseiből kellett volna számítni. A számításra használt δ-kat tehát ki kell javítni azon mennyiséggel, a mennyivel az x igazi értéke a számtani közép értékétől külömbözik. Ezen külömbséget ugyan nem ösmerjük, de annak értékéül közelitőleg a számtani középnek közép hibáját $\pm M$ lehet venni. Tehát a 378. §. ♂ képletében δ helyett $\delta \pm M$-et kell tenni. Ugyde $(\delta \pm M)^2 = \delta^2 + M^2 \pm 2M\delta,$

átmenvén az összegre, lesz:

$$[(\delta \pm M)^2] = [\delta\delta] + nM^2 \pm 2M[\delta].$$

De a 378. §. szerint $[\delta] = o$; marad tehát: $[\delta\delta] + nM^2$. Ezt a ♂ képletbe $[\delta\delta]$ helyett tevén, lesz:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta] + nM^2}{n}} = \sqrt{\frac{[\delta\delta] + m^2}{n}},$$

honnan következik:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-1}} \quad ♂' \qquad \text{és} \qquad M = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n(n-1)}} \quad ♃'$$

3) Mennél jobb valamely észlelet, annál nagyobb befolyást kell annak engedni a keresendő mennyiségek meghatározására,

annál nagyobb s ú l y a van annak az észleletnek a csekélyebb pontosságuakkal szemben.

Az észlelet s ú l y á t a n n a k h i b á j a n é g y z e t é v e l s z o k t á k f o r d í t o t t v i s z o n y b a n v e n n i. Ha tehát egy észlelet-csoportnak közép hibája $\pm m$ s annak súlya p-nek neveztetik, akkor ezen relatio áll:

$$m^2 = \frac{k^2}{p}, \text{ vagy } pm^2 = k^2,$$

hol k állandó mennyiség és könnyen érthetőleg azon hiba nagyságát jelenti, melynek súlya $= 1$.

4) A fentebbi ♃ képlet szerint $M^2 = \frac{m^2}{n}$-nek találtatott. Helyettesítsük M és m helyett azoknak a súlyaik által kifejezett értékeit, akkor lesz: $\frac{k^2}{P} = \frac{k^2}{np}$, tehát lesz: $P = np$, azaz: az n e g y s z e r ű é s z l e l e t b ő l n y e r t k ö z é p é r t é k s ú l y a n-s z e r n a g y o b b, m i n t e g y e g y s z e r ű é s z l e l e t é.

5) Hasonlóképen a 379. §. ☽ egyenlete súlyok által kifejezve igy alakul át:

$$\frac{1}{P} = \frac{a_1^2}{p_1} + \frac{a_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{a_r^2}{p_r}. \quad ☽$$

s ha az a-k egyenlők az egységgel, akkor ezen képletből lesz:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_r}. \quad ☽'$$

381. §. Külömböző súlyú észleletek közép hibája.

1) Ha az $x - l = o$ függvényben az észleleteknek nem egyenlő súlyok van, hanem az $l_1\, l_2 \ldots l_r$ súlya sorjában $p_1\, p_2 \ldots p_r$: akkor azokból az x értékét ezen képlet szerint kell számítni:

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \ldots + p_r l_r}{p_1 + p_2 + \ldots + p_r} = \frac{[pl]}{[p]} \quad ♅$$

Ugyanis ezen esetet ugy lehet tekinteni, mintha $l_1\, l_2 \ldots l_r$ megfelelőleg $p_1\, p_2 \ldots p_r$-szer észleltettek volna, de az észleletek súlya $= 1$ volta volna, vagy mintha azok $p_1\, p_2 \ldots p_r$ számú, egymástól külömböző 1 súlyú észleletekből nyert közép értékek volnának. A számláló mind a két részlet szerint az összes észleletek összegét, a nevező pedig az összes észleletek számát szolgáltatja.

2) Az eredmény pontosságának megitélése végett gondoljuk x alatt az épen nyert közép értéket, vonjuk le ebből az egyes észleleteket, s a képződő ellentmondások legyenek $\delta_1\ \delta_2 \cdots \delta_r$, melyeknek $p_1\, p_2 \cdots p_r$ súlyok felelnek meg. Az x fentebb talált képletét igy is lehet irni:

$$x = \frac{p_1}{[p]}\, l_1 + \frac{p_2}{[p]}\, l_2 + \cdots + \frac{p_r}{[p]}\, l_r\,.$$

x tehát linear függvénye az l-eknek, ennélfogva ennek közép hibáját a 379. §. ☽ képlete szerint lehet számítni. Lesz tehát

$$M^2 = \frac{p_1^{\,2}\delta_1^{\,2}}{[p]^2} + \frac{p_2^{\,2}\delta_2^{\,2}}{[p]^2} + \cdots + \frac{p^2_r}{[p]}\,\delta^2_r\,.$$

Ezen képletnek egyszerűsitése végett képzeljünk olyan egyforma minőségű észleleteket, melyekből p_1 darab az l_1-et, p_2 darab az l_2-őt, $\cdots p_r$ darab az l_r-et adta közép értékül. Legyen ezen észleletek közép hibája k, s vegyük azoknak súlyát egységül: akkor a k, és a δ-k között épen azon viszony áll, mely az észleletek közép hibája, és a számtani középek közép hibája közt létezik, tehát az 1) szám ♃ képlete alapján, melyben most M helyett δ, m helyett k, és n helyett p teendők,

lesznek: $$\delta_1^{\,2} = \frac{k^2}{p_1},\quad \delta_2^{\,2} = \frac{k^2}{p_2},\quad \cdots\ \delta_r^{\,2} = \frac{k^2}{p_r}\,.$$

Helyettesítsük ezen értékeket a fentebbi képletbe, lesz:

$$M^2 = \frac{p_1 k^2}{[p]^2} + \frac{p_2 k^2}{[p]^2} + \cdots + \frac{p_r k^2}{[p]^2} = \frac{[p]}{[p]^2}\, k^2 = \frac{k^2}{[p]},\quad \text{tehát}$$

$$M = \pm \frac{k}{\sqrt{[p]}}\,. \qquad ♃'$$

A k értékét pedig megkapjuk, ha a fentebbi egyenletekben kifejezett δ négyzeteket összeadjuk, s az egyenletet k szerint feloldjuk. E szerint lesz:

$$k = \pm \sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{r}}\,, \qquad ♂'$$

hol r az észleletek számát jelenti.

3) Itt is lehet még javítni a k és M értékein, ha az előbbi §-ban követett úton haladunk, t. i. a k képletében δ helyett $\delta \pm M$-et teszünk, itt is elhagyván a $[p\delta]$-val szorzott tagot, minthogy $[p\delta] = o$. Ebből azután következik az előbbi §. analogiája szerint:

$$k = \pm \sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{r-1}}\,, \quad ♂'' \qquad \text{és} \qquad M = \pm \sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{[p](r-1)}}\,. \quad ♃''$$

4) Ha a ♃′ képletben M és k helyett a súlyok megfelelő kifejezéseit tesszük, akkor a ☿ képletbeli x súlya lesz:

$$P = [p].$$

382. §. Linearis függvény.

1) Legyen egy linearis függvény

$$ax + by + cz + l = o \quad \odot$$

melyben $a\ b\ c$ meghatározott, vagy észlelés alá eső mennyiségeket, $x\ y\ z$ pedig ösmeretlen állandókat jelentenek. l mindig észlelés alá eső mennyiség, melynek értékei sorjában $l_1\ l_2\ l_3 \cdots l_n$-nek találtattak $p_1\ p_2\ p_3 \cdots p_n$ súlyokkal. Ha $x\ y\ z$ alatt azoknak legjobb értékeit gondoljuk, és a $\odot$ egyenletbe az észlelt értékeket helyettesítjük, a keletkező kifejezések nem fognak 0-ra reducálódni, hanem bizonyos hiba-sorozatot $\delta_1\ \delta_2\ \delta_3 \cdots \delta_n$ fognak adni, u. m.:

$$\left.\begin{array}{lcc} a_1x + b_1y + c_1z + l_1 = \delta_1, & \text{súlya} & p_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + l_2 = \delta_2, & \text{»} & p_2 \\ \vdots & \vdots & \\ a_nx + b_ny + c_nz + l_n = \delta_n, & \text{»} & p_n \end{array}\right\} ☽$$

hol az egyenletek száma n nagyobb, mint az ösmeretleneké. Ezen egyenletekből a minimum-függvényt képezvén, lesz:

$$2\,\Omega = p_1\delta_1^{\,2} + p_2\delta_2^{\,2} + \cdots + p_n\delta_n^{\,2};$$

vagy a δ-k helyett azoknak általános kifejezéseit helyettesitvén:

$$2\,\Omega = p_1(a_1x + b_1y + c_1z + l_1)^2 + p_2(a_2x + b_2y + c_2z + l_2)^2 + \cdots$$
$$+ p_n(a_nx + b_ny + c_nz + l_n)^2.$$

Különbzékeljük ezen függvényt sorjában $x\ y\ z$ szerint, melyeket egymástól független változóknak tekintünk, s az első különbzéki quotienseket tegyük o-vá, akkor lesznek:

$$p_1a_1(a_1x + b_1y + c_1z + l_1) + p_2a_2(a_2x + b_2y + c_2z + l_2) + \cdots$$
$$+ p_na_n(a_nx + b_ny + c_nz + l_n) = o$$
$$p_1b_1(a_1x + b_1y + c_1z + l_1) + p_2b_2(a_2x + b_2y + c_2z + l_2) + \cdots$$
$$+ p_nb_n(a_nx + b_ny + c_nz + l_n) = o$$
$$p_1c_1(a_1x + b_1y + c_1z + l_1) + p_2c_2(a_2x + b_2y + c_2z + l_2) + \cdots$$
$$+ p_nc_n(a_nx + b_ny + c_nz + l_n) = o$$

vagy $x\ y\ z$ szerint rendezve symbolicus irással:

$$\left.\begin{array}{l} [paa]\,x + [pab]\,y + [pac]\,z + [pal] = o \\ [pab]\,x + [pbb]\,y + [pbc]\,z + [pbl] = o \\ [pac]\,x + [pbc]\,y + [pcc]\,z + [pcl] = o \end{array}\right\} ☿.$$

E szerint annyi egyenlet képződik, a hány ösmeretlen van. Ezek normal egyenleteknek neveztetnek, s feloldatván szolgáltatják az $x\,y\,z$ legjobb, legvalószinűbb értékeit. A feloldás az ösmeretlenek kiküszöbölése által történik, s akármelyik módot alkalmazzuk, mindig ugyanazon eredményre jövünk. Czélszerű lesz azonban a Gauss által behozott sorrendet és jelzési módot követni. E szerint keressük az első egyenletből az x értékét, s helyettesitsük azt a többi egyenletekbe, akkor ilyen egyenletekhez jutunk:

$$\left.\begin{array}{l}[pbb.1]\,y+[pbc.1]\,z+[pbl.1]=o\\ [pbc.1]\,y+[pcc.1]\,z+[pcl.1]=o\end{array}\right\}\ ♁'$$

hol $[pbb.1]=[pbb]-\dfrac{[pab]\,[pab]}{[paa]}$, $[pcc.1]=[pcc]-\dfrac{[pac]\,[pac]}{[paa]}$,

$[pbc.1]=[pbc]-\dfrac{[pab]\,[pac]}{[paa]}$, $[pcl.1]=[pcl]-\dfrac{[pac]\,[pal]}{[paa]}$,

$[pbl.1]=[pbl]-\dfrac{[pab]\,[pal]}{[paa]}$.

Keressük itt ismét az első egyenletből az y értékét, és helyettesitsük azt a másodikba, akkor lesz:

$$[pcc.2]\,z+[pcl.2]=o,\ ♁''$$ hol

$[pcc.2]=[pcc.1]-\dfrac{[pbc.1]\,[pbc.1]}{[pbb.1]}$, $[pcl.2]=[pcl.1]-\dfrac{[pbc.1]\,[pbl.1]}{[pbb.1]}$.

Ezen utolsó egyenletből megkapjuk a z értékét, s ennek helyettesitése által a ♁' egyenletek valamelyikéből az y-t, s végre az y és z helyettesitése által a ♁ egyenletek valamelyikéből az x értékét. Ugyanazon eredményre jövünk, ha a normal egyenletekben a kiküszöbölés sorrendjét megváltoztatjuk, úgy hogy egyszer x, másszor y, és végre z legyen az utolsó, fennmaradt ösmeretlen. Az egész eljárás változatlan marad, csak $\left\{\begin{array}{l}z\\c\end{array}\right.$ helyébe egyszer $\left\{\begin{array}{l}y\\b\end{array}\right.$ máskor $\left\{\begin{array}{l}x\\a\end{array}\right.$ lép. Ilyeténképen lesz:

$$z=-\frac{[pcl\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]},\quad y=-\frac{[pbl\cdot 2]}{[pbb\cdot 2]},\quad x=-\frac{[pal\cdot 2]}{[paa\cdot 2]}\cdot\ ♁$$

2) Ezen kiküszöbölési egyenletek együtthatóinak képződésében bizonyos szabályszerűség mutatkozik, u. m. 1) Mindenik együttható o-vá reducálódik, ha a [ ] jeleket elhagyjuk, s a betüket faktoroknak tekintjük. 2) Ha a baloldali zárjegyben 1, 2, 3 áll a betük mellett, akkor a jobb oldalon a nevezőben

megfelelőleg $[aa]$ $[bb.1]$ $[cc.2]$ áll. 3) Mindenik együtthatót lehe t akármelyikből a betűk felcserélése által származtatni.

3) Ezen egyenletekben a p-ket el is lehet hagyni, ha az ⊙ egyenletben a helyett $a\sqrt{p}$, b helyett $b\sqrt{p}$, c helyett $c\sqrt{p}$, és l helyett $l\sqrt{p}$ tétetik, jelöljük azonban ezen szorzatokat egyszerűség végett ismét csak a, b, c, l betűkkel, akkor a normal- és az egymásután következő eliminatio-egyenletek ezek lesznek:

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}[aa]x+[ab]y+[ac]z+[al]=o\\ [ab]x+[bb]y+[bc]z+[bl]=o\\ [ac]x+[bc]y+[cc]z+[cl]=o\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{r}[bb.1]y+[bc.1]z+[bl.1]=o\\ [bc.1]y+[cc.1]z+[cl.1]=o\\ [cc.2]z+[cl.2]=o\end{array}\right\}\end{array}\right\}\ ♁♁$$

Ezekből az ösmeretlenek igy találtatnak:

$$z=-\frac{[cl.2]}{[cc.2]},\ y=-\frac{[bl.2]}{[bb.2]},\ x=-\frac{[al.2]}{[aa.2]},\ ♂♂$$

383. §. Az x y z ösmeretlenek súlya.

1) Az igy talált ösmeretlenek súlyának meghatározása végett menjünk vissza az eredeti észleletekre. Ha a kiküszöbölés közben képződött együtthatókat megtekintjük, kitűnik, hogy az ösmeretlenek linearis függvényei az l-eknek, és ilyen alakuak:

$$\left.\begin{array}{l}-x=\alpha_1 l_1+\alpha_2 l_2+\cdots+\alpha_n l_n\\ -y=\beta_1 l_1+\beta_2 l_2+\cdots+\beta_n l_n\\ -z=\gamma_1 l_1+\gamma_2 l_2+\cdots+\gamma_n l_n\end{array}\right\}\odot$$

Ha tehát az $x\,y\,z$ súlyait $p_x\,p_y\,p_z$-vel jelöljük, holott az l-ek súlya $=1$, a 380. §. ☽ képletei szerint lesznek:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{p_x}=\frac{\alpha_1^2}{1}+\frac{\alpha_2^2}{1}+\cdots+\frac{\alpha_n^2}{1}=[\alpha\alpha]\\ \frac{1}{p_y}=\frac{\beta_1^2}{1}+\frac{\beta_2^2}{1}+\cdots+\frac{\beta_n^2}{1}=[\beta\beta]\\ \frac{1}{p_z}=\frac{\gamma_1^2}{1}+\frac{\gamma_2^2}{1}+\cdots+\frac{\gamma_n^2}{1}=[\gamma\gamma]\end{array}\right\}☽$$

Most tehát ezen négyzetösszegeket kell meghatározni.

2) A normal egyenletekből a kiküszöbölést más módon is lehet végrehajtani, t. i. szorozzuk a normal-egyenleteket sorjában először $Q_1\,Q_2\,Q_3$, azután $Q'_1\,Q'_2\,Q'_3$, végre $Q''_1\,Q''_2\,Q''_3$ hatá-

zoratlan mennyiségekkel, adjuk össze a képződő egyenlet-csoportokat, és ha x-et akarjuk meghatározni, tegyük

$$\left.\begin{array}{l} Q_1[aa]+Q_2[ab]+Q_3[ac]=1 \\ Q_1[ab]+Q_2[bb]+Q_3[bc]=0 \\ Q_1[ac]+Q_2[bc]+Q_3[cc]=0 \end{array}\right\} ♁$$

akkor lesz: $-x=Q_1[al]+Q_2[bl]+Q_3[bl]$.

Ha y-t akarjuk meghatározni, tegyük:

$$\left.\begin{array}{l} Q'_1[aa]+Q'_2[ab]+Q'_3[ac]=0 \\ Q'_1[ab]+Q'_2[bb]+Q'_3[bc]=1 \\ Q'_1[ac]+Q'_2[bc]+Q'_3[cc]=0 \end{array}\right\} ♂, \qquad \text{és lesz:}$$

$$-y=Q'_1[al]+Q'_2[bl]+Q'_3[cl].$$

Ha z a meghatározandó, akkor tenni kell:

$$\left.\begin{array}{l} Q''_1[aa]+Q''_2[ab]+Q''_3[ac]=0 \\ Q''_1[ab]+Q''_2[bb]+Q''_3[bc]=0 \\ Q''_1[ac]+Q''_2[bc]+Q''_3[cc]=1, \end{array}\right\} ♃, \qquad \text{és lesz:}$$

$$-z=Q''_1[al]+Q''_2[bl]+Q''_3[cl].$$

A ♁ ♂ ♃ egyenletekből tehát a Q-k értékeit ki kell keresni, s ezeket az $x\ y\ z$ képleteibe helyettesítni. Ekképen az ösmeretlenek meg lesznek határozva.

3) De ugyanezen Q-k által az $x\ y\ z$ súlyait is ki lehet fejezni. Vegyük elő p. o. az x kifejezését; rendezzük azt az l-ek szerint, akkor lesz:

$$-x=(Q_1a_1+Q_2b_1+Q_3c_1)\,l_1+(Q_1a_2+Q_2b_2+Q_3c_2)\,l_2+\cdots$$
$$+(Q_1a_n+Q_2b_n+Q_3c_n)\,l_n.$$

Hasonlítsuk össze ezt a ⊙ képletbeli x értékével, akkor lesz:

$$\alpha_1=Q_1a_1+Q_2b_1+Q_3c_1,$$
$$\alpha_2=Q_1a_2+Q_2b_2+Q_3c_2,$$
$$\vdots$$
$$\alpha_n=Q_1a_n+Q_2b_n+Q_3c_n.$$

Ha ezeket sorjában $\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n$-el szorozzuk és összegezzük, lesz

$$[\alpha\alpha]=Q_1[a\alpha]+Q_2[b\alpha]+Q_3[c\alpha].$$

Szorozzuk továbbá az $\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_n$ kifejezéseit sorjában $a_1\,a_2\cdots a_n$, $b_1\,b_2\cdots b_n$, $c_1\,c_2\cdots c_n$-el, összegezzük ezen csoportokat, és vegyük tekintetbe a ♁ relatiókat, akkor lesznek:

$$[a\alpha]=Q_1[aa]+Q_2[ab]+Q_3[ac]=1$$
$$[b\alpha]=Q_1[ab]+Q_2[bb]+Q_3[bc]=0$$
$$[c\alpha]=Q_1[ac]+Q_2[bc]+Q_3[cc]=0$$

Tehát $[\alpha\alpha] = Q_1$, és $p_x = \dfrac{1}{Q_1}$.

Hasonló módon járunk el, ha az y súlyát kell keresnünk, s a képletek is egészen hasonló módon alakulnak, csak az $[\alpha\alpha]$ képletben α helyett β, $Q_1\ Q_2\ Q_3$ helyett $Q_1'\ Q_2'\ Q_3'$ foglalnak helyet. Lesz tehát:

$$[\beta\beta] = Q'_1\,[a\beta] + Q'_2\,[b\beta] + Q'_3\,[c\beta].$$

Hasonló módon képződnek a további egyenletek is, de azok most a ♂ relatiókhoz vannak kötve; tehát:

$$\begin{aligned}
[a\beta] &= Q'_1\,[aa] + Q'_2\,[ab] + Q'_3\,[ac] = 0\\
[b\beta] &= Q'_1\,[ab] + Q'_2\,[bb] + Q'_3\,[bc] = 1\\
[c\beta] &= Q''_1[ac] + Q''_2[bc] + Q''_3[cc] = 0,
\end{aligned}$$

tehát $[\beta\beta] = Q'_2$, és $p_y = \dfrac{1}{Q'_2}$.

A z súlyának meghatározása végett a $[\beta\beta]$ képletében β helyett γ-t, és $Q'_1\ Q'_2\ Q'_3$ helyett $Q''_1\ Q''_2\ Q''_3$-t kell tennünk. Lesz tehát:

$$[\gamma\gamma] = Q_1''\,[a\gamma] + Q_2''\,[b\gamma] + Q_3''\,[c\gamma];$$

ugyszintén a ♃ relatiók figyelembe vételével

$$\begin{aligned}
[a\gamma] &= Q_1''\,[aa] + Q_2''\,[ab] + Q_3''\,[ac] = 0\\
[b\gamma] &= Q_1''\,[ab] + Q_2''\,[bb] + Q_3''\,[bc] = 0\\
[c\gamma] &= Q_1''\,[ac] + Q_2''\,[bc] + Q_3''\,[cc] = 1
\end{aligned}$$

tehát $\qquad [\gamma\gamma] = Q_3''$ és $p_z = \dfrac{1}{Q_3''}$.

4) Ugyanezen Q-k által $\alpha\ \beta\ \gamma$-nak minden ambóit is ki lehet fejezni és meg lehet határozni. Ha p. o. $[\alpha\beta]$ volna meghatározandó, akkor vagy szorozzuk az $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ fentebb talált kifejezéseit sorjában $\beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_n$-el, vagy megforditva a $\beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_n$ kifejezéseit az $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$-el, s a kellő összegezés után vegyük tekintetbe a ♁ ♂ ♃ relatiókat, akkor lesznek:

$$[\alpha\beta] = Q_2 = Q_1',$$

hasonlóképen: $\qquad [\alpha\gamma] = Q_3 = Q_1''$

$$[\beta\gamma] = Q'_3 = Q_2''.$$

5) A Q-k értékeit azonban más módon is lehet meghatározni. Vegyük elő p. o. a z csoporthoz tartozó egyenleteket. Ezek a normal egyenletektől csak abban különböznek, hogy bennök $x\ y\ z$ helyett $Q_1''\ Q_2''\ Q_3''$ van irva, és $[al]$ helyett o,

$[bl]$ helyett o, $[cl]$ helyett 1 áll. Ha tehát a $z = -\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$ kifejezésben a megfelelő helyettesitéseket megtesszük, a Q_3'' értékét kapjuk, ugy hogy Q_3'' csak egy specialis értéke a z-nek. Ezen feltevés mellett lesznek:

$$[bl.1] = [bl] - \frac{[ab]}{[aa]}[al] = 0; \quad [cl.1] = [cl] - \frac{[ac]}{[aa]}[al] = 0;$$

$$[cl.2] = [cl.1] - \frac{[cb.1]}{[bb.1]}[bl.1] = 1; \text{ tehát } Q_3'' = \frac{1}{[cc.2]} \quad \text{és} \quad p_z = [cc.2],$$

ugyszintén az analogia szerint $Q_2' = \frac{1}{[bb.2]}$, $p_y = [bb.2]$,

$$Q_1 = \frac{1}{[aa.2]}, \quad p_x = [aa.2].$$

384. §. x y z linear függvényének súlya.

Legyen $F = f_1 x + f_2 y + f_3 z$, hol $x\ y\ z$ az előbbi §. ⊙ képleteiben talált értékeket jelentik, melyeknek súlyai a ☽ kifejezések által vannak adva. Menjünk vissza az eredeti észleletekre, helyettesítsük az $x\ y\ z$ értékeit, s rendezzük F-et az l-ek szerint, akkor lesz:

$$F = (f_1 \alpha_1 + f_2 \beta_1 + f_3 \gamma_1) l_1 + (f_1 \alpha_2 + f_2 \beta_2 + f_3 \gamma_2) l_2 + \cdots + (f_1 \alpha_n + f_2 \beta_n + f_3 \gamma_n) l_n,$$

tehát:

$$\frac{1}{P} = (f_1 \alpha_1 + f_2 \beta_1 + f_3 \gamma_1)^2 + (f_1 \alpha_2 + f_2 \beta_2 + f_3 \gamma_2)^2 + \cdots + (f_1 \alpha_n + f_2 \beta_n + f_3 \gamma_n)^2$$

vagy kifejtve:

$$\frac{1}{P} = f_1 f_1 [\alpha\alpha] + 2 f_1 f_2 [\alpha\beta] + 2 f_1 f_3 [\alpha\gamma] + f_2 f_2 [\beta\beta] + 2 f_2 f_3 [\beta\gamma] + f_3 f_3 [\gamma\gamma].$$

hol a [ ]-ben foglalt mennyiségek az előbbi §.-ból már ösmeretesek.

385. §. A súlyegységnek megfelelő közép hiba, és az x y z közép hibái.

1) Ha az $x\ y\ z$ súlyai meg vannak határozva, ki lehet számítni az azoknak megfelelő közép hibákat is; de elébb a súlyegységnek megfelelő közép hibát kell keresnünk. Ezt úgy kapjuk

meg, hogy az $x\ y\ z$ értékeit helyettesítjük a függvénybe, s kiszámítjuk az egyes észleleteknek megfelelő ellentmondásokat, s ezeknek négyzeteiből a közép értékét vévén, abból négyzetgyököt húzunk. Ez lesz a keresett közép hiba. E szerint ha az észleletek száma n, s a súlyegységnek megfelelő közép hiba k-val jelöltetik, lesz:

$$k = \pm \sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{n}}, \quad \text{illetőleg} \quad k = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n}}. \quad \odot$$

Azután a súlyok és a hibák közötti ösmeretes összefüggés szerint ha az $x\ y\ z$ közép hibáit $M_x\ M_y\ M_z$-vel jelöljük, lesz:

$$M_x^2 = \frac{k^2}{p_x}, \quad M_y^2 = \frac{k_2}{p_y}, \quad M_z^2 = \frac{k^2}{p_z}. \quad ☽$$

2) A $[\delta\delta]$ értékét másképen is meg lehet határozni. Ha t. i. a hiba általános kifejezését

$$\delta = ax + by + cz + l$$

négyzetre emeljük, azután az összegre átmegyünk, lesz:

$$[\delta\delta] = [aa]\,x^2 + 2x\,\{[ab]\,y + [ac]\,z + [al]\} + [bb]\,y^2$$
$$+ 2y\,\{[bc]\,z + [bl]\} + [cc]\,z^2 + 2z\,[cl] + [ll] \quad ♁.$$

Akármi legyen az $x\ y\ z$ értéke, ezen függvényt identikusan csupa négyzetekből álló tagokra lehet átváltoztatni oly módon, hogy elébb az x-ket tartalmazó részt kiegészitjük teljes négyzetre, azután a maradékban az y-kat tartalmazó részt, s végre a maradékban a z-ket tartalmazó részt egészitjük ki szintén teljes négyzetekre. Ilyeténképen előáll:

$$[\delta\delta] = \frac{\{[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [al]\}^2}{[aa]} + \frac{\{[bb.1]\,y + [bc.1]\,z + [bl.1]\}^2}{[bb.1]}$$
$$+ \frac{\{[cc.2]\,z + [cl.2]\}^2}{[cc.2]} + [ll.3]. \quad ♁'$$

Azonban ha mi $x\ y\ z$ helyett azon értékeket vesszük, melyeket a normal egyenletek feloldása által nyertünk, akkor a három első tag egyenként $= o$, mert azok a normal- és az eliminatio-egyenletekkel azonosok; marad tehát:

$$[\delta\delta] = [ll.3], \quad ♁''$$

hol $[ll.3]$ ugyanazon törvény szerint van alkotva, mint az eliminatio egyenletek együtthatói. Ezen képlet a számitás ellenőrzésére használható.

3) Az 1-ben talált k csak akkor volna helyes, ha $x\ y\ z$ helyett azoknak igazi értékeit helyettesítettük volna. Minthogy pedig ezek helyett csak a minimum egyenletekből nyert érté-

keket tehettük, az igy nyert k értékét még ki kell javítni. Gondoljuk tehát $x\ y\ z$ alatt ezen specialis értékeket, melyek az igaziaktól még $\triangle x\ \triangle y\ \triangle z$-vel különböznek, nevezzük a δ kijavított értékét δ'-nek, úgy hogy legyen $\delta' = \delta + \triangle\,\delta$.

A hiba általános kifejezése volt,

$$\delta = ax + by + cz + l;$$

ebben $\delta\ x\ y\ z$-t $\triangle\delta\ \triangle x\ \triangle y\ \triangle z$-vel változtatván, lesz:

$$\triangle\delta = a\triangle x + b\triangle y + c\triangle z,$$

tehát: $$\delta' = \delta + a\triangle x + b\triangle y + c\triangle z.$$

Emeljük ezt négyzetre, s vegyük tekintetbe a normal egyenleteket, akkor az összegezés által képződik:

$$[\delta'\delta'] = [\delta\delta] + [aa]\triangle x^2 + 2\,[ab]\triangle x\triangle y + 2\,[ac]\triangle x\triangle z + [bb]\triangle y^2$$
$$+ 2\,[bc]\triangle y\triangle z + [cc]\triangle z^2.$$

Ezen egyenlet alakja a második tagtól kezdve hasonlít a 2) ♂ egyenletéhez, csak az a különbség közöttük, hogy ebben $x\ y\ z$ helyett: $\triangle x\ \triangle y\ \triangle z$ áll, l pedig $= o$. Tehát ezen kifejezésre is lehet a fentebbi átváltoztatást alkalmazni, és képződik:

$$[\delta'\delta'] = [\delta\delta] + \frac{\{[aa]\triangle x + [ab]\triangle y + [ac]\triangle z\}^2}{[aa]}$$
$$+ \frac{\{[bb.1]\triangle y + [bc.1]\triangle z\}^2}{[bb.1]} + [cc.2]\triangle z^2,$$

vagy symbolikus kifejezéssel:

$$[\delta'\delta'] = [\delta\delta] + \frac{[a\triangle\delta]^2}{[aa]} + \frac{[b\triangle\delta.1]^2}{[bb.1]} + [cc.2]\triangle z^2. \quad ♂$$

Ezen egyenletben az $a\ b\ c$ és $\triangle x\ \triangle y\ \triangle z$ betüket cyklikus módra fel is lehet cserélni egymással, ez által a kifejezés értéke nem változik, csak más sorrendben lesznek a $\triangle\delta$ tagjai irva, úgy hogy még ezen egyenletek is állanak:

$$[\delta'\delta'] = [\delta\delta] + \frac{[b\triangle\delta]^2}{[bb]} + \frac{[c\triangle\delta.1]^2}{[cc.1]} + [aa.2]\triangle x^2. \quad ♂'$$

$$[\delta'\delta'] = [\delta\delta] + \frac{[c\triangle\delta]^2}{[cc]} + \frac{[a\triangle\delta.1]^2}{[aa.1]} + [bb.2]\triangle y^2. \quad ♂''$$

Ezen kifejezések utólsó tagjai az $M_x\ M_y\ M_z$-re emlékeztetnek, úgy hogy ha $\triangle_x\ \triangle_y\ \triangle_z$ helyett az $x\ y\ z$ meghatározásában hátramaradt közép hibákat $M_x\ M_y\ M_z$ vesszük, ezen tagok k^2-ra reducálódnak. A többi tagok értékeit nem ösmerjük, de az analogia, s a kifejezések képződésének egyformasága arra utal, hogy ezeket is egyenként k^2-nak vegyük. Akkor lesz:

$$[\delta'\delta'] = [\delta\delta] + k^2 + k^2 + k^2 = [\delta\delta] + 3\,k^2,\ \text{és}\ k = \pm\sqrt{\frac{[\delta\delta] + 3k^2}{n}},$$

honnan következik: $k = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-3}}$.
Könnyű belátni, hogy a mi itt csak három ösmeretlenre nézve lett kifejtve, az akárhány ösmeretlennél is ugyanazon módon eszközölhető, úgy hogy ha általában μ számmal vannak ösmemeretlenek, a súlyegységnek megfelelő észlelési közép hiba lesz:

$$k = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-\mu}},$$ tehát

$$M_x = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{p_x (n-\mu)}}, \quad M_y = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{p_y (n-\mu)}}, \quad M_z = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{p_z (n-\mu)}}.$$

Magában értetik, hogy ha az észleletek súlya különböző, akkor ezen képletekben $[\delta\delta]$ helyett mindenütt $[p\delta\delta]$-t kell tenni.

386. §. Feltételes minimum függvény.

Ha az észleleti adatokat tartalmazó függvényen vagy függvényeken kivül még más egyenletek is léteznek a keresett mennyiségek közt, melyeknek az ösmeretlenek eleget tenni tartoznak: akkor a minimum meghatározására két utat jelöl ki a mennyiségtan, u. m.

1) Küszöböljünk ki a meglevő egyenletekből annyi ösmeretlent, a mennyi feltételi egyenlet van, s az eliminatio egyenletekből képezzük a minimum függvényt 2Ω. Ezt most mindenik ösmeretlen szerint különbzékelvén, és a kölönbzéki hányadosokat 0-vá tévén, képződnek a normal egyenletek, s ezek feloldatván adják az ösmeretlenek azon értékeit, melyek a minimumnak megfelelnek. Ekképen ezen eset vissza van vezetve azon esetre, mely az előbbi §-okban tárgyaltatott. A súlyegységnek megfelelő közép hibára nézve most ezen képlet áll:

$$k = \pm \sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{n-(r-\mu)}}, \quad \text{illetőleg} \quad k = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-(r-\mu)}},$$

hol n az észleletek, r az ösmeretlenek, μ a feltételi egyenletek számát jelenti.

2) Ha a feltételi egyenletek $\varphi = o$, $\psi = o$ . . . volnának, képezzük Lagrange szerint a minimum függvényét ilyen alakban:

$$2\Omega = \delta_1{}^2 + \delta_2{}^2 + \ldots + \delta_n{}^2 - 2\mathrm{I}\varphi - 2\mathrm{II}\psi - \ldots$$

hol $\delta_1\ \delta_2 \cdots \delta_n\ \varphi\ \psi \cdots$ mindnyájan $x\,y\,z \cdots$ nek függvényei, I II. . . pedig határozatlan állandók, melyeket Gauss c o r r e l atáknak nevezett. Képezzük most a $\frac{d\Omega}{dx}$, $\frac{d\Omega}{dy}$, $\frac{d\Omega}{dz}$ ··· különbzéki hányadosokat, melyek szintén az $x\ y\ z$ ·· I. II. ·· mennyiségekből lesznek összetéve; tegyük azokat egyenként $= o$; ezen egyenletek a feltételi egyenletekkel együtt elegendő számmal lesznek az $x\ y\ z$ ·· I. II. ·· meghatározására. A közép hiba is az előbbi képletek szerint számítandó, minthogy a correlaták csak a feloldás könnyítése végett hozattak be a számításba, melyeknek az észleletek minőségére semmi befolyások nincsen.

ELSŐ SZAKASZ.

A csillagászat elemei.

387. §. A csillagos ég.

A csillagos ég olyan benyomást tesz a szemlélőre, mintha az egy üres gömb volna, s a csillagok annak felületén volnának megerősítve. Az álló csillagoknak egymáshoz való fekvésében semmi különbséget sem lehet észrevenni, akármely pontján álljunk a föld felületének. Ez annak a jele, hogy a földön lévő távok a csillagoknak a földtől való távjához képest, elenyészők. A gömb középpontját tehát ezekre nézve bizvást a szemlélő álláspontjába helyezhetjük. Ellenben a naprendszerhez tartozó csillagok fekvésére már az álláspontnak egy kis befolyása észlelhető; ezekre vonatkozólag tehát a gömb középpontját a föld középpontjába helyezzük azért, hogy a tünemények az észlelési helytől függetlenül állittassanak elő.

388. §. Főbb pontok és vonalak.

A csillagos ég egy tengely körül mindennap egyszer körülfordulni látszik. Ezen forgás csak látszólagos, tulajdonképen a föld forog tengelye körül. Ezen tengely meghosszabbítva az éggömb felületét két pontban metszi, melyek közül egyik (372. ábra) E északi, a másik D déli sarkpontnak — Pole — neveztetik. Ha a gömb középpontján keresztül a tengelyre merőleges síkot fektetünk, ez a gömböt egy legnagyobb körben AQ metszi, mely egyenlitő — Aequator — nevet visel azért, mert az éggömböt két egyenlő, az északi és déli részre osztja. Az egyenlitővel párhuzamos, kisebb körök parallel-köröknek neveztetnek. Ha az észlelő álláspontjából egy függélyes vonalat húzunk, ez az éggömböt szintén két pontban Z, N metszi, u. m. a tető- és lábpontban — Zenit és Nadir. — Ezen függélyesre a gömb középpontjából egy merőleges síkot fektetvén, ez az éggömböt egy legnagyobb körben HR — látkör — Horizon — metszi. Ezen kör választja el az ég látható felét a láthatlantól. Ha a tetőponton Z és a sarkponton E keresztül egy legnagyobb kört EZD fektetünk, ez délló — Meridian — nevet visel, mivel midőn a nap ezen vonalba lép, akkor dél van. Ezen kör a gömböt szintén két egyenlő részre, u. m. keletire és nyugotira osztja.

A sarkpontok és az egyenlitőnek fekvése az égen állandó, az észlelési állomás fekvésétől független; noha ezen pontok és vonal évek folytán egy kis változást mutatnak. Ellenben a tetőpont és látkör az ég boltozatján minden pillanatban más-más pontokon mennek keresztül és ugyanazon pillanatban minden álláspontra nézve más-más fekvéssel birnak. Ez alól csak a föld sarkpontjai tesznek kivételt. Ezeknek tetőpontjuk az égi sarkpontokba, látkörük az egyenlitőbe esik, déllőjük pedig határozatlan.

389. §. Összrendező rendszerek.

1) Ha valamely pont fekvését úgy akarjuk meghatározni, a mint az valamely pillanatban előttünk látszik, azt a horizon és déllőre mint összrendező tengelyekre lehet vonatkoztatni. Húzzunk t. i. a tetőponton és a kérdéses ponton S keresztül egy legnagyobb kört ZSN, ez a horizont az M pontban metszi, s a HM ív Azimutnak $= a$, az SM magasságnak $= m$, ZS pedig zenit-távnak $= z$ neveztetik. HM az AZS szög mértéke, és $z = 90^0 - m$; azért az S pont az a és z gömbösszrendezők által is teljesen meg van határozva. Az Azimut a déllőtől nyugotra $+$, keletre pedig $-$ jellel szokott vétetni. — Azon függélyes kör, mely a déllőre merőlegesen áll, első függélyes körnek neveztetik.

2) Az S pont fekvése az ég boltozatján meg lesz határozva akkor is, ha az az egyenlitőre és déllőre vonatkoztatik. Ha t. i. az S ponton és a tengely sarkpontjain keresztül egy legnagyobb kört ESD húzunk, ez az egyenlitőt a P pontban metszi, s az AP ív, mely egyszersmind az SEZ szögnek mértéke, ó r a s z ö g-n e k $= s$, SP pedig e l h a j l á s n a k $= \delta$, — Declinatio —, maga a kör e l h a j l á s i vagy ó r a k ö r n e k neveztetik. Az óraszög nevét onnan vette, hogy az egyenes viszonyban áll az idővel, mely azon pillanat óta lefolyt, midőn az S pont a déllőben állott, mit t e t ő z é s n e k — c u l m i n a t i o — neveznek azért, mert a csillag ezen pillanatban a maga napi útjának legmagasabb pontját érte el. Ha valamely csillag le nem megyen, kétszer lép minden nap a déllőbe, egyszer a maga napi útjának legfelsőbb, másodszor annak legalsóbb pontján. Az elsőbb felső, az utóbbi alsó c u l m i n a t i ó n a k neveztetik.

Az óraszöget déltől nyugot felé $+$, kelet felé — jellel szokták venni. $360^0 = 24^h$, tehát $1^h = 15^0$, $1^m = 15'$, $1^s = 15''$. Az elhajlás északra $+$, délre — jellel vétetik. Azon órakör, mely a déllőre merőlegesen áll, 6 ó r a k ö r n e k neveztetik.

3) Ha az S pontot az éggömbön a többiekhez képest, s az észlelési állomástól függetlenül akarjuk meghatározni: az egyenlitőben egy kezdő pontot vehetünk fel, melyet általánosan a nap-éj-egyenlőségi pontok egyikében, a t a v a s z i p o n t b a n Υ szoktak választani. Akkor ΥP e g y e n e s e m e l k e d é s $= \alpha$ — R e c t a s c e n s i o n — nevet visel. A rectascensiót nyugotról kelet felé $+$ jellel szokták venni, és vagy fokokban, vagy többnyire időben szoktak kifejezni, melyet o-tól 24^h-ig szoktak számlálni. Fektessünk a tavaszi ponton keresztül egy elhajláskört $E\Upsilon$, akkor a ΥP ív a ΥES szög mértéke leend, ES pedig, mely s a r k-t á v n a k neveztetik $= 90^0 - \delta$. Ezen sarkösszrendezők által tehát a pont fekvése szintén meg van állapítva.

