1987

FASCHING

A
földmérés-
tan
kézikönyve

II.

F

108/b

MAGYARORSZÁGOS ERDÉSZETI EGYESÜLET
1851
1866

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

MAGYAR ERDÉSZETI EGYESÜLET
1851
1866/1991

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

ORSZÁGOS ERDÉSZETI EGYESÜLET
1851
1866
Érczhegyi Géza
könyvkötészete
© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

F/108 b

A FÖLDMÉRÉSTAN KÉZIKÖNYVE

II. KÖTET

A M. KIR. PÉNZÜGYMINISTERIUM MEGBIZÁSÁBÓL IRTA:

DR. FASCHING ANTAL

M. KIR. FELMÉRÉSI FELÜGYELŐ, MŰEGYETEMI MAGÁNTANÁR

KÖZREMŰKÖDÖTT:

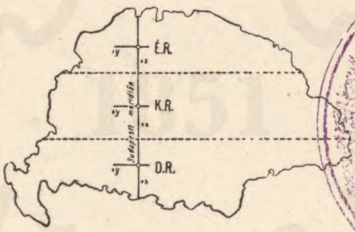
SZILÁGYI BÉLA

M. KIR. HÁROMSZÖGELŐ FŐMÉRNÖK

OEE Könyvtár
Áll.Ell. 2018

KIADTA A M. KIR. PÉNZÜGYMINISTERIUM

I/5.
I.



92 SZÖVEGÁBRÁVAL

Ák: 3606

BUDAPEST, 1914.
MAGYAR KIRÁLYI ÁLLAMI NYOMDA.

1607/1913.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

ELŐSZÓ.

A m. kir. pénzügyministerium e munkát az országos kataszteri felmérés végrehajtása iránt kiadott utasitásokkal kapcsolatos kézikönyvként adja ki. Mint ilyen, a felmérési intézményünknél előirt szakvizsgákra nézve tankönyvül is szolgál.

E munka három kötetből áll. Az I. és III. kötet túlnyomólag az alsó geodéziai, a II. kötet pedig kizárólag az országos felmérésekben szereplő felső geodéziai müveleteket tárgyalja. A II. kötet anyaga a háromszögelési szakvizsgának képezi tárgyát.

A jelen kötet I. és II. részét *dr. Fasching Antal*, III. részét pedig *Szilágyi Béla* irta.

Budapest, 1914. április havában.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

ORSZÁGOS ERDÉSZETI EGYESÜLET
1851
1866

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A II. kötet tartalomjegyzéke.

I. Rész. A vizszintes felmérések matematikai alapja.

I. Fejezet. A matematikai vetületekről általában és a torzulási törvény.

1. §. Vetületi egyenletek . . . . . 1 oldal
2. §. A vetületi törvények definiciója . . . . . 3 „
3. §. Az általános torzulási törvény . . . . . 6 „
4. §. Vetületek előállítása . . . . . 11 „

II. Fejezet. A matematikai vetületek alkalmazása az országos felmérésekben.

1. §. Az országos felmérések szervezése . . . . . 12 „
2. §. A vetületek megválasztásának szempontjai . . . . . 16 „
3. §. A kiegyenlítési vetületre való redukció számítások konform vetületek esetében . . . . . 18 „
4. §. Megjegyzések az irányredukciókról . . . . . 23 „
5. §. A hosszredukció . . . . . 34 „

III. Fejezet. Két különböző konform síkvetület közötti vonatkozások.

1. §. Egységes háromszöghálózat és közös sík koordináta tengelyrendszer esete . . . . . 36 „
2. §. Egységes háromszöghálózat és azonos kezdőmeridián esete . . . . . 39 „
3. §. A helyi átszámítási tájékozási állandó számítása . . . . . 40 „
4. §. IV. rendű pontok átszámítása . . . . . 43 „
5. §. A II. és III. rendű háromszögelési pontok átszámítása . . . . . 45 „
6. §. A budai stereográfikus és a hengervetületek közötti speciális vonatkozás . . . . . 48 „
7. §. A felvételi szelvényhálózat átszámítása . . . . . 49 „
8. §. Vetületi átszámítás nem egységes háromszöghálózat esetében . . . . . 51 „

IV. Fejezet. Magyarország vetületi rendszereinek részletes ismertetése.

1. §. A vetületi rendszerek „bevezetésének“ fogalma . . . . . 68 „
2. §. A magyar vetületi rendszerek általános ismertetése . . . . . 69 „
3. §. A konform gömbi vetület . . . . . 74 „
4. §. A stereográfikus vetület . . . . . 78 „
Függelék a stereográfikus vetülethez . . . . . 99 „
5. §. A konform hengervetület . . . . . 109 „
Függelék a IV. Fejezethez . . . . . 128 „

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

V. Fejezet. A legfontosabb térképészeti vetületek ismertetése.

1. §. A térképészeti vetületek szokásos osztályozása . . . . . 141 oldal
2. §. A gyakorlatilag fontosabb vetítési törvények . . . . . 142 „
3. §. Magyarország legkisebb össztorzulású vetülete . . . . . 154 „

II. Rész. Az országos felmérésekkel kapcsolatos astronomiai mérések.

I. Fejezet. A látszólagos éggömb különböző koordinátarendszerei.

1. §. Alapfogalmak . . . . . 171 oldal
2. §. Az idő . . . . . 174 „
3. §. Szabatos órák . . . . . 181 „
4. §. Mérések redukciója . . . . . 182 „
5. §. Aberratió, präcessió, nutatió és az évi parallaxis . . . . . 185 „
6. §. A fontosabb képletek gyüjteménye . . . . . 187 „

II. Fejezet. Astronomiai műszerek.

1. §. A tükör sexánts . . . . . 192 „
2. §. Az átmeneti vagy passage műszer . . . . . 194 „
3. §. Az universál műszer . . . . . 200 „

III. Fejezet. Idő- és helymeghatározások.

1. §. Időmeghatározások . . . . . 204 „
2. §. A sarkmagasság mérése . . . . . 212 „
3. §. Csillagászati azimut mérése . . . . . 219 „
4. §. Földrajzi hosszuság mérése . . . . . 227 „
Hengervetületi redukciós táblázatok . . . . . 232 „

III. Rész. Közvetitő mérések kiegyenlitése egymástól független ismeretlenekkel.

1. §. Bevezetés . . . . . 235 oldal
2. §. A közvetítő mérések kiegyenlítésének elve . . . . . 236 „
3. §. A közvetítő mérések kiegyenlítésének általános alkalmazása *lineáris* alaku feltételi egyenletek esetében . . . . . 239 „
4. §. A közvetítő mérések kiegyenlítésének alkalmazása *nem lineáris* alaku feltételi egyenletek esetében . . . . . 241 „
5. §. A normál egyenletek felállítása és megoldása . . . . . 246 „
1. Általános megjegyzések . . . . . 246 „
2. Gauss módszere . . . . . 246 „
3. A megoldás több ismeretlen esetében . . . . . 250 „
4. A normálegyenletek *numerikus* megoldása . . . . . 252 „
5. A normálegyenletek *indirekt* megoldása . . . . . 260 „
6. §. A kiegyenlitett értékek *megbizhatóságának* számítása . . . . . 263 „
1. Általános fogalmak . . . . . 263 „
2. Sulykoefficiensek számitása több ismeretlen esetében . . . . . 267 „
3. Függvényértékek középhibájának számitása a kiegyenlitett értékek alapján . . . . . 275 „

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

7. §. Példák.

1. Példa : Közvetetlen hosszmérés kiegyenlítése (Gerling példa) . . . . . 277 oldal
2. „ Közvetetlen hosszmérés kiegyenlítése nem egyenlő súlyokkal . . . . . 281 „
3. „ Tahiméter állandók meghatározása . . . . . 285 „
4. „ Sarkmagasság mérés kiegyenlítése . . . . . 290 „
5. „ Magassági hálózat kiegyenlítése . . . . . 295 „
6. „ Állomás kiegyenlítések . . . . . 300 „
7. „ Iránymérések kiegyenlítése . . . . . 312 „
8. „ Koordináta kiegyenlítés iránymérések esetében . . . . . 334 „
1. A feltételi egyenletek felállítása . . . . . 336 „
2. Az a, b együtthatók jelentősége és számítása . . . . . 338 „
3. A feltételi egyenletek alakja külső, belső és külső belső irányok esetében . . 339 „
4. Hátrametszés kiegyenlítése . . . . . 340 „
5. Előmetszés kiegyenlítése . . . . . 352 „
6. Az előmetszés kiegyenlítésnek más módja . . . . . 359 „
7. Külső-belső irányokkal való kiegyenlítés . . . . . 370 „
8. Nagyobb hálózatok kiegyenlítése . . . . . 382 „
9. Törési (II. r.) hálózat kiegyenlítése . . . . . 385 „
10. Három pontból álló III. r. csoport kiegyenlítése . . . . . 393 „

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

I. RÉSZ.

A vízszintes felmérések matematikai alapja.

I. FEJEZET.

A matematikai vetületek és a torzulási törvény.

1. §. Vetületi egyenletek.

Legyen az A felület végtelen sok parameteres egyenletrendszere közül az (A)-val jelölt:

$$\begin{aligned} x &= f_1\ (u,\ v) \\ y &= f_2\ (u,\ v) \qquad (A) \\ z &= f_3\ (u,\ v) \end{aligned}$$

egyenletrendszer megadva.

Egy más felület pedig, legyen a neve B, ugyancsak térbeli derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatva, a (B)-vel jelölt:

$$\begin{aligned} \xi &= g_1\ (p,\ q) \\ \eta &= g_2\ (p,\ q) \qquad (B) \\ \zeta &= g_3\ (p,\ q) \end{aligned}$$

adott parameteres egyenletrendszer által legyen analitikailag definiálva.

Jelöljük $((A))$-val az adott (A) koordinátafüggvényekben szereplő $(u,\ v)$ parameterrendszernek reális értelmezési tartományát, vonatkoztatva a tetszőleges síkon képzelt $\pm u,\ \pm v$ derékszögű koordinátatengelyekre. (1. ábra bal.)

Jelentse $((M))$ ezen tartománynak azon zárt részét (kerületét), amely egy az (A) felület tetszőleges, de megadott helyén fekvő és tetszőleges terjedelmű, de zárt M felületrésznek összes $(u,\ v)$ parameterérték rendszereit foglalja magában.

Analog módon jelentse $((B))$ az adott (B) egyenletrendszer parametereinek reális értelmezési tartományát egy síkbeli $\pm p,\ \pm q$ derékszögű koordináta rendszerben. (1. ábra jobb.)

A továbbiakban most már mindig föl akarjuk tételezni, hogy úgy az (A), mint a (B) egyenletrendszer, az $((A))$, illetve $((B))$ tartományokból vett $(u,\ v)$, illetve $(p,\ q)$ parameter értékpárokhoz (az előjelekre is ügyelve) egy és csakis egy $(x,\ y,\ z)$, illetve $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ koordináta értékrendszert szolgáltatnak.

Fel fogjuk továbbá tételezni, hogy a nevezett parameterek által definiált *felületi görbeseregek* minden egyes görbéjének (tehát akármely A felületbeli u vagy v, illetve akármely a B-n definiálható p vagy q görbének) van véges és meghatározható ívhoszsza az $((A))$, illetve $((B))$ értelmezési tartományokból vett bármely parameter érték környezetében: aminek — a térbeli görbék általános elméletére hivatkozva — *elegendő* feltétele az, hogy úgy az adott (A)

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

mint az adott (B) egyenletrendszerek koordinata függvényeinek első parciális differenciál hányadosai (u és v, illetve p és q szerint), mint az illető parameter folytonos függvényei legyenek képezhetők.

Az ilyen sajátságokkal bíró egyenletrendszer által definiált B felületet *képfelületnek*, az A felületet pedig *originálfelületnek* fogjuk mondani, ha egy adott és matematikai alakban kifejezett (vagy kifejezhető) törvény szerint, az A felület egy *megadott* M felületrészének minden egyes pontjához tartozó (u, v) értékrendszernek a B felületen egy és csakis egy pont felel meg. Az originál felület adott M részében képzelt tetszőleges felületi konfigurációknak tehát a képfelületnek valami M' részében is bizonyos konfigurációk felelnek meg és pedig — a mondottakból következőleg — úgy: hogy vonalaknak ismét vonalak, területeknek ismét területek lesznek a képei.[1])

Azon törvények matematikai kifejezéseit, amelyek ily vonatkozásokat állapítanak meg az A felület adott M részének pontjai és a B felület között, *projekció egyenleteknek* nevezzük. A projekció egyenleteket a

$$\begin{aligned} p &= F_1\ (u,\ v) \\ q &= F_2\ (u,\ v) \end{aligned} \qquad (I.)$$

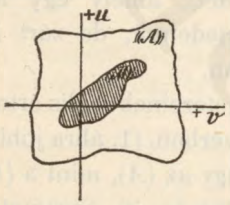
két egymástól mindenesetre független függvény alkotta egyenletrendszer alakjában képzelhetjük mindig megadva.

Ezen ($I.$) alatti vetületi egyenletektől, ha az (A) meghatározta A felület adott M részének a (B) meghatározta B felület tetszőleges helyén való vetületéről van szó, mindig a következőket kell a mondottak alapján követelni:

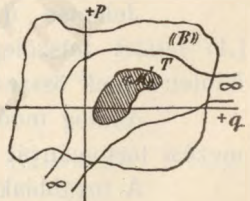
1. Az ((A)) értelmezési tartomány azon ((M)) kerületének bármely megadott ($\pm u$, $\pm v$) helyén, amely kerület az adott és leképezendő M felületrész által van egyértelműleg definiálva, szolgáltasson az ($I.$) egyenletrendszer egy és csakis egy (p, q) parameter értékrendszert, mint függvényértékeket még akkor is:[2]) ha a vetületi függvények többgyökűek volnának.

Az M fölületrészhez már nem tartozó (u, v) parameter értékeknek megfelelő helyettesítési értékrendszerek *nagyságára* és *számosságára* minden megszorítás megszünik.

Ha tehát az ($I.$) vetületi egyenletrendszerbe rendre az ((A)) adta (u, v) parametereknek (1. ábra) összes értékeit helyettesítjük, és az ily módon nyert végtelen sok (p, q) helyettesítési értékrendszert a ((B)) értelmezési tartomány koordináta rendszerére vonatkoztatva felrakva képzeljük, nyerünk egy ((B))-től általában teljesen független elhelyezésű, terjedelmű és alakú tartományt (T), mely esetleg nem is zárt tartomány, esetleg a ∞-ig terjed; melyben lehetségesek a legkülönbözőbb szingularitások. De az eddig mondottak szerint ezen (T)-nek lesz egy zárt része, amelyben *dupla pont nem létezhetik*. Ezt a részét (T)-nek, mivel az ((M))-nek megfelelő (p, q) értékrendszerek kerülete: ((M'))-el jelezzük. (1. ábra jobb).



1. ábra.



1. ábra.

[1]) A nevezett M rész pontjainak projekcióira (és csakis azokra) mindig kizárjuk tehát azon szingularitásokat, midőn pontnak vonal, vagy parányi területnek ∞ nagyságú terület felel meg, ami például a Merkátor projekció neve alatt ismert konform normálhengervetületnél, a földi ellipszoidot véve originál felületül, a polusokra nézve bekövetkezik; és ugyancsak a földi ellipszoid esetében — mindennemű polár — azimutális vetületben az ellenpolust tartalmazó félellipszoid egyes, sőt gyakran összes területelemeire tényleg előáll.

[2]) Bizonyos konvencionális megállapodások folytán.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

2. Ezen $((M'))$ részről most már észszerűen azt kell követelnünk, hogy *teljesen benfoglaltassék a* $((B))$*-ben,* hiszen csak úgy lesz az A felület egész M részének képe előállítható a B felületen, illetve annak valamely helyén.

3. Azt is követeljük, hogy az $I.$ alatt felirt függvények az $((M))$ minden helyén *legyenek folytonosak és differenciálhatók, sőt még e differenciál hányadosok is folytonos függvényekként legyenek előállíthatók.* Ezt a harmadik feltételt a projekciók torzulásainak analitikai vizsgálhatósága miatt kell mindig felállítani.[1])

A vetületek *torzulásainak általános analitikai vizsgálhatósága szempontjából* célszerűnek látszik nem három rendbeli egyenletrendszerrel $[(A), (B)$ és $(I.)]$, hanem csak kettővel dolgozni.

Helyettesítsük ezért az $(I.)$ alatti jobboldali függvényeket a (B)-ben szereplő (p, q) parameterek helyébe:

$$\begin{aligned} \xi &= g_1(F_1(u, v), F_2(u, v)) = G_1(u, v) \\ \eta &= g_2(F_1(u, v), F_2(u, v)) = G_2(u, v) \\ \zeta &= g_3(F_1(u, v), F_2(u, v)) = G_3(u, v) \end{aligned} \qquad (M)'$$

nyerünk oly parameteres egyenletrendszert, mely szigorúan *többé nem az egész B felület egyenletrendszere,* hiszen reális értelmezési tartománya $((M))$ a B felületnek csakis azon részének pontjaira ad szükségképen hasznavehető (ξ, η, ζ) értékrendszereket, amely résznek a p, q parameterek esetében $((M'))$ volt az értelmezési tartománya.

Az előbb mondottak alapján tehát megokolt volt ezen új egyenletrendszert nem (B)-vel, hanem (M')-el jelezni és az adott M originál felületrész *közvetlen projekció egyenletrendszerének* nevezni.

Az $I.$ alatti projekció egyenletrendszert, mivel közvetlenül az $((M))$ értelmezési tartománynak síkprojekcióját $((M'))$-et szolgáltatja, az M adott originál felületrészre vonatkozólag: *közvetett vetületi egyenletrendszernek* fogjuk nevezni.

A közvetett vetületi egyenletrendszer a gyakorlatban ugyanaz mint a közvetetlen, valahányszor a B felület sík, melynek pontjai a rajta képzelt ortogonál vagy poláris koordináta rendszerre vonatkozólag definiálandók.

A legtöbb tankönyvben a *„vetület-egyenletrendszere"* elnevezésbe befoglalják azon egyenleteket is, melyek a tulajdonképeni vetületi egyenletek bizonyos adott esetekben célszerűen vagy szükségképen használt állandóinak (melyek lehetnek exponensek, koefficiensek, absolut tagok) meghatározására szolgálnak. Ezen *nagy gyakorlati fontosságú* egyenleteket, melyek az $((M'))$ értelmezési tartománynak a $((B))$ értelmezési tartományban való *helyét, tájékozását,* sőt bizonyos határok között a *nagyságát* is szabályozhatják, — de a *torzulások mineműségére befolyással nincsenek,* tehát az általános torzulási vizsgálatban *figyelmen kívül* hagyhatók: — röviden *feltételi egyenleteknek* fogjuk nevezni. Ezeknek általános elméletük nincs, ezek mindig speciális vizsgálatok tárgyait képezik.

Nagy gyakorlati fontossággal bírnak azon egyenletek, melyek a vetületek *torzulásainak* mértékeit szolgáltatják. Ezen egyenleteket *redukció egyenleteknek* nevezem.

2. §. A vetületi torzulások definiciója.

Dacára a vizsgálandó vetítési módokra az előbbi §-ban 1., 2. és 3. alatt tett megszorításoknak, a szóba jöhető projekció egyenleteknek, ugyanazon A felület mellett, még mindig sokszorosan végtelen sokaságaival állhatunk szemben. Ha azonban a B felület az

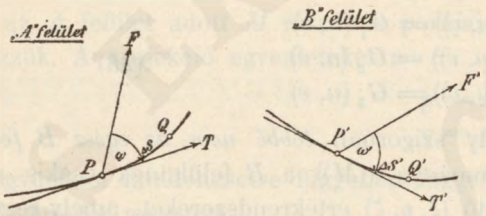
[1]) Sem *Tissot,* sem *Herz* tankönyveikben ezt nem teszik, de eljárásaik csak úgy helyesek, ha ezen föltétel is ki van elégítve.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A-ba szakadás nélkül ki nem fejthető, úgy bármely matematikailag megadott törvény szerint ábrázoljuk is a kérdéses M felületrészt a B felület akármelyik helyén: a kép az originálnak mindig torzképe lesz, mert torzulva jelennek meg az M felületrész konfigurációinak szögei, hosszai és területei.

E vetületi torzulások mérőszámait *modulusoknak* fogjuk nevezni.

A liniár-modulus. Legyen P és Q (2. ábra) az originál A felületnek két pontja, P' és Q' a B képfelületnek két megfelelő pontja, azaz a P és Q pontoknak az (*I.*) egyenletrendszer szerinti képei. $P\,T$ jelenti a $P\,Q$ adott felületi görbe P pontbeli érintőjét. Az előbbi §-ban közölt feltételek alapján bizonyos az, hogy amikor Q a P-hez (a nevezett görbén) minden határon túl közeledik, akkor a Q' is minden határon túl közeledik P'-höz és így a $P'\,Q'$ és $P\,Q$ ívelemek viszonya is egy bizonyos — még pedig véges és meghatározott — határérték felé fog ugyanakkor közeledni.



2. ábra.

Ezen *határértéket* (2. ábra):

$$II.\ a\ \ .\ .\ .\ lim\ \frac{\Delta s'}{\Delta s} = \frac{ds'}{ds} = l$$

fogjuk a P pontbeli $P\,T$ irányú, vagy ami ugyanazt mondja: a P' pontbeli $P'\,T'$ irányú lineár modulusnak nevezni és l_w vagy $l_{w'}$ betűvel jelezni.

Ha a P pontbeli érintők irányait valami F később definiálandó főirányra mint kezdőirányra vonatkoztatva az w irányszögekkel határozzuk meg, (2. ábra) a P pont felületi rendezőit pedig u és v-val jelöljük, akkor általában:

$$II.\ b\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ l_w = f_1(u, v, w) = f_2(p, q, w'),$$

azaz: a lineármodulus általában *nemcsak a helynek, hanem az iránynak is függvénye*; amiért is az l mellé az w betűt indexül tettük.

Ha adva vannak az A-val és (M')-vel jelzett egyenletrendszerek, úgy a lineármodulus egyenletét tüstént felírhatjuk bármely pontban az u és v parameter görbeseregek irányaiban. Ugyanis a térbeli görbék általános elmélete alapján az u, v görbék ívelemei:

$$\left.\begin{aligned} ds_u &= \left[\left(\frac{\delta x}{\delta u}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta u}\right)^2 + \left(\frac{\delta z}{\delta u}\right)^2\right]^{1/2} du \\ ds_v &= \left[\left(\frac{\delta x}{\delta v}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta v}\right)^2 + \left(\frac{\delta z}{\delta v}\right)^2\right]^{1/2} dv \end{aligned}\right\} \text{az „}A\text{“ felületen.}$$

II. c

$$\left.\begin{aligned} ds'_u &= \left[\left(\frac{\delta \xi}{\delta u}\right)^2 + \left(\frac{\delta \eta}{\delta u}\right)^2 + \left(\frac{\delta \zeta}{\delta u}\right)^2\right]^{1/2} du \\ ds'_v &= \left[\left(\frac{\delta \xi}{\delta v}\right)^2 + \left(\frac{\delta \eta}{\delta v}\right)^2 + \left(\frac{\delta \xi}{\delta v}\right)^2\right]^{1/2} dv \end{aligned}\right\} \text{a „}B\text{“ felületen.}$$

A jobboldali tagok az előbbi §-ban megállapitott feltételekből kifolyólag mindig véges és meghatározott mérőszámokat fognak szolgáltatni bármely az A felület vetítendő M részéhez tartozó u, v parameter értékpárhoz és így *II. a.* és *II. c.* képletek alapján az

$$III.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ l_u = \frac{ds'_u}{ds_u} \text{ és } l_v = \frac{ds'_v}{ds_v}$$

(hálózati) lineármodulusok is mint véges és meghatározott viszonyszámok fognak bármely pontra kiadódni. Ezen lineármodulusokat (l_u és l_v), melyek tehát mindennemű vetítési mód esetében a fenti általános eljárással állíthatók elő és melyek csakis az u és v para-

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

meterek függvényei: a *parameter hálózati lineármodulusoknak* nevezzük. Ezek igen fontosak, mert tüstént látni fogjuk, hogy ezeket egy pontra nézve ismerve, egészen általános eljárással nyerhető bármely ugyanezen P ponthoz tartozó l_w lineármodulus értéke. Ez az általános eljárás majd a *Tissot*-féle torzulási törvényből fog adódni.

Az iránymodulus. A 2. ábrában feltüntető eredeti w és vetületi w' irányszögek általában nem lesznek egyenlők. Azon viszony mérőszámát, amely e két megfelelő irányszög tangensei közt fennáll, nevezzük iránymodulusnak és jelöljük i-vel, illetve i_P'-vel:

$$\text{IV.} \quad i_P' = \frac{tg\, w'}{tg\, w}$$

A Tissot-féle torzulási törvény meg fogja mutatni, hogy abban az esetben, ha az w szögeket mindig a Tissot megállapította főiránytól számítjuk, bármely P pontban, (akármekkora is legyen ez az w,) ez az „i“ érték állandó, azaz:

$$i_P' = \frac{tg\, w'}{tg\, w} = konstans$$

Ezen konstans értéke pontról-pontra változik (azaz más értéke van P_1', P_2', P_3' stb. pontokban), de általános módon nyerhető, mint u és v, azaz mint a helyhatározók függvényértéke:

$$i_P' = \varphi\ (u, v).$$

Azon vetületeket pedig, amelyeknél ezen iránymodulus a vetület minden pontjára nézve egyenlő a positív egységgel, azaz amelyekre nézve:

$$\text{V.} \quad i_{P_1}' = i_{P_2}' = \ldots = 1,$$

nevezzük *szögtartó vetületeknek,* mert ezekre nézve V. és IV. szerint bármely w szög értékre nézve $w = w'$.

Az irodalomban a szögtartó vetületeket *konform vetületeknek* is nevezik, amely elnevezés helyessége az alább következő tárgyalásokból majd kitünik. A további tárgyalásokban gyakran fogjuk alkalmazni az *első irányredukció* kifejezést. Értem majd ezen kifejezés alatt az $w' - w = \Delta_1$ függvényértéket. Az első irányredukciók számítása, mihelyt ismerjük P' pontra nézve az i_P' állandónak (iránymodulus) értékét, bármely értékü w irányszöghöz elemi módon elvégezhető tetszőleges szabatossággal.

Ismerve ugyanis i-t, az adott w-hoz számíthatom w'-őt a IV. képlet alapján

$$tg\, w' = i\, tg\, w, \text{ amiből azután}$$

$$\Delta_1 = w' - w.$$

Jegyzet: Konform vetület esetében ($i = 1$) az első redukció fogalma nem létezik, azaz $\Delta_1 = 0$ bármely pontban, bármely w irányszögre nézve.

A területi modulus alatt a tetszőleges P' pont környezetét képező (relative) végtelen kicsi Δf felületelemnek és a neki projekcióként megfelelő ΔF felületelemnek viszonyát, illetve ezen viszonynak véges és határozott értékü határértékét értjük. Tehát:

$$t_P' = lim \frac{\Delta F}{\Delta f}$$

Ezen t területi modulus értéke a hálózati l_u, l_v lineármodulusok ismeretével minden esetben meg van határozva, azaz

$$t_P' = \Phi\,(l_u, l_v).$$

Ha valamely vetület *bármely* pontjára nézve a területi modulus értéke egyenlő az egységgel:

$$t = lim \frac{\Delta F}{\Delta f} = 1,$$

akkor a vetületet *területtartó vetületnek* mondjuk, mert tetszőleges alakú és nagyságú originál

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

idomok megtartják területeik mérőszámait a vetítés után is. Az idomok alakjai természetesen megváltoznak — hiszen egyszerre területtartás és szögtartás — torzulásmentes ábrázolást jelentene, ami csak egymásba kifejthető felületek esetében lehetséges.

Jegyzet: Még néhány évtizeddel ezelőtt, amint látni fogjuk, az országos felmérésekben szereplő *alsó geodéziai vetületek* előállítására inkább a területtartó vetítési módokat alkalmazták. Könnyű lesz kimutatnom, hogy ezen vetítési módok az ugyanazon pontban mindenesetre fellépő hossznagyítás és hosszkicsinyítés miatt a nevezett célra teljesen alkalmatlanok akárminő egyéb kedvező sajátságokkal van is az egyik vagy a másik területtartó vetítési mód felruházva. A területtartó vetületek — és azt is könnyű lesz kimutatni — ma már egyes országok földrajzi térképeinek készítésére sem a legalkalmasabbak, dacára annak, hogy itt a területtartóság lényeges kellék. Az egyes *világrészek* (Európa, Afrika, stb.) földrajzi térképeit azonban ezentúl is ilyen vetítési módokkal fogjuk ábrázolni.

Kompensativ vetületi mód alatt értjük azon eljárást, melylyel valamely adott nagyságú, alakú és elhelyezésű M felületrésznek oly vetületét állítjuk elő adott B felületen, amely vetületben a lineár- és iránymodulus maximális értékei — mindkettőé egyszerre — az összes képzelhető módokon előállítható általános torzulású vetületeken szerepelhető maximális értékeken alúl maradnak. Minthogy kicsiny lineármodulus mellett a területi modulus is kicsiny lesz, azért egyes országok földrajzi térképeinek előállítására az illető ország kompensatív vetülete lesz a legalkalmasabb: a torzulás szempontjából. Az ilyen térkép az illető országot alakilag és területileg egyaránt legjobban szemlélteti. [1])

A torzulások szempontjából a vetületeket tehát *három* főcsoportba oszthatjuk:

1. Általános torzulású vetületek;
2. Szögtartó vetületek;
3. Területtartó vetületek.

Az említett *„kompensatív"* vetületek az 1. csoportnak speciális esetei lévén, azok a torzulások szempontjából külön főcsoportba nem sorolhatók.

3. §. Az általános torzulási törvény.

M. A. Tissot „Memoire sur la Représentation des Surfaces et les Projections des Cartes Geographiques. Paris. 1881." című művében közli a matematikai vetületek *általános* torzulási törvényét. Tissot szerint *minden* — az ezen fejezet 1. §.-ában megállapitott feltételeknek megfelelő — *matematikai vetület helyettesithető végtelen sok, végtelen kicsi felületelemnek ortogonális vetületével;* de minden ilyen elemi ortogonális vetület más és más méretaránnyal bír. [2])

Ezen alapvető törvényből pusztán ábrázoló geometriai következtetéssel, az összes képzelhető vetületekre egyaránt vonatkoztatható, teljesen szigorú tételeket állíthatunk fel.

1. Bármely projekcionak bármely pontjában van két és (hacsak az összes szögek az ortogonális vetítés dacára változatlanok nem maradnak) csakis két olyan egymásra merőleges tangenciális irány, amelyeknek originálјai is merőlegesek egymásra. Az A és B felületen tehát csakis egyetlen oly derékszögű trajektorium szisztema létezik, amelynek képei a másik felületen is derékszögű szisztemát alkotnak. Ezen egymásra merőleges speciális irányok adják minden pontban az ugynevezett és már emlitett: Tissot-féle torzulási főirányokat. (2. ábrán az F irány.)

2. Az ortogonál ábrázoló geometriából és Tissot törvénye alapján világos, hogy: ezen főirányok egyszersmind a P pontbeli *maximális és minimális* lineármodulusok irányai.

---

[1]) Magyarországra ezen vetület egyenletrendszerét e *könyv jelen részének V. fejezetében* (154. oldal) *közöljük.*

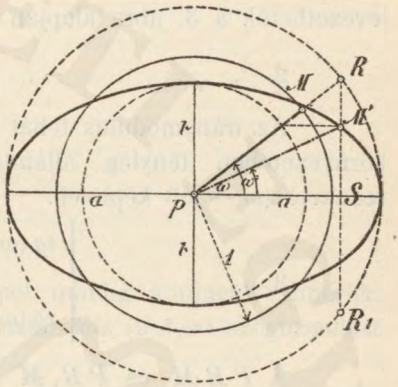
[2]) Tissot ezen törvényének matematikailag legszabatosabb levezetését lásd: Scheffers, Anwendung der Differential und Integral Rechnung. II. kötet.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Amelyik irányban maximális a hossztorzítási együttható, azt *első főiránynak* nevezzük. A megfelelő lineármodulust a-val, a *második főirány* lineármodulusát pedig b-vel jelöljük.

3. Egy végtelen kicsi körnek a képe tehát mindig ellipszis, amelynek tengelyei a főirányok, fél nagytengelye pedig, ha hosszegységnyi nagyságú a képzelt A felületi kör sugara, az a, fél kistengelye pedig a b lineármodulus (3. ábra). Ezen ellipszis radiusz vektorai adják meg tetszőleges ω irányszögnek (kezdő irány az első főirány) megfelelő l_ω lineármodulus mérőszámát; ezen ellipszis módot ad arra is, hogy ismerve az illető P pontban a-t és b-t, bármely a P pont környezetében szükségelt torzulási vizsgálatot általános — tehát akármilyen projekció egyenletekre érvényes — eljárással megejthessük.

Azért nevezte el Tissot ezen ellipszist a P pont *indicatrice*-ének. Mi latinosan „*Tissot indikatrix*"-nak nevezzük, megkülönböztetésül a felületek elméletében szereplő és a felületek görbületi mértékeit adó indikatrixtól.



3. ábra.

4. Az indikatrix és az egységsugarú eredeti kör közötti összefüggést feltünteti a Tissot könyvéből vett ábra (3. ábra), melyhez magyarázatúl a következőket tartom helyénvalónak hozzáfűzni, mert Tissot nem teszi.

Képzeljük P pont körül, mint központ körül, a vetitési mód szerint tartozó a és b szélső értékű lineármodulusokkal, mint a fél főtengelyek mérőszámaival, az indikatrix ellipszist megszerkesztve. (3. ábra.) Képzeljük most P körül ugyancsak az ellipszis sikjában (tehát a felületi érintő sikban) az egységsugarú kört megrajzolva. Ezen körből először ortogonál vetitéssel és azután a nyert ortogonál kép nagyitásával ez az ellipszis — és ez tisztán ábrázoló geometriai feladat — csakis egyféleképen képzelhető előállitva. Képzeljük ugyanis a kört az ellipszis nagytengelye körül elforgatva, úgy tehát, hogy a kör sikja az ellipszis sikjával valami δ szöget zárjon be. Kérdés: mekkora legyen ezen adott esetben a δ∢? Felelet: akkora, hogy a *közvetetlen ortogonális vetitéssel* nyert direkt ellipszis fél kistengelye (a fél nagytengely $\alpha = 1$, és fél kistengelye $\beta = cos\ \delta$) az adott b-nek a-ad része legyen, mert az kétséget sem szenved, hogy a direkt ellipszist (melynek fél nagytengelye a δ-tól függetlenül = 1-el) a — szor kell okvetlenül megnagyitani, hogy az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

egyenlet meghatározta indikatrixot nyerjük. Röviden: az egységsugarú kört a Tissot törvény értelmében oly δ szöggel kell a nagytengely körül elforgatva képzelni, amelyet ezen egyenlet határoz meg:

$$a\ cos\ \delta = b$$

Ezen helyzetben történik az ortogonál vetités; ennek közvetetlen eredményét, az indikatrixhoz hasonló, de nálánál kisebb direkt ellipszist $(a = 1,\ \beta = cos\ \delta)$ most a-szor megnagyitva: előáll e pontban a Tissot-féle indikatrix. (3. ábra.)

Ezeket szem előtt tartva minden nehézség nélkül be lehet bizonyitani, hogy a PM eredeti radiusz vektornak (3. ábrán) vetülete az ábrából kivehető egyszerű szerkesztéssel nyert PM' és hogy

$$1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{SM'}{SR} = \frac{b}{a}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Jegyzet: Tissot könyvében az itt felírt alapképletben a jobboldalon a fordított érték áll,

$$S M' = \frac{a}{b} S R,$$

ami nem lehet igaz, mert a mi levezetésünk szerint

$$\frac{S M'}{S R} = \cos \delta,$$

mivel az indrikatrixot mint az a sugarú kör közvetetlen projekcióját is foghatjuk fel; $\cos \delta$-ról pedig láttuk, hogy az egyenlő $\frac{b}{a}$ -val. Csodálatos, hogy a *Hammer-féle* német *fordításban* (9. oldal 5. sor) ez a fontos képlet ugyanily hibásan szerepel.

Az eredeti kör és a Tissot indikatrix közti mértani összefüggésre az imént tett megjegyzések után, most már minden további utasítás nélkül egyszerű trigonometriai úton levezethetők a 3. ábra alapján a következő alapvető képletek:

$$2. \quad \ldots \ldots \ldots \quad i = \frac{tg\, \omega'}{tg\, \omega} = \frac{b}{a}$$

Az iránymodulus tehát — az ω-ákat az a első főiránytól számítva — egy pont környezetében tényleg állandó. Ezen képletből átalakításokkal levezethetők az első redukció $(\omega - \omega')$ képletei:

$$3. \quad \ldots \ldots \quad \begin{cases} tg\,(\omega - \omega') = \dfrac{(ab)\, tg\, \omega}{a + b\, tg^2\, \omega}, \text{ vagy} \\ tg\,(\omega - \omega') = \dfrac{(a - b)\, \sin 2\, \omega}{(a + b) + (a - b) \cos 2\, \omega} \end{cases}$$

A $P R M'$ és $P R_1 M'$ háromszögekből adódik ugyancsak az *első redukcióra* még ezen fontos vonatkozás is:

$$3.\ a) \quad \ldots \ldots \quad \sin(\omega - \omega') = \frac{a - b}{a + b} \sin(\omega + \omega'),$$

amely képletet vizsgálva azt látjuk, hogy ha az ω szög 0-tól $\frac{\pi}{2}$-ig növekszik, úgy az ω torzulása, azaz az $(\omega - \omega')$ érték 0-tól egy bizonyos $\Delta_1 m$ maximumig növekszik és ismét 0-ra száll le.

Ezen $\Delta_1 m$ maximális első redukció az $\omega + \omega' = \frac{\pi}{2}$ értékeknél következik be és ha W és W'-vel jelöljük ezen összetartozó maximális torzulást szenvedő szögpárt, úgy 2. alapján:

$$4. \quad \ldots \ldots \quad \begin{cases} tg\, W = \sqrt{\dfrac{a}{b}}, \text{ és} \\ tg\, W' = \sqrt{\dfrac{b}{a}}; \text{ másrészt} \\ \sin \Delta_1 m = \dfrac{a - b}{a + b}, \\ tg\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\Delta_1 m}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{a}{b}} \\ tg\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\Delta_1 m}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{b}{a}} \end{cases} \text{ és}$$

Világos ezek alapján, hogy:

$$W = \frac{\pi}{4} + \frac{\Delta_1 m}{2}, \quad W' = \frac{\pi}{4} - \frac{\Delta_1 m}{2}$$

mert:

$$\Delta_1 m = W - W' \text{ és } W + W' = \frac{\pi}{2}.$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Könnyen belátható az a tétel is, hogy oly két irányszög, mely ugyanazt az első redukciót kapja, egymás projekcióinak komplemense.

Szintúgy könnyen belátható az a tétel is, hogy a legnagyobb torzulás, melyet valamely két irányszög által adott α szög szenvedhet a P pontban: $= 2\,\Delta_1\,m$. Nevezetes — és a Bonne projekciónál arra hivatkozunk, — hogy ez a szög sohasem két egymásra merőleges irány ábrázolásánál állhat be. *Tehát az ellipszoíd vagy gömb esetében a földrajzi meridiánok és parallelkörök (minthogy érintői egymásra merőlegesek) projekcióbeli szögtorzulásai nem lehetnek soha a maximális szögtorzulások.*

A 3. ábrából a *lineármodulusokra* nézve a következő alapvető vonatkozások állíthatók elő:

$$5.\ \ldots\ldots \begin{cases} PM = l\,\omega = a.\dfrac{\cos\omega}{\cos\omega'}, \text{ vagy} \\ l\,\omega = b.\dfrac{\sin\omega}{\sin\omega'}, \text{ végül} \\ l\,\omega = \dfrac{1}{2}.\dfrac{(a-b)\,\sin\,2\,\omega}{\sin\,\Delta_1} \end{cases}$$

Fontos két további tétel:

a) Két az eredetiben egymásra merőleges sugár képei mindig konjugált átmérők.

b) Azon két irányban, melyek által bezárt szög a maximális ($2\,\Delta_1 m$) szögtorzulást szenvedi, a lineármodulusok egyenlő nagyságuak: és pedig

$$l = \sqrt{ab}.\ \text{értékűek.}$$

A *területi modulus* alapegyenlete az egység sugarú kör területe ($r^2\,\pi = \pi$) és az indikatrix területének ($ab\,\pi$) viszonyából:

$$t = \frac{ab\ \pi}{1^2\ \pi} = ab\text{-nek adódik.}$$

Gyakorlati következtetések. A Tissot-féle itt közölt torzulási törvények most már megengedik nehány, a későbbi vetületi vizsgálatokra nézve alapvető jelentőségü, de Tissot könyvében ki nem fejezett gyakorlati tételnek felállítását.

1. Minden valódi kúp-, valódi henger-, és azimutális síkvetületében az ellipszoidnak vagy gömbnek, a valódi földrajzi fokhálózat, illetve a segédfokhálózat projekcióí *derékszögü hálózatként jelentkezvén,* ezen hálózati irányok adják meg tehát a szélső értékü lineármodulusok irányait bármely pontban. Ezen három rendbeli vetület esetében tehát az a és b szélső értékü lineármodulusok bármely pontban *azonosak a hálózati lineármodulusokkal,* amelyeknek általános meghatározási módja ezen fejezet 2. §-ának III. és II. *c)* alatti általános képlete szerint eszközlendő.

2. Mivel területtartó vetület esetében a vetület bármely pontjában $t = ab = 1$, ebből következik, hogy terrülettartó vetület esetében az a méretnagyobbodást, a b pedig méretkisebbedést jelent szükségképen, tehát területtartó vetület minden pontjában van hosszabbodás is rövidülés is:

$$a > 1,\ b < 1.$$

Kivételt csak azon pontok képeznek, ahol $a = b = 1$, de ezek száma nagyon korlátolt: szélső esetben egy vagy két (de *semmiesetre* sem több) görbe vonal pontjaiban található fel ezen sajátság. A területtartó vetületek éppen ezen imént bemutatott sajátságuknál fogva lesznek az országos felmérésekben alsó geodéziai vetületekül teljesen alkalmatlanok és a vizsgálatból kizárandók.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Erre a körülményre a *Bonne*-féle és a *Lambert*-féle azimutális területtartó vetületek megbeszélésénél fogunk hivatkozni. (Lásd 149—151. oldalon.)

3. Az iránymodulus általános képletéből

$$i = \frac{tg\ \omega'}{tg\ \omega} = \frac{b}{a}$$

következik, hogy szögtartó vetület ($i = 1$) esetében $a = b = l$ a projekció bármely pontjában. *Szögtartó vetület esetében tehát az indikatrix egy* $a = b = l$ *sugarú kör* (azért jogos a *conform* név), amiből az következik: hogy szögtartó vetület esetében a lineármodulus bármely pontban az iránytól független állandó érték. (Minden pontban azonban más és más a lineármodulus értéke.)

Konform vetítési mód esetében tehát beszélhetünk „a P pont lineármodulusáról"; ezt pedig az előző §-ban III. és II. *c)* alatt a hálózati lineármodulusok meghatározására adott általános képletekből (vagy az l_u, vagy az l_v szerint) minden konform vetítési módra módunkban áll meghatározni.

4. Bármely általános torzulású vetület tetszőleges P pontjának környezetében az a és b ismeretével mindennemű torzulás általános módszerekkel vizsgálható a Tissot-Indikatrix adta képletek alapján. Az is nyilvánvalóvá lett, hogy sok esetben a torzulási főirányok azonosak a parameter-hálózati (u és v) irányokkal. Általában azonban ez nem áll; kérdés: miként nyerjük tehát bármely vetület esetében, bármely pontra nézve az első főirány fekvését a hálózati görbeseregekhez képest és az a és b értékek mérőszámait. Az eljárás ez:

a) Mindenekelőtt felállítjuk az előző §-ban levezetett III., illetve II. *c)* alatti képlet szerint a *hálózati* lineármodulusok l_u és l_v egyenleteit az adott egyenletrendszerekből mint u és v függvényeit.

b) Ugyanakkor felállítjuk a projekció egyenletrendszerek (A) és (M') alapján az u, v parameter görbék és azok projekciói által bezárt szögek Φ és Φ', illetve a két szög cosinusainak u, v szerinti függvényeit a térgörbék általános elméletéből jól ismert következő képlet segitségével:

$$\cos\Phi = \frac{\left(\frac{\delta x}{\delta u}\right)\left(\frac{\delta x}{\delta v}\right) + \left(\frac{\delta y}{\delta u}\right)\left(\frac{\delta y}{\delta v}\right) + \left(\frac{\delta z}{\delta u}\right)\left(\frac{\delta z}{\delta v}\right)}{\left[\left(\frac{\delta x}{\delta u}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta u}\right)^2 + \left(\frac{\delta z}{\delta u}\right)^2\right]^{1/2} \cdot \left[\left(\frac{\delta x}{\delta v}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta v}\right)^2 + \left(\frac{\delta z}{\delta v}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$\cos\Phi' = \frac{\left(\frac{\delta \xi}{\delta u}\right)\left(\frac{\delta \xi}{\delta v}\right) + \left(\frac{\delta \eta}{\delta u}\right)\left(\frac{\delta \eta}{\delta v}\right) + \left(\frac{\delta \zeta}{\delta u}\right)\left(\frac{\delta \zeta}{\delta v}\right)}{\left[\left(\frac{\delta \xi}{\delta u}\right)^2 + \left(\frac{\delta \eta}{\delta u}\right)^2 + \left(\frac{\delta \zeta}{\delta u}\right)^2\right]^{1/2} \cdot \left[\left(\frac{\delta \zeta}{\delta v}\right)^2 + \left(\frac{\delta \eta}{\delta v}\right)^2 + \left(\frac{\delta \xi}{\delta v}\right)^2\right]^{1/2}}$$

Igy ismeretesekké válnak l_u, l_v, Φ és Φ', az egyenletrendszerei által megadott vetületnek bármely u, v pontjára nézve, mint u és v függvényei.

Ezek alapján most már a következő általános három egyenletbe való helyettesítéssel nyerhetők bármely pontra nézve az a és b értékei és az első főirány irányszöge (nevezzük δ-nak) vonatkoztatva az u *görbe* P *pontbeli érintőjére* mint kezdő irányra:

$$(a+b)^2 \sin^2\Phi = l_u^2 + l_v^2 - 2\, l_u\, l_v \cos(\Phi + \Phi')$$

$$(a-b)^2 \sin^2\Phi = l_u^2 + l_v^2 - 2\, l_u\, l_v \cos(\Phi - \Phi')$$

$$\sin\delta = \sqrt{\frac{a^2 - l_u^2}{a^2 - b^2}}.$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Bármely vetület, bármely torzulási kérdésére tehát egészen általános módszerekkel lehet megfelelni. *Torzulás számítására tehát elméletileg minden matematikailag megadott vetület egyaránt alkalmas.*

Gyakorlatilag azonban nem: itt az egyik vagy másik rendszer óriási előnyökkel bír a többi fölött. Ez azonban mindig külön részletes vizsgálatot kíván.

4. §. Vetületek előállítása.

Az első §. elején definiált több rendbeli vetületi egyenletrendszerekre támaszkodva, *háromféle módon* képzelhetők előállítva a matematikai projekciók.

1. *A koordinátaszámítás módszerével*, amely abból áll, hogy mérések és számítások eredményeiként ismerve a leképezendő M felületrésznek u, v felületi rendezőit, a közvetlen vagy a közvetett projekció egyenletek (1. §. I. és *(M')* képletei) alapján egyszerű helyettesítéssel vagy célszerű táblázatokkal kiszámítjuk a megfelelő B felületi helyhatározókat.

Az országos felmérésben ezen módszer a felsőrendű háromszögelési alappontok földrajzi rendezőinek — melyeket a hálózatok kiegyenlítése után számítanak — a derékszögű sík alsó geodéziai koordinátarendszerekre való átszámításakor használtatik igen sűrűn[1]); továbbá a topografiai térkép szelvénysarkainak az alsó geodéziai derékszögű koordinátarendszerekben való helyhatározásakor alkalmaztatik.

Ezen koordinátaszámítások többnyire — minthogy igen szabatosan (millimeterre) és több ezer pontra végzendők el és az alkalmazott sorok 5, sőt 6-od rendű kicsiny tagjainak figyelembevételét is megkövetelik — *igen nehézkesek és hosszadalmasak*, de később látni fogjuk, hogy Magyarországnál sem kerülhetők el egészen.

Mindenesetre azonban ügyelnünk kell arra, hogy az ország minél nagyobb terjedelmű részének háromszögelési alappontjaira *takarítsuk meg ezen fárasztó átszámítást.* A további vizsgálatoknál ezeket szem előtt fogjuk tartani.

De mindjárt itt akarom hangsúlyozni, hogy *az egyedüli kivételt* e szempontból a *Gauss-féle konform gömbi vetület* képezi, amely bizonyos mértékben ma is nyer nálunk alkalmazást. Ugyanis a vetületnél a szferoidikus φ és λ földrajzi rendezőknek megfelelő símuló-gömbi φ_g, λ_g vonalkoordináták ezen közvetetlen projekció egyenletrendszer alapján számítandók:

$$tg\left(45° + \frac{\varphi_{(g)}}{2}\right) = k.\ tg\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)^d \left(\frac{1 - e\sin\varphi}{1 + e\sin\varphi}\right)^{\frac{1}{2}de}, \text{ és } \lambda_g = a(\lambda - \lambda_0),$$

amely egyenletrendszerben szereplő állandók később ismertetendő föltételi egyenletrendszerből adódnak. A szferoidikus φ és λ értékeknek megfelelő $\varphi_{(g)}$, $\lambda_{(g)}$ gömbi rendezők azonban nem a közölt képletek alapján nyerhetők egyszerűen, hanem segédtáblák használatával egyszerű interpolálással: a szögmásodperc négy és még több tizedesére élesen. E segédtáblázatról még részletesen lesz szó. (Lásd a 78. oldalon.)

2. A görbeseregek módszere vagy amint nevezni szokás: a fokhálózat vagy a grafikus interpolálás módszere abból áll, hogy az A felületi u és v görbeseregeknek megfelelő B felületi u és v görbeseregeket az adott közvetlen projekció-egyenletekből könnyen leszármaztatható egyenletei alapján a B felületen bizonyos sűrűségben megszerkesztik és az A felületrész pontjainak projekcióit közvetlenül az adott u, v értékpárok segélyével e hálózatba grafikusan interpolálják.

Ezen módszer egyrészt azért mert vonalas, azután azért, mert *interpolatorikus*, az országos felmérések szempontjából szabatosnak nem mondható: és így a felmérésben

[1]) Pl. Poroszországban, Franciaországban, Görögországban, stb.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

szerepe nincs. De igenis kizárólag ezen módszer szerint készülnek az országos felmérés eredményeire támaszkodó adminisztrativ, geografiai, geologiai, stb. fali térképek és atlaszlapok, *közös néven kis méretarányú térképek.* Midőn tehát a későbbiekben a legmegfelelőbb kis méretarányú magyarországi térkép legcélszerűbb vetületét fogjuk keresni (lásd: e rész V. Fejezetének 3. §.-át.) az egyik figyelembe veendő szempont a kompensátión kívül lesz: a fokhálózat egyszerű szerkeszthetősége és a becslő interpolálás szabatosságának minél nagyobb lehetősége, illetve megkönnyítése.[1])

3. A projekcióknak harmadik és az országos felmérés szempontjából legfontosabb előállítási módja a

„redukció módszere"

amely abból áll, hogy az *A* felület vetítendő *M* részének pontjait geodéziai vonalakkal mértanilag határozott idomokká képzeljük összekötve és ezen idomok összes alak- és helyhatározóit (rendezők, szögek, távolságok) ismerve, előállítjuk ezen eredeti méretekből a kérdéses idomok megfelelő projekcióit az *alakváltozások és méretváltozások* ismerete segitségével.

A redukció módszere az országos felmérésben kétféle alakban szerepel:

a) Mint a felsőbbrendű háromszögelés kiegyenlítését szolgáló vetület főelőállítási módja.

b) Mint az alsóbbrendű, vagy alsó geodéziai mérések vetületének alapelve.

Dacára annak, hogy úgy a kiegyenlítés, mint az alsó geodéziai felmérés vetületének alkalmazása a redukció módszerével függ össze, mégis más szempontok mérvadók, a kiegyenlítés legcélszerűbb vetületének vizsgálatánál és mások az alsó geodéziai felmérés vetületének választásánál. Míg ugyanis a kiegyenlítés vetületénél akár kicsinyek, akár nagyok a redukciók azokat *okvetlenül számítjuk,* addig az alsó geodéziai vetülettől (azaz a részletes felmérések vetületi rendszerétől) kívánjuk, hogy a redukciók annyira kicsinyek legyenek, hogy a térszínén a térszíni pontokra végzett vízszintes szög- és hosszmérések a vetületben a vetület pontjaira elvégzetteknek legyenek tekinthetők.

Hogy ezen a vetületek választására nézve fontos tételt tisztán lássuk: ismerkedjünk meg az országos felmérések feladataival és szervezetével.

II. FEJEZET.

A matematikai vetületek alkalmazása az országos felmérésekben.

I. §. Az országos felmérések szervezése.

Jordán tanár szerint: „Egyetlen intézmény sem hat ki mélyebben az egész országos felmérésre, mint a vetületi rendszerek választása és ha e választás hibás, úgy teljes mértékben ráillik Goethe ezen mondása: e törvények és jogok örökös betegség módjára öröklődnek nemzedékről-nemzedékre."

Számos példát tárgyalt Jordan és találhatunk mi is az európai államok felméréseinek történetében, melyek ezen mondat igaz voltát bizonyítják. Számos esetben, hazánkban is, alig egy fél század leforgása alatt háromszor is lépett fel az országos felmérési *vetületi-rendszerek megváltoztatásának* szüksége: ami mindannyiszor rengeteg nagy átszámítási munkát (és így anyagi áldozatot) kíván és káros hatását mindamellett sok évtizeden át mégis érezteti.

---

[1]) Az interpolálás módszere ma már katonai térképek készítésére nem használható, azért a legcélszerűbb katonai vetület megállapításánál az imént hangsúlyozott szempont nem lesz mérvadó. (Lásd III. kötet 164. oldalán.)

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Idevonatkozó tanulmányok arról az igazságról győztek meg, hogy a vetítő módok és az azokon alapuló koordináta rendszerek választása *az országos felmérések helyes, előrelátó szervezésére tekintettel történjék meg.*

Mielőtt itt megállapítanók tehát azokat a matematikai feltételeket, amelyeknek adott ország esetében a legcélszerűbb vetítő módoknak meg kell felelniök és amely feltételek figyelembe vételével a matematikai vetítő módok sokszorosan végtelen sokaságából kiválasztanók mindazokat, melyek itt szóba jöhetnek: mindezek előtt szükségképen meg kell mondanunk, hogy miként képzeljük az országos felmérés szervezését legcélszerűbben foganatosítva, és hány különböző rendbeli vetületet kíván a helyes szervezet.

Idevonatkozó javaslatunkat a következőkben közöljük röviden.

A felmérési törvény **„az országos felmérés"** címén a felmérések következő ágazatait állapítsa meg:

I. Az országos háromszögelés.

II. Az országos szintezés.

III. Az országos kataszteri (telekkönyvi) felmérés.

IV. Az országos topográfiai (katonai) felmérés.

V. Állami műszaki közegek által, illetőleg azok felügyelete alatt végzett mindennemű oly speciális felmérések (tagosítások, telepítések, parcellázások, stb.) melyek *legalább is* két négyzetkilometer terjedelmű vagy keskeny de legalább 10. kilometer hosszú összefüggő területre terjednek ki.

VI. A társulatok, vállalatok, törvényhatóságok vagy magánosok által folyamatba tett és legalább 5 négyzetkilometerre kiterjedő *vízszintes* vagy *topográfiai* felmérések. (Városmérések, vízrajzi mérések, erdészeti mérések, stb.)

Az ezen hat ágazatra nézve megállapítandó gyakorlati utasítás elkészítésénél ezen *két főszempont* lesz szükségszerűleg követendő:

a) vajjon e felmérések külön-külön *műszaki* és egyéb gyakorlati szempontból megfelelnek-e a gyakorlat *különböző* jogos kívánalmainak;

b) vajjon az ezen felméréseket egy időben, de különböző célból elvégző intézmények *együttműködése, eredményeik kölcsönös felhasználása* gazdaságosan van-e szervezve, illetve biztosítva van-e az egész vonalon?

Ezekre tekintettel az előbb (I., II., . . . VI. alatt) felsorolt *hat* ágazatra nézve külön-külön a következők állapítandók meg.

I. Ágazat.

Fejlesztessék egy az egész országra kiterjedő szferoidikus *háromszögelési hálózat* (1., 2., 3. és esetleg 4. rendben), melynek mind az *állandósítását*, mind a *mérését*, mind pedig a *számítását* azzal a szabatossággal kell végrehajtani, amely az *elsőrendű hálózatot* tekintve, a nemzetközi földmérés által megszabott követelményeknek feleljen meg, a 2., 3. és 4. rendű hálózatokat tekintve pedig még szabatos, számszerű városi felvételeknek is a legtöbb esetben alapul szolgálhasson.

A háromszögelési számítások végcélja: *az összes háromszögelési pontoknak,* szabatos részletes felmérésekre **közvetlenül** felhasználható, **derékszögű síkkoordinátáit szolgáltatni.**[1])

E célból a háromszöghálózatot a szferoidról síkra (síkokra) kell tehát valamely matematikai

[1]) A háromszögelési pontok földrajzi összrendezői (szferoidikus földr. szélesség és földr. hosszúság) csakis az elsőrendűekre nézve lesznek számítandók a nemzetközi földmérés céljából. Akik — támaszkodva *külföldi* példákra — az összes háromszögelési pontok földrajzi összrendezőinek számítását tartják a háromszögelés feladatának, azok összezavarják a *kényszerűséget* a céllal. Erre még visszatérünk.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

vetítési mód szerint vetíteni (redukálni) és a vetületi síkon (síkokon) felvett derékszögű koordináta tengelyekre vonatkozó sík összrendezőket minden háromszögelési pontra nézve kiszámítani.

Ezen síkösszrendezők (mint *torzított* képre vonatkozó adatok) csak úgy lesznek **közvetlenül** szabatos részletes felmérések eszközlésére alkalmasak, ha az ezen összrendezők alapjául szolgáló matematikai vetületek a szabatos **részletes felmérésekre nézve is elhanyagolható** kicsiny *szög*torzulásokat és *hossz*változásokat eredményeznek.[1])

Összrendező számítás előtt azonban az 1., 2. és 3. rendű háromszög hálózatokra vonatkozó *mérési eredményeket* a legkisebb négyzetösszegek módszere szerint szigorúan ki kell egyenlíteni.

Mivel — ez idő szerint — e hálózatokat legcélszerűbben (leggazdaságosabban) az úgynevezett *derékszögű koordináta módszer szerint* [2]) egyenlíthetjük ki, azért a háromszögelési hálózatokra vonatkozólag szerzett nyers mérési eredményeinket **kiegyenlítés** előtt valamely vetítési törvény szerint *egyetlen síkra kell* az ellipszoidról vetíteni (redukálni).

Azt a vetületet, melyben a háromszögeléseket a koordináta módszer szerint *kiegyenlítjük: a kiegyenlítés vetületi rendszerének* fogjuk mindig nevezni.

Azon vetületeket pedig, amelyekben az országos háromszögelés összes pontjainak *derékszögű sík összrendezőit* gyakorlati felhasználásra közreadjuk: *a részletes felmérések vetületi rendszereinek* fogjuk nevezni és megkívánható, hogy az országos *felmérések említett összes ágazatai* ezen vetületi rendszerekben eszközöljék közvetlenül összes felvételeiket.

II. Ágazat.

Az országos szintezés célja az egész országra kiterjedőleg *minden község határában* közel annyi állandóan megjelölt pontnak tengerszint fölötti magasságát szolgáltatni, mint ahány háromszögelési pont esik egyazon területre.[3])

Mindennemű magasságmérések (vízrajzi, vasúti, területszintezések, trig. mag.-mérések, stb.) kötelezőleg ezen országos szintezési alappontokra támasztandók. A *vetületekkel* a szintezés semminemű összefüggésben nem lévén, itt vele többet nem foglalkozunk.[4])

III. Ágazat.

Az országos felmérési ágak legköltségesebbje az országos kataszteri (helyesebben telekkönyvi) felmérés intézménye [5]), amelynek egy **közvetetlen** és egy **közvetett** célját kell megkülönböztetni.

a) A *közvetetlen cél* a hiteltelekkönyvnek (betétek) és a földadó kataszternek *létesítését* és folytonos továbbvezetését *(nyilvántartását)* lehetővé tenni.

b) Minthogy ezen rendeltetésből kifolyólag a kataszteri felmérés szükségképen az egész ország területére, annak minden legkisebb részére is kiterjeszkedik, minthogy továbbá a *hiteltelekkönyv oly gondos, szabatos vízszintes felmérést* kíván, hogy alig találunk az országos

---

[1]) Ez idő szerint a megengedett torzulási határ: a hosszakra nézve 1/10.000-en alul maradjon a hossznagyítás, a szögekre nézve pedig, hogy két egyenkint öt kilometer hosszú szár által bezárt szög szélső értékben 3 szögmásodpercen alul változzék csak.

[2]) Az első kötet 75. oldalán egy elemi példa található a nálunk szokásos kiegyenlítési módra, amely részletesen e kötet III. részében tárgyaltatik.

[3]) E pontok nem azonosak a háromszögelési pontokkal. Ez utóbbiak magasságai trigonometriai magasságmérésekkel határoztatnak meg a háromszögelési mérésekkel kapcsolatosan.

[4]) Az országos szintezések részletesen a III. kötetben tárgyaltatnak.

[5]) Magyarország egyszeri kataszteri felmérése mintegy *180,000.000* korona költséget okoz az államnak és a községeknek.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

felmérés többi ágazatai, úgyszintén a magánfelmérések között elvétve is egy-egy esetet, mely még nagyobb pontosságot kiván: azért a kataszteri felmérés lesz egyuttal az *összes képzelhető* felmérési ágaknak alapja, támasza. Ezen *b)* alatt elmondottak kifejezik az országos kataszteri felmérésnek említett közvetett célját.[1])

A kataszteri felmérés vetülete mindenesetre a *„részletes felmérések vetületi rendszere“* kell hogy legyen. Térképei ezen vetület koordináta négyzethálózatával látandók el.

IV. Ágazat.

Az országos topográfiai felmérés célja egy az egész országra kiterjedő rétegterves térképet szolgáltatni, amely térkép *anyagának, pontosságának* és így megfelelő *méretarányának* megállapításánál mértékadó szempontok a következők:

a) mindennemű műszaki *előmunkálati* tervezésre megfeleljen;

b) annyi magassági mérőszámot szolgáltasson, hogy a műszaki előmunkálatokhoz gyakran megkívánt nagyobb méretarányú rétegtervek ezekre támaszkodva gyors helyszini mérésekkel legyenek elvégezhetők;

c) mindennemű katonai térképnek kielégítő alapul szolgálhasson.[2])

Mivel napjainkban már az országos uj topográfiai fölvétel befejezése nem sürgősebb mint a kataszteri felmérés foganatosítása az egész vonalon, azért a topográfiai felmérés a *legszervesebb összefüggésbe* hozható a kataszteri felméréssel és pedig a következő módon:

1. A kataszteri felmérés mérnökei maguk készitik el méréseik alapján az *1 : 10.000*, illetőleg *1 : 25.000* méretarányú topográfiai térképek teljes alaprajzát a kataszteri térképek kisebbítése által.

2. Ezen 1 : 10.000, illetve 1 : 25.000 méretarányú vízszintes alaprajzi szelvényeket, melyek koordináta négyzetekkel már el vannak látva: a háromszögelő hivatal a *fokhálózattal* látja el.

3. Ezen szelvénybe történik most már akár numerikus, akár más módon a megfelelő sűrűségű rétegterv szerkesztése és a megfelelő számú magassági mérőszámok bevezetése, lehetőleg *ugyanazon személyek által,* akik a vidék kataszteri felmérését végezték.

Az itt elmondottak értelmében tehát *külön topográfiai vetületről* nem lehet szó[3]) a jövőben, mert **semmi ok nincs arra,** hogy a topográfia ezentúl ne a kataszteri, szóval a *„részletes felmérések vetületi rendszer“*-ében dolgozzék.

V. és VI. Ágazatok.[4])

Az országos felmérés ezen két nagyfontosságú ágazatára vonatkozólag, minthogy a legkülönbözőbb rendeltetésű mérésekről van szó, általános szabályokat nem igen lehet felállítani, de igenis törvényesen kell gondoskodni, hogy ezen felmérések *mindenkor* és minden körülmények között

1. az országos háromszögelésre és szintezésre támaszkodjanak;

2. hogy kötelességszerűleg a *„részletes felmérések vetületi rendszer“*-ében dolgozzanak;

---

[1]) A magyar országos kataszteri felmérés működését és történeti fejlődését a III. kötet *„Függelék“*-ében ismertetjük.

[2]) Magyarország topográfiai felmérését a cs. és kir. katonai földrajzi intézet végezte el: lásd a III. kötet utolsó fejezetét a 159—178. oldalakon.

[3]) Hazánkban is, Poroszországban is ezidőszerint azonban más a kataszteri és más a topográfiai felmérés vetületi rendszere.

[4]) Ilyfajta felméréseket tárgyal az I. kötet *függeléke* és a III. kötet függelékének 2. §. és 3. §-a.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

3. hogy az országos kataszteri felmérés vezetősége mindezen mérésekről értesüljön, azokat támogassa és eredményeiket a saját és akármilyen más közcélra értékesítse.

A modern országos felmérés oly módon szervezve, amint azt itt röviden vázoltuk tehát összesen (és maximumban) *két rendbeli vetületet* kíván: a „**kiegyenlítésnek**“ és a „**részletes felmérésnek**“ vetületi rendszereit.

2. §. A vetületek megválasztásának szempontjai.

Az I. fejezet 4. §-ában 3. pont alatt közöltük már, hogy a kiegyenlítés vetületének megválasztásánál főelv, hogy az egész ország területére egyetlen síkot alkalmazva a *szög-* és *hosszredukció* számítások **gyorsan**, *könnyen* és **pontosan** legyenek elvégezhetők, míg a „*részletes felmérések országos vetületének*“ kiválasztásánál döntő szempont az, hogy a *hossz-* és *szögtorzulások* a részletes felmérés szempontjából a vetület bármely pontjában **elhanyagolható kicsiny értékek legyenek.**

Nagy terjedelmű ország esetén a torzulások a részletes felmérésnél csak úgy lesznek elhanyagolhatók, ha nem egy, hanem *két* vagy *több* síkra történik a vetítés; ilyenkor tehát — mivel a kiegyenlítés vetületénél *egyetlen sík* vonatkoztatandó az egész országra — a kiegyenlítési vetület nem lehet egyszersmind a részletes felmérések vetülete is.

Igy például **Poroszország** esetében kiegyenlítés céljából a *(meridionális) konform hengervetület* törvényei szerint egyetlen síkra vetítik (redukálják) az összes háromszöghálózatokat; a kiegyenlítés által a kiegyenlítési síkon nyert derékszögű sík összrendezők alapján azután a vetületi képletek segélyével kiszámítják most a pontok *földrajzi rendezőit;* ezután a háromszögelési pontok *derékszögű* sík összrendezőit az *országos részletes felmérések céljaira* ***negyven*** úgynevezett *Soldner*-féle sík koordináta rendszerre számítják át a földrajzi összrendezők alapján a *Soldner*-féle vetületi képletek segélyével.

Ezzel szemben a **svájci** országos felmérés *ugyancsak a konform hengervetület* törvényei szerint redukálja kiegyenlítés végett háromszöghálózatait *egyetlen síkra;* mivel azonban az ország kis terjedelménél fogva a kiegyenlítési vetületen a vetületi torzulások kicsinyek (hossztorzulás 1/10.000-en alul) azért az ezen kiegyenlítési vetületen számított *összrendezők* adatnak ki a részletes felméréseknek. *Itt tehát csak egyetlen vetület szerepel az egész országban: a kiegyenlítés vetülete azonos a részletes felmérések vetületével.* [1]) Ezáltal óriási sok vetületi átszámítási munka van megtakarítva: de ez az ideális megoldás csak *Magyarországnál* jóval kisebb területű országokra nézve valósítható meg.

Magyarországon a mult század közepe táján rendezték elsőízben matematikai alapon a vetületek kérdését olymódon, hogy *Erdélyt*, *Horvát-Szlavonországokat* és a szoros értelemben vett *Magyarországot* külön-külön konfigurációnak tekintették és mindegyikre *külön vetületi síkot állapítottak meg.* [2]) Egy-egy ily részre ugyanaz a vetület szolgálta most már a kiegyenlítést és a részletes felvételeket, azaz a koordináta kiegyenlítés adta derékszögű sík összrendezők használtattak fel közvetlenül a részletes felmérések céljaira.

A szorosabb értelemben vett *Magyarország*-on a feladat azonban ilymódon a részletes felmérések szempontjából *rosszul* volt megoldva, mert a terület terjedelme miatt *egy ezred* 1/1000 nagyságú hossztorzulás is jelentkezett e vetület (*Budai*-rendszer) szélein. [3])

---

[1]) Hasonló a helyzet „**Mecklenburg**“ hercegségben: ott egyetlen *konform kúpvetület* (a kúp az ellipszoidot egy parallel körön érinti) szolgálja a kiegyenlítést és a részletes felméréseket.

[2]) Erdélyre a *Kesztej*-pontbeli érintő sík; Horvátországokra az *Ivanič*-pontbeli érintő sík és Magyarországra a *Gellérthegy* (Buda) pontbeli síkra történt a vetítés a *konform azimutális vetület* szerint.

[3]) Lásd a „*Felmérési Utasítás*“ Minták és Mellékletek kötetének 1. számú mellékletén a hossztorzulási köröket és az azokra írt nagyítási számokat.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ezen okból 1908. évben e könyv szerzője hivatalos megbízás folytán új vetületi rendszereket állapított meg Magyarország egész területére.[1]) Erdély és Horvát-Szlavonországok itt már nincsenek *külön* figyelembe véve: az *egész magyar állam* egyetlen konfigurációként szerepel.

Kiegyenlítési vetület az egész magyar államra a (I. kötet 5. ábra 12. old.) „*gellérthegy*"-i meridiánon fekvő *K. R.*[2]) ponthoz tartozó ferdetengelyű hengervetület. A *részletes felmérés vetületei* pedig: az ország középső részére (az I. kötet 5. ábráján pontozott vonalakkal elhatárolt *sáv*) az említett (K. R.) kiegyenlítési vetület; azután külön az *északi* és külön a *déli* területsávra az *É. R.*[3]) és *D. R.*[4]) jelzésű ferde tengelyű hengervetületek.

Ezen megoldás folytán 1/10.000 maximális **hossztorzulásnál** és *5 km.* szárú szögben *2·5* másodpercnyi maximális **szögtorzulásnál** nagyobb torzulás nem jelentkezik a magyar állam egyetlen pontjában sem.[5])

Mivel a hazai háromszögeléseknek egy nagy része a régi vetületi rendszerekre vonatkozólag számíttatott ki: Magyarország esetében a rendes redukció számításokon kívül (ellipszoidról síkra és viszont) a *régi vetületekről az uj vetületekre való átszámítás* (pontok, oldalak, szögek átvitele) feladata is igen nagy szerepet játszik.

A magyar uj vetületek megválasztásánál tehát ezen tömeges átszámítások *gyors* és *pontos* eszközlésének lehetősége is igen nagy szerepet játszott. Mivel pedig ezen átszámítások — mint látni fogjuk — hosszak és szögek torzulásainak (redukcióinak) számításából fognak túlnyomólag állani: azért oly vetületi rendszert kellett választani, amely *a redukció* számításokat egyszerű módon engedi elvégezni.

Egy másik szempont a vetületi rendszer választásánál pedig az volt: *lehetőleg kevés síkkal* megfelelő kicsiny torzulást elérni. Idevonatkozó beható vizsgálatok azt mutatták, hogy *három* síknál kevesebb síkkal a feladat nem oldható meg.[6])

Az itt előadottak (gyors redukció számítás lehetősége és kevés síkkal kis torzulást elérni) vezettek a *konform hengervetületi törvény* választására és *három* hengernek olymódon való elhelyezésére, hogy mindegyik henger egy kelet-nyugati irányú legnagyobb gömbi körben érinti az ellipszoidot pótló Gauss-gömböt.[7])

Amint az itt előadott példákból is látható, a kiegyenlítés vetületi rendszere mindenütt **konform vetületi rendszer**. Ennek a jelenségnek oka az, hogy a *redukció* számításra a konform vetületek a legalkalmasabbak. Míg ugyanis általános torzulású vetület esetében minden egyes irányhoz általában *kétféle redukció* érték (*első* és *második* redukció) számítandó, addig a *konform vetületeknél* az **első** redukció minden pontban *zérus* lévén (lásd

---

[1]) Lásd az I. kötet 12. oldalán az 5. ábrát, ahol a *régi* és az *uj* rendszerek vannak vázlatosan feltüntetve.

[2]) Középső rendszer.

[3]) Északi rendszer.

[4]) Déli rendszer.

[5]) 2.″5-nek 5 km. sugárral (5.000 × 2.5 × 0,000.005) meter = 6 centimeter végpontingadozás felel meg, ami a részletes felmérésekkel kapcsolatos trigonometriai müveletekre (sokszögelés stb.) már nem érezhető hatású.