4) Végre az S pont fekvése az ég boltozatján a többi pontokhoz képest szintén meg van határozva, ha az az E c c l i p t i c á r a $K\Upsilon L$ vonatkoztatik. Ez egy legnagyobb kör az égen, melyet a nap egy egész év folytán körüljárni látszik, és a mely az egyenlitőt két pontban, u. m. a tavaszi és őszi pontban metszi. Ezen mozgás is csak látszó, tulajdonképen a föld jár a nap körül egy év alatt, s ha a föld középpontjából a nap felé egyenes vonalat

gondolunk, ez az E c c l i p t i c á n a k valamely pontját fogja találni. Azon szög ε, mely alatt az Eccliptica az egyenlitőt metszi, az E c c l i p t i c a f e r d e s é g é n e k neveztetik. Ha az Eccliptica síkjára a gömb középpontjából egy merőlegest húzunk, ez az ég boltozatját két pontban fogja metszeni, melyek az E c c l i p t i c a s a r k p o n t j a i n a k neveztetnek. Az ábrában U az Eccliptica északi sarkpontját ábrázolja. Ha a sarkpontokon és az S ponton egy legnagyobb kört fektetünk keresztül, ez az Ecclipticát a T pontban metszi, s a $♈T$ ív h o s s z a s á g n a k $= \lambda$, ST pedig s z é l e s s é g n e k $= \beta$, maga az UST kör pedig s z é l e s s é g i k ö r n e k neveztetik. A hosszaságot szintén a tavaszi ponttól kelet felé o-tól 360^0-ig $+$ jellel szokták számlálni. A szélesség vagy északi, vagy déli, az elsőt $+$, az utóbbit — jellel jelöljük. — Húzzunk az Eccliptica sarkpontján és a tavaszi ponton keresztül egy legnagyobb kört $U♈$, akkor $♈T$ az $♈US$ szög mértéke leend, s ez által valamint az US E c c l i p t i c a - s a r k t á v által, melynek értéke $= 90^0 - \beta$, az S pont fekvése szintén meg van határozva.

390. §. Idő.

1) Azon idő tartama, mely alatt valamely álló csillag a maga napi forgását véghezviszi, azaz: annak két egymásután következő culminatiója közötti idő c s i l l a g n a p n a k neveztetik. Ennek kezdetét azon pillanattól számláljuk, midőn a tavaszi pont a hely déllőjében van. A csillagidő tehát nem egyéb, mint a tavaszi pont óraszöge. A csillagnap hossza az egész év folytán állandó, s csak sok évek után mutat egy kis változást.

2) Azon időtartam, mely a napnak két egymásutáni culminatiója között fekszik, v a l ó s á g o s n a p i n a p n a k neveztetik. Ennek hossza nagyobb, mint a csillagnapé, s az egész év folytán változik, mivel a nap mozgása az Eccliptikában nem egyenletes, hanem változó. Ezért még egy harmadik időt szoktak megkülömböztetni, u. m. a k ö z é p n a p i n a p o t, mely az egész évi valóságos napok közép értékét ábrázolja. Ennek tartamáról úgy lehet fogalmat szereznünk, ha képzelünk az égen egy napot, mely a tavaszkezdet pillanatában a tavaszi pontban áll, s az egyenlitőt egyenletes mozgással körülfutván, egy év mulva kerül vissza a tavaszi pontba. Ezen képzelt, vagy a mint mondják, k ö z é p n a p néha előtte, néha utánna jár a valóságosnak,

s ezen közép napnak két egymásutáni culminatiója közt lefolyt időt nevezzük közép napnak. Mind a valóságos, mind a közép nap kezdetét a valóságos, illetőleg közép nap delelési pillanatától számláljuk, s a valóságos és a közép idő nem más, mint a valóságos és a közép napnak óraszöge. A közép és a valóságos idő közötti külömbség idő-egyenlet nevet visel.

3) Nevezzük valamely csillagnak rectascensioját α, óraszögét s-nek, a napnak hasonnevű adatait $\odot\alpha$, $\odot s$-nek, s a csillagidőt t-nek, akkor ezen mennyiségek közt ezen összefüggés létezik:

$$\alpha + s = t, \quad \text{és} \quad \alpha + s = \odot\alpha + \odot s \quad \ldots \odot$$

391. §. A coordinataták átváltoztatásai.

Ha valamely pontnak összrendezői egy rendszerre nézve adva vannak, azokból a többi rendszerek szerinti összrendezőket ki lehet számítni.

1) Legyenek a és z ösmeretesek, és α, δ keresendők, akkor az EZS $\triangle$-ben $ZS = z$, $Z = 180^0 - a$, $ZE = 90^0 - \varphi$, hol φ az észlelési pont geogr. szélességét jelenti, $E = s$, $ES = 90^0 - \delta$, és a nevezett $\triangle$-ből lesz:

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta \sin s &= \sin z \sin a \\ \cos\delta \cos s &= \cos z \cos\varphi + \sin z \sin\varphi \cos a \\ \sin\delta &= \cos z \sin\varphi - \sin z \cos\varphi \cos a \end{aligned}\right\} \ldots \odot$$

Ezen egyenletek feloldása által megkapjuk az óraszöget, s ebből a 390. §. $\odot$ képletek szerint, kapcsolatban az idővel, melyet mindenkor észlelni kell, a rectascensiót ki lehet számítni ezen képlet szerint:

$$\alpha = t - s \ldots ☽$$

Ha pedig s és δ vannak adva, akkor ugyanazon $\triangle$-ből lesz:

$$\left.\begin{aligned} \sin z \sin a &= \cos\delta \sin s \\ \sin z \cos a &= \sin\delta \cos\varphi + \cos\delta \sin\varphi \cos s \\ \cos z &= \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos s \end{aligned}\right\} \ldots ♄$$

2) Ha az egyenes emelkedés és elhajlás adva vannak, a hosszaságot és szélességet az SEU $\triangle$-ből lehet nyerni. Ebben t. i. $SE = 90^0 - \delta$, $UE = \varepsilon$, mint az $E♈U$ szög mértéke, minthogy $♈E = ♈U = 90^0$, az $E♈U$ szög pedig $= T♈P$ szöggel, mivel azok szárai egymásra merőlegesek. A $♈$ pont tehát sarkpontja az UE ívnek, ennélfogva $♈E$ és $♈U$ ívek UE-re merőlegesen állanak. Innen következik, hogy SEU szög $= 90^0 + \alpha$,

SUE szög $= 90^0 - \lambda$, és $US = 90^0 - \beta$. Tehát lesz:

$$\left.\begin{aligned} \cos\beta \cos\lambda &= \cos\delta \cos\alpha \\ \cos\beta \sin\lambda &= \sin\delta \sin\varepsilon + \cos\delta \cos\varepsilon \sin\alpha \\ \sin\beta &= \sin\delta \cos\varepsilon - \cos\delta \sin\varepsilon \sin\alpha \end{aligned}\right\} \ldots ♂$$

Ha pedig λ és β adva vannak, ekkor lesz:

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta \cos\alpha &= \cos\beta \cos\lambda \\ \cos\delta \sin\alpha &= -\sin\beta \sin\varepsilon + \cos\beta \cos\varepsilon \sin\lambda \\ \sin\delta &= \sin\beta \cos\varepsilon + \cos\beta \sin\varepsilon \cos\lambda \end{aligned}\right\} \ldots ♃$$

392. §. Idő-átváltoztatások.

Az időket szintén át lehet egymásra változtatni.

1) A csillagidő és a közép idő közt állandó összefüggés van, t. i. egy fordulati évben, azaz: mig a nap a tavaszi ponttól ismét a tavaszi ponthoz visszatér, van 365.242201 közép nap, és 366.242201 csillagnap. A csillagnapok száma egygyel több, mint a középnapoké, mivel a középnap culminatiójának elkésése, a csillagéhoz képest, egy év folytán egy egész napra rúg. Tehát:

$$\frac{1 \text{ csillagnap}}{1 \text{ középnap}} = \frac{365{\cdot}242201}{366{\cdot}242201};$$

ebből következik:

1 középnap = 1 csillagnap + $3^m\ 56{\cdot}^s555$ csillagidőben,

1 csillagnap = 1 középnap — $3^m\ 55{\cdot}^s900$ középidőben.

Ezen képletek szerint táblák vannak számitva, s a csillagászati naptárakban közölve.

2) A közép és valóságos idő közötti különbség, mely időegyenlet nevet visel, az év minden napjára ki van számítva, s a nap ephemerisében a csillagászati naptárakban feltalálható. Az epocha, melyre a berlini csillagászati évkönyvben a számok érvényesek, a berlini valóságos dél, minden más helyi, valamint berlini időre is, az időegyenlet értékét interpolatio által kell keresni. Az időegyenletet a valóságos időhöz algebrai értelemben hozzá kell adni, a közép időből pedig le kell vonni.

393. §. Az összrendezők változásai.

A csillagászati naptárakban, melyek közt a »Berliner astronomisches Jahrbuch«, a »Connaissance des temps« és a »Nautical Almanac« legösmeretesebbek, bennfoglaltatnak a nap, föld, planeták és a nevezetesebb ugynevezett alap-álló csillagok rectascensiói és declinatiói az évnek minden napjára, vagy legalább 10—10 naponként. Ezekből tehát ezen égi testeknek helyét interpolatio által az évnek minden pillanatára ki lehet számítni. Ugyszintén léteznek csillag-catalogusok, melyekben a csillagoknak rectascensiói és declinatiói a csillagászok észlelései szerint, bizonyos Epochára meghatározva, fel vannak jegyezve. Ezen táblák használata a hozzájok csatolt utasitásból mindenkor könnyen megérthető.

1) Az égi testek, még az álló csillagok helyei is, részint önmozgásuk, részint az alapvonalaknak, melyek az összrendezők tengelyeiképen szerepelnek, folytonos változásai miatt szüntelen változnak. Az egyenlitő az Eccliptikán folyvást nyugot felé hátrál, vagyis a csillagok hosszaságai folyvást növekednek. Ezen változás P r a e c e s s i o n a k neveztetik. De az Eccliptica sem állandó, hanem bizonyos ingadozást mutat, miáltal a csillagok hosszaságai és szélességei ujból változnak, s ezen változás N u t a t i o nevet visel. A praecessio és nutatio a nap, hold és planétáknak a gömbded alakú és gyors forgásban lévő földre gyakorolt vonzásának következményei.

2) De az égi testek valóságos helyei is több okokból különböznek azoktól, melyeket azok elfoglalni látszanak. Ezen okok egyike az A b e r r a t i o, mely abban áll, hogy a világosság sugárnak és a földnek a maga pályájában való mozgásából egy közép irányú mozgás tevődik össze, s a sugár ezen közép irányban hat be a szembe; a világitó pont tehát ezen irányban látszik. Hasonló, de sokkal kisebb változás ered a földnek tengelye körüli forgásából. Az elsőbb é v i, az utóbbi n a p i Aberrationak neveztetik.

3) Egy további változás, melyet a sugár iránya szenved, a lég törési képességéből ered és R e f r a c t i o nevet visel. Ennek következtében a világitó pont magasabban látszik, mintha a sugár légüres téren menne keresztül. A refractio a lég sürűségének változékonysága miatt külömböző légköri körülmények közt külömböző, azért ennek meghatározásához a légnyomás és a hőmérsék ösmerete is szükséges. A refractio-táblák közt a B e s s e l-félék a legtökéletesebbek, melyek W a r n s t o r f csillagászati segédtábláiban is fel vannak véve. Csekélyebb pontosságot igénylő esetekben a B r e m i k e r logartábláihoz csatolt refractio-táblákat is

lehet használni. Ezeknek alkalmazását a táblákhoz csatolt példákból könnyen meg lehet érteni.

4) Végre a földhöz közelebb álló égi testek az égen más helyen látszodnak a föld felületének valamely pontjából nézve, mintha azok a föld középpontjából észleltetnének. Ezen látszólagos elmozdulás parallaxis-nak neveztetik.

Mindezen változásokról táblák vannak számítva, melyekből az észleleteken teendő correctiókat ki lehet irni.

394. §. Műszerek.

A 389. §-ban előadott összrendezők közül csak azokat lehet közvetlen megmérni, melyeknek fekvését kellő pontossággal meg lehet állapítni.

Ezek közt első helyen áll a magasság vagy zenittáv és az idő; ezek után következnek az azimut, a rectascensio és declinatio. A hosszaságot és szélességet észlelni nem lehet, mivel azon síkok, melyekben ezen összrendezők feküsznek, minden pillanatban változnak. Némely esetekben a coordinaták absolut értékei méretnek meg, máskor csak azoknak különbségei. Az absolut mérés alá eső összrendezők közt ismét a magasság és az idő állanak első helyen, mert azokat legnagyobb pontossággal lehet észlelni, azért ezek szolgálnak kiindulási pontokul minden más összrendezők meghatározására.

A geodeziai czélokra megkivántató csillagászati szögmérő eszközök közt első helyen áll:

1) A theodolit (135. §.) Ez mind vizszintes, mind magassági mérésekre egyaránt használtatik. Hogy ez a czélnak megfeleljen, ugy van szerkesztve, hogy a távcsőt egész a zenitig lehet emelni és azt át lehet hajtani. E végre a távcsőnek vagy a tengely végén kell elhelyezve, s a szemcsőnek prismatikus szemüveggel kell ellátva lenni, hogy a szem minden állásban hozzáférhessen, vagy pedig meg kell törve lennie. A magassági kör beosztása olyan pontos legyen, mint a vizszintes köré. Különösen nem szabad hiányozni a magassági körön a szintezőnek, hogy az azimutkör tengelyének függélyes voltát meg lehessen vizsgálni, s annak hibáját meg lehessen mérni. A theodolitot minden irányú magassági síkokban egyaránt lehet használni.

Nagyobb pontosságot ád magassági mérésekre a magassági kör. Ennek is van azimutköre, ez azonban pontos szögmérésre nem való, hanem csak a magassági kör előleges beállitására szolgál.

2) Midőn a theodolittal, vagy a magassági körrel szöget akarunk mérni, a távcsőt az azimuti és magassági köröknek tengelyök körüli forgatása által ugy kell állítni, hogy az irányszál egy kissé az észlelendő csillag előtt álljon, s a csillag a maga napi forgása folytán lehetőleg a távcső középpontján vonuljon keresztül. Azon pillanatban, midőn a csillag az irányszálra lép, az időt leolvassuk, s ezután az azimuti, illetőleg magassági kör mutatója állását szintén leolvassuk a szerint, a mint vizszintes vagy magassági szöget kell mérnünk. Ha a mérés a napra vonatkozik, akkor a vizszintes szögmérésnél a függélyes, magassági szögmérésnél pedig a vizszintes szálon kell a nap karimája mindkét oldalának érintkezését az ugynevezett belépést és kilépést észlelni, a távcsőt ugy állitván, hogy az érintkezés pillanatában a másik irányszál lehetőleg a nap középpontján menjen keresztül s a noniusokat le kell olvasni. Az észlelési idők közepe a nap középpontjának megfelelő észlelésre fog vonatkozni, mivel azon kis idő tartama alatt, mely az észlelésre megkivántatik, fel lehet tenni, hogy a nap mozgása a lefolyt idővel aránylagos.

3) A tűkörhatod, pistorkör a hozzá tartozó horizonnal együtt (176. és 182. §.) különösen utazás közben igen kényelmes. Ha ezen műszerekkel a nap magasságát kell megmérni, akkor az alhidadét valamely kerekszámú fokra szokták beállítni ugy, hogy a két kép még egy máson kivül közel egymáshoz álljon, s észleljük az érintkezési pillanatokat a belépés és kilépésnél, az észleletekből a középet vesszük; ez a boritkozás pillanatát fogja szolgáltatni.

Minden absolut magassági mérést ki kell javítni a műszer collimatio hibája miatt, ha az az észlelés által ki nem ejtetett, valamint a zenit-pont, vagy a horizon hibája miatt is. Ezen látszó eredményt azután meg kell szabadítni a refractio, parallaxis, s az égi test radiusa befolyásától. Ekkor fogja az észlelés az égi test középpontja valóságos magasságát adni.

4) Az átmeneti távcső. Ez egy vizszintes tengelyen, arra merőlegesen megerősitett távcsőből áll, mely rendesen a

déllő síkjában, de olykor az első függélyes síkban is két szilárd oszlopon van helyezve és egy kis magassági korívvel van felszerelve, de a mely magassági szögek mérésére nem ad elég pontosságot, hanem csak a távcső beállitására szolgál. A távcső diaphragmáján mindig 5, vagy több, páratlan számú, körülbelül egyenlő távban fekvő, párhuzamos irányszál van behúzva, melyeken a csillag átmenetét egyenkint kell észlelni.

Az átmeneti távcsővel csak rectascensio-különbségeket lehet észlelni, melyekhez még egy csillag absolut rectascensiójának ismerete szükséges, hogy azokból absolut rectascensiókat nyerjünk. A rectascensiókkal az idő szoros összeköttetésben lévén, az idő észlelése is az órával kapcsolatban az átmeneti távcső által eszközöltetik legközvetlenebb módon.

5) Hogy az átmeneti távcsővel tett észleletek helyesek legyenek, megkivántatik, hogy α) a távcső forgástengelye vizszintes, β) annak láttani tengelye a forgástengelyre merőleges és γ) a távcső láttani tengelye a déllő síkjával párhuzamos legyen. Ezen kellékeknek megvizsgálására, s a netaláni hibának megmérésére alkalmatos eszközök vannak használatban.

α) A távcső forgástengelyének fekvése a szintezővel vizsgáltatik meg, melyet mind a két állásban fel kell tenni a tengelyre és a buborék végeit le kell olvasni. Legyenek a leolvasások a keleti végen K, K', a nyugotin N, N', s a szintező egy osztályrészének értéke $= p$, akkor a tengely hajlásszöge h, a 138. §. szerint lesz:

$$h = \frac{(N + N') - (K + K')}{4} p$$

Állitó eredmény azt jelenti, hogy a tengely keleti vége lejjebb van a nyugotinál.

β) A collimatio hibát geodätikai úton nagy pontossággal el lehet hárítni (139. §). De ezt csillagászati úton is meg lehet határozni. E végett észleljük valamely sarkközeli csillag átmenetét a távcső látmezejének keleti felében kifeszített szálakon; azután a távcsőt megforditván, hogy annak tengelyvégei helyet cseréljenek, észleljük ugyanazon csillag másodszori átmenetét ugyanazon szálakon, melyek most a látmező nyugoti felében fognak létezni; a megfelelő szálakon észlelt átmeneti idők külömbségének fele szorozva a csillag declinatiójának cosinusával, fogja szolgáltatni azon szögeket, melyeket a nevezett szálakon keresztül menő iránysíkok a távcső tengelyére merőlegesen álló iránysíkkal bezárnak. Ha ezekből a szálaknak a középső száltól való távolságát levonjuk, megkapjuk a középső szál collimatio-hibáját. (Lásd δ).

γ) Az azimut hibájának meghatározása végett rendesen minden átmeneti cső déllőjében egy czélpontot — Mire — szoktak felállítni, melyre kell a távcső optikai tengelyének irányozva lenni, ha a műszer helyesen van tájékozva. Az időnkénti eltérést, mely az azimut hibáját ábrázolja, az észleletekből kell meghatározni. (Lásd 396. §. 3. mód).

δ) A szálak közötti hézagokat egy theodolit segitségével lehet megmérni, ha a távcsőt vizszintes fekvésbe hozzuk, s a theodolittal a távcső irányszálaira irányozunk. — Más módon: észleljük valamely csillagnak átmenetét az irányszálakon, s ha valamely szálnak megfelelő időt t, a középszálhoz tartozót T, a csillag declinatióját δ, a hézagot Θ-nak nevezzük, ezen hézag időben kifejezve lesz $\Theta = (T—t) \cos\delta$. Ezen esetben t. i. a hézagot egy párhuzamos körívnek lehet tekinteni, melynek sugára $= \cos\delta$, középponti szöge pedig $= T—t$. Megfordítva, ha valamelyik oldalt lévő szálnak a középsőtől való távolsága Θ ösmeretes, s a csillagnak átmeneti ideje t az oldalt lévő szálon észleltetett, a középső szálon való átmenet idejét T ki lehet számítni. T. i. lesz:

$$T = t \pm \frac{\Theta}{\cos\delta},$$

hol a felső jel a keleti, az alsó a nyugoti oldalon fekvő szálakhoz tartozik. (Lásd 396. §. 3. mód).

6) Órák. Ezek szerkezetökre nézve vagy inga-, vagy lenge órák. Az előbbiek mindig egy szilárd falon vannak felfüggesztve, az utóbbiak, az ugynevezett chronometerek, hordozhatók. Az órák vagy csillag, vagy közép idő szerint járnak, noha azokkal tökéletesen sohasem egyeznek, hanem az óra-idő és a valóságos idő közt, melyet a csillagos ég napi forgása által lehet mérni, mindig különbség van. Ezen különbség az óra állásának neveztetik. Az óra állása szintén napról napra változik, ezen napi változás az óra járásának neveztetik. A jó óra járásának

télen nyáron állandónak kell lenni, különben az óra compensatiója nem volna tökéletes. Ha ugyanazon hőmérséknél az óra járásában ingadozás mutatkozik, akkor annak szerkezete nem tökéletes, s akkor az órából csak rövidebb időre lehet az absolut időre következtetni. Az álló csillagok észlelésére a csillagórak, a nap észlelésére pedig a középórák kényelmesebbek. Ha több óra áll rendelkezésre, egyet közülök rendesen a csillagos éggel szoktak összehasonlítni, s annak állását időről időre meghatározni — idő-meghatározás, — a többiek azután ezen órával hasonlittatnak össze. E czélra a lengések összeesését — coincidentiát — szokták felhasználni, azáltal az óra-idők közötti különbséget nagy pontossággal meg lehet határozni.

7) Az időészlelést kétféleképen lehet végrehajtani, t. i. vagy számlálja az észlelő vagy egy segéd az egyes másodperczeket, mig a csillag az irányszálon megjelenik, és ha a tünemény nem esnék össze egy másodperczczel, a hézagot az észlelő megbecsüli, megbecslésre a csillag által egy másodpercz alatt hátrahagyott utat lehet mértékül használni; vagy pedig bevárja az észlelő, mig a csillag a szálon megjelenik, ezen pillanatban 0-án kezdi az óra perczenéseit számlálni, melyek inga-óráknál rendesen egész másodperczeket, chronometereknél pedig $^1/_2$, vagy $^2/_5$ másodperczeket jelentenek, s feljegyzi, hogy bizonyos óra, percz, és másodpercz, mely az óra számlapján leolvastatik, hányadik perczenésnek felel meg. Ha az óra-időből a perczenésekre eső időt levonjuk, a tünemény idejét fogjuk megnyerni.

395. §. Feladatok.

A csillagászati feladatok közt különösen 4 van, mely a földmértanban fontossággal bir, ezek: az idő-meghatározás, a sarkmagasság vagy geographicus szélesség, a geogr. hosszúság, és bizonyos irány azimutjának megmérése.

396. §. Idő-meghatározás.

1. mód. Két megfelelő magasság által. Észlelni kell valamely állócsillagot ugyanazon magasságban culminatio előtt és után; az idők közötti számtani közép a culminatio pillanatát, s ezen pillanatban a csillag rectascensiója a csillag-időt

fogja szolgáltatni. Legyenek tehát az észlelt idők t_1, t_2, a csillag rectascensiója α, az óra állása a culminatio idején x, akkor

$$x = \alpha - \frac{t_1 + t_2}{2}.$$

2. mód. Absolut magassági mérések által. Ha az álláspontnak sarkmagassága, és az égi testnek declinatiója ösmeretesek, az időt az absolut magasság észleléséből meg lehet határozni. A 391. §. ő képlete szerint t. i.

$$\cos z = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos s.$$

innen lesz:

$$\sin \frac{1}{2} s^{\,2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(z-\varphi+\delta)\ \sin\frac{1}{2}(z+\varphi-\delta)}{\cos\varphi \cos\delta},$$

mely kifejezésben a praecessio, nutatio és aberratiotól, valamint z alatt a refractio és parallaxistól kijavított adatokat kell érteni.

Külömbzékeljük az alapegyenletet

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos s$$

minden benne előforduló mennyiségek szerint, akkor lesz:

$$ds = \frac{dz + d\delta \cos v - d\varphi \cos a}{\sin v \cos\delta} = \frac{dz + d\delta \cos v - d\varphi \cos a}{\sin a \cos\varphi}.$$

Ezen kifejezésekből látszik, hogy a sarkponthoz közel eső csillagok időmeghatározásra nem alkalmasok, mivel azoknál $\cos\delta$ igen kis értékű lévén, a legkisebb hibák az adatokban az időre igen nagy hatást gyakorolnak. Ugyszintén a déllőhöz közel sem szabad észlelni, mivel akkor meg $\sin a$ válik igen kicsivé. Legjobb, ha az észlelendő csillagok az egyenlitőhöz közel választatnak, vagy az első függélyes kör környékén észleltetnek, mivel akkor egyik esetben $\cos\delta$, a másikban $\sin a$ legnagyobb értékükhöz közel esnek.

3. mód. Átmeneti távcső által. Észleljük egy álló csillag átvonulását az irányszálakon és számítsuk át az észleleteket a középső szálra; akkor, ha a műszer felállitása tökéletes volna, a csillagidő a csillag rectascensiójával egyenlő lévén, az órahiba volna

$$x = \alpha - t.$$

De a műszer felállitása soha sem tökéletes, hanem mind a távcső azimutjában, mind a forgástengely, mind az irányvonal fekvésében kis hibácskák maradnak hátra. Azonban ezen hibácskák olyan csekélyek, hogy azoknak befolyását a culminatio idejére egyenkint lehet számításba venni, a többieket nullának tekintvén;

ezeket azután a képletben figyelembe kell venni. Tegyük fel, hogy az átmeneti távcső irányvonala a déllőtől a^s azimuttal hajlik el kelet felé, a távcső forgástengelye b^s-el hajlik lefelé keletre, s a távcső irányvonala a forgástengelyre gondolt merőlegestől c^s-vel hajlik el keletre, akkor ha a külömböző szálakon észlelt időket a középszálra átszámítván, az idők középértékét T-nek, az a^s, b^s, c^s hibákból az időre háramló változásokat σ_1, σ_2, σ_3-nak, az óra állását x-nek nevezzük, hol $+$ azt jelenti, hogy az óra kevesebbet mutat mint kellene, lesz:

$$x = \alpha - (T + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \ldots$$

A σ_1 értékét (373. ábra) az EZS háromszögből lehet meghatározni. Ebben ZSN a távcső mozgási síkját ábrázolja, $E = \sigma_1$, $Z = 180^0 - a$, ZS közel $= \varphi - \delta$, $SE = 90^0 - \delta$, alsó culminatiónal $E = 180^0 - \sigma$, $Z = a\, ZS'$ közel $= 180^0 - (\varphi + \delta)$. Ezekből lesz

$$\sigma_1 = \frac{sin\,(\varphi \mp \delta)}{cos\delta} a^s = ma^s,$$

hol a felső jel a felső, az alsó jel pedig az alsó culminatióra vonatkozik.

A σ_2 értékét (374. ábra) az ESH háromszögből lehet meghatározni, hol HSR a távcső által leirt legnagyobb kört ábrázolja. Ebben $E = \sigma_2$, $H = b$, HS közel $= 90^0 - (\varphi - \delta)$, $SE = 90^0 - \delta$. Alsó culminatiónál, melyre az $ES'R$ háromszög vonatkozik, $RS' = \varphi + \delta - 90^0$. Ezekből tehát lesz:

$$\sigma_2 = \pm \frac{cos\,(\varphi \mp \delta)}{cos\delta} b^s = \pm nb^s,$$

hol a felső jelek a felső, az alsó jelek az alsó culminatióhoz tartoznak.

A σ_3 meghatározása végett legyen a 375. ábrában SS' azon kisebb kör, melyet a távcső irányvonala az égen leir, K a távcső-tengely keleti pontja, akkor $KS = 90^0 - c$, $KE = 90^0$, $ES = 90 - \delta$, $E = 90^0 - \sigma_3$. Az alsó culminatióban, melynek az EKS' háromszög felel meg, ugyanazon értékek jönnek elő. Tehát lesz

$$\sigma_3 = \pm \frac{c^s}{cos\delta} = \pm oc^s,$$

hol a felső jel a felső, az alsó jel az alsó culminatióhoz tartozik. Ezen értékeket az x képletben helyettesitvén, lesz:

$$x = \alpha - T - ma^s \mp nb^s \mp oc^s.$$

Ha a, b, c ösmeretesek, ezen képlet az óra állását fogja adni.

A forgástengely hajlásszögét a szintező által minden észlelésnél külön kell meghatározni, a collimatio hiba hosszabb ideig állandó marad, de az azimut hiba folytonos ingadozásoknak van kitéve, s a Mirét éjjel észlelni ritkán lehet. Ilyenkor az azimut hibáját az észleletekből kell kipuhatolni. Legyen egy csillagra nézve az óra állása

$$x = \alpha - T - ma^s \mp nb^s \mp oc^s;$$

egy más csillagra nézve

$$x + \triangle x = \alpha' - T' - m'a^s \mp n'b^{s\prime} \mp o'c'^s,$$

hol $\triangle x$ az időközre eső órajárást jelenti, melynek más úton ösmeretesnek kell lenni. Ezeket egymásból levonván, lesz:

$$a^s = \frac{(\alpha' - T') - (\alpha - T) \mp (n'b' - bn) \mp (o' - o)\, c - \triangle x}{m' - m}.$$

Mennél nagyobb a két csillag declinatio-külömbsége, annál biztosabb lesz az azimut meghatározása. De legjobb eredményt nyerünk, ha egy sarkközeli csillagot mind a felső mind az alsó culminatióban észlelünk, s időközben a távcső tengelyét megfordítjuk. Ezen esetben α' helyett $12^h + \alpha$-t kell tenni, a collimatio-hiba pedig a képletből kiesik, és lesz:

$$a = \frac{12^h - (T' - T) + (n'b' + nb) - \triangle x}{m' - m}.$$

Ha az azimuthiba állandóságában egy félnap hosszant bizni nem lehetne, czélszerűbb lesz két olyan sarkkörüli csillagot választani, melyeknek rectascensiói egymástól csaknem 12^h-al külömböznek, s az egyiket a felső, a másikat az alsó culminatióban észlelni; akkor α' helyett $12^h + \alpha'$-et kell tenni és a képlet lesz:

$$a = \frac{12^h + \alpha' - \alpha - (T' - T) + (n'b' + nb) - x}{m' - m}.$$

397. §. A geogr. szélesség meghatározása.

A helynek geographikus szélessége egyenlő annak sarkmagasságával. Ugyanis a 372. ábrában

$$AZ + ZE = 90^0, \text{ ugyszintén } RE + EZ = 90^0,$$

ezen egyenleteket egymásból levonván, lesz:

$$AZ = RE.$$

A geographikus szélesség meghatározása tehát a sarkmagasság megmérésére vezethető vissza. Milyen körülmények közt kell a magasság mérését eszközölni, hogy a hibák az eredményre legkisebb befolyást gyakoroljanak, a 396. §-beli külömbzéki egyenletből lehet megitélni. Ez t. i. $d\varphi$ után feloldatván, ad:

$$d\varphi = \frac{dz + d\delta \cos v - ds \sin v \cos\delta}{\cos a} = \frac{dz + d\delta \cos v - ds \sin a \cos\varphi}{\cos a},$$

melyből látszik, hogy a hibák befolyása legkisebb lesz, ha $a = o$, vagy $= 180^0$. A feladatot többféle módon lehet feloldani, u. m.

Első mód. Déllő magasságmérésekből. Mérjük meg egy csillagnak déllő zenittávját z, akkor ha a műszer állandó hibáját c-nek, s a refractiót r-nek nevezzük, dél felé való culminatiónál lesz:

I) $\varphi = z + c + r + \delta,$

egy más csillagra nézve, mely észak felé felül culminál, lesz:

II) $\varphi = -z' - c - r' + \delta',$

az alsó culminatióban pedig

III) $\varphi = 180^0 - \delta'' - z'' - c - r''.$

Az első és második egyenletek összeadása által lesz:

$$\varphi = \frac{1}{2}(z - z') + \frac{1}{2}(r - r') + \frac{1}{2}(\delta' - \delta) \ldots \odot$$

az első és harmadikból lesz:

$$\varphi = 90^0 + \frac{1}{2}(z - z'') + \frac{1}{2}(\delta - \delta'') + \frac{1}{2}(r - r'') \ldots ☽.$$

Ezen eredményekből a műszer hibája egészen kiesett, s a refractióknak is csak külömbsége fordul elő; s ha még a zenittávok is egyenlők, akkor a sarkmagasság meghatározására csak a csillagok declinatio-külömbségének ösmerete szükséges.

Ha a második és harmadik egyenleteket összeadjuk, lesz:

$$\varphi = 90^0 - \frac{1}{2}(z' + z'') - \frac{1}{2}(r' + r'') - c + \frac{1}{2}(\delta' - \delta''), ☿$$

s ha ugyanazon csillagot észleljük mind a két culminatióban, akkor lesz:

$$\varphi = 90^0 - \frac{1}{2}(z' + z'') - \frac{1}{2}(r' + r'') - c \ldots ♂.$$

Ezen egyenletben már mind a műszer hibája, mind a refraktiók összege előjön, de a declinatió ösmerete nem szükséges.

2. mód. Déllő körüli magasságmérések által. Az általános képlet szerint:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos s;$$

ebből következik:

$$cos\,z = cos(\varphi - \delta) - 2cos\varphi\,cos\,\delta\,sin\,\frac{1}{2}s^{\,2}, \quad \text{vagy}$$

$$sin\frac{\varphi - \delta - z}{2} = -\frac{2cos\varphi\,cos\delta\,sin\frac{s}{2}^{\,2}}{sin\frac{\varphi - \delta + z}{2}},$$

honnan elég közelitéssel következik

$$\varphi = z + \delta - \frac{2cos\varphi\,cos\delta\,sin\frac{s}{2}^{\,2}}{sin(\varphi - \delta)\;sin\,1''} \ldots \odot$$

3. mód. Átmeneti távcső által. Allitsuk fel az átmeneti távcsőt az első függélyes síkban, s észleljük egy álló csillag átmenetét a függélyes irányszálon mind culminatió előtt, mind azután Legyenek a leolvasott óraidők t_1, t_2; τ_1, τ_2 azoknak javításai csillagidőre, α a csillag rectascensiója, akkor az óraszögek lesznek:

$$s_1 = t_1 + \tau_1 - \alpha, \quad s_2 = t_2 + \tau_2 - \alpha.$$

A keleti oldalon tett észleletnél s_1 tagadó értéket nyer. Az azimut cotangense, mely mind a két észleletre nézve azonos, következő egyenletet ad.

$$\frac{cos\,s_1\,cos\delta\,sin\,\varphi - sin\delta\,cos\varphi}{cos\delta\,sin\,s_1} = \frac{cos\,s_2\,cos\delta\,sin\varphi - sin\delta\,cos\varphi}{cos\delta\,sin\,s_2},$$

honnan lesz:

$$tg\varphi = \frac{tg\delta(sin\,s_2 - sin\,s_1)}{sin(s_2 - s_1)} = tg\delta\,\frac{cos\frac{s_2 + s_1}{2}}{cos\frac{s_2 - s_1}{2}}.$$

Helyettesitvén a fentebbi értékeket, lesz:

$$tg\varphi = \frac{tg\delta\,cos\,\frac{1}{2}(t_2 + t_1 + \tau_2 + \tau_1 - 2\alpha)}{cos\frac{1}{2}(t_2 - t_1 + \tau_2 - \tau_1)} \ldots \odot$$

Ha ezen egyenletet különbzékeljük, lesz:

$$d\varphi = \frac{d\alpha}{2}sin\,2\varphi\,tg\,\frac{t_1 + t_2}{2} + d\delta\,\frac{sin2\varphi}{sin2\delta} - \frac{1}{2}\,d\tau_1\,\frac{sin\,2\varphi\,sin\,s_2}{cos\,s_2 + cos\,s_1}$$

$$- \frac{1}{2}\,d\tau_2\,\frac{sin\,2\varphi\,sin\,s_1}{cos\,s_2 + cos\,s_1}.$$

Ha a műszer körülbelől 1′-ig pontosan az első magassági körben van beállítva, akkor $\cos\frac{s_1+s_2}{2}$ közel $=1$, s az egyenletek egyszerűbbekké lesznek, u. m.

$$tg\varphi = tg\delta \,.\, sec\frac{1}{2}(t_2 - t_1 + \tau_2 - \tau_1);$$

$$d\varphi = \frac{1}{2}(d\tau_2 - d\tau_1)\, sin\, 2\varphi \,.\, tg\frac{1}{2}(t_2 - t_1 + \tau_2 - \tau) + d\delta \,.\, \frac{sin\, 2\varphi}{sin\, 2\delta}.$$

Ezen képlet azt mutatja, hogy az óra hibája annál csekélyebb befolyással bír, mennél kisebb $t_2 - t_1$, azaz: mennél közelebb culminál a csillag a tetőponthoz. Tetőponti csillagokra nézve $\varphi = \delta$, tehát $d\varphi = -d\delta$, azaz: a sarkmagasságban keletkező hiba egyenlő a csillag-declinatióban lévő hibával. Ha tehát két közel lévő pontnak geogr. szélesség-különbségét egy ilyen a tetőponttól kevéssé dél felé eső csillag által határozzuk meg, ez a csillag declinatiójában lévő valamely hibától ment lesz, a műszer állandó hibáit pedig a tengely megforditása által lehet az eredményből kiejteni; ennélfogva a számtani közép mind ezen hibáktól ment lesz.

398. §. A geographikus hosszaság meghatározása.

1) Két hely geographikus hosszának különbsége egyenlő az ugyanazon absolut pillanatban észlelt helyi idők különbségével; ennek meghatározása végett tehát csak egy olyan tünemény idejét kell mind a két helyen észlelni, mely mind a két helyen ugyanazon pillanatban áll be. Ilyenek p. o. a hold, valamint a Jupiter holdjainak fogyatkozásai, tűz-jeladások, hulló csillagok eltünése.

A holdfogyatkozások kezdete és végének észlelése nem ad pontos eredményt, mert azok a föld árnyékának elmosódott volta miatt nem rögtön állanak be, hanem hosszabb ideig elhuzódnak. Valamivel pontosabban lehet a Jupiter belső holdjainak elsötétülését észlelni, s a különböző helyeken észlelt csillagesések azonosságát felösmerni igen nehéz.

2) Jobb eredményt adnak a tűzjelek, melyeket puskapor fellobbantása által szoktak adni; de ezeket csak 5—10 mértföldnyire lehet látni. Ha tehát a két állomás egymástól távolabb esik, közben több állomást kell felállítni. Legyenek az állomási pontok $A, B, C, D, E, F, G,$ hol A a nyugoti, G a keleti vég-

pontot, *B*, *D*, *F* pedig magas helyeket, melyeken a tűzjelek adatnak, végre *C*, *E* közbenső állomásokat jelentenek. Legyen a *B* jel észlelési ideje *A*-ban $= t_1$, *C*-ben $= \tau_1$, a *D* jelre nézve *C*-ben $= t_2$, *E*-ben $= \tau_2$, az *F* jelre nézve pedig *E*-ben $= t_3$, *G*-ben $= \tau_3$, akkor az időkülömbség:

A és *C* közt ... $= \tau_1 - t_1$

C » *E* » ... $= \tau_2 - t_2$

E » *G* » ... $= \tau_3 - t_3$.

Ezeket összeadván, az időkülömbség lesz:

A és *G* közt .. $= \tau_1 - t_1 + \tau_2 - t_2 + \tau_3 - t_3$,

mit igy is lehet irni $= \tau_1 - (t_1 - \tau_2) - (t_2 - \tau_3) - t_3$ . . . . 32).

Ezen utolsó egyenlet azt mondja, hogy a közbenső állomásokon csak az észlelési idők külömbségét kell tudni, absolut időmeghatározás nem szükséges. De a két végponton az óra állásának is szigorún ösmeretesnek kell lenni.

3) Az idők különbségét chronometerek által is meg lehet határozni. Határozzuk meg t. i. az időt az egyik végponton, azután a másik pontra utazván, határozzuk meg az időt elébb közvetlen észlelés, azután számítás által, feltévén, hogy az ösmeretes óra járása időközben nem változott. Ezen külömbség a két ponton a helyi idők külömbségét szolgáltatja.

4) Igen nagy pontosságot ád a telegraph használata az időkülömbség meghatározására. A telegraph által adott jeleket t. i. úgy lehet tekinteni, mint egy tüneményt, melyet a villanyfolyam igen nagy sebessége miatt a vonalnak mind a két végén csaknem egyidejűnek lehet venni. Azon igen csekély időkülömbséget, melyet a villanyfolyam haladása a vezetéseken igénybe vesz, számításba lehet hozni azáltal, hogy a jeleket egyszer az egyik, másszor a másik végponton adjuk. Legyen a helyi idő a keleti állomáson $= a$, a nyugotin $= b$ azon pillanatban, midőn a keleti állomáson jel adatik, tehát a két hely hosszasági különbsége $\lambda = a - b$. Legyen továbbá a villanyosság által a vezeték átfutására igénybe vett idő $= \omega$. A jel tehát $b + \omega$ helyi időben fog a nyugoti ponton megérkezni, s a két észlelt idő közötti külömbség lesz:

$$a - (b + \omega) = \lambda - \omega,$$

azaz: az észlelés által nyert hosszasági külömbség ω-val kisebb, mint kellene. Hasonlóképen lesz, ha a nyugoti ponton adatik jel, melyet a keleti ponton észlelünk, s a leolvasásokat egy vonással külömböztetjük meg,

$$\alpha' + \omega - b' = \lambda + \omega.$$

Ezen eredmény megint ω-val nagyobb mint kellene. Adjuk össze a két eredményt és felezzük, akkor lesz:

$$\frac{a+a'}{2} - \frac{b+b'}{2} = \lambda,$$

melyből az ω egészen kiesett.

5) Még tökéletesebb eredményt lehet elérni a chronograph által, mely lényegében abban áll, hogy egy tengelye körül egyenletesen forgó hengerre, melyre papiros van felfeszítve, s melynek tengelye irányában egy irópeczek szintén egyenletesen mozog, ezen peczek bizonyos pillanatokban pontokat nyom be. Ezen irópeczek t. i. egy villanydelejjel van kapcsolatban olyformán, hogy ha a villanyfolyam, mely a vasat delejjé változtatja, megszakíttatik, a delej horgonya a delejtől elválik, s az irópeczek a papirosra nyomatik. A villanyfolyam vezetésébe be van iktatva a két észlelési ponton egy-egy óra, melyek úgy vannak felszerelve, hogy a folyam minden ingásnál megszakíttatik, s ekképen mind a két chronographon mind a két óra másodpercz jegyei felrajzoltatnak; ezen jelek egybevetése által az órák összehasonlitását a legnagyobb pontossággal lehet végrehajtani. A folyam vezetésében van továbbá az átmeneti távcső közelében egy kulcs, melynek lenyomása által a tünemény pillanatában a folyam szintén megszakittatik. Ezen pillanatok is registráltatnak mind a két chronographon. A papiros szalagokról tehát az időkülömbségeket egy körzővel igen nagy pontossággal le lehet venni, mivel az egyenletes mozgás miatt, az idők külömbségeit a leirt útak által lehet mérni. A műszerek és az észlelők állandó hibáit részint a műszerek, részint az észlelők felcserélése által lehet az eredményből kiküszöbölni.