[6]) *E könyv V. fejezetének 3. §-ában „Magyarország legkisebb össztorzulási vetülete"* cím alatt (154. oldal) kimutatjuk, hogy a matematikai vetületek sokszorosan végtelen sokaságában nem létezhetik oly vetületi törvény, mely szerint *egyetlen* síkkal tudnánk Magyarországra megfelelő minimális torzulású vetületet előállítani.

[7]) Az I. kötet 12. oldalán az 5. ábrán feltüntetett *É. R; K. R; D. R.* pontokban a meridiánra merőlegesen képzelt legnagyobb gömbi körök mentén érinti a három henger a gömböt.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

I. fejezet, 2. §. alatt az első redukcióról mondottakat) minden egyes irányhoz csakis **egyféle** redukció érték számítandó, ami — mivel a redukció számítás minden megészlelt irányra nézve elvégzendő — igen nagy munkamegtakarítást jelent.

A részletes felmérések vetületéül *elvileg* legcélszerűbb az illető ország *minimális össztorzulású* vetületi rendszerét választani, feltéve, hogy ezáltal *egyetlen* vetületi síkon lehet megfelelő kis torzulásokkal az ábrázolást elvégezni.[1])

Ha azonban az ország terjedelme miatt mindenesetre *két* vagy *három* vetületi síkra vagyunk utalva, akkor a *részletes felmérések* vetületéül már nem általános torzulású, *hanem konform* vetületi törvényt választunk azért, mert ezen esetben a III. és IV. rendű háromszöghálózatok kiegyenlítését nem a kiegyenlítési síkon, *hanem mindig az illető részletes felmérési vetületen* végezzük el, amiáltal óriási mennyiségű átszámítási munka elesik.[2]) Igy Magyarország esetében is az ország déli részén és az ország északi részén folyó III. és IV. rendű hálózatok *közvetlenül* a *D. R.*, illetve az *É. R.* rendszereken lesznek kiegyenlítve.

Végeredményben tehát megállapíthatjuk, *hogy az országos felmérésekben csakis a konform vetületeknek van* szerepe, illetve létjogosúltsága: miért is a továbbiakban mindig csak a konform vetületekkel foglalkozunk.

3. §. A kiegyenlítési vetületre való redukció számítások konform vetületek esetében.[3])

Az I. kötet V. Fejezetének 6., 7. és 8. §-aiban (125—132. oldalakon) kimutattuk, hogy

1. az elsőrendű hálózatokra nézve mért vízszintes belszögek *valódi szferoidikus* háromszögek belszögeinek tekinthetők;

2. az egész elsőrendű háromszöghálózat, ha egy asztronomiai pont és egy asztronomiai azimut (I. kötet 130. oldalán 4. pont) alapján van az alapul választott ellipszoidon elhelyezve, kényszer nélküli szferoidikus hálózatnak tekinthető.

Ami itt az elsőrendűekre nézve elmondatott, az természetesen még inkább áll a II., III. és IV. rendű háromszöghálózatokra.

A szferoidikus háromszöghálózatnak, azaz az adott méretű forgási ellipszoidon levő I., II., III. és IV. rendű háromszöghálózatnak **konform vetítéssel** előállított sík képeiről lesz szó.

Ezen vetítés vagy *közvetlenül* vagy *közvetve* történhetik a forgási ellipszoidról a síkra.

Az *utóbbi* esetben az ellipszoidról *gömbre,* azután a gömbről a síkra történik a vetítés (redukálás).

Ezt az eljárást **kettős konform vetítésnek** nevezzük.

Az ellipszoid és a vetületi sík közé iktatott gömböt *Gauss-gömbnek* nevezzük. A *Gauss-gömb* sugara azonos a leképezendő ország központjában a Bessel-féle ellipszoidhoz *símuló gömb* sugarával:

$$1. \quad \ldots\ldots \quad R = \sqrt{R_1 R_2} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 \Phi_0}$$

ahol Φ_0 jelenti az ország központjának földrajzi szélességét[4]) (középszélesség), az a és e

---

[1]) Ily esetben azonban rendszerint a konform kiegyenlítési vetület is ad megfelelő kicsiny torzulásokat, amikor azután a részletes felmérések a kiegyenlítési vetületen végezhetők el.

[2]) Elesik t. i. az a munka, hogy a kiegyenlítési vetületről a pontokat az illető részletes felmérési vetületi külön rendszerbe átszámítsuk.

[3]) Ezen cikket megelőzőleg olvasandó *tüzetesen* az I. kötet V. fejezete. (120—140. oldalig.) Közelítő értékről van szó, amelyet fali térkép fokhálózatából megállapíthatunk.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

értékek pedig a Bessel-féle ellipszoíd állandói (lásd az I. kötet 138. oldalán közölt képleteket):

$$\log e^2 = 7.8244104 - 10$$

$\log a = 6.5266943174$ bécsi ölekben $= 6.8046434637$ méterekben.

Magyarország esetében a

$$\Phi_0 = 46° - 32' - 43.''41$$

értékhez mint középszélességhez a

$\log R = 6.52677029$ bécsi ölekben $= 6.80471943$ méterekben

gömbsugár érték adódott az 1. képletből.[1]) Ezt az értéket használja ma is a magyar országos felmérés.

Az imént adott képletek és értékek alapján tehát bármely ország esetében, ha *kettős konform vetítést* akarunk alkalmazni, a legcélszerűbb gömbsugár értéke kiszámítható.

Ez megtörténvén, **kettős konform vetítés** esetében a hálózatoknak a síkra való átvezetése a következőleg történhetik.

Az I. rendű háromszöghálózat a szferoidon lett kiegyenlítve (korreláta kiegyenlítés) és a kiegyenlítés után az *asztronomiai fixpontból* és egy abból induló oldal asztronomiai azimutjából kiindulva, számíttattak pontról-pontra az I. rendű pontok szferoidikus földrajzi összrendezői:[2]) φ földrajzi szélesség és λ földrajzi hosszúság.

Ebben az esetben az ellipszoidra vonatkozó φ és λ értékekhez, ezeknek a gömbi vetületi egyenletekbe

$$2. \quad \begin{cases} \varphi_{(g)} = f_1(\varphi, \lambda) \\ \lambda_{(g)} = f_2(\varphi, \lambda) \end{cases}$$

való helyettesítésével, nyerjük a megfelelő $\varphi_{(g)}$, gömbi földrajzi szélesség és $\lambda_{(g)}$ gömbi földrajzi hosszúság értékeket az *összes I. rendű* háromszögelési pontokra nézve.[3])

Az így számított gömbi összrendező értékeket a *síkvetületi* egyenletrendszerbe

$$3. \quad \begin{cases} x = g_1(\varphi_{(g)}, \lambda_{(g)}) \\ y = g_2(\varphi_{(g)}, \lambda_{(g)}) \end{cases}$$

rendre behelyettesítve, nyerjük rendre az összes I. rendű háromszögelési pontok *derékszögű sík összrendezőit* a vetületi síkon (I. kötet 6. ábra) képzelt $+x$, $+y$ derékszögű tengelyrendszerre vonatkozólag.[4])

Legyen P_1 és P_2 két ily a síkra átszámított pont (I. kötet 8. ábra 13. old.), akkor a $P_1 P_2$ egyenes (irány) *délszöge* $\delta_{1,2}$, az ismeretes

$$4. \quad tang\, \delta_{1,2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

képlettel; $P_1 P_2$ távolság $s_{1,2}$ (vetületi oldalhossz) pedig az

$$5. \quad s_{1,2} = \frac{y_2 - y_1}{sin\, \delta_{1,2}} = \frac{x_2 - x_1}{cos\, \delta_{1,2}}$$

ismeretes képlettel kiszámítható.

Ezen itt 4. és 5. alatt adott számítást minden elsőrendű oldalra nézve elvégezve,

---

[1]) A magyarországi gömbsugár hossza eszerint = 6,378.512 méter. Tehát Magyarország földrajzi térképének készítésénél az $R = 6.379$ kilometer, gömbsugár értéket célszerű elfogadni.

[2]) Lásd az I. kötet 129—140. oldalain idevonatkozólag részletesen előadottakat.

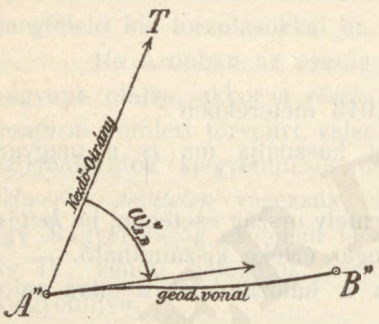
[3]) A *Gauss*-féle konform gömbi vetítés alkalmazása esetében ez a koordináta átszámítás kényelmes táblázatokkal történhetik. Ezeket a V. U. könyv végén közöljük.

[4]) A konform hengervetületnél a 3. alatti képletek hatványsorok, amint az a 114. stb. oldalakon látható.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

ismeretes lesz az I. rendű szferoidikus háromszöghálózatnak megfelelő *síkvetületi háromszöghálózat minden eleme.*[1])

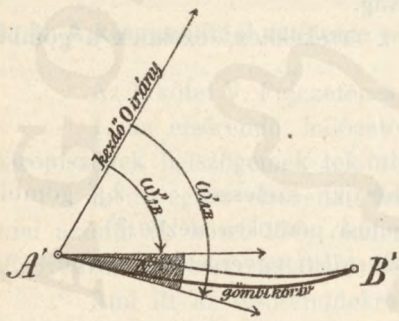
A további feladat most már: a II. rendű hálózatot **kiegyenlítés előtt** átvetíteni az ellipszoidról a síkra és a már átvezetett *I. rendű síkhálózatot hibátlan, fix keretnek tekintve*, a síkra redukált II. rendű hálózatot, az I. rendű hálózat sík összrendezőiből kiindulva, a koordináta kiegyenlítés szabályai szerint kiegyenlíteni. Ezen kiegyenlítés végeredménye a II. rendű pontok vetületi derékszögű sík összrendezői lesznek.[2])



4. ábra.

A II. rendű pontok átvitele az **irányredukciók** szabatos számítása által történik; az *irányredukciók számítása pedig* a II. rendű pontok **közelítő** gömbi és közelítő síkvetületi összrendezői értékei alapján történik. Az első kérdés tehát: *mit értünk egy háromszögoldal* irányredukciója (jelzése Δ) alatt? Meg kell itt különböztetni a **gömbi irányredukciót** (Δg) a síkbeli irányredukciótól. (Δs)

Mindkettőnek a szabatos definicióját az összetartozó **4.**, **5.** és **6.** ábrák kapcsán fogjuk megadni.

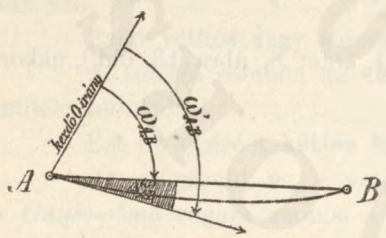


5. ábra.

A 4. ábra a *forgási* ellipszoidfelület egy része; az 5. ábra ennek *konform gömbi* vetülete, és a 6. ábra e konform gömbi vetületnek síkképe.

Előre kell bocsátani, hogy **szferoidikus** háromszög alatt oly háromszöget értek, amelyet az ellipszoidon levő három pontot összekötő három **geodéziai**[3]) vonal képez. A 7. ábrán P_1'', P_2'' és P_3'' a földi forgási ellipszoid három pontja: a három görbe oldal jelenti a három geodéziai vonalat.

Gömbháromszög alatt oly háromszöget értek, amelyet a *gömbön* levő három pontot összekötő három *legnagyobb — gömbi — kör* ívei határolnak el. A 8. ábrán P_1', P_2', P_3' jelentenek három gömbi pontot: a három *teljesen kihúzott* oldal pedig jelenti a megfelelő legnagyobb gömbi körök íveit.[4])



6. ábra.

Síkháromszög (*valódi* síkháromszög) alatt három **egyenes** vonal által bezárt idomot értek. (9. ábrán a *teljesen* kihúzott vonalak.)

Tegyük fel, hogy a 8. ábrán látható P_1', P_2', P_3' pontok, a 7. ábrán látható P_1'', P_2'', P_3'' pontoknak *konform* gömbi vetítéssel (2. képlettel) előállított

---

[1]) Ha nem kettős vetületet alkalmazunk, úgy az itt adott eljárástól csak az az eltérés, hogy a 2. és 3. képletek helyett az

$$x = F_1(\varphi, \lambda)$$
$$y = F_2(\varphi, \lambda)$$

közvetlen vetületi egyenletrendszerrel számítjuk át a pontokat az *ellipszoidról a síkra.*

[2]) Ennek megtörténte után azután következik a III. rendű hálózatok redukálása a síkra és a síkon való koordináta kiegyenlítése.

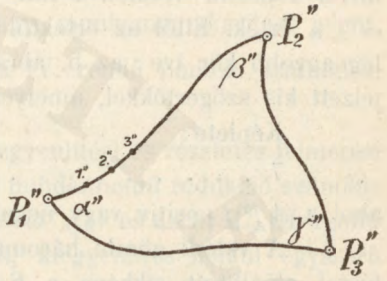
[3]) Lásd az I. kötet 7. §-át és 10. §-át a 130., illetve 138. oldalon.

[4]) A P_1' P_2' ív (oldal) úgy keletkezik, hogy a P_1', P_2' pontokon és a gömb központján át képzelünk egy síkot fektetve. Ez a sík kimetszi a P_1', P_2' ívet a gömbön.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

képei; és a 9. ábrán látható P_1, P_2 és P_3 pontok pedig a 8. ábrabeli pontoknak (3. képlettel) *konform síkvetítéssel* előállított képei. Végeredményben tehát a *9.* ábrabeli P_1, P_2, P_3 pontok a 7. ábrabeli P_1'', P_2'' és P_3'' ellipszoid pontoknak kettős konform vetítéssel előállított képei.

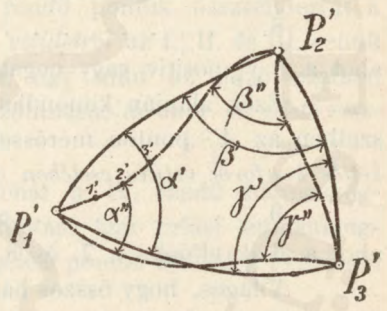
Ha azonban nemcsak a három csúcspontot P_1'', P_2'' és P_3'' számítjuk át a 2. egyenletekkel a gömbre, hanem a geodéziai vonalak *közbenső pontjait* (pl. a 7. ábrán az 1″, 2″ és 3″-vel jelzett pontok) is számítjuk át a 2. egyenletekkel, akkor *konform vetítés esetében* a 8. ábrán **eredményes vonallal** kihúzott háromszögletű idomra jutunk, amelyben (hiszen szögtartó a vetület) a három belszög (α'', β'', γ'') **szigorúan azonos** az eredeti szferoidikus háromszög belszögeivel. Ezzel szemben az ugyanazon P_1', P_2' P_3' gömbi pontokhoz tartozó (8. ábrán teljesen kihúzott) *valódi gömbi háromszög* belszögei az α', β', γ' értékek, amelyek egyenkint kisebbek vagy nagyobbak mint a szferoidikus α'', β'' és γ'' szögek. Ha tehát **konform vetületek** esetében mi a szferoidikus α'', β'', γ'' belszögekből a megfelelő *valódi gömbháromszögnek belszögeit* (α', β', γ') akarjuk ismerni, úgy ezen α'', β'', γ'' szferoidikus szögekhez + vagy — előjellel *bizonyos vetületi szögredukciókat* kell adni. Ennek oka pedig mint láttuk az, hogy a konformitás (szögtartóság) nem foglalja magában azt a feltételt is,[1]) hogy az *ellipszoid* geodéziai vonalainak gömbi képei legnagyobb gömbi körök ívei.



7. ábra.

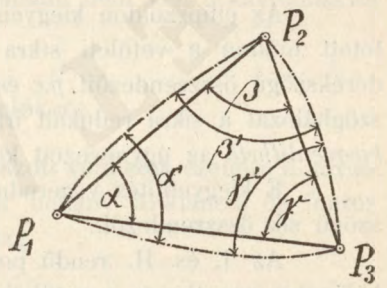
Hasonlóan áll a helyzet a gömbről a síkra való áttérésnél.

Itt — és ezt *nyomatékosan hangsúlyozom* — a valódi gömbháromszögnek (8. ábrán *teljesen* kihúzva) a síkra való vetítéséről van szó. Itt is a valódi (teljesen kihúzott) gömbháromszög oldalainak *összes* pontjait konform vetítéssel a síkra átszámítva képzelve, a 9. ábrán *pontozva* kihúzott (görbe oldalú) háromszögre jutunk, amelynek belszögei α', β', γ' szigorúan azonosak a valódi gömbháromszög α', β' és γ' belszögeivel.[2])



8. ábra.

Ha tehát az egyenes vonalakkal határolt 9. ábrabeli háromszögnek (teljesen kihúzva) α, β és γ belszögeit akarjuk nyerni a valódi gömbháromszög α', β' és γ' belszögeiből: úgy ezen α', β', γ' gömbi szögekhez + vagy — előjellel bizonyos **vetületi szögredukciókat** kell adni. Ezek szerint tehát bármely kettős konform vetület esetében, ha a **valódi szferoidikus háromszög** (7. ábra) α'' belszögének megfelelő α valódi síkháromszögbeli belszöget akarjuk ismerni, úgy ezen α'' szöghöz + vagy — előjellel két szögredukciót kell adni:



9. ábra.

$$6. \ . \ . \quad \alpha'' + \Delta\alpha_{(g)} + \Delta\alpha_{(s)} = \alpha,$$

ahol az elmondottak szerint

$$\Delta\alpha_{(g)} = \alpha' - \alpha''. \text{ (8. ábra)}$$

és $\Delta\alpha_{(s)} = \alpha - \alpha'$, amint az a 9. ábrából kivehető.

---

[1]) Nem is *foglalhatja* magában ezt a feltételt, mert ez csak egymásba fejthető felületek esetében lehetséges.

[2]) Igen, hiszen szögtartó vetületet tételeztünk fel.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Mivel az országos háromszögelésekben azonban nem *belszögértékeket* mérünk, hanem mindig **irányértékeket nyerünk méréseink végeredményeként** [1]) és ezeket a szferoidikus irányértékeket akarjuk kettős konform vetítéssel a síkra redukálni: tehát nem a 6. képlet szerinti szögredukciókat, hanem a helyszíni mérések alapján nyert irányértékek **irányredukcióit** fogjuk kiszámítani. Az előadottak alapján most már bővebb magyarázat nélkül megértjük a 4., 5. és 6. összetartozó ábrákat. A 4. ábrán $\omega''_{A,B}$ jelenti (a tetszőleges „T“ kezdő irányra vonatkoztatva) az AB geodéziai vonal (háromszögoldal) irányértékét.

Ezen *geodéziai vonal* gömbi képe az 5. ábrán eredményes vonallal van jelezve: mivel konform vetületről van szó, ezen eredményes vonal irányértéke itt is az eredeti $\omega''_{A,B}$ érték. Ettől az értéktől különbözik az A', B' valódi gömbi háromszögoldal (gömbi legnagyobb kör íve: az 5. ábrán teljesen kihúzva) $\omega'_{A,B}$-vel jelzett irányszöge a $\Delta^{(g)}_{A,B}$-vel jelzett kis szögértékkel, amelyet az AB irány *gömbi irányredukciójának nevezünk.*

Képlete:

$$7. \quad \Delta^{(g)}_{A,B} = \omega'_{A,B} - \omega''_{A,B}$$

ahol a $\Delta^{(g)}_{A,B}$ positiv vagy negativ előjelű lehet egyazon pontban.

A valódi gömbi háromszögoldalnak (az 5. ábrán teljesen kihúzva) közvetlen vetítéssel előállított síkképe a *6. ábrán* eredményesen jelzett görbe vonal, mely — mivel konform (szögtartó) vetületről van szó — a kezdő iránynyal a gömbi $\omega'_{A,B}$ szöget zárja be a síkon. Ezzel szemben az AB egyenes vonalnak irányértéke $\omega_{A,B}$ az ábrán $\Delta^{(s)}_{A,B}$-el jelzett kis szögértékkel — amelyet az AB irány *síkvetületi irányredukciójának* nevezünk — tér el a gömbi $\omega'_{A,B}$ irányértéktől. A síkvetületi irányredukció képlete:

$$8. \quad \Delta^{(s)}_{A,B} = \omega_{A,B} - \omega'_{A,B}$$

ahol a $\Delta^{(s)}_{A,B}$ positiv vagy negativ előjelű lehet egyazon pontban.

Ezek alapján kimondhatjuk tehát, hogy az $A''B''$ geodéziai vonalra nézve a természetben az A'' ponton méréssel nyert irányértéknek ($\omega''_{A,B}$) megfelelő *síkvetületi irányértéket kettős konform vetítés esetében* ezen képlet szolgáltatja:

$$9. \quad \omega_{A,B} = \omega''_{A,B} + \Delta^{(g)}_{A,B} + \Delta^{(s)}_{A,B}$$

ahol a Δ-ák előjelei a 7. és 8. képletekből adódnak.

Világos, hogy összes háromszögelési méréseink eredményeihez, *azaz az összes oldalak irányértékeihez kiszámítva és hozzáadva ezen* irányredukciókat, az így redukált irányértékek egy *valódi síkháromszögekből álló síkháromszöghálózatra* vonatkozó mérési eredményeknek tekintendők.

Az ellipszoidon kiegyenlített I. rendű háromszöghálózat az ezen §. elején ismertetett módon a vetületi síkra már át lévén vezetve, ezen I. rendű pontok síkvetületi derékszögű összrendezőit *fix értékeknek tekintve*, és ezekre támaszkodva: a II. rendű háromszöghálózat a síkra redukált irányértékek felhasználásával a vetületi síkon *mint síkhálózat kiegyenlíthető* az úgynevezett koordináta kiegyenlítés szerint. [2])

E kiegyenlítés végeredménye a II. rendű háromszögelési pontok kiegyenlített derékszögű sík összrendezői.

Az I. és II. rendű pontok derékszögű összrendezőire támaszkodva, a III. rendű hálózatra vonatkozó, a vetületi síkra redukált irányértékek alapján történhetik meg a III. rendű hálózatok kiegyenlítése a koordináta módszer szerint.

---

[1]) Az iránymérések és azok kiegyenlítésére nézve lásd az I. kötet 171—186. oldalait és a III. kötet 122—224. oldalait.

[2]) A koordináta kiegyenlítésre elemi példákat adtunk az I. kötet 66—80. oldalain és részletesen tárgyaljuk a jelen kötet II. részében.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A III. rendű hálózatok redukálásánál azonban még nagy ország (pl. a német birodalom) esetében is nagy munkamegtakarítás érhető el: t. i. nem kell itt már a 7. képlet szerinti gömbi irányredukció értékeket számítani, mert azok *a III. rendű oldalaknál oly kis szögértékek* (a másodperc századrészei), hogy a mérési hibákhoz képest elenyésző csekély értékek. A III. rendű oldalakra nézve tehát kettős konform vetület esetében is a 9. képlet így módosul:

$$10. \quad \omega_{A,B} = \omega''_{A,B} + \Delta^{(s)}_{A,B}.$$

Mivel a III. rendű pontok száma legalább a 10-szerese az I. és II. rendű pontoknak, ez az egyszerűbb redukció számítás tehát tetemes nagy munkamegtakarítást jelent.

A III. rendű pontok kiegyenlítése után, következik a IV. rendű pontok számítása. Itt azután két esetet kell megkülönböztetni:

1. Eset. Ha ugyanaz a vetület az egész országra kiegyenlítési és részletes felmérési vetület.[1]) Ekkor a IV. rendű hálózatokra mért **irányértékeket** mindennemű redukció számítás nélkül a vetületi síkra redukált értékeknek tekintjük ($\omega_{A,B} \equiv \omega''_{A,B}$) és az I., II., III. rendű pontok vetületi derékszögű sík összrendezőire támaszkodva, kiegyenlítés nélkül egyszerű sík[2]) pontszámítással (előmetszés, illetve esetleg hátrametszés) számítjuk a IV. rendű pontok derékszögű sík összrendezőit.

2. Eset. Ha a részletes felmérések vetületi rendszere (rendszerei) nem azonos a kiegyenlítési vetülettel, akkor a IV. rendű pontokra vonatkozó méréseket nem redukáljuk a kiegyenlítési vetületre, illetve nem számítjuk ki a IV. rendű pontok összrendezőit a kiegyenlítési síkon, hanem előbb átszámítjuk *a kiegyenlítési vetületről* az I., II. és III. rendű pontokat a megfelelő *részletes felmérési vetületre*[3]) és most, úgy mint az előző esetben láttuk, történik a IV. rendű pontok derékszögű koordináta számítása, *de már az illető részletes felmérési* vetületi síkokon.

Helyesen választott vetületi rendszerek esetében tehát a IV. rendü háromszöghálózatok számításaiban már *nem szerepel irányredukció* számítás, ami óriási munkamegtakarítást jelent, ha megfontoljuk, hogy az összes háromszögelési pontok **90%-át** a IV. rendű pontok teszik.

Az előadottakból tehát kitünik, hogy az összes háromszögelések *1%*-ában kell kettős konform vetítés esetében a 9. képlet szerint értelmezni az irányredukciót, *9%*-ában (III. rendű) az egyszerűbb 10. képlet szerint és *90%*-ában pedig egyáltalában nem kell irányredukciót számítani.

4. §. Megjegyzések az irányredukciókról.

Az irányredukciók számítását a gyakorlatban alkalmazott vetületek eseteire a következő fejezetben számpéldákon be fogjuk mutatni, itt csak nehány általános, de fontos megjegyzést kivánok tenni az [4]) irányredukciókra vonatkozólag.

---

[1]) Ebben már benne foglaltatik azon feltétel kielégítése, hogy minimálisak a torzulások.

[2]) Lásd az I. kötet II. fejezetét.

[3]) Azaz kiszámítjuk az I., II., III. rendű pontok derékszögű összrendezőit a részletes felmérés vetületi síkokon a kiegyenlítési vetületi sík összrendezők alapján.

[4]) A konform vetületek irányredukcióinak általános elméletét ezideig még senkinek sem sikerült kitalálni és egyáltalán e kérdés általánosságban még sehol sem tárgyaltatott. Itt tehát csak saját tapasztalati adatainkat adhatjuk.

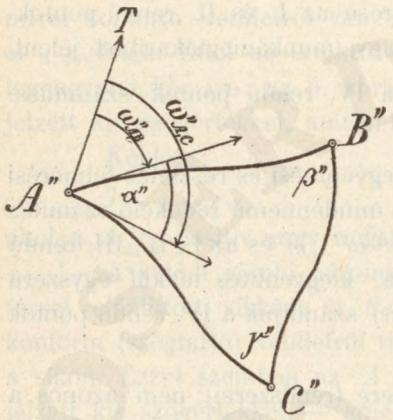
© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

1. Tétel. Mivel a háromszög valamely belszögének értékét a belszög két szárára vonatkozó két irányérték különbségeként kapjuk meg:

11. . . . . $\alpha'' = \omega''_{A,C} - \omega''_{A,B}$

12. . . . . $\alpha = \omega_{A,C} - \omega_{A,B}$,

azért a 12. képletbe a 9. képlet értelmében helyettesítve a szferoidikus irányértékeket és a redukciókat



10. ábra

12. *a*) . . . . $\alpha = (\omega''_{A,C} + \Delta^{(g)}_{A,C} + \Delta^{(s)}_{A,C}) - (\omega''_{A,B} + \Delta^{(g)}_{A,B} + \Delta^{(s)}_{A,C})$

és figyelembe véve a 11. alatti képletet, felírhatjuk az α'' belszög teljes vetületi **szögredukcióját:**

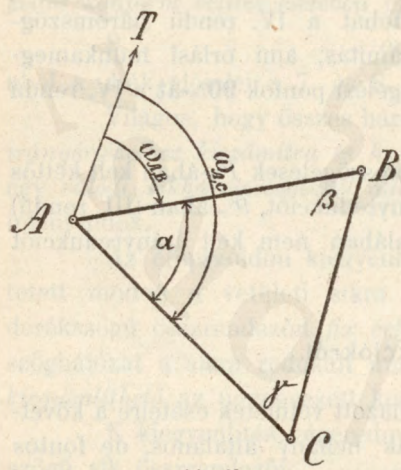
13. $\Delta\alpha = \alpha - \alpha'' = (\Delta^{(g)}_{A,C} + \Delta^{(s)}_{A,C}) - (\Delta^{(g)}_{A,B} + \Delta^{(s)}_{A,B})$.

Tehát a *szögredukció* nem egyéb, mint a két szárra vonatkozó irányredukció különbsége úgy, hogy a jobboldali szár irányredukciójából kivonjuk a baloldali szár irányredukcióját.

Harmad és alsóbbrendű háromszögek esetében a 13. alatti képlet a 10. alatti képletre tekintettel még egyszerűbb lesz:

14. . . . . $\Delta\alpha = \alpha - \alpha'' = \Delta^{(s)}_{A,C} - \Delta^{(s)}_{A,B}$.

Ilymódon, (azaz I. és II. rendűek esetén 13. III. és alsóbbrendűek esetében 14. képlet mintájára) kiszámítható a két másik belszög (10. és 11. ábra) $\Delta\beta$-val és $\Delta\gamma$-val jelezhető szögredukciója.



11. ábra.

2. Tétel. Mivel a szferoidikus háromszögben (10. ábra) a három belszög összege

15. . . $\alpha'' + \beta'' + \gamma'' = 180° + \varepsilon''$

ahol ε'' jelenti e háromszög *szögfölöslegét*[1]); viszont a valódi síkháromszögben (11. ábra) a belszögek összege pontosan $= 180°$-al:

16. . . . . $\alpha + \beta + \gamma = 180°$,

azért a *16.* képletből kivonva a *15.* képletet, az

17 . .$(\alpha - \alpha'') + (\beta - \beta'') + (\gamma - \gamma'') = -\varepsilon''$

egyenletre jutunk, amely a *13.* képlet szerint azt mondja, hogy:

18. . . . . $\Delta\alpha + \Delta\beta + \Delta\gamma = -\varepsilon''$

azaz, *hogy a szögredukciók algebrai összege egyenlő a szferoidikus háromszög szögfölöslegének értékével minus jellel véve a mindig positiv* ε'' értéket.

Erre az alapvető képletre gyakran fogunk hivatkozni: *gyakorlatilag a 18. képlettel fogjuk a redukció számítások pontosságát ellenőrizni.*

[1]) Az ε'' szögfölösleg kiszámítására vonatkozó képleteket lásd az I. kötet 139. oldalának utolsó soraiban.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

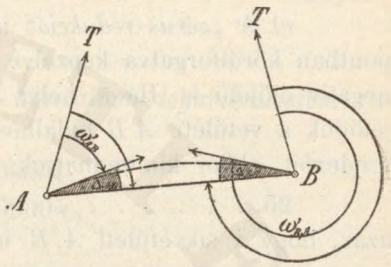
A 18. alatti képlet egyébként — az irányredukciókat vezetve be a szögredukciók helyett — a 13. képlet szerint gyakorlati alakjában így néz ki:

19. . $\left\{(\Delta^{(g)}_{A,C} + \Delta^{(s)}_{A,C}) - (\Delta^{(g)}_{A,B} + \Delta^{(s)}_{A,B})\right\} + \left\{(\Delta^{(g)}_{C,B} + \Delta^{(s)}_{C,B}) - (\Delta^{(g)}_{C,A} + \Delta^{(s)}_{C,A})\right\} +$
$+ \left\{(\Delta^{(g)}_{B,A} + \Delta^{(s)}_{B,A}) - (\Delta^{(g)}_{B,C} + \Delta^{(s)}_{B,C}) = -\varepsilon''\right.$.

Harmad és alsóbbrendű háromszögek esetében pedig a 14. képlet értelmében a 18. képlet ezt az alakot ölti:

20. . . $(\Delta^{(s)}_{A,C} - \Delta^{(s)}_{A,B}) + (\Delta^{(s)}_{C,B} - \Delta^{(s)}_{C,A}) + (\Delta^{(s)}_{B,A} - \Delta^{(s)}_{B,C}) = -\varepsilon''$.

Ez a képlet *Magyarország* esetében nagy jelentőséggel bír azért, mert mi *az I. és II. rendű hálózatokat* is eszerint számíthatjuk!



12. ábra.

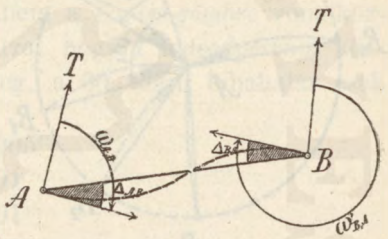
3. Tétel. A **19.** és **20.** képletekben szerepel minden egyes oldalra nézve *kétféle irányredukció* érték. Például az AB oldalra nézve szerepelnek a

21. . . . . $\Delta^{(g)}_{A,B}$ és $\Delta^{(s)}_{A,B}$ valamint a

22. . . . . $\Delta^{(g)}_{B,A}$ és $\Delta^{(s)}_{B,A}$ értékek. A *21.* alatti redukciókat nevezzük az AB oldal A pontbeli irányredukciójának és a *22.* alattiakat nevezzük az AB oldal B pontbeli irányredukcióinak. Ezek az értékek tényleg nem egyenlők, sőt *az előjelük is rendszerint ellenkező*. Egyetlen kivétel van csak: a *konform azimutális (stereográfikus) vetület*, ahol a $\Delta^{(s)}_{B,A} = -\Delta^{(s)}_{A,B}$, és ezen vetület esetében tehát a 20. képlet ezt a végtelenül egyszerű alakot ölti:

23. . . $2\Delta^{(s)}_{A,C} + 2\Delta^{(s)}_{C,B} + 2\Delta^{(s)}_{B,A} = \varepsilon''$, ami gyakorlatig így irandó[1])

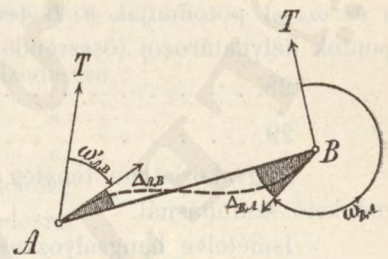
24. . . $\Delta^{(s)}_{A,C} + \Delta^{(s)}_{C,B} + \Delta^{(s)}_{B,A} = \frac{\varepsilon}{2}$.



13. ábra.

Az itt előadottak alapján tehát kimondhatjuk: *a stereográfikus vetület kivételével* az összes konform vetületeknél minden egyes *háromszögoldalra nézve mindkét végpontban végzendő el az irányredukció számítása.* E két irányredukció érték *általában ellenkező előjelű*, de kivételesen azonos előjelű is lehet.[2]) Egyes **kivételes** irányokra nézve azután mindkét irányredukció zérus is lehet.

4. Tétel. Az irányredukciók értékeinek számítására általános képlet ezideig még levezetve nincs. Tapasztalat alapján azonban kimondhatjuk, *hogy bármely konform vetület esetében* az irányredukció értéke változik



14. ábra.

[1]) A magyar országos felmérés a stereográfikus vetületen még I. és II. rendű háromszögek esetében is a 24. képletet használja a redukció számítás ellenőrzésére.

[2]) Hogy általában $\Delta_{B,A}$ előjele ellenkező a $\Delta_{A,B}$ előjelével, az a 12. ábrából látható. Itt a $\Delta_{A,B}$-t + előjellel kell a vetületi görbe oldal irányszögéhez adni, hogy az egyenes A,B irányszögét kapjuk és a $\Delta_{B,A}$-t — előjellel kell a vetületi görbe oldal $\omega'_{B,A}$ irányszögéhez adni, hogy a B,A iránynak irányszögét megkapjuk.

A 13. és 14. ábrából látható, hogy $\Delta_{A,B}$ *előjele csakis akkor lehet egyező előjelű* $\Delta_{B,A}$*-val, ha a vetületi görbe oldal az* AB *egyenes oldalt metszi.* Ekkor ugyanis a $\Delta_{A,B}$-t + előjellel kell $\omega'_{A,B}$-hez adni, hogy az egyenesnek irányszögét megkapjam és a $\Delta_{B,A}$-t is + előjellel kell $\omega'_{B,A}$-hoz adni, hogy az $\omega_{B,A}$-t kapjuk. A 14. ábrán úgy a $\Delta_{A,B}$ mint a $\Delta_{B,A}$ előjele minus. Megjegyzem, hogy a stereográfikus vetületnél soha, a hengervetületnél pedig csak akkor fordul elő ez a két eset, ha az AB oldal a vetület *semleges* körét (y tengely) metszi.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

a) pontról pontra,

b) ugyanazon pontban ugyanazon AB oldalra nézve változik az ω irányszöggel (15. ábra) és

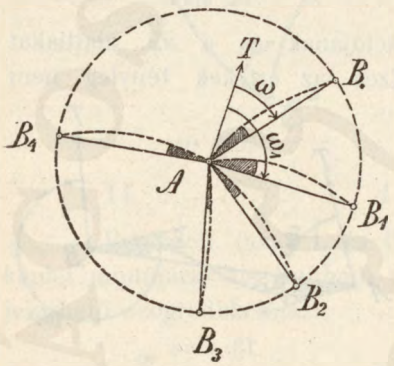
c) ugyanazon pontban, ugyanazon irányban rövidebb oldalnak kisebb, hosszabb oldalnak *nagyobb irányredukció* érték felel meg;

d) minden pontban van *egy* és csakis *egy* irány, amelyben az irányredukció (akár rövid, akár hosszú oldalról van szó) zérus. Ezt az irányt nevezzük a **„zérus redukció"** iránynak.

e) A *„zérus redukció"* iránytól jobbra és balra más a $\Delta_{A,B}$ előjele: tehát ugyanazon pontban körülforgatva képzelve az AB oldalt a $\Delta_{A,B}$ lesz positiv előjelű, lesz *0* és lesz negativ előjelű is. Ha a helyi *zérus* iránytól számítjuk az irányszögeket ($\omega_{A,B}$), és s-el jelöljük a vetületi AB oldalhosszt, x_A és y_A-val pedig az A pont derékszögű sík összrendezőit, akkor kimondhatjuk, hogy

$$25. \ldots \ldots \ldots \Delta^{(s)}_{A,B} = f_1 (x_A, y_A, s, \omega_{A,B})$$

azaz, hogy a síkvetületi A,B irányredukció az A pont összrendezőinek és az AB oldal hosszának és irányszögének függvénye.



15. ábra.

Hasonlóan ha φ_A, λ_A jelentik a gömbvetületi A-pont helyét, $\omega'_{A,B}$ az AB oldal irányszögét és s' ezen gömbi oldal hosszát, úgy a mondottak szerint a

$$26. \ldots \Delta^{(g)}_{A,B} = f_2 (\varphi_A, \lambda_A, s', \omega'_{A,B})$$

függvény adja meg a gömbvetületi irányredukció értékét az A pontban, az AB oldalra vonatkozólag.

A 25. képletben az A pont derékszögű sík összrendezői helyett az A pontnak *sík polár koordinátái* (d radiusvektor, Ψ ennek irányszöge) is szerepelhetnek:

$$27. \ldots \Delta^{(s)}_{A,B} = f_1 (d_s, \Psi_A, s, \omega_{A,B})$$

Minden további magyarázat nélkül beláthatjuk, hogy a 25. és 26. képletekben szereplő *hossz* és *irány* argumentumokat (s', $\omega'_{A,B}$, illetve s és $\omega_{A,B}$) pótolhatják a B pont helyhatározói. Azaz az irányredukciók az A és B végpontok helyhatározói (összrendezői) által is számíthatók:

$$28. \ldots \ldots \ldots \Delta^{(s)}_{A,B} = g_1 (x_A, y_A; x_B, y_B)$$

$$29. \ldots \ldots \ldots \Delta^{(g)}_{A,B} = g_2 (\varphi_A, \lambda_A; \varphi_B, \lambda_B.)$$

A gyakorlatban tényleg mind az öt alak (25—29. képletek) nyer alkalmazást a redukció számításnál.

Ismételve hangsúlyozzuk, hogy a magyar országos háromszögelésnél a gömbi redukciók kicsinységénél fogva a *26.* és 29. szerinti számítás még az I. és II. rendű hálózatokban is elmarad. Nagyobb terjedelmű országokban csak a III. és IV. rendű hálózatokban marad el a gömbi redukciók (26. és 27. képlet) számítása.

5. Tétel. *A kérdés:* mily élesen kell az irányredukciókat számítani és miként nyerjük az ezen számításokhoz szükséges vetületi összrendezői értékeket?

Ami a követelhető számítási élességet illeti, erre nézve és egyáltalában az **összes országos háromszögelési** számításokra nézve **utasításként** a következőket kell minden háromszögelőnek tudnia.

Általános elv, hogy a számításokat oly élesen végezzük el, hogy az elhanyagolások az egyes számműveletekben a *szögekben* és *hosszakban legalább* 10-szerte kisebbek legyenek, mint az illető rendű mérésnek várható *szög-*, illetve *hosszhiba-középértéke.*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Minthogy a szögelhanyagolások lineáris mértékben is kifejezhetők, azért mi elsősorban a megengedett számítási hosszelhanyagolások értékeit közöljük.

I. rendű háromszögoldal alatt mindig *35—50 km* közt fekvő oldalt értünk; *II. rendű* háromszögoldal alatt 12—35 km köztit; *III. rendű* háromszögoldal alatt *5—12 km* köztit és végül IV. rendű alatt 3—5 kilometer közt fekvő oldalakat értünk.

A megengedett számítási elhanyagolások most már:

30. . . . . { I. rendűeknél . . . ± 2 mm. / II. „ . . . ± 4 „ / III. „ . . . ± 4 „ / IV. „ . . . ± 10 „

Ezen értékeket figyelembe véve, *háromszögoldalak hosszainak logaritmusaiban* a következő számítási élesség kötelező:

31. . . . . { I. rendűeknél . . . ± 0.00000001. / II. „ . . . ± 0.00000005., / illetve 12 és 20 km közti hosszakra . ± 0.0000001 / III. rendűeknél . . . ± 0.0000001 / IV. „ . . . ± 0.0000010[1]).

Ha az oldalhosszt nem *ölekben* vagy *méterekben*, hanem a *Gauss-gömbre* vonatkoztatott központi szögek által fejezzük ki, akkor tekintettel arra, hogy *1 másodpercnyi* központi szögnek körülbelül *35 méternyi* gömbi körív felel meg, a 30. alatti hibahatár csak úgy lesz kielégítve, ha

32. . . . . { I. rendűeknél . . . ± 0.00005″ / II. „ . . . ± 0.0001″ / III. „ . . . ± 0.0001″ / IV. „ . . . ± 0.0003″-re

élesen számítjuk a háromszögoldalaknak megfelelő gömbi központi szöget.

Ezen 32. alatti hibahatárok tehát vonatkoznak a háromszögelési pontok szferoidikus (φ, λ) illetve gömbi ($\varphi^{(g)}$, $\lambda^{(g)}$) *földrajzi összrendezőinek* számítására.

Eszerint

33. . . . . { I. rendűeknél a másodperc 5 tizedesére / II. és III. „ „ „ 4 „ / IV. „ „ „ 4 „

irandók ki a pontok *földrajzi összrendezői*. És ennek megfelelőleg

34. . . . . { I., II. és III. rendűeknél *3* tizedesre, / IV. „ *2* „

irandók ki (*méter* vagy *öl* az egység) a pontok vetületi sík összrendezői.

A 30. alatti hibahatárokat figyelembe véve, a különböző rendű mérésekben az *irányredukció, meridián konvergencia, azimut* és *délszög* számításokban a következő megfelelő számítási élességi fokozatokra jutunk:

35. . . . . { I. rendűeknél . . . ± 0″.005 / II. „ . . . ± 0″.01 / III. „ . . . ± 0″.05 / IV. „ . . . ± 0″.5

a számítási élesség.

[1]) Ezen hibahatárok tehát a *vetületi oldalhosszredukció* számítására is vonatkoznak.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A IV. rendű hálózatok vetületi koordinátaszámításakor azonban az *irányredukció értékeket* még akkor is elhanyagoljuk, ha azok $\pm$ *1".3* maximális értéket elérnek.[1])

Azonban már a síkon véglegesen kiszámított hálózatoknak egyik rendszerből a másikba való átszámításakor a vízszintes szögeket (tehát az *irányredukciókat* is) oly élesen kell számítani, hogy a 35. alatti elhanyagolási határokon *alul* maradjunk.

Egyik vetületről a másikra való átszámításnál a vetületi központra vonatkozó *polár koordináták* is szerepelnek, ahol 200—300 km hosszú távolságok is szerepelnek. Ily *„nagy távolság"* esetében a távolság logaritmusát

$\pm$ 0.000 0000 05-re, a vízszintes szög (tehát az irányredukciót is) értékét pedig $\pm$ *0."001-re* élesen kell kiszámítani, ha e nagy távolság végpontját $\pm$ *4 mm*-re élesen akarjuk rögzíteni.

Az előadottakból látnivaló, hogy az irányredukció számításokat általában *rendkívül élesen* kell kiszámítani.

Ez gyakorlatilag csak úgy lehetséges, ha nem egyszerű szögfüggvényekkel, hanem *sorokkal és számtáblázatokkal oldjuk meg a feladatot*[2]).

Az ilyen sorok egyes tagjai *kis értékek* (kevés számjegyű numerusok) *lévén*, rendszerint *öt* és szélső esetben *hét* számjegyű logaritmus könyvvel, illetve e célra szerkesztett interpolatorikus számtáblákkal oldhatók meg.[3])

Ilymódon tehát az *irányredukciók legélesebb* számítása nem okozhat nehézséget, ha az illető oldal két végpontjának összrendezőit ismerjük. *Kérdés:* miként jutunk az irányredukciók számításához szükséges összrendezői értékekhez, hiszen az összrendező számítás csak akkor lesz elvégezhető, ha már méréseinket az élesen számított redukciókkal elláttuk?

Felelet: konform vetületek esetében *teljesen éles redukció számításokat* lehet elvégezni **durván közelítő** összrendezői értékek alapján. Szóval **előzetes, közelítő gömbi és síkvetületi összrendezők alapján** történik az *éles* redukció számítás.[4])

Tehát a gyakorlatban a hálózatoknak a síkra való redukálását *a közelítő* gömbi, és közelítő síkvetületi összrendező számítás előzi meg.[5])

A *gömbi irányredukció* számításhoz szükséges gömbi összrendezőket ($\varphi^{(g)}$ és $\lambda^{(g)}$) elégséges egy **fokhálózattal ellátott** háromszögelési vázlatból, amelyet a helyszínén készítünk[6]), interpolálással kivenni. Nálunk Magyarországon e célra a katonai 1 : 75.000 térkép volna igen jó: ezen feltüntetve az illető háromszögelési pont közelítő helyét, a térkép adja a keresett $\varphi^{(g)}$, $\lambda^{(g)}$ közelítő értékeket. (Itt 5—6 percre pontos értékek elegendők.)

A *síkvetületi* előzetes derékszögű összrendezőket *két lépésben* nyerjük:

a) a helyszínén készült *hálózati vázlatból* (I. kötet végén a 2. és 3. rajzmelléklet) lemérjük durván a háromszögelési pontok összrendezői értékeit és ezen egészen durva értékekkel csinálunk egy *előzetes* redukció számítást. *Ezen redukciókat a mért irányokra alkalmazva*;

---

[1]) Ezáltal óriási nagy redukció számítási munkát takarítunk meg és az elkövetett szélső értékű hiba $\pm$ 0.02 méterre tehető az összrendezőben.

[2]) Ha nem ily alakra hozzuk a redukció számítást, akkor állandóan a végtelenül nehézkes 10 jegyű logaritmus könyvvel kell dolgoznunk.

[3]) *Magyarország* esetében például a leghosszabb háromszögoldal irányredukciója 1 percen aluli érték, tehát a maximális irányredukció érték egy 5 jegyű numerus *pl. 52".134.*

[4]) Ez csak konform vetületeknél lehetséges; általános torzulásuaknál pontos argumentumokkal lehet csak éles redukció számítást végezni.

[5]) Ezen munkát már rendszerint a nyári helyszini munka alkalmával végzik el az osztályok.

[6]) Lásd az I. kötet 166—167. oldalain a hálózatok kitűzésére nézve elmondottakat.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

b) most már rendes, de nem túlságos gondos előmetszés számítással kiszámítjuk a pontok derékszögű sík összrendezőit és az így nyert *előzetes* összrendezőkkel *végezzük most már el* az éles redukció számítást. Ezen redukciókat adva mérési eredményeinkhez, elvégezhető most már a hálózati kiegyenlítés, illetve: IV. rendűek esetében a végleges derékszögű sík összrendezők kiszámítása.[1])

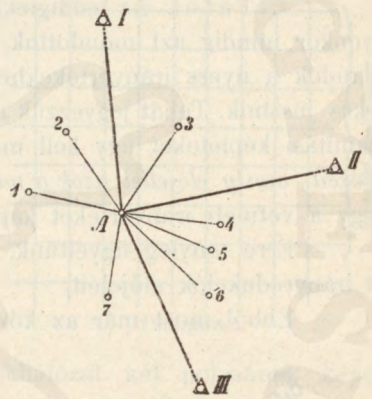
A redukció számításra nézve még meg kell jegyezni, hogy aszerint, amint I., II. vagy III. rendű méréseket redukálunk *egyszerűbb és egyszerűbb képleteket használhatunk* miközben a 35. alatti hibahatárok szigorúan be lesznek tartva. Ilymódon tehát pl. egy harmadrendű oldal irányredukciója sokkal gyorsabban számítható, mint az I. rendű oldalé.

Ami az előzetes x, y összrendezőkben megengedett közelítés mértékét illeti, úgy az *minden egyes vetületi rendszerre nézve külön vizsgálat tárgyát kell hogy képezze.*

Általában azt mondhatjuk, hogy *több méteres* hiba lehet úgy az x, mint az y összrendezőben és azért az irányredukciókat mégis a 35. alatt adott élességgel számíthatjuk.[2])

6. Tétel. Miként nyerjük a helyszini mérésekkel tetszőleges kezdő irányra vonatkozólag előállított *irányértékek alapján* a síkvetületi délszögeket.[3])

Felelet: Minden egyes irányértékhez hozzáadjuk az illető oldalra nézve a *28.* és *29.* képletek (sorok, táblázatok) segélyével számított irányredukció értékeket a 28. és 29. képletek adta előjellel és azután az I. kötet 19. oldalán ad III. alatt adott eljárás szerint szóról-szóra végezzük el irányértékeinknek délszögekké való tájékozását. Hogy ez az eljárás helyes, az kétséget sem szenved, hiszen a redukciók alkalmazása által irányértékeink tényleg *egyenes vonalakra* fognak vonatkozni.



16. ábra.

Itt csak azt kell megjegyezni, hogyha az I. kötet 20. oldalán 2. alatt tárgyalt esettel van dolgunk, úgy nemcsak a $\Delta_{P,3}$ redukciót, hanem a $\Delta_{3,P}$ redukciót is kellett előzőleg kiszámítani — ami önként értetődik, mert a $\delta_{3,P}$ a 3. P *egyenes oldalnak* 3. pontbeli délszögét jelenti.

Külön hangsúlyozandónak találom, hogy valamely irányérték sorozat délszögre tájékozását megelőzőleg nemcsak a sorozatban levő *új irányok* (I. kötet 21. oldalán a 13. ábrán a P pontból induló vékonyan kihúzott sugarak) redukcióit, hanem az iránysorozatban szereplő (nevezett ábrán *vastagon* kihúzott) ismeretes oldalak irányredukcióit is kell kiszámítani és a mérési irányértékekhez adni.

Tehát kivétel nélkül *valamennyi* irány irányértékét látjuk el irányredukcióval és ennek megtörténte után végezzük el a *délszögtájékozást* a (I. kötet 21. oldal 13. ábra) PA, PB, PC, PD, PE és PF egyenes irányokra vonatkozólag már ismeretes délszögértékek alapján.

A jelen §-ban több helyen megemlítettük már, hogy a IV. rendű mérésekre nézve hazánkban (hengervetületen) nem kell semmiféle irányredukciókat végezni. A IV. rendű hálózat esetében tehát *a nyers irányértékek* lesznek egyszerűen (I. kötet 19. oldal ad III.) délszögekké tájékozva. Előfordulhat azonban az az eset, hogy *a tájékozás miatt 10—15 kilometer hosszú irányokat* is vettünk be a IV. rendű mérési iránysorozatba (16. ábrán az I., II., III. irányok ily hosszú tájékozó irányok).

---

[1]) Az összrendezők előzetes kiszámítása nemcsak a redukció, hanem a központosítási számítások és a koordináták szerinti kiegyenlítés céljából is történik.

[2]) A hengervetületnél azonban az y összrendezőben még nagyobb lehet a hiba mint az x-ben.

[3]) Itt előzőleg elolvasandó tüzetesen az I. kötet 19., 20. és 21. oldalain ad III. alatt ismertetett eljárás.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ezen hosszú irányokra nézve a redukciókat igenis ki kell számítani és az irányértékekhez adni; míg a (16. ábrán 1, 2, 3, 4, 5, 6) többi irányra nézve megmaradnak a nyers irányértékek. Ezen esetben tehát, ha

36. . . . . l_1, l_2, l_I, l_3, l_{II}, l_4, l_5, l_6, l_{III} és l_7

jelentik, az 1., 2. I . . . stb. irányokra vonatkozó nyers irányértékeket, és $\Delta_{A,I}$; $\Delta_{A,II}$; $\Delta_{A,III}$ jelentik az $A\,I$, $A\,II$ és $A\,III$ hosszú irányoknak a 28. képlet szerint számított irányredukcióit: úgy a tájékozás nem a 36. alatti nyers iránysorozatra, hanem az

37. . l_1, l_2, $(l_I + \Delta_{A,I})$, l_3, $(l_{II}, + \Delta_{A,II})$, l_4, l_5, l_6, $(l_{III} + \Delta_{A,III})$, l_7

„részlegesen redukált" irányértéksorozatra nézve lesz az I. kötet 21. oldalán közölt módon elvégezve.

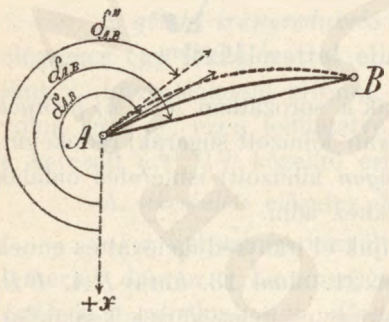
Az itt a hosszú tájékozó irányokra előadottaknak figyelembe nem vétele az egész tájékozást (z értékét) 3—4 és még több másodperccel is meghamisíthatja különösen a tájékozó irányoknak az I. kötet 22. oldalán a 14. ábrának baloldali esetében feltüntetett egyoldalú fekvésében, amidőn a $\Delta_{P,A}$, $\Delta_{P,B}$ és $\Delta_{P,C}$ előjele valószínüleg ugyanaz mind a három irányra nézve.[1])

Ez az eset áll fenn akkor is, ha csak **egyetlen** tájékozó irányunk van.

7. Tétel. Az eddigiekben többször történt a 28. és 29. képletekre hivatkozás. Ilyenkor mindig azt mondottuk, hogy a 28. és 29. képletekből nyert irányredukció értékek adandók a nyers irányértékekhez, hogy a vetületi *egyenes* oldalakra vonatkozó irányértékekre jussunk. Tehát jegyezzük meg, hogy bármely konform vetítés esetében az irányredukció számítási képleteket úgy kell majd felállítani, hogy azok *oly előjellel adják a redukciók értékeit, amily előjellel azok a mérési eredményekhez* (tehát a szferoidikus adatokhoz) *adandók*, hogy a vetületi irányértéket kapjuk.

Erre tényleg ügyeltünk, a magyarországi irányredukciós képletek mind így adják az irányredukciók előjeleit.

Ebből most már az következik, hogyha a síkról a gömbre és aztán az ellipszoidra akarunk áttérni: *akkor a redukciókat fordított előjellel kell a síkbeli irány- vagy síkbeli délszög értékhez adni*, mint amily előjellel e redukció értékeket a 28. és 29. alatti képlet szolgáltatta.



17. ábra.

Tehát ha például $\delta_{A,B}$ jelenti az $A\,B$ vetületi *egyenes* vonal délszögét az A pontban, úgy a

38. . . . . $\delta'_{A,B} = \delta_{A,B} - \Delta^{(s)}_{A,B}$

képlet adja a gömbi $A\,B$ oldal közvetlen vetületének A pontbeli érintőjére vonatkozó délszöget. (17. ábra.)

A 38. képlet szerint előállított $\delta'_{A,B}$ értéket: a *„vetületi görbe oldal"* délszögének fogjuk nevezni.

Ha ezen $\delta'_{A,B}$ értékből kivonjuk a 29. képlet adta gömbi irányredukciót $\Delta^{(g)}_{A,B}$-t, akkor a

39. . . . . $\delta''_{A,B} = \delta'_{A,B} - \Delta^{(g)}_{A,B} = \delta_{A,B} - \Delta^{(s)}_{A,B} - \Delta^{(g)}_{A,B}$

úgynevezett *szferoidikus délszöget* nyerjük.[2])

Ez nem más, mint a 17. ábrán pontozott oldalnak a $+x$ irányra vonatkoztatott irányszöge. A 17. ábrán pontozott $A\,B$ görbe vonal pedig jelzi a szferoidikus $A''\,B''$

---

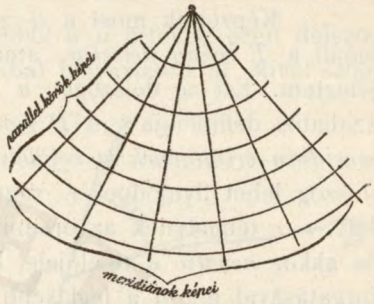
[1]) E három redukció előjele csak akkor nem volna ugyanaz, ha a *„zérus redukció"* irányt közrefogják a $P\,A$ és $P\,C$ irányok.

[2]) A 39. képletbe tehát a — jel mögé írjuk a $\Delta^{(g)}_{A,B}$ értéket a 29. képlet adta előjellel.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

geodézia vonalnak pontonkinti kettős konform vetítéssel előállított képét. A 17. ábrabeli kihúzott AB görbe vonal (a gömbi $A'B'$ körív képe) a pontozott AB görbével a $\Delta^{(g)}_{A,B}$ szöget zárja be.

8. Tétel: **A szferoidikus meridián kettős konform vetületéről.**



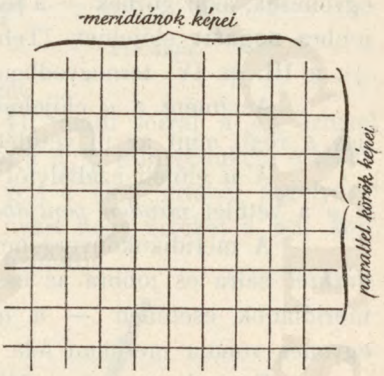
18. ábra.

Az I. kötet V. fejezetének 1., 7. és 9. §-aiban megadtuk a csillagászati és szferoidikus *szélességnek* és *hosszúságnak* definicióit. Definiáltuk továbbá az ellipszoid meridiánjait és parallel köreit (I. kötet 129. oldal) és definiáltuk a szferoidikus azimutot (I. kötet 120. lapja és 130. lapján a 78. ábra).

Tetszőleges gömbi konform vetület esetében az ellipszoid meridiánjainak pontonkinti vetítéssel *(2. képlet)* előállított képei *nem lesznek gömbi meridiánok,* úgyszintén az ellipszoid parallel *köreinek képei* nem lesznek *gömbi parallel* körök.

Az országos felmérésekben azonban csakis a **Gauss-féle konform gömbi vetület** szerepel és ezen vetítési törvénynél a gömbi $\varphi^{(g)}$, $\lambda^{(g)}$ értékeket nem a 2. szerinti, hanem egyváltozós függvények adják, azaz:

$$40. \quad \begin{cases} \varphi^{(g)} = f_1(\varphi) \\ \lambda^{(g)} = f_2(\lambda) \end{cases}.$$



19. ábra.

Eszerint a **Gauss**-féle konform gömbi vetületnél *bármely szferoidikus meridiánellipszisnek képe egy-egy gömbi meridián és minden szferoidikus parallel körnek képe gömbi parallel kör.*

A meridiánok és parallel körök által alkotott ezen gömbi fokhálózat két polusa lesz a szferoidikus fokhálózat két polusának képe.

A szóban forgó *gömbi fokhálózatot* vetítsük most már konform vetítéssel a síkra. Akkor háromféle konfigurációra juthatunk, amelyek csak abban egyeznek meg, hogy: — konform (szögtartó) vetítésről lévén szó, — a *síkvetületi meridiánok a síkvetületi parallel körökkel* minden pontban derékszöget zárnak be. Az említett három tipikus eset a 18., 19. és 20. ábrákon látható, ahol a 20. ábrabeli eset az általános eset: amikor ugyanis a *meridiánok képei és a parallel körök képei* mind görbe vonalak.

20. ábra.

A 20. ábrabeli eset azonban nem zárja ki azt, hogy *egy meridián* egyenes vonalként projeciálódik.

A mondottakból következik, hogy a 18., 19. és 20. ábrabeli síkvetületi fokhálózatok a *szferoidikus fokhálózat konform képeinek tekinthetők.*[1])

A síkon egy tetszőleges pontot (pl. a 20. ábrán a K pont) tekinthetünk koordináta kezdőpontnak. A kezdőponthoz tartozó *síkvetületi meridián* érintőjét tekintik minden országban x tengelynek; az ezen helyi észak-déli vonalra merőleges egyenes az y tengely.[2])

---

[1]) A feltétel az volt, hogy a szferoidról a gömbre a **Gauss**-féle vetítési törvénynyel tértünk át.

[2]) Magyarország esetében a K pontbeli meridián érintő *déli* felét tekintjük $+x$ tengelynek.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Vegyünk most fel a vetületi síkon egy tetszőleges P pontot és képzeljük az ezen P ponthoz tartozó vetületi meridiánt megrajzolva (20. ábra).

Vonjuk meg e vetületi meridiánhoz P pontban az érintőt. (20. ábrán a T egyenes.)

Képzeljük most a $+x$ tengelyt a vetületi síkon parallel a P pontba eltolva, akkor előáll a T *irány délszöge*, amelyet a 20. ábrán nem a szokásos δ, hanem a μ betűvel jeleztem. Ezt a délszöget *a P pontbeli vetületi meridiánkonvergenciának nevezzük* és a szabatos definiciója: „*a P pontbeli vetületi meridiánkonvergencia alatt a P pontbeli vetületi meridián érintőjének a vetületi* $+x$ *tengely irányával bezárt hegyes szöget értjük.*“ Ezen μ szög lehet ilymódon $+$ vagy $-$ előjelű. A μ előjele akkor $+$, hogyha a P pontba tolt $+x$ tengelynek az óramutatóval egyező forgásával érjük el a délfelé mutató T érintőt; és akkor *negativ* a μ előjele, ha a P pontba tolt $+x$ irány az óramutatóval ellenkező forgatásával éri el a legkisebb forgással a *délfelé* irányított T érintőt.

Fontos és *minden konform vetületre érvényes* tétel most már ez: Ha a K koordináta kezdőpontot azon, illetve oly meridiánban választjuk, amelynek sík vetülete **egyenes vonal**, amikor tehát a $+x$ irány összeesik ezen kezdő meridián síkképével, akkor — akár egyenesek, akár görbék — a többi vetületi meridiánok a $+x$ *tengelytől balra* **positiv**, és tőle jobbra **negativ** előjelűek. (Tehát I. kötet 13. lapján a 6. ábrán a I. és II. térnegyedben $+$, a III. és IV. térnegyedben $-$ a μ-k előjelei.) [1])

Az imént a μ előjelére adott szabály Magyarország esetében (I. kötet 5. ábra) úgy a régi, mint az új vetületi rendszerekre nézve áll.

A μ előjeli szabálytól általában csak egy kivétel van: ugyanis a 19. ábra esetében a μ a vetület *minden pontjában zérus.*

A meridiánkonvergencia előjeli szabálya azért igaz, mert a *vetületi egyenes meridiántól* balra és jobbra az összes meridiánok egy északi pont felé konvergálnak és — görbe meridiánok esetében — a meridiánok mind a **homorú** oldalukat fordítják az egyetlen egyenes vonalú meridián felé.

Bármely vetület esetében a μ értékét bármely vetületi P pontra nézve megadja egy ily képlet vagy sor:

$$41. \ldots\ldots\ldots\ldots \mu_P = F_1(x_P, y_P).$$

Ezt a képletet a „*vetületi konvergencia*“ képletének fogjuk mondani: ezen képlet szerint tehát a vetületi konvergencia értékét az illető pont derékszögű sík összrendezői alapján fogjuk előállítani.

A μ számításának élességére nézve a 30. alatti határok mérvadók. Törekvésünk lesz bármely vetület esetében a 41. függvényt oly sor alakjára hozni, amely a 30. szerinti élességet 5—6 jegyű logaritmus könyv alkalmazása esetére is biztosítja. Ilymódon tehát a μ értékek számítása gyakorlatilag egyszerűen és gyorsan elvégezhető. [2])

A meridiánkonvergencia számítása valamely háromszögoldal szferoidikus azimutjának kiszámításakor aktuális. Ugyanis ki fogjuk mutatni, hogy a *szferoidikus* A'' B'' pontot összekötő geodéziai vonal A'' pontbeli azimutját (21. ábrán $\omega''_{A,B}$) a síkvetületi adatokból kiszámíthatjuk ezen egyszerű képlet által: (21. ábra)

$$42. \ldots\ldots\ldots \omega''_{A,B} = \delta_{A,B} - \mu_A - \Delta^{(s)}_{A,B} - \Delta^{(g)}_{A,B}$$

[1]) Ez a tétel az ekvátortól északra fekvő országokra érvényes; az ekvátortól délre (ha a $+x$ tengely ott is a déli irány) az előjelek fordítottak.

[2]) Magyarország esetében úgy az új mint a régi vetületekre nézve egy-egy μ érték számítása 10—15 percet igényel.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

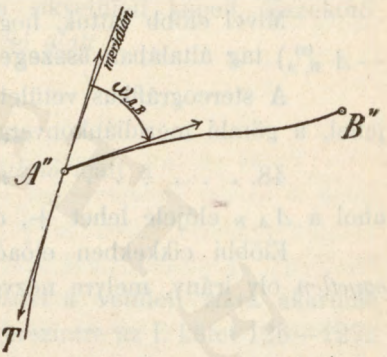
Amely képlet igaz voltát bizonyítja a 21. ábra megtekintése és a *szferoidikus délszögre* nézve levezetett *39.* alatti képlet. Ugyanis a 42. képletben

$$\delta_{A,B} - \Delta^{(s)}_{A,B} - \Delta^{(g)}_{A,B}$$

rész adja a szferoidikus délszög ($\delta''_{A,B}$) értékét: kivonva ebből a μ értéket, ezen délszög kezdő iránya a meridiánba (tehát az azimutok kezdő irányába) helyeztetett át. Mivel szögtartó vetületről van szó, ez a

$$(\delta''_{A,B} - \mu)$$

irányszög azonos a 20. ábrán definiált *szferoidikus azimuttal.*



21. ábra.

Most már *az azimut számításának* menetét bármely kettős konform vetület esetére felállíthatjuk:

1. Adva a vetületi síkon az AB oldal két végpontjának derékszögű sík összrendezői x_A, y_A és x_B, y_B. Ezek alapján az ismeretes (I. kötet 17. oldal)

$$tang\,\delta_{A,B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

képlet szerint számítjuk az AB egyenes A pontbeli délszögét.

2. Az A pont összrendezői segélyével számítjuk a 41. alatti sorral a μ_A értéket és az A és B pontok összrendezői alapján a 28. alatti sorral a $\Delta^{(s)}_{A,B}$ irányredukció értéket.

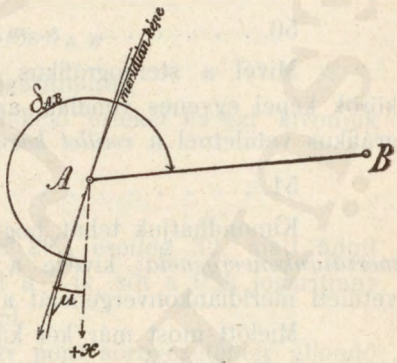
3. Végül az A és B pontoknak katonai térképből vett φ és λ értékei segélyével 29. szerint előállítjuk a $\Delta^{(g)}_{A,B}$ gömbi irányredukciót. Az így nyert négy értéket a 42. képletbe behelyettesítve: meglesz az AB oldalnak A pontbeli azimutja.

Ha a B pontbeli azimutot akarjuk ismerni, akkor a μ_B, $\Delta^{(s)}_{B,A}$, $\Delta^{(g)}_{B,A}$ értékeket kell előbb kiszámítani és ezeket rendre kivonni a

$$\delta_{B,A} = \delta_{A,B} \pm 180°$$

délszögből:

$$43. \quad \omega''_{B,A} = \delta_{B,A} - \mu_B - \Delta^{(s)}_{B,A} - \Delta^{(g)}_{B,A}.$$



22. ábra.

Ha nem az ellipszoidon képzelt geodéziai vonalnak, hanem a gömbi AB legnagyobb körívnek *gömbi azimutját* akarjuk csak kiszámítani a síkvetületi adatokból,[1]) akkor a 42. képletből kimarad a $\Delta^{(g)}_{A,B}$ tag azaz:

$$44. \quad \textit{gömbi azimut} = \omega'_{A,B} = \delta_{A,B} - \mu_A - \Delta^{(s)}_{A,B}.$$

Hasonlóan felírható tehát ugyanazon gömbi $A'B'$ oldal *másik végpontjában a gömbi azimut:*

$$45. \quad \omega'_{B,A} = \delta_{B,A} - \mu_B - \Delta^{(s)}_{B,A}.$$

A geodéziában az $(\omega'_{B,A} - \omega'_{A,B})$ azimutkülönbséget nevezik az A és B pont közti *„meridiánkonvergenciának"*.

Ezen *„gömbi meridiánkonvergenciát"* m betűvel fogjuk jelölni és jól meg fogjuk különböztetni a μ *„vetületi meridiánkonvergenciától"*, amely a definiciója szerint más fogalom, ami különben abból is kitünik, hogy 44. és 45. képletek szerint:

$$46. \quad m_{(B,A)} = \omega'_{B,A} - \omega'_{A,B} = (\delta_{B,A} - \delta_{A,B}) + (\mu_A - \mu_B) + (\Delta^{(s)}_{A,B} - \Delta^{(s)}_{B,A})$$

[1]) Egyik síkvetületből a másikba való átszámításnál erre gyakran lesz szükség.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Figyelembe véve, hogy $\delta_{B,A} = \delta_{A,B} \pm 180°$ (I. kötet 13. lap.) lesz a „*gömbi meridiánkonvergencia*“ képlete:

47. . . . . $m_{(B,A)} = (\mu_A - \mu_B) + (\Delta^{(s)}_{A,B} - \Delta^{(s)}_{B,A}) \pm 180°$.[1])

Szóval a gömbi meridiánkonvergencia értéke ($m_{B,A}$) nem egyenlő a két végpontbeli *vetületi meridiánkonvergencia* különbséggel, hanem ettől a különbségtől az irányredukciók különbségével tér el.

Mivel előbb láttuk, hogy $\Delta^{(s)}_{A,B}$ és $\Delta^{(s)}_{B,A}$ előjelei általában ellenkezők, ez a $(\Delta^{(s)}_{A,B} - \Delta^{(s)}_{B,A})$ tag általában **összeget** jelent.

A stereográfikus vetület esetében pedig, mivel $|\Delta^{(s)}_{A,B}| = |\Delta^{(s)}_{B,A}|$ de ellenkező előjellel, a gömbi meridiánkonvergencia képlete lesz:

48. . . . . $m_{B,A} = (\mu_A - \mu_B) + 2\,\Delta^{(s)}_{A,B}$,

ahol a $\Delta_{A,B}$ előjele lehet +, de lehet — is.

Előbbi cikkekben előadtuk, hogy minden pontban (a konform síkvetületen) van *egyetlen* oly irány, melyre nézve

$$\Delta^{(s)}_{A,B} = \Delta^{(s)}_{B,A} = 0.$$

Ezen *zérus irányra* nézve — és csakis erre — áll tehát bármely konform vetület esetére ez a képlet:

49. . . . . $m^{(0)}_{B,A} = \mu_A - \mu_B$

Speciális eset: ha a szóban forgó A, B oldalnak B pontja azonos a vetületi kezdőponttal ($B \equiv K$), amelyre nézve feltevésünk szerint $\mu_K = 0$.[2])

Ebben az esetben tehát az AK oldal gömbi meridiánkonvergenciája a 47. képlet alapján lesz:

50. . . . . $m_{(K,A)} = \mu_A + (\Delta^{(s)}_{A,K} - \Delta^{(s)}_{K,A})$

Mivel a stereográfikus vetületnél a K pontból induló összes legnagyobb gömbi körök képei egyenes vonalak, azaz mivel ezen vetületnél $\Delta_{A,K} = \Delta_{K,A} = 0$, azért a stereográfikus vetületnél a *vetület bármely* A pontjára nézve:

51. . . . . $m_{K,A} = \mu_A$.

Kimondhatjuk tehát, hogy a *gömbi meridiánkonvergencia* más fogalom, mint a *vetületi meridiánkonvergencia*; kivéve a stereográfikus vetület pontjait, ha úgy a gömbi, mint a vetületi meridiánkonvergenciát a vetületi kezdőpont (K) meridiánjára vonatkoztatjuk.

Mielőtt most már két különböző konform síkvetület közötti vonatkozások tárgyalásába bele bocsátkoznánk, ismerkedjünk meg a vetületi redukciók második főfogalmával: *a vetületi hosszredukció fogalmával.*

5. §. A hosszredukció.