Ujabb időben a henger helyett egy a Morse-féle telegraph módjára berendezett szerkezetet használnak, melyen a jelek egy tengelyről letekergődző papirosszalagra festékkel felrajzolva mutatkoznak.

399. §. Azimut-mérés.

1) Valamely földi irányvonal azimutjának meghatározására legalkalmatosabb műszer a theodolit. A mérés módja következő:

Irányozzuk a kellőleg felállitott theodolit távcsőjét a földi czélpontra, s olvassuk le a vizszintes körön a noniusok állását A, azután irányozzuk azt valamely álló csillagra, melyet úgy kell választani, hogy annak mozgása az azimut irányában lassú legyen, s olvassuk le az időt t_1, a noniusokat a. Azután hajtsuk át a távcsőt s ismételjük a műtételt ellenkező rendben, ugy hogy elébb b, azután B olvastassék le. Ekkor $A—a$, és $B—b$ a földi czélpont és a csillag azimut-különbségeit szolgáltatja. Ezen két eredmény nem egészen egyenlő egyrészről azért, mert a műszer állandó hibái ellenkező módon hatnak, másrészről azért, mert időközben a csillag a maga napi mozgásában előre haladt. A két eredménynek számtani közepe a csillag középállásának megfelelő azimut-különbséget fogja adni, s ennek az idők közötti közép fog megfelelni. Tehát

$$\frac{1}{2}[(A+B-(a+b)]$$

a keresett azimut-különbség $\frac{1}{2}(t_1+t_2)$ időre nézve. Nevezzük az $\frac{1}{2}(t_1+t_2)$ időnek megfelelő óraszöget s-nek, akkor a csillag azimutját ω a 391. §. δ két első egyenlete alapján következő képletek szerint lehet kiszámítni:

$$tg\,\omega = \frac{sin\,s}{-tg\delta\,cos\varphi + cos\,s\,sin\varphi},\ \text{vagy}\ cotg\,\omega = cotg\,s\,sin\varphi - \frac{cos\varphi\,tg\delta}{sin\,s}.$$

Tehát a földi czélpont azimutja leend $= \omega + \frac{1}{2}[(A+B)-(a+b)]$

A $tg\omega$ egyenletet némely segédmennyiségek segitségével kényelmesen fel lehet oldani. Tegyük t. i.

$$\frac{tg\delta}{cos\,s} = tg\,n,\quad \text{akkor}\quad tg\omega = \frac{tg\,s\,cos\,n}{sin\,(\varphi-n)}..$$

2) Minő körülmények közt lehet jó eredményt nyerni, következőképen lehet megvizsgálni: külömbzékeljük a $cotg\,\omega$ képletét minden benne előforduló mennyiségek szerint, akkor némű reductiók után következő eredményhez jutunk:

$$d\omega = -\frac{sin\,\omega}{tg\,z}d\varphi + \frac{sin\,v}{sin\,z}d\delta + \frac{cos\,v\,cos\delta}{sin\,z}ds.$$

Ebből látni lehet, hogy a hibák befolyása mind igen kicsiny lesz, ha z közel $= 90^0$, a csillagot tehát a horizonhoz közel kell észlelni.

MÁSODIK SZAKASZ.

Földmértani munkálatok.

400. §. Háromszöghálózatok.

Egy több mértföldre terjedő vonalnak közvetlen megmérése, a természeti akadályok miatt csaknem lehetetlen lévén, a felsőbb földmértanban általánosan a Schnellius módja fogadtatott el, s alkalmaztatik mai nap is. A fokmérésnél a megmérendő vonalat részint egy déllő irányában, részint arra merőlegesen, néha a parallelkör mentében szokták választani, s a végpontokat egy összefüggő háromszög-hálóval kötik össze; az országmérésnél pedig az egész ország területét egy, minden irányban kiterjedő, s egymással összefüggő háromszög-hálóval vonják be. A háromszögek szabályszerű alakja az egyenoldalú háromszög (224. §.), minthogy ezen háromszögnél a mérési hibák befolyása minden irányban egyenlő, tehát az összehalmozódás következései legkisebb kárral járnak.

Az országos mérésnél három rendű háromszög-hálózatot szoktak megkülömböztetni. Az első rendűnek oldalai 10—15 mértföld hosszúk, noha Struve 10—15000 ölnél hosszabbakat nem ajánl, mivel azoknál az oldal-refraktiónak nyomait vélte felfedezni, mig ez rövidebb vonalakra még befolyást nem gyakorol. A másodrendű háromszögek oldalai már sokkal rövidebbek, ugy hogy egy elsőrendű háromszögbe 3—4 másodrendű pont esik. Mind a két rendbeli pontok egymással összefüggnek, úgy hogy az elsőrendű háromszög-oldalak a másodrendű hálózatban átlókat képeznek. A harmadrendű háromszög-pontok már egymástól függetlenek, s csak a másodrendű háromszög-oldalakkal vannak összeköttetésben, és olyan sűrűn esnek, hogy köztük minden helységek tornyai bennfoglaltatnak; ennélfogva ezek a részletes felvételre közvetlen kiindulási pontokul szolgálhatnak.

A fokmérésben csak az elsőrendű háromszögekre van szükség.

401. §. Jelek.

1) A pontok megjelölésére jelek alkalmaztatnak. A franczia országmérésnél gerendákból össszetett gúlák használtattak, melyeknek magassága azon távnak, melyre látszodniok kellett, 4000-ed részét tették. Ezen jelek mind a mellett borult időben roszul

látszodtak. Az angolok éjjeli jeleket használtak argand lámpák alakjában, melyek parabolicus tűkörrel voltak felszerelve; de az éjjeli szögmérés sok csalódásra adott alkalmat.

2) Bessel a keleti porosz fokmérésnél a főbb pontokon kőoszlopokat állitott fel, melyeknek közepébe egy sárgaréz henger volt beöntve. Ezen hengerre azután léczekből készitett, s viaszos vászonnal bevont, egyenszárú háromszög alakú rámát állittatott fel, melyet mindig az észlelő felé kellett fordítni. Ezen jelek 20—25000 öl távra még igen jól látszodtak. Kisebb 5—10000 öl hosszú vonalak végein 4—8" átmérőjű, rézből készitett s megezüstözött félgömböket helyezett a hengerekre, melyeknek felülete mint egy domború tűkör, a nap sugárait minden irányban visszavetette úgy, hogy a nap képe az észlelő távcsőjében fénylő pontképen látszott. Az ezen fénylő pontokra irányzott vonalakat utólagosan a gömb középpontjára kell átszámítni. — Struve az orosz fokmérésnél a gúla tetejéből egy 6—8' hosszú, 10" vastag gerendát emelt fel, mely 15—20000 öl távra még tisztán észlelhető volt. — Gauss végre e czélra egy tűkörműszert — heliotropot — szerkesztett, mellyel a nap sugárait tetszésszerinti irányban lehet valamely pont felé vetni, s ez a legnagyobb távra is jó szolgálatot teszen.

3) A Gauss-féle heliotropnak főbb alkotó része egy távcső, mely egy állványon két ágyban fekszik. Ezen távcsőnek kettős mozoghatósága van, u. m. mértani tengelye, és egy arra merőleges tengely körül, mely tengelyt minden fekvésben meg lehet szorítni. A szemcső diaphragmával és irányszál-kereszttel van felszerelve, melyet úgy lehet kiigazítni, hogy a láttani tengely a távcső mértani tengelyével párhuzamos legyen. A tárgylencse előtt egy, 3 tűkörből *a*, *b*, *c* álló készülék van elhelyezve (376. ábra), melyek közül a két szélső *a*, *c* egymással párhuzamos, a harmadik pedig az előbbiekre merőlegesen áll. Ezen tűkrök egymással merev összeköttetésben állanak, s egy tengely *IK* körül, melyre párhuzamosan vannak megerősítve, forgathatók; ezen tengely pedig, mely egy ágas karjai közé van helyezve, a távcső optikai tengelyére merőlegesen áll. A távcső és a tűkör-készülék finomabb mozgása végett hosszú merev rudacskák vannak alkalmazva.

Mielőtt ezen műszert használni lehetne, meg kell vizsgálni, valjon a távcső irányvonala párhuzamos-e annak forgástengelyével? valjon az *a* és *c* tűkrök párhuzamosok-e egymással? valjon a *b* tűkör párhuzamos-e az *IK* tengelylyel? valjon az *IK* tengely merőleges-e a távcső mértani tengelyére? Valjon a *b* tűkör merőlegesen áll-e az *a* és *b* tűkrökre.

4) Steinheil a heliotropnak igen egyszerű szerkezetet adott. Ő t. i. egy kis kerülék alakú sík tűkröt (377. ábra) egy villa alakú tartón megerősített, melyet az *IK* tengely körül forgatni lehet. A tűkör közepén egy szintén ellipticus alakú kis téren a boriték le van vakarva úgy, hogy ott az üveg átlátszó. Az ágas töve át van fúrva, s a lyuk felső végén egy kis gyútávú üveglencse van beillesztve; az alsó végén pedig egy csavar végén egy darabka mész van megerősítve. Az állvány több ízekből van összetéve, melyek egymásra keresztben foroghatók, s a legalsóbb facsavarral van felszerelve. A tűkröt tehát a térben mindenfelé lehet forgatni, s azt olyan állásba lehet hozni, hogy a napsugárok a tűkör középső nyilásán keresztül a lencsére essenek, s ott megtöretvén, a lyuk fenekének közepén egy finom napképet alkossanak. Ez a mész felületén egy világitó pontot képez, mely sugárait mindenfelé lövelli. A sugárok tehát az előbbiekkel ellenkező irányban fognak a lencséhez jutni, s ott megtöretvén párhuzamosan, de a beeső sugárokkal ellenkező irányban esnek a tűkör hátulsó lapjára, s hátrafelé visszavettetnek. És igy a tűkörnek ugyanazon hátulsó lapja a napsugárokat két ellenkező irányban veti vissza, u. m. a beboritott helyeken előre, a nyilt részen pedig hátrafelé, s ezen utóbbi az elsőbbnek bizonyos irányban való vezetésére szolgál. Ha t. i. ezen hátrafelé menő sugárokat szabadszemmel felfogjuk, egy holdfényhez hasonló kerek világos foltot látunk a vidéken elterülve, s ha most a tűkröt ugy mozdítjuk tengelyei körül, hogy ezen fény azon vidékre essék, melyre akarjuk a heliotrop fényt vezetni : akkor az elsőbb sugárok valóban látszodnak a nevezett vidéken. Ezen műszer semmi javítást sem kiván, mert a visszavető felület mind a két rendbeli sugárokra nézve ugyanaz, t. i. a tűkör hátulsó lapja; ennek tehát csak egyenesnek kell lenni, hogy a czélnak megfeleljen.

5) Szintén igen egyszerű a Bertram-féle heliotrop is. Ez lényegesen egy függélyes és vizszintes tengely körül mozgatható, s közepén egy kerek lyukkal ellátott tűkörből, továbbá egy, a

tűkör előtt 10" távban elhelyezett, s egy keresztszállal ellátott csövecskéből áll, melyet egy fedővel el lehet zárni. A tűkörnek a két tengely körül való forgatása által a visszavetett napsugárokat a cső fedőjére, a szálkeresztre lehet beállítni, a szálkereszt pedig a tűkör közepén létező kerek lyukkal együtt nézge gyanánt szolgál, s azon pontra irányoztatik, hol a szögmérő fel van állítva. Mindezen részek egy táblán vannak megerősítve, melyet az álláspont középpontjában mozdulatlan kell felállítni.

6) Legnyomatékosabb kifogás, melyet a Bessel gömbtűkre és a heliotrop ellen fel lehet hozni az, hogy mind a kettőt csak verőfényes időben lehet használni, ekkor pedig a lég hullámzása a föld felszinéhez közel eső rétegekben, melyeken a távolról jövő sugároknak áthatolniok kell, olyan nagy, hogy a képet sokszor látni sem lehet. Ezért a napnak csak néhány óráit, u. m. reggel 9^h-ig, délután 4^h-tól estig lehet munkára fordítni.

402. §. A mérések pontossága.

A fentebbiekből láttuk, hogy a földmértani mérések egy alapvonalnak és a háromszög-hálózat szögeinek megméréséből állanak. Mielőtt ezen mérések magyarázatához fognánk, szükség lesz megvizsgálni, hogy minő pontossággal kell azokat véghezvinni, hogy a hiba az eredményben a megengedhetőnél nagyobb ne legyen. Legyen e végre egy háromszögben adva egy oldal a, s a mellette fekvő két szög B, C, akkor a másik oldal ezen egyenletből határoztatik meg:

$$b_1 \sin(B + C) = a \sin B.$$

Külömbzékeljük ezen egyenletet minden benne előforduló mennyiségek szerint, akkor lesz:

$$\sin(B+C) \, . \, db_1 + b_1 \, . \cos(B+C) \, . \, d(B+C) = \sin B \, . \, da + a \cos B \, . \, dB.$$

Ezen két egyenletet egymással elosztván, lesz:

$$\frac{db_1}{b_1} = \frac{da}{a} + \frac{\sin C}{\sin A \sin B} dB + \cot g A \, . \, dB.$$

Tegyük áttekinthetőség végett $dB = dC = dw$, hol dw a szögmérésben megejthető közép hibát jelenti, akkor a viszonylagos közép hiba lesz:

$$\frac{db_1}{b_1} = \sqrt{\left(\frac{da}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin C^2}{\sin A^2 \sin B^2} + \cot g A^2\right) dw^2}.$$

Tegyük most $A = B = C$-nek, mi a szabályos esetnek felel meg, akkor

$$\frac{db_1}{b_1} = \sqrt{\left(\frac{da}{a}\right)^2 + \frac{5}{3} dw^2}.$$

Ha most ezen b_1 oldalt a következő háromszög alapvonalának vesszük, lesz hasonlóképen

$$\frac{db_2}{b_2} = \sqrt{\left(\frac{db_1}{b_1}\right)^2 + \frac{5}{3} dw^2} = \sqrt{\left(\frac{da}{a}\right)^2 + 2 . \frac{5}{3} dw^2}.$$

s igy az n-ik háromszögben

$$\frac{db_n}{b_n} = \sqrt{\left(\frac{da}{a}\right)^2 + n \frac{5}{3} dw^2}.$$

Ha most azt akarjuk, hogy $\frac{db_n}{b_n} < \frac{1}{100000}$ legyen, akkor az oldal és szögek hibáinak egyenként még kisebbeknek kell lenni. Vegyük ezen hibákat egyenként szemügyre. Tegyük először $dw = o$, akkor $\frac{db_n}{b_n} = \frac{da}{a}$; azaz: az alapvonalban ejtett hiba minden oldalra arányosan hat ki, s az előálló idom az eredetihez hasonló marad. Tegyük továbbá $da = o$, akkor lesz:

$$\frac{db_n}{b_n} = dw \sqrt{\frac{5}{3} n}.$$

Ezen képletből látni való, hogy a szöghibák a kiszámítandó oldalakra folytonosan növekedő befolyást gyakorolnak. Innen lesz:

$$dw = \frac{db_n}{b_n} \sqrt{\frac{3}{5n}}.$$

Tegyük most például $\frac{db_n}{b_n} = \frac{1}{100000}$, $n = 10$, akkor lesz $dw = 0''5$.

A szögeket tehát igen nagy pontossággal kell megmérni, ha azt akarjuk, hogy az eredmény a czélnak megfeleljen. Átaljában minden felsőbb földmértani munkálatoknál a legnagyobb óvatosságot, s a szőrszálhasogatásig menő pontosságot kell szem előtt tartani.

403. §. Alapvonal.

1) Az alapvonalat egy közel vizszintes fekvésű, természeti akadályoktól ment síkságon kell választani. Hossza 1000—4000 öl lehet. B e s s e l, S c h w e r d t után, még 1000 ölnél is rövi-

debb alapvonalat használt a keleti porosz fokmérésnél; mig a többi geodéták a hosszabbnak adtak elsőséget. Az alapvonal hossza sokkal kisebb, mint egy elsőrendű háromszögoldal; ezért tehát az alapvonalat a főhálózat egy oldalával egy, e végre kitűzött mellékháromszög-háló által kell összekapcsolni. Ennek alakját ugy kell választani, hogy a mérési hibák azon irányban, a melyben a számítás halad, az eredményre a legkisebb befolyást gyakorolják.

2) Maga az alapvonal mérése 2 öl (4 méter) hosszú rudakkal eszközöltetik, melyek rendesen vasból vannak készítve. Az angolok üveg-, a francziák platina-rudakat használtak. Farudak csak csekélyebb fontosságú méréseknél alkalmazhatók, mivel ezek a hőmérsék miatt igen rendetlenül változnak, hygroscopikus természetöknél fogva pedig nedves időben igen nagy változásnak vannak kitéve. A vasrudak czélszerűen [] keresztmetszésüek, melyeken a mérték vagy a felső lapon vonásokkal van megjelölve, vagy a két véglap középpontjai közt foglaltatik. A véglapok rendesen a rúd tengelyére merőleges síkokat ábrázolnak; de azok lehetnek gömb, vagy ékalakúak is, simára köszörülve és polirozva.

A rudakat az áthajlás megakadályozása végett vagy erős gerendákra, vagy erős vasrúdon sorban elhelyezett csigákra fektetik, melyeknek legfelsőbb vonalai egy síkban feküsznek, s a csigák gördülékenységük miatt a rudak kiterjedését nem akadályozzák; ezen alapgerendák vagy rudak pedig bakokon nyugosznak, melyeket mind függélyes, mind vizszintes irányban egy kissé el lehet mozdítni azért, hogy a rudak végeit egyenlő magasságba, s egymásután egyenes vonalba lehessen felállítni. Hogy két egymásután következő rúd össze ne ütődjék, nem szabad azokat egymáshoz tolni, hanem $^3/_4$—1″-nyi hézagot kell hagyni közöttük, melyeket külön kell megmérni. Végre hogy a mérőrudak a napsugároknak kitéve ne legyenek, fatokkal födetnek be. Ilyen mérőrúd kettő vagy három szükséges. A mérés előtt meg kell határozni minden rúdnak absolut hosszát bizonyos hőmérséknél, az anyag kiterjedési képességével együtt; mérés közben pedig meg kell mérni minden rúdnak hőmérsékét, annak hajlásszögét a vizszinteshez, ha az nem vizszintesen állittatott fel, és végre a rudak közt lévő hézagot.

404. §. Ösmértékrúd. Comparator.

1) Ha valamely vonalnak hosszát annak m-ed részéig biztosan meg akarjuk határozni, szükség a mérőrúd hosszát is annak m-ed részéig pontosan ösmernünk. Ugyanis legyen a mérőrúd hossza $= l$, s ez m-szer egymásután illesztve L hosszat adjon, akkor

$$L = ml;$$

ezt különbzékelvén, és az egyenleteket egymással osztván lesz:

$$\frac{dL}{L} = \frac{dl}{l}.$$

Legyen most $\frac{dL}{L} = \frac{1}{100000}$, $l = 1^0 = 72''$, akkor lesz $dl = 0''\cdot00072$, olyan kis mennyiség, melyet szabadszemmel látni nem lehet. A rudak hosszának meghatározásához tehát eredeti- vagy ösmértékrúd — hossz Etalon, — és különös mérték-összehasonlitó készülék — comparator — szükségesek.

2) A comparatorok vagy górcsövekkel vannak felszerelve, a mikor a mérték végei vonásokkal, vagy pontokkal vannak megjelölve, vagy érintkező érzékeny emeltyűkkel vannak ellátva, s akkor a mérték végei a mértékrúd tengelyvonalában a végfelületeken feküsznek. A felszerelésnél meg lehet a német rendszert a francziától külömböztetni.

Az elsőnél két górcső olyan távban van szilárdan felállitva, mely a mérték hosszával közel egyenlő, s az összehasonlitandó mértékek egymás mellé egy asztalra vannak helyezve, mely a górcsöveket összekötő vonalra keresztben elmozdítható. Ha tehát az egyik górcső szála az eredeti mérték egyik végpontjára, a másik górcsőé pedig annak másik végpontjára be lett állítva, s azután a tábla elmozdíttatik, mig a másik mértékrúd végpontjai jönnek a górcsövek alá: az azok látterében mutatkozó eltéréseket a szálaktól a górcsövek csavar-páránymérőivel meg lehet mérni.

A másik rendszernél a górcsövek egymás mellett vannak megerősitve keresztben a mértékrudakat hordó asztal hosszára, s az asztal a górcsövek alatt annak hossza irányában elmozdítható. Ha most az egyik mértékrúd egyik végpontja az egyik górcső szála alá, a másik mértékrúdé pedig a másik górcső szála alá állittatik, azután az asztal hosszában elmozdíttatik, mig a mértékrudak másik végpontjai jönnek a górcsövek látterébe, s az eltérések a csavar paránymérőkön szintén leolvastatnak, ezen leolvasásokból a két mérték különbségét fogjuk kapni.

Az érintkező emeltyűs comparatorok hasonlóképen mind a két rendszer szerint készittetnek, s ezek az előbbiektől csak a paránymérés módjára nézve külömböznek. Mig t. i. az előbbiekben a beállitás a látásra, a paránymérés pedig finom csavarokra van alapítva, addig ezeknél a beállitás egy emeltyű rövidebb karjával való érintkezés által, a paránymérés pedig az emeltyű hosszabbik karján lévő index segitségével egy scalán való leolvasás által eszközöltetik.

3) Legyen az ösmértékrúdnak, melylyel a mérőrúd összehasonlittatott, valóságos és névszerinti hossza τ hőmérséknél $= l$, a rúd kiterjedési együtthatója $= \alpha$, mind a két rúd hőmérséke az összehasonlitás alatt $= t$, a mérőrúd kiterjedési együtthatója $= \beta$, annak hossza T hőmérséknél $= L$, akkor az ösmértékrúd hossza az összehasonlitás alatt

$$l' = l(1 + (t - \tau)\alpha).$$

Legyen a mérőrúd hossza $= nl' + m$, hol n egész szám, m pedig egy igen kis darabka szokott lenni, akkor a mérőrúd hossza T hőmérséknél lesz:

$$L = (nl' + m)\,(1 + (T - t)\beta) = \{nl(1 + (t - \tau)\alpha) + m\}\{1 + (T - t)\beta\},$$

vagy igen közel

$$L = nl(1 + (t - \tau)\alpha + (T - t)\beta) + m.$$

Ezen képletből most ki lehet számítni, hogy milyen hőmérséknél lesz a rúd valóságos hossza egyenlő annak névszerinti értékével, azaz: $L = nl$. Ezen feltétel alatt t. i. a fentebbi egyenletből lesz:

$$nl[(t - \tau)\alpha + (T - t)\beta] + m = o.$$

tehát

$$T = t - \frac{nl(t - \tau)\alpha + m}{nl\beta}.$$

Hasonlóképen ha $T = o$-nak vesszük, nyerjük a rúd hosszát 0^0 hőmérséknél, mely a méternek szabályszerű hőmérséke:

$$L_0 = nl(1 + (t - \tau)\alpha - t\beta) + m.$$

405. §. A mérőrudak hőmérséke.

A milyen fontos dolog a mérőrudak absolut hosszának ösmerete valamely hőmérséknél, épen olyan szükséges azok melegségi fokának meghatározása is. Mert a vasnak kiterjedése hossz-irányban 1^0 R. hőmérsékváltozásra a hossznak $\frac{1}{64020}$ része, tehát már tetemesen nagyobb, mintsem azt elhanyagolni lehetne, annyival inkább, mert a rúd melegsége munkaközben 8—10^0-al is változhatik.

1) A rudak hőmérsékét külömböző módon igyekeztek meghatározni. Hőmérőket a rudakra fektetni nem elég, mert azok nem annyira a rúd, mint inkább az azt környező lég hőmérsékét mutatják, mely a rudakétól Bessel tapasztalása szerint 1—$1^1/_2{}^0$-al is külömböző lehet. Czélszerűbb a hőmérő gömbjét a rúdban fúrt lyukba helyezni, s a hézagot higanynyal tele önteni, a nyilást felülről teljesen elzárván; mert ekkor a higany gömbje a vasrúddal fémi érintkezésben lévén, annak hőmérsékét inkább magába veszi, mint az előbbi esetben. Két, három, a rúd hosszában egyenlő távban helyezett hőmérő-leolvasásokból nyert közép érték a rúd közép melegségi fokát biztosan fogja szolgáltatni.

2) Borda, utánna Bessel, és legujabban Ibanez rúdhőmérőket használtak a mérőrudak hőmérsékének meghatározására. Borda a platina mérőrúdra egy réz rudat fektetett, egyik végüket összeforrasztotta egymással, a másikon pedig egy Noniust alkalmazott, melylyel a két rúd hosszkülömbségének változásait meg lehetett mérni. A réz t. i. erősebben kiterjedvén, mint a platina, az annak végén lévő Nonius 0 pontja a platina-rúdon lévő skálán növekedő hőmérséknél előre, csökkenőnél pedig hátra vonult.

Tegyük fel, hogy τ hőmérséknél a Nonius mutatója 0^0-t mutat, s legyen ezen pillanatban a rúd hossza a forrasztási ponttól a Nonius mutatójáig $=\lambda$, t^0 hőmérséknél pedig a Nonius állása $=m$, a réznek kiterjedési együtthatója $=\alpha$, a platináé $=\beta$, akkor lesz:

$$\lambda(1+(t-\tau)\alpha)=\lambda(1+(t-\tau)\beta)+m.$$

Ezen kifejezésben m igen kis darabka lévén, annak kiterjedése el van hanyagolva. Ebből következik:

$$t=\tau+\frac{m}{\lambda(\alpha-\beta)}.$$

Ezen egyenlet alakja vonalas, t. i.

$$t=M+Nm,$$

hol M, N állandó együtthatókat jelentenek, melyeket két egymástól lehetőleg külömböző hőmérséknek mind a rúdon, mind a hévmérőn való észlelése által meg lehet határozni.

3) Bessel vas- és horgany rudakat alkalmazott, s a rudak hosszának külömbségeit egy nyulánk üveg-ékkel mérte meg (378. ábra), melyet a rudak végein megerősített ékalakú aczél darabok közé tolt, az ék oldalán pedig egy beosztás volt bevésve, melyen a hézagot le lehetett olvasni. Ibanez szintén platina- és réz rudakat használt, s a hosszkülömbség változását górcső-paránymérővel mérte meg.

406. §. Hajlásszögek. Hézagok.

1) A mérőrudak hajlásszögeinek megmérésére Delambre egy műszert használt, mely a hegymérőhöz hasonlít és egy háromszögből áll, melynek csúcsában egy csap körül egy lénia forgatható, ennek közepén keresztben egy szintező, végén pedig Nonius van helyezve, mely egy beosztott ív körül mozoghat. Ha ezen műszer talpa a mérőrúdra helyeztetik, s a lénia tengelye körül forgattatik, mig a szintező buborékja középen áll, a Nonius a talp hajlásszögét fogja mutatni, feltévén, hogy a beosztás *o* pontja a kellő helyen áll. Ennek megvizsgálása a hegymérőével egészen azonos; 5—10″ pontosság ezen szögmérésnél elegendő.

Bessel egy másforma műszert használt (379. ábra), melyen a szintező mozgását egy csavaron lehetett leolvasni, s ennek feje 100 részre volt beosztva.

2) A rudak közötti hézagokat szintén külömböző módon lehet meghatározni. Ha a rúdon a mérték végei vonásokkal vannak megjelölve, azoknak legrövidebb távját egy körzővel is meg lehet mérni; de czélszerűbb e czélra a rúd végén egy tolókát alkalmazni, mely Nonius léptéket ábrázol. Ezt a rúd végéig előre tolván, vele a hézagot pontosan meg lehet mérni. Bessel és Gauss az ő ékalakúra metszett rúdjaiknál a hézagot a fentebb emlitett üveg ékkel mérték meg.

407. §. Alapvonal-mérés.

Az alapvonal mérésének folyamatja következő: Mindenekelőtt ki kell tűzni a földön az alapvonalat. E végre felállitjuk a theodolitot az alapvonal egyik végpontjában, s a távcsőt szigorúan a vonal másik végpontjára irányozván, minden 100—200 ölben egy karó fején, melyet a földbe verünk, az alapvonal irányát egy ponttal megjelöljük. Ezután a theodolitot vagy 400 öllel előre küldvén, az utolsó kitűzött karóra felállitjuk, s a távcsőt hátrafelé hajtván, a theodolit előbbi álláspontjára irányozzuk; azután azt ismét előre áthajtván a pontok kitűzését az előbbi rendben folytatjuk; s i. t., mig a végponthoz érünk. Ezen eljárás szerint igen közel egy úgynevezett geodétikus vonal tűzetik ki, melynek definitiója ez, hogy annak akármely ívecskéje egy kis darabkával meghosszabbíttatván, s ezen meghosszabbítás a föld mathematikai felületére merőlegesen levetíttetvén, a vetület a vonal folytatásába esik. Ezen vonalnak azon sajátságos természete van, hogy az a legrövidebb vonal két pont közt; s ha a felületen egy zsinórt kifeszítnénk a két pont közt, ez a geodétikus vonalban jönne állandó fekvésbe. Ezután egy zsinórt kell kihúzni a vonal irányában, s ennek mentében kell a bakokat felállítni, melyekre azután a mérőrúd-gerendák tétetnek. Az egyes rudakat az egyenes vonalba a theodolit-távcsővel kell beirányozni, mely vagy 100 öllel előre, egy kitűzött pont fölé állittatik. A mérés kezdetén az első rúd egész szigorúsággal a kezdőpont fölé helyeztetik, vagy ha ez nem volna lehető, a kezdőpont és a rúd vége közt lévő darabka egy pontos mérőpálczával külön megméretik. A mérő rudak végei egyenlő magasságba emeltetnek, de a rúd maga körülbelől a föld szinével párhuzamos fekvésbe hozatik, hogy annak vége kényelmetlen magasságba ne jőjjön, s a leolvasásokat könnyen lehessen teljesítni. Ha mind a három rúd le van rakva, akkor az utolsón a hőmérsék, hajlásszög és hézag leolvastatnak, s a rúd előre küldetik, hol felállittatván, a leolvasások az utolsó rúdon folytattatnak. Átaljában mind a három rúdnak le kell rakva lenni, midőn az utolsón a leolvasások eszközöltetnek, azért, hogy mindig legalább két rúd feküdjön, s elmozdulás olyan könnyen elő ne állhasson. A napi munka bevégeztével a rudakat felállitva kell hagyni őrizet mellett, s azoknak végpontjait egy finom ezüst szállal a földre le kell függönyözni. Körülbelől 200 ölenként egy mérőrúd végét le kell függönyözni a földbe vert maradandó karókra, s a pontot meg kell jelölni azért, hogy ha talán mind a három rúd elmozdulna, a munkát elölről ne kelljen kezdeni. A vonal utolsó darabkáját ismét külön kell megmérni. A leolvasásokat és feljegyzéseket két egyénnek egymástól függetlenül kell tenni, de azokat mindjárt össze kell hasonlítni egymással, hogy a tévedések felderittessenek. Átaljában az egész munkát gyorsan, de szeleskedés nélkül, a kellő óvatossággal kell végrehajtani.

408. §. Az alapvonal kiszámítása.

1) Legyen az I, II, III mérőrudak hossza 0° hőmérséknél l'_0, l''_0, l'''_0; legyenek a rudak az alapvonal megmérése alkalmával m, n, p-szer fektetve, akkor az alapvonal hosszára nézve ezen kifejezés áll: $L = ml'_0 + nl''_0 + pl'''_0$ + hőmérséki pótlék — hajlásszögi javítás + hézagok. Az első tagok a hossznak nyers értékét szolgáltatják. Ezek csak akkor adnák teljesen a vonal hosszát, ha a rudak hossza állandó, azoknak fekvése vizszintes volna, s a mértékek végei egymáshoz érnének.

2) A hőmérséki pótlék kiszámítása végett legyen az I rúd hossza 0° hőmérséknél l'_0, annak a mérés közben leolvasott hőmérsékei $t'_1\ t'_2\ t'_3 \,..\, t'_m$, kiterjedési együtthatója α, akkor az I rúdból eredő hőmérsékei pótlék lesz:

$$l'_0\alpha\,(t'_1 + t'_2 + t'_3 + \ldots + t'_m) = l'_0\alpha \sum_1^m (t').$$

A II és III rudak hasonló képleteket adnak, tehát a hőmérséki összes pótlék $= l'_0\alpha \sum\limits_1^m (t') + l''_0\beta \sum\limits_1^n (t'') + l_0'''\gamma \sum\limits_1^p (t''')$.

3) A hajlásszögi javítás kiszámitására nézve legyen egy rúd hossza l, annak a vizszinteshez való hajlásszöge u, akkor a rúd hossza és annak vetülete közötti külömbség $= l\,(1 - cos u)$ $= 2l\, sin \frac{1}{2}u\ ^2$. Minthogy pedig u mindig csak igen kis szög, a sinus helyett az ívet tévén, elegendő pontossággal lesz $= \frac{1}{2}\, l\, u^2$, vagy ha u másodperczekben van adva, u helyett $u \sin 1''$-t kell tenni. Az első rúdból származó javítás lesz

$$\frac{\sin 1''^2}{2}\left(l_1{}^1 u_1{}^2 + l_2{}^1 u_2{}^2 + l_3{}^1 u_3{}^2 + \cdots + l^1{}_m\, u^2{}_m\right).$$

Ezen kifejezésben $l'_1\ l'_2\ \ldots$ alatt a rúd valóságos hosszait kell érteni, de ezek egymástól csak a hőmérsék külömböző volta miatt külömböznek. Szabad lesz tehát ezek helyett, egy közép hőmérséknek megfelelő állandó hosszat venni, s ha ezeket a három rúdnál egyenkint $l'\ l''\ l'''$-nak nevezzük, a hajlásszög miatti összes javítás lesz $= \frac{l' \sin 1''^{2}}{2} \sum_1^m (u')^2 + \frac{l'' \sin 1''^{2}}{2} \sum_1^n (u'')^2 + \frac{l''' \sin 1''^{2}}{2} \sum_1^p (u''')^2$.

4) Az ilyeténképen kiszámított hossz még nem képez egy összefüggő vizszintes ívet, hanem az egy lépcsőzetes, különböző magasságban fekvő ívdarabok összegét $aa' + bb' + cc' + dd' + \ldots$ adja. (380. ábra.) De lehet gondolni egy olyan ívet CD, mely az alapvonal két végpontja deréklői közt a föld mathematikai felületével párhuzamosan fekszik, s melynek hossza ezen összeggel egyenlő. Legyen ezen ívnek magassága az alapvonal kezdőpontja A felett $= Z$, az egyes rudak végpontjainak $a\ b\ c \ldots$ magasságai ugyancsak az A pont felett $= z_1\ z_2\ z_3 \ldots$, a CD íven a deréklők által elmetszett ívek $= \lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3 \ldots$, végre a A pontnak megfelelő földsugár $= r$, akkor lesz:

$$\lambda_1 : aa' = r + z : r + z_1 \quad \text{vagy} \quad \lambda_1 = aa' + aa'. \frac{Z - z_1}{r + z_1}$$

$$\lambda_2 : bb' = r + z : r + z_2 \quad \text{»} \quad \lambda_2 = bb' + bb'. \frac{Z - z_2}{r + z_2}$$

$$\lambda_3 : cc' = r + z : r + z_3 \quad \text{»} \quad \lambda_3 = cc' + cc'. \frac{Z - z_3}{r + z_3}$$

$$\vdots \quad \ldots\ldots\ldots, \quad \text{»} \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots = aa' + bb' + cc' + \ldots + \frac{aa'(Z - z_1)}{r + z_1} + \frac{bb'.(Z - z_2)}{r + z_2} + \ldots$$

Hogy tehát $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots = aa' + bb' + cc' + \ldots$ legyen, szükség, hogy

$$\frac{aa'(Z - z_1)}{r + z_1} + \frac{bb'(Z - z_2)}{r + z_2} + \frac{cc'(Z - z_3)}{r + z_3} + \ldots = o$$

legyen. Ezen kifejezésben $aa',\ bb'\ cc' \ldots$, valamint $r + z_1,\ r + z_2,\ r + z_3, \ldots$ egymástól igen kevéssé külömböznek. Ha ezek helyett tehát közép értékeket veszünk, az egyenlet elegendő pontossággal ezzé válik:

$$Z - z_1 + Z - z_2 + Z_3 - z_3 + \ldots + Z - z_N = 0,$$

honnan lesz:

$$Z = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + \ldots\ldots + z_N}{N},$$

hol N a rudak számát jelenti; a z-k értékeit pedig ezen képletek szerint lehet elegendő pontossággal számítni:

$$z_1 = l'u_1 \sin 1''.$$
$$z_2 = (l'u_1 + l''u_2) \sin 1''$$
$$z_3 = (l'u_1 + l''u_2 + l'''u_3) \sin 1''$$

. . . .

. . . .

5) Az igy kiszámított alapvonalból végre azon ívet szokták még meghatározni, melyet a végpontok deréklői a tenger szinén elmetszenek, azaz: az alapvonalat a tenger szinére szokták redukálni. Nevezzük az A pontnak a tenger szine feletti magasságát h-nak, akkor a CD ív magassága a tenger szine felett, melyet H-val akarunk jelölni, lesz

$$H = h + Z,$$

s ha még a tenger szinének megfelelő földsugárt R-nek, az ívet pedig L'-nek nevezzük, lesz:

$$L' : L = R : (R + H),$$

tehát
$$L' = \frac{LR}{R+H},$$

a külömbség pedig, melyet a tenger szinére való Reductiónak neveznek, lesz:
$$L - L' = \frac{LH}{R+H}.$$

Legyen p. o. $H = 100^0$, $L = 4000^0$, akkor $L - L' = 0{\cdot}^0119$, tehát az egész reductio igen csekély.

409. §. Szögmérés és kiszámítás.

A szögmérés a mult században véghezvitt fokméréseknél mindenütt a Borda-kör (173. §.) által eszközöltetett; de a Reichenbach-féle Theodolit behozatala óta kivétel nélkül ez alkalmaztatik rendesen Noniussal vagy górcsövekkel felszerelve. A szögmérés azon theodolitoknál, melyeken csak 10''-et lehet leolvasni, rendesen szorzás által eszközöltetik; de a melyeken 4, vagy talán egyes másodperczeket is le lehet olvasni; az egyszerű szögmérés, vagy az irányok észlelése czélszerűbb, mert biztosabb eredményt ad. Tűkör-hatodok csak kivételes esetekben, s ott használtatnak, hol a theodolitot felállítni nem lehet. De előleges méréseknél könnyen hordozhatóságuk miatt kitünő szolgálatot tesznek. A műszert rendesen az álláspont felett központosan szokták felállítni, noha Struve a külpontos felállitást ajánlja azért, hogy az észlelő a leolvasásnál elfogulatlan maradjon. Tornyokon a műszert csak az ablakokban lehet felállítni, s a megmért szögeket a torony közepére számítás által kell redukálni; a külpontosság meghatározása végett pedig a torony csúcsát kivülről két álláspontból kell theodolittal a torony belsejébe levetítni. Ha a jelpont hozzáférhetlen volna, s a műszer álláspontját nagyobb — 10—20° — távolságban lehetne csak választani, akkor a két pont közötti fekvést egy kis alapvonalból előmetszés által kell meghatározni.

410. §.

Ha valamely szög A többször megméretett, s az eredmények voltak A', súlya $= p'$, A'', súlya $= p''$, A''', súlya $= p''' \ldots$, akkor ezekből a végeredményt ezen képlet szerint kell számítni:

$$A = \frac{p'A' + p''A'' + p'''A''' + \ldots}{p' + p'' + p''' + \ldots}, \quad \text{súlya} = p' + p'' + p''' + \ldots$$

411. §. Szögösszegek.

Ha több iránypont közt nem csak a szükséges szögek, hanem szögösszegek is vannak mérve, akkor az egyes szögeket az összegekkel összhangzásba kell hozni, s az ellentmondásokat kiegyenlités által el kell hárítni. Legyen p. o. négy pont 1, 2, 3, 4, közt minden lehető szög megmérve, u. m.: $1{,}2 = A'$, $1{,}3 = B'$, $1{,}4 = C'$, $2{,}3 = D'$, $2{,}4 = E'$, $3{,}4 = F'$, a valóságos szögek pedig ugyanazon betűkkel, de vonás nélkül legyenek jelölve, akkor következő egyenletek állanak elő:

$$\begin{array}{llll} A - A' = o, & \text{súlya} = p^{\mathrm{I}} & D - D' = o, & \text{súlya} = p^{\mathrm{IV}} \\ B - B' = o, & \quad » \quad = p^{\mathrm{II}} & E - E' = o, & \quad » \quad = p^{\mathrm{V}} \\ C - C' = o, & \quad » \quad = p^{\mathrm{III}} & F - F' = o, & \quad » \quad = p^{\mathrm{VI}}. \end{array}$$

Ezeken kivül azonban ezen kifejezések szigorúan érvényesek:

$$D = B - A$$
$$E = C - A$$
$$F = C - B.$$

Helyettesítsük a D, E, F értékeit a fentebbiekbe, akkor 3 ismeretlen közt hat egyenletet kapunk, u. m.:

$$\begin{array}{ll} A - A' = o & B - A - D' = o \\ B - B' = o & C - A - E' = o \\ C - C' = o & C - B - F' = o \end{array}$$

s a minimum függvénye lesz:

$$2\Omega = p^{I}(A-A')^2 + p^{II}(B-B')^2 + p^{III}(C-C')^2 + p^{IV}(B-A-D')^2$$
$$+ p^{V}(C-A-E')^2 + p^{VI}(C-B-F')^2.$$

Ebből lesznek:

$$\frac{d\Omega}{dA} = p^{I}(A-A') - p^{IV}(B-A-D') - p^{V}(C-A-E') = o.$$

$$\frac{d\Omega}{dB} = p^{II}(B-B') + p^{IV}(B-A-D') - p^{VI}(C-B-F') = o.$$

$$\frac{d\Omega}{dC} = p^{III}(C-C') + p^{V}(C-A-E') + p^{VI}(C-B-F') = o.$$

Ezen normál egyenletek fogják szolgáltatni az $A\ B\ C$ szögeket, s a hozzájok tartozó súlyok szintén a feloldás folytán meghatározhatók.