A hosszredukció nem azonos fogalom a lineár modulussal, amelyről az I. fejezet 2. §-ában volt szó.[3])

Ha $s''_{A,B}$ jelenti a forgási ellipszoidon képzelt A'', B'' pontokat összekötő geodéziai vonal hosszát (4. ábra); $s'_{A,B}$ pedig jelenti a A'', B'' pontok gömbi képeit (5. ábrán A', B'

[1]) A 180° előjelét úgy választjuk, hogy ez által mindig a hegyes szöget képezzük.

[2]) Feltételeztük volt, hogy az x tengely azonos ez egyetlen egyenes vonalú meridiánnal, amikor a koordinátarendszer kezdőpontjában tényleg 0 a vetületi konvergencia.

[3]) A hosszredukció fogalma csak 2—3 kilometeren aluli oldalakra nézve azonos a lineármodulus fogalmával.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

pontok) összekötő legnagyobb gömbi kör ívének hosszát: (5. ábrán teljesen kihúzva) akkor *gömbi hosszredukció* ($\sigma^{(g)}$) *alatt* ezen kifejezést értjük:

$$52. \quad \sigma^{(g)}_{A,B} = log\, s'_{A,B} - log\, s''_{A,B}$$

amely σ érték positiv vagy negatív lesz, mert a Gauss-gömbi vetület nagyítva és kicsinyítve adja az eredeti hosszakat.[1])

Ha végül $s_{A,B}$ jelenti a gömbi $A'B'$ pont konform síkvetületi képeit összekötő **egyenes oldal** hosszát, (6. ábra) akkor *síkvetületi hosszredukció alatt* a

$$53. \quad \sigma^{(s)}_{A,B} = log\, s_{A,B} - log\, s'_{A,B}$$

logaritmikus értéket értjük, amely szintén mindig positív érték.

Kettős konform vetítés esetében tehát vetületi hosszredukció alatt a

$$54. \quad \sigma_{A,B} = \sigma^{(s)}_{A,B} + \sigma^{(g)}_{A,B}$$

algebrai összeget értjük.

Ha tehát egy a *természetben*, a *térszinén* mért *hosszt* a vetületi síkra akarunk vonatkoztatni, akkor először redukáljuk e hosszértéket a tengerszintre az I. kötet 126—127. oldalain előadottak szerint, az így nyert *ellipszoidikus hossz logaritmusához* azután hozzáadva az 54. képlet szerinti σ értéket: meglesz a szóban forgó bázis vonal síkvetületi hossza:

$$55. \quad log\, s_{A,B} = log\, s''_{A,B} + \sigma.$$

Ha pedig fordítva: adva két vetületi A, B pont derékszögű sík összrendezői és keressük a megfelelő ellipszoidikus hosszt (geodéziai vonal hossza), akkor az eljárás:

$$1. \quad tang\, \delta_{A,B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{és} \quad log\, s_{A,B} = log\,(y_B - y_A) -$$

$$- log\, sin\, \delta_{A,B} = log\,(x_B - x_A) - log\, cos\, \delta_{A,B}$$

képletekkel kiszámítjuk a vetületi AB egyenes hosszának logaritmusát,

2. kiszámítjuk az 54. szerinti $\sigma_{A,B}$ vetületi hosszredukció értéket és azt kivonjuk az 1. alatt nyert $log\, s_{A,B}$ értékből

$$56. \quad log\, s''_{A,B} = log\, s_{A,B} - \sigma_{A,B}.$$

Az 55., illetve 56. képletekben az egyes tagokat a 29., esetleg 32. alatt adott élességgel kell a gyakorlatban kiszámítani. Tehát a σ értéket a 7-ik, sőt a 9 ik logaritmus egy egységére élesen kell rendes számításainkban kiszámítani.

Míg a lineármodulus konform vetületek esetében egy pont környezetében állandó (Tissot indikátrix kör), addig *az ugyanazon pontból induló egyenlő hosszúságú háromszögoldalak vetületei mind különböző hosszúak.*[2])

Szóval a hosszredukció, mint azt az irányredukciónál láttuk az illető oldal két végpontja helyének, illetve az egyik végpont helyének és az oldal irányának és hosszának függvénye. Tehát a σ számítási képletei:

$$57.\ a) \quad \sigma^{(g)}_{A,B} = f_1(\varphi^{(g)}_A, \lambda^{(g)}_A; \varphi^{(g)}_B, \lambda^{(g)}_B) = f_2(\varphi^{(g)}_A, \lambda^{(g)}_A, \omega', s')$$

$$57.\ b) \quad \sigma^{(g)}_{A,B} = g_1(x_A, y_A; x_B, y_B) = g_2(x_A, y_A, \omega' s').$$

---

[1]) Kivételt csak az úgynevezett kezdő parallel kör pontjai képeznek: e körön mindennemű redukció = 0. Innen északra rövidülnek, délre nagyobbodnak a hosszak.

[2]) Ezt a stereográfikus vetületen lehet szépen demonstrálni, ahol pl. egy 20 km sugarú gömbfelületi kör radiusainak végpontjai a vetületen ismét körön feküsznek ugyan, de az eredeti körközpont képe a vetületen már központon kívül esik.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A gyakorlatban rendszerint az *összrendezőket* használjuk argumentumként. Mivel a σ értéke a helylyel, hosszal, iránynyal még *lassabban változik* mint az irányredukció: a σ szabatos számítását szintén *közelítő összrendezői értékekkel végezhetjük el*, és e közelítő összrendezői értékekben *még nagyobb hibahatárt* fogunk engedélyezhetni, mint az irányredukció számításában.

A hosszredukció a rendes országos vetületi számításokban alig fordul elő, mert ha az I. rendű hálózat már a síkra van hozva, az összes többi hálózatok síkra redukálása pusztán az irányredukciók számítása által eszközölhető.

Azonban igen nagy szerepe van a hosszredukciónak akkor, midőn egyik síkvetületről a másikra térünk át.

Tehát például Magyarország esetében, ha a stereográfikus vetületen kiegyenlített pontokat a három hengervetület közül valamelyikre akarjuk átvinni, vagy ha az egyik hengervetületi rendszer szélén levő pontokat a szomszédos hengervetületre is át kell számítani. Minthogy ily átszámítások Magyarország esetében igen gyakran és nagy számban végzendők: a hosszredukció szabatos és lehető egyszerű számítása nálunk szintén nagy gyakorlati fontossággal bír.

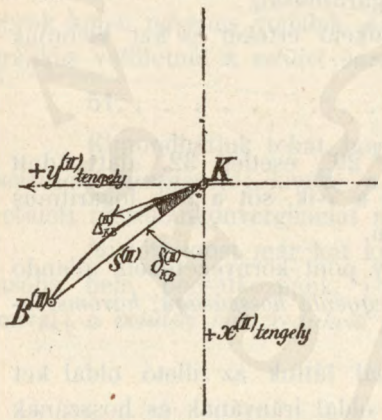
III. FEJEZET.

Két különböző konform síkvetület közötti vonatkozások.

I. §. Egységes háromszöghálózat és közös sík koordináta tengelyrendszer esete.

Itt több gyakorlati esetet kell külön-külön tárgyalni.

Az első eset az, amikor a két síkvetület ugyanazon felületrészt, illetve ugyanazon kiegyenlített hálózatot ábrázolja úgy, hogy:



23. ábra.

a) ugyanazon Gauss-gömbi konformvetületre vonatkoznak mindketten;

b) közös a vetületi koordináta kezdőpontjuk (K);

c) a közös K ponton átmenő Gauss-gömbi meridián *egyenes síkképe mindkét vetületre* nézve az x tengely;

d) a háromszöghálózat *egy szerves egészben* és egyetlen astronomiai fixpontra támasztva számíttatott.

Egyébként azonban *tetszőleges két konform vetítési törvényről* van szó. (Megkülönböztetésül az egyik konform síkvetületet I.-el, a másikat II.-vel jelöljük és minden az I., illetve II. vetületre vonatkozó adatot mint délszögeket, összrendezőket, redukciókat stb. megfelelően I., illetve II. indexxel fogjuk ellátni.)

Ilyen körülmények között a tetszőleges **gömbi** A' pontnak az egyik vetületen valami $x_A^{(I)}, y_A^{(I)}$ derékszögű sík összrendezői érték fog megfelelni, a másik vetületen pedig ugyanazon A' gömbi pont képének összrendezői lesznek az előbbiektől különböző $x_A^{(II)}, y_A^{(II)}$.

Mivel a kétféle vetületre vonatkozó összrendezők egymástól teljesen különálló értékek, azért valamely $A'B'$ gömbi oldalnak megfelelő *vetületi egyenes oldal délszögét* számítva az I. vetületen az ismeretes

$$58\,a) \quad \ldots\ldots\ldots \quad tang\,\delta_{A,B}^{(I)} = \frac{y_B^{(I)} - y_A^{(I)}}{x_B^{(I)} - x_A^{(I)}}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

képlet szerint, és a II. vetületen

$$tang\,\delta^{(II)}_{A,B} = \frac{y^{(II)}_B - y^{(II)}_A}{x^{(II)}_B - x^{(II)}_A}$$

szerint, az így nyert két délszögérték egymástól különböző két érték lesz, azaz

58. *b)* . . . . . $\delta^{(I)}_{A,B} \lessgtr \delta^{(II)}_{A,B}$.

Hasonlóan számítva mindkét vetületen a gömbi $s'_{A,B}$ oldalnak megfelelő $s_{A,B}$ síkvetületi oldalhosszt az ismeretes:

59. . . . . $log\, s^{(I)}_{A,B} = log\,(y^{(I)}_B - y^{(I)}_A) - log\, sin\, \delta^{(I)}_{A,B}$

60. . . . . $log\, s^{(II)}_{A,B} = log\,(y^{(II)}_B - y^{(II)}_A) - log\, sin\, \delta^{(II)}_{A,B}$

képletek szerint, a két oldalhosszérték is különbözni fog egymástól, azaz

61. . . . . $log\, s^{(I)}_{A,B} \lessgtr log\, s^{(II)}_{A,B}$

Mihelyt azonban az *59.* és *60.* alatti síkvetületi oldalhosszakból *kivonjuk* az illető vetület hosszredukció képlete adta $\sigma^{(s)}$ hosszredukció értékeket: az így nyert logaritmikus hosszértékek egyenlők tartoznak lenni. Azaz

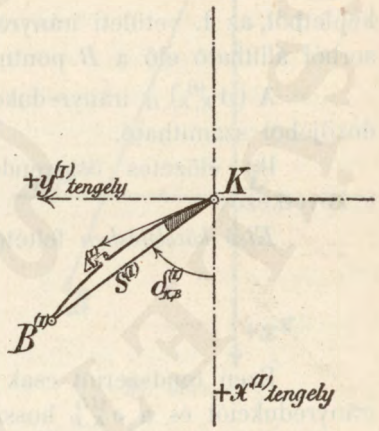
62. . . . . $\boldsymbol{log\, s^{(I)}_{A,B} - (\sigma^{(s)}_{A,B})_I = log\, s^{II}_{A,B} - (\sigma^{s}_{A,B})_{II}}$

mert úgy a baloldal, mint a jobboldal *ugyanazon gömbi* $s'_{A,B}$ oldalnak (legnagyobb gömbi kör ívének) hosszát jelenti.

Ha tehát az *I.* vetületről a *II.* vetületre át akarunk térni, úgy a II. vetületbeli hosszt (60. képletből levezetve) a

63. . . . . $log\, s^{(II)}_{A,B} = log\, s^{(I)}_{A,B} - \sigma^{(I)}_{A,B} + \sigma^{(II)}_{A,B}$

képlet fogja szolgáltatni. E képlet jobboldalán levő három tag közül az első kettőnek értékét az I. vetületbeli A és B pontbeli adott derékszögű sík összrendezők alapján *pontosan* ki tudjuk számítani (59. és 57 *b)* képletekkel), a harmadik tagot ($\sigma^{(II)}_{A,B}$-öt) azonban csak úgy számíthatjuk ki élesen, ha a II. vetületre vonatkozólag ismerjük az A és B pontok **közelítő** összrendezőit. Ilyen előzetes közelítő összrendezőket mindig módunkban lesz számítani, amint tüstént látni fogjuk.



24. ábra.

Lássuk most a kétféle délszögérték közötti vonatkozásokat.

Ami az *58.* alatti délszögegyenlőtlenséget illeti, úgy itt is egy szigorú *egyenlőségre* juthatunk, ha az irányredukciók és a vetületi meridián konvergenciák segítségével a délszögekből a gömbi azimutokra térünk át az egyik vetületen és a másik vetületen:

64. . . . . $\delta^{(I)}_{A,B} - \mu^{(I)}_A - (\Delta^{(s)}_{A,B})_I = \delta^{(II)}_{A,B} - \mu^{(II)}_A - (\Delta^{(s)}_{A,B})_{II}$

Ezen egyenlőség bal és jobboldala ugyanis a 44. képlet szerint ugyanazon gömbi $A'B'$ legnagyobb körív A' pontbeli azimutjának $(\omega'_{A,B})$ értékét adja.

Tehát ha az I. vetületről a II. vetületre akarunk áttérni, akkor az I. vetületi délszögből a II. vetületi délszögre ezen képlet által juthatunk:

65. . . . . $\delta^{(II)}_{A,B} = \delta^{(I)}_{A,B} - \mu^{I}_A - (\Delta^{(s)}_{A,B})_I + \mu^{II}_A + (\Delta^{(s)}_{A,B})_{II}$

$= \delta^{(I)}_{A,B} + (\mu^{(II)}_A - \mu^{(I)}_A) + (\Delta^{(s)}_{A,B})_{II} - (\Delta^{(s)}_{A,B})_I$.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ha ezen képlet szerint a gyakorlatban tényleg ki akarjuk számítani az I. vetületi délszögből a II. vetületi délszöget, úgy az I. vetületen megadott A és B pontbeli derékszögű összrendezők alapján pontosan ki tudjuk számítani a

$$\delta_{A,B}^{I}, \mu_{A}^{I} \text{ és } (\Delta_{A,B}^{(s)})_{I}$$

tagok értékeit (*58 a*) . . képletek), de már a másik két tagnak (μ_{A}^{II} és $\Delta_{A,B}^{(s)})_{II}$ éles értékeit csakis az A és B pontoknak a II. vetületre vonatkozó *közelítő derékszögű* összrendezői értékeiből tudjuk kiszámítani.

Látni fogjuk, hogy ily közelítő összrendezői értékeket mindig módunkban lesz ismerni.

Gyakorlatilag igen fontos, (mert egyszerűbb) alakot ölt a 63. képlet akkor, ha úgynevezett **centrális oldalakkal** van dolgunk, azaz, ha az A pont azonos a két konform rendszer kezdőpontjával: a K koordináta rendszer kezdőponttal. (24., 25. ábra.)

Ekkor tehát

$$x_{A}^{(I)} = y_{A}^{(I)} = 0 \text{ és}$$

$x_{A}^{(II)} = y_{A}^{(II)} = 0$, továbbá mivel e §. feltevése szerint mindkét vetületi x tengely azonos a közös K kezdőpont meridiánjának egyenes képével:

$$\mu_{A}^{(I)} = \mu_{A}^{(II)} = 0.$$

Igy tehát centrális oldalra vonatkozó délszög esetében a 63. képlet ezt a fontos, egyszerű alakot ölti:

$$66. \ldots\ldots\ldots \delta_{K,B}^{(II)} = \delta_{K,B}^{(I)} + (\Delta_{K,B}^{(s)})_{II} - (\Delta_{K,B}^{(s)})_{I}$$

ahol a $\delta_{K,B}^{(I)}$ értéke a

$$tang\, \delta_{K,B}^{(I)} = \frac{y_B}{x_B}$$

képletből, az I. vetületi irányredukció pedig: $(\Delta_{K,B}^{(s)})_{I}$ az illető vetületre adott irányredukciós sorból állítható elő a B pontnak I. vetületbeli ismeretes összrendezőiből.

A $(\Delta_{K,B}^{(s)})_{II}$ irányredukció érték pedig a B pontnak előzetes II. vetületi összrendezőjéből számítható.

Ily előzetes összrendező érték számításának módja centrális sugár esetében a következő:

Első közelítésben feltételezhetem, hogy

$$(x_{B}^{II}) \equiv x_{B}^{I}$$
$$(y_{B}^{II}) \equiv y_{B}^{I}$$

Ezen rendszerint csak igen durván közelítő argumentumokkal kiszámítjuk a $\Delta_{K,B}^{(II)}$ irányredukciót és a $\sigma_{K,B}^{(II)}$ hosszredukciót a II. vetület redukció sorából.

Ezt a közelítő $\Delta_{A,B}^{II}$ értéket téve a 66. képletben már előzőleg kiszámított tehát ismeretes két taghoz, nyerjük a $\delta_{K,B}^{(II)}$-nek közelítő értékét és a nyert közelítő $\sigma_{K,B}^{(II)}$ hosszredukció értéket a 63. alatti képletben már ismeretes két taghoz adva, meglesz a közelítő $(\delta_{K,B}^{(II)})$ és a közelítő $(s_{K,B}^{(II)})$ érték. Ezen közelítő értékek alapján az

$$67. \ldots\ldots\ldots \begin{cases} x_{B}^{II} = s_{K,B}^{II} \cos \delta_{K,B}^{II} \\ y_{B}^{II} = s_{K,B}^{II} \sin \delta_{K,B}^{II} \end{cases}$$

ismert képletek *5. jegyű logaritmus* könyvvel megoldva, a B pontnak *oly jól közelítő* II. vetületi összrendezői *értékeit fogják minden esetben* szolgáltatni, amely két összrendezői érték alapján *élesen számítható* a *63.* képletbeli $\sigma_{K,B}^{II}$ (ott K helyett A-betü van írva) és a *66.* képletbeli $(\Delta_{K,B}^{(s)})_{II.}$ érték a II. vetületi redukciós sorok (és táblázatok) segélyével.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ezen éles redukció értékeket most már a 63., illetve 66. képletbe helyettesítve, *nyerjük a II. vetületi KB hossz és II. vetületi délszög végleges értékét.* E két mennyiséggel a 67. képletek 7. jegyű logaritmuskönyvvel élesen számítva, megadják aztán a *B* pont végleges összrendezőit a *II. vetületen.*

A *B* pontnak az I. vetületről, a II. vetületre való átszámításának ezen módjának neve: *„pontátszámítás centrális sugár segélyével".*

Ezen eljárás szerint szoktuk *az I. rendű háromszögelési pontokat egyik vetületi síkról a másikba átszámítani.*

A stereográfikus vetületnél az eljárás még annyiban egyszerűbb, hogy e vetületen minden centrális sugár irányredukciója $= 0$-al, tehát a 64. képlet jobb oldalán csak két tag számítandó.

2. §. Egységes hálózat, azonos kezdő meridián.

Az imént adott pontátszámító eljárás alig szenved változást az esetben, ha a II. vetületi kezdőpont (25. ábrán *L*-el jelölve) nem azonos az I. vetületi *K* ponttal; de mindkét kezdőpont *ugyanazon meridiánon* fekszik és ezen meridiánnak *mindkét vetületen egyenes képe*, mindkét vetületre nézve az x tengely! (25. ábra).

Ebben az esetben *egyszer és mindenkorra kiszámítjuk* a *K* pontnak összrendezőit a II. vetületen.

A *K* pontnak II. vetületi y-ja az adott feltevés szerint $= 0$-al; a *K* pont x-ét pedig úgy nyerjük, hogy a *K* pontnak gömbi földrajzi *szélessége* adva lévén, a II. vetületi

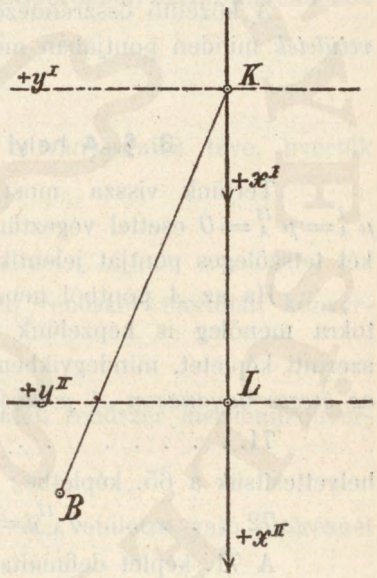
$$y = f^{(II)}(\varphi^g, \lambda_g)$$

vetületi egyenletbe (λ_g most $= 0$) helyettesítjük az adott $\varphi_K^{(g)}$ értéket.*)

Ismeretesek tehát egyszer és mindenkorra az I. vetületi rendszer kezdőpontjának (*K*-nak) összrendezői *a II. vetületi rendszerben:*

68. . . . $y_K^{(II)} = 0$ és $x_K^{(II)} = C_{II}$.

Most már (25. ábra) a tetszőleges *B* pontnak az I. vetületi rendszerből a II.-be való átszámítása az előbbi §-ban részletesen előadottak alapján a következőleg történik:



25. ábra.

1. Az *I.* vetületen kiszámítjuk a

$$\delta_{K,B}^{(I)},\ s_{K,B}^{(I)},\ (\Delta_{K,B}^{(s)})_I \text{ és } \sigma_{K,B}^{(I)}$$

értékeket a *B* pontnak I. vetületi összrendezői alapján.

2. Képezzük a *B* pont *durván* közelítő II. vetületi derékszögű összrendezőit, felhasználva hozzá a *K* pont II. vetületbeli (66. alatti) összrendezőit:

69. . . . . $\begin{cases} (x_B)^{II} \approx x_B^I - C_{II}. \\ (y_B)^{II} \approx y_B^I. \end{cases}$

Az így nyert II. vetületbeli és rendszerint csak durván közelítő értékekkel számítjuk a II. vetületi sorok (táblázatok) segítségével a $(\Delta_{K,B}^{(s)})_{II}$ és $\sigma_{K,B}^{(II)}$ redukciók *jól közelítő* érté-

*) A IV. fejezet 2. §-ában közöljük a *„Gellérthegy"* kezdőmeridiánon fekvő négy vetületi kezdőpontnak összrendezőit a különböző rendszerekben.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

keit és ezeket a 66. és 65. képletekbe helyettesítvén, nyerjük a $\delta^{(II)}_{K,B}$ és $s^{(II)}_{K,B}$ mennyiségek jól közelítő értékeit.

3. Most (23. ábra) az

$$70. \quad \begin{cases} x^{(II)}_B = s^{(II)}_{K,B} \cos \delta^{(II)}_{K,B} - C_{II} \\ y^{(II)}_B = s^{(II)}_{K,B} \sin \delta^{(II)}_{K,B} \end{cases}$$

képletekből 5. jegyű logaritmus könyvvel dolgozva nyerjük a B pont II. vetületi összrendezőinek oly jól közelítő értékeit, hogy ezek segélyével egészen élesen számítjuk a $(\Delta^{s}_{K,B})_{II}$, $\sigma^{II}_{K,B}$ végleges értékeit.

4. Ezen értékeket a 66. és 63. képletekbe téve, meglesz a KB oldal II. vetületbeli végleges délszöge és oldalhossza: $\delta^{II}_{K,B}$, $s^{II}_{K,B}$.

5. A *70.* képleteknek 7. jegyű logaritmus könyvvel való megoldása adja most már a B pontnak végleges II. vetületi összrendezőit.

Az imént 1—5. alatt ismertetett eljárás szerint szoktuk hazánkban az I. rendű pontokat egyik hengervetületi rendszerből a másikba (I. kötet 5. ábra) átvinni: a három hengervetületi kezdőpont ugyanis egyazon (és egyenesképű) meridiánon fekszik.

Az ott szereplő C értékeket a IV. Fejezet 2. §-ában közöljük minden egyes kezdőpontra és mindhárom vetületre.

A közelítő összrendezők számítására adott 69. alatti képletek *a magyar hengervetületek* minden pontjában megfelelően pontos értékeket szolgáltatnak.*)

3. §. A helyi átszámítási tájékozási állandó számítása.

Térjünk vissza most már a *65.* képletnek további tárgyalására, miután a $\mu^{I}_{A} = \mu^{II}_{A} = 0$ esettel végeztünk. Tehát tételezzük fel ismét azt, hogy A és B a vetületnek két tetszőleges pontját jelentik *és hogy a két vetület K kezdőpontja és x tengelye közös.*

Ha az A pontból nemcsak a B-re, hanem valami C, D, E stb. tetszőleges pontokra menőleg is képzelünk háromszögoldalakat, *akkor ezek mindegyikére felírva* a 65. szerinti képletet, mindegyikben szerepel ugyanaz a $(\mu^{II}_{A} - \mu^{I}_{A})$ tag. *Ez a tag tehát közös az összes ugyanazon A pontból induló oldalakra nézve.* Jelöljük ezt a tagot *egy betűvel:*

$$71. \quad z_A = \mu^{II.}_{A} - \mu^{I.}_{A} \text{ és}$$

helyettesítsük a 65. képletbe:

$$72. \quad \delta^{II}_{A,B} = \delta^{I}_{A,B} + z_A + \left\{(\Delta^{(s)}_{A,B})_{II} - (\Delta^{(s)}_{A,B})_{I}\right\}.$$

A 71. képlet definiálta z_A értéket az A pontra vonatkozó **„átszámítási tájékozási"** állandónak neveztük el.

Ez a z érték *mindenkor igen kis érték,* mert a vetületi meridiánkonvergenciáról az előbbi cikkekben elmondottak értelmében a $\mu^{(I)}_{A}$ és $\mu^{(II)}_{A}$ előjele mindig egyező lévén, **) a 71. képlet jobboldala mindig **tényleg különbséget jelent.**

Ami a z előjelét illeti, úgy az az x tengely ugyanazon oldalán fekvő két pontra nézve lehet az egyik pontban $+$, egy másik pontban *minus.* ***)

*) Itt jegyezzük meg, hogy az I. rendű pontokat egyik hengervetületi rendszerből a másikba úgy is szoktuk átszámítani, hogy a vonatkozó I. vetületi egyenletrendszerrel (sorokkal) x_I, y_I-ből a $\varphi_{(g)}$, $\lambda_{(g)}$-t számítjuk és ezeket a másik vetület egyenletrendszerébe (soraiba) téve, nyerjük az x_{II}, y_{II} értékeket.

**) Ha az a feltétel is ki van elégítve, hogy az I. és II. vetületi rendszerek x tengelye azonos.

***) Például az x tengelytől nyugatra μ^{I} és μ^{II} minden pontban $+$ előjelű. Ha tehát az x-től nyugatra levő P_1 pontban $\mu^{I}_{P_1} > \mu^{II}_{P_1}$, akkor z_{P_1} előjele 71. képlet szerint minus; és ha egy x-től szintén nyugatra fekvő P_2 pontban $\mu^{I}_{P_2} < \mu^{II}_{P_2}$, úgy a z előjele 71. szerint negatív.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Kérdés: Miként számítjuk ki a gyakorlatban a z értéket az egyes háromszögelési pontokra nézve? Háromféle eljárás van a z számítására nézve a m. kir. háromszögelő hivatalban alkalmazásban: ezeket az általunk bevezetett eljárásokat a következőkben indokolással együtt ismertetjük.

1. Eljárás. Elsőrendű háromszögelési pontról (A) van szó. A szóban forgó A pontnak az I. vetületen kiegyenlítéssel nyert derékszögű sík összrendezőiből a vetületi egyenletrendszerrel (sorokkal) számítottuk volt ezen pontnak gömbi $\varphi_A^{(g)}$, $\lambda_A^{(g)}$ földrajzi összrendezőit és ezek alapján a II. vetületi sorokkal nyertük az A pontnak II. vetületi derékszögű sík összrendezőit. *Ezen esetben* az A pontbeli z értéket a 69. képletből vagyunk kénytelenek kiszámítani úgy, hogy az x_A^I, y_A^I argumentumokkal számítjuk ki az I. vetület meridiánkonvergencia képletével a μ_A^I értéket és hasonlóan x_A^{II}, y_A^{II} argumentumokkal a II. vetület vonatkozó meridiánkonvergencia képletével a μ_A^{II} értéket. Ezeket a μ értékeket a 71. képletbe helyettesítjük: meglesz a z_A érték.

Például az *Ivančica* pont derékszögű sík összrendezői a magyarországi *D. R.* vetületi rendszerben a koordináta kiegyenlítés eredményeként:

$$\text{I.} \quad \begin{cases} y_I = +\ 118873.159 \text{ öl} \\ x_I = -\ 37535.579 \text{ öl.} \end{cases}$$

A vonatkozó *D. R.* vetületi egyenletrendszerből (hatványsorokból) ezen összrendezők alapján nyertük *Ivančica* pont gömbi összrendezőit:

$$\text{II.} \quad \begin{cases} \varphi = 46^\circ\ 8'\ 8''.2107 \\ \lambda = -\ 2^\circ\ 55'\ 22''.1687. \end{cases}$$

Een értékeket a *K. R.* vetületi rendszer koordináta hatványsoraiba téve, nyertük az *Ivančica* pont *K. R.* rendszerbeli összrendezőit:

$$\text{III.} \quad \begin{cases} y_{II} = +\ 118881.303 \text{ öl} \\ x_{II} = +\ 54391.790 \text{ öl.} \end{cases}$$

Az I. alatti értékeket helyettesítve a ***D. R.*** vetületi rendszer meridián konvergencia sorába, nyertük a

$$\mu_I = +\ 2^\circ\ 5'\ 8''.0637$$

értéket és a III. alatti értékeket helyettesítvén a ***K. R.*** vetületi rendszer meridiánkonvergencia sorába, nyertük a

$$\mu_{II} = +\ 2^\circ\ 8'\ 27''.3987$$

értéket. Tehát *Ivančica* pontban a *D. R.* vetületről a *K. R.* vetületre való áttérésnél az „*átszámítási tájékozó állandó*“ értéke:

$$Z_{Ivan.} = \mu_{II} - \mu_I = +\ 3'\ 19''.3350.$$

Ha tehát az *Ivančica* pontból induló sok háromszögoldalt akarjuk majd a *D. R.* síkról a *K. R.* vetületi síkra átszámítani, úgy a minden egyes oldalra nézve külön-külön felirandó 70. alatti képletbe ezen

$$Z = +\ 3'\ 19''.3350$$

értéket helyettesíthetjük.

2. Eljárás. Egy elsőrendű (A) pontnak az I. vetületi síkról a II. vetületi síkra való átszámítását elvégeztük az előbbiekben részletesen ismertetett „*pontátszámítás centrális sugár segélyével*“ módszerrel.

Akár a *24—25.* ábrabeli, akár a *26.* ábrabeli esettel van dolgunk*), mindkét esetben egyebek között kiszámítottuk a BK oldalnak délszögét úgy az I. mint a II. vetü-

*) Láttuk, hogy az eljárás mindkét esetben lényegileg ugyanaz.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

leten ($\delta^{(I)}_{K,B}$ és $\delta^{(II)}_{K,B}$); továbbá az átszámítás végeredményeként ismerjük a B pontnak II. vetületi derékszögű sík összrendezőit. (A B pontnak I. vetületi és a K pontnak II. vetületi (26. ábra) összrendezőit már eleve ismertük.)

Ezen összrendezői értékek alapján kiszámíthatjuk a BK oldalnak B *pontbeli* irányredukcióját*) úgy az I. mint a II. vetületre nézve. Ilymódon tehát ismeretesek a

$$\delta^{I}_{K,B},\ \delta^{II}_{K,B},\ (\Delta^{(s)}_{B,K})_I \text{ és } (\Delta^{(s)}_{B,K})_{II}$$

szögértékek. Előállítva most már a

$$\delta^{(I)}_{B,K} = \delta^{(I)}_{K,B} \pm 180°$$

$$\text{és } \delta^{(II)}_{B,K} = \delta^{(II)}_{K,B} \pm 180°$$

délszögértékeket, felírhatjuk a B, K oldalra nézve a 70. képletet:

$$\delta^{II}_{B,K} = \delta^{I}_{B,K} + z_B + \{(\Delta^{(s)}_{B,K})_{II} - (\Delta^{(s)}_{B,K})_I\}$$

amelyből kiemelve a z-t, a

$$73. \ldots\ldots z_B = (\delta^{II}_{B,K} - \delta^{I}_{B,K}) - \{(\Delta^{(s)}_{B,K})_{II} - (\Delta^{(s)}_{B,K})_I\}$$

képletre jutunk. Mivel a jobboldal mind a négy tagjának értékeit ismerjük, tehát a B pontbeli z érték a 73. alatti képletből pontosan kiszámítható.

Számpélda. Az előbb példában már tárgyalt *Ivančica* pontot a magyarországi *D. R.* rendszerből a *K. R.* rendszerre a *centrális sugár segélyével* is átvittük.**) A kétféle vetületi délszögérték

$$\text{I.} \ldots\ldots \begin{cases} \delta^{I}_{J.K.} = 237° 57' 57''.383 \\ \delta^{II}_{J.K.} = 237° 59' 37''.061, \end{cases}$$

és az összrendezőkből számított kétféle vetületi irányredukció értékek:

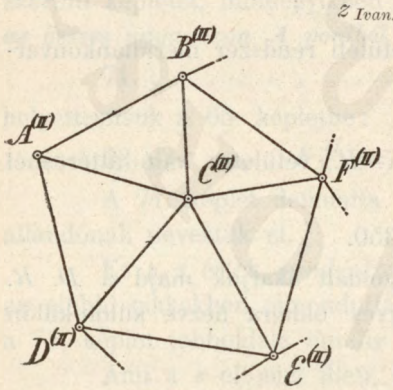
$$\text{II.} \ldots\ldots \begin{cases} \Delta^{I}_{J.K.} = +(1' \ 7''.545) \\ \Delta^{II}_{J.K.} = -(0' 32''.110). \end{cases}$$

Képezve 73. képlet szerint az I. és II. alatti értékek különbségeit a

$$z_{Ivan.} = (1' 39''.678) - (-1' 39''.655)$$

$$= +3' 19''.333$$

értékre jutunk, amely az előbbi számítás szerint (meridiánkonvergenciából) nyert z értéktől csak **0''.002** másodpercre tér el, — ami a z értékében még elsőrendű oldalak tájékozásakor is mindenesetre megengedett számítási eltérés.



26. ábra.

3. Eljárás. Átszámítottuk a felmérés céljából valamely vidék (vármegye) összes I. rendű háromszögelési pontjait az I. vetületi rendszerről a II. vetületi rendszerre.***) Ismerjük tehát valamely vidék (pl. vármegye) összes elsőrendű pontjainak vetületi összrendezőit úgy az I. mint a II. vetületi rendszerben.

Nemcsak vetületi átszámítási, de más okokból is most még ki kell számítanunk a szóban forgó ($A^{(II)}$, $B^{(II)}$, $C^{(II)}$, $D^{(II)}$ . . . pontok a 27. ábrán) elsőrendű pontokhoz

*) Az A pontbeli irányredukciót mindkét vetületre nézve a pontátszámításkor már elvégeztük.

**) Az összrendezők értékeit közöltük az előbbi példánál.

***) Hogy ez az átszámítás koordináta átszámítással, vagy centrális sugarak segítségével történt-e, az a tárgyalandó eljárásnál egészen mindegy.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

tartozó összes elsőrendű oldalak *délszög és irányredukció értékeit* e pontok II. vetületi összrendezői alapján. Igy tehát (27. ábra) ismeretesek lesznek A pontra nézve

1. az I. vetületi

$$\delta^{(I)}_{A,B},\ \delta^{(I)}_{A,C},\ \delta^{(I)}_{A,D}$$

$$(\Delta^{(s)}_{A,B})_I,\ (\Delta^{(s)}_{A,C})_I,\ (\Delta^{(s)}_{A,D})_I \text{ értékek, és}$$

2. a II. vetületi

$$\delta^{(II)}_{A,B},\ \delta^{(II)}_{A,C},\ \delta^{(II)}_{A,D}$$

$$(\Delta^{(s)}_{A,B})_{II},\ (\Delta^{(s)}_{A,C})_{II},\ (\Delta^{(s)}_{A,D})_{II}$$

értékek. Eszerint tehát az A pontbeli *átszámítási tájékozási állandóra* (z_A) három oldalból ($\overline{AB}$, $\overline{AC}$ és $\overline{AD}$) tudjuk kiszámítani a számértéket. Ugyanis a 70. képletet felírva az A-ból induló három oldalrá, ezen három képletre jutunk:

$$74. \quad \begin{cases} z_A = (\delta^{II}_{A,B} - \delta^{I}_{A,B}) - \{(\Delta^{(s)}_{A,B})_{II} - (\Delta^{(s)}_{A,B})_I\} \\ z_A = (\delta^{II}_{A,C} - \delta^{I}_{A,C}) - \{(\Delta^{(s)}_{A,C})_{II} - (\Delta^{(s)}_{A,C})_I\} \\ z_A = (\delta^{II}_{A,D} - \delta^{I}_{A,D}) - \{(\Delta^{(s)}_{A,D})_{II} - (\Delta^{(s)}_{A,D})_I\} \end{cases}$$

Elméletileg szigorúan ugyanazon z_A értéket tartozik adni mind a három képlet, a gyakorlatban azonban *század és ezredmásodpercnyi különbségek lesznek* a 74. alatt nyert z_A értékek között. E három érték számtani közepe $\overline{z_A}$ lesz tehát az adott esetben a legélesebb értéke z_A-nak: tehát ezt a középértéket képezzük a három z-ből. Hangsúlyozzuk, hogy a z_A-nak minden egyes elsőrendű oldalból való előállítása azért is kívánatos, mert csakis ezáltal nyerünk (minden pontban végezve e számítást) az első rendű pontok átszámításának pontosságára absolut éles ellenőrzést.

A z_A-nak imént adott számítását a háromszögelő hivatal célszerű nyomtatványon végzi. Igy például a stereográfikus vetületről a hengervetületre való átszámításnak *Csapod* elsőrendű pontra vonatkozó z értéknek kiszámítását mutatja ez a séma:

	Oldal neve	Stereográfikus vetület	Hengervetület	$Z_A = \delta'_{heng.} - \delta'_{ster.}$
		$\delta \quad -\Delta \quad = \delta'$	$\delta \quad -\Delta \quad = \delta'$	
A ≡ Csapod	Irottkő (B) . .	65° 19' 26."587 + 3."773 65° 19' *30."360*	65° 18' 47."411 + 3."593 65° 18' *51."004*	— 0' 39." 356
	Sághegy (C) .	337° 8' 26.955 + 6."436 337° 8' *33."391*	337° 7' 55."173 — 1."127 337° 7' *54."046*	— 0' 39." 345
	Vadosfa (D) .	279° 26' 57."308 + 0."414 279° 36' *57."722*	279° 36' 20."037 — 1."651 279° 36' *18."386*	— 0' 39.336
				$\overline{Z}_{Csapod} = -39."346$

Egy kis alaki eltérés van itt a 72. képlethez képest: a

$$z_A = (\delta^{II}_{A,B} - (\Delta^{(s)}_{A,B})_{II}) - (\delta^{I}_{A,B} - (\Delta^{(s)}_{A,B})_I)$$

alak szerint történik e sémában a számítás, amely képlet azonban lényegileg azonos a 74. alattival.

4. §. IV. rendű pontok átszámítása.

Térjünk ismét vissza a 63. képletnek általános vizsgálatára: kiindulva e képletnek 72. alatti alakjából:

$$75. \quad \delta^{II}_{A,B} = \delta^{I}_{A,B} + z_A + \{(\Delta^{(s)}_{A,B})_{II} - (\Delta^{(s)}_{A,B})_I\}.$$

A 75. képlet jobboldalán a $\{\ldots\}$ tag jelenthet tényleg összeget is, mert a Δ_I és Δ_{II} előjele lehet vagy egyező, vagy ellenkező előjelű.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ha e $\{ \ldots \}$ tag értéke adott AB oldal esetében 3″ és az AB hossza *4.000* meter, úgy ezen $\{ \ldots \}$ tagnak elhanyagolása által a B pontnak helye

$$(0.000005 \times 3 \times 4000)$$

$= 0.06$ meter $= \pm 6$ centimeterrel lesz ingadozó, ami negyedrendű pontokra nézve még megengedett elhanyagolásnak tekinthető. Magyarország hengervetületei esetében *4.000* meteren aluli oldalnak 73. szerinti képletében a $\{ \ldots \}$ tag absolut értéke *mindig* **3″**-nél kisebb értéket vehet csak fel: tehát IV. rendű háromszögelési pontokat számítva át egyik hengervetületi rendszerből a másikba a 75. képletnek ezen legegyszerűbb alakjából indulhatunk ki:

76. . . . . $\delta^{II}_{A,B} = \delta^{I}_{A,B} + z_A$.

Ha tehát a mindkét vetületen ismeretes A *pont körül 4.000 meter sugarú körön belül fekvő* B, C, . . . stb. pontoknak I. vetületi összrendezőit ismerjük, úgy ezen összrendezők alapján számítva az I. vetületi

77. . . . . $\delta^{(I)}_{A,B}$, $\delta^{(I)}_{A,C}$, $\delta^{(I)}_{A,D}$ . . .

délszögeket a

$$tang\, \delta^{I}_{A,B} = \frac{y^{I}_{B} - y^{I}_{A}}{x^{I}_{B} - x^{I}_{A}}$$

képlettel, és ismerve az A pontbeli z_A-t, ezen z_A-nak saját előjelével a 75. alatti mennyiségekhez való adása által nyerjük a kérdéses oldalak II. vetületi délszögértékeit:

78. . . . . $\delta^{II}_{A,B}$, $\delta^{II}_{A,C}$, $\delta^{II}_{A,D}$ . . .

Hasonlóan egyszerűen megkaphatjuk ezen AB, AC, AD stb. oldalak II. vetületbeli hosszait is. Ugyanis a hossztorzulásra nézve mondottak alapján:

$$log\, s^{II}_{A,B} = log\, s^{I}_{A,B} - \sigma^{I}_{A,B} + \sigma^{II}_{A,B}$$
$$log\, s^{II}_{A,C} = log\, s^{I}_{A,C} - \sigma^{I}_{A,C} + \sigma^{II}_{A,C}$$
$$log\, s^{II}_{A,D} = log\, s^{I}_{A,D} - \sigma^{I}_{A,D} + \sigma^{II}_{A,D}.$$

Ha a magyarországi hengervetületek esetében a szóban forgó B, C, D pontok az A pont körül 4.000 meteres sugarú körön belül feküsznek, úgy a

$$\sigma^{I}_{A,B} = \sigma^{I}_{A,C} = \sigma^{I}_{A,D} = \ldots \sigma^{I}_{A}$$
$$\text{és } \sigma^{II}_{A,B} = \sigma^{II}_{A,C} = \sigma^{II}_{A,D} = \ldots \sigma^{II}_{A}$$

egyszerűsítés engedhető meg.

Nevezzük el a $(\sigma^{II}_{A} - \sigma^{I}_{A})$ értéket sz_A betűvel, akkor az ily rövid oldalak hosszátszámító képlete lesz:

79. . . . . $\begin{cases} log\, s^{II}_{A,B} = log\, s^{I}_{A,B} + sz_A \\ log\, s^{II}_{A,C} = log\, s^{I}_{A,C} + sz_A \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$

Tehát a magyarországi hengervetületek esetében egyazon A pontból induló 4 km-nél rövidebb oldalak az egyik vetületről (I) a másik vetületre (II) a *74.* és *79.* szerinti elemi képletekkel redukálhatók. A kérdés itt még csak az: miként nyerjük a z_A és az sz_A értékeket a gyakorlatban?

Ha a szóban forgó A pont I., II., vagy III. rendű pont, akkor a z_A pontos értéke az előbbiekben adott három eljárás valamelyike szerint már kiszámíttatott. Ha azonban az A pont is csak egy IV. rendű módjára átszámított pont, akkor az A pontot egy távo-

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

labbi és már átszámított II. vagy III. rendű ponttal összekötve képzelve, ezen oldal délszögét és irányredukcióját számítjuk ki mindkét rendszerben miáltal a z_A a 72. képlet alapján kiszámítható. Ha ez alkalommal a szóban forgó oldalnak hosszát is kiszámítottuk mindkét vetületen, úgy a

$$log\, s^{II} - log\, s^{I}$$

különbség megadja az A pontra vonatkozó sz_A értéket. Az így nyert z_A és sz_A állandók felhasználásával kiszámíthatjuk az A-ból induló összes 4 kilometeren aluli oldalak II. vetületi *délszögeit és hosszait*: és így e pontok II. vetületi összrendezői az I. kötet 34. oldalán adott képletekkel kiszámíthatók.

Ha pedig az A pont körül, tőle 3—6 kilometer távolban van több pont, amelyekben a z értéke ismeretes, úgy a z_A-t nem az imént előadott módon számítjuk, hanem ezen ismeretes szomszédos z-kből egyszerű lineáris interpolálással is előállíthatjuk. *)

5. §. A II. és III. rendű háromszögelési pontok átszámítása.

Először ismét feltételezzük azt, hogy az I. és II. vetületek *kezdőpontja és kezdőmeridiánja közös.*

Az elsőrendű pontokat átszámítottnak tételezzük fel és ismeretes minden elsőrendű pontban a z szabatos értéke. A 27. ábrán A, B, C, . . . G jelentik a már átszámított I. rendű háromszögelési pontokat: tehát ismeretesek ezen pontokra nézve az

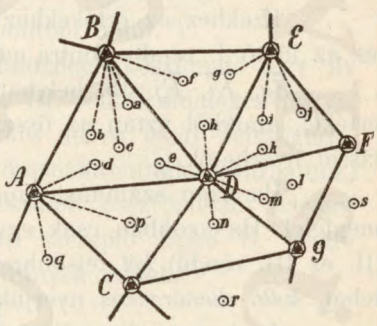
$$x_A^I,\ y_A^I;\ x_A^{II},\ y_A^{II};\ \ldots\ x_G^I,\ y_G^I;\ x_G^{II},\ y_G^{II}$$

összrendezői értékeken kívül a z_A, z_B, z_C, . . . z_G *tájékozási állandók,* továbbá az összes elsőrendű oldalak I. vetületi *délszögei és irányredukciói*:

$$\delta_{A,B}^I,\ \Delta_{A,B}^I,\ \Delta_{B,A}^I;\ \ldots\ \delta_{G,F}^I,\ \Delta_{G,F}^I,\ \Delta_{F,G}^I \text{ stb,}$$

és végül ismeretesek az elsőrendű oldalak vetületi hosszai az I. és II. vetületi rendszerben:

$$s_{A,B}^I,\ \ldots\ s_{F,G}^I \text{ és } s_{A,B}^{II},\ \ldots\ s_{F,G}^{II}.$$



27. ábra.

Adva vannak a 27. ábrán az a, b, c, d, ... r, s, stb.-vel jelzett II. és III. rendű pontok I. vetületi *összrendezői*

$$x_a^I,\ y_a^I;\ x_b^I,\ y_b^I;\ \ldots\ x_s^I,\ y_s^I$$

kiszámítandók szabatosan ezen pontok II. vetületi összrendezői.

Mindenekelőtt kiszámítjuk ezen a, b, c, stb. pontok durván közelítő összrendezőit a II. vetületen. Ezt legcélszerűbben úgy végezzük el, hogy az I. rendű pontokra nézve képezzük (kerek egész ölekre) az

$$(x_A^{II} - x_A^I),\ (y_A^{II} - y_A^I);\ (x_B^{II} - x_B^I),\ (y_B^{II} - y_B^I);\ \ldots\ (y_G^{II} - y_G^I) \text{ stb.}$$

különbségeket és az illető átszámítandó II. v. III. rendű ponthoz legközelebb eső elsőrendű pontra talált ezen különbséget adjuk az illető II. v. III. rendű pont I. vetületi x és y összrendezőjéhez. Például a 27. ábra szerint az e pont a D-hez esik legközelebb, tehát az e pontnak II. vetületi durván közelítő összrendezői lesznek:

$$80. \quad \begin{cases} (x_e^{II}) = x_e^I + (x_D^{II} - x_D^I). \\ (y_e^{II}) = y_e^I + (y_D^{II} - y_D^I). \end{cases}$$

*) Ez az egyszerű eljárás gyakran igen pontos eredményeket adhat, mert a z értéke pontról-pontra igen lassan és egyenletesen változik.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ezt a közelítő összrendezőképzést (csak kerek egész ölre végezve az összeadásokat) elvégezzük az összes átszámítandó pontokra nézve.

Most az a, b, c, ... s pontokat az *I. vetületen* összeszámítjuk a legközelebb fekvő I. rendű ponttal. Például a 27. ábra szerint az a, b, c és f pontokat B-vel; a d, p és q pontokat A-val és a többi pontokat úgy amint a pontozott vonalak mutatják számítjuk össze az I. rendű pontokkal az I. vetületen.

Összeszámítás alatt értve *oldalhossz* és *délszög*számítást:

$$tang\ \delta^{I}_{B,A} = \frac{y^{I}_{A} - y^{I}_{B}}{x^{I}_{A} - x^{I}_{B}}$$

$$log\ s^{I}_{B,A} = log\,(y^{I}_{A} - y^{I}_{B}) - log\ sin\ \delta^{I}_{B,A} = log\,(x^{I}_{A} - x^{I}_{B}) - log\ cos\ \delta^{I}_{B,A}$$

. . . . . .

. . . . . .

Ezen összeszámításokat 7. jegyű logaritmus könyvvel egészen élesen végezzük el.

Most kiszámítjuk ezen oldalak (27. ábrán pontozva) I. vetületi irány és hosszredukció értékeit a vonatkozó vetületi redukciós sorokkal az I. vetületi összrendezőkkel mint argumentumokkal.

Ezen redukciókat levonva az előbb nyert δ^{I} és $log\ s^{I}$ értékekből, nyerjük a gömbi irány- és hosszértékeket:

$$\delta'_{B,A},\ log\ s'_{B,A};\ .\ .\ .\ .\ \delta'_{e,j},\ log\ s'_{e,j};\ .\ .\ .$$

Ezekhez az értékekhez hozzáadva majdan a II. vetületi irány- és hosszredukciókat és az illető I. rendű pontra adott z értéket: meglesznek az $\overline{Ad}$, $\overline{Ap}$, $\overline{Aq}$; $\overline{Ba}$, $\overline{Bb}$, $\overline{Bc}$, $\overline{Bd}$; . . . . $\overline{Eg}$, $\overline{Ei}$, $\overline{Ej}$ stb. helyhatározó segédoldalak II. vetületi pontos *délszög* és *oldalhossz* értékei, amikből aztán az összrendezők értékei az I. kötet 34. oldalán adott elemi számítással nyerhetők.

Ha ezen számítást *egymástól függetlenül* két számító végzi, úgy az adott eljárás megfelel. Ha azonban csak egyetlen számító végzi az átszámítást, úgy minden egyes pontot (II. és III. rendű) *két* felsőbbrendű (már átszámított) ponttal kell összeszámítani, amikor tehát, *kellő ellenőrzéssel* nyerjük a II. és III. rendű pontok II. vetületi összrendezőit.

Az imént adott eljárást elnevezhetnők *„átszámítás helyi poláris koordinátákkal"*. Ezzel szemben átszámíthatjuk a II. és III. rendű pontokat *„háromszögekkel"* is. Ha t. i. minden II., illetve III. rendű pontot *három* már átszámított ponttal képzelünk összekötve és ezen három oldalra nézve *csak a délszögeket* számítjuk át az I. vetületről a II. vetületre (az oldalhosszakat nem), akkor az illető II. v. III. rendű pont II. vetületi derékszögű összrendezőit *két háromszögből* előmetszés által számíthatjuk a rendes háromszögelési nyomtatványon.

Úgy a *polár koordinátákkal*, mint a *háromszögekkel* való átszámításnál először célszerűen kiválasztott *nehány* II. és III. rendű pontot számítunk át az I. vetületről II. vetületre és e pontokban a z-ket is meghatározva, a többi II. és III. rendű pontok átszámítását ezen már átszámított II. és III., valamint az I. rendűekre támaszkodva végezzük el.

A helyi *poláris* koordinátákkal való átszámításnál arra kell csak ügyelni, hogy a segédoldalak lehetőleg *rövidek* legyenek*); a háromszögekkel való átszámításnál pedig óvakodni kell 30°-nál kisebb belszöget tartalmazó háromszögektől.

A poláris koordinátákkal való tömeges átszámításra célszerű sémát készíthet magának bárki az elmondottak alapján. Az itt szereplő *összeszámítások* (délszög és oldal-

*) Ekkor *pontosabb* a végeredmény és egyszerűbb képletekkel nyerhetők az irány- és hosszredukció értékek.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

hossz) úgyszintén a *vetületi redukciószámítások* és a végén az összrendező számítások elvégzésére egyébként a *rendes* hivatalos nyomtatványok használhatók; az I. vetületi délszögeknek II. vetületi délszögekké való átszámítására pedig a m. kir. háromszögelő hivatal ezt a sémát használja:

$$A \equiv Csapod$$
$$Z_A = -39.346$$

(Stereográfikus vetületről a *K. R.* hengervetületre.)

Irány	δ ster. $- \Delta$ ster. $+ \Delta$ heng.	δ ster. $- \Delta$ ster. $+ \Delta$ heng. $+ Z_A = \delta$ henger	Jegyzet
Beled	294° 48′ 50.″00 + 1.10 + 1.39	294° 48′ 13.″14	
Czirák	301° 11′ 21.00 + 0.90 + 0.82	301° 10′ 43.″37	
Répcelak	329° 34′ 28.″40 + 2.20 + 0.65	329° 33′ 51.″90	
Iván	11° 36′ 7.″70 + 1.″70−0.18	11° 35′ 29.″87	
stb.			

Az itt szereplő négy oldal (irány) *Csapod* elsőrendű pontból indúl. *)

Minden egyes már átszámított I. rendű pontra vonatkozólag készítendő egy ily sematikus délszögtájékozási tábla a belőle induló összes II. és III. rendű oldalakra nézve. Minden I. rendű pontban elvégeztük a II. és III. rendű pontokra nézve ezen délszögtájékozást; ezáltal a szóban forgó *II. rendű* pontokra nézve összeállíthatunk (előírhatunk) háromszögeket, melyekből az illető II. rendű pontok hengervetületi összrendezői háromszögmegoldással számíthatók. Igy például az előbbi példában szereplő *Beled* II. rendű pontra nézve három irányból alkottunk háromszögeket. Ezen irányok voltak:

Csapod—Beled = 294° 48′ 13.″14
Vadosfa—Beled = 30° 27′ 33.″74
Sághegy—Beled = 179° 9′ 38.″69.

Minthogy a *Csapod—Vadosfa* és *Csapod—Sághegy* elsőrendű oldalak hengervetületi délszögei és oldalhosszai ismeretesek voltak, számítható volt Beled pont egyrészt a Beled—Csapod—Vadosfa, másrészt a Beled—Csapod—Sághegy háromszögekből. Az első háromszögből nyertük az:

$$y_B = +77311.5528$$
$$x_B = -19691.0940,$$

a második háromszögből pedig az

$$y_B = +77311.5528$$
$$x_B = -19691.0919 \text{ értékpárt.}$$

Tehát *ezred* ölre egyező eredményre jutottunk két különböző háromszög által.

*) Hasonló séma készül poláris helyi koordinátákkal való átszámítás esetében az oldalhossz átszámításra. Jelen esetben *háromszögekkel* végeztük el az átszámítást.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

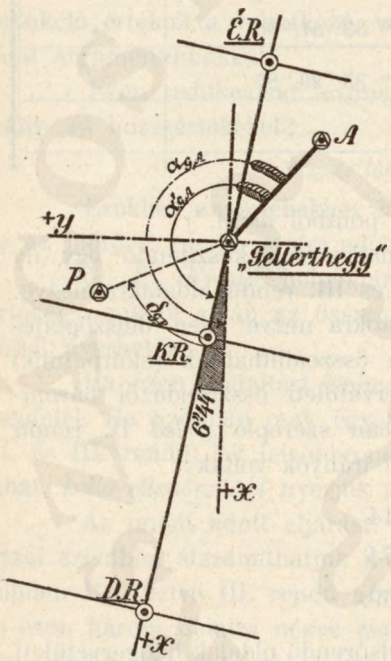
Általában azt lehet szabályul felállítani, hogy az eltérés 0.01 ölnél nem lehet nagyobb: II. rendű pontoknak ilymódon való átszámításánál.

Az ilymódon átszámított II. rendű pontok mindegyikében képezzük most a Z helyi tájékozási állandó értékeit, amiáltal a III. rendű pontok átszámítása szószerint azonos módon lesz eszközölhető, mint most a II. rendűeknél láttuk. Az átszámítás után ott is képezzük minden pontra nézve a z értéket.

6. §. A budai stereográfikus és a három magyar hengervetület közötti speciális vonatkozás.

Az előbbiekben többször említettük ezt a szóban forgó esetet úgy, mint

1. egységes háromszöghálózat,
2. egységes Gauss-gömbi vetület,
3. *azonos kezdőmeridiánon* fekvő különböző kezdőpontok esetét. (26. ábra.)



28. ábra.

Tényleg *végeredményben* mint ilyen esetet foghatjuk is fel és végezhetjük az erre az esetre adott szabályok szerint az átszámítást; azonban előzőleg *két rendbeli igen egyszerű pótszámítást* kell elvégezni.

Az első pótszámítás minden stereográfikus vetületi délszögnek *6.44* másodperccel való kisebbítése. Ugyanis a *budai stereográfikus* rendszernek a múlt században való létesítésekor a Gellérthegy pontból induló egyik háromszögoldal szferoidikus *azimutját* a bécsi *„Türkenschanze"* csillagdán egy háromszögoldalra nézve végzett csillagászati azimutmérés alapján számították ki a *„Türkenschanze"* és *„Gellérthegy"* pontokat összekötő katonai háromszöghálózat segélyével.

Ilymódon a *„Gellérthegy — A."* háromszögoldalra valami $\alpha_{G.A.}$ értéket nyertek azimutként. Ezen *azimutot* tekintették a szóban forgó *G. A.* oldal *vetületi délszögének*: ezáltal tehát rögzítve volt Gellérthegy pontban a vetületi $+x$ tengely mint a levezetett Gellérthegyi meridián képe. Igy keletkezett a 29. ábrán látható, eredményes vonallal kihúzott x tengely; erre merőlegesen képzelendő az y tengely; ezen (eredményesen kihúzott) x, y tengelyrendszerre vonatkozólag bírjuk az összes 1908. évig végzett magyarországi *) háromszögelési pontok stereográfikus vetületi derékszögű összrendezőit.

Midőn 1908. évben bevezettük a három hengervetületet, célunk volt a három vetületi kezdőpontot a *„Gellérthegy"* ponton átmenő meridiánon felvenni. Mivel a *„Gellérthegy"* ponttól mintegy négy kilometer távolságban levő *„Széchenyi-hegy"* ponton a katonai földrajzi intézet egy háromszögoldal csillagászati azimutját megmérte, továbbá mivel Széchenyi-hegy pont Gellérthegy ponttal háromszögtanilag össze volt kötve: az előbb említett *„Gellérthegy — A"* oldalnak azimutját a Széchenyi-hegyből levezettük (*„V. U."* X. Fejezet). Nyertünk egy a régi $\alpha_{G.A.}$ értéktől *6."44*-el eltérő $\alpha'_{G.A.}$ értéket:

81. . . . . $\alpha'_{G.A.} = \alpha_{G.A.} - 6."44$

*) Kivéve Horvát-Szlavonországok nagy részét és egész Erdélyt.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Mivel a Széchenyi-hegy igen közel van a Gellérthegy ponthoz: ezen $\alpha'_{G.A.}$ érték bizonyára jobban képviseli a valódi csillagászati azimutot, mint a Bécsből levezetett $\alpha_{G.A.}$ régi érték.

Ez az $\alpha'_{G.A.}$ definiálja nekünk tehát a valódi *Gellérthegyi-Meridiánt* (és x tengelyt); ezt az $\alpha'_{G.A.}$ értéket képzeljük a 28. ábra szerint a természetbeni a *G. A.* fixiránytól negativ forgási értelemben felrakva: nyerjük a 28. ábrán feltüntetett negativ (teljes vonallal) új $+x$ tengelyt, illetve meridiánt. Ezen a meridiánon (x tengelyen) képzeljük most már a három hengervetületi kezdőpontot: *É. R; K. R; D. R.*

Valójában tehát a magyar stereográfikus és magyar hengervetületek közti vonatkozás nem a *26. ábrával* kapcsolatosan a 2. §-ban tárgyalt eset, de tényleg arra vezethető vissza, ha (29. ábra) a stereográfikus tetszőleges P pontnak stereográfikus vetületi $\delta_{G.P.}$ délszögéből *kivonva* 6.″44-et: most a *25. ábrával* kapcsolatos eljárás szerint végezzük el a P pontnak bármely hengervetületre való átszámítását.

Az itt szükséges *állandók* értékeit a következő fejezet 2. §-ában adjuk. Ha az I. rendű pontok ilymódon át vannak számítva a stereográfikus vetületről a hengervetületre, akkor a II. és III. rendű pontok átszámítása a stereográfikusról a hengervetületre az előbbi §-ban adott módon eszközölhető szószerint, és a 6.″44-et már nem kell figyelembe venni: az a 40. oldalon közölt z_A tájékozási helyi állandó meghatározás esetében már *benne van a z_A értékben.*

Megjegyzés. Ha valami okból azonban a z_A-t a meridiánkonvergencia értékekből

82. . . . . $z_A = \mu_A^{(ster.)} - \mu_A^{heng.)}$

akarnók előállítani, akkor a $\mu_A^{(ster.)}$ érték számításakor a *6.″44*-et figyelembe kell venni úgy, hogy az illető A pontnak stereográfikus vetületi *transformált* összrendezőit kell a $\mu_A^{(ster.)}$ érték (IV. Fejezet 102. old. I. képlet) számítására használni. Ezen előzetes elemi sík koordinátatranszformáció szöge — *6.″44.*

Visszatérve tárgyalásunkra, az előbb említett második pótszámítás abból ered, hogy a m. kir. háromszögelő hivatal 1908. évig az I. rendű háromszögelések stereográfikus irányredukciónak *nem szigorú értékeit számította ki.* Nevezzük (Δ)-val ezen nem szigorú értékeket, és $\Delta\varepsilon$-al azt a javítást, amelyet e (Δ) igényel. Tehát

83. . . . . $\Delta = (\Delta) + \Delta\varepsilon,$

ahol a (Δ) értékek a háromszögelő hivatal könyveiben minden egyes elsőrendű oldalra nézve régi számítás eredményeként megvannak; a $\Delta\varepsilon$ — pedig az általunk levezetett és e könyv 85. lapján közölt 17. képlet jobboldalának *második* tagját jelenti. A szóban forgó $\Delta\varepsilon$-ok elsőrendű oldalaknál *tized másodperc* rendű mennyiségek; a z_A-k képzésénél (47. oldal) a $\Delta^{(ster.)}$ értékek ezen $\Delta\varepsilon$-*okkal* már megjavított értékeket jelentik.

7. §. A felvételi szelvényhálózat átszámítása egyik vetületi rendszerből a másikba.

Minden magyar vetületi rendszerben az illető rendszer x és y tengelyétől indulólag és ezekkel párhuzamosan *4.000* öl méretű négyzetekből álló *„négyzet mértföldhálózatot“* képzelünk az illető vetületi síkon kirajzolva. Az észak-déli irányban egymás alatt levő négyzetek *„oszlopokat“* alkotnak; a kelet-nyugati irányban egymás mellett sorakozó négyzetek *sorokat* alkotnak.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Az *oszlopokat* az x tengelytől jobbra-balra folytatólagosan I, II, III, stb. római számokkal jelöljük; a *sorokat* pedig az y tengelytől északra és délre folytatólagosan 1, 2, 3, . . . arabs számokkal jelöljük meg. *)

Egy négyzet mértföld tartalmaz 10.000 kataszteri holdat azaz *húsz* egyenkint 500 holdas felvételi szelvényt. E felvételi szelvények mérete 1.000/800 bécsi öl; a szelvényeket minden egyes négyzetmértföldön belül a 29. *a)* ábrán látható arabs betűs jelzéssel definiáljuk.

Eszerint tehát egy bizonyos szelvénynek teljes betűs megjelölése például: „*Középső Rendszer*"; nyugati oszl. XX; déli sor 19; bg., amit rövidítve úgy írunk ki:

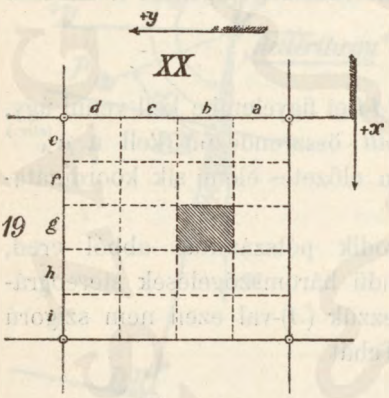
„*K. R.*" — Ny. O. XX; D. s. 19; bg.

Bármely szelvény sarokpontjainak összrendezői e megjelölésből önként adódnak; például az adott példa esetében a szelvény sarokpontjai:

y összrendezők: (76000 + 1000); (76000 + 2000).
x „ : (72000 + 1600); (72000 + 2400).

Az országos kataszteri felmérési gyakorlatban *három* esetben lehet szükség arra, hogy az I. vetületi rendszer szelvénysarokpontjainak összrendezőit a II. vetületi rendszerben ismerjük:

1. Midőn a két vetületi rendszer határán dolgozunk és egy már az I. vetületen felmért községgel szomszédos községet a II. vetületi rendszerben kell felmérni: a határcsatlakozás eszközlése miatt.



29. a. ábra.

2. Midőn a régi I. vetületen helyszinelendő község belsőségét számszerűleg a II. vetületben ujonnan felmérjük: a belsőségi határcsatlakozás szabatos elvégzése végett.

3. Midőn egy régebben az I. vetületen felmért vármegyében (Pl. Abauj-Torna vármegye esete) új részletes felmérést végzünk a II. vetületen, de egyes helyeken célszerű a régi szelvényeket egyszerűen az új felmérésbe átvenni és helyszinelni: ezen régi szelvények beillesztése végett.

A szabatos átszámítási eljárás volna: az I. vetületi mértföld és szelvény sarok pontokat az I. vetületi ismeretes összrendezők alapján I., II., III. és IV. rendű háromszögelési pontok módjára, úgy amint azt e fejezet előző §-aiban tárgyaltuk elvégezni.

Ez az eljárás azonban hosszadalmas lévén: egyszerűbb megoldást kellett keresnünk. E kérdést elméletileg szigorúan még nem vizsgáltuk meg, de gyakorlati tapasztalatok alapján a következő eljárást ajánlhatjuk.

Fel szabad tételeznünk, hogy a háromszögelési pontok egy nagy részének összrendezői *mindkét vetületen* ismeretesek.

Ezen esetben minden egyes *mértföldsarkot* átszámítunk II. vagy III. rendű háromszögelési pont módjára; vagy ha *sok* háromszögelési pont ismeretes mindkét rendszerben, úgy a mértföldsarkokat IV. rendű pontok módjára is számíthatjuk át az I. vetületről a II.

*) A budapesti stereográfikus rendszernél a sorok számozása a Gellérthegy-től *északra* fekvő 32-ik sornál kezdődik és onnan halad délfelé. Tehát a „Gellérthegy" pont a 32-ik sor déli határvonalán fekszik.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

vetületre. Az egyes mértföldnégyzeteken belül a szelvénysarkok koordinátáit most már egyszerű **lineáris interpolálással** előállíthatjuk az I. kötet 37. lapján előadott elemi módon.

Ezen lineáris interpolálás azon a feltevésen alapszik, hogy az I. vetületi szelvényvonalak a II. vetületen is *egyenes* vonalak. Ez *szigorúan sohasem* igaz, de Magyarország összes vetületeinél *egy-egy négyzetmértföldön belül* elhanyagolható hibával igaznak tekinthető.

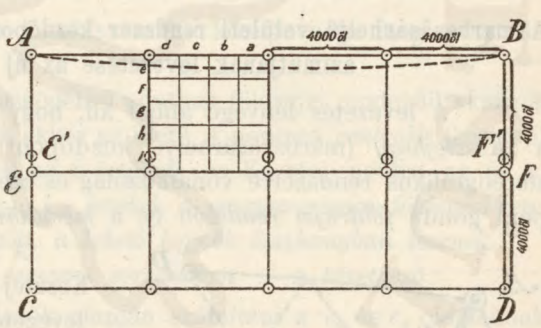
Lássuk ezt közelebbről.

A magyar hengervetületnél az x irányú szelvényvonalaknak a gömbön az y tengelyhez (az érintési gömbi körhöz) tartozó **segédmeridiánok** (legnagyobb gömbi körök) felelnek meg; az y tengelylyel parallel szelvényvonalaknak pedig a gömbön a henger érintési körével párhuzamos **segédparallelkörök** felelnek meg.

Minthogy most már a stereográfikus vetületnek egyik főtulajdonsága (81. lapon) az, hogy minden gömbi körnek képe ismét *kör*: tehát a hengervetületi szelvény vonalaknak igazi stereográfikus képei mind **körívek.**

Tehát ha mi ezt figyelembe nem vesszük és (29. *b)* ábra) *három-négy mértföldön át* egyszerűen lineárisan interpolálunk, azaz egyenesnek tekintjük a 29. ábrabeli *A . . . B* vonalat: akkor a helyes sarokpontok (a görbe vonal pontjai) helyett *3—10* meterig hibás összrendezőket nyerhetünk.

Kevésbbé nagy hibát követünk el ily eljárással (3—4 mértföld összefoglalása) ha két magyar hengervetületről van szó. Ugyan itt is mivel az egyik (I.) hengervetületi segédfokhálózat a másikra (II.) nézve már nem az, görbék lesznek a (I.) szelvényvonalak a II. vetületen, mégis ez a görbeség nem nagy. Itt az *észak-déli irányban* tág interpolálás esetében nagy hibát *(eltolódást)* okozhat a lineármodulusnak észak-déli irányú rohamos változása: amiért aztán a 29. *b)* ábra szerinti igazi F' és ε' pont helyett az F és ε pontot nyerjük lineáris interpolálással. Az itt elmondottak után tehát tartsuk be mindig az előbb adott szabályt: csak a négyzetmértföldeken belül interpoláljunk lineárisan.



29. b. ábra.

Azonban talán nincs kizárva az sem, hogy két-két magyar hengervetületnél lesznek esetek, amidőn két-két mértföld hosszban interpolálhatunk; aminek jogosultságáról adott esetben egy kisérlettel (szigorú számítással aztán interpolálással) meg kell azonban győződnünk.

8. §. Vetületi átszámítás nem egységes háromszöghálózat esetében.

Erre példa „*Erdély*“ háromszöghálózata. Ezen országrészben ugyanis a múlt század 70—80-as éveiben önálló I. rendü hálózatot fejlesztettek, azt külön alapvonalak bevonásával a magyarországi hálózattól teljesen **függetlenül** egy csoportban *kiegyenlítették* és az egyik ponton (Kesztej) csillagászati méréseket végezve ezen csillagászati mérések alapján helyezték el és tájékozták az erdélyi hálózatot a **magyar-Gauss-gömbön.**

Ezen eljárás eredménye két jelenségben nyilvánul meg:

1. hogy a magyar Gauss-gömbön, a pontok gömbi földrajzi összrendezőit számítva az erdélyi hálózat mint egy különálló, elszakadt rész jelentkezik (30. ábra);

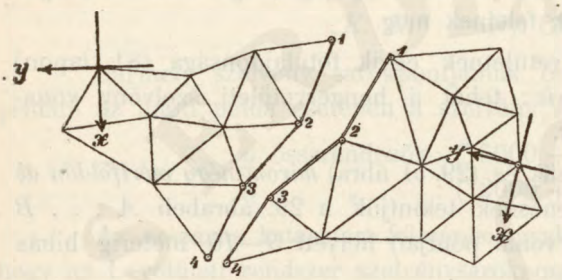
© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

2. hogy a két hálózatban közös oldalak gömbi **hosszai** és az ezen oldalak által bezárt **gömbi szögek** nem azonosak. E hosszeltérések a gömbre redukált hosszaknak (1/40000—1/100000) részét és a gömbre redukált oldalak által képezett szögekben szögeltérések 2—3 másodpercet, is kitesznek.

Ha szigorúan **szabatosan** akarunk egy-egy erdélyi pontot átszámítani a magyar vetületek valamelyikére, úgy nincs más mód, mint (31. ábra);

a) a szóban forgó P pontot *három* mindkét rendszerben *közös* I. rendű ponttal összekötő háromszöghálózatnak minden egyes irányának délszögét és irányredukcióját kiszámítani és az irányredukciókat a délszögekből levonni:

$$\delta'_{(erd.)} = \delta_{(erd.)} - \Delta_{(erd.)};$$



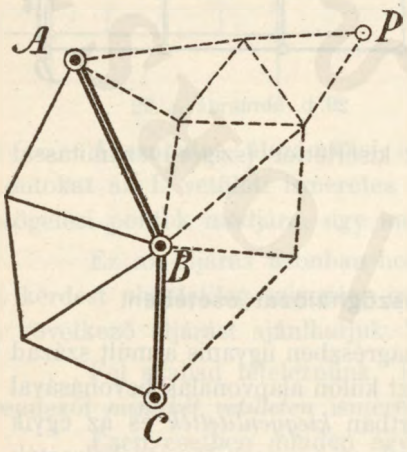
30. ábra.

b) ezen gömbi-délszögeket *mérési eredményeknek* tekintve: a 31. ábrán pontozott vonalakkal jelzett hálózatot az A, B, C fix keretből kiindúlva a magyarországi vetületre redukálni és koordináták szerint kiegyenlíteni. Ennek végeredménye a P pont legmegbízhatóbb helye az illető magyarországi vetületen.

Ha szabatosan, de nem absolute szigorúan akarunk eljárni, akkor azt az eljárást követhetjük, amelyet a következő példán bemutatunk. E **minden tekintetben rendkívüli tanúlságos példa** részleteit az olvasó azonban csak akkor követheti, ha előzőleg a következő fejezetben a stereográfikus vetületre vonatkozólag közölteket jól megtanúlta.