A feloldások tetemesen egyszerűbbekké lesznek, ha az ismeretlenek helyett közelítő értékeket helyettesítünk correctiókkal, ilyeténképen: $A = A' + (A)$, $B = B' + (B)$, $C = C' + (C)$, akkor az állandó tag értéke tetemesen kisebb, s a számítás egyszerűbb lesz; az egyenleteknek többi tagjaiban azonban csak azon változás áll elő, hogy $A\ B\ C$ helyett a correctiók (A) (B) (C) foglalnak helyet.

412. §. Irányok. Természetes szögek.

1) Ha egy álláspontban a körül lévő pontok felé irányok vannak észlelve, melyeknek elhajlásait egy bizonyos ponttól kezdve 360⁰-ig folyton számláljuk, akkor ha a kezdő pontnak megfelelő irányt x-nek, a megfelelő leolvasást m-nek, annak súlyát p-nek, a többi irányoknak megfelelő leolvasásokat pedig sorjában m', m''. . ., azoknak súlyait p', p''. . ., végre az első iránytól a többi irányokig számított szögeket sorjában A, B, C. . .-nek nevezzük, következő egyenleteket nyerünk:

$$\begin{array}{lll} m - x = o, & \text{súlya} = p, \\ m' - x - A = o, & \text{»} \quad = p', \\ m'' - x - B = o, & \text{»} \quad = p''. \\ \vdots & \end{array}$$

Egy második észlelet-csoport hasonló egyenleteket szolgáltat, u. m.: $m_1 \quad - x_1 = o, \quad$ súlya $= p_1$

$$m_1' - x_1 - A = o, \quad » \quad = p_1'$$
$$m_1'' - x_1 - B = o, \quad » \quad = p_1''$$
$$m_1''' - x_1 - C = o, \quad » \quad = p_1'''$$
$$\vdots$$

Egy harmadik hasonlóképen

$$m_2 \quad - x_2 = o, \quad \text{súlya} = p_2$$
$$m_2' - x_2 - A = o \quad » \quad = p_2'$$
$$m_2'' - x_2 - B = o \quad » \quad = p_2''$$
$$m_2''' - x_2 - C = o \quad » \quad = p_2'''$$
$$\vdots$$

melyekből következő minimum függvényt nyerünk:

$$2\Omega = p(m-x)^2 + p'(m'-x-A)^2 + p''(m''-x-B)^2$$
$$+ p'''(m'''-x-C)^2 + \dots$$
$$+ p_1(m_1-x_1)^2 + p_1'(m_1'-x_1-A)^2 + p_1''(m_1''-x_1-B)^2$$
$$+ p_1'''(m_1'''-x_1-C)^2 + \dots$$
$$+ p_2(m_2-x_2)^2 + p_2'(m_2'-x_2-A) + p_2''(m_2''-x_2-B)^2$$
$$+ p_2'''(m_2'''-x_2-C)^2 + \dots$$

. . . .

. . . .

Ha ezen függvényt $x \; x_1 \; x_2 \dots A \; B \; C \dots$ szerint külömbzékeljük, ezen egyenletek állanak elő:

$$pm + p'm' + p''m'' + \dots = (p + p' + p'' + \dots)\, x + p'A + p''B$$
$$+ p'''C + \dots$$
$$p_1m_1 + p_1'm_1' + p_1''m_1'' + \dots = (p_1 + p_1' + p_1'' + \dots)\, x_1 + p_1'A$$
$$+ p_1''B + p_1'''C + \dots$$
$$p_2m_2 + p_2'm_2' + p_2''m_2'' + \dots = (p_2 + p_2' + p_2'' + \dots)\, x_2 + p_2'A$$
$$+ p_2''B + p_2'''C + \dots$$

. . . .

. . . .

$$p'm' + p_1'm_1' + p_2'm_2' + \dots = (p' + p_1' + p_2' + \dots)\, A + p'x$$
$$+ p_1'x_1 + p_2'x_2 + \dots$$
$$p''m'' + p_1''m_1'' + p_2''m_2'' + \dots = (p'' + p_1'' + p_2'' + \dots)\, B + p''x$$
$$+ p_1''x_1 + p_2''x_2 + \dots$$
$$p'''m''' + p_1'''m_1''' + p_2'''m_2''' + \dots = (p''' + p_1''' + p_2''' + \dots)\, C$$
$$+ p'''x + p_1'''x_1 + p_2'''x_2 + \dots$$

. . . .

. . . .

Ha most a felsőbb csoportból $x\ x_1\ x_2 \ldots$ az alsóba helyettesíttetnek, olyan egyenleteket nyerünk, melyekben csak az $A\ B\ C \ldots$ ösmeretlenek jönnek elő. Ezen egyenletek a Gauss-féle irásmód szerint következő alakokat vesznek fel:

$$[aa]A + [ab]B + [ac]C + \ldots = [an],$$
$$[ab]A + [bb]B + [bc]C + \ldots = [bn], \quad \odot$$
$$[ac]A + [bc]B + [cc]C + \ldots = [cn],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Az ezen egyenletek feloldása által nyert eredmények azon értékeket szolgáltatják, melyek az álláspontban véghezvitt méréseknek legjobban megfelelnek. De minthogy ezen értékek még más feltételekhez is vannak kötve, több álláspontokon is tétetvén mérések, melyek egymással mértani összefüggésben állanak: a méréseket mind összhangzásba kell hozni egymással; ennélfogva az ezen egyenletekből nyert eredményeket még nem tekinthetjük véglegeseknek, hanem azok kis változásokat fognak szenvedni. Ezen változásokat azonban úgy kell venni, hogy azok az előbbi számításokat el ne rontsák. Ezen feltételnek elég tétetik, ha a fentebbi $\odot$ egyenletekben $A\ B\ C \ldots$ helyett $A + (A)$, $B + (B)$, $C + (C)$-t ... teszünk, hol $(A)\ (B)\ (C) \ldots$ az $A\ B\ C \ldots$ irányokban még utólagosan teljesítendő változtatásokat jelentik. Az elsőbb tagok az egyenletekből kiesnek, a hátramaradt egyenletek pedig ilyen alakokat öltenek magokra:

$$P = [aa](A) + [ab](B) + [ac](C) + \ldots$$
$$Q = [ab](A) + [bb](B) + [bc](C) + \ldots$$
$$R = [ac](A) + [bc](B) + [cc](C) + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

hol $P\ Q\ R \ldots$ a fentebb említett összefüggésből származó feltételek kifejezését jelentik, melyeket $A\ B\ C \ldots$ a változás után is kielégítni tartoznak.

Itt is czélszerű lesz $x\ A\ B\ C \ldots$ helyett közelítő értékeket s correctiókat venni fel, hogy az állandó tagok értékei kis számok legyenek, ilyetén képen: $x = m + (x)$, $x_1 = m_1 + (x_1)$, $x_2 = m_2 + (x_2) \ldots A = A' + (A')$, $B = B' + (B')$, $C = C' + (C') \ldots$

Példa. A fentebb felhozott Bessel-féle munkában következő méréseket találunk:

Mednicken	*Fuchsberg*	*Wargelitten*	*Galtgarben*	
0° 0′ 0″	83°30′34″·752	287°14′12″·833	346°24′18″·333	súlya=9
0 0 0	34 ·762	15 ·126	—	» =6
0 0 0	35 ·416	—	19 ·293	» =3

Legyen

$$A' = 83^0\ 30'\ 34'',$$
$$B' = 287\ \ 14\ \ 12\ ,$$
$$C' = 346\ \ 24\ \ 38\ ,$$

akkor lesz:

$$2\Omega = 9(0-(x))^2 + 9(0{\cdot}752 - (x) - (A'))^2 + 9(0{\cdot}833 - (x) - (B'))^2$$
$$+ 9(0{\cdot}333 - (x) - (C'))$$
$$+ 6(0-(x_1))^2 + 6(0{\cdot}762 - (x_1) - (A'))^2 + 6(3{\cdot}126 - (x_1) - (B'))^2$$
$$+ 3(0-(x_2))^2 + 3(1{\cdot}416 - (x_2) - (A'))^2 + 3(1{\cdot}293 - (x_2) - (C'))^2.$$

Ebből a minimum-egyenletek ezek lesznek:

$$36(x) + 9(A') + 9(B') + 9(C') - 4{\cdot}311 = o$$
$$18(x_1) + 6(A') + 6(B') - 7{\cdot}776 = o$$
$$9(x_2) + 3(A') + 3(C') - 2{\cdot}709 = o$$
$$18(A') + 9(x) + 6(x_1) + 3(x_2) - 15{\cdot}588 = o$$
$$15(B') + 9(x) + 6(x_1) - 26{\cdot}255 = o$$
$$12(C') + 9(x) + 3(x_2) - 6{\cdot}879 = o.$$

(x), (x_1), (x_2), kiküszöböltetvén, ezen egyenletek származnak:

$$12{\cdot}75(A') - 4{\cdot}25(B') - 3{\cdot}25(C') - 0{\cdot}792 = o$$
$$-4{\cdot}25(A') + 10{\cdot}75(B') - 2{\cdot}25(C') - 14{\cdot}168 = o$$
$$-3{\cdot}25(A') - 2{\cdot}25(B') + 8{\cdot}75(C') + 0{\cdot}141 = o.$$

Honnan azután következnek: $(A')=0{\cdot}866$, $(B')=1{\cdot}822$, $(C')=0{\cdot}773$.
Az észleleteknek legjobban megfelelő irányok tehát lesznek:

Mednicken	0″	0′	0″	
Fuchsberg	83	30	34·866	$+(A)$,
Wargelitten	287	14	13·822	$+(B)$,
Galtgarben	346	24	18·773	$+(C)$,

az (A) (B) (C) meghatározására szolgáló egyenletek pedig lesznek:

$$P = 12{\cdot}75(A) - 4{\cdot}25(B) - 3{\cdot}25(C)$$
$$Q = -4{\cdot}25(A) + 10{\cdot}75(B) - 2{\cdot}25(C)$$
$$R = -3{\cdot}25(A) - 2{\cdot}25(B) + 8{\cdot}75(C).$$

2) Ha a szögmérés a Borda-körrel vagy a tűkörhatoddal a szög természetes síkjában tétetett, akkor azt a vizszintes síkra kell levetítni ezen képlet szerint:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha' - \sin h \sin h'}{\cos h \cos h'}.\quad (175.\ \S.)$$

Ez által a feladat tökéletesen fel van oldva, de a képlet táblák számítására, mi pedig a munka könnyitésére okvetetlen szükséges, nem alkalmatos, mivel benne 3 változó fordul elő. A képletet azonban azon feltétel alatt, hogy h és h' csak kis, 2^0-ot meg nem haladó mennyiségek, — mi a gyakorlattal teljesen egyezik, — a 4-ik rangú tagok elhanyagolásával következő módon lehet átváltoztatni:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha' - hh'}{\left(1-\frac{h^2}{2}\right)\left(1-\frac{h'^2}{2}\right)} = \frac{\cos\alpha' - hh'}{1-\frac{h^2+h'^2}{2}} = (\cos\alpha' - hh')\left(1-\frac{h^2+h'^2}{2}\right)^{-1}$$

$$= (\cos\alpha' - hh')\left(1+\frac{h^2+h'^2}{2}\right),$$

végre lesz:

$$\cos\alpha = \cos\alpha' + \frac{h^2+h'^2}{2}\cos\alpha' - hh'.$$

Tegyük $\alpha = \alpha' + x$, hol $x \ldots h$ és h'-hez képest másodrangú kis mennyiség, akkor lesz:

$$\cos\alpha' - x\sin\alpha' = \cos\alpha' + \frac{h^2+h'^2}{2}\cos\alpha' - hh',$$

s innen

$$x = -\frac{h^2+h'^2}{2}\,\frac{\cos\alpha'}{\sin\alpha'} + \frac{hh'}{\sin\alpha'}.$$

Ugyde

$$\cos\alpha' = \cos\frac{\alpha'^2}{2} - \sin\frac{\alpha'^2}{2}$$

$$\sin\alpha' = 2\sin\frac{\alpha'}{2}\cos\frac{\alpha'}{2},$$

$$1 = \sin\frac{\alpha'^2}{2} + \cos\frac{\alpha'^2}{2}.$$

Ezeket helyettesitvén lesz:

$$x = \alpha - \alpha' = \left(\frac{h+h'}{2}\right)^2 tg\frac{\alpha'}{2} - \left(\frac{h-h'}{2}\right)^2 cotg\frac{\alpha'}{2}.$$

Ezen kifejezés csak két változót foglal magában, u. m. a magassági szögek félösszegét, vagy félkülömbségét és a megmért szöget; ezt tehát táblákba előlegesen össze lehet állítni, ezáltal a kiszámitási munka tetemesen könnyíttetik.

413. §. Szög-központositás.

1) Ha a jelpont egy kerek torony, akkor nagy távolban annak csak a naptól világított oldala látszik, s az irányzás a világitás közepére történik. Ekkor tehát a szöget hibásan mérjük

meg, s azt a torony középpontjára át kell számítni. Legyen a 381. ábrában A a torony középpontja, B a szögmérő álláspontja, S a nap állása az égen, ekkor a toronynak azon fele ECD lesz megvilágítva, mely a nap felé van fordulva; ezen karimának azonban csak azon része látszik a B álláspontból, mely a CB és az érintő sugár BE között fekszik. A szögméréskor tehát a távcsőt a CBE szög középvonalára BF irányozzuk a tengely-vonal BA helyett, s a szögmérésben ejtett hiba az ABF szög leend. Ennek meghatározása végett legyen EBA szög $= \alpha$, ABC szög $= \beta$, a keresett hiba $ABF = x$, ekkor

$$x = \alpha - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Nevezzük a torony radiusát r, az AB távot T-nek, akkor

$$sin\,\alpha = \frac{r}{T}, \text{ vagy elegendő pontossággal } \alpha = \frac{r}{T}.$$

Továbbá az ABC $\triangle$-ből elég közelitéssel lesz:

$$\beta = \frac{r\,sin\,CAB}{T},$$

hol a CAB szög $= CAS - BAS = 90^0 - (180^0 - ABS') = ABS' - 90^0$. Az ABS' szöget a napra irányzás által meg lehet mérni. Legyen ez $= \omega$, akkor lesz $CAB = \omega - 90^0$,

s ebből elég közelitéssel lesz:

$$\beta = -\frac{r}{T} cos\omega.$$

Ezen értékeket helyettesitvén, lesz:

$$x = \frac{r}{T}\,\frac{1 + cos\omega}{2} = \frac{r}{T}\,cos\,\frac{\omega}{2}^{2},$$

mely mennyiséget a leolvasásból le kell vonni, midőn a nap jobbkéz felé látszik, ellenkező esetben pedig a közvetlen megmért szöghöz hozzá kell adni.

2) Ha a beirányzott tárgy parallelepiped alakú, s annak egyik oldala van a nap által megvilágítva, akkor (383. ábra) az AB irány helyett az FB irányvonalat kapjuk, s a hiba $= x$ lesz az ABF szög, ez pedig az AFC $\triangle$-ből meghatározható. Lesz t. i.

$$x = \frac{AF.\,sin\,FAB}{BF},$$

mely a megmért szögből levonatik, midőn a nap jobbkéz felől áll, ellenkező esetben pedig hozzáadatik.

3) Ha a jelt egy tükrödző gömbfelület ábrázolja (332. ábra), legyen A a tűkörgömb középpontja, SA egy, a középponton keresztül menő, $S'D$ pedig egy hozzá párhuzamos napsugár, mely a B álláspontba vettetik vissza; az irányvonal tehát AB helyett DB leend, s a szög hibája x nem más, mint az ABD szögnek a vizszintes síkra gondolt vetülete. Az SA, $S'D$, AB, DB vonalak mind egy síkban feküsznek, minthogy az esési és visszavetési síkok azonosok, s az esési merő DA a gömb középpontján megyen keresztül. Legyen M a gömbön azon pont, melyen az SA sugár keresztülmegyen, ennek magassági szöge, melyet az MN ív ábrázoljon $= h$; ugyszintén E a gömb azon pontja, melyen a BA irányvonal keresztülmegyen. A BA sugár magassági szöge rendesen olyan csekély, hogy annak a jelen feladat feloldására érezhető befolyása nincs. Ezen sugárt tehát vizszintesnek lehet tekinteni. Húzzuk most az MDE legnagyobb kört, ez az SAB szög mértéke, ez pedig az $S'DB$ szögtől igen keveset külömbözik, úgy hogy ezeket a jelen feladat feloldásában egy más helyett lehet tenni. Hasonlóképen elég közelitéssel $MD = DE = k$, minthogy az esési és visszavetési szögek egyenlők.

Húzzunk most a DBA hajlott síkban AB-re egy merőlegest, DU ennek hossza $= r sin k$; szorozzuk ezt a DAB síknak a vizszintes síkhoz való hajlásszöge cosinusával, ez adja a DU vonal vetületét a vizszintes síkra, és akkor a hiba x elég pontossággal lesz:

$$x = \frac{r}{T} sin k \,.\, cos u\,,$$

hol u a nevezett hajlásszöget jelenti. Úgyde az EMN derék gömbháromszögben $EM = 2k$, $MN = h$, az MEN szög $= u$, $EN = 180 - \alpha$, hol α a B álláspontban az A pontra és a napra S'' intézett irányok közt foglalt szög vizszintes vetületét jelenti, melyet a vizszintes kör karimáján, a nap magassági szögét h pedig a magassági körön le kell olvasni. Ezen mennyiségek közt ezen összefüggés létezik:

$$sin\, 2k \,.\, cos u = cos h \; sin \alpha.$$

Ezen két egyenletből u-t kiküszöbölvén, lesz:

$$x = \frac{r}{T} \frac{cos h \,.\, sin \alpha}{2\, cos k}.$$

Ugyanezen háromszögben továbbá még ezen képlet is áll:

$$cos\, 2k = - cos h \,.\, cos \alpha.$$

Ezen két egyenlet által a feladat tökéletesen fel van oldva. Ha még k-t ki akarnók kiküszöbölni az egyenletből, ezen képletet kapnánk:

$$x = \frac{r}{T} \frac{cos h \,.\, sin\alpha}{\sqrt{2(1 - cos h \, cos\alpha)}}.$$

Az x-et le kell vonni a leolvasásból, midőn a nap a BE iránytól jobbkéz felé áll, ellenkező esetben pedig hozzá kell adni.

414. §. A háromszögek kiegyenlitése.

Az előbbi §§. szerint kiszámitott szögek a háromszögek feloldására közvetlen még nem használhatók. Minthogy t. i. minden mérés többé kevésbbé hibás, nagyobb biztonság végett több darabot kell megmérni, mint a mennyi a feladat feloldására okvetlen szükséges; tehát a feloldást többféleképen lehet végrehajtani, de az eredmények egymásnak ellentmondók fognak lenni, úgy hogy azokból szorosan véve egy háromszög hálót nem is lehet képezni. Ezen ellentmondások elháritása végett szükséges a megmért darabokon kis változtatásokat tenni, hogy a háromszög hálózat lehetővé legyen; s minthogy a változtatásokat többféle módon lehet elrendezni és mindig más-más polygon rendszer áll elő, ezek közt azt kell választani, melynek legnagyobb valószinűsége van; ezt pedig Gauss útmutatása szerint, a legkisebb négyzetek elmélete szerint lehet meghatározni.

Azon mértani feltételek, melyek a megmért adatok közötti összefüggést kifejezik, ezek:

1) Minden álláspontban a köröskörül fekvő szögek összege $= 360^0$. Az ezen feltételnek megfelelő egyenlet horizon-zárlat nevet visel.

2) Minden gömbháromszögben a háromszög összege $= 180 + E$, hol E a gömb-felesleget jelenti. Ezen egyenletek szöggyenleteknek neveztetnek.

3) Ha egy oldalról a másikra, erről a harmadikra, s igy tovább számitunk, mig a kiindulási oldalra visszajövünk, ezen oldal mind a két értékének egyenlőnek kell lenni. Épen igy, ha valamely ösmeretes oldalról egy másik ösmeretesre számitunk, a számitás eredményének az ösmeretes értékkel egyezni kell. Az ezen feltételből keletkező egyenletek oldalegyenleteknek neveztetnek.

Hány első számú egyenletnek kell lenni, könnyen meg lehet itélni egy rajzolatból, melyen a megmért szögek mind fel vannak rajzolva, mert minden álláspont, melyben köröskörül minden szög meg van mérve, egy ilyen egyenletet szolgáltat. De ha csak irányok vannak észlelve, akkor ezen egyenletek elesnek, mert az irányok a kivánt feltételnek magoktól eleget tesznek.

Nehezebb a 2) és 3) számú egyenletek megszámlálása és felkeresése. Erre nézve Bessel következő útmutatást ad. Valamely pontnak *N* meghatározására csak az szükséges, hogy arra két ösmeretes pontból *A* és *B* irányozzunk, s a két szöget *NAB* és *NBA* megmérjük. Ha tehát az észleletek kettőnél több adatokat szolgáltatnak, akkor a felesleges számú adatok ugyanannyi feltételi egyenleteket fognak adni. Ha az *N* pontra két álláspontról *A* és *B* van irányozva, s ezeken kivül az *N* pontban az *ANB* szög is meg van mérve, ebből egy szögegyenlet ered. Ha az *N* pont még egy harmadik pontról *C* is meg van irányozva, ebből egy oldalegyenlet származik, s ha még ezen *N* pontban az *ABC* pontok közt fekvő szögek is megmérettek, ezekből két szögegyenlet ered.

Ha tehát valamely oldalról kiindulunk, s egyik pontot a másik után meghatározzuk, minden feltétel-egyenletre rájövünk, s egyiket sem kapjuk meg többször mint kellene, p. o. a 384. ábrában, melyben az $a\,a'\,a''\;b\,b'\,b''\;c\,c'\,c''\;d\,d'\;e\,e''$ szögek észleltettek. Legyen 0,1 a kiindulási vonal, melyet ösmeretesnek tekintünk, akkor 2 pont az $a\,a'$ által meg van határozva, tehát a'' felesleges; ez ad egy szögegyenletet. A 3 pont a $b\,b'$ szögek által meg van határozva, b'' pedig felesleges; ez ad egy szög-egyenletet. A 4 pont a c és c' szögek által meg van határozva, tehát c'' felesleges, ez ad egy szögegyenletet. Az 5 pont három meghatározott pontból van egyoldalúlag megirányozva, ezek közül egy irányvonal felesleges, tehát egy oldal-egyenletet ad, végre a 0 pontban minden szög egyenként megméretvén, egy horizon zárlat esete áll elő. Ezen sokszögnél tehát kapunk:

1 első számú feltételi egyenletet
3 második » » »
1 harmadik » » »

összesen 5 egyenletet, melyeknek az észleletek tökéletesen eleget tenni tartoznak.

415. §. Gömb-felesleg. Legendre tétele.

A mult §-ban előfordult a gömb-felesleg kifejezés, s még többször is fogunk róla megemlékezni; ezt tehát meg kell határozni. Azon feltétel alatt, hogy a háromszög oldalai nem nagyok, mint azt a háromszögelésnél tapasztaljuk, hol a leghosszabb oldal 15—30 mértföldet, szögmértékben 2^0-ot meg nem halad, következőképen lehet azt Legendre után meghatározni. Legyen *ABC* egy gömbháromszög, melynek oldalai $\alpha\ \beta\ \gamma$, szögei pedig *ABC*. Gondoljunk egy sík háromszöget $A'B'C'$, melynek oldalai épen olyan hosszúk legyenek, mint a gömbháromszögéi; legyenek ezen oldalak $a\ b\ c$, és a szögek $A'B'C'$. Legyen R a gömb sugara, akkor a feltevés szerint $\alpha\ \beta\ \gamma$, és $a\ b\ c\ R$ közt következő összefüggés létezik:

$$\alpha = \frac{a}{R},\ \beta = \frac{b}{R},\ \gamma = \frac{c}{R}.$$

A gömbháromszögben következő képlet áll:

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Fejtsük a *sinus* és a *cosinus*okat sorba, megtartván még a 4-ik fokú mennyiségeket, a felsőbbeket pedig elhanyagolván, akkor némely összehúzás után lesz:

$$\cos A = \frac{\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} - \dfrac{\beta^4+\gamma^4-\alpha^4+6\beta^2\gamma^2}{24\beta\gamma}}{1-\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{C}} = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$$

$$+\frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2}{24\beta\gamma}.$$

Ezen képlet első tagja $= \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos A'$,

továbbá

$$\sin A'^2 = 1-\cos A'^2 = -\frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2}{4\beta^2\gamma^2}.$$

Ezen kifejezéseket tekintetbe vévén, a fentebbi egyenlet lesz:

$$\cos A = \cos A' - \frac{\beta\gamma\sin A'}{6} = \cos A' - \frac{bc\sin A'^2}{6R^2}.$$

Ezen egyenletből látnivaló, hogy A A'-től csak másodrangú mennyiségben külömbözik; ennek meghatározása végett induljunk ki a fentebbi egyenletből:

$$\cos A - \cos A' = -\frac{bc \sin A'^2}{6R^2}, \qquad \text{ebből következik:}$$

$$-2\sin\left(\frac{A+A'}{2}\right)\cos\left(\frac{A-A'}{2}\right) = -\frac{bc \sin A'^2}{6R^2},$$

vagy ha $\frac{A+A'}{2}$ helyett A', $\sin\left(\frac{A-A'}{2}\right)$ helyett pedig az ívet tesszük, elegendő közelitéssel lesz:

$$A - A' = \frac{bc \sin A'}{6R^2},$$

s minthogy $\frac{bc \sin A'}{2} = \triangle =$ a háromszög területével, végre lesz:

$$A - A' = \frac{\triangle}{3R^2}.$$

Hasonlóképen lesz a második és harmadik szögre nézve

$$B - B' = \frac{\triangle}{3R^2}$$

$$C - C' = \frac{\triangle}{3R^2}.$$

Ezeket összeadván, lesz:

$$A + B + C - (A' + B' + C') = \frac{\triangle}{R^2}.$$

Minthogy pedig: $A' + B' + C' = 180^0$, ezt helyettesitvén lesz:

$$A + B + C - 180^0 = \frac{\triangle}{R^2} = E,$$

vagy másodperczekben kifejezve $E = \frac{\triangle}{R^2 \sin h''} \cdot \cdot$ ⊙

Az előbb nyert egyenletekből tehát következik:

$$\left.\begin{aligned} A' &= A - \frac{E}{3} \\ B' &= B - \frac{E}{3} \\ C' &= C - \frac{E}{3} \end{aligned}\right\} \cdots \cdot \; ☽$$

azaz: **ha a gömbháromszög oldalait egyenesre kifeszítjük, úgy hogy a gömbháromszög síkká váljék, a kifeszített háromszög szögeit megkapjuk, ha az illető gömbszögekből a gömbfelesleg harmadrészét levonjuk.**

Ezen képletben R azon gömb sugárát jelenti, mely a föld gömbded felületéhez a háromszög középpontjában legjobban simul, úgy hogy azt azon határok közt, melyek közt a Legendre-féle tétel érvényes, a gömbded felülettel fel lehet cserélni. Bessel számitásai szerint a föld görbülete egy bizonyos irányban, melynek azimutja α, következőképen fejezhető ki:

$$\frac{1}{R \sin 1''} = \lambda + \lambda' \cos 2\alpha, \quad \text{hol}$$

$$\lambda = 0\cdot''06303837 + 0\cdot''00021125 \cos 2\varphi + 0\cdot''00000004 \cos 4\varphi'$$

$$\lambda' = 0\cdot''00010580 + 0\cdot''00010589 \cos 2\varphi + 0\cdot''00000009 \cos 4\varphi.$$

A legnagyobb görbület a délllő irányában van, midőn t. i. $\alpha = o$, tehát ha ennek görbületi sugarát R_1-nek nevezzük, lesz:

$$\frac{1}{R_1 \sin 1''} = \lambda + \lambda',$$

a legkisebb pedig a déllőre merőleges irányba esik, $\alpha = 90^0$, s a görbületi sugárt R_2-nek nevezvén, lesz:

$$\frac{1}{R_2 \sin 1''} = \lambda + \lambda'.$$

Ezen két görbület számtani középértéke egy olyan gömbhöz tartozik, mely a gömbded felülethez legjobban simul; ennek görbületi sugarát R-el jelölvén, lesz:

$$\frac{1}{R \sin 1''} = \lambda,$$

ez pedig a 45^0 azimut alatt eső metszésvonal görbületével egyenlő. Ebből lesz:

$E = \triangle \lambda^2 \sin 1'' \ldots$ ⊙ másodperczekben kifejezve.

Ezen ⊙ és ☽ képletek segitségével tehát a hálózatban minden gömbháromszöget sík háromszöggé lehet átváltoztatni, s a számitásokat a sík-háromszögtan tételei szerint lehet véghezvinni. Meg kell még jegyezni, hogy a háromszög területének kiszámitásában a gömbszöget lehet tenni a sík szög helyett, s az ezen felcserélésből eredő hiba az eredményben még a legroszabb gyakorlati esetben sem lesz észrevehető. Ha p. o. egy egyenoldalú háromszögnek oldalhossza $= 60000^0$, $\varphi = 48^0$, akkor $E = 30\cdot''0108$; ha pedig a gömbszöget használjuk a térkiszámitásban, mely ezen esetben $= 48^0 0' 10\cdot''00$, akkor $E = 30\cdot''0117$-nek találtatik, a külömbség tehát még kisebb mint $0\cdot''001$.

Éppen olyan kevéssé szükséges a háromszögek áttételében a

4-ik fokúnál magasabb mennyiségeket tekintetbe venni, mint azt Bessel, Buzengeiger és mások tevék; minthogy a külömbség, annak csekélysége miatt, az eredményben még tökéletesen elhanyagolható.

416. §. Oldal-egyenletek.

1) A horizon zárlat és a szögegyenletek alakja a 414. §-ból eléggé ösmeretes, csak az oldalegyenlet felállitása igényel még bővebb magyarázatot. Ilyen egyenletek mindig ott képződnek, hol szögek mérve nincsenek, de egy pontban több sugár szögellik össze. Ilyen a 384. alakban az 5·ös pont. Erre nézve Gauss következő relatiót állit fel:

$$\frac{0.5}{0.1}\cdot\frac{0.1}{0.2}\cdot\frac{0.2}{0.3}\cdot\frac{0.3}{0.4}\cdot\frac{0.4}{0.5}=1.$$

Ebben ugyanazon oldal egyszer a számlálóban, másszor a nevezőben fordulván elő, a tört mennyiség mindig $=1$. De az oldalak viszonyát az átalellenben fekvő szögek sinusaival ki lehet fejezni, s a nevezőt elpusztítván, lesz:

$$\sin e''.\sin a''.\sin b''.\sin c''.\sin(d+d')=\sin(e+e'').\sin a'.\sin b'.\sin c'.\sin d'.$$

Átmenvén logarokra lesz:

$$\log\sin e''+\log\sin a''+\log\sin b''+\log\sin c''+\log\sin(d+d')$$
$$=\log\sin(e+e'')+\log\sin a'+\log\sin b'+\log\sin c'+\log\sin d',$$

hol a szögek alatt az igazi értékeket kell gondolni. Minden igazi érték azonban áll a mérések, vagy az eddigi számítások által szolgáltatott közelitő értékből $+$ a correctiókból; ha tehát ezen correctiókat zárjegyes betűkkel jelöljük, lesz:

$$\log\sin(e''+(e''))+\log\sin(a''+(a''))+\log\sin(b''+(b''))+\log\sin(c''+(c''))$$
$$+\log\sin(d+d'+(d)+(d'))=\log\sin(e+e''+(e)+(e''))+\log\sin(a'+(a'))$$
$$+\log\sin(b'+(b'))+\log\sin(c'+(c'))+\log\sin(d'+(d')),$$

hol most már a szögek az adatokat jelentik. Hogy végre linearis alakot nyerjünk, gondoljuk meg, hogy valamely szög sinusát a táblából ugy számítjuk ki, hogy a táblában foglalt legközelebbi nagyságú szög sinusát vesszük, s ehhez hozzáadjuk a secundákban kifejezett maradék szögnek a tab. diff. egy secundára eső értékével képződő szorzatát. Ugy itt is, ha a tabularis differentiát K-val jelöljük, akkor

$$\log\sin(e+e''+(e)+(e''))=\log\sin(e+e'')+K_{(e+e'')}((e)+(e''))^*$$
$$\log\sin(a''+(a''))=\log\sin a''+K_{a''}(a'')$$
$$\log\sin(b''+(b''))=\log\sin b''+K_{b''}(b'').$$
$$\vdots$$

Ha ezen kifejezéseket az utolsó egyenletbe helyettesítjük, a correctiókra nézve linearis alakú egyenletet kapunk.

Ugyanezen közelitő értékeket és correctiókat be kell vezetni a többi egyenletekbe is, s akkor ezen correctiók lesznek az ösmeretlen mennyiségek, s a feloldások ezeknek értékeit fogják szolgáltatni a megfelelő súlyokkal együtt.

2) Ha egy háromszög hálózat mind a két végén közvetlen mérés által nyert oldalakhoz csatlakozik, akkor a hálózat oldala egymásután a, b, c, d, e-vel jelölvén, hol a és e közvetlen meg vannak mérve, ilyen relatio áll elő: $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{e}=\frac{a}{e}$. Ebben az egyenlet baloldalán az oldalak viszonyait a szögek sinusaival kell kifejezni és mindenben az előbbi eljárást kell követni. A jobboldali vonalak hosszait rendesen hibátlanoknak lehet tekinteni.

3) Ha szögek helyett irányok vannak észlelve és számítva, akkor a horizon zárlat elmarad, s a szög- és oldalegyenletekben minden szög helyett annak szárai irány-külömbségét kell tenni; külömben az egyenletek alakja változatlan marad.

417. §. Az egyenletek feloldása.

Az előbbi §. egyenleteinek általános alakja ez:

$$\begin{array}{l|l|l}
\sqrt{p}\,(m-x)=o & \sqrt{p_1}\,(m_1-x_1)=o & \sqrt{p_2}\,(m_2-x_2)=o \\
\sqrt{p'}\,(m'-x-A)=o & \sqrt{p'_1}\,(m'_1-x_1-A)=o & \sqrt{p'_2}\,(m'_2-x_2-A)=o \\
\sqrt{p''}\,(m''-x-B)=o & \sqrt{p''_1}\,(m''_1-x_1-B)=o & \sqrt{p''_2}\,(m''_2-x_2-B)=o
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
o=\mathfrak{A}+\mathfrak{a}A+\mathfrak{a}'B+\mathfrak{a}''C+\dots \\
o=\mathfrak{B}+\mathfrak{b}A+\mathfrak{b}'B+\mathfrak{b}''C+\dots \\
o=\mathfrak{C}+\mathfrak{c}A+\mathfrak{c}'B+\mathfrak{c}''C+\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\}\dots\odot$$

*) Jegyzet. Szigorúbban véve

$$\log\sin(x+\triangle x)=\log\sin x+\frac{d\,.\log\sin x}{dx}\triangle x+\dots=\log\sin x+M\,.\,\mathrm{cotg}\,x\triangle x\dots,$$

hol M a Brigg-féle logarok modulusát jelenti. A tabularis differentia K_x értéke tehát, ha $\triangle x$-et secundákban vesszük, lesz:

$$K_x=M\;\mathrm{cotg}\,x\,.\sin 1''.$$

Az utóbbi egyenletek azon feltételeket fejezik ki, melyeket az észleleteknek tökéletesen ki kell elégítni. A minimum függvénye lesz:

$$2\Omega = p(m-x)^2 + p'(m'-x-A)^2 + p''(m''-x-B)^2 + \ldots$$
$$+ p_1(m_1-x_1)^2 + p_1'(m_1'-x_1-A_1)^2 + p_1''(m_1''-x_1-B)^2 + \ldots$$
$$+ p_2(m_2-x_2)^2 + p_2'(m_2'-x_2-A)^2 + p_2''(m_2''-x_2-B)^2 + \ldots$$

. . . .

$$-2\ \mathrm{I}(\mathfrak{A} + \mathfrak{a}A + \mathfrak{a}'B + \mathfrak{a}''C + \ldots)$$
$$-2\ \mathrm{II}(\mathfrak{B} + \mathfrak{b}A + \mathfrak{b}'B + \mathfrak{b}''C + \ldots)$$
$$-2\mathrm{III}(\mathfrak{C} + \mathfrak{c}A + \mathfrak{c}'B + \mathfrak{c}''C + \ldots)$$
$$\vdots$$

Külömbzékeljük ezen függvényt minden változó szerint, s a keletkező külömbzéki hányadosokat tegyük egyenként $= o$-vá, akkor ezen egyenletek származnak:

$$pm + p'm' + p''m'' + \ldots = (p + p' + p'' + \ldots)x + p'A + p''B + p'''C + \ldots$$
$$p_1m_1 + p_1'm_1' + p_1''m_1'' + \ldots = (p_1 + p_1' + p'' + \ldots)x_1$$
$$+ p_1'A + p_1''B + p_1'''C + \ldots$$
$$p_2m_2 + p_2'm_2' + p_2''m_2'' + \ldots = (p_2 + p_2' + p_2'' + \ldots)x_2$$
$$\vdots \qquad + p_2'A + p_2''B + p_2'''C + \ldots$$
$$p'm' + p_1'm_1' + p_2'm_2' + \ldots + \mathfrak{a}I + \mathfrak{b}II + \mathfrak{c}III + \ldots$$
$$= (p' + p_1' + p_2' + \ldots)A + p'x + p_1'x_1 + p_2'x_2 + \ldots$$
$$p''m'' + p_1''m_1'' + p_2''m''_2 + \ldots + \mathfrak{a}'I + \mathfrak{b}'II + \mathfrak{c}'III + \ldots$$
$$= (p'' + p_1'' + p_2'' + \ldots)B + p''x + p_1''x_1 + p_2''x_2 + \ldots$$
$$p'''m''' + p_1'''m_1''' + p_2'''m_2''' + \ldots + \mathfrak{a}''I + \mathfrak{b}''II + \mathfrak{c}''III + \ldots$$
$$= (p''' + p_1''' + p_2''' + \ldots)C + p'''x + p_1'''x_1 + p_2'''x_2 + \ldots$$

. . . .

Ezen egyenletek az ⊙ képletekkel egyetemben, elégségesek az $x\ x_1\ x_2 \ldots A\ B\ C \ldots I\ II\ III \ldots$ ösmeretlenek meghatározására, s ha a Gauss-féle jelölés szerint iratnak, az $x\ x_1\ x_2$ kiküszöbölése után fennmaradó egyenletek ilyen alakot nyernek:

$$[an] + \mathfrak{a}I + \mathfrak{b}II + \mathfrak{c}III + \ldots = [aa]A + [ab]B + [ac]C + \ldots$$
$$[bn] + \mathfrak{a}'I + \mathfrak{b}'II + \mathfrak{c}'III + \ldots = [ab]A + [bb]B + [bc]C + \ldots$$
$$[cn] + \mathfrak{a}''I + \mathfrak{b}''II + \mathfrak{c}''III + \ldots = [ac]A + [bc]B + [cc]C + \ldots$$

. . . .

Célszerű lesz ezen egyenletekben is $A\ B\ C\ldots$ helyett $A+(A)$, $B+(B)$, $C+(C)\ldots$ tenni, hol $A\ B\ C\ldots$ a 412. §. szerint számított értékeket jelentik, melyek tehát az ott $\odot$-val jelölt egyenleteknek eleget tesznek.

Ekkor a fentebbi egyenletekből csak ezek maradnak meg:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{a}\, I+\mathfrak{b}\, II+\mathfrak{c}\, III+\ldots=[aa](A)+[ab](B)+[ac](C)+\ldots \\ \mathfrak{a}'\, I+\mathfrak{b}'\, II+\mathfrak{c}'\, III+\ldots=[ab](A)+[bb](B)+[bc](C)+\ldots \\ \mathfrak{a}''I+\mathfrak{b}''II+\mathfrak{c}''III+\ldots=[ac](A)+[bc](B)+[cc](C)+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}☽$$

a $\odot$ egyenletek pedig ezekké válnak:

$$\left.\begin{array}{l} o=\mathfrak{A}'+\mathfrak{a}(A)+\mathfrak{a}'(B)+\mathfrak{a}''(C)+\ldots \\ o=\mathfrak{B}'+\mathfrak{b}(A)+\mathfrak{b}'(B)+\mathfrak{b}''(C)+\ldots \\ o=\mathfrak{C}'+\mathfrak{c}(A)+\mathfrak{c}'(B)+\mathfrak{c}''(C)+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\odot'$$

Összehasonlítván ezen képleteket a 412. §. kifejezéseivel, látjuk, hogy az ott $P\ Q\ R\ldots$-el jelölt mennyiségeket itt a baloldalon lévő $I\ II\ III\ldots$ által kifejezett vonalas függvények ábrázolják, s a feladat most oda megyen ki, ezen egyenletekből az (A) (B) $(C)\ldots$ értékeit meghatározni. A munka folyamatja következő:

Irjunk a ☽ egyenletek baloldalán a függvények helyett rövidség végett $P\ Q\ R\ldots$-et, szorozzuk az első egyenletet K, a másodikat K', a harmadikat $K''\ldots$-el, melyek egyelőre határozatlan állandókat jelentsenek, s adjuk össze ezeket; akkor a határozatlan tényezőket ugy kell meghatározni, hogy az (A) együtthatója $=1$, a többi ösmeretleneké pedig $=o$ legyen, s ezen egyenletek állanak elő:

$$\begin{array}{l} [aa]K+[ab]K'+[ac]K''+\ldots=1 \\ [ab]K+[bb]K'+[bc]K''+\ldots=0 \\ [ac]K+[bc]K'+[cc]K''+\ldots=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

$$(A)=KP+K'Q+K''R+\ldots$$

Hasonlóképen ha a ☽ egyenleteket sorjában $K_1\ K_1'\ K_1''\ldots$-vel szorozzuk, s ezeket összeadván, a határozatlan szorzókat úgy határozzuk meg, hogy a (B) együtthatója $=1$, a többieké pedig$=o$ legyen, akkor ezen egyenletek származnak:

$$[aa]K_1 + [ab]K_1' + [ac]K_1'' + \ldots = 0$$
$$[ab]K_1 + [bb]K_1' + [bc]K_1'' + \ldots = 1$$
$$[ac]K_1 + [bc]K_1' + [cc]K_1'' + \ldots = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(B) = K_1 P + K_1' Q + K_1'' B + \ldots$$

A harmadik ösmeretlenre nézve az analogia szerint következő kifejezéseket nyerünk:

$$[aa]K_2 + [ab]K_2' + [ac]K_2'' + \ldots = 0$$
$$[ab]K_2 + [bb]K_2' + [bc]K_2'' + \ldots = 0$$
$$[ac]K_2 + [bc]K_2' + [cc]K_2'' + \ldots = 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(C) = K_2 P + K_2' Q + K_2'' R + \ldots$$

s így tovább.