A marosvásárhelyi vetületi rendszer kezdőpontjának földrajzi rendezői és a + x tengely azimutjának levezetése az új gellérthegyi gömbi adatokból.

A levezetés lényege abból áll, hogy háromszögelési adataink alapján kiszámítottuk a *Kesztejhegy* (marosvásárhelyi kezdőpont) derékszögű sík összrendezőit a budapesti stereográfikus rendszerre vonatkozólag és ezen x, y összrendezők alapján számítottuk *Kesztej* pont gömbi *földrajzi rendezőit* és a *meridiánkonvergencia értékét* e pontban.



31. ábra.

A számítás tehát *két* részből állt. Az *első rész* — Kesztej pont budapesti stereográfikus x, y rendezőinek — levezetése: a következő módon eszközöltetett. (Lásd 32. számú ábrát.)

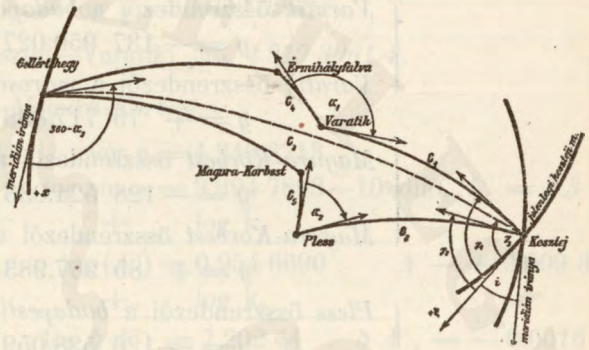
A 32. számú ábra két *gömbi* poligont ábrázol. Az *Érmihályfalva*, *Varatik*, *Magura Korbest*, *Pless* elsőrendű háromszögelési pontok derékszögű sík összrendezői mindkét *(budapesti* és *marosvásárhelyi)* rendszerben ismeretesek. Ha tehát a *marosvásárhelyi* adatok alapján kiszámítjuk a *gömbi* α_1, c_1 és α_2, c_2 szögeket és hosszakat, akkor azokhoz számítva a budapesti rendszerre vonatkozó délszög és hosszredukciókat, megkapjuk a Varatik—Kesztej oldal délszögét és hosszát, úgyszintén a Pless—Kesztej oldal délszögét és hosszát a *budapesti* rendszerben. Most *Varatik* és *Pless* budapesti összrendezőire támaszkodva, számíthatók *Kesztej* pontnak *derékszögű sík* összrendezői a *budapesti rendszerben.* Két x, y értékpárt kapunk — hiszen két oldalból két különböző pontból számítottunk. A két értékpár számtani közepe adja meg Kesztej helyét a budapesti rendszerben.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Most már számíthatjuk a Gellérthegy—Kesztej gömbi (pontozott) oldal vetületi hosszát és a $360—\alpha_3$ szöget. A Kesztej pont φ, λ földrajzi rendezői most már a *gömbi Gellérthegy—Kesztej—Északi sark* háromszögből az ismert módon számíthatók.

Hogyan nyerjük a *jelenlegi Kesztej-i* $+ x$ *tengely* (az ábrán $+ \xi$-vel jelölve) azimutját a budapesti rendszerből levezetett Kesztej-i meridiánra vonatkoztatva? Ez a szög az ábrán i-vel van jelölve.

Az ábrán feltüntetett *gömbi* γ_1 és γ_2 szögek nem egyebek, mint a c_1 és c_2 oldalak *marosvásárhelyi* vetületeinek *délszögei a* jelenlegi marosvásárhelyi $+ \xi$ $(+ x)$ tengelyre vonatkoztatva. Ezen γ_1 és γ_2 szögek tehát *ismeretesek*. A szóban forgó c_1 és c_2 oldalak délszögeit (Kesztej pontban) a *budapesti* rendszerre vonatkozólag -- amikor Kesztej már áll a budapesti rendszerben — szintén ismerni fogjuk. Hasonlóan ismerni fogjuk a c_1 és c_2 oldalak délszögredukcióit a budapesti rendszerben, és ismerni fogjuk a meridiánkonvergenciát Kesztej pontban, Gellérthegyre vonatkoztatva. Tehát meglesz c_1 és c_2-nek budapesti rendszerből levezetett *azimutja Kesztej pontban*. Most az i-re két értéket nyerünk!



32. ábra.

(azimutja c_1-nek) $\quad -\gamma_1 = i.$

(azimutja c_2-nek) $\quad -\gamma_2 = i.$

A két értéknek egyeznie kell: illetve a kettő számtani közepe adja meg a *legvalószínűbb* i értéket.

Ha tehát ezentúl valamely erdélyi háromszögelési pontnak földrajzi rendezőit akarnók a budapesti rendszerrel összhangban számítani, akkor az illető A pontnak *centralis* (keszteji) délszögéhez hozzá kell adni (megfelelő előjellel) az i értéket, és Kesztej pontra az uj φ, λ értékrendszert használni. *Az így számított* φ_A, λ_A *értékek a magyarországi földrajzi rendezőkkel geodéziailag, az adott körülmények között, a lehető legjobb összhangban lesznek.*

Az egész levezetés munkája tehát — *észszerű sorrendben* — a *következő:*

1. A *marosvásárhelyi* vetületi összrendezők alapján számítani a c_1 és c_4 oldalaknak megfelelő *vetületi egyenes oldalak hosszait és délszögeit.*

Ugyanazt elvégezni c_2 és c_5-re vonatkozólag.

2. A *marosvásárhelyi* rendszerben számítani a nevezett négy oldal *gömbi* hosszredukcióit és az α_1 és α_2 szögek *szögredukcióit.*

Meglesznek tehát a gömbi c_1, c_2, c_4 és c_5 oldalak, és a *gömbi* α_1, α_2, γ_1 és γ_2 szögek. Meglesznek továbbá -- érdekes ellenőrző számítás céljából — a Varatik—Érmihályfalva és Magurakorbest—Pless oldalak *gömbi* délszögei a marosvásárhelyi rendszerben: ezeket $\delta'_{(c4)}$ és $\delta'_{(c5)}$-el jelöljük.

3. Számítjuk a c_4 és c_5 oldalak vetületi egyeneseinek hosszait és délszögeit, valamint hossz- és délszögredukcióit a budapesti rendszerben.

4. Számítjuk megközelítőleg Kesztej pont összrendezőit a *budapesti rendszerben*, és ezek alapján az α_1, α_2 szögek és c_1 és c_2 oldalak redukcióit a budapesti vetületre.

5. Kesztej összrendezői a budapesti rendszerben és ezek alapján a c_1 és c_2 oldalak végleges délszögeit a budapesti rendszerben.

6. A c_3 és $(360 — \alpha_3)$ vetületi értékeinek számítása. (Budapesti rendszerben.)

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

7. Kesztej φ, λ és μ számítása.
8. Végeredmények és ellenőrző számítások.

Adatok:

Gellérthegy pont *összrendezői* a *budapesti* rendszerben: $y_G = 0$; $x_G = 0$.

Dj. Kesztej „ „ „ *marosvásárhelyi* „ $y_K = 0$; $x_K = 0$.

Ér-Mihályfalva összrendezői a *budapesti* rendszerben:
$y = -122\ 518.252$ $x = -4\ 265.902$

Ér-Mihályfalva összrendezői a *marosvásárhelyi* rendszerben:
$y = +89\ 556.884$ $x = -57\ 877.138$

Varatik összrendezői a *budapesti* rendszerben:
$y = -137\ 950.027$ $x = +18\ 501.904$

Varatik összrendezői a *marosvásárhelyi* rendszerben:
$y = +75\ 717.833$ $x = -34\ 113.779$

Magura-Korbest összrendezői a *budapesti* rendszerben:
$y = -128\ 524.033$ $x = +30\ 964.778$

Magura-Korbest összrendezői a *marosvásárhelyi* rendszerben:
$y = +85\ 967.983$ $x = -22\ 324.811$

Pless összrendezői a *budapesti* rendszerben:
$y = -126\ 528.059$ $x = +53\ 235.484$

Pless összrendezői a *marosvásárhelyi* rendszerben:
$y = +89\ 470.988$ $x = -246\ 150.184$

Ad 1.

Varatik	+ 75 717.833	— 34 113.779	4.879 1981.5	4.879 1981.5	
Kesztej	0.000	0.000	4.532 9297.9	9.959 8699.3	= log. *Kesztej Varatik (Marosv.)*
	+ 75 717.833	— 34 113.779	0.346 2683.6	4.919 3282.2	

65°—44′—47.″82

Kesztej—Varatik délszög: 114°—15′—12.″18 *(Marosv.)*

Varatik—Kesztej „ : 294° „

Ér.Mih.	+ 89 556.884	— 57 877.138	4.141 1063.0	4.375 9078.3	
Varatik	+ 75 717.833	— 34 113.779	4.375 9078.3	9.936 5847.6	= log. *Varatik—Érmih. (Marosv.)*
	+ 13 839.051	— 23 763.359	9.765 1984.7	4.439 3230.7	

30°—12′—54.′75

Varatik—Érmihályfalva: 149°—47′— 5.″25 *(Marosv.)*

Pless	+ 89 470.988	— 246.150	4.951 6822.4	4.951 6822.4	
Kesztej	0.000	— 0.000	2.391 1998.0	9.999 9983.0	= log. Pless—Kesztej *(Marosv.)*
	+ 89 470.988	— 246.150	2.560 4824.4	4.951 6839.4	

89°—50′—32.″53

Kesztej—Pless délszög: 90°— 9—27.″47 *(Marosv.)*

Pless—Kesztej „ : 270° „

Magura	+ 85 967.983	— 22 324.811	3.544 4407.2	4.343 9727.2	
Pless	+ 89 470.988	— 246.150	4.343 9727.2	9.994 6013.9	= log. Pless—Magura (Marosv.)
	— 3 503.005	— 22 078.661	9.200 4680.0	4.349 3713.3	

9°— 0′—55. 49

Pless—Magura Korb. délszög: 189°— 0′—55.″49

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ad 2.

Hosszredukció: *Kesztej—Pless. (centrális sugár.)*

$d = \text{num. } 4.951\ 6839.4 = 8947\ 1$ öl

$d = 89471$-nél $\left|\ \log \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} - \log \frac{\delta}{2}\ \right| 0.000\ 0256.1$

$\log d' = \log c'_2 = \log$ (Kesztej—Pless) $\overline{\overline{gömb}}$ *4.951 6583.3*

Hosszredukció: *Kesztej—Varatik.* (centrális sugár.)

$d = \text{num. } 4.919\ 3282.2 = 8304\ 8$ öl

$d = 83048$-nál $\log \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} - \log \frac{\delta}{2} = 0.000\ 0220.8$

$\log d' = \log c', = \log$ (Kesztej—Varatik) $\overline{\overline{gömb}}$ *4.919 3061.4*

Délszög és hosszredukció: *Pless—Magura-Korbest.*

$d = 89471.°$

$c = 22355.° \mid 2c = 44710.$

$d_P = 111826,$

$d_Q = 67116.$

$\omega = \delta_{Pl.\ M.} - \delta_{Pl.\ K.}$

$= 278° - 51' - 28.''02$

$\log d = 4.\ 951\ 6839$

$+ \quad 1.6588\ 245 - 10$

$\log k_1 = 6.6105\ 084 - 10$

$\log d_2 = 9.\ 903\ 37$

$+ \quad 6.\ 344\ 40 - 20$

$\log k_2 = 6.\ 247\ 77 - 10$

$\log c = 4.349\ 3713$

$\log \sin \omega = 9.994\ 7893 - 10$ diff., $1'' = 3.3$

$+ \quad \log k_1$

$\log (\Delta'') = 0.954\ 6690 \qquad \Delta'' - + 9.009\ 8$

$+ \quad \log k_2$

$\log \delta \Delta''_1 = 7.202\ 44 \qquad \delta \Delta''_1 = - 0.0016$

$2 \log (\Delta) = 1.909\ 34$

$\log \operatorname{cotg} \omega = 9.192\ 68$

$+ \quad 4.685\ 57 - 10$

$\log \delta \Delta''_{II} = 5.787\ 59 - 10 \quad \delta \Delta''_{II} = + 0.0001$

$\Delta_{Pl.-Mag.} = + 9.''0073$ *(Marosv.)*

$\sigma \omega = (3.\hat{3} \times 9.007) = 9970.3$

$\sigma_{dP} = 0600.2$

$\sigma_{dQ} = 0216.2$

$\sigma_{2C} = 9968.1$

$\sigma_{Pl.\ M.} = 0.0000754.8$

Délszög és hosszredukció: *Varatik—Érmihályfalva.*

$d = 83048.{}_0$

$c = 27499.{}_0 \quad 2c = 54998$

$d_P = 110547.{}_0 \qquad \frac{788}{210}$

$d_Q = 55549.{}_0 \qquad 0.38$

$\omega = \delta_{V.\ É.} - \delta_{V.\ -\ K.} =$

$\frac{441}{106} \quad 215° - 31' - 43.07$

$\log d = 4.9193\ 282$

$+ \quad 1.6588\ 245 - 10$

$\log k_1 = 6.5781\ 527 - 10$

$\log d_2 = 9.8386\ 6$

$+ \quad 6.3444\ 0 - 20$

$\log k_2 = 6.1830\ 6 - 10$

$\log c = 4.439\ 3231$

$\log \sin \omega = 9.764\ 2581 - 10$ diff. $1'' = 29.5$

$+ \quad \log k_1$

$\log (\Delta'') = 0.781\ 7339 \qquad \Delta'' = + 6.''0497$

$+ \quad \log k_2$

$\log \delta \Delta''_1 = 6.964\ 79 - 10 \quad \delta \Delta''_1 = - 0.000.9$

$2 \log (\Delta'') = 1.\ 56\ 347$

$\log \operatorname{cotg} \omega = 0.\ 14\ 626 - 10$

$+ \quad 4.\ 68\ 557 - 10$

$\log \delta \Delta''_{II} = 5.\ 39\ 530 - 10 \quad \delta \Delta''_{II} = - 0.000\ 2$

$\Delta_{V.-É.} = + 6.''048.6$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

$$\sigma\,\omega = (29.5 + 6.047) = 178.4$$
$$\sigma_{dP} = 586.5$$
$$\sigma_{dQ} = 148.3$$
$$\sigma_{2C} = 9952.3$$
$$\sigma_{V.-É.} = 0.0000865.5$$

$$\log \delta'_{\text{Var. Érm.}} = (149^\circ\ 47'\ 5.''26) - (6.049) = 149^\circ - 46' - 59.''21_1 ; \log' c_4 = \begin{array}{r} 4.439\ 3230.7 \\ 865.5 \\ \hline 4.439\ 2365.2 \end{array}$$

$$\log \delta'_{\text{Pless. Mag.}} = (189^\circ\ 0\ 55.''49) - (9.007) = 189^\circ - 0 - 46.''48_3 ; \log c'_5 = \begin{array}{r} 4.349\ 3713.3 \\ 754.8 \\ \hline 4.349\ 2958.5 \end{array}$$

Ide írjuk még az előbb nyert két *gömbi* adatot:

$$\log c_1' = 4.919\ 3061.4;\ \log c_2' = 4.951\ 6583.3$$

A *marosvásárhelyi* adatok szerint tehát:

$$\left.\begin{array}{rrrr} & 294^\circ & -15' & -12.''18 \\ \alpha_1 = \delta_{V.K.} - \delta_{V.É.} = - & 149 & 46 & 59.\ 21 \end{array}\right\} = 144^\circ - 28' - 12.''97$$

$$\left.\begin{array}{rrrr} & +(270^\circ & 9' & -27.''47) \\ \alpha_2 = \delta_{Pl.K.} - \delta_{Pl.M.} = - & (189 & 0 & -46.\ 48) \end{array}\right\} = 81^\circ - 8' - 40.''99$$

A **budapesti** rendszerben — régebbi hivatalos számítások szerint:

$$\delta_{V.É.} = 145^\circ - 52' - 15.''609$$
$$\text{és } \Delta_{V.É.} \qquad 13.\ 007$$

tehát $\delta'_{V.É.} = \delta_{V.É.} - \Delta_{V.É.} = 145^\circ - 52' - 28.''616$

Az előbb láttuk, hogy a *marosvásárhelyi* rendszerben $\delta_{V.É.} = 149^\circ - 46' - 59.''21$

tehát:

$$z_V = (\text{marosv.}) - (\text{budapesti}) = 3^\circ - 54' - 30{\cdot}59 = +3^\circ - 54' - 30.''59$$

Tehát $\delta'_{V.K.}$ **(budapesti)** $= \delta'_{V.K.}(\text{marosv.}) - z_V =$

$$= \left.\begin{array}{rrrr} & (294^\circ & -15' & -12.''18) \\ & -(\ 3^\circ & 54' & 30.\ 59) \end{array}\right\} = 290^\circ - 20' - 41.''59$$

Számítási kontroll: $\delta'_{V.É.}$ *(budapesti)* $+ \alpha_1 = (145^\circ - 52' - 28.616) + (144^\circ - 28' - 12.97)$

$$= 290^\circ - 20' - 41.''586$$

A *budapesti* rendszerben — régebbi hivatalos számítások szerint:

$$\delta_{Pl.M.} = 185^\circ - 7' - 16.''876$$
$$\text{és } \Delta_{Pl.M.} \qquad 13.\ 321$$

tehát $\delta'_{Pl.M.}' = \delta_{Pl.M.}' - \Delta_{Pl.M.} = 185^\circ - 7' - 30.''197$; Az előbb láttuk, hogy a *marosvásárhelyi* rendszerben $\delta'_{Pl.M.}$ $189 - 0 - 46.\ 483$

tehát $z_{Pl.} = +3^\circ - 53' - 16.''286.$ Ennélfogva

$$\delta'_{Pl.K.}\textbf{(budapesti)} = \delta'_{Pl.K.}(\text{marosv.}) - z_{Pl.} = - \left.\begin{array}{rrrr} & (270^\circ & -9 & -27.''47\ ) \\ & (\ 3 & 53 & 16.\ 286) \end{array}\right\} = \mathbf{266^\circ - 16' - 11.''184}$$

Számítási kontroll:

$$\left.\begin{array}{rrrr} \delta'_{Pl.M.}\ (\text{budapesti}) + \alpha_2 = & 185 & -7 & -30.197 \\ + & 81 & -8 & -40.990 \end{array}\right\} = 266^\circ - 16' - 11.''187.$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A továbbiakra fontos két adat tehát:

A *budapesti* rendszerben

$$\text{I.} \left\{ \begin{array}{l} \delta'_{\text{Var.—Kesz.}} = 290° - 20' - 41.''59. \\ \delta'_{\text{Pless.—Kesz.}} = 266° - 16' - 11.''187. \end{array} \right\} \text{I.}$$

Keressük most meg a *budapesti* rendszerre vonatkozólag ezen két oldal (c_1 c_2) délszög és hosszredukcióit, ezáltal meglesznek a *budapesti* rendszerben a c_1 és c_2 *egyenes oldalak* délszögei és hosszai — amelyek segélyével számítható lesz Kesztej pontnak *összrendezői* értékpárja a budapesti rendszerben.

A redukciók éles számítása céljából kiszámítottuk (előzetes redukciók) segélyével Kesztej pont közelítő összrendezőit (± 1.0 öl hibával):

budapesti rendszerben
$$\left\{ \begin{array}{l} (y_K) = -215\ 868.0 \\ (x_K) = +\ 47\ 399.0 \end{array} \right.$$

Budapesti rendszer.

Képezzük mindenekelőtt a redukciószámítás *argumentumait*.

Gellérth.	5.3341883	5.3341883	
Kesztej — 215868 + 47399	4.6757692	9.9897720 (33)	
+ —	0.6584191	5.34441340	
$\alpha = 77° - 36' - 57.''1$	(3476 = 715)		$\delta_{K.G.} = 102° - 23' - 02.''9$
Gellérth.	5.1397217	5.1397217	
Varat. — 137950 + 18502	4.2672187	9.9961287	
+ —	0.8725030	5.1435930	
$\alpha = 82° - 21 - 39.7$			$\delta_{V.G.} = 97° - 38 - 20.3$
Gellérth.	5.1021866	5.1021866	
Pless — 126 528 + 53235	4.7261973	9.9646045 (37)	
+ —	0.3759893	5.1375784	
	(648 / 245)		
$\alpha = 67° - 10' - 54.''2$			$\delta_{Pl.G.} = 112° - 49 - 05.''8$
Varat. — 137950 + 18502	4.8916378	4.8916378	
Kesztej. — 215868 + 47399	4.4608528	9.9720110 (56)	
+ 77918 — 28897	0.4307850	4.9196212	
	(389 / 461)		
$\alpha = 69° - 39' - 07.2$			$\delta_{K.V.} = 110° - 20 - 52.8$
Pless — 126528 + 53235	4.9510459	4.9510459	
Kesztej. — 215868 + 47399	3.7661153	9.9990754	
+ 89340 + 5836	1.1849306	4.9519705	
	(7630 / 16760 : = 5750)	(3237 = 0 5.1)	
$\alpha = 86° - 15' - 45.''1$			$\delta_{K.Pl.} = 86° - 15' - 45.''1$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Délszögredukció: *Kesztej—Varatik*

$$\log d_{K.} = 5.344\ 4130$$
$$+ 1.658\ 8245 - 10$$
$$+ 7.003\ 2375 - 10$$

$\omega =$
110 — 20 — 52.8
102 — 23 — 2.9
007° — 57′ — 49.9

$\log c = 4.919\ 6212$

$\log \sin \omega = 9.141\ 6017 - 10$

$+ \quad = 7.003\ 2375 - 10$

$\log (\Delta'') = 1.064\ 4604 \quad (\Delta'') = + 11.600_1$

$+ \quad 7.033\ 23$

$\log \delta \Delta_I \quad 8.097\ 69 \quad - 0.012_5$

$2 \log (\Delta'') = 2.128\ 92$

$\log \operatorname{cotg} \omega = 0.854\ 19$

$+ \quad 4.685\ 57$

$\log \delta \Delta_{II}'' = 7.668\ 68 \quad + 0.004_7$

$|\Delta|'' = 11.592_3$

$\Delta_{K.\,V.} = - 11.''59_2$

és *Kesztej—Pless*

$$\log d_{K.2} = 10.688\ 83$$
$$+ 6.344\ 40 - 20$$
$$17.033\ 23 - 20$$

$\omega =$
446 — 15 — 45.1
102 — 23 — 2.9
343 — 52 — 42.2

$\log c = 4.951\ 9705$

$\log \sin \omega = 9.443\ 5400 - 10$

$+ \quad = 7.003\ 2375 - 10$

$\log (\Delta'') = 1.398\ 7480 \quad \Delta'' = + 25.0466$

$+ \quad 7.033\ 23$

$\log \delta \Delta_I = 8.431\ 98 - 10 \quad \delta \Delta_I'' = - 0.0270$

$2 \log (\Delta'') = 2.797\ 50$

$\log \operatorname{cotg} \omega = 0.539\ 04$

$+ \quad 4.685\ 57$

$\log \delta \Delta_{II} = 8.022\ 11 \quad \delta \Delta_{II} = + 0.0105$

$|\Delta''| = 25.0391$

$\Delta_{K.Pl.} = + 25.030$

Az I. alatt felírt két fontos délszögből tehát:

budapesti rendszerben: vetületi oldal délszöge: $\delta'_{K.\,V.} = \delta'_{V.\,K.} - \Delta_{K.\,V.} - \Delta_{V.\,K.} - 180°$

$= 110° - 20 - 41.\ 59$

$+ \quad 23.\ 18_4$

$= 110° - 21' - 04.''77_4$

budapesti rendszerben: vetületi oldal délszöge: $\delta'_{K.Pl.} = \delta'_{Pl.K.} - \Delta_{K.Pl.} - \Delta_{K.Pl.} - 180°$

$= 86° - 16' \quad 11.''187$

$- \quad 50.\ 060$

$86° - 15' - 21.''127$

A nyert két délszög kbsége $= 24° - 05' - 43.''647.$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ennek a szögértéknek egyeznie kellene a marosvásárhelyi rendszerbeli két délszög különbségével:

marosv. $\left\{ \begin{array}{l} \delta_{K.\,V.} = \delta'_{K.\,V.} = 114 - 15 - 12.18 \\ \delta_{K.\,Pl.} = \delta'_{K.\,Pl.} = 90 - 9 = 27.47 \end{array} \right\} = 24^\circ - 5' - 44.''71$

Tehát a kétféle módon nyert szögérték közti kbség: 1.''06

Oldalhosszredukció: Kesztej—Varatik.

d_K = num. 5.3444130 = *221011*, σ_{dK} = 2343·2

d_V = num. 4.1435930 = *139185*, σ_{dV} = 929.6

c'_1 = num. 4.9193061 = *83044*, $\sigma_{c'}$ = 9889.0

σ = 003161.8

tehát

$\log c_1$ *(budapesti r.)* = 4.9193061.4 + 3161.8

4.9196223.2

Oldalhosszredukció. *Kesztej—Pless.*

$\frac{4 \times 0.7}{2.8}$

d_K = num. 5.3444130 = *221011* $^{78}_{282}$ σ_{dK} = 2343.2

$\frac{900.39}{2.8}$ / $\frac{}{903\,1}$

d_{Pl} = num. 5.1375784 = *137271* ^{989} σ_{dP} = 903.1

$\frac{5\,6}{2\,8}$

c_2' = num. 4.9516583.3 = *89466* σ_{c_2} = 9872.0

σ = 03118.3

tehát

$\log C_2$ (budapesti r.) = 4.9516583.3 + 3118.3

4.9519701.6

Szükségünk van (budapesti) $\delta_{V.\,K.}$ és $\delta_{Pl.\,K.}$ délszögekre. I.-et és a számított irányredukciókat figyelembe véve:

$\delta_{V.\,K.} = \left\{ \begin{array}{lll} 290 & 20 & 41.59 \\ & + & 11.59 \end{array} \right\} = 290^\circ - 20' - 53.''18$

$\delta_{Pl.\,K.} = \left\{ \begin{array}{lll} 266^\circ & 16 & 11.187 \\ & - & 25.030 \end{array} \right\} = 266^\circ - 15' - 46.''16$

Most már számíthatjuk *Kesztej végleges összrendezőit* a budapesti rendszerben:

	$\log c_1$ = 4.9196223.2		$\log c_1$ = 4.9196223.2
6.82	$\log \sin \delta$ = 9.9720110		$\log \cos \delta$ = 9.5412153.0
	46.8 / 6.2 / 0.2 n		170.4 / 5.6 / 4.5 (+)
	4.8916386.4 n		4.4608556.7
	78.0 / 08.4		28.0 / 28.7
	— 77918.15		+ 28897.19
	$y_{Var.}$ = — 137950.027		$x_{Var.}$ = + 18501.904
	$y_{Keszt.}$ = — *215868.18*		x_K = + *47399.09*
	$\log c_2$ = 4.9519701.6		$\log c_2$ = 4.9519701.6
	9.9990747.0 n		8.8140861.0 n
	8		270.5
	4.9510456.6 n		3.7660833.1 n
	00411 / 045		781.0 / 52.1

$\frac{0.84}{84}$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

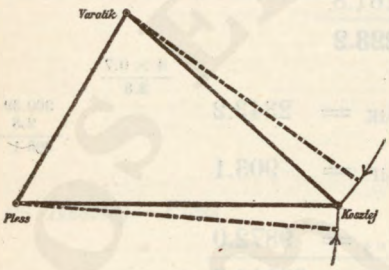
	— 89339.95	— 5835.57
$y_{Pl.}$	— 126528.059	$x_{Pl.}$ + 53235.484
y_K =	— *215868.01*	+ *47399.91*

Látnivaló, hogy azon közelítő összrendezők, melyekkel a redukció számításokat elvégeztük, igen jól egyeznek (1 ölön belül) a talált összrendezőkkel; a redukció számítás tehát *éles*. A talált értékekből *számtani közepet véve:*

budapesti rendszerben
$y_{Kesztej}$ = — *215868.10* javítás volt: ± 0.09 öl = krb. *18 cm.*
$x_{Kesztej}$ = + *47399.50* javítás volt: ± **0.41** öl = krb. *81 cm.*

Mi az oka annak, hogy az x-ekben annyira eltérő két eredményt nyertünk Kesztej pontra?

Ennek legfőbb oka az, hogy a *budapesti rendszerbeni* Varatik Pless oldalból számítva a gömbi Varatik—Pless hosszt, *nagyobb* eredményt kapok, mintha ugyanezt a számítást elvégzem a marosvásárhelyi rendszerben.



33. ábra.

Ennek oka, hogy az erdélyi hálózat más bázisokból indulólag egyenlíttetett ki, mint a magyarországi hálózat.

Ez a *hosszkülönbség* minden közös oldalban mutatkozik, de nem egyforma mértékben — és azért számításba nem vehető.

Például.

A marosvásárhelyi rendszerből indulólag, azt találtuk, hogy $\log c'_4$ = 4.4392365.2
A budapesti „ „ pedig azt találjuk, hogy $\log c'_4$ = 4.4392441.3
budapesti—marosvásárhelyi = + *76.1*

A marosvásárhelyi rendszerből indulólag $\log c'_5$ = 4.3492958.5
A budapesti „ „ $\log c'_5$ = 4.3492978.0
(budapesti—marosv.) = + *19.5*

Lássuk micsoda *kétféle* eredményre jutunk a *Pless—Varatik* oldalnak a gömbre való redukálása révén?

Marosvásárhelyi rendszer.

Varatik	+ 75717.833	— 34113.779	4.1384023.0	4.5297848.1
Pless	+ 89470.988	— 246.150	4.5297848.1	9.9668503.0
				42.5 / 0.9
	— 13753.155	— 33867.629	9.6086174.9	4.5629301.6
			5880.0 / =294.9 / 241.6	533 / 483 / 500

22° — 6′ — 04.″88 $\delta_{Pl.V.}$ = **202° — 6′ — 4.″88**

Budapesti rendszerben.

Varatik	— 137950.027	+ 18501.904	4.0577409.8	4.5407495.5
Pless	— 126528.059	+ 53235.484	4.5407495.5	9.9776970.0
				55.2 / 2.8
	— 11421.968	— 34733.580	9.5169914.3	4.5630467.5
			9807.0 / 107.3 / 70.9	36.4

18° — 12′ — 11.″51 $\delta_{Pl.V.}$ = **198° — 12′ — 11.″51.**
8. 49

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Hosszredukció.

Argumentumok a *budapesti* rendszerben:

$$\begin{array}{llll} d_V. = 139185 & \sigma d_V. = & 0929.6 \\ d_{Pl.} = 137271 & \sigma d_{Pl.} = & 0903.1 \\ (c') = 36549 & \sigma_{(c')} = & 9978.6 \\ & \sigma = & 0.0001811.3 \end{array}$$

tehát a *budapesti* rendszerből redukcióval:

$$\log \text{(Pless—Varat.) gömb} = \begin{array}{r} 4.5630467.5 \\ -\ 1811.3 \\ \hline 4.5628656.2 \end{array} = 4.56286562$$

Argumentumok a *marosvásárhelyi* rendszerben:

$$\begin{array}{llll} d_V. = 83048.0 & \sigma d_V. = & 331.0 \\ d_{Pl.} = 89471.0 & \sigma d_{Pl.} = & 384.0 \\ (c') = 36549. & \sigma_{(c')} = & 9978.6 \\ & \sigma = & 0.0000693.6 \end{array}$$

tehát a *marosvásárhelyi* rendszerből redukcióval:

$$\log \text{(Pless—Varat.) gömb} = \begin{array}{r} 4.5629301.6 \\ -\ 693.6 \\ \hline 4.5628608.0 \end{array} = 4.5628608.0$$

tehát

(budapesti − marosv.) = + **48.2** egység a 7-ik számjegyben.

Délszögredukció.

Budapesti rendszerben. (Pless—Var.)

$$\left.\begin{array}{l} \omega = 198 - 12 - 11.5 \\ -\ 112 - 49 - 5.8 \end{array}\right\} = 85^\circ - 23 - 5.''7$$

$$\begin{array}{ll} \log d = & 5.1375784 \\ & +\ 1.6588245 - 10 \\ \log k_1 = & 6.7964029 \\ \log d^2 = & 10.27515 \\ & =\ 6.34440 - 20 \\ \log k_2 = & 6.61955 - 10 \\ \log c = & 4.5630467.5 \\ \log \sin \omega = & 9.9985896 \qquad \text{diff. } 1'' = 1.7 \\ & +\ 6.7964029 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \log (\Delta'') & 1.3580392.5 & (\Delta'') = +\ 22.806 \\ & +\ 6.61955 - 10 & \\ \log D\ \Delta_I = & 7.97759 - 10 & (D\ \Delta_I'') = -\ 0.009 \\ & & (\Delta'') = 22.797 \end{array}$$

$$\Delta_{Pl.\ Var.} = -\ 22.80$$

Marosvásárhelyi rendszerben.

$$\left.\begin{array}{l} \omega = 202^\circ - 6' - 4.''88 \\ -\ 270 - 9 - 27.47 \end{array}\right\} 291^\circ - 56' - 37.''41$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

$$\log d = 4.9516839.4$$
$$+ 1.6588245 - 10$$
$$\log k_1 = 6.6105084 - 10$$
$$\log d^2 = 9.90337$$
$$+ 6.34440 - 20$$
$$\log k_2 = 6.24777 - 10$$
$$\text{og } c = 4.5629301.6$$
$$\log \sin \omega = 9.9673358.0$$

$^{5\,9.5}_{3.4}$ diff. 1.″ = **8.4**

$$+ 6.6105084 - 10$$
$$\log \Delta'' = 1.1407806.5 \qquad (\Delta'') = + 13.828$$
$$+ 6.24777 - 10$$
$$\log D\,\Delta_I = 7.38855 - 10 \qquad D\,\Delta_I'' = - 0.002$$
$$(\Delta'') = + 13.826$$

$$\Delta_{Pl.\ Var.} = + 13.''826$$

Mielőtt a nyert eredményeket felhasználnók, vessük alá egy éles kontrollnak eddigi redukció számításainkat.

Világos, hogy a *Pless-Varatik-Kesztej* háromszög irányredukcióinak összege azonos kell hogy legyen (jelen esetben 0.″01-re) a két *rendszerben* számítva.

Marosvásárhelyi rendszerben e redukciók összege

$$= 2 \times 13.826 = 27.''652.$$

Ennyit kell kiadni a 6 budapesti rendszerbeli redukcióknak:

$$\Delta_{K.\ V.} = - 11.59_2, \text{ tehát } \Delta_{V.\ K.} = + 11.59_2$$
$$\Delta_{K.\,Pl.} = + 25.030, \text{ tehát } \Delta_{Pl.\,K.} = - 25.030$$
$$\Delta_{Pl.\,V.} = - 22.800, \text{ tehát } \Delta_{V.\,Pl.} = + 22.800.$$

A *Pless*-nél levő *szög* redukciója tehát: + 2″.224
A *Kesztej*-nél „ „ „ pedig: + 36″.622 } = + 38.846
A *Varatik*-nál „ „ „ „ : − 11″.214 − 11.214
+ 27″.632

summa $\Delta = + 27''.63$.

Látnivaló, hogy **2** század másodpercre egyezik a talált két érték.

Tehát eddigi redukció számításaink jók.

Lássuk most a **Pless-Varatik** oldal *tájékozását* a két rendszerben:

budapestiben

$$\delta_{\text{Pless Varatik.}} = \begin{cases} 198^\circ - 12' - 11''.51 \\ \qquad\qquad + 22.806 \end{cases}$$
$$= 198^\circ - 12' - 34.''316$$

marovásárh.

$$\delta'_{\text{Pless Varatik.}} = \begin{cases} 202^\circ - 6' - 4''.88 \\ \qquad\qquad - 13.826 \end{cases}$$
$$202^\circ - 5' - 51.''054$$

tehát Z_{Pless} = (marosv.-bud.) = + **03**° − **53**′ − **16**″**.738**

A Z_{Pless}-re már a *Pless-Magura* oldal tájékozásánál nyertünk értéket:

és pedig a $Z_{Pless} = + 3^\circ - 53' - 16''.286.$ *diff.* + 0″.452

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Hasonlólag: *budapestiben*

$$\delta'_{\text{Varatik-Pless}} = 18° - 11' - 48''.704$$

marosvásárh.

$$\delta'_{\text{Varatik-Pless}} = 22° - 6' - 18''.706$$

$$Z_{\text{Var.}} = + 3° - 54' - 30.002.$$

Az előbb Varatik-Érmihályfalva tájékozására találtuk a

$$Z_{\text{Var.}} = + 3° - 54' - 30''.59\text{-et} \quad \textit{diff.} - 0.588$$

Látnivaló tehát, hogy a *V. K* és *Pl. K* oldalak tájékozásában — mindegyikben, lehet $\pm$ 0''.5 bizonytalanság. Még tisztábban láthatjuk ezen bizonytalanságot, hogyha a budai rendszerbeni *V. K.* és *Pl. K* görbe oldalak délszögeit levezetjük a *marosvásárhelyi rendszerből számítható K. V. Pl.* és *V. Pl. K* szögekből.