Ezen egyenletek feloldása által megkapjuk az ösmeretleneket $P\ Q\ R\ldots$ függvényében. Helyettesítsük ezeket a $\odot'$ egyenletekbe, akkor ezekben csupán a $I\ II\ III\ldots$ ösmeretlenek fognak előfordulni, s minthogy az egyenletek száma az ösmeretlenekével egyenlő, teljesen meghatározhatók, s ezek által végre az (A) (B) $(C)\ldots$ is egészen meg lesznek határozva.

418. §. A háromszögek feloldása.

1) A háromszög oldalak a föld mathematikai felületén szorosan véve geodétikai vonalakat képeznek, holott a megmért szögek az oldalak végpontjain keresztül fektetett függélyes síkok között befoglalt szögeket szolgáltatják. Ha a föld mathematikai felületét ezen függélyes iránysíkok által metszük, a képződő metszésvonalak nem lesznek azonosok ugyan a geodétikai vonalakkal, valamint a közöttök bezárt szögek sem lesznek egyenlők a geodétikai vonalak közt lévő szögekkel, de mint Baeyer »Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche« czímű munkájában bebizonyíttatik, azok egymástól minden közvetlen észlelhető esetekben olyan kevéssé külömböznek, hogy a külömbséget sem a hosszakban, sem az irányokban tekintetbe venni nem szükséges. A háromszögeket tehát gömbháromszögeknek lehet tekinteni, melyek azoknak középpontjaiban (súlypontjaiban) a sphäroid felületéhez leginkább simuló gömbökön feküsznek, s melyeknek

sugárhosszát a 415. §.-ban adott képletek szerint lehet számítni. A háromszögek feloldását mind a gömbháromszögtan, mind a Legendre tételének segitségével a síkháromszögtan képletei szerint lehet véghezvinni. Az utóbbi közvetlenebb úton adja a háromszög oldalak hosszát. A számítást az alapvonal háromszögén kell kezdeni, és minden irányban folytatni egész a határszélekig. Elméleti szempontból tekintve ugyan a számítás rendje semmi külömbséget nem okoz, minthogy a kiegyenlités által gondoskodva van arról, hogy az eredmények ugyanazok legyenek, akármely rendben történt is a számítás; de a gyakorlatban czélszerű a számításban a legrövidebb útat követni, hogy a számítási elkerülhetlen tökéletlenségek összehalmozódása lehetőleg meggátoltassék. Az így nyert hosszakat a legrövidebb vonalaknak lehet tekinteni, melyeket a sphäroid felületén ponttól ponthoz lehet húzni.

Delambre és Méchain a franczia fokmérésnél a számítást más módon eszközölték. Ők t. i. a gömbháromszögek helyett a húrháromszögeket számították, azaz olyan háromszögeket, melyeknek oldalait a háromszögek sarokpontjait összekötő egyenes vonalak képezték. Ezen háromszögek szögei a gömbháromszögéitől különbözők, s egyszerű képletek szerint a háromszög oldalak közelitő értékeiből kiszámíthatók. (Lásd Puissant »Traité de géodesie« czímű munkáját).

2) Az országmérésnél az elsőrangú háromszög hálózatot a másodrangú háromszögek kiszámítása követi. Az eljárás az előbbeniekben előadottól csak abban külömbözik, hogy az elérendő pontosság csekélyebb lévén, $\left(\frac{1}{50000} - \frac{1}{60000}\right)$, a hibákat nem szükség olyan nagy szigorral kiegyenlítni, mint az elsőrangú háromszögeknél. Az sem szükséges, hogy az egész háromszög hálózat egy összefüggő egésznek tekintessék, hanem szabad azt önálló csoportokra szétbontani, melyek az elsőrangú háromszögek pontjai által kapcsoltatnak egymáshoz, s az elsőrangú háromszög oldalak a másodrangú hálózatnak átlóit képezik.

3) A harmadrangú háromszögek, melyeknél $\frac{1}{10000} - \frac{1}{20000}$-ed rész pontosság elegendő, egészen a síkháromszögtan képletei szerint számíttatnak, minthogy a gömbszögek a redukált szögektől már észrevehetőleg nem külömböznek.

419. §.

Ha a háromszögek feloldattak, a további munka kétfelé ágazik aszerint, a mint vagy fokmérés, vagy országmérés czéljából tétettek a mérések.

Az első esetben vagy egy déllő-, vagy egy erre merőlegesen fektetett geodétikus ív hosszát kell meghatározni, s a háromszöghálózat vagy északról délnek, vagy kelet-nyugoti irányban van kitűzve.

Gondoljuk most, hogy a hálózat A pontjában (385. ábra) a déllő iránya ki van tűzve, s annak az AB oldallal képzett szöge α, mely nem más, mint az AB iránynak azimutja, meg van mérve, ezen déllő vonal átszeli az egész hálózatot, és a háromszög oldalak által darabokra osztatik, úgy hogy az egész hossz áll az $Ab + bc + cd + de + ef + fg + gh$ összegből, hol h a déllő közelében fekvő H pontnak derékszögű vetülete a déllőre. Ezen darabokat ABb, bCc, cDd, s i. t. háromszögekből ki lehet számítni, megjegyezvén, hogy az Ab, bc, cd . . darabok legnagyobb köröket ábrázolnak, s a b, c, d . . pontokban képződő csúcsszögek egyenlők, minthogy a déllő folytonos, törések nélküli vonal, mely, ha a háromszög oldalait egész a déllő közeléig felhasgatva gondoljuk, hogy azok a kisikításnak ellent ne álljanak, s az egészet kisikítjuk, egyenes vonallá fog fejlődni. A számítás itt is a Legendre tétele szerint a síkháromszögtani képletek segitségével eszközöltetik. E szerint a déllőnek 1^0—2^0-nyi ívhossza ösmeretessé lesz, s ha még az A és H pontokban a geogr. szélességek is megméretnek, ezen déllő-ív görbületének ösmeretére jutunk. Ha pedig a számított geodétikus vonal a déllőre merőleges irányban fekszik, akkor a végpontok geographikus hosszkülönbségét kell megmérni, s az ív görbületét kelet-nyugoti irányban fogjuk megkapni.

A második esetben a hálózat pontjainak kiindulási pontokul kell szolgálni az egyes községek határainak felvételére, melyeknek tornyai ezen hálózat pontjai között foglaltatnak. Ekkor tehát a hálózat pontjainak coordinatáit kell meghatározni. A coordinaták x tengelyét mindig valamely főpont (csillagda) déllője irányában szokták választani, melynek geographiai szélessége nagy pontossággal meg van határozva. A coordinaták egyébaránt lehetnek vagy derékszögűek, vagy geographiaiak;

mind a kettő alkalmas arra, hogy az ország részletes felvételének keretéül szolgáljon.

420. §. Orthogonál coordinaták.

Feladat. Adva lévén egy pontnak P (386. ábra) derékösszrendezői x y, a PP' legnagyobb körív hossza, és ennek hajlásszöge α a P pontban az ordinata irányára merőleges vonalhoz: keresni kell a P' coordinátáit, x' y', és a $P'P$ ívnek hajlásszögét α', a P' pontban annak rendezőjére merőlegesen fekvő vonalhoz.

Feloldás. Legyen EOD déllő a coordinata rendszer x tengelye, O a coordinaták kezdőpontja, r a gömb sugára. Húzzunk a P és P' pontokon keresztül az x tengelyre merőlegesen legnagyobb köröket, melyek egymást a Q pontban metszik, és Q pólpontja lesz az EOD körnek; akkor egy gömbháromszög áll elő $PP'Q$, melynek alkotó részei ezek: $PP' = \frac{a}{r}$, $PQ = 90^0 - \frac{y}{r}$, $P'Q = 90^0 - \frac{y'}{r}$, $P = 90 - \alpha$, $P' = 90^0 + \alpha'$, $Q = \frac{x' - x}{r}$, s ezen alkotó részek közt következő relatiók állanak:

$$\sin\frac{y'}{r} = \sin\frac{y}{r}\cos\frac{a}{r} + \cos\frac{y}{r}\sin\frac{a}{r}\sin\alpha,$$

$$\sin\frac{x' - x}{r} = \frac{\sin\frac{a}{r}}{\cos\frac{y'}{r}}\cos\alpha,$$

$$\cos\alpha' = \frac{\cos\frac{y}{r}}{\cos\frac{y'}{r}}\cos\alpha.$$

Ezen egyenletekben $\frac{y}{r}$, $\frac{y'}{r}$, $\frac{a}{r}$ mind igen kicsiny szögeket jelentenek, melyeknek függvényeit sorba ki lehet fejteni, s a harmadrangú kis mennyiségeknél magasabb tagokat el lehet hanyagolni. Fejtsük ki tehát először az első egyenletet:

$$\frac{y'}{r} - \frac{y'^3}{6r^3} = \left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3}\right)\left(1 - \frac{a^2}{2r^2}\right) + \left(1 - \frac{y^2}{2r^2}\right)\left(\frac{a}{r} - \frac{a^3}{6r^3}\right)\sin\alpha. \text{ vagy:}$$

$$y' - \frac{y'^3}{6r^2} = y\left(1 - \frac{a^2}{2r^2}\right) - \frac{y^3}{6r^2} + a\sin\alpha\left(1 - \frac{a^2}{6r^2} - \frac{y^2}{2r^2}\right).$$

Ezen egyenletben y'^3-ban elég pontossággal az y' közelitő értékét $= y + a\,sin\alpha$ lehet tenni, s ezt kifejtvén, némű reductió után lesz:

$$y' = y + a\,sin\alpha - \frac{a^2 y\,cos\alpha^2}{2r^2} - \frac{a^3 sin\alpha\,cos\alpha^2}{6r^2}.$$

Legyen röviditésül $a\,sin\alpha = n$, $a\,cos\alpha = m$, akkor lesz:

$$y' = y + n - \frac{m^2 y}{2r^2} - \frac{m^2 n}{6r^2}. \odot$$

Hasonlóképen találjuk:

$$x' = x + m + \frac{my'^2}{2r^2} - \frac{mn^2}{6r^2}. \rightmoon$$

A harmadik egyenletből sorbafejtés által lesz:

$$cos\alpha' - cos\alpha = \frac{y'^2 - y^2}{2r^2} cos\alpha., \quad \text{vagy}$$

$$-2sin\frac{\alpha' + \alpha}{2}\,sin\frac{\alpha' - \alpha}{2} = \frac{(y' + y)(y' - y)}{2r^2} cos\alpha.$$

Ezen egyenlet mutatja, hogy az $\frac{\alpha' - \alpha}{2}$ másodrangú kis mennyiség. Ha tehát a bal oldalon $sin\frac{\alpha' - \alpha}{2}$ helyett az ívet, $sin\frac{\alpha' + \alpha}{2}$ helyett $sin\alpha$-t teszünk, a jobb oldalon pedig az y' értékét helyettesítjük, tekintettel lévén az m és n jelentésére, ezen eredményre jövünk:

$$\alpha' = \alpha - \frac{my}{r^2} - \frac{mn}{2r^2}\,♁.$$

Ha megfordítva a P' pontról kell átmenni a P pontra, akkor a fentebbi $\odot$ $\rightmoon$ ♁ képletekben csak y'-t y-al, x'-t x-el, α-t $180 + \alpha'$-el kell felcserélni. Ekkor m és n jelentései is megváltoznak, t. i. lesz:

$$n = -a\,sin\alpha', \quad \text{és } m = -a\,cos\alpha'.$$

Ezen egyenletek a Soldner-féle coordinatákat szolgáltatják.

421. §.

F e l a d a t. Adva lévén két pontnak P és P' coordinátái, xy, xy' keresni kell azoknak távolságát a, és az összekötő legnagyobb körív hajlásszögét α vagy α' a rendezők irányaira merőleges vonalakhoz.

F e l o l d á s. 1) Oldjuk fel az előbbi §. $\odot$ és $\rightmoon$ egyenleteit

m és n szerint, akkor lesznek:

$$n = y' - y + \frac{m^2 y}{2r^2} + \frac{m^2 n}{6r^2}, \quad m = x' - x - \frac{my'^2}{2r^2} + \frac{mn^2}{6r^2}.$$

Ugyde $n = a\, sin\alpha$, $m = a\, cos\alpha$, ezeket tehát négyzetre emelvén és összeadván lesz:

$$a^2 = n^2 + m^2 = \left(y' - y + \frac{m^2 y}{2r^2} + \frac{m^2 n}{6r^2}\right)^2 + \left(x' - x - \frac{my'^2}{2r^2} + \frac{mn^2}{6r^2}\right)^2.$$

Ezt kifejtve és elhagyva a kis mennyiségeknél a második hatványnál magasabb rangú tagokat, ha még $m\, n$ helyett a közelitő értékeket $x'-x$, $y'-y$ helyettesítjük, lesz:

$$a^2 = (y'-y)^2 + (x'-x)^2 - \frac{(x'-x)^2\,(y^2 + yy' + y'^2)}{3r^2},$$

honnan következik:

$$a = \sqrt{(y'-y)^2 + (x'-x)^2}\left(1 - \frac{(x'-x)^2\,(y^2 + yy' + y'^2)}{3r^2\, a^2}\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{(y'-y)^2 + (x'-x)^2}\left(1 - \frac{y^2 + yy' + y'^2}{6r^2}\, cos\alpha^2\right).$$

Ezen kifejezés első tagja két pont távolságát jelenti a síkban, melyeknek orthogonál coordinátái ugyanazok, mint a gömbön. Ha ezt t-vel jelöljük, lesz:

$$\frac{t}{a} = \frac{1}{1 - \frac{y^2 + yy' + y'^2}{6r^2}\, cos\alpha^2} = 1 + \frac{y^2 + yy' + y'^2}{6r^2}\, cos\alpha^2 \;*$$

ez a síktávolságnak a megfelelő gömbfelületi vonal hosszához való viszonya. Ha tehát a gömbcoordinatákat a síkra felrakjuk, az úgy képződő alak nem adja hű képét a gömbfelületnek, hanem el van torzulva, s a két megfelelő táv közötti külömbség, vagy az eltorzulás lesz:

$$t - a = a\,\frac{y^2 + yy' + y'^2}{6r^2}\, cos\alpha^2.$$

Ez annál nagyobb, mennél távolabb esnek a pontok az x tengelytől; legnagyobb az x tengelylyel párhuzamos irányban, mig az arra merőleges irányban elenyészik. Legyen p. o. $y = y' = 100{,}000$ méter, a midőn $\alpha = o$, akkor $t - a = 0{\cdot}0001\, a$.

---

* Ha az a vonal hosszát igen kicsinynek vesszük, a midőn t szintén igen kicsiny lesz, akkor $y = y'$-nek veendő, és a viszony ezzé válik: $\frac{t}{a} = 1 + \frac{y^2}{2r^2} cos\alpha^2$.

2) Ha az n és m képleteit egymással elosztjuk lesz:

$$tg a = \frac{y'-y+\dfrac{m^2y}{2r^2}+\dfrac{m^2n}{6r^2}}{x'-x-\dfrac{m'^2y}{2r^2}+\dfrac{mn^2}{6r^2}},$$

hol a jobb oldalon m n helyett azoknak x y x' y' által kifejezett közelítő értékeit kell tenni. Nevezzük a síkon a megfelelő két pont összekötő vonalának hajlásszögét az x tengelyhez β-nak, úgy hogy legyen:

$$tg\beta = \frac{y'-y}{x'-x},$$

akkor az α és β közötti külömbséget is kiszámíthatjuk, t. i.:

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{y'-y+\dfrac{my^2}{2r^2}+\dfrac{m^2n}{6r^2}}{x'-x-\dfrac{my'^2}{2r^2}+\dfrac{mn^2}{6r^2}} - \frac{y'-y}{x'-x}.$$

Ezt kifejtvén kitünik, hogy α és β csak másodrangú kis mennyiségekben külömböznek egymástól. Ha tehát a kis mennyiségeknél a második hatványnál magasabb rangú tagokat elhagyjuk, csekély átváltoztatással elegendő közelítéssel lesz:

$$\alpha-\beta = \frac{my}{2r^2}cos\alpha^2 + \frac{y'^2 sin 2\alpha}{4r^2} + \frac{mn\, cos 2\alpha}{6r^2}.$$

Ezen képletekben is fel lehet α'-et α-val, λ'-et λ-al, x'-et x-el cserélni, figyelembe vévén az m és n-nek megváltozott jelentéseit.

3) Az országos háromszögelésről az ország részletes felvételére az átmenet oly módon történik, hogy a gömbfelületet az x tengelyre merőlegesen egymástól egyenlő távolságban fektetett legnagyobb körök által, úgyszintén az x tengelylyel párhuzamosan szintén egymástól egyenlő távolságban fekvő kisebb körök által négyszög hálózatra osztjuk fel; míg a síkon a megfelelő hálózat az x y tengelyekhez párhuzamosan fekvő egyenes vonalak által képeztetik. E szerint a gömbön lévő négyszögek oldalai gyenge görbületű körívekből állanak, melyeket egy szelvény keretében észrevehető hiba nélkül egyeneseknek lehet venni. Ezen négyszögeknek az x tengelylyel párhuzamos oldalai mind inkább kisebbednek, mennél távolabb esnek az x tengelytől; mig azok a sík négyszögekben mindenütt egyenlő nagyságuak

maradnak; az y tengely irányában pedig a méretek egyenlők egymással mind a két hálózatban.

A síkra áttett alakok tehát egy kissé el vannak torzúlva, s ezen eltorzúlás egy olyan szelvényben, melynek távolsága az x tengelytől 100 kilométer, már $\frac{1}{10000}$-ed részre emelkedik. Ez a szelvény nagyságában észrevehető ugyan, de a részletekben, melyeknél csak $\frac{1}{1000}$-ed rész pontosságot lehet elérni, még tekintetbe nem jön.

Az országos felmérésnél tehát csak 100 kilométer széles szalagban jobbra és balra az x tengelytől szabad a gömbcoordinatákat sík orthogonál coordinaták gyanánt használni, s nagyobb kiterjedésű országok térképezésénél több ilyen 200 kilom. széles szalagra kell az országot feldarabolni, mindenik szalagra külön x tengelyt vévén fel, melyek azonban a háromszög hálózat által egymással összeköttetésben állanak. Az x tengely hosszant a térképzés kiterjedése korlátozva nincs.

422. §. Geographikus coordináták.

F e l a d a t. A gömbi coordinatákból a geographikus coordinatákat meghatározni.

F e l o l d á s. Legyen az orthogonál coordinaták kezdőpontja O (387. ábra), melynek geographikus szélessége $= \varphi_0$, a meghatározandó pont P, melynek geographikus szélessége $= \varphi$, geographikus hosszasági külömbsége az EOD délllőtől számlálva $= \lambda$. Húzzunk a P ponton keresztül egy déllőt, ekkor egy derékszögű gömbháromszög EP_1P képződik, hol E a gömb sarkpontja, P_1 a rendező lábpontja, melynek geographikus szélességét φ_1-el akarjuk jelölni. Ezen háromszögnek alkotó részei ezek: E szög $= \lambda$, $EP_1 = 90^0 - \varphi_1$, $OP_1 = \frac{x}{r}$, $PP_1 = \frac{y}{r}$, P szög $= \omega$, mely a PP_1 irány azimutja, $EP = 90^0 - \varphi$. Ezen alkotó részek közt következő relatiók vannak:

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{x}{r}$$

$$\sin\varphi = \sin\varphi_1 \cos\frac{y}{r}$$

$$tg\lambda = \frac{tg\frac{y}{r}}{cos\varphi_1}$$

$$tg\omega = tg\varphi_1 \, sin\frac{y}{r}.$$

A $sin\varphi$ képletét tovább kifejtve lesz:

$$sin\varphi = sin\varphi_1\left(1 - \frac{y^2}{2r^2}\right), \text{ vagy } sin\varphi - sin\varphi_1 = -\frac{y^2}{2r^2}sin\varphi_1.$$

Ebből látszik, hogy a φ és φ_1 közötti külömbség másodrangú kis mennyiség. Ha tehát a sinusok külömbségét a szögek fél összege és fél külömbségével kifejezzük, elegendő közelítéssel lesz:

$$\varphi - \varphi_1 = -\frac{y^2}{2r^2} tg\varphi_1 \odot.$$

Hasonlóképen lehet a $tg\lambda$ képletét is kezelni, t. i. lesz:

$$\lambda + \frac{1}{3}\lambda^3 = \frac{\frac{y}{r} + \frac{1}{3}\frac{y^3}{r^3}}{cos\varphi_1},$$

tegyük λ^3-ban a λ közelítő értékét $\frac{y}{rcos\varphi_1}$, akkor némű reduktió után lesz:

$$\lambda = \frac{y}{rcos\varphi_1} - \frac{y^3}{3r^3}\frac{tg\varphi_1{}^2}{cos\varphi_1} ☽.$$

Épen így lesz a $tg\omega$ képletéből:

$$\omega + \frac{1}{3}\omega^3 = tg\varphi_1\left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3}\right)$$

s ha ω^3...-ban az ω közelítő értékét $tg\varphi_1\frac{y}{r}$ helyettesítjük, lesz:

$$\omega = \frac{y}{rcos\varphi_1} - \frac{y^3}{6r^3}tg\varphi_1 \, (1 + 2tg\varphi_1{}^2) \, ♁.$$

A geographikus szélességnek ezen gömbcoordinatákból számított képlete azonban még tetemes javításra szorúl azon okból, hogy a földtest szigorúbban véve nem gömb, hanem sphäroid alakú; tehát a függélyek, melyek a geographiai szélesség meghatározásánál főfő szerepet játszanak, a legtöbb pontokban nem a föld középpontján mennek keresztül, hanem a délelőket ábrázoló ellipsis deréklője irányában feküsznek.

423. §. Sphäroidikus correktio.

1) Legyen M (388. ábra) egy pontja az ellipticus déllőnek, melynek egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Legyen MS az M pont deréklője, mely az egyenlítő síkjával φ szöget zár be, tehát φ az M pontnak geographikus szélessége. Ezen szögre nézve általában áll ezen relatio:

$$\varphi=u-90,$$

hol u a görbe vonalhoz húzott tangensnek az x_1 positiv ágához való hajlásszögét jelenti; tehát

$$tg\varphi=-\frac{1}{tgu}=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Az ellipsisnél $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$, tehát $tg\varphi=\frac{a^2y}{b^2x}$.

Küszöböljük ki ezen egyenlet segélyével az ellipsis egyenletéből előbb x-et, azután y-t, akkor x és y φ függvényeiben lesznek kifejezve, és lesznek:

$$y^2=\frac{b^4sin\varphi^2}{b^2sin\varphi^2+a^2cos\varphi^2},\quad \text{és} \quad x^2=\frac{a^4cos\varphi^2}{b^2sin\varphi^2+a^2cos\varphi^2}.$$

Hozzuk be az excentricitást ezen relatio szerint: $a^2-b^2=a^2\varepsilon^2$, s küszöböljük ki b-t, akkor előállanak:

$$y=\frac{a(1-\varepsilon^2)sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2sin\varphi^2}},\quad \text{és} \quad x=\frac{acos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2sin\varphi^2}}.$$

2) Egy sík görbe görbületi sugarának általános képlete, ha mind x-et, mind y-t valamely paraméter függvényének tekintjük, ez:

$$\varrho=-\frac{ds^3}{dxd^2y-dyd^2x}.$$

Ezt az ellipsisre alkalmazván, ha φ-t veszszük független változónak, s a déllő valamely pontjának görbületi sugárát R_1-nek nevezzük, némű számitás után lesz:

$$R_1=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{(1-\varepsilon^2sin\varphi^2)^3}}.$$

3) A Meunier tétele szerint, ha egy görbe felület valamely pontjában egy érintő síkot gondolunk, s ezt egy olyan egyenes vonal körül forgatjuk, mely az érintő síkban fekszik s az érint-

kezési ponton megyen keresztül, a képződő metszésvonalak görbületi sugarai r, a derékmetszési görbe görbületi sugara T, és a két sík közötti szög Θ közt következő relatio áll:

$$r = R cos \Theta.$$

Gondoljuk most a sphäroidot parallel metszve az egyenlítő síkjával, akkor a metszési görbe köralakú lesz, melynek sugára $MT = x$. Ezen sík a déréklő MS-el φ szöget zár be; tehát az $MTS\triangle$-ben ezen relatio áll:

$$MT = MS.\ cos\varphi;$$

ez pedig nem más, mint a Meunier képlete a sphäroidra alkalmazva. Tehát MS azon metszési vonalnak görbületi sugara, mely a déllőt derékszög alatt metszi. Nevezzük ezt keresztgörbületi sugárnak és jelöljük azt R_2-vel, akkor ha $MT = x$ helyett a fentebb talált értéket helyettesítjük, lesz:

$$R_2 = \frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon^2 sin\varphi^2}}.$$

Be lehet bizonyítni, hogy R_2 a legnagyobb és R_1 a legkisebb minden metszési görbék görbületi sugarai közt, melyeket az M ponton keresztül lehet húzni.

4) Alkalmazzuk most ezen képleteket a geographikus szélesség szigorúbb meghatározására. (389. ábra.)

Először is φ_1 képletében r helyett a $\frac{\varphi+\varphi_1}{2}$ szélességnek megfelelő déllő-görbületi sugárt R_1 kell tenni, úgy hogy legyen

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{x}{R_1};$$

továbbá a P_1P ívet azon gömbön fekve kell gondolnunk, melynek középpontja S_1; mert ezen ív a keresztmetszési ív. Ennek sugára $P_1S_1 = PS_1 = R_2$. A P_1S_1 hajlásszöge az egyenlítő síkjához $= \varphi_1$, a PS_1-é pedig $= \varphi$, a mint azt a gömb-coordinatákból számítottuk. De a P pontban nem PS_1 a déréklő, hanem PS, mely az egyenlítő síkját ψ szög alatt metszi; tehát ψ a P pontnak sphäroidikus geographikus szélessége. Ezen két szélesség közt azomban következő relatio áll:

$$\psi = \varphi - u.$$

Az u értékét a PS_1S $\triangle$-ből lehet kiszámítni, t. i.:

$$sinu = \frac{SS_1 .\ cos\varphi}{PS_1}$$

$$SS_1 = OS_1 - OS,\ OS_1 = R_2 \sin\varphi_1 - y = R_2\,(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_1\,(1-\varepsilon^2)) = R_2\,\varepsilon^2 \sin\varphi_1,$$

hasonlóképen $OS = R_2\,\varepsilon^2 \sin\psi$,

ezeket helyettesítvén lesz:

$$\sin u = \varepsilon^2\,(\sin\varphi_1 - \sin\psi)\cos\varphi = 2\varepsilon^2 \sin\frac{\varphi_1-\psi}{2}\cos\frac{\varphi_1+\psi}{2}\cos\varphi.$$

Tekintetbe vévén azonban, hogy mind u, mind $\varphi_1-\psi$ igen kis mennyiségek, szabad lesz ezen sinusok helyett az íveket, sőt még tovább menvén ψ és φ helyett a cosinusokban φ_1-et tenni, mint közelitő értékeket, s ha még $\varphi_1-\varphi$ helyett az előbbi §-ban nyert értéket tesszük, lesz:

$$u = \frac{y^2}{4R_2^2}\,\varepsilon^2 \sin 2\varphi_1.$$

Végre a kijavított geogr. szélesség lesz:

$$\psi = \varphi_1 - \frac{y^2}{2R_2^2}\left(tg\varphi_1 + \frac{\varepsilon^2 \sin 2\varphi_1}{2}\right)\odot'.$$

2) A sphäroidikus hosszasági külömbség a gömbitől semmit sem külömbözik, mi onnan is kitűnik, hogy mind a két mennyiség ugyanazon déllő síkok közötti hajlásszög által képeztetik; de r helyett R_2 teendő. Végre a sphäroidikus azimut külömbözik ugyan egy kissé a gömbi azimuttól, mert az elsőbb a P pontban a déllő- és a PP_1 ívhez húzott érintők, és a PS deréklő által meghatározott három élnek azon szöge, mely a PS élben képződik; mig a második ugyanazon érintők, de a PS_1 deréklő által meghatározott három élre vonatkozik; azonban a külömbség olyan csekély, hogy az a másodrangot meghaladja, ennélfogva a gyakorlatban egészen elhanyagolható. Az r helyett azonban itt is R_2-t kell tenni.

3) Az ország részletes felvételét déllők és parallel körök által képződő négyszög hálózatra is lehet alapítni, még pedig hogy a térkép eltorzúlást ne szenvedjen, nem kell az egész ország területén lévő összes szelvényeket egymás mellé egy síkba sorakoztatni, hanem minden egyes szelvényt a sphäroid felületén fekvőnek kell tekinteni, úgy hogy minden szelvény az igazi felületet ábrázolja. Ha egy ilyen szelvénynek kiterjedése északról dél felé 6 percz, nyugotról keletre pedig 10 percz, mint az a porosz térképezésnél alkalmaztatik, akkor a 47^0 geographiai szélesség alatt a szelvény keleti és nyugoti oldala $= 11115{\cdot}94$ m.,

a déli oldal $= 12674{\cdot}46$ m., az északi oldal $= 12650{\cdot}79$ m. hosszú, s a szelvény keleti s nyugoti oldalát észrevehető hiba nélkül egyenesnek lehet venni, mig az északi és déli oldalak gyenge görbületű körívek lesznek. Úgy lehet tekinteni, mintha ezen szelvény egy kúp felületén volna, mely a gömbfelülettel ezen szelvény határai közt összeesik, melynek csúcsa tehát a sphäroid tengelyében gondolandó, s a parallel körök a kúp nevezővonala hosszával mint sugárral húzott körívek által ábrázoltatnak. Ezen kör-sugár hossza φ geogr. szélességnél $= R_2 cotg\varphi$. Részletes felvételi szelvényeknél ezen köröket is egyeneseknek lehet venni. Ezen szelvények kevés számmal egymás mellé sorakoztatva, közönséges térképeket alkotnak; de ha az összes szelvényeket kell egy egésszé (földabrosszá) összeállítni, azt a földabroszok készitésének elmélete szerint kell teljesítni, melyről később lesz szó.

424. §. A földtest nagyságának meghatározása a fokmérésekből.

1) Ha a földtest alakját forgási ellipsoidnak tekintjük, ezen ellipsis méreteit két szélességi fokmérésből meg lehet határozni, melyek közül az egyiket közel az egyenlitőhöz, a másikat közel a sarkponthoz kell választani.

Legyen egy ilyen megmért, körülbelől 1^0-nyi ív hossza $= s$, annak két végén megmért geogr. szélességek φ_1 φ_2, az ív középpontjának megfelelő déllő-görbületi sugár R_1, annak megfelelő geogr. szélesség $\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$, akkor az elliptikus ívet észrevehető hiba nélkül egyenlőnek lehet venni a $(\varphi_1 - \varphi_2)$ középponti szögnek megfelelő körívvel, tehát

$$s = R_1(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \text{vagy} \quad R_1 = \frac{s}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

hol a 423. §. 2 szerint általában: $R_1 = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{(1-\varepsilon^2 sin\varphi^2)^3}}$, ⊙

Hasonlóképen a második ívre nézve, ha a betüket vonásokkal jelöljük, lesz:

$$R'_1 = \frac{s'}{\varphi'_1 - \varphi'_2}, \quad \text{és}$$

$$R'_1 = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{(1-\varepsilon^2 sin\varphi'^2)^3}} \quad \odot'.$$

A $\odot$ és $\odot'$ egyenletekből, melyekben R és R' ösmeretesek, az a és ε^2 meghatározandók, és rövid számítás után lesz:

$$\varepsilon^2 = \frac{R_1^{\frac{2}{3}} - R_1'^{\frac{2}{3}}}{R_1^{\frac{2}{3}} sin\varphi^2 - R_1'^{\frac{2}{3}} sin\varphi'^2},$$

$$a = \frac{R_1\sqrt{(1-\varepsilon^2 sin\varphi^2)^3}}{1-\varepsilon^2} = \frac{R_1'\sqrt{(1-\varepsilon^2 sin\varphi'^2)^3}}{1-\varepsilon^2}$$

2) Hasonlóképen lehet a föld méreteit két hosszfokmérésből meghatározni. Legyen egy pontban, melynek geographikus szélessége $= \varphi_1$, a déllőre merőleges irányban egy ív megmérve, melynek hossza $= s$, R_2 a hozzátartozó keresztgörbületi sugár, λ az ív két végpontjának hosszasági külömbsége. Induljunk ki a 422. §. ☽ egyenletéből, melyben most φ_1 helyett φ-t, r helyett R_2-t kell tenni, akkor lesz:

$$\lambda = \frac{s}{R_2 cos\varphi} - \frac{s^3 tg\varphi^2}{3R_2{}^3 cos\varphi}.$$

Ebből lesz:

$R_2 = \dfrac{s}{\lambda cos\varphi} - \dfrac{s^3 tg\varphi^2}{3\lambda R_2{}^2 cos\varphi}$, vagy a jobb oldali második tagban $\dfrac{s}{R_2}$ helyett annak közelitő értékét $\lambda cos\varphi$-t tévén, elegendő pontossággal lesz:

$$R_2 = \frac{s}{\lambda cos\varphi} - \frac{s\lambda\, sin\varphi\, tg\varphi}{3},$$

hol R_2 adott mennyiségek által van kifejezve. Tegyük R_2 helyett annak általános képletét, akkor lesz a 423. §. 3) szerint:

$$\frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon^2 sin\varphi^2}} = R_2.$$

Egy második fokmérésből, melynek adatai s' λ' találtatnak, hasonlóképen:

$$R'_2 = \frac{s'}{\lambda' cos\lambda'} - \frac{s'\lambda'}{3} sin\varphi' tg\varphi', \quad \text{és}$$

$$\frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon^2 sin\varphi'^2}} = R'_2.$$

Ezen egyenletekből lesznek:

$$\varepsilon^2 = \frac{R_2^2 - R'^2_2}{R_2^2\, sin\varphi^2 - R'^2_2\, sin\varphi'^2} \quad \text{és}$$

$$a = R_2 \sqrt{1 - \varepsilon^2\, sin\varphi^2} = R'_2 \sqrt{1 - \varepsilon^2\, sin'\varphi^2}.$$

3) Az országos háromszögelési hálózatban a 419. §. útmutatása szerint meg lehet valamely pontra nézve határozni mind a déllő irányában, mind az arra keresztben fekvő ív hosszát, az ívek végpontjainak megfelelő geographikus szélességek, illetőleg hosszúságok külömbségeit pedig meg lehet mérni. Ezekből a fentebbi pontok szerint ki lehet számítni a görbületi sugárokat R_1 R_2. Tegyük ezek helyett az előbbi pontokban jelzett analytikai kifejezéseket, és osszuk el azokat egymással, akkor ezen egyenlet képződik:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{(1-\varepsilon^2\, sin\varphi^2)^3}} : \frac{a}{\sqrt{(1-\varepsilon^2\, sin\varphi^2)^3}} = \frac{(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^2\, sin\varphi^2}.$$

Ebből következik:

$$\varepsilon^2 = \frac{R_2 - R_1}{R_2 - R_1\, sin\varphi^2} \quad \text{és} \quad a = R_2\sqrt{1-\varepsilon^2\, sin\varphi^2} = \frac{R_1\sqrt{(1-\varepsilon^2\, sin\varphi^2)^3}}{1-\varepsilon^2}$$

Ekképen meg van határozva azon sphäroid, mely a szóban lévő vidéken a föld felületével összeesik.

4) A földnek eddig leggyakrabban használt méretei Bessel szerint ezek:

$$a = 3272077{\cdot}140 \text{ Toise} = 6377397{\cdot}156 \text{ méter},$$
$$b = 3261139{\cdot}328 \quad » \quad = 6356078{\cdot}963 \quad »$$
$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299{\cdot}1528}$$
$$\varepsilon = 0{\cdot}0816968$$

1^0 déllő középhossza = 57013·109 Toise = 111120·620 méter,
a déllő negyedrészének hossza = 5131179·81 Toise
= 10000855·76 méter

HARMADIK SZAKASZ.

A földabroszok elmélete.

425. §.

Az országmérés eredményei közt a legfontosabbak közé tartozik az egyes pontok geographikus fekvésének meghatározása. A geographikus összrendezők az eddigi előadás szerint számokban határoztattak meg; de ezeket könnyebb áttekinthetőség végett rajzolatban is szokták összeállítni, s egy ilyen rajzolat, melyről az egyes pontok geographiai összefüggését fel lehet ösmerni, földabrosznak neveztetik, megkülömböztetésül a térképektől, melyeken a geographiai fekvésre ritkán van figyelem fordítva.

A föld felületének rajzát kicsinyítve egész hűséggel csak egy hozzá hasonló gömbded felületén lehet előállítni — Globus —. Azonban a földnek lelapulása olyan csekély, hogy azt csak tetemesen nagy méretű sphäroidnál lehet észrevenni, ezért kisebb globusok egészen gömb alakúak, honnan nevöket is vették. Ilyen globusok gyakorlati czélokra, a technikai kivitel nehézségei miatt sem nem alkalmasok, sem nem elég pontosak, s csakis általános geographiai fogalmak magyarázatára — demonstratióra — használhatók.

Gyakorlati czélokra sík rajzokat lehet csak használni. De ha ezek a globus felületének tetemes részét ábrázolják, a gömbfelület le nem fejthetősége miatt, az alakokat a globusnak megfelelő részétől sok tekintetben eltérő módon mutatják.

426. §. A külömböző elvek.

A földabroszon tehát a gömb felületével teljes azonosságot elérni nem lehetvén, a földabrosz készitésében általános elvből kiindulni nem lehet, s a feladat határozatlan. A szerint t. i., a mint egyik vagy másik mértani tulajdonságra fektetjük a fősúlyt, melyet a földabroszon teljesen elérni akarunk, minők p. o. az egyenlőség, hasonlóság stb., a többieket rendesen fel kell áldoznunk.

Három főelvet lehet megkülömböztetni, melyek a földabroszok készitésénél vezérszerepre vergődtek, melyek mindmegannyi nemét alapították meg a földabroszoknak. Ezek

a) a látszati elv, mely szerint a globus felülete úgy ábrázoltatik, a mint annak egyes pontjaiból egy bizonyos helyen álló szembe húzott sugarak egy sík táblát áthatják, — látszati vetület; —

b) a lefejtési elv, melynél fogva a globusnak bizonyos vonalrendszere egy más lefejthető felületre kifeszítve, tehát változatlan hosszaságban tétetik át. Ezen felületet később előadandó okokból czélszerűen **kúpnak** lehet venni; ezért az ezen csoportba tartozó földabroszok **kúpvetület** név alatt ismeretesek;

c) a **hasonlósági elv**, mely szerint a földabrosznak térelemei a megfelelő gömb-térelemekkel hasonlóknak feltételeztetnek, mint ezt a tengeri abroszokon rajzolva látjuk.

a) *Látszati vetületek.*

427. §. Általános feloldás.

1) Legyen C (390. ábra) a globus közzéppontja, melyet a síkra akarunk vetítni. O a szem álláspontja, QC egy tengelysugár, mely a gömbfelületet az A pontban merőlegesen metszi. Fektessünk ezen tengelysugárra tetszésszerinti távban merőlegesen egy síkot LN, melyre akarjuk a gömbfelületet látszatilag levetítni. Ezen síkot az OA sugár az a pontban metszi, tehát a az A pont látszati képe. Legyen E a gömb északi sarka, az OE sugár messe a síkot az e pontban; e tehát az E képe fog lenni. Az AE legnagyobb kör az A pont délköre; ez az LN síkban az ae egyenes által fog ábrázoltatni, mert az AEO sík, mely a gömböt az AE délkörben metszi, az LN síkot csak egyenes vonalban metszheti. Legyen most M egy tetszésszerinti pont a gömb felületén, melynek geographikus szélessége $= \beta$, tehát $EM = 90^0 - \beta$, geographikus hosszkülönbsége pedig az AE déllőtől számítva $= \lambda$. Ezen pontból az O felé menő sugár a síkot az m pontban fogja metszeni, s ha ezen pontot a síkon valamely összrendező rendszerre vonatkoztatjuk, kérdés: micsoda összefüggés van az M és m pontok összrendezői között? Legyen a síkon a az összrendezők kezdőpontja, aeX az x tengely, kelet felé pedig az y tengely positiv ága, $OC = d$, $Oa = d'$, $CM = r$, $EA = 90^0 - \varphi$, az amp $\triangle$ből lesz

$$x = ma \,.\, cos\alpha,$$

$$y = ma \,.\, sin\alpha.$$

Húzzunk most M-ből OC-re egy merőlegest MP, ez ma-val párhuzamos leend; mivel OC-re ez is merőleges; tehát az OmP és Oma hasonló háromszögekből lesz:

$$ma : MP = Oa : OP \ldots$$

Az OCM sík a gömb felületét az AM ívben metszi, mely az ACM szög mértéke. Nevezzük ezt γ-nak, az MAE szöget

α-nak, mely az *mae* szöggel egyenlő, mivel mind a kettő az *OAE* és *OAM* síkok hajlásszögét jelenti, akkor lesz:

$$MP = r \sin\gamma$$

$$OP = d - r \cos\gamma.$$

Ezeket fentebb helyettesítvén, lesz:

$$ma = \frac{d' r \sin\gamma}{d - r\cos\gamma}, \quad \text{és}$$

$$x = \frac{d' r \sin\gamma \cos\alpha}{d - r\cos\gamma}$$

$$y = \frac{d' r \sin\gamma \sin\alpha}{d - r\cos\gamma}.$$

Úgyde az *AEM* $\triangle$-ben az oldalak és szögek közt következő összefüggés van:

$$\sin\gamma \sin\alpha = \cos\beta \sin\lambda,$$

$$\sin\gamma \cos\alpha = \sin\beta \cos\varphi - \cos\beta \sin\varphi \cos\lambda,$$

$$\cos\gamma = \sin\beta \sin\varphi + \cos\beta \cos\varphi \cos\lambda.$$

Ezeket helyettesítvén, x és y ezekké lesznek:

$$x = \frac{d' r (\sin\beta \cos\varphi - \cos\beta \sin\varphi \cos\lambda)}{d - r(\sin\beta \sin\varphi + \cos\beta \cos\varphi \cos\lambda)}.$$

$$y = \frac{d' r \cos\beta \sin\lambda}{d - r(\sin\beta \sin\varphi + \cos\beta \cos\varphi \cos\lambda)}$$

428. §. A déllők és parallel-körök általános egyenletei.

A kifejtett egyenletek teljesen elegendők arra, hogy egyes pontokat a földabroszon be lehessen rajzolni, de azok egész földabroszok előállítására fáradtságos voltuk miatt nem alkalmasok; szükséges tehát ezen egyenletekből a földabroszon sohasem hiányozható déllő és parallelkör vonalak egyenleteit keresni, hogy ezen vonalakat azután, egyenleteik segélyével kényelmesen lehessen szerkeszteni.

1) A déllő vonalat úgy lehet tekinteni, mint olyan pontok sorozatát, melyeknek geographiai hosszuk egymással egyenlő. Tekintsük tehát az x és λ egyenleteiben λ-t állandónak, s küszöböljük ki belőlük β-át, mely az egyes pontokat egymástól elkülöníti, akkor egy egyenletet nyerünk x és y közt, mely minden ilynemű pontokhoz közösen tartozik, azaz: a déllő vonal egyenletét. Ezen kiküszöbölés következő módon eszközölhető: Oldjuk fel az x és y egyenleteit $\sin\beta$ és $\cos\beta$ után, azután ezeket

második hatványra emelvén, adjuk össze, akkor lesz a déllők egyenlete:

$$x^2 \sin\lambda^2 (d^2 - r^2 \sin\varphi^2) + 2xy \sin\lambda \cos\lambda \sin\varphi (d^2 - r^2)$$
$$+ y^2 (d^2 (\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2 \cos\lambda^2) - r^2 \cos\lambda^2) - 2d'r^2 x \sin\varphi \cos\varphi \sin\lambda^2$$
$$- 2d'r^2 y \cos\varphi \sin\lambda \cos\lambda = r^2 d'^2 \cos\varphi^2 \sin\lambda^2 .$$

2) A parallel köröket hasonlóképen úgy lehet nézni, mint olyan pontsorokat, melyeknek egyenlő szélességök van. Tekintsük tehát az x és y egyenleteiben β-t állandónak, s küszöböljük ki belőlük λ-át, mint a mely az egyes pontokat egymástól megkülömbözteti, akkor egy olyan egyenletet nyerünk x és y között, mely mindenik pontra, tehát az egész párkörre szolgál. A kiküszöbölés az előbbi útmutatás szerint történik, s a párkörök egyenlete lesz:

$$x^2 \{(d - r \sin\beta \sin\varphi)^2 - r^2 \cos\beta^2 \cos\varphi^2\} + y^2 (d\sin\varphi - r\sin\beta)^2$$
$$- 2d'rx \cos\varphi (d\sin\beta - r\sin\varphi) = d'^2 r^2 (\sin\varphi^2 - \sin\beta^2).$$

3) Ezen képleteket közvetlen lehet használni, ha a föld felületét úgy akarjuk lerajzolni, a mint az egy bizonyos magasságból látszik. Ha ezen elméletet az éggömb lerajzolására akarjuk alkalmazni, tekintetbe kell venni azon körülményt, hogy ha arczczal dél felé fordulunk, az éggömbön kelet a déllő bal oldalán van, ellenkezőleg mint a földgömbön; tehát keletet az égabroszon is balkéz felé kell felvennünk. Ennélfogva a fentebbi egyenletekben y helyett mindenütt $-y$, λ helyett $-\lambda$-t kell tennünk. Ezen változtatás azonban az egyenletekben semmi változást nem von maga után; a képletek mind az ég, mind a földabroszokra érvényesek.

4) Jelentse M az Eccliptika sarkpontját, melynek fekvése λ és β által adva van, akkor az alapegyenletekből α és γ-t ki lehet számítni, s ha most a déllők és parallelkörök egyenleteiben φ helyett $90 - \gamma$-t teszünk, ezek a hosszasági és szélességi körök egyenleteivé válnak egy olyan összrendező rendszerre vonatkoztatva, melynek kezdőpontja a, az x tengely positiv ága az am vonal irányába esik, s ez az előbbi x tengelylyel α szöget zár be.

5) Mind ezen egyenletek másodfokúak két összrendező közt, tehát a látszati vetületben mind a déllők, mind a parallel körök, az égabroszokon pedig még a hosszasági és szélességi körök és kúpszeletek által ábrázoltatnak. Legyen egy ilyen egyen-

letnek általános alakja

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey = F$$

akkor a vonal $\left\{\begin{array}{l}\text{Ellipsis}\\ \text{Parabola}\\ \text{Hyperbola}\end{array}\right\}$ lesz, ha $B^2 - AC \left\{\begin{array}{l} < o\\ = o\\ > o\end{array}\right\}$.

A középpontnak összrendezői lesznek:

$$\xi = -\frac{BE - CD}{B^2 - AC}, \quad \eta = \frac{AE - BD}{B^2 - AC},$$

a tengelyek hajlásszöge: $tgu = \dfrac{-(A-C) \mp \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2B}$

a féltengelyek hossza: $\left.\begin{array}{l}a\\ b\end{array}\right\} = \sqrt{\dfrac{2(F - D\xi - E\eta)}{A + C \mp \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}}$.

Ezen egyenletekben a felsőbb jelek együvé tartoznak, úgyszintén az alsóbbak is.

429. Orthographikus vetület. $d = d' = \infty$.

1) Gondoljuk a szempontját a gömb- és a síktól végtelen távba, azaz: tegyük $d = d = \infty$, akkor az ugynevezett orthographikus vetület áll elő. Ennél

A déllő egyenlete lesz:

$$x^2 \, sin\lambda^2 + 2xy \, sin\lambda \, cos\lambda \, sin\varphi + y^2 \, (cos\varphi^2 + sin\varphi^2 cos\lambda^2) = r^2 \, cos\varphi^2 \, sin\lambda^2.$$

Ezen vonal ellipsis, melynek elemei

$$\xi = o, \; \eta = o, \; tgu_1 = - sin\varphi \, tg\lambda, \; tgu_2 = \frac{1}{sin\varphi \, tg\lambda}, \; a = r, \; b = r cos\varphi \, sin\lambda.$$

A parallelkörök egyenlete lesz:

$$x^2 + y^2 \, sin\varphi^2 - 2rx \, cos\varphi \, sin\beta = r^2 \, (sin\varphi^2 - sin\beta^2).$$

Ez ismét egy ellipsishez tartozik, melynek elemei ezek:

$$\xi = r cos\varphi \, sin\beta, \; \eta = o, \; tgu_1 = \infty, \; tgu_2 = o, \; a = r cos\beta, \; b = r cos\beta \, sin\varphi.$$

2) Helyezzük az egyenlitőnek valamely pontját az A pontba, azaz: tegyük $\varphi = o$, akkor a vetületet egyenlitőinek — aequatorialisnak — mondjuk s ennek egyenletei lesznek:

a déllőre nézve: $x^2 \, sin\lambda^2 + y^2 = r^2 \, sin\lambda^2$,

elemei pedig: $\xi = o, \; \eta = o, \; tgu_1 = \infty, \; tgu_2 = o, \; a = r, \; b = r sin\lambda$,

a parallelkörökre nézve: $x = r sin\beta$.

Ez egy egyenes vonalat jelent, mely az x tengelyre merőlegesen áll.

3) Helyezzük ellenben a sarkpontot az A pontba, akkor a vetület sarkponti — polaris — nevet visel. Ennek egyenletei a délllőre nézve: $y = -xtg\lambda$, mely egy, az összrendezők kezdőpontján keresztül menő egyenest jelent.

A parallelkörökre nézve pedig: $x^2 + \varphi^2 = r^2 cos\beta^2$. Ez egy körhöz tartozik, melynek középpontja az összrendezők kezdőpontjában van, s melynek sugárhossza: $R = rcos\beta$.

4) Az orthographikus vetületet tehát főleg az jellemzi, hogy benne mind a déllők, mind a parallelkörök kerülékek, s azok csak kivételes esetekben lesznek egyenesek, vagy kör alakúak.

Az egyenlitői vetületet szerkesztés által igen egyszerű módon lehet előállítni, ha a körben két egymásra merőlegesen álló átmérőt húzunk AB, CD, ezután a körnegyedet kilencz egyenlő részre beosztván, az osztáspontokból a két átmérőre merőlegeseket húzunk; ezek az AB átmérőn a kerülékek csúcspontjait, a CD-én pedig azon pontokat fogják elmetszeni, melyeken a parallel vonalak mennek keresztül.

A sarkponti vetületnél a metszéspontok a parallelkörök pontjait szolgáltatják. A déllők pedig egymást ugyanazon szögek alatt metszik, mint a gömbön.

Az orthographikus vetület a középpontban a gömb alakját meglehetős híven ábrázolja, de a szélek felé mindinkább eltorzúl, ugy hogy a tér utoljára egy vonallá törpül. Legalkalmatosabb olyan vidékek ábrázolására, melyek, mint Afrika, az egyenlitőnek mindkét oldalán feküsznek, s mind az északi, mind a déli szélességek, valamint a közép déllőtől számitott keleti és nyugoti hosszkülömbségek is 30—40 fokot meg nem haladnak. Ezen esetben még az eltorzúlásnak nyomait alig lehet látni.

430. §. Stereographikus vetület. $d = d' = -r$.

1) Ha a szemet a gömb felületébe, átalellenben azon A ponttal, mely a vetület középpontjába esik, a síkot pedig a gömb középpontjába helyezzük, a stereographikus vetület áll elő. Ezen fekvésben kelet a déllőtől balkéz felé látszik, s a síkon is úgy ábrázolódik le, de minthogy a földabroszon keletet mindig a déllő jobb oldalán szoktuk rajzolni, szükség lesz az általános egyenletekben azon kivül, hogy a fentebbiek szerint $d = d = -r$ tétetik, még y helyett $-y$, és λ helyett $-\lambda$-t tenni.

Ekkor lesz a déllő egyenlete:

$$x^2 \cos\varphi + y^2 \cos\varphi + 2rx\sin\varphi + 2ry\,cotg\lambda = r^2 \cos\varphi.$$

Ez egy körhöz tartozik, melynek elemei következők:

$$\xi = -r\,tg\varphi,\ \eta = -\frac{r\,cotg\lambda}{\cos\varphi},\ R = \frac{r}{\sin\lambda\cos\varphi}.$$

A parallelkörök egyenlete lesz:

$$x^2(\sin\beta + \sin\varphi) + y^2(\sin\beta + \sin\varphi) - 2rx\cos\varphi = r^2(\sin\varphi - \sin\beta).$$

Ezen vonalak szintén körök, melyeknek elemei ezek:

$$\xi = \frac{r\cos\varphi}{\sin\beta + \sin\varphi},\ \eta = o,\ R = \frac{r\cos\beta}{\sin\beta + \sin\varphi}.$$

2) Ha a déllő és parallelkörök középpontjainak összrendezői külömbségeit négyzetre emeljük és összeadjuk, úgyszintén a radiusokat is négyzetre emeljük és összeadjuk, teljesen azonos eredményre jövünk. Ebből az következik, hogy a nevezett középpontokat összekötő vonal, s a radiusok derékszögű háromszöget képeznek egymással, ennélfogva a stereographikus vetületben a déllők és parallelkörök is egymást mindenütt derékszög alatt metszik.

3) Az egyenlítői vetületnél $\varphi = o$-nak kell tenni, s ekkor a déllők egyenlete lesz:

$$x^2 + y^2 + 2ry\,cotg\lambda = r^2,$$

s ennek elemei lesznek $\xi = o,\ \eta = -r\,cotg\lambda,\ R = \frac{r}{\sin\lambda}.$

A parallelkörök egyenlete pedig lesz:

$$x^2\sin\beta + y^2\sin\beta - 2rx = -r^2\sin\beta,$$

s ennek elemei lesznek $\xi = \frac{r}{\sin\beta},\ \eta = o,\ R = r\,cotg\beta.$

Alakja ezen vetületnek a 391. ábrában látható.

4) A sarkponti vetület esetében $\varphi = 90^0$-nak kell venni, s ekkor a déllő egyenlete lesz: $y = -x\,tg\lambda$, hol $tgu = -tg\lambda$, a parallelkörökre nézve pedig lesz $x^2 + y^2 = r^2\frac{1-\sin\beta}{1+\sin\beta}$, hol

$\xi = o,\ \eta = o,\ R = r\,tg\left(45 - \frac{\beta}{2}\right)$ (392. ábra).

5) Ezen két egyszerűbb esetet szerkesztés által is könnyen lehet rajzolni, ha a kör körületét két egymásra merőleges átmérővel négy negyedre osztjuk, ezeket kilencz egyenlő részre osztván, az osztáspontokból a vizszintes és függélyes átmérők

végpontjaira egyeneseket húzunk, ezek az átmérőket a déllők és parallelkörök csúcspontjaiban fogják metszeni.

6) A stereographikus vetületet főképen az jellemzi, hogy abban mind a déllők, mind a parallelkörök köralakúak, csak kivételes esetekben válnak a déllők egyenes vonalakká. Ezen vetületben a méretek a földabrosz szélein (90^0 távolságra a középponttól) egyenlők a gömb megfelelő méreteivel, a középpontban pedig fél akkorák. Be lehet bizonyítni, hogy a stereographiai vetületben a térelem a gömb és a földabrosz közt mindenütt hasonló, s ennek következése az is, hogy a földabroszon minden déllők és parallelkörök derékszög alatt metszik egymást, épen úgy mint a gömbön.

Ezen vetület félgömbök lerajzolására leggyakrabban használtatik minden vetületek közt, mivel a viszonyokat meglehetős híven ábrázolja, csak azt kell megjegyezni, hogy a lépték a középponttól a szélek felé folytonosan nagyobbodik, mint a déllőkön és parallelkörökön az egymás által elmetszett darabok világosan mutatják.

431. §. Középponti vetület.

1) Gondoljuk a szemet a gömb középpontjában, a síkot pedig a gömbbel érintkezésben, akkor a középponti vetület áll elő. Ezen esetben tehát $d = o$, $d' = - r$-nek kell tenni, s a helyettesités által a déllők általános egyenlete ezzé lesz:

$$x \sin\lambda \sin\varphi + y \cos\lambda = r \cos\varphi \sin\lambda.$$

Ez egyenes vonalhoz tartozik. A déllők tehát mind egyenes vonalak alakjában látszodnak, melyek a sarkpontban metszik egymást, s az x tengelylyel olyan szöget zárnak be, melynek egyenlete:

$$tgu = - \sin\varphi\, tg\lambda.$$

A sarkpontnak távja az összrendezők kezdőpontjától ezen feltételből határozható meg: $y = o$; tehát $x = r \cot g\varphi$.

2) A parallelkörök egyenlete lesz:

$$x^2 (\sin\beta^2 - \cos\varphi^2) + y^2 \sin\beta^2 - 2r\, x \sin\varphi \cos\varphi = r^2 (\sin\varphi^2 - \sin\beta^2).$$

Ezen vonalak, mig $\beta > 90 - \varphi$, ellipsist, ha $\beta = 90 - \varphi$, parabolát, s ha $\beta < 90 - \varphi$, hyperbolát ábrázolnak. Ezen vonalak tehát a középponti földabroszon mindnyájan előfordulnak.

Elemeik ezek:

$$\xi = \frac{r \sin\varphi \cos\varphi}{\sin\beta^2 - \cos\varphi^2},\ \eta = o,\ a = \frac{r \cos\beta \sin\beta}{\sin\beta^2 - \cos\varphi^2},\ b = \frac{r \cos\beta}{\sqrt{\sin\beta^2 - \cos\varphi^2}},$$

$$tgu_1 = o,\ tgu_2 = \infty.$$

A parabola egyenlete lesz:

$$y^2 \cos\varphi^2 - 2rx \sin\varphi \cos\varphi = r^2(\sin\varphi^2 - \cos\varphi^2).$$

Ennek csúcspontja összrendezői lesznek:

$\xi = -\cot g\, 2\varphi,\ \eta = o,$ és a parameter $= 2rtg\varphi$.

3) Ha β-t $= o$-vá tesszük, az egyenlitő egyenlete áll elő, u. m.: $x \cos\varphi + r \sin\varphi = o.$

Az egyenlitő tehát egy az x tengelyre merőlegesen álló egyenes vonal alakjában látszik a földabroszon.

A középponti vetület csak a középen ád jó összeegyezést a gömb és az abrosz közt, a széleken a méretek mindinkább nagyítva mutatkoznak.

b) *Lefejtési vetületek.*

432. §. Kúpvetületek.

1) Gondoljunk egy globust, s e felett egy forgási kúpot tetszés szerinti fekvésben helyezve úgy, hogy azoknak tengelyei egymással összeessenek (393. ábra.) Legyen M egy pontja a gömbnek, melyet a lerajzolandó tartomány közepében fekve gondolunk, ennek megfelelő pont M' a kúp felületén. Az M pont fekvése a maga déllőjén, mely a földabroszon a közép déllőt fogja szolgáltatni, a geographikus szélesség φ által meg van határozva. Számláljuk ezen ponttól minden más pontnak N hosszasági külömbségét λ keletre $+$, nyugotra $-$ jellel, úgyszintén a déllőn a szélességi külömbségeket δ északra $+$, délre $-$ jellel. Hasonlóképen válasszuk a kúp felületén a sarkösszrendezők rendszerét úgy, hogy a sarkpont a kúp csúcsába essék, s a tengely az M' ponton menjen keresztül; minden más pontnak N' fekvése a kúp felületén annak radius-vectora ϱ, és sarkszöge u által teljesen meg van határozva. A kúp felületét egy síkba ki lehet terjeszteni, ennélfogva a kúpvetületek eszméje szerint készített földabroszok minden gyakorlati céloknak is meg fognak felelni.

2) Általánosan véve ϱ és u a δ és λ-nak valamely függvényei lesznek. Ha ezeket tetszés szerint választanók, olyan

vetületet nyernénk, mely a gömb felületén lévő alakokhoz talán épen nem is hasonlítana. Szükséges lesz tehát a függvényeket úgy választani, hogy azok bizonyos mértani tulajdonságoknak feleljenek meg, melyeket a vetületben kivánatosoknak tartunk. Ilyen tulajdonságok p. o., hogy a parallelkörök a földabroszon körök, a déllők pedig egyenes vonalak által ábrázoltassanak, mert ezek a földabroszok szerkezetét igen könnyítik.

Az első tulajdonság csak akkor állhat meg, ha ϱ csupán δ-tól függ, λ-tól pedig független; a másodiknak megfordítva csak akkor fog a vetület megfelelni, ha u csak λ függvénye, δ-tól pedig független. Ezen tulajdonságokat tekintetbe vévén, a függvényeket ezen általános alakban lehet felvenni:

$$\varrho = F(\delta), \quad u = f(\lambda).$$

Minden függvények közt legegyszerűbb a vonalas, vegyük tehát ezt alapúl, s legyen

$$\varrho = A + B\delta, \text{ és } u = C\lambda,$$

hol A, B, C mind δ, mind λ-tól független mennyiségeket jelentenek. Az A jelentése könnyen felkereshető; ha t. i. $\delta = o$-nak tesszük, lesz $\varrho = A$. Ez tehát az M' pontnak megfelelő, vagyis közép radius-vectort jelenti; $B\delta$ pedig a közép radius-vectornak változását fejezi ki, ha a szélesség δ-val változik. Válasszuk most B-t úgy, hogy a déllőnek két parallelkör által elmetszett darabja mind a gömbön, mind a kúpon egyenlő legyen egymással, azaz: a déllők a gömbről lefejtve tétessenek át a kúp felületére: akkor a gömbön az ív hossza $= r\delta$, a kúpon pedig a megfelelő radius-vectorok külömbsége $= A - (A + B\delta) = - B\delta$, tehát $B = - r$. Helyettesítsük ezen értéket a fentebbi egyenletbe, akkor lesz:

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= A - r\delta \\ u &= C\lambda \end{aligned}\right\}.$$

Ezen egyenletek, melyek általában minden kúpvetületre nézve egyaránt érvényesek, azon mértani tulajdonságokat fejezik ki, hogy a déllők a földabroszon egyenes vonalak által ábrázoltatnak, s azoknak hosszai a gömb megfelelő déllő íveivel teljesen egyenlők; a parallelkörök pedig a kúp csúcspontjából leirt központos körök alakjában mutatkoznak, s a megfelelő parallelkörök ívhosszai a gömb és kúp felületén állandó viszonyban állanak egymáshoz.

3) Ezen tulajdonságoknak következő mértani szerkezet felel meg. Fektessünk a gömb tengelyén keresztül egy λ hosszasági külömbségnek megfelelő síkot, ez a gömböt egy déllő körben, a kúpfelületet pedig egy nemző vonalban fogja metszeni, s ha a kúpfelület egy síkba kiterpesztetik, ezen nemző vonal a megfelelő déllőt fogja ábrázolni. Fektessünk továbbá az M ponton keresztül egy síkot a gömb tengelyére merőlegesen, ez a gömbfelületet egy parallelkörben metszi, hasonlóképen fektessünk az M' ponton keresztül a kúp tengelyére merőleges síkot, ez a kúpfelületet egy körben fogja metszeni, s ha a kúpfelületet egy síkba kiterpesztjük, ezen kör egy, a kúp csúcsából húzott körív darabot fog adni, s ez lesz a megfelelő parallelkör a földabroszon. Mind a két vonalrendszer tehát a megfelelő felületeken hasonló módon, noha nem mindenben azonos síkok által állíttatik elő.

433. §. Bonné egyszerű vetülete.

Az előbbi §-ban kifejtett képletek szerint a kúpvetületnek egyenletei ezek:

$$\varrho = A - r\delta,$$
$$n = C\lambda,$$

hol még A és C helyett tetszés szerint választott mennyiségeket lehet tenni. Határozzuk meg ezeket azon feltételből, hogy a kúp a gömböt a közép parallelkörben érintse. Ekkor a közép parallelkör sugára egyenlő lesz az M pontban a gömbhöz húzott érintőnek a tengelyig érő darabjával, azaz:

$$A = r\,cotg\varphi.$$

Továbbá a közép parallelkör egy ívdarabjának hossza a gömbön $= rcos\varphi.\,\lambda$,

a kúpon pedig a megfelelő ív hossza lesz $= Au = rcotg\varphi\; C\lambda$;

tehát $rcos\varphi\,.\,\lambda = r\,.\,cotg\varphi.\; C\,.\,\lambda,$

honnan következik $C = sin\varphi.$

Ezeket az általános egyenletekbe helyettesítvén, lesz:

$$\left.\begin{array}{l} \varrho = r\,\{cotg\varphi - \delta\} \\ u = \lambda\,sin\varphi \end{array}\right\}$$

Ezen vetület, melyet Bonné egyszerű vetületének neveznek, olyan tartományok lerajzolására különösen alkalmatos, melyek északról dél felé csekély, csak nehány fokra menő kiterjedéssel birnak, mert a kúp az érintkezési vonal mellett a gömbfelülethez igen jól simul, s a méretek is minden irányban jól egyeznek a gömb és kúp között. Szorosan véve azonban a parallelkörök a földabroszon egyen kivül mindig hosszabbak mint a gömbön, s az eltérés a szélességi külömbséggel fokozva növekedik, úgy hogy ezen vetületben a sarkpont, mely a gömbön csak egy pont, a földabroszon már egy egész vonal hosszával ábrázoltatik. Tegyük t. i. $\delta = 90 - \varphi$, akkor egy λ-nak megfelelő ív hossza lesz:

$$\varrho u = r\left(cotg\varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right) sin\varphi \,.\, \lambda = r\left(cos\varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) sin\varphi\right) \lambda \,.\,.$$

Ezért ezen vetületet olyan országok lerajzolására alkalmazni nem lehet, melyek a sarkpont közelében esnek, s a földabroszon a sarkpontnak is meg kell jelenni.

434. §. Sarkvidéki vetület.

Ha a földabroszra a sarkpont is ráesik, vagyis: a sarkponthoz közel eső tartományok lerajzolására jobb az A-t úgy határozni meg, hogy az a gömbnek a közép parallelkör és a sarkpont közt eső délllő íve hosszával egyenlő legyen. E szerint

$$A = r\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

Kössük össze ezen tulajdonságot azon feltétellel, hogy a közép parallelkör ívhossza a gömb és a földabrosz közt egyenlő legyen, vagyis: a kúp a gömböt a közép parallelkörben messe, akkor lesz:

$$r\, cos\varphi \,.\, \lambda = Au = r\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) C \,.\, \lambda.$$

Ebből lesz:
$$C = \frac{cos\varphi}{\frac{\pi}{2} - \varphi}.$$

A vetület egyenletei tehát ezek lesznek:

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= r\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \delta\right) \\ u &= \frac{cos\varphi}{\frac{\pi}{2} - \varphi}\lambda. \end{aligned}\right\}$$

435. §. De l'Isle vetülete.

De l'Isle franczia csillagász az A és C mennyiségeket úgy határozta meg, hogy a gömbön és a földabroszon két parallelkör legyen teljesen egyező. Nevezzük azon szélességi külömbségeket, melyekben azon parallelkörök feküsznek, δ' és $-\delta'$, melyeket czélszerűen úgy választunk, hogy azok az egész földabrosz magasságát három egyenlő részre osszák, akkor lesz:

$$r\cos(\varphi + \delta')\,\lambda = (A - r\delta')\,C\lambda$$
$$r\cos(\varphi = \delta')\,\lambda = (A + r\delta')\,C\lambda.$$

Ezekből összeadás és kivonás által lesz:

$$AC = r\cos\varphi\,\cos\delta' \qquad\qquad A = r\,\mathrm{cotg}\varphi\,\frac{\delta'}{\mathrm{tg}\delta'}$$
$$\text{vagy}$$
$$\delta' C = \sin\varphi\,\sin\delta', \qquad\qquad C = \sin\varphi\,\frac{\sin\delta'}{\delta'}$$

Ezen eredményeket az általános képletekben helyettesítvén, a de l'Isle vetület képletei lesznek:

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= r\left(\mathrm{cotg}\varphi\,\frac{\delta'}{\mathrm{tg}\delta'} - \delta\right) \\ u &= \lambda\,\sin\varphi\,\frac{\sin\delta'}{\delta'} \end{aligned}\right\}.$$

Ha a tartomány kiterjedése északról dél felé csekély, tehát δ' csak kis mennyiség, akkor az ívet a sinussal és tangenssel fel lehet cserélni, s a de l'Isle-féle vetület a Bonné-félével összeesik. Ezen vetület különösen olyan tartományoknál alkalmazható, melyeknek kiterjedése északról dél felé tetemes, s a vetület pontosságára nézve megemlitendő, hogy a lefejtett két parallelkör között a méretek kelleténél kisebb, azokon kivül pedig kelleténél nagyobb eredményt adnak; a sarkpontra nézve pedig a Bonné-féle vetületnél mondottak itt is alkalmazhatók.

436. §. Bonné javított vetülete.

1) Az előbbi vetületeknél a délllőket fejtettük le a gömbről, s tettük át a földabroszra, a parallelkörök közül pedig csak egyet, vagy legfeljebb kettőt lehetett a gömb és a földabroszon egészen összeegyeztetni. Most a dolgot megfordítván, fejtsük le a parallelköröket a gömbről, s tegyük át a földabroszra. A kiindulási egyenletek legyenek ismét

$$\varrho = A - r\delta$$
$$u = C\lambda.$$

A δ szélességkülömbségnek megfelelő parallelkör egyenlőségét a gömb és földabrosz közt, a fentebbi kifejtések nyomán, ezen képlet fejezi ki:

$$r\cos(\varphi + \delta)\lambda = (A - r\delta)C\lambda,$$

vagy rövidítve: $C(A - r\delta) = r\cos(\varphi + \delta)$.

Adjuk ezen feltételhez még azt, hogy a középső parallelkör sugárhossza egyenlő legyen az M pontban húzható érintővel, mint az egyszerű Bonné-féle vetületnél, azaz:

$$A = r\,cotg\varphi,$$

akkor lesz: $$C = \frac{\cos(\varphi + \delta)}{cotg\varphi - \delta}$$

s a vetület, mely Bonné javított vetületének neveztetik, következő egyenletek által lesz kifejezve:

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= r(cotg\varphi - \delta) \\ u &= \frac{\lambda\cos(\varphi + \delta)}{cotg\varphi - \delta} \end{aligned}\right\}.$$

Ezen vetületben u már mind λ, mind δ függvénye, tehát a délllők nem egyenes vonalak, kivévén a középső déllőt, s csakis ez van lefejtve a gömbről, a többieknek hossza a gömb megfelelő ívétől külömbözik.

2) Azon feltételből, hogy a parallelkörök mindnyáján le vannak fejtve a közép déllővel egyetemben, azon mértani tulajdonság következik, hogy a földabrosz területe a gömb megfelelő felületével egyenlő. Mert ha mind a gömbön, mind a földabroszon két végtelen közel fekvő parallelkör és déllő ív között befoglalt térelemet szemügyre veszünk, ezek trapeziumokat képeznek, melyeknek alapjai és magasságai megfelelőleg egyenlők, tehát területeik is egyenlők. Ezen téregyenlőség azután a térelemek összegéről is érvényes.

3) Már említettük, hogy a déllők görbe vonalak által ábrázoltatnak, minthogy u külömböző szélességekben külömböző értékű. Ennek legnagyobb értékét megnyerjük, ha $\frac{du}{d\delta} = o$ teszszük. Ekkor lesz:

$$cotg(\varphi + \delta) = cotg\varphi - \delta,$$

melyből következik: $\delta = o$. A radius-vector tehát a déllőket a középső parallelkörön érinti, s minthogy a radius-vector a parallelkörre merőlegesen áll, a közép parallelkört a délllők is derékszög alatt metszik.

Ezen vetület különösen olyan területek lerajzolására alkalmatos, melyeknek minden irányban igen nagy kiterjedésök van. Ázsia csaknem kivétel nélkül ezen vetület szerint ábrázoltatik.

437. §. Sarkvidéki módosulat.

A közép parallelkör sugárhosszát úgy is lehet meghatározni, hogy az a középső délllőnek az M és a sarkpont közt eső ívhosszával egyenlő legyen, azaz:

$$A = r\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

Ez a parallelkörök lefejtéséből eredő egyenlettel kapcsolatban, következő képleteket adja:

$$\varrho = r\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \delta\right) = r\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right),$$

$$u = \lambda \frac{\cos(\varphi + \delta)}{\frac{\pi}{2} - \varphi - \delta} = \frac{\lambda \cos\beta}{\frac{\pi}{2} - \beta},$$

hol β a geographikus szélességet jelenti. Ezen vetület különösen sarkkörüli nagy kiterjedésű tartományok ábrázolására alkalmatos.

438. §. Flamstead vetülete.

Flamstead vetülete nem más, mint a Bonné-féle javított vetületnek aequatorialis módositványa. Tegyük a 437. §-ban $\varphi = o$, akkor a Bonné-féle egyenletek ezekké válnak:

$$\varrho = \infty$$

$$u = o.$$

Ezek a vetület alakjáról csak annyit mondanak, hogy a parallelkörök sugárai végtelenek, vagyis a parallelkörök egyenes vonalakká válnak, a radius-vectorok közt bezárt szögek pedig $= o$. Ezekből világos képet a vetületről alkotnunk nem lehet; de ha derék összrendezőkre átmegyünk, minden homályosság eloszlik. E végre válasszuk a Bonné javított vetületében az M' pontot a derék összrendezők kezdőpontjának, fektessük az x positiv ágát észak, az y-ét pedig kelet felé, akkor lesz:

$$x = A - \varrho \cos u$$

$$y = \varrho \sin u.$$

Helyettesítsük ebben a 437. §.-ból ϱ és u értékeit, lesznek

$$x = r\,cotg\varphi - r\,cotg\varphi\,cos\left(\lambda\frac{cos(\varphi+\delta)}{cotg\varphi-\delta}\right) + r\delta\,cos\left(\lambda\frac{cos(\varphi+\delta)}{cotg\varphi-\delta}\right)$$

$$y = r(cotg\varphi-\delta)\,sin\left(\lambda\frac{cos(\varphi+\delta)}{cotg\varphi-\delta}\right).$$

Ha most φ . . o-hoz közeledik, akkor $cos\left(\lambda\frac{cos(\varphi+\delta)}{cotg\varphi-\delta}\right)$ az 1-hez, $sin\left(\lambda\frac{cos(\varphi+\delta)}{cotg\varphi-\delta}\right)$ pedig az ívhez közeledik. Tehát $\varphi = o$ helyettesitésénél egész szigorral lesz:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\delta \\ y &= r\lambda\,cos\delta \end{aligned}\right\}.$$

Ezen vetület mindazon sajátságokkal bír, melyeket a Bonné javított vetületében előadtunk, azon külömbséggel, hogy abban a parallelkörök a középső déllőre merőlegesen álló egyenesek által ábrázoltatnak.

Ezen vetület meglehetős hű képet ád, s kivált az egyenlitőtől mindkét oldalt fekvő vidékek rajzolására alkalmatos; de a sarkpontok felé az eltorzulás már észrevehető, mert a gömb felét ábrázoló kép a sarkpontoknál kúp alakú csúcsokat mutat. Fejtsük ki t. i. a $\frac{dy}{dx}$ képletét, mely a déllőnek háromszögtani érintőjét jelenti, lesz:

$$\frac{dy}{dx} = -\lambda\,sin\delta,$$

s ha ebben $\delta = \frac{\pi}{2}$, $\lambda = \frac{\pi}{2}$ helyettesíttetnek, a sarkpontban a legszélső déllő hajlásszögének tangense lesz $= \frac{\pi}{2}$, melynek 57—36′ felel meg, 90° helyett, mint az a gömbön létezik.

Afrikát ezen vetület szerint igen czélszerű ábrázolni.

c) *Hasonlósági vetületek.*

439. §.

1) Keressük egy olyan vetületnek egyenleteit, melyen a gömbnek térelemei hasonló alakokban ábrázoltatnak, azon feltétel mellett, hogy a déllők egyenes vonalak, a parallelkörök pedig körök

legyenek. Induljunk ki a 432. §. általános egyenleteiből

$$\varrho = F(\beta),$$
$$u = C\varrho,$$

melyek a feltételeknek teljesen megfelelnek. Legyen NP egy déllő, NQ pedig egy parallelkör íveleme a gömbön, $N'P'$, $N'Q'$ ugyanazok a földabroszon, akkor a feltétel szerint ezen aránynak kell állani:

$$NP : NQ = N'P' : N'Q'.$$

úgyde $NP = rd\beta$, $NQ = r\cos\beta d\lambda$, $N'P' = -d\varrho$, $N'Q' = \varrho du$. Ezen mennyiségeket helyettesítvén, lesz:

$$rd\beta : r\cos\beta d\lambda = -d\varrho : \varrho du.$$

A feltételek szerint C állandó mennyiség, tehát

$$du = Cd\lambda.$$

Ezt helyettesítvén, az arányból némű rövidítés után ezen egyenlet áll elő:

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = -C\frac{d\beta}{\cos\beta}.$$

Ezt egészelvén, lesz:

$$l \,.\, \varrho = Cl\left\{Ktg\left(45 - \frac{\beta}{2}\right)\right\}$$

vagy
$$\varrho = Ktg\left(45 - \frac{\beta}{2}\right)^C,$$

hol K az egészelés állandóját jelenti.

Ezen egyenletben még C és K egészen tetszés szerint választható állandókat jelentenek. Határozzuk meg tehát ezeket úgy, hogy a középső parallelkör sugára az M pont érintőjével, s ezen parallelkör a gömbről lefejtett ívvel egyenlő legyen, akkor lesz:

$$r\cot g\,\varphi = Ktg\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$r\cos\varphi\,\lambda = r\cot g\,\varphi \,.\, C\lambda.$$

Ezekből azután következnek

$$C = \sin\varphi$$
$$K = \frac{r\cot g\varphi}{\left[tg\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)\right]^{\sin\varphi}}$$

s az egyenletek lesznek:

$$\varrho = r\,cotg\varphi \left[\frac{tg\left(45-\frac{\beta}{2}\right)}{tg\left(45-\frac{\varphi}{2}\right)}\right]^{sin\varphi}$$

$$u = \lambda\, sin\varphi$$

2) Az állandókat ugy is lehet meghatározni, hogy a közép parallelkör sugara a lefejtett déllő ív hosszával egyenlő legyen, akkor lesz:

$$r\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = K\, tg\left(45-\frac{\varphi}{2}\right).$$

A második feltétel, mely szerint a középső parallelkör a gömbről le van fejtve, ezen képlet által fejeztetik ki:

$$r cos\varphi \,.\, \lambda = r\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) C\lambda.$$

Ezen két egyenletből a C és K meghatároztatván, lesznek:

$$C = \frac{cos\varphi}{\frac{\pi}{2}-\varphi}$$

$$K = \frac{r\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{\left[tg\left(45-\frac{\varphi}{2}\right)\right]^{\frac{cos\varphi}{{}^1/_2\pi-\varphi}}}.$$

Tehát a vetület egyenletei ezek:

$$\varrho = r\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\left[\frac{tg\left(45-\frac{\beta}{2}\right)}{tg\left(40-\frac{\beta}{2}\right)}\right]^{\frac{cos\varphi}{{}^1/_2\pi-\varphi}}$$

$$u = \lambda\frac{cos\varphi}{\frac{\pi}{2}-\varphi}.$$

440. §. Merkator vetülete.

Merkator vetülete, vagy az úgynevezett tengeri abroszok vetülete nem más, mint a 439. §-nak egyenlitői módositványa. Tegyük abban $\varphi = o$-nak, akkor lesz: $\varrho = \infty$, és $u = o$, mely egyenletek a vetület tulajdonságait még homályban hagyják. Menjünk át tehát derék összrendezőkre, a vetület M' pontját vévén az összrendezők kezdőpontjául, s az x tengelyt észak felé, az y-t pedig kelet felé vévén állító értelemben, akkor lesz:

$$x = A - \varrho \, cos u$$
$$y = \varrho \, sin u.$$

Helyettesítsük ezekben a 439. §-ból az A, ϱ és u értékeit, akkor lesznek:

$$x = r cotg \varphi - r \, cotg \varphi \left[\frac{tg\left(45 - \frac{\beta}{2}\right)}{tg\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}\right]^{sin\varphi} \times cos(\lambda \, sin\varphi)$$

$$y = r cotg \varphi \left[\frac{tg\left(45 - \frac{\beta}{2}\right)}{tg\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}\right]^{sin\varphi} \times sin(\lambda \, sin\varphi).$$

Ha most φ . . o-hoz mindinkább közeledik, akkor az exponentialis függvényt sorba kifejtvén, lesz:

$$\left[\frac{tg\left(45 - \frac{\beta}{2}\right)}{tg\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}\right]^{sin\varphi} = 1 + sin\varphi \, . \, lognat \, . \, tg\left(45 - \frac{\beta}{2}\right) + \ldots$$

$$cos(\lambda sin\varphi) = 1 - \frac{\lambda^2 sin\varphi^2}{2} + \ldots$$

$$sin(\lambda sin\varphi) = \lambda sin\varphi - \ldots$$

Ezeket helyettesítvén, némű röviditès után lesz:

$$x = -\frac{r cos\varphi}{M} \, log tg\left(45 - \frac{\beta}{2}\right) - \ldots$$

$$y = r\lambda cos\varphi \left(1 + \frac{sin\varphi log tg\left(45 - \frac{\beta}{2}\right)}{M} + \ldots .\right)$$

hol log a Brigg-féle logarokat, M pedig annak modulusát jelenti. Ha most ezen kifejezésekben $\varphi = o$ vesszük, a Merkator-féle egyenletek állanak elő, u. m.

$$x = -\frac{r \, log \, tg\left(45 - \frac{\beta}{2}\right)}{M}$$

$$y = r\lambda$$

Ha $\beta = 90^0$, akkor $x = \infty$, azaz: a sarkpont az egyenlitőtől végtelen távra esik, ezért ezt az abroszon lerajzolni nem lehet.

Ezen vetületben tehát épen úgy, mint a 439. §. alattiban, a térelemek a gömb és földabrosz között mindenütt hasonlók, s az egyenlitő, mely itt a közép parallelkört szolgáltatja, le van fejtve a gömbről, és át van téve az abroszra. A déllők, valamint a parallelkörök ezen vetületben párhuzamos egyenes vonalak által ábrázoltatnak, melyek egymást derékszögek alatt metszik. A scala azonban külömböző szélességekben külömböző. Legnevezetesebb sajátsága ezen vetületnek abban áll, hogy rajta a Loxodrom vonalak, melyek minden déllőket állandó szög alatt metszenek, s melyekben a hajók eveznek, egyenes vonalakat képeznek. Ez az oka, hogy ezen vetület tengeri abroszokra kivétel nélkül használtatik, mert a hajók útját igen egyszerű szerkesztés által lehet az abroszon felrajzolni.

Ezen vetület szerint az egész gömb felületét egy lapon lehet előállítni, s e czélra általánosan is használtatik.

441. §. A földabrosz méretei. — Formatum.

1) Minden eddig kifejtett képletekben egy mennyiség határozatlan hagyatott, s ez a gömb sugára r. Ezt az abrosz nagyságából kell meghatározni. Legyen a földabrosznak magassága $= m$, a tartomány legészakibb és legdélibb pontjának szélessége φ', φ'', a megfelelő parallelkörök sugárai ϱ', ϱ'', illetőleg a megfelelő metszékek x', x'', akkor egész általánosságban lesz:

$$m = \varrho'' - \varrho' = x' - x'';$$

helyettesítsük ebben a ϱ', ϱ'', illetőleg x', x'' értékeit, a mint azok a vetületek egyenleteiből folynak, akkor egy ilyen egyenlet fog előállani:

$$m = r\Phi,$$

hol Φ a szélső geographiai szélességek függvénye leend, s teljesen meghatározott mennyiség. Ezen egyenletből tehát r, mely a jobb oldalon tényezőképen jön elő, meghatároztatván, lesz:

$$r = \frac{m}{\Phi}.$$

2) Legyen p. o. Magyarország földabrosza készitendő a Bonné-féle egyszerű vetület szerint, legyen a földabrosz magas-

sága 40 cm., az ország pedig fekszik az északi szélesség 44. és 50-ik foka közt. Ekkor $\varphi' = 50^0$, $\varphi'' = 44^0$, $\varphi = \frac{\varphi' + \varphi''}{2} = 47^0$ δ a legészakibb pontra nézve $= 3^0$, a legdélibbre nézve $= -3^0$, tehát $\varrho' = r(cotg\, 47^0 - arc\, 3^0)$, $\varrho'' = r(cotg\, 47^0 + arc\, 3^0)$, ezekből lesz $\varrho'' - \varrho' = 2r\,.\, arc\, 3^0 = 40$ cm., tehát

$$r = \frac{40 \text{ cm.}}{2\, arc\, 3^0} = \frac{20 \text{ cm.}}{0{\cdot}05236} = 382{\cdot}0 \text{ cm.}$$

3) Ha a parallelkörök sugárai a rudas körzők legnagyobb hosszát, mely körülbelől 1^0, meg nem haladják, azokat körzővel lehet kihúzni, ellenkező esetben a körnek nehány pontját ki kell számítni, s a görbe vonalat a pontokon keresztül kell húzni. Derék összrendezők kezdőpontjául azon pontot lehet venni, melyben a parallelkör a középdéllőt metszi, s ha az x-eket a parallelkör érintője irányában vesszük, a rendezők képlete a 125. §. szerint, mely ezen esetre is alkalmazható, lesz:

$$y = \frac{1}{2}\frac{x}{\varrho} + \frac{1}{8}\frac{x''}{\varrho^3}.$$

4) Ha a déllők egyenesek, akkor azoknak rajzolására legczélszerűbb azon darabokat kiszámítni, melyeket a déllők a földabrosz négyszegű keretjén elmetszenek. Nevezzük ezeket az északi oldalon z', a délin z''-nek, akkor lesz:

$$z' = \varrho' tg\, u, \quad z'' = \varrho'' tg\, u.$$

Ha pedig a déllők görbe vonalak, mint p. o. a Bonné javított vetületénél, akkor ki kell számítni azon húrok hosszát, melyet a déllő a parallelkörökön elmetsz, s ezen pontokon keresztül egy folytonos görbe vonalat kell kihúzni.

5) Kerülékeket legczélszerűbb lesz 2, 3, 4 ívből szerkeszteni. Az ívek végpontjainak összrendezőit a tengelyekre vonatkoztatva ezen képletek szolgáltatják:

$$x = \frac{2an}{1+n^2}, \quad y = b\,\frac{1-n^2}{1+n^2},$$

hol n a negyedben lévő ívek számát jelenti.

6) A munkát szerkesztés által tetemesen lehet könnyítni, így p. o. ha valamely vetület azon tulajdonsággal bir, hogy a déllők le vannak fejtve a gömbről, akkor a földabrosz magasságát annyi egyenlő részre kell osztani, a mennyi a rámenő fokok, vagy ha nem minden foknak megfelelő parallelkört kellene

rajzolni, a térkép magasságára eső osztályrészek száma. Hasonlóképen, ha a parallelkörök le vannak fejtve a gömbről, akkor elég csak p. o. a hatodik déllő metszési pontjait számítni a parallelkörökön, a többieket egyenlő részekre való beosztás által lehet megnyerni.

442. §. Általános vetületek.

A stereographikus, a Flamstead- és a Merkator-féle vetületeken kivül, melyek félgömbök, sőt több mint félgömbök lerajzolására is alkalmasok, még következő szerkezetek vannak használatban:

1) Húzzunk a félgömböt ábrázoló körben két egymásra merőleges átmérőt, osszuk be ezeknek sugárait 9 egyenlő részre, s húzzuk a parallelköröket az egyenlítővel párhuzamosan mint a Flamstead-féle vetületnél, a déllőket pedig kerülék vonalakkal, melyek a sark- és a sugár osztáspontjain mennek keresztül; ezen kerülékek a parallelkörökön egyenlő darabokat fognak elmetszeni egymás közt. Ezen vetület szerint minden két déllő közt bezárt tér egyenlő a gömb megfelelő felületével.

2) Húzzunk a körben ismét 2 egymásra merőleges átmérőt, osszuk be a környegyedeket, valamint a sugárokat is 9 egyenlő részekre. Most húzzunk a sarkpontokon és az egyenlítő osztály pontjain keresztül köríveket, melyeknek középpontjai mind az egyenlitőben fognak feküdni, úgyszintén a környegyedek és a közép déllő megfelelő osztálypontjain keresztül szintén köröket, melyeknek középpontjai a közép déllőben fognak esni. Az így előálló vetületnek azon tulajdonsága van, hogy a középpontból a vetületnek akármely pontjába húzható sarkösszrendezők (radiusvector, sarkszög) a gömb megfelelő részeivel egyenlők. Ugyanezen elv szerint sarkponti szerkezetet is lehet készítni.

443. §. A részletek berajzolása.

Ha a földabroszon egy pontot, melynek geogr. szélessége és hosszúsága ösmeretes, be akarunk rajzolni, következőképen lehet eljárni, akárminő legyen a vetület. Legyen például a pontnak szélessége $57^0\ 20'$, hosszasága $38^0\ 55'$ (393. ábra.) Vegyük le az abroszról a 38^0 déllőnek az 57 és 58^0 parallelkörök közt eső darabját, s ezt egy léptékkel megmérvén, legyen például

$= 37 \cdot 0$ mm., akkor ezen arányt lehet feltenni:

$$60' : 20' = 27 \cdot 0 : x,$$

tehát $$x = 12 \cdot 3 \text{ mm.}$$

Ezen méretet a léptékről levévén, feltesszük a déllőn az 57^0 parallelkörről 58^0 felé. Ugyanezt ismételjük a szomszéd 39^0 hosszasági fok déllőjén. Ekképen a déllőkön két pontot kapunk, melyek az 57^0 $20'$-nek megfelelő parallelkörben fognak feküdni, s a két pont közötti távot, mely tulajdonképen a parallelkör húrját képezi, rendesen az ívvel fel lehet cserélni. Vegyük le tehát ezen vonalat cc' az abroszról, s legyen annak hossza $30 \cdot 4$ mm., akkor ezen arány áll:

$$60' : 55' = 20 \cdot 4 : y,$$

tehát $$y = 27 \cdot 9 \text{ mm.}$$

Ezt c-ből c' felé feltévén a földabroszon, megkapjuk a keresett pontot M.

444. §. A vetület megvizsgálása.

Minden tulajdonságok közt, melyeket egy vetülettől megkivánunk, legfontosabb az, hogy a távok a gömb és abrosz megfelelő pontjai közt egyenlők legyenek. Ezért különösen ezen tulajdonságot lehet megvizsgálás tárgyává tenni. Ha két pontnak szélessége β, β', s azoknak hosszasági külömbsége a középdéllőtől számlálva λ, λ', akkor azoknak távja D a gömbön lesz:

$$cos \frac{D}{r} = sin\beta \; sin\beta' + cos\beta \; cos\beta' \; cos(\lambda - \lambda').$$

Számitsuk ki most a β, β' szélességeknek megfelelő parallelkörsugárokat az abroszon ϱ, ϱ' valamint a λ, λ'-nak megfelelő u u'-t is, akkor a táv D' lesz:

$$D'^2 = \varrho^2 + \varrho'^2 - 2\,\varrho\varrho' \; cos(u - u').$$

Mennél kisebb a D és D' közötti külömbség, s mennél külömbözőbb irányban egyeznek azok egymással, annál jobb a vetület.

TOLDALÉK.

A napórákról.

445. §.

Napórának nevezünk egy oly műszert, mely a valóságos napidőt egy számozott lapon egy mutató árnyéka által mutatja.

446. §. Egyenlítői napóra.

1) Gondoljuk a földgömböt átlátszónak, az egyenlitő síkját anyagi síknak, melynek felülete 24 egyenlő sectorra van beosztva, s a föld forgástengelyét anyagi vonalnak, mely a nap sugárait feltartóztatván, az egyenlitő síkjára árnyékot vet, akkor egy óriási napóra áll előttünk, melyen a napidőt a tengely árnyékából a beosztáson le lehet olvasni; megjegyezvén, hogy a beosztást mindig a körnek azon pontjából kell kezdeni, melyen az észlelési hely déllője keresztülmegyen, s melyre nézve a napórát akarjuk használni.

2) Állítsunk fel most az észlelési pontban a föld felületén egy síkot az egyenlítővel párhuzamosan, s erre egy merőleges pálczát, mely tehát a föld tengelyével párhuzamos fog lenni, akkor ezen pálcza árnyéka a síkon, s a föld tengelyének árnyéka az egyenlitő síkján nem lesznek ugyan egészen párhuzamosok egymással; de a szétágazási szög, a föld radiusának a föld és nap közötti távhoz képest csekély volta miatt, 9″-et*) legrosszabb esetben nem fog meghaladni, ennélfogva az árnyékokat a gyakorlatra nézve elegendő pontossággal párhuzamosoknak lehet

*) a nap vizszintes parallaxisát.

tekinteni. Ezen síkot tehát szintúgy egyenlő részekre kell osztani, mint azt az egyenlitő síkjánál tettük, s a szerkezet az egyenlitői napórát fogja szolgáltatni. Ilyen napórák voltak a régenten használatban volt armillaris sphärák, melyek kicsinyben azt ábrázolták, a mit a földről, mint napóráról mondottunk.

3) Ezen napórát úgy kell felállítni, hogy azon sík, melyen a számlap van felrajzolva, a vizszintes síkot egy olyan egyenes vonalban messe, mely kelet és nyugot felé mutat, tehát a hely déllőjére merőlegesen áll; a sík pedig a vizszintessel $90-\varphi$ szöget zárjon be, hol φ a hely sarkmagasságát jelenti. Akkor a mutató pálcza, mely a beosztott kör középpontjában a síkra merőlegesen erősíttetik meg, φ szög alatt fog hajolni, s a déllő síkban fog feküdni, tehát a föld tengelyével párhuzamos fekvést fog nyerni.

A 12^h vonala ezen napórán a sík legnagyobb hajlásszöge irányában, a 6^h vonala pedig vizszintes irányban, vagyis a déllőre merőlegesen fekszik.

447. §. Vizszintes napóra.

1) Legyen AB (394. ábra) egy az egyenlitővel párhuzamos, CD pedig egy vizszintes sík, BC ezeknek metszésvonala, mely tehát kelet és nyugot felé néz, EOP a mutató, mely O-ban az egyenlitő síkjára merőlegesen áll. EMO a déllő síkja, mely az egyenlitő síkját OM-ben, a vizszintes síkot pedig EM-ben metszi. Az OEM szög $= \varphi$ a sarkmagasság. Legyen továbbá ON egy óravonal az egyenlitői napórán, ennek a vizszintes síkon EN fog megfelelni, mivel az EON sík a CD síkot az EN vonalban metszi. Ha tehát az egyenlítői óraszöget $MON = t$-nek, a megfelelő MEN szöget pedig a vizszintes síkon α-nak nevezzük, ezen képlet áll elő:

$$EM \,.\, tg\alpha = OM \,.\, tgt.$$

Továbbá az EOM $\triangle$-ből lesz:

$$OM = EM \,.\, sin\varphi.$$

Ezeket egymással szorozván, ezen eredményre jövünk:

$$tg\alpha = sin\varphi \, tgt.$$

Ezen napórán a 6^h vonalat megkapjuk, ha $t = 90^0$-nak teszszük, s akkor lesz: $\alpha = 90^0$. A 6^h vonal tehát ezen napórán is merőlegesen áll a déllőre. A délelőtti óraszögek a délutáni megfelelő szögektől csak a jelben külömböznek; a 12 órával egymástól külömböző idők óravonalai pedig egy egyenes vonalba esnek. Ugyanis ha a fentebbi képletben t helyett $180 + t$ tétetik, lesz:

$$tg\alpha = sin\varphi\, tg(180 + t) = sin\varphi\, tgt,$$

mely az előbbivel tökéletesen egyenlő.

2) Ezen napórát szerkesztés által következő módon lehet készítni. Legyen EM egy vizszintes napóra déli vonala, húzzunk erre M-ből egy merőlegest CB, tegyük fel az $MEU = \varphi$ szöget, húzzunk M-ből EU-ra merőlegest MV; ez lesz az egyenlitői napóra körsugara. Ezt az EM vonal hosszabbítására feltévén, úgy hogy $OM = MV$ legyen, húzzunk egy kört, s ezt M-ből kezdve 24 egyenlő részre beosztván, húzzuk a sugárokat; ezek a CB vonalat metszeni fogják, s a metszéspontok az E ponttal összeköttetvén, az óravonalakat fogják szolgáltatni.

A mutatót az E pontban, a déllő felett egy függélyes síkban φ szög alatt kell felállítni, és kellő módon megerősítni.

448. §. Függélyes déli (északi) napórák.

Ezek vagy déli (északi), vagy keleti (nyugoti), vagy általánosan függélyes napórák. Az elsőknél a függélyes sík azimutja $= 90^0$, a másodiknál $= 0$, a harmadiknál általában $= \psi$.

1) Legyen CD a 395. ábrában egy vizszintes, GC pedig egy függélyes sík, mely dél felé néz, EF a déli napóra mutatója, EM a déllő vonal a vizszintes síkon, tehát FM szintén déllő a függélyes síkon. Ezen vonal függélyes, minthogy két függélyes sík egymást csak egy függélyes vonalban metszheti. EN egy óravonal a vizszintes napórán, melynek a függélyes síkon FN felel meg. Nevezzük ezen óraszögeket α és β-nak, akkor ezek közt az EMN és FMN derék $\triangle$-ekből következő összefüggést lehet felállítni:

$$EM \,.\, tg\alpha = FM \,.\, tg\beta.$$

Továbbá az EFM $\triangle$-ből lesz:

$$F12 = EM \,.\, tg\varphi.$$

Ezen egyenleteket egymással szorozván, s α értékét az előbbi §-ból helyettesítvén, rövid összehuzás után lesz:

$$tg\beta = cos\varphi\ tgt.$$

A 6^h szöge ezen napórán is $= 90^0$, s a délelőtti óraszögek a délutáni megfelelő óraszögektől csak a jelekben külömböznek; a 12 órával külömböző idők vonalai pedig egymással összeesnek.

2) Ezen napórát szerkesztés által igy lehet készítni: Legyen FM a függélyes napóra déllő vonala, húzzunk erre egy merőlegest BC az M-en keresztül, tegyük fel az $MFU = 90^0 - \varphi$ szöget, s húzzunk FU-ra M-ből egy merőlegest MV; ez lesz az egyenlitői napóra körsugára, melyet az FM meghosszabbítására feltévén, úgy hogy $MO = MV$ legyen, O-ból egy kört kell húzni, s ezt 24 egyenlő részre beosztani. Az osztáspontokon keresztül sugárokat húzván, ezek a BC vonalat metszik, s ezen metszéspontokat az F ponttal összekötvén, ezek fogják az óravonalakat szolgáltatni.

A mutatónak az FM déllővel, annak síkjában $90 - \varphi$ szöget kell bezárni.

3) Az északi napórának szögei, a déli napóra illető szögeitől csak abban külömböznek, hogy azok a déllő ellenkező oldalain feküsznek.

449. §. Keleti (nyugoti) napórák.

1) A keleti (nyugoti) napóráknál az óra síkja a déllő síkjával párhuzamos, tehát az óramutató is párhuzamos a napóra síkjával. A 6^h sík a déllő síkra merőleges, ez tehát a napóra síkjára is merőleges; ennélfogva a 6^h vonal a mutatónak az óra síkjára való derékvetületével azonos; minden más óravonalak pedig párhuzamos fekvést nyernek a 6^h vonalával, s a nap deklinatiójától függetlenek, mivel a deklinatio-körön és a mutatón keresztül mindig egy síkot lehet fektetni, s ez az órasíkot a nevezett párhuzamosokban metszi. Az óravonalak fekvését tehát elég csak egy különös esetre nézve megállapítni, s ez minden más időszakra is érvényes leend. Legyen tehát AB (396. ábra) az óra síkja, MN a vele párhuzamos mutató, mely két, az AB síkra merőleges pálczán van megerősítve. A 6^h vonal ezeknek lábpontján megyen keresztül. Gondoljuk most, hogy a nap épen az egyenlitőben áll, akkor a mutató valamely pontjának P árnyéka azon egyenesbe CD fog esni, melyben a P ponton keresztül a mutatóra merőlegesen fektetett sík az óra síkját metszi. Ezen sík az egyenlitővel párhuzamos, s a P pont árnyéka az

egyenlitői napóra óravonalába esik, mely meghosszabbítva a CD vonalat az F pontban metszi. Legyen ezen egyenlitői napóra óraszöge t, a mutatónak az AB síktól való merőleges távja r, akkor a t óraszög árnyékvonalának a 6^h vonalától mért távja:

$$EF = r\,tg\,(t-90^0) = -r\,cotg\,t.$$

A 12^h vonala végtelen távba esik, mert akkor a napsugárok az AB síkkal párhuzamosok.

2) Ezen napórát is könnyen lehet szerkeszteni; rajzoljunk t. i. egy egyenlitői napórát, messük ennek óravonalait egy, a 6^h vonalra merőleges vonallal AH, s húzzunk a metszéspontokon keresztül a 6^h vonallal párhuzamosokat, ezek lesznek a keleti napóra vonalai; a mutató távja pedig a napóra síkjától az 06 vonal hosszával egyenlő. Az óravonalakat a vizszinteshez φ szög alatt kell fektetni, s a mutatót a 6^h vonalon a síkra merőlegesen felállitott 06 hosszú pálczákon kell szilárdul megerősítni.

450. §. Általános függélyes napórák.

1) Legyen a 397. ábrában CK a függélyes sík, annak nyugoti azimutja $EMC = \psi$, FM a délllő, mely itt is függélyes, EN egy óravonal a vizszintes síkon, akkor a megfelelő óravonal a függélyes síkon FN fog lenni, s ha a vizszintes napóra óraszögét α, a függélyesét γ-nak nevezzük, akkor az EMN $\triangle$-ből lesz:

$$EM\,.\,sin\alpha = MN\,.\,sin\,(\psi-\alpha).$$

Továbbá az FMN $\triangle$-ből lesz:

$$MN = FM\,.\,tg\gamma,$$

tehát

$$tg\gamma = \frac{EM\,.\,sin\alpha}{FM\,.\,sin\,(\psi-\alpha)}.$$

Minthogy pedig az $EFM\triangle$-ből

$$FM = EM\,.\,tg\varphi,$$

ezt helyettesitvén, s $sin(\psi-\alpha)$-t felbontván, némű számítás után lesz:

$$cotg\gamma = tg\varphi(sin\psi\,cotg\alpha - cos\psi).$$

Helyettesítsük ebben a $cotg\alpha$ értékét a 447. §-ból, akkor végre lesz:

$$cotg\gamma = \frac{sin\psi\,cotg t}{cos\varphi} - tg\varphi\,cos\psi.$$

Ezen napórán a délelőtti és délutáni megfelelő óraszögek már nem egyenlők, s a 6^h szög sem 90^0.

2) Ezen napórát következőképen lehet szerkeszteni. Legyen FM a függélyes napóra déllővonala, messük ezt egy merőleges-

sel BC, tegyük fel FM mellé az $MFU = 90 - \varphi$ szöget; ekkor MU egy vizszintes napórának déllő vonalát fogja adni. Tegyük fel most $CME = \psi$ szöget, ennek szárára az $ME = MU$ hosszat, s szerkesszük az EM déllőnek megfelelő vizszintes napórát. Ennek óravonalai a BC átlót metszeni fogják, s a metszéspontok F-el összeköttetvén, a függélyes napóra vonalait fogják szolgáltatni.

3) A mutatót legczélszerűbben úgy lehet megerősítni, ha a síkon a mutató derékvetületének valamely pontjából egy pálczát emelünk fel merőlegesen, s ennek végén erősítjük meg a mutatót. Hol kell ezen pálczát a síkon felállítni, s minő hosszúnak kell azt venni, hogy a mutató a föld tengelyével párhuzamos legyen, így lehet meghatározni. Legyen FH a mutató, húzzunk annak valamely pontjából H, a napóra síkjára egy merőlegest HJ, ennek lábpontjából J a déllőre egy merőlegest JL, akkor lesz

$$FL = FH \,.\, \cos F = FH \,.\, \sin\varphi$$

s minthogy a HLJ szög $= \psi$, lesz

$$HJ = HL \,.\, \sin\psi, \text{ és } JL = HL \,.\, \cos\psi,$$

a HJL derék$\triangle$-ből pedig, $HL = FH \,.\, \sin F = FH \,.\, \cos\varphi$,
ezt helyettesitvén

$$JL = FH \,.\, \cos\varphi \cos\psi$$
$$HJ = FH \,.\, \cos\varphi \sin\psi.$$

451. §. Azimut.

A függélyes napórákat rendesen épületek falain szokták készítni, s ezeknek azimutját többféleképen lehet meghatározni.

1) Észleljük azon időt, midőn a nap sugárai épen megvilágítják a falból kiálló egyenetlenségeket; ekkor a nap épen a fal síkjában áll, s a hely geographikus szélességéből, melyet egy földabroszról is elegendő pontossággal le lehet olvasni, továbbá a nap declinatiójából az idővel egyetemben a fal azimutját ki lehet számítni.

2) Határozzuk meg egy asztalon, melyet a fal előtt dél felé, csekély távban a faltól, vizszintesen felállitunk, a déllő vonalat, húzzunk a falhoz egy párhuzamost oly módon, hogy az asztal valamely pontjának távját a faltól megmérvén, ezen méretet egy rúdon, annak végétől kezdve feltesszük, s a rudat a fal legtávolabb részén arra merőlegesen felállitjuk, s az asztalnak nevezett pontjából a rúd márkájára a nézgevonasszal irányozván, a vonasz

mellett egy vonalat húzunk; ez a déllőt ψ szög alatt fogja metszeni.

3) Ugyanezen munkát egy tájolával is lehet végrehajtani, ha a tájolát előbb a déllő mellé helyezzük, s az elhajlást leolvassuk; azután a tájola ugyanazon oldalát a falhoz, vagy még czélszerűbben egy párhuzamos oldalú egyenes léczhez illesztjük, mely vizszintesen a falhoz van fektetve, s a tű állását ismét leolvassuk; a külömbség a fal azimutját fogja adni.

452. §. Legnagyobb és legkisebb óraszög.

A legnagyobb és legkisebb időt, melyet a napórának valamely helyen mutatni kell, igy lehet meghatározni. Keressük előbb azon íveket, melyeket a rák és bak forditók a horizonon elmetszenek (398. ábra). E végre az $EHU\,\triangle$-ből, melyben $EH = 180^0 - \varphi$, $EU = 90^0 - \varepsilon$, lesz:

$$cos\, HU = -\frac{sin\varepsilon}{cos\varphi}.$$

Szintén ugy lesz az $EHV\,\triangle$-ből, melyben $EH = 180^0 - \varphi$, $EV = 90^0 + \varepsilon$,

$$cos\, HV = \frac{sin\varepsilon}{cos\varphi}.$$

Ha most $HU > \psi > HV$, akkor a horizon azon pontjainak megfelelő óraszögek fogják a napóra legkisebb és legnagyobb óraszögét szolgáltatni, melyekben a ψ-szögnek megfelelő függélyes sík a horizont metszi, s melyeket ezen képletből lehet számítni:

$$tgs = \frac{tg\psi}{sin\varphi}.$$

Az egyenlet s-re nézve két egymástól 180^0-al külömböző eredményt ád; az első az esti, a második a reggeli óraszöget fogja szolgáltatni.

Ha pedig $\psi > HU$, akkor a délutáni legnagyobb idő egyenlő az évi leghosszabb napnak megfelelő naplementi idővel, a reggeli legkisebb idő pedig azon idővel, mely az év legrövidebb napján a bakforduló és a ψ azimutnak megfelelő függélyes kör metszéspontján keresztül menő órakörhöz tartozik, s melynek képlete lesz: $sins - sin\varphi\, cos\psi\, cos\, s = tg\varepsilon\, sin\psi.$

Végre ha $\psi < HV$, akkor a reggeli legkisebb idő egyenlő lesz az évi leghosszabb napon a napfelkölte idejével, a délutáni legnagyobb idő pedig azon idővel, mely az évi legrövidebb napon a rákfordító és ψ azimuthoz tartozó függélyes kör metszéspontjának megfelelő idővel egyenlő, s melynek képlete az előbbivel egyezik, azon külömbséggel, hogy az előbbinél s a negyedik quadransba, ennél pedig az elsőbe esik.

453. §. Idő-egyenlet.

Záradékul ide kapcsolom még az időegyenletnek értékeit az évnek minden ötödik napjára nézve perczekben és a perczek tizedrészeiben, mint a melyek napóráknál elegendő pontosságot nyujtanak.*)

Az idő-egyenlet táblája.

Év nap	Közép idő — valódi idő	Év nap	Közép idő — valódi idő	Év nap	Közép idő — valódi idő	Év nap	Közép idő — valódi idő
	m						
0	+3·6		m		m		m
5	5·5	105	+0·1	205	+6·2	305	—16·3
10	7·6	110	—1·0	210	6·2	310	—16·2
15	9·5	115	—2 0	215	6·0	315	—15·8
20	11·1	120	—2·8	220	5·4	320	—15·0
25	12·5	125	—3.6	225	4·6	325	—13·8
30	13·5	130	—3·8	230	3·5	330	—12·3
35	14·1	135	—3·8	235	2·3	335	—10·6
40	14·4	140	—3·8	240	0·9	340	—9·0
45	14·4	145	—3·4	245	—0·6	345	—6·8
50	14·1	150	—2·9	250	—2·3	350	—4·4
55	13·5	155	—2·2	255	—4·0	355	—1·9
60	12·6	160	—1·2	260	—5·8	360	+0·6
65	11·5	165	—0·2	265	—7·5	365	3·0
70	10·3	170	+0·9	270	—9·2		
75	8·9	175	1·9	275	—10·8		
80	7·4	180	3·0	280	—12·3		
85	5·9	185	4.0	285	—13·6		
90	4·4	190	4·8	290	—14·7		
95	2·9	195	5·5	295	—15·5		
100	1·4	200	6·0	300	—16·1		

* Ezen táblai számok ugyan évről évre egy kevéssé változnak, de a változás csak igen csekély lévén, ezen táblát huzamosabb időre lehet használni.

TÁBLÁZATOK.

I. Tábla.

Hosszmértékek összehasonlítása.

Helynevek	Rőf bécsi	Láb hüv.	Helynevek	Rőf bécsi	Láb hüv.
Aachen	25·348	10·704	Königsberg	21·820	11·681
Amsterdam	26·204	10·745	Kopenhága (Dánia)	23·811	11·906
Ancona	24·388	14·832	» bányaöl	76·360	—
Anspach	23·635	11·304	Krakó	23·421	13·530
Antwerpen, selyem rőf	26 358	10·841	Lipcse	21·460	10·730
» gyapju rőf	25·981	—	Lissabon és } Vara rőf	41·490	8·298
Augsburg, nagy rőf	23·138	11·243	Portugál } Covado	24·894	—
» kis rőf	22·488	—	London és } Yard	34·715	11·572
Basel, Aûne	44·752	11·321	N. Brittan. } vász. rőf	43·408	—
» Braccio	20·655	—	Lucca (herczegség)	22·590	22·393
Bergamo	24·877	16·527	Lübeck	21·905	11·047
Bécs (Osztr.-M. állam)	29·578	12·000	Lüttich	20·938	10·918
Berlin (Poroszország)	25·347	11·915	Madrid (Spanyolorsz.)	32·190	10·730
» bányaöl	79·426	—	Mailand	22·265	15·072
Bern (Canton)	20 595	11·132	Mantua	24·440	—
» kőtörő l.	—	12·057	Mainz	20·835	11·532
Bologna	24·491	14·404	Modena	24·603	24·080
Braunschweig	21·665	10·833	» Reggio	20·115	19·653
Brema	21·957	10·978	Morvaország	30·015	11·252
Brescia, selyem rőf	24·432	18 060	München (Bajorország)	31·698	11·079
» gyapju rőf	25·630	—	Nápoly (királyság)	80·205	9·976
Boroszló	21·862	10·931	Nizza	20·835	10·062
Brüssel	26·324	10·465	Neufchatel	42·235	11·389
Cagliari (Sardinia)	20·852	9·428	Nürnberg, városi láb	25·040	11·582
» városi Palmo	—	7·690	» tüzérs. láb	—	11·115
Carlsruhe (Baden)	22·777	11·388	Oldenburg	21·957	11·252
Cassel (Hessen)	21·306	10·816	Osnabrück, nagy rőf	22·839	10·602
Cöln	21·837	10·918	» kis rőf	22·145	—
Cremona	26·538	18·232	Padua, selyem rőf	24.354	16·262
» vászon rőf	22·556	—	» gyapju rőf	25·810	—
Danzig	21·785	10·893	Palermo (Sicilia)	80·205	9·188
Darmstadt (Hessen)	22·777	11·388	Páris (franczia) ör. m.	45·112	12·333
Drezda (Szászország)	21·506	10·753	Mêtre =	37·965 hüv.	
» bányaöl	75·273	—	Aûne =	1 1/5 Mêtre	
Erfurt	21·332	10·764	Parma, selyem rőf	22·565	—
Észak-Amerika, sz. ál.	lásd London		» vászon rőf	24·457	—
Ferrara, selyem rőf	24·217	15·234	» Bracc. di legno	—	20·578
» gyapju rőf	25·631	—	Pétervár és Oroszorsz.	27·006	11·572
Florenz } épit. láb	22·566	20·809	Piacenza	26·007	17·838
Toskana } földir. láb	—	22·094	Prága és Csehország	22·548	11·252
Frankfurt a. M.	20·483	10·876	Reval	20·193	10·096
Genf, Aûne	45·172	18·523	Riga	20·809	10·405
Genua, Palmo	—	9·484	Róma (Canna)	75·983	11·184
Gotha	—	10·918	» Palmo	—	8·480
Hamburg	21·751	10·876	Rostock	21·751	11·047
Hannovera (királyság)	22·169	11·085	Salzburg, nagy rőf	38·176	11·268
Konstantinápoly } n. Pik	25·399	—	» kis rőf	30·477	—
és török orsz. } k. »	24·594	—	Sz. Gallen nagy rőf	30·434	—

Helynevek	Rőf	Láb	Helynevek	Rőf	Láb
	bécsi hüvelyk			bécsi hüvelyk	
Sz. Gallen kis rőf . .	23·387	—	Tyrol	30·529	12·691
Schafhausen	22·907	11·441	Ulm	21·580	10·970
Schlesia, osztrák . .	21·957	10·987	Velencze, selyem rőf .	24·234	13·188
Stockholm és Svédorsz.	22·537	11·269	» gyapju rőf .	25·681	—
» bányaöl	67·613	—	Verona, selyem rőf . .	24·603	12·931
Stuttgart	23·224	10·875	» gyapju rőf . .	24·945	—
Triest, selyem rőf . .	24·371	—	Warsó	22·193	11·304
» gyapju rőf . .	25·690	—	Weimar	21·409	10·704
Turin (Piemont) . . .	22·899	12·999	Würzburg	22·351	11·175
» liprand. láb . .	—	19·500	Zürich	22·881	11·441

II. Tábla.

Mértföldek összehasonlítása, a földön 1 fok közép hosszát = 58588·3 bécsi ölnek véve.

Helyek és mértföldek nevei	Megyen egy fokra	Hossza bécsi ölekben	Helyek és mértföldek nevei	Megyen egy fokra	Hossza bécsi ölekben
Arab	56·67	1036·77	Németalföldi teng. mf.	20·00	2937 60
Bajor	15·028	3909·38	Nürnbergi	13·10	4484·92
Braunschweigi választó-			Olasz	60·00	979·16
fej. rendőrs. mértf. .	10·52	5584·90	Orosz werst	104·30	563·17
Chinai új Li	193·4	3037·62	Osztrák postamértf. .		
Cseh	16·12	3642·88	· 4000 bécsi öl . . .	14·69	4000·00
Dániai = 2400 rúd .	14·79	3972·92	Persa farsang	22·60	2611·28
Egyptomi Schönus . .	18·90	3108·70	Portugal	18·00	3263·93
Franczia öreg Leuka .	50·50	1165·72	Porosz = 2000 por. rúd	14·37	4088 83
» Lieue = $^1/_{25}$ fok	25·073	2343·30	Római, régi =8 olymp.		
» teng. m. = $^1/_{20}$ »	20·058	2929·12	Stadium	75·50	778·20
Hamburgi	14·79	3973·02	Római, új	74·83	785·09
Helvécziai	13·30	4417·91	Szász rendőri mértföld		
Hollandi	19·00	3092·25	= 16000 drezdai rőf	12·29	4780·55
Irlandi	54·30	1081·99	Schlésiai = 11250		
Lengyel	20·00	2937·60	schlésiai rőf . . .	17·18	3419·79
Londoni =1666 Yard .	73·00	804·86	Scót	49·85	1219·26
Magyar	13·33	4407·48	Schwáb	12·00	4896 05
Nagybritanniai, öreg .	47·60	1234·29	Svéd = 2250 rúd . .	10·41	5643·90
» új = 1760 Yard	69·12	850·05	Spanyol = 5000 var. .	26·63	2206·28
» tengeri mértf.	60·00	979·16	Stadium, nagy olymp.	600·00	97·834
» League . . .	20·00	2937·32	» tengeri . . .	750·00	78·266
Német öreg rasta . .	25·00	2350·15	» egyptomi . .	1125·0	52·179
» uj kis	17·74	3310·80	Török Berri	66·67	881·17
» földirati . . .	—		» tengeri mértf. .	86·40	691·79
» Klügel szerint	15·00	3916·91	Velenczei	60·73	967·50
» az új franczia			Weimari	16·39	3585·34
mérés szerint .	15·044	3905·49	Zsidó, régi, = 2000		
Németalföldi óra . .	19·67	2986·92	bibliai rőf	100·80	582·86

III. Tábla.

Térmértékek összehasonlítása.

Hely és térmérték nevek	Belföldi □ rúd vagy □ öl	Bécsi □ öl	Hely és térmérték nevek	Belföldi □ rúd vagy □ öl	Bécsi □ öl
Aachen, Morgen. . .	150	848·8	Madrid és Spanyolorsz.		
Amsterdam, Morgen. .	600	2258·4	Fanega		953·4
Anspach, Morgen . .	360	1278·0	Magyarország, hold. .	1200	1200
Antwerpen, Bunder .	400	3656.2	» » katastral.	1600	1600
Augsburg, Tagwerk .	160	390·0	Mailand, Pertica . .	96	209·0
Basel, Jauchert . . .	140	886·0	Mantua, Biolca . . .	200	859·8
Bécs és osztr. tart. Joch	1600	1600	Modena, Biolca . . .	288	1159·7
Bergamo, Pertica . .	96	182·6	München és Bajororsz.		
Berlin és Poroszország			Tagwerk	400	947·2
kis Morgen	180	709·5	Nápoly, Moggio . . .	900	971·8
Bern, Jauch erdő . .	450	1075·8	Nürnberg, Tagwerk .	200	1313.7
» » szántó .	400	956·3	Oldenburg, Morgen .	356	3477·0
» » rét . . .	350	836·7	» alt Juck .	160	1562·0
Bologna, Biolca . . .	196	784·0	Padua, Campo . . .	840	1542·4
» Tornatura .	140	560·0	Páris és Francziaorsz.		
Braunschweig, Morgen	120	695·4	Arpent royal .	100	950·4
Brescia, Pio	400	906·0	» Are		27·804
Boroszló, Morgen . .	300	1555·8	Parma, Biolca	288	846·9
» Hube = 30 Morg.			Pétervár és Oroszorsz.		
Carlsruhe és Baden,			Desaetine	3200	4052·0
Morgen	400	1000·0	Piacenza, Pertica . .	96	212·0
Cassel, Acker	150	663·4	Prága és Csehország,		
Cöln, Morgen	150	883·0	Strich Aussaat . .		800·0
Cremona, Pertica . .	96	221·5	Rajnai Morgen szántó	120	473·2
Danzig, Morgen . . .	300	1544·8	» » erdő .	160	630·9
Huf = 30 Morg.			Róma, Pezza		733·2
Darmstadt, Morgen .	400	694·9	» Rubbio = 7 Pezza		
Drezda, szász Morgen	300	1539·3	Rostock és Mecklen-		
Erfurt, Morgen . . .	168	728·5	burg-Schwerin, Mg.	300	1807·9
Északamer. egyes. Acre	160	1125·0	Salzburg, Morgen . .	400	979·7
Ferrara, Moggio . . .	$1333^1/_3$	5967·0	Stockholm, Svéd Tonne	$218^3/_4$	1371·7
» Biolca . . .	400	1790·0	Stuttgart és Würtem-		
Florencz, Stioro . . .		162·5	berg, Morgen .	384	876·1
» Saccato . .		1378·0	» Juchart = $1^1/_2$ Mg.	576	1314·2
Genf, Morgen		1436·0	Turin, Giornata . . .	400	1055·8
Gotha, Acker	130	586·0	Tyrol, Jauch	600	1202·0
Hamburg, Morgen . .	600	2682·0	Velencze, 1000 □ Passi		834·8
» Scheffel Saatland	200	1167·6	Verona, Campo . . .	720	835·8
Hannovera, Morgen .	120	722·9	Varsó és Orosz-Len-		
Hildesheim, Morgen .	120	670·0	gyelország, Morg.	300	1663·7
Königsberg, Morgen .	300	1776·5	» Hufe = 30 Morg.		
» Hufe = 30 Morg.			Weimar, Acker . . .	140	792·2
Kopenhága és Dánia			Würzburg, Morgen . .	160	593·0
Pflug	1804·8	4939·4	» Acker erdő	180	667·1
» Tonne hart. Korn	225·6	616·8	Zürich, Juchart szántó	360	900·8
» Tonne, Saatland	56·4	154·2	» » erdő .	400	1000·9
Livorno, Saccato . .		1553.7	» » szőllő,		
London és N.-Brit. Acre	160	1125·0	v. rét (Mannwerk) .	320	800·7

IV. K Táblája. (133-ik oldal.)

$n-n'$	n = 1000	998	996	993	990	985	980	970	960	940	920	900	870	840	800	750	700	650	600
2	375	2185																	
4	188	700	1089																
6	125	375	552	811	1063														
8	94·1	245	349	496	639	872	1103												
10	75·4	179	247	342	435	585	734	1026											
12	62·9	139	187	255	319	424	528	732	932										
14	53·9	112	149	199	247	259	401	551	699	989									
16	47·3	93·9	123	162	199	212	317	432	546	768	984	1200							
18	42·0	80·4	104	135	164	178	259	350	439	615	786	953	1198						
20	37·9	70·0	89·2	115	139	124	216	290	362	505	643	778	976	1165					
25		52·6	65·5	82·5	98·4	92·5	148	196	242	333	422	508	635	756	911	1095	1266	1424	1572
30		37·2	51·2	63·4	74·6	72·7	110	143	175	239	300	360	447	532	639	766	885	995	1096
35			41·7	50·9	59·4	59·2	85·4	110	134	181	226	270	334	396	474	567	654	734	810
40			35·1	42·3	48·9	49·6	69·1	88·1	107	142	177	211	260	307	367	438	504	565	622
45				36·0	41·3	42·4	57·5	72·6	87·2	116	143	170	208	245	293	349	401	449	494
50					35·6	36·9	48·9	61·2	73·1	96·1	118	140	171	201	239	285	327	366	402
55							42·3	52·6	62·4	81·4	100	118	143	168	200	237	272	304	334
60							37·1	45·8	54·1	70·1	85·5	100·5	122	143	171	201	230	257	282
65								40·4	47·5	61·2	74·4	87·0	105	123	146	172	197	211	241
70								36·0	42·2	54·0	65·3	76·3	92·2	107	127	150	171	190	209
75									37·8	48·1	58·0	67·7	81·4	94·6	111	131	150	167	182
80										43·2	51·9	60·3	72·5	84·1	98·8	116	132	147	161
85										39·1	46·8	54·3	65·0	75·3	88·3	104	118	131	143
90										35·6	42·5	49·1	58·7	67·9	79·5	93·2	106	118	128

V. Húrtábla

°	′	Húr	Arányos részek	°	′	Húr	Arányos részek	°	′	Húr	Arányos részek
0	0	0		15	0	130·5		30	0	258·8	
	20	2·9			20	133·4			20	261·6	
	40	5·8			40	136·3			40	264·4	
1	0	8·7		16	0	139·2		31	0	267·2	
	20	11·6			20	142·1			20	270·0	
	40	14·5			40	144·9			40	272·8	
2	0	17·5		17	0	147·8		32	0	275·6	
	20	20·4			20	150·7			20	278·4	
	40	24·3			40	153·6			40	281·2	
3	0	26·2	2 0·3	18	0	156·4	2 0·3	33	0	284.0	2 0·3
	20	29·1	4 0·6		20	159·3	4 0·6		20	286·8	4 0·6
	40	32·0	6 0·9		40	162·2	6 0·9		40	289·6	6 0·8
4	0	34·9	8 1·2	19	0	165·0	8 1·2	34	0	292·4	8 1·1
	20	37·8	10 1·5		20	167·9	10 1·5		20	295·2	10 1·4
	40	40·7	12 1·7		40	170·8	12 1·7		40	297·9	12 1·7
5	0	43·6	14 2·0	20	0	173·6	14 2·0	35	0	300·7	14 2·0
	20	46·5	16 2·3		20	176·5	16 2·3		20	303·5	16 2·2
	40	49·4	18 2·6		40	179·4	18 2·6		40	306·2	18 2·5
6	0	52·3	20 2·9	21	0	182·2	20 2·9	36	0	309·0	20 2·8
	20	55·2			20	185·1			20	311·8	
	40	58·1			40	188·0			40	314·5	
7	0	61·0		22	0	190·8		37	0	317·3	
	20	64·0			20	193·7			20	320·1	
	40	66·9			40	196·5			40	322·8	
8	0	69·8		23	0	199·4		38	0	325·6	
	20	72·7			20	202·2			20	328·3	
	40	75·6			40	205·1			40	331·1	
9	0	78·5		24	0	207·9	2 0·3	39	0	333·8	2 0·3
	20	81·4			20	210·8	4 0·6		20	336·5	4 0·5
	40	84·3			40	213·6	6 0·8		40	339·3	6 0·8
10	0	87·2		25	0	216·4	8 1·1	40	0	342·0	8 1·1
	20	90·1			20	219·3	10 1·4		20	344·8	10 1·4
	40	93·0			40	222·1	12 1·7		40	347·5	12 1·6
11	0	95·8		26	0	225·0	14 2 0	41	0	350·2	14 1·9
	20	98·7			20	227·8	16 2·2		20	352·9	16 2·2
	40	101·6			40	230·6	18 2·5		40	355·7	18 2·4
12	0	104·5		27	0	233·4	20 2·8	42	0	358·4	20 2·7
	20	107·4			20	236·3			20	361·1	
	40	110·3			40	239·1			40	363·8	
13	0	113·2		28	0	241·9		43	0	366·5	
	20	116·1			20	244·7			20	369·2	
	40	119·0			40	247·6			40	371·9	
14	0	121·9		29	0	250·4		44	0	374·6	
	20	124·8			20	253·2			20	377·3	
	40	127·6			40	256·0			40	380·0	
15	0	130·5		30	0	258·8		45	0	382·7	

R = 500.

°	'	Húr	Arányos részek	
45	0	382·7		
	20	385·4		
	40	388·1		
46	0	390·7		
	20	393·4		
	40	396·1		
47	0	398·7		
	20	401·4		
	40	404·1		
48	0	406·7	2	0·3
	20	409·4	4	0·5
	40	412·0	6	0·8
49	0	414·7	8	1·1
	20	417·3	10	1·4
	40	420·0	12	1·6
50	0	422·6	14	1·9
	20	425·3	16	2·2
	40	427·9	18	2·4
51	0	430·5	20	2·7
	20	433·1		
	40	435·7		
52	0	438·4		
	20	441·0		
	40	443·6		
53	0	446·2		
	20	448·8		
	40	451·4		
54	0	454·0		
	20	456·6		
	40	459·2		
55	0	461·7	2	0·3
	20	464·3	4	0·5
	40	466·9	6	0·8
56	0	469·5	8	1·0
	20	472·0	10	1·3
	40	474·6	12	1·6
57	0	477·2	14	1·8
	20	479·7	16	2·0
	40	482·3	18	2·3
58	0	484·8	20	2·6
	20	487·4		
	40	489·9		
59	0	492·4		
	20	495·0		
	40	497·5		
60	0	500·0		

°	'	Húr	Arányos részek	
60	0	500·0		
	20	502·5		
	40	505·0		
61	0	507·5	2	0·3
	20	510·0	4	0·5
	40	512·5	6	0·8
62	0	515·0	8	1·0
	20	517·5	10	1·3
	40	520·0	12	1·5
63	0	522·5	14	1·8
	20	525·0	16	2·0
	40	527·5	18	2·3
64	0	529·9	20	2·5
	20	532·4		
	40	534·8		
65	0	537·3	2	0·2
	20	539·8	4	0·5
	40	542·2	6	0·7
66	0	544·6	8	1·0
	20	547·1	10	1·2
	40	549·5	12	1·4
67	0	551·9	14	1·7
	20	554·4	16	1·9
	40	556·8	18	2·2
68	0	559·2	20	2·4
	20	561·6		
	40	564·0		
69	0	566·4		
	20	568·8		
	40	571·2		
70	0	573·6		
	20	576·0		
	40	578·3		
71	0	580·7	2	0·2
	20	583·1	4	0·5
	40	585·4	6	0·7
72	0	587·8	8	0·9
	20	590·1	10	1·2
	40	592·5	12	1·4
73	0	594·8	14	1·6
	20	597·2	16	1·8
	40	599·5	18	2·1
74	0	601·8	20	2·3
	20	604·1		
	40	606·5		
75	0	608·8		

°	'	Húr	Arányos részek	
75	0	608·8		
	20	611·1		
	40	613·4		
76	0	615·7	2	0·2
	20	618·0	4	0·5
	40	620·2	6	0·7
77	0	622·5	8	0·9
	20	624·8	10	1·2
	40	627·1	12	1·4
78	0	629·3	14	1·6
	20	631·6	16	1·8
	40	633·8	18	2·1
79	0	636·1	20	2·3
	20	638·3		
	40	640·6		
80	0	642·8	2	0·2
	20	645·0	4	0·4
	40	647·2	6	0·7
81	0	649·4	8	0·9
	20	651·7	10	1·1
	40	653·9	12	1·3
82	0	656·1	14	1·5
	20	658·3	16	1·8
	40	660·4	18	2·0
83	0	662·6	20	2·2
	20	664·8		
	40	667·0		
84	0	669·1		
	20	671·3		
	40	673·4		
85	0	675·6		
	20	677·7		
	40	679·9		
86	0	682·0	2	0·2
	20	684·1	4	0·4
	40	686·2	6	0·6
87	0	688·4	8	0·8
	20	690·5	10	1·1
	40	692·6	12	1·3
88	0	694·7	14	1·5
	20	696·7	16	1·7
	40	698·8	18	1·9
89	0	700·9	20	2·1
	20	703·0		
	40	705·0		
90	0	707·1		

VI. Tábla.

Barometerrel való magasságmérés.

I. Tábla.

$\frac{t+t'}{R}$	A	Arányos részek		$\frac{t+t'}{R}$	A	Arányos részek	
—10°	3·97538	0		+20°	4·00765	0	
9	3·97649	0·1	11	21	4·00868	0·1	10
8	3·97761	0·2	22	22	4·00971	0·2	20
7	3·97872	0·3	33	23	4·01075	0·3	31
6	3·97982	0·4	44	24	4·01177	0·4	41
— 5	3·98093	0·5	55	+25	4·01280	0·5	51
4	3·98203	0·6	66	26	4·01382	0·6	62
3	3·98312	0·7	77	27	4·01484	0·7	72
2	3·98421	0·8	88	28	4·01586	0·8	82
1	3·98531	0·9	99	29	4·01688	0·9	92
0°	3·98640	0		+30°	4·01789	0	
+ 1	3·98749	0·1	11	31	4·01890	0·1	10
2	3·98858	0·2	21	32	4·01991	0·2	20
3	3·98966	0·3	32	33	4·02092	0·3	30
4	3·99073	0·4	43	34	4·02192	0·4	40
+ 5	3·99181	0·5	54	+35	4·02293	0·5	50
6	3·99288	0·6	64	36	4·02393	0·6	60
7	3·99396	0·7	75	37	4·02492	0·7	70
8	3·99502	0·8	86	38	4·02592	0·8	80
9	3·90609	0·9	97	39	4·02691	0·9	90
+10°	3·99715	0		+40°	4·02790	0	
11	3·99821	0·1	11	41	4·02889	0·1	10
12	3·99927	0·2	21	42	4·02988	0·2	20
13	4·00033	0·3	32	43	4·03086	0·3	29
14	4·00138	0·4	42	44	4·03185	0·4	39
+15	4·00243	0·5	53	+45	4·03283	0·5	49
16	4·00348	0·6	63	46	4·03380	0·6	59
17	4·00452	0·7	74	47	4·03478	0·7	69
18	4·00557	0·8	84	48	4·03575	0·8	78
19	4·00661	0·9	95	49	4·03672	0·9	88

III. Tábla.

Log. H	Corr.	Log. H	Corr.	Log. H	Corr.	Log. H	Corr.
2·00	+ 1	3·00	+13	3·29	+25	3·58	+48
2·17	2	3·03	14	3·31	26	3·60	50
2·37	3	3·06	15	3·35	28	3·62	52
2·53	4	3·10	16	3·38	30	3·64	54
2·63	5	3·13	17	3·40	32	3·66	56
2·68	6	3·15	18	3·43	34	3·68	58
2·73	7	3·17	19	3·46	36	3·70	60
2·78	8	3·20	20	3·48	38	3·72	62
2·83	9	3·22	21	3·50	40	3·74	64
2·88	10	3·23	22	3·52	42	3·76	66
2·92	11	3·25	23	3·54	44	3·78	68
2·97	12	3·27	24	3·56	46	3·80	70

II. Tábla.

Földir. széless.	Correctio	Földir. széless.
0°	+113—	90°
1	112	89
2	112	88
3	112	87
4	111	86
5	111	85
6	110	84
7	109	83
8	109	82
9	107	81
10	106	80
11	105	79
12	103	78
13	102	77
14	100	76
15	98	75
16	96	74
17	94	73
18	91	72
19	89	71
20	86	60
21	84	69
22	81	68
23	79	67
24	76	66
25	73	65
26	70	64
27	66	63
28	63	62
29	60	61
30	56	60
31	53	59
32	50	58
33	46	57
34	42	56
35	39	55
36	35	54
37	31	53
38	27	52
39	24	51
40	20	50
41	16	49
42	12	48
43	8	47
44	4	46
45	+ 0—	45

VII. Tábla.

Valódi és látszatos vizszintes közötti különbség.

Táv bécsi öl	f bécsi hüv.	Központi szög ′ ″	Táv bécsi öl	f bécsi öl	Központi szög ′ ″	Táv bécsi öl	f bécsi öl	Központi szög ′ ″
50	0·02	0 3·1	3600	1·678	3 41·2	13000	21·89	13 18·8
100	0·09	0 6·1	3700	1·773	3 47·3	13500	23·61	13 49·5
150	0·21	0 9·2	3800	1·870	3 53·5	14000	25·39	14 20·2
200	0·37	0 12·3	3900	1·970	3 59·6	14500	27·24	14 51·0
250	0·58	0 15·4	4000	2·072	4 5·8	15000	29·14	15 21·7
300	0·84	0 18·4	4100	2·177	4 11·9	15500	31·12	15 52·4
350	1·14	0 21·5	4200	2·284	4 18·1	16000	33·16	16 23·1
400	1·49	0 24·6	4300	2·394	4 24·2	16500	35·26	16 53·8
450	1·89	0 27·6	4400	2 507	4 30·4	17000	37·43	17 24·6
500	2·33	0 30·7	4500	2 622	4 36·5	17500	39·67	17 55·3
550	2·82	0 33·8	4600	2·740	4 42·6	18000	41·97	18 26·0
600	3·36	0 36·9	4700	2·861	4 48·8	18500	44·33	18 56·7
650	3·94	0 39·9	4800	2·984	4 54·9	19000	46·76	19 27·5
700	4·57	0 43·0	4900	3·109	5 1·1	19500	49·25	19 58·2
750	5·25	0 46·1	5000	3·238	5 7·2	20000	51·81	20 28·9
800	5·97	0 49·1	5200	3·502	5 19·5	21000	57·12	21 30·3
850	6·74	0 52·2	5400	3·776	5 31·8	22000	62·69	22 31·8
900	7·55	0 55·3	5600	4·061	5 44·1	23000	68·52	23 33·2
950	8·41	0 58·4	5800	4·356	5 56·4	24000	74·61	24 34·7
1000	9·32	1 1·4	6000	4·662	6 8·7	25000	80·95	25 36·1
1100	11·28	1 7·6	6200	4·978	6 20·9	26000	87·56	26 37·5
1200	13·43	1 13·7	6400	5·304	6 33·2	27000	94·43	27 39·0
1300	15·76	1 19·9	6600	5·641	6 45·5	28000	101·52	28 40·5
1400	18·27	1 26·0	6800	5·988	6 57·8	29000	108·91	29 41·9
1500	20·98	1 32·2	7000	6·345	7 10·1	30000	116·55	30 43·3
1600	23·87	1 38·3	7200	6·713	7 22·4	31000	124·45	31 44·8
1700	26·95	1 44·4	7400	7·091	7 34·7	32000	132·61	32 46·3
1800	30·21	1 50·6	7600	7·480	7 47·0	33000	141·03	33 47·7
1900	33·66	1 56·7	7800	7·879	7 59·3	34000	149·71	34 49·2
2000	37·29	2 2·9	8000	8·288	8 11·6	35000	158·64	35 50·6
2100	41·12	2 9·0	8200	8·707	8 23·9	36000	167·84	36 52·0
2200	45·13	2 15·2	8400	9·137	8 36·2	37000	177·29	37 53 4
2300	49·32	2 21·3	8600	9·578	8 48·5	38000	187·00	38 54·9
2400	53·70	2 27·5	8800	10·03	9 0·8	39000	196·97	39 56·3
2500	58·27	2 33·6	9000	10·49	9 13·0	40000	207·20	40 57·8
2600	63·03	2 39·7	9200	10·96	9 25·3	41000	217·69	41 59·3
2700	67·97	2 45·9	9400	11·44	9 37·6	42000	228·44	43 0 7
2800	73·10	2 52·0	9600	11·93	9 49·9	43000	239·44	44 2·2
2900	78·4 1	2 58·2	9800	12 44	10 2·2	44000	250·71	45 3·6
3000	83·91	3 4·3	10000	12·95	10 14·4	45000	262·24	46 5·0
3100	89·60	3 10·5	10500	14·28	10 45·2	46000	274·02	47 6·5
3200	95·48	3 16·6	11000	15·67	11 15·9	47000	286·06	48 8·0
3300	101·5	3 22·8	11500	17·13	11 46·6	48000	298·37	49 9 4
3400	107·8	3 28·9	12000	18·65	12 17·3	49000	310·93	50 10·8
3500	114·2	3 35·0	12500	20·24	12 48·1	50000	323·75	51 12·3

(Jele a lejtmérésnél ellenkező a ($h—o$) jelével, a távmérésnél

$h—o$ / $o+u$	$\frac{b}{a}$ 0·00020	19	18	17	16	15	14	13	12	11
0·5	0·00004	4	4	4	3	3	3	3	3	2
1	9	8	8	7	7	7	6	6	5	5
1·5	13	12	12	11	10	10	9	8	8	7
2	17	17	16	15	14	13	12	11	10	10
2·5	22	21	20	18	17	16	15	14	13	12
3	0·00026	25	23	22	21	20	18	17	16	14
3·5	30	29	27	26	24	23	21	20	18	17
4	35	33	31	30	28	26	24	23	21	19
4·5	39	37	35	33	31	29	27	25	23	21
5	43	41	39	37	35	33	30	28	26	24
5·5	0·00048	45	43	41	38	36	33	31	29	26
6	52	50	47	44	42	39	36	34	31	29
6·5	56	54	51	48	45	42	40	37	34	31
7	61	58	55	52	49	46	43	40	36	33
7·5	65	62	59	55	52	49	46	42	39	36
8	0·00069	66	63	59	56	52	49	45	42	38
8·5	74	70	66	63	59	55	52	48	44	41
9	78	74	70	66	63	59	55	51	47	43
9·5	83	78	74	70	66	62	58	54	50	45
10	87	83	78	74	69	65	61	56	52	48
10·5	0·00091	87	82	78	73	69	64	59	55	50
11	96	91	86	81	76	72	67	62	57	53
11·5	100	95	90	85	80	75	70	65	60	55
12	104	99	94	89	83	78	73	68	63	57
12·5	109	103	98	92	87	81	76	71	65	60
13	0.00113	107	102	96	90	85	79	73	68	62
13·5	117	111	106	100	94	88	82	76	70	64
14	122	116	109	103	97	91	85	79	73	67
14·5	126	120	113	107	101	94	88	82	76	69
15	130	124	117	111	104	98	91	85	78	72
15·5	0·00135	128	121	114	108	101	94	88	81	74
16	139	132	125	118	111	104	97	90	83	76
16·5	143	136	129	122	115	107	100	93	86	79
17	148	140	133	126	118	111	103	96	89	81
17·5	152	144	137	129	122	114	106	99	91	84
18	0·00156	149	141	133	125	117	109	102	94	86
18·5	161	153	145	137	129	121	112	104	96	88
19	165	157	149	140	132	124	116	107	99	91
19·5	169	161	152	144	135	127	119	110	102	93
20	174	165	156	148	139	130	122	113	104	96

mindig +). — Argumentumai: $\left\{h-o,\ \frac{b}{a}\right\}$, $\left\{o+u,\ \frac{b}{a}\right\}$

$h-o$ / $o+u$	$\frac{b}{a}$ 0·00010	9	8	7	6	5	4	3	2	1
0·5	0·00002	2	2	2	1	1	1	1	0	0
1	4	4	3	3	3	2	2	2	1	0
1·5	6	6	5	5	4	3	3	2	1	1
2	9	8	7	6	5	4	3	3	2	1
2·5	11	10	9	8	7	5	4	4	2	1
3	0·00013	12	10	9	8	7	5	4	3	1
3·5	15	14	12	11	9	8	6	5	3	2
4	17	16	14	12	10	9	7	5	3	2
4·5	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2
5	22	20	17	15	13	11	9	7	4	2
5·5	0·00024	21	19	17	14	12	10	7	5	2
6	26	23	21	18	16	13	10	8	5	3
6·5	28	25	23	20	17	14	11	9	6	3
7	30	27	24	21	18	15	12	9	6	3
7·5	33	29	26	23	20	16	13	10	7	3
8	0·00035	31	28	24	21	17	14	11	7	4
8·5	37	33	30	26	22	19	15	11	7	4
9	39	35	31	27	23	20	16	12	8	4
9·5	41	37	33	29	25	21	17	13	8	4
10	43	39	35	30	26	22	17	13	9	4
10·5	0·00046	41	36	32	27	23	18	14	9	5
11	48	43	38	33	29	24	19	15	10	5
11·5	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5
12	52	47	42	36	31	26	21	16	10	5
12·5	54	49	43	38	33	27	22	17	11	5
13	0·00056	51	45	40	34	28	23	17	11	6
13·5	59	53	47	41	35	29	23	18	12	6
14	61	55	49	43	36	30	24	18	12	6
14·5	63	57	50	44	38	31	25	19	13	6
15	65	59	52	46	39	33	26	20	13	7
15·5	0·00067	60	54	47	40	34	27	20	13	7
16	69	62	56	49	42	35	28	21	14	7
16·5	72	64	57	50	43	36	29	22	14	7
17	74	66	59	52	44	37	30	22	15	7
17·5	76	68	61	53	46	38	30	23	15	8
18	0·00078	70	63	55	47	39	31	24	16	8
18·5	80	72	64	56	48	40	32	24	16	8
19	83	74	66	58	49	41	33	25	17	8
19·5	85	76	68	59	51	42	34	26	17	9
20	87	78	69	61	52	43	35	26	17	9

$\frac{h-o}{o+u}$	$\frac{o}{u}$									
	0·00020	19	18	17	16	15	14	13	12	11
20·5	0·00178	169	160	151	142	134	125	116	107	98
21	182	173	164	155	146	137	128	119	109	100
21·5	187	177	168	159	149	140	131	121	112	103
22	191	182	172	162	153	143	134	124	115	105
22·5	195	186	176	166	156	147	137	127	117	107
23	0·00200	190	180	170	160	150	140	130	120	110
23·5	204	194	184	173	163	153	143	133	122	112
24	208	198	188	177	167	156	146	135	125	115
24·5	213	202	192	181	170	160	149	138	128	117
25	217	206	195	185	174	163	152	141	130	119
25·5	0·00221	210	199	188	177	166	155	144	133	122
26	226	215	203	192	181	169	158	147	136	124
26·5	230	219	207	196	184	173	161	150	138	127
27	235	223	211	199	188	176	164	152	141	129
27·5	239	227	215	203	191	179	167	155	143	131
28	0·00243	231	219	207	195	182	170	158	146	134
28·5	248	235	223	210	198	186	173	161	149	136
29	252	239	227	214	202	189	176	164	151	139
29·5	256	243	231	218	205	192	179	167	154	141
30	261	248	235	221	208	195	182	169	156	143
30·5	0·00265	252	238	225	212	199	185	172	159	146
31	269	256	242	229	215	202	188	175	162	148
31·5	274	260	246	233	219	205	192	178	164	150
32	278	264	250	236	222	208	195	181	167	153
32·5	282	268	254	240	226	212	198	183	169	155
33	0·00287	272	258	244	229	215	201	186	172	158
33·5	291	276	262	247	233	218	204	189	175	160
34	295	281	266	251	236	221	207	192	177	162
34·5	300	285	270	255	240	225	210	195	180	165
35	304	289	274	258	243	228	213	198	182	167
35·5	0·00308	293	277	262	247	231	216	200	185	170
36	313	297	281	266	250	235	219	203	188	172
36·5	317	301	285	269	254	238	222	206	190	174
37	331	305	389	273	257	241	225	209	193	177
37·5	326	309	293	277	261	244	228	212	195	179
38	0·00330	314	297	281	264	248	231	215	198	182
38·5	334	318	301	284	268	251	234	217	201	184
39	339	322	305	288	271	254	237	220	203	186
39·5	343	326	309	292	274	257	240	223	206	189
40	347	330	313	295	278	261	243	226	208	191

folytatása.

$\frac{h-o}{o+u}$	b/a 0·00010	9	8	7	6	5	4	3	2	1
20·5	0·00089	80	71	62	53	45	36	27	18	9
21	91	82	73	64	55	46	36	27	18	9
21·5	93	84	75	65	56	47	37	28	19	9
22	96	86	76	67	57	48	38	29	19	10
22·5	98	88	78	68	59	49	39	29	20	10
23	0·00100	90	80	70	60	50	40	30	20	10
23·5	102	92	82	71	61	51	41	31	20	10
24	104	94	84	73	63	52	42	31	21	10
24·5	106	96	85	74	64	53	43	32	21	11
25	109	98	87	77	65	54	43	33	22	11
25·5	0·00111	100	89	78	66	55	44	33	22	11
26	113	102	90	79	68	56	45	34	23	11
26·5	115	104	92	81	69	58	46	35	23	12
27	117	106	94	82	70	59	47	35	23	12
27·5	119	107	96	84	72	60	48	36	24	12
28	0·00122	109	97	85	73	61	49	36	24	12
28·5	124	111	99	87	74	62	50	37	25	12
29	126	113	101	88	76	63	50	38	25	13
29·5	128	115	103	90	77	64	51	38	26	13
30	130	117	104	91	78	65	52	39	26	13
30·5	0·00132	119	106	93	79	66	53	40	26	13
31	135	121	108	94	81	67	54	40	27	14
31·5	137	123	109	96	82	68	55	41	27	14
32	139	125	111	97	83	69	56	42	28	14
32·5	141	127	113	99	85	71	56	42	28	14
33	0·00143	129	115	100	86	72	57	43	29	14
33·5	145	131	116	102	87	73	58	44	29	15
34	148	133	118	103	89	74	59	44	30	15
34·5	150	135	120	105	90	75	60	45	30	15
35	152	137	122	106	91	76	61	46	30	15
35·5	0·00154	139	123	108	93	77	62	46	31	15
36	156	141	125	109	94	78	63	47	31	16
36·5	159	143	127	111	95	79	63	48	32	16
37	161	145	129	112	96	80	64	48	32	16
37·5	163	147	130	114	98	81	65	49	33	16
38	0·00165	149	132	116	99	83	66	50	33	17
38·5	167	150	134	117	100	84	67	50	33	17
39	169	152	135	119	102	85	68	51	34	17
39·5	172	154	137	120	103	86	69	51	34	17
40	174	156	139	122	104	87	69	52	35	17

VIII. Tábla

$\frac{h-o}{o+u}$	h/u									
	0·00020	19	18	17	16	15	14	13	12	11
40·5	0·00352	334	317	299	281	264	246	229	211	193
41	356	338	321	303	285	267	249	231	214	196
41·5	360	342	324	306	288	270	252	234	216	198
42	365	347	328	310	292	274	255	237	219	201
42·5	369	351	332	314	295	277	258	240	221	203
43	0·00373	355	336	317	299	280	261	243	224	205
43·5	378	359	340	321	302	283	264	246	227	208
44	382	363	344	325	306	287	268	248	229	210
44·5	387	367	348	329	309	290	271	851	232	213
45	391	371	352	332	313	293	274	254	235	215
45·5	0·00395	375	356	336	316	296	277	257	237	217
46	400	380	360	340	320	300	280	260	240	220
46·5	404	384	364	343	323	303	283	263	242	222
47	408	388	367	347	327	306	286	265	245	225
47·5	413	392	371	351	330	309	289	268	248	227
48	0·00417	396	375	354	334	313	292	271	250	229
48·5	421	400	379	358	337	316	295	274	253	232
49	426	404	383	362	340	319	298	277	255	234
49·5	430	408	387	365	344	322	301	279	258	236
50	434	412	391	369	347	326	304	282	261	239
50·5	0·00439	417	395	373	351	329	307	285	263	241
51	443	421	399	377	354	332	310	288	266	244
51·5	447	425	403	380	358	335	313	291	268	246
52	452	429	407	384	361	339	316	294	271	248
52·5	456	433	410	388	365	342	319	296	274	251
53	0·00460	437	414	391	368	345	322	299	276	253
53·5	465	441	418	395	372	348	325	302	279	256
54	469	446	422	399	375	352	328	305	281	258
54·5	473	450	426	402	379	355	331	308	284	260
55	478	454	430	406	382	358	334	311	287	263
55·5	0·00482	458	434	410	386	362	337	313	289	265
56	486	462	438	413	389	365	340	316	292	268
56·5	491	466	442	417	393	368	344	319	294	270
57	495	470	446	421	396	371	347	322	297	272
57·5	499	474	450	425	400	375	350	325	300	275
58	0·00504	479	453	428	403	378	353	327	302	277
58·5	508	483	457	432	406	381	356	330	305	279
59	512	487	461	436	410	384	359	333	307	282
59·5	517	491	465	439	413	388	362	336	310	284
60	521	495	469	443	417	391	365	339	313	287

folytatása.

$\frac{h-o}{o+u}$	$\frac{D}{n}$									
	0·00010	9	8	7	6	5	4	3	2	1
40·5	0·00176	158	141	123	106	88	70	53	35	18
41	178	160	142	125	107	89	71	53	36	18
41·5	180	162	144	126	108	90	72	54	36	18
42	182	164	146	128	109	91	73	55	36	18
42·5	185	166	148	129	111	92	74	55	37	19
43	0·00187	168	149	131	112	93	75	56	37	19
43·5	189	170	151	132	113	94	76	56	38	19
44	191	172	153	134	115	96	76	57	38	19
44·5	193	174	155	135	116	97	77	58	39	19
45	195	176	156	137	117	98	78	59	39	20
45·5	0·00198	178	158	138	119	99	79	59	40	20
46	200	180	160	140	120	100	80	60	40	20
46·5	202	182	162	141	121	101	81	61	40	20
47	204	184	163	143	122	102	82	61	41	20
47·5	206	186	165	145	124	103	83	62	41	21
48	0·00208	188	167	146	125	104	83	63	42	21
48·5	211	190	168	147	126	105	84	63	42	21
49	213	191	170	149	128	106	85	64	43	21
49·5	215	193	172	150	129	107	86	64	43	22
50	217	195	174	152	130	109	87	65	43	22
50·5	0·00219	197	175	154	131	110	88	65	44	22
51	221	199	177	155	133	111	89	66	44	22
51·5	224	201	179	157	134	112	89	67	45	22
52	226	203	181	158	136	113	90	68	45	23
52·5	228	205	182	160	137	114	91	68	46	23
53	0·00230	207	184	161	138	115	92	69	46	23
53·5	232	209	186	163	139	116	93	70	46	23
54	235	211	188	164	141	117	94	70	47	24
54·5	237	213	189	166	142	118	95	71	47	24
55	239	215	191	167	143	119	96	72	48	24
55·5	0·00241	217	193	169	145	121	96	72	48	24
56	243	219	195	170	146	122	97	73	49	24
56·5	245	221	196	172	147	123	98	74	49	25
57	248	223	198	173	149	124	99	74	50	25
57·5	250	225	200	175	150	125	100	75	50	25
58	0·00252	227	202	176	151	126	101	76	50	25
58·5	254	229	203	178	152	127	102	76	51	25
59	256	231	205	179	154	128	102	77	51	26
59·5	258	233	207	181	155	129	103	78	52	26
60	261	234	208	182	156	130	104	78	52	26

$\frac{h-o}{o+u}$	$\frac{b}{a}$								
	0·00020	19	18	17	16	15	14	13	12	11
60·5	0·00526	499	473	447	420	394	368	342	315	289
61	530	503	477	450	424	397	371	344	318	291
61·5	534	507	481	454	427	401	374	347	321	294
62	539	512	485	458	431	404	377	350	323	296
62·5	543	516	489	461	434	407	380	353	326	299
63	0·00547	520	492	465	438	410	383	356	328	301
63·5	552	524	496	469	441	414	386	358	331	303
64	556	528	500	473	445	417	389	361	334	306
64·5	560	532	504	476	448	420	392	364	336	308
65	565	536	508	480	452	423	395	367	339	311
65·5	0·00569	540	512	484	455	427	398	370	341	313
66	573	545	516	487	459	430	401	373	344	315
66·5	578	549	520	491	462	433	404	375	347	318
67	582	553	224	495	466	436	407	378	349	320
67·5	586	557	528	498	469	440	410	381	352	322
68	0·00591	561	532	502	472	443	413	384	354	325
68·5	595	565	535	506	476	446	416	387	357	327
69	599	569	539	509	479	449	419	390	360	330
69·5	604	573	543	513	483	453	423	392	362	332
70	608	578	547	517	486	456	426	395	365	334
70·5	0·00612	582	551	520	490	459	429	398	367	337
71	617	586	555	524	493	462	432	401	370	339
71·5	621	590	559	528	497	466	435	404	373	342
72	625	594	563	532	500	469	438	406	375	344
72·5	630	598	567	535	504	472	441	409	378	346
73	0·00634	602	571	539	507	476	444	412	380	349
73·5	638	606	575	543	511	479	447	415	383	351
74	643	611	578	546	514	482	450	418	386	354
74·5	647	615	582	550	518	485	453	421	388	356
75	651	619	586	554	521	489	456	423	391	358
75·5	0·00656	623	590	557	525	492	459	426	393	361
76	660	627	594	561	528	495	462	429	396	363
76·5	664	631	598	565	532	498	465	432	399	365
77	669	635	602	568	535	502	468	435	401	368
77·5	673	639	606	572	539	505	471	438	404	370
78	0·00678	644	610	576	542	508	474	440	407	373
78·5	682	648	614	580	545	511	477	443	409	377
79	686	652	618	583	549	515	480	446	412	375
79·5	691	656	621	587	552	518	483	449	414	380
80	695	660	625	591	556	521	486	452	417	382

folytatása.

h—o / o+u	b/n 0·00010	9	8	7	6	5	4	3	2	1
60·5	0·00263	236	210	184	158	131	105	79	53	26
61	265	238	212	185	159	132	106	79	53	27
61·5	267	240	214	187	160	134	107	80	53	27
62	269	242	215	188	162	135	108	81	54	27
62·5	271	244	217	190	163	136	109	81	54	27
63	0·00274	246	219	192	164	137	109	82	55	27
63·5	276	248	221	193	165	138	110	83	55	28
64	278	250	222	195	167	139	111	83	56	28
64·5	280	252	224	196	168	140	112	84	56	28
65	282	254	226	198	169	141	113	85	56	28
65·5	0·00284	256	228	199	171	142	114	85	57	28
66	287	258	229	201	172	143	115	86	57	29
66·5	289	260	231	202	173	144	116	87	58	29
67	291	262	233	204	175	145	116	87	58	29
67·5	293	264	235	205	176	147	117	88	59	29
68	0·00295	266	236	207	177	148	118	89	59	30
68·5	297	268	238	208	178	149	119	89	59	30
69	300	270	240	210	180	150	120	90	60	30
69·5	302	272	241	211	181	151	121	91	60	30
70	304	274	243	213	182	152	122	91	61	30
70·5	0·00306	276	245	214	184	153	122	92	61	31
71	308	278	247	216	185	154	123	93	62	31
71·5	311	279	248	217	186	155	124	93	62	31
72	313	281	250	219	188	156	125	94	63	31
72·5	315	283	252	220	189	157	126	94	63	32
73	0·00317	285	254	222	190	159	127	95	63	32
73·5	319	287	255	223	192	160	128	96	64	32
74	321	289	257	225	193	161	129	96	64	32
74·5	324	291	259	226	194	162	129	97	65	32
75	326	293	161	228	195	163	130	98	65	33
75·5	0·00328	295	262	230	197	164	131	98	66	33
76	330	297	264	231	198	165	132	99	66	33
76·5	332	299	266	233	199	166	133	100	66	33
77	334	301	268	234	201	167	134	100	67	33
77·5	337	303	269	236	202	168	135	101	67	34
78	0·00339	305	271	237	203	169	135	102	68	34
78·5	341	307	273	239	205	170	136	102	68	34
79	343	309	274	240	206	172	137	103	69	34
79·5	345	311	276	242	207	173	138	104	69	35
80	347	313	278	243	208	174	139	104	69	35

IX.

A tábla értéke

a lejtmérésnél:
— jelt kap, ha a vizszintes irányvonal vagy a felső a két céltábla közt.
+ jelt kap, ha a vizszintes irányvonal a rúd alsó felét

a távmérésnek:
első tagjára nézve:
— jelt kap, ha a vizszintes irányvonal a
+ jelt kap, ha a vizszintes irányvonal a
második tagjára nézve mindig — jelt kap.

Argumentumai:
$m + log(h - o)$
$n + log(h - o)$
$m + 2 log(o - u)$.

Argum		Argum		Argum.		Argum.		Argum.	
8·500	0·00108	8·675	161	8·850	241	8·950	303	9·020	356
505	109	680	163	855	244	952	305	022	358
510	110	685	165	860	247	954	306	024	360
515	111	690	167	865	249	956	308	026	361
520	113	695	169	870	252	958	309	028	363
8·525	0·00114	8·700	171	8·875	255	8·960	310	9·030	365
530	115	705	173	880	258	962	312	032	366
535	117	710	175	885	261	964	313	034	368
540	118	715	177	890	264	966	315	036	370
545	119	720	179	895	267	968	316	038	371
8·550	0·00121	8·725	181	8·900	270	8·970	318	9 040	373
555	122	730	183	902	272	972	319	042	375
560	124	735	185	904	273	974	321	044	377
565	125	740	187	906	274	976	322	046	378
570	126	745	189	908	275	978	323	048	380
575	0·00128	8·750	191	8·910	277	8·980	325	9·050	382
580	129	755	194	912	278	982	326	052	384
585	131	760	196	914	279	984	328	054	385
590	132	765	198	916	280	986	330	056	387
595	134	770	200	918	282	988	331	058	389
8·600	0·00135	8·775	203	8·920	283	8·990	333	9·060	391
605	137	780	205	922	284	992	334	062	392
610	139	785	207	924	286	994	336	064	394
615	140	790	210	926	287	996	337	066	396
620	142	795	212	928	288	998	339	068	398
8·625	0·00144	8·800	215	8·930	290	9·000	340	9·070	400
630	145	805	217	932	291	002	342	072	402
635	147	810	220	934	292	004	343	074	404
640	149	815	222	936	294	006	345	076	405
645	151	820	225	938	295	008	347	078	407
8·650	0·00152	8·825	227	8·940	296	9·010	348	9·080	409
655	154	830	230	942	298	012	350	082	411
660	156	835	233	944	299	014	351	084	413
665	157	840	234	946	301	016	353	086	415
670	159	845	238	948	302	018	355	088	417

Tábla.

céltábla felett, vagy az alsó céltábla alatt megyen el, vagy a rúd felső felét metszi

metszi a két céltábla közt.
felső tábla felett, vagy az alsó alatt megyen el.
rudat a két tábla közt metszi.

$$\left.\begin{array}{l} +\log(h-o+h-u)-2\,VIII\left[\text{Argum. : } h+o.\ \frac{b}{a}\right] \\ +\log(h-u)-2\,VIII\left[\text{Argum. : } h+o,\ \frac{b}{a}\right] \end{array}\right\}$$

Argum.		Argum.		Argum.		Argum.		Argum.	
9·090	0·00419	9·130	459	9·165	498	9·200	539	9·235	585
092	421	131	460	166	499	201	541	236	586
094	423	132	461	167	500	202	542	237	587
096	424	133	462	168	501	203	543	238	589
098	426	134	463	169	502	204	544	239	590
9·100	0·00428	8·135	464	9·170	503	9·205	546	9·240	591
101	429	136	465	171	504	206	547	241	593
102	430	137	466	172	506	207	548	242	594
103	431	138	468	173	507	208	549	243	595
104	432	139	469	174	508	209	551	244	597
9·105	0·00433	9·140	470	9·175	509	9·210	552	9·245	598
106	434	141	471	176	510	211	553	246	600
107	435	142	472	177	512	212	554	247	601
108	436	143	473	178	513	213	556	248	602
109	437	144	474	179	514	214	557	249	604
9·110	0·00438	9·145	475	9·180	515	9·215	558	9 250	605
111	439	146	476	181	516	216	560	251	607
112	440	147	477	182	517	217	561	252	608
113	441	148	478	183	519	218	562	253	609
114	442	149	480	184	520	219	563	254	611
9·115	0·00443	9 150	481	9·185	521	9 220	565	9·255	612
116	444	151	482	186	522	221	566	256	614
117	446	152	483	187	523	222	567	257	615
118	447	153	484	188	525	223	569	258	616
119	448	154	485	189	526	224	570	259	618
9·120	0·00449	9·155	486	9·190	527	9·225	571	9·260	619
121	450	156	487	191	528	226	573	261	621
122	451	157	488	192	529	227	574	262	622
123	452	158	490	193	531	228	575	263	624
124	453	159	491	194	532	229	577	264	625
9·125	0·00454	9·160	492	9·195	533	9·230	578	9·265	626
126	455	161	493	196	534	231	579	266	628
127	456	162	494	197	536	232	581	267	629
128	457	163	495	198	537	233	582	268	631
129	458	164	496	199	538	234	583	269	632

IX. Tábla folytatása.

Argum.		Argum.		Argum.		Argum.		Argum.	
9·270	0·00634	9·320	711	9·370	798	9·420	895	9·470	1004
271	635	321	713	371	799	421	897	471	1007
272	637	322	714	372	801	422	899	472	1009
273	638	323	716	373	803	423	901	473	1011
274	639	324	717	374	805	424	903	474	1013
9·275	0·00641	9·325	719	9·375	807	9·425	905	9·475	1016
276	642	326	721	376	809	426	907	476	1018
277	644	327	722	377	811	427	910	477	1021
278	645	328	724	378	812	428	912	478	1023
279	647	329	726	379	814	429	914	479	1025
9·280	0·00648	9·330	727	9·380	816	9·430	916	9·480	1028
281	650	331	729	381	818	431	918	481	1030
282	651	332	731	382	820	432	920	482	1032
283	653	333	733	383	822	433	922	483	1035
284	654	334	734	384	824	434	924	484	1037
9·285	0·00656	9·335	736	9·385	826	9·435	926	9·485	1040
286	657	336	738	386	828	436	929	486	1042
287	659	337	739	387	829	437	931	487	1044
288	660	338	741	388	831	438	933	488	1047
289	662	339	743	389	833	439	935	489	1049
9·290	0·00663	9·340	744	9·390	835	9·440	937	9·490	1052
291	665	341	746	391	837	441	939	491	1054
292	667	342	748	392	839	442	941	492	1056
293	668	343	750	393	841	443	944	493	1059
294	670	344	751	394	843	444	946	494	1061
9·295	0·00671	9·345	753	9·395	845	9·445	948	9·495	1064
296	673	346	755	396	847	446	950	496	1066
297	674	347	757	397	849	447	952	497	1069
298	676	348	758	398	851	448	955	498	1071
299	677	349	760	399	853	449	957	499	1074
9·300	0·00679	9·350	762	9·400	855	9·450	959		
301	680	351	764	401	857	451	961		
302	682	352	765	402	859	452	963		
303	684	353	767	403	861	453	966		
304	685	354	769	404	863	454	968		
9·305	0·00687	9·355	771	9·405	865	9·455	970		
306	688	356	772	406	867	456	972		
307	690	357	774	407	869	457	975		
308	692	358	776	408	871	458	977		
309	693	359	778	409	873	459	979		
9·310	0·00695	9·360	780	9·410	875	9·460	981		
311	696	361	781	411	877	461	984		
312	698	362	783	412	879	462	986		
313	700	363	785	413	881	463	988		
314	701	364	787	414	883	464	990		
9·315	0·00703	9·365	789	9·415	885	9·465	993		
316	704	366	790	416	887	466	995		
317	706	367	792	417	889	467	997		
318	708	368	794	418	891	468	1000		
319	709	369	796	419	893	469	1002		

X. Tábla.

(Jele mindig —). Argumentumai : ($o-u$, a).

$o-u$	a									
	580	600	620	640	660	680	700	720	740	760
0·60	0·046	43	40	37	35	33	31	30	28	27
61	44	41	39	36	34	32	30	29	27	26
62	43	40	37	35	33	31	29	28	26	25
63	41	39	36	34	32	30	28	27	25	24
64	40	37	35	33	31	29	27	26	25	23
0·65	0·039	36	34	32	30	28	27	25	24	23
66	38	35	33	31	29	27	26	24	23	22
67	37	34	32	30	28	27	25	24	22	21
68	35	33	31	29	27	26	24	23	22	21
69	34	32	30	28	27	25	24	22	21	20
0·70	0 033	31	29	27	26	24	23	22	21	20
72	32	30	28	26	24	23	22	21	19	19
74	30	28	26	25	23	22	21	20	18	18
76	28	27	25	23	22	21	20	19	17	17
78	27	25	24	22	21	20	19	18	17	16
0 80	0·026	24	22	21	20	19	18	17	16	15
82	24	23	21	20	19	18	17	16	15	14
84	23	22	20	19	18	17	16	15	14	14
86	22	21	19	18	17	16	15	14	14	13
88	21	20	19	17	16	15	15	14	13	12
0·90	0·020	19	18	17	16	15	14	13	12	12
0·95	18	17	16	15	14	13	13	12	11	11
1·00	16	15	14	13	13	12	11	11	10	10
1·05	15	14	13	12	12	11	10	10	9	9
1·10	14	13	12	11	11	10	9	9	8	8
1 15	0·012	12	11	10	10	9	9	8	8	7
1·2	11	11	10	9	9	8	8	7	7	7
1·3	10	9	9	8	8	7	7	6	6	5
1·4	8	8	7	7	7	6	6	5	5	5
1·5	7	7	6	6	6	5	5	5	4	4
1·7	0·006	5	5	4	4	4	4	4	4	3
2·0	4	4	4	3	3	3	3	3	3	2
2 5	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2
3·0	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1
4·0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5·0	0·001	1	1	1	1	0	0	0	0	0

XI. Tábla.

(Jele mindig egyenlő a ($h-M$)-ével). Argumentumai : ($h-M$, k).

$h-M$	k				
	20	25	30	35	40
5	0·001	1	1	1	1
10	2	2	2	1	1
15	4	3	3	2	2
20	5	4	4	3	2
25	6	5	5	4	3

XII.

A telekkönyv

Folyó szám	Szelvény szám	Ház szám	A birtokos neve	telki állománya	hossza ölekben	szélessége ölekben	területe □ ölekb	Belsőség . . . □ öles holdakban	Szántóföld I. osztályú	Szántóföld II. osztályú	Szántóföld III. osztályú
462	II.	42	Kasza János	1/2	165·4	16·2	2679	—	—	2·233	—
463	II.	36	Szikár Péter	1	130·0	30·0	3900	—	—	—	—
464	III.	15	Guba Miklós	1/2	rendetlen		1050	—	—	—	—

Tábla.
schemája.

t o k										
Kaszáló			Legelő			erdő	szőllő	nádas	haszon-vehetetlen	Észre-vételek
I.	II.	III.	I.	II.	III.					
holdakban						. . . ☐ öles holdakban				
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
3·545	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
0·955	—	—	—	—	—	—	—	—	—	