Marosvásárhelyi rendszérben:

$$\delta'_{\text{Pless Var.}} = 202° - 5' - 51''.054$$

$$\delta'_{\text{Pless Keszt.}} = 270° - 9' - 27''.470$$

tehát $\sphericalangle$ V. Pl. K. $= \textit{68°} - \textit{3'} - \textit{36''.416} = \mathbf{68° - 3' - 36.''416}$

Budapestiben: $\delta'_{\text{Pless Var.}} = 198 - 12 - 34.316$

tehát $\delta'_{\text{Pl. K}}$ (budapesti) $= \textit{266° - 16' - 10''.732}$

A Pless-Magura oldalból levezetve azt találtuk volt, hogy

$$\delta'_{\text{Pl. K}} \text{ (budapesti)} = 266° - 16' - 11.187$$

kbség $+ \textit{0''.455}$

továbbá:

Marosvásárhelyi rendszerben

$$\delta_{\text{Var. Pless}} = 22° - 6' - 18''.706$$

$$\delta_{\text{Var. Kesz}} = 294° - 15' - 12''.180$$

tehát $\sphericalangle$ K. V. Pl. $= 272° - 8' - 53''.474$

budapestiben: $\delta_{\text{Var. Pless}} = 18° - 11' - 48''.704$

tehát $\delta'_{\text{Var. K.}}$ (budapesti) $= 290° - 20' - 42''.178$

A *Varatik-Érmihályfalva* szögből levezetve volt:

$$\delta'_{\text{Var. K}} \text{ (budapesti)} = 290° - 20' - 41''.590$$

kbség $- \textit{0''.588}$

Tehát a *Pless-Kesztej* délszög (amely a Pl. V. oldalnak megfelel) *kisebb* 0.''455-el, mint amivel mi számítottunk,

és a *Varatik-Kesztej* délszög (amely a Pl. V. oldalnak megfelel) *nagyobb* 0''.588-el, mint amivel mi számítottunk.

Mi tehát (33. ábra) a teljesen kihúzott két oldal helyett a – – – -vel kihúzott oldalakkal számítottunk.

Ez a két oldal divergál tehát — és pedig összegben

$$0.455$$
$$+ 0.588$$
$$\mathbf{1''.043}\text{-el.}$$

Mivel 160 km távolságban 1''-nek (0.000 005 $\times$ 160 000) meter $= 0.8$ méter, elhajlás felel meg, azért az imént kimutatott 1''.04 divergencia, krb. **0.70** méteres **x** kbséget ad a Kesztej pontra.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Most már tisztán láthatjuk a talált *0.8* öles x_K koordináta különbséget. Ugyanis az két faktorból adódik össze:

1. A *Var. Pless* oldal *hosszabb* voltából (a budapesti rendszerben);
2. A *Pl. Keszt.* és *Var. Keszt.* oldalak *divergenciájából.*

Ez a divergencia eredményezett *0.70 méteres x kbséget;* a talált **74** logaritmikus egységnek pedig — minthogy a Pless—Varatik oldal körülbelül 72 km hosszú, és num log 0.0000074 = 1.000017,

$$\frac{72 \times 1.7}{100\,000} = \frac{72}{\frac{50\,4}{122.4}} = 0.0012 \text{ km.}$$

$$\overline{100\,000}$$

$$= 1.2 \text{ méter}$$

felel meg. Ez az x irányú vetületen (mivel krb. **20°** a hajlása a Var. Pless oldalnak) *1.12* métert eredményez. Tehát a várható kbség az **x**-ben:

$$\begin{array}{r} 1.12 \\ +\ 0.70 \\ \hline 1.82 \end{array}$$

méter, ami krb. *0.9* ölnek felel meg. A talált különbség volt:

0.82 öl.

Tehát ez az x különbség nem lephet meg minket és így Kesztej pont végleges összrendezői a *budapesti* rendszerben:

$$\begin{cases} y_{Kesz.} = -\ 21\,5868.10 \text{ öl.} \\ x_{Kesz.} = +\ 47\,399.50 \text{ öl.} \end{cases}$$

Visszatérve most már megkezdett számításunkhoz, az imént talált rendezők szolgálnak a Kesztej pont φ, λ és μ értékeinek levezetésére a budapesti rendszer gellérthegyi pontjára támaszkodva.

Kérdés: Hogyan fogjuk a marosvásárhelyi rendszer x tengelyét tájékozni? Azaz a mai marosvásárhelyi + **x** tengelynek *azimutját* meghatározni az új gellérthegyi adatok értelmében? Levezettünk két-két gömbi délszög értéket a *Kesztej—Varatik* és a *Kesztej—Pless* oldalak számára a *budapesti* rendszerben:

$$\delta' \text{ (Kesztej—Varatik) } \textit{(budapesti)} \begin{cases} 110° - 21' - 4''.774 \\ 110° - 21 - 5.\ 362 \end{cases}$$

$$\delta' \text{ (Kesztej—Pless) (budapesti) } \begin{cases} 86° - 15' - 21''.127 \\ 86° - 15' - 20''.672 \end{cases}$$

A *marosvásárhelyi rendszerben* pedig találtuk:

$$\delta'_{K.\,V.} = 114° - 15' - 12''.180$$
$$\delta'_{K.Pl.} = 90 - 9 - 27''.470$$

Tehát képezve a délszögkbségeket, z_K-ra ezen négy értéket nyerjük:

$$\left.\begin{array}{l} 3° - 54' - 7.406 \\ 3° - 54' - 6.343 \\ 3° - 54' - 6.818 \\ 3° - 54' - 6.798 \end{array}\right| \quad \textit{ahonnan a középérték:} \quad z_K = 3° - 54' - 6.''84_1$$

A *marosvásárhelyi* rendszerben a Kesztej pontból induló oldalak délszögei egyúttal e pontbeli *azimutok.* És így, a talált Z_K érték nem más, mint a *Kesztej pont meridián-*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

konvergenciája Gellérthegyre vonatkozólag: feltéve, hogy a keszteji tájékozás megfelel a gellérthegyinek. Ha tehát számítani fogjuk a Kesztej pontnak, budapesti x, y rendezői alapján a μ_K-t, akkor a különbség μ_K és Z_A között megadja *a marosvásárhelyi rendszer* tájékozási hibáját. Hangsúlyozzuk, hogy a Z_K-hoz, *amit az előbb találtunk, hozzá kell még adni az új gellérthegyi tájékozási állandót*, azaz a 6″.440 értéket. Tehát

$$Z_K = 3° - 54' - 13''.28_1$$

Lássuk most már mit nyerünk a Kesztej pontra meridiánkonvergencia gyanánt? A stereografikus vetületi poláris háromszögből számítjuk a μ-t.

Kesztej	— 21 5868.10	+ 47 399.50	5.334 1884.8	5.334 1884.8
			45.5	9.989 7720.0
Gellérthegy	0.00	0.00	4.675 7692.0	27.6
				2.8
				0.3
—		+	0.658 4147.3	5.344 4134.1
			3476.0	
			671.3	
			03.	

$$\alpha = 77° - 36' - 56''.68$$
$$\delta_{G.K.} = 282° - 23' - 3''32$$
$$- \quad 6''.44$$

$Azimut_{G.K.} = 282° - 22' - 56''.88$, tehát $\gamma = 102° - 22' - 56.''88$

$log\ C_{G.K.} = log\ d_{K.} = 5.344\,4134.1$

(Lásd V. fejezet utolsó cikkét és a 9. ábra.)

$$\log \operatorname{tg} \Delta = \log (\Delta) - \log \{ 1 + (\Delta) \operatorname{cotg} \gamma \}$$

$$(\Delta) = \frac{d_P . d_K . - \sin \gamma .}{4\ R^2}$$

$\log d_P.$	= 6.418 2961.8	+ 1.000 000 000
$\log d_K.$	= 5.344 4134.1	— 0.002 744 148
$\log \sin \gamma$	= 9.989 7766.0 — 10	+ 0.997 255 852 ennek logara = 9.998 8065.7 — 10
	13.8	
	0.5	
	21.752 4876.2 — 10	
— $\log 4\ R^2$	= 13.655 6005.8	
$\log (\Delta)$	= 8.096 8870.4 — 10	$\log (\Delta) = 8.096\,8870.4 - 10$
	753.0	$\log \{1 + \Delta \operatorname{cotg} \gamma\} = 9.998\,8065.7 - 10$ —
	117.4	$\log \operatorname{tg} \Delta = 8.098\,0804.7 - 10$
	13.3	
$\log (\Delta)$	= 8.096 8870.4 — 10	
$\log \operatorname{cotg} \gamma$	= 9.341 4514.0 — 10_n	
	603.0	
	80.4	$\Delta'' = 0° - 43' - 5''.13_{26}$
	8.0	
	7.438 4075.8 — 10_n	
	3999.0	
Numerus	= — 0.002744148	

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Szükségünk van még a Kesztej—Polus vetületi egyenes délszögére. Azonban nem az eredeti Kesztej pontot, hanem a 6.″44-el elforgatottat kell összeszámítani a *Polussal!*

Tehát keressük a transformált y_K és x_K-t

$$\alpha_{(transf)} = 12 - 22' - 56.''88$$
$$3.\ 12$$

$$\log_{G.\ K.} = 5.344\ 4134.1$$

	5.344 4134.1		5.344 4134.1
log sin α =	9.331 2326.0	log cos α =	9.989 7766.0
	576.0		13.8
	76.8		0.5
	7.4		0.1
log x'_K =	4.675 7120.3	log y'_K =	5.334 1914.5

Polus:		261 9969.18	5.334 1914.5
Kesztej:	— 2.150 869.55	+ 4 7392.76	6.426 0819.3
	+	— 266 7361.91	8.908 1095.2
			0910.0
			185.2

$$\delta = 4° - 37' - 36.''706.$$

Tehát a meridiánkonvergencia:

$$\mu_K = \begin{cases} 4° - 37' - 36.''7060 \\ - \quad 43 - 5.\ 1326 \end{cases}$$
$$3° - 54' - 31.''5734$$

és a gömbi hosszúság

$$\lambda_K = \begin{cases} 4° - 37' - 36.''7060 \\ + \quad - 43 - 5.\ 1326 \end{cases}$$
$$5° - 20' - 41.''8386$$

Az μ_K értékre az erdélyi rendszer adta a

$$z_K = 3° - 54' - 13.''281\text{-et}$$

Tehát *azimut különbség:* $\mu_K - z_K = +$ ***18.″292****) A 71. oldalon közölt *helyes astronomiai* tájékozást véve alapul (18.″291—16.″08) = + *2.″212*-re egyezik a geodéziai azimut a csillagászatival.

---

*) Ezzel szemben a Hofmann-féle levezetés az azimut különbségre — kiindúlva a *régi* budapesti tájékozásból és elhelyezésből:

+ **23.″872**-t nyert.

Hofmann—Fasching = + *5.″580*; ennyivel *javult* tehát a helyzet az új gellérthegyi elhelyezés által. *Hofmann* szerint, kiindúlva a régi gellérthegyi φ, λ és azimutból

$\lambda_{\text{Kesztej.}} = 5° - 20' - 42.''473$

Szerintünk az új Gellérthegyről $\lambda_{\text{Kesztej.}} = 5° - 20' - 41.''839$

Hofmann—Fasching = + 0.″634, aminek

lineáris méretben körülbelül 14 méter felel meg.

Ezt az eltérést már tüzetesen kell megvizsgálni. Ez abból leli magyarázatát, hogy Hofmann a Polus—Gellérthegy távolságot a régi Gellérthegy pozició szerint vette számításba, a miért is körülbelül *160 méterrel* kisebb a Gellérthegy—Polus oldal az ő számításában. Ennek hatása λ szögre nagyobbító.

Kérdés: Polus—Gellérthegy—Kesztej háromszögben — síkháromszögnek tekintve azt — mit okoz a λ szögben ez a *80 öles oldalhosszváltozás?*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ellenőrzésként a gömbi poláris háromszög megoldását is végezzük el, amikor a λ_K, μ_K értékeken kivül a φ_K értéket is nyerjük.

Oldal neve: *Kezdőpont:*

Gellérthegy—Kesztej. Gellérthegy $\varphi_0 = 47° - 26' - 21.''1372$ $L_0 = 36° - 42' - 53.''5733$

$\delta = 282°\ 22'\ 56.''88$ t. p. log 2 R $= 3.1721997$

$M = 102° - 22' - 56.''88$ log c $= 5.3444134.1$

$\frac{M}{2} = 51° - 11' - 28.''44$ log tg $\vartheta = 8.5166131.2$

$\vartheta = 3° - 45' - 49.''1490$ $\frac{\varphi^\circ + \vartheta}{2} = 25° - 36' - 5.''1431$

$\frac{\vartheta}{2} = 1° - 52' - 54.''5745$

$\frac{\varphi}{2} = 23° - 43' - 10.''5686$ $\frac{\varphi^\circ - \vartheta}{2} = 21° - 50' - 15.''9941$

$\log \sin (45 + \frac{\varphi^\circ + \vartheta}{2}) = 9.974\ 6180.0$

$- \log \sin (45 + \frac{\varphi^\circ - \vartheta}{2}) = 9.963\ 5020.9$

$- \log \text{tg} \frac{M}{2} = 0.094\ 5967.6$

$\log \text{tg} \frac{N + \lambda}{2} = 9.916\ 5191.5$

$\log \cos (45 + \frac{\varphi^\circ + \vartheta}{2}) = 9.521\ 3180.4$

$- \log \cos (45 + \frac{\varphi^\circ - \vartheta}{2}) = 9.594\ 7635.1$

$- \log \text{tg} \frac{M}{2} = 0.094\ 5967.6$

$\log \frac{N - \lambda}{2} = 9.8319577.7$

$\frac{N + \lambda}{2} = 39° 31' 36.''678$

$\frac{N - \lambda}{2} = 34° 10' 54.''850$

$N = 73° 42' 31.''528$

$\lambda = 5° 20' 41.''828$

$\frac{M + N}{2} = 88° 2' 44.''204$

$\frac{M - N}{2} = 14° 20' 12.''676$

$\mu_K = (180 - \mu) - N = \mathbf{3° - 54' - 31.''592}$

$\log \sin \frac{M - N}{2} = 9.393\ 7896.6$

$- \log \sin \frac{M + N}{2} = 9.999\ 7472.9$

különbözet $= 9.394\ 0423.6$

$\log \sin M = 9.989\ 7780.3$

$+ \log \sin \vartheta = 8.817\ 1744.8$

összeg $= 8.806\ 9525.1$

Gellérthegy—Polus táv. *új* $= 261\ 9969.18$

$- \quad 80.-$

régi $= 261\ 9889.18$

tehát	0.00	+ 261 9889.18
	− 215 868.10	+ 4 7399.50
	− 215 868.10	+ 266 7288.68

5.334 1884.8
6.426 0556.0
130.4
1.
8.908 1184.4

72.0
12.40 : 262 = 0.05

$4° - 37' - 37.''05$

Tehát a mai bevezetésünknek megfelel a régi budapesti rendszerben:

$\lambda = 4° - 37' - 37.''05$

$\Delta + 43' - 5.1326$

$= \mathbf{5° - 20' - 42.''18}$

Itt az előbb számított Δ van alapul véve. A régi rendszerben a Δ valamivel kisebbnek adódna.

$\frac{0.160 \times 400 \text{ klm.}}{64000 \text{ km}^2}$

itt 32 km²

10 . . . . . 0.''025

32 . . . . . **0.''07**

Volna tehát: 5° — 20′ — 42.″17 ez a Hofmann-félétől már csak 0.″30-el különbözik.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

$$\log \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = 8.516\ 6131.2$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{\varphi^\circ - \varphi_K}{2} = 7.910\ 6554.8$$
$$\frac{\varphi^\circ - \varphi_K}{2} = 0^\circ\ 27'\ 59.''0784$$
$$\frac{\varphi^\circ}{2} = 23^\circ\ 43'\ 10.''5686$$
$$\frac{\varphi_K}{2} = 23^\circ\ 15'\ 11.''4902$$
$$\varphi_K = 46^\circ\ 30'\ 22.''9804$$

$46^\circ - 30'\ 20.''0 + 2'\ 43.''4422$
$2.''9804 + 31.7$
14.3
1.3

$$\Phi_K = 46^\circ - 33' - 6.''4273\ 3$$

$$-\log \cos \varphi_K = 9.837\ 7611.8$$
$$\log \sin \lambda_K = 8.969\ 1913.3$$
$$\lambda_K = 5^\circ\ 20'\ 41.''829$$
$$\log \lambda_K = 4.284\ 2463.3$$
$$-\log \alpha = 0.000\ 3262.0$$
$$4.283\ 9201.3$$
$$L_K - L_\circ = 5^\circ\ 20'\ 27.''382$$
$$L_\circ = 36^\circ\ 42'\ 53.''573$$
$$L_K = 42^\circ - 3' - 20.''955$$

Kesztej. *Eredmény:*

$\Phi_K = 46^\circ - 33' - 6.''4273.3$
$L_K = 42^\circ - 3' - 20.''955.$
$\mu_K = 3^\circ\ 54'\ 31.''592.$

IV. FEJEZET.

Magyarország vetületi rendszereinek részletes ismertetése.

I. §. A vetületi rendszerek „bevezetésének" művelete adott esetben.

Mindig kettős konform vetületről van szó. Mindenekelőtt megállapodunk a forgási ellipszoid méreteiben (Bessel, Clark, Hayford-féle ellipszoidok) és megállapítva az illető ország földrajzi középszélességét

$$\varphi_\circ = \frac{\varphi_{max.} + \varphi_{min.}}{2},$$

kiszámítjuk a 76. lapon adott képlettel a legmegfelelőbb vetületi gömbnek sugarát:

$$R_{\varphi_\circ} = \sqrt{R_\circ^{(max.)} \cdot R_\circ^{(min.)}}.$$

Ezen $\varphi_\circ$ és $R_{\varphi_\circ}$ értékeket helyettesítvén a Gauss-féle konform vetületnek még Gauss által levezetett különböző *képleteibe*: nyerjük ezen képletek (sorok) számszerű együtthatható értékeit az adott esetre.

Ilymódon azután az egyes gyakoribb műveletek kényelmes számításához ezen *számszerű* vetületi képletek alapján φ és λ kerek értékeihez (1°-ról 1°-ra; vagy 1′-ről 1′-re; vagy 10″-ről 10″-re haladva) *számtáblázatokat* készíthetünk, amelyek segélyével azután bármikor bármely pontra nézve a szferoidikus összrendezőkből a megfelelő gömbi összrendezőket, továbbá bármely pontban a lineármodulus értékét, vagy bármely oldalra nézve a gömbi hossz- és irányredukció értékét lehet elemi módon (interpolálással) élesen kiszámítani.

A síkvetületi rendszer *választott kezdőpontjának szferoidikus összrendezőit* és egy a kezdőpontból induló oldalnak szferoidikus azimutját kell most megállapítani.

Ez vagy a kezdőpontban végzett astronomiai mérésekkel közvetlenül, vagy egy másik *háromszögelési* pontban végzett astronomiai mérésekre támaszkodó számítással (I. kötet 129. lapon) történik. Ennek megtörténte után első dolgunk a szferoidikus (csilla-

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

gászati) szélességnek és szferoidikus (csillagászati) azimutnak megfelelő *gömbi* értékeket a már elkészített Gauss-vetületi számtáblázatokkal kiszámítani. (A gömbi földrajzi hosszúságot nem kell számítani, mert L_0-nak a $\lambda_0 = 0$ felel meg megállapodás szerint.)

Ezzel a művelettel most már a Gauss-gömb el van helyezve és a Gauss-gömbi vetület be van vezetve!

A síkvetületi rendszer bevezetése most már miből áll?

Az illető (kiválasztott) vetületi törvény adott általános vetületi egyenleteibe helyettesítjük (*minden* képletben) a már ismeretes *Gauss*-gömbi sugarat és a síkvetületi koordináta kezdőpontnak *imént kiszámított* gömbi földrajzi szélességét. Szerepelhet itt még a π érték, a ϱ'' (absolut szögegység) és az U (logaritmikus modulus) értéke is: ezek ismeretes értékek. E helyettesítéseket elvégezvén, nyerjük az összes *vetületi egyenletek együtthatóinak számszerű értékeit.*

Most e számszerű képletek (sorok) alapján az *irány-* és *hosszredukció* számítását szerfelett megkönnyítő interpolatorikus számtáblázatokat készíthetünk az illető argumentumok (x_A vagy y_A vagy $x_B - x_A$, esetleg $y_B - y_A$) kerek és egyenletesen haladó értékeihez.

Az irány- és hosszredukció számtáblázatok akkor is érvényesek, ha több vetületi síkot vezetünk be: ugyanis az irány- és hosszredukció képletek együtthatóinak számításánál az illető vetületi kezdőpont gömbi összrendezői *nem szerepelnek:* csak a gömbsugár szerepel, amely feltevésünk szerint közös az illető ország összes vetületeiben.

Most már a bázisfejlesztő hálózat szferoidikus kiszámítása által bevezetve a kezdőpontból induló astronomiai kezdő oldal hosszát: ezen oldal hossz- és irányredukció számítással és sorban az I. rendű hálózat összes oldalai csakis irányredukció számítással redukálhatók a síkra. Ha az I. rendű hálózat a szferoidon nem lett még kiegyenlítve, ily redukált állapotban a vetületi síkon koordináták szerint kiegyenlíthető, aminek végeredménye az I. rendű pontok vetületi derékszögű sík összrendezői. A II., III. és IV. rendű mérések síkra redukálása azután az előadott módokon történik. A következő §-okban most már a magyar vetületek bevezetésére vonatkozó alapadatokat és a vetületek összes számszerű képleteit ismertetjük.

2. §. A magyar vetületi rendszerek általános ismertetése.

Ezidőszerint még meg kell különböztetnünk *Erdélyt,* a szorosabb értelemben vett *Magyarországtól.*

A szorosabb értelemben vett Magyarországban végzett országos felmérési munkálatok, az 1863. évig különböző — *Cassini*-féle — vetületi rendszerekre vonatkozólag számíttattak. 1863-tól 1908-ig a szorosabb értelemben vett magyarországi háromszögelések a *stereográfikus (konform azimutális síkvetület)* vetületre vonatkoztattak: térkép központ és egyszersmind koordináta kezdőpont a *Gellérthegy* nevü háromszögelési pont Budapest határában. Ezen vetületi rendszert röviden *„Budapesti rendszernek"* nevezzük: ez — Erdélyt kivéve — az egész országra nézve mint a *kiegyenlítés* és egyszersmind mint az *alsó geodéziai felmérések* vetülete szerepelt.

Erdélyben 1880 óta szintén egyetlen stereográfikus vetületre vonatkozólag számíttattak az összes háromszögelések: térképközpont, és egyuttal koordináta kezdőpont a *Marosvásárhely* környékén fekvő *„Kesztejhegy"* elsőrendű pont. Erdélyre nézve ez a *„Marosvásárhelyi rendszernek"* nevezett vetületi rendszer volt a kiegyenlítések és az alsó geodéziai felmérések vetülete.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Az *1907.* évig meghatározott összes erdélyi háromszögelési pontok *derékszögű sík összrendezői a „Marosvásárhelyi rendszerre“*, az összes magyarországi pontok derékszögű sík összrendezői pedig a *„Budapesti rendszerre“* vonatkoztak.

Tekintettel arra, hogy a *„Budapesti rendszer“*-ben $\frac{1}{1000}$-nyi hossznagyítások is fordulnak elő: *ez a rendszer mint a részletes felmérések vetületi rendszere, korunk igényeire való tekintettel tovább nem volt megtartható.*

Elhatároztatott tehát új, *megfelelő* vetületi rendszer bevezetése. (Három konform hengervetület.) Ezen fontos — és a messze jövőre is kiható munkánál azon elveket tartottuk szem előtt, amelyek ezen kötet II. fejezetében ki vannak fejtve.

Két körülményre azonban külön kell itt kitérnünk.

1. Mivel az erdélyrészi főhálózat *önmagában, mint önálló egész*, függetlenül a magyarországi főhálózattól egyenlíttetett ki annak idején: azért az erdélyi hálózat a magyarországival *szoros, szerves, egyértelmű* összefüggésbe csak úgy hozható, ha az egész erdélyi hálózatot új kiegyenlítésnek vetnők alá, szigorúan szem előtt tartva a magyarországi főhálózattal közös oldalak adta *kényszereket.* — Minthogy ezen kiegyenlítés elvégzése ezideig munkaerő hiányában lehetetlen volt, azért az új vetületi rendszerek megállapításánál *Erdélyt mint különálló részt kellett figyelembe venni.* — Szóval Erdélyre *ideiglenesen* megtartottuk a régi vetületi rendszert, de az új vetületi rendszerek választásakor fősúlyt helyeztünk arra, hogy *ezt az országrészt is lehessen beolvasztani az új magyar vetületekbe, anélkül, hogy ezáltal azok száma megnövekedne.*

2. Az eredeti terv az volt, hogy az I. rendű hálózatok kiegyenlítési vetülete gyanánt szerepeljen az egyik új alsó geodéziai vetület *az egész ország terjedelmére* nézve. Ezen eljárás azt az előnyt nyújtotta volna, hogy mindazon I. és II. rendű pontok, melyek a kiegyenlítési vetületnek azon részében (sávjában) feküsznek, amely sávra nézve ez a vetület egyuttal az alsó geodéziai felmérések vetülete, nem lettek volna *kétszer* átszámítandók, mert ezen pontoknak a kiegyenlítés adta derékszögű sík összrendezői egyuttal alsó geodéziai összrendezőkként szerepelhettek volna *az illető sávra nézve.*

Minthogy azonban összes eddigi I. és II. rendű pontjaink már a stereográfikus vetületre vonatkoztatva *meg vannak határozva*, másrészt sikerült e sorok írójának oly képleteket levezetni a stereográfikus vetület *szabatos délszög-* és *hosszredukció* számítására, amely képletek a hozzájuk számított számtáblázatokkal együttesen igen *éles* és *kényelmes* redukció számítást engednek meg: azért a szorosabb értelemben vett Magyarország egész terjedelmére az I. rendű hálózatra nézve, annak teljes befejezéseig *kiegyenlítési vetületül* a *„Budapesti rendszert“* tartottuk meg.

I. A budapesti rendszer.

Kezdőpont a *„Gellérthegy“* nevű háromszögelési pont. E ponton átmenő és 1863. évben meghatározott szferoidikus meridián egyenes vonalú síkvetülete az x tengely.

Az 1907. évben levezettük a *„Széchenyi-hegy“* nevű astronomiai pontból (V. U. X. Fejezet) a *„Gellérthegy“* pontnak földrajzi helyhatározóit:

$$\Phi_0 = 47^\circ\ 29'\ 9.''6380 = \text{szferoidikus szélesség.}$$

$$L_0 = 36^\circ\ 42'\ 53.''5733\ \text{(Ferrótól)} = \text{szferoid. hosszúság.}$$

A vetítés az ellipszoidról a Gauss-gömbre a *„Gauss-féle konform gömbi vetület“* törvényei szerint történik. Eszerint a *„Gellérthegy“* pont gömbi földrajzi összrendezői:

$$\varphi_0 = 47^\circ\ 26'\ 21.''1372 = \text{gömbi szélesség}$$

$$\lambda_0 = 0^\circ\ 0'\ 0.''0000.$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A gömbi hosszúságra nézve tehát a „*Gellérthegy*“ meridián a kezdő meridián: ettől nyugatra negativ, keletre positiv a λ-ák előjele.

A csillagászati „*Széchenyi-hegy*“—„*Gellérthegy*“ azimutból 1907. évben levezettük (V. U. X. Fejezet) a budapesti rendszer $+x$ tengelyének azimutját. Ezen levezetés szerint a $+x$ tengely iránya nem azonos a meridián irányával: a $+x$ tengely a valódi déli iránynyal $-6.''44$ szöget zár be.

Ennélfogva a budapesti síkvetületi rendszerről a gömbre térvén át, (tehát posició számítások előtt, vagy az új hengervetületi rendszerekre való átszámítás előtt) minden a budapesti rendszerben megadott centrális délszögből **6.''44-et le kell vonni.**

A budapesti rendszer a gömbnek *stereográfikus* (konform azimutális) képét adja. Erdélyt kivéve e vetületen egyenlítik ki az I. rendű hálózatokat. A II. és III. rendűek azonban már csakis az illető új hengervetületre redukáltatnak.

II. A marosvásárhelyi rendszer.

Kezdőpont a „*Kesztej*“ nevű háromszögelési pont, Maros-Vásárhely közelében. Ennek szferoidikus összrendezői:

$$\Phi_0 = 46^\circ\ 33'\ 8.''85$$
$$L_0 = 42^\circ\ 3'\ 20.''9550 \text{ (Ferrótól).}$$

Az itt közölt Φ_0 értéket a cs. és kir. katonai földrajzi intézet határozta meg csillagászati úton (1909. évi kiadványban); az L_0 értéket e könyv szerzője vezette le szferoidikus úton a „Széchenyi-hegy“ astronomiai pontból.

A vetítés az ellipszoidról a Gauss-gömbre a „*Gauss-féle konform gömbi vetület*“ törvényei szerint történik. Eszerint a „*Kesztej*“-pont gömbi földrajzi helyhatározói.

$$\varphi_0 = \quad 46^\circ\ 30'\ 25.''408$$
$$\lambda_0 = +\ 5^\circ\ 20'\ 41.''829 \text{ (Gellérthegytől).}$$

A marosvásárhelyi rendszer tájékozásakor 1891-ben a csillagászati úton megmért **Kesztej Tiglamorutin** azimutból indúltak ki. Ezen oldal azimutjára a cs. és kir. katonai földrajzi intézet 1891-ben $-16.''08$-re hibásan számított értéket közölt a magyar háromszögelő hivatallal: mivel ez a hibás érték tekintetett a „*Kesztej—Tiglamorutin* oldal vetületi délszögének, azért a marosvásárhelyi rendszer $+x$ iránya nem azonos a valódi helyi déli iránnyal, hanem azzal a $+16.''08$ szöget zárja be.*)

Ennélfogva a marosvásárhelyi síkvetületi rendszerből a gömbre térvén át (pozició, meridiánkonvergencia számítás) minden a marosvásárhelyi rendszerben megadott centrális délszöghöz ***16.''08***-et hozzá kell adni, hogy az az illető centrális oldal Kesztej pontbeli azimutjával legyen egyenlő.

A marosvásárhelyi rendszer a gömbnek stereográfikus (konform azimutális) képét adja. Az erdélyi I., II., III. és IV. rendű hálózat e vetületben számíttatik ki.

III. Az Északi Hengervetület. (É. R.)

Mindazon háromszögelési pontokra nézve, melyeknek földrajzi szélessége — a katonai 1:75000 méretarányú térkép szerint — nagyobb mint

$$47^\circ - 55' - 0.''000$$

*) A „*Kesztej—Tiglamorutin*“ csillagászati azimutját a cs. és kir. katonai földrajzi intézet a mérési eredmények előzetes számítása alapján 1891-ben *146° 57' 22.''76* értékkel, a végleges számítás alapján pedig 1909. évben 146° 57' 38.''84 értékkel közölte.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

ez a vetületi rendszer szolgál a részletes felmérések vetületéül és egyuttal a II. és III. rendű pontokra nézve kiegyenlítési vetületül.

Alapfelület itt is a Gauss-gömb; kezdőmeridián a „*Széchenyi-hegy*“ astronomiai pontból levezetett új „Gellérthegy“-i meridián.

A koordináta rendszer kezdőpontja e meridiánon fekszik; gömbi rendezőit

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0 &= 48^\circ\ 40'\ 2.''0000\\ \lambda_0 &= 0^\circ\ 0'\ 0.''0000\end{aligned}\right\}$$ értékűeknek választottuk.

Ezen *É. R.* kezdőpontnak földrajzi szferoidikus rendezői a Gauss-vetületi egyenletekből kiszámítva:

$$\Phi_0 = 48^\circ\ 42'\ 56.''3179_6$$
$$L_0 = 36^\circ\ 42'\ 53.''5733_0 \text{ (Ferrótól).}$$

A positiv x tengely azonos a kezdőpont déli meridián irányával. A vetítés a Bessel ellipszoidról a Gauss-gömbre a Gauss-féle konform gömbi vetület szerint; a gömbről a síkra (kisíkított henger) pedig a „*ferdetengelyű konform hengervetület*“ törvényei szerint eszközöltetik.

A henger a Gauss-gömböt a koordináta kezdőpontban, a kezdő meridiánra merőleges legnagyobb gömbi kör mentén érinti: ezen *érintési* kör egyenes vonalú vetülete képezi az **y** tengelyt.

Az egyenes körhenger tengelye a Gauss-gömb ekvátor síkjához, tehát (90° — 48° 40′ 2.″0000) szög alatt hajlik: innen a „*ferde tengelyű*“ elnevezés.

„Gellérthegy“ pontnak összrendezői az É. R. rendszerben:

$$y_{Gel.} = 0.0000$$
$$x_{Gel.} = +\ 72091.7299 \text{ öl.}$$

Az északi rendszerrel szomszédos középső rendszer kezdőpontjának (K. R.) összrendezői az északi rendszerben:

$$y_{(K.\ R.)} = 0.0000$$
$$x_{(K.\ R.)} = +\ 92009.443 \text{ öl.}$$

A „*Gellérthegy*“ és a „*K. R.*“ pontnak itt közölt összrendezői értékeire a vetületi átszámítások alkalmával van szükségünk.

IV. A Középső Hengervetület. (K. R.)

Mindazon háromszögelési pontokra nézve, melyek a katonai 1:75000 térképen feltüntetett

$$46^\circ\ 22'\ 0.''0 \text{ és } 47^\circ\ 55'\ 0.''0$$

parallel körök között feküsznek, ez a *K. R.* vetületi rendszer szolgál a részletes felmérések vetületéül és egyuttal a II. és III. rendű pontokra nézve kiegyenlítési vetületül.

Alapfelület itt is a Gauss-gömb; kezdőmeridián itt is az új „Gellérthegy“-i meridián. E meridiánon vettük fel a *K. R.* kezdőpontot úgy, hogy a

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0 &= 47^\circ\ 6'\ 0.''0000\\ \lambda_0 &= 0^\circ\ 0'\ 0.''0000\end{aligned}\right\}$$ gömbi összrendezőket adtuk neki.

A *K. R.* pont szferoidikus összrendezői eszerint:

$$\Phi_0 = 47^\circ\ 8'\ 46.''7266_6$$
$$L_0 = 36^\circ\ 42'\ 53.''5733_0 \text{ (Ferrótól).}$$

Egyebekben az északi rendszernél mondottak szószerint ide is vonatkoztatandók.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A középső rendszerrel szomszédos két hengervetületi rendszer kezdőpontjainak összrendezői a középső rendszerben:

$$y_{(É.\ R.)} = 0.000 \qquad y_{(D.\ R.)} = 0.000$$
$$x_{(É.\ R.)} = -\ 92009.443 \qquad x_{(D.\ R.)} = +\ 91993.131$$

A „*Gellérthegy*“ pont összrendezői ezen vetületi síkon:

$$y_{Gel.} = 0.000$$
$$x_{Gel.} = -\ 19911.875 \text{ öl.}$$

A „*Gellérthegy*“, valamint az *É. R.* és *D. R.* pontoknak itt közölt összrendezői értékeire vetületi átszámításoknál van szükségünk.

V. A Déli Hengervetület. (D. R.)

Mindazon háromszögelési pontokra nézve, amelyek a katonai 1 : 75000 méretarányú térképen feltalálható

$$46^\circ\ 22'\ 0.''0$$

parallel körtől délre léteznek, ezen *D. R.* vetületi rendszer szolgál a részletes felmérések vetületéül, és egyuttal a II. és III. rendű háromszögelési pontokra nézve kiegyenlítési vetületül.

Alapfelület itt is a Gauss-gömb; kezdőmeridián itt is az új „*Gellérthegy*“-i meridián. Ezen választottuk a D. R. kezdőpontot; gömbi összrendezői

$$\varphi_0 = 45^\circ\ 31'\ 59.''0000$$
$$\lambda_0 = 0^\circ\ 0'\ 0.''0000.$$

Ezen *D. R.* pontnak földrajzi összrendezői a Bessel ellipszoidon:

$$\Phi_0 = 45^\circ\ 34'\ 36.''5869_0$$
$$L_0 = 36^\circ\ 42'\ 53.''5733_0 \text{ (Ferrótól).}$$

Egyebekben az északi rendszernél elmondottak ide is vonatkoztatandók.

A „*Gellérthegy*“ pont összrendezői a déli rendszerben:

$$y_{Gel.} = 0.0000$$
$$x_{Gel.} = -\ 111\,914.068 \text{ öl.}$$

A déli rendszerrel szomszédos középső rendszer koordináta kezdőpontjának összrendezői a déli rendszerben:

$$y_{(K.\ R.)} = 0.0000$$
$$x_{(K.\ R.)} = -\ 91\,993.131 \text{ öl.}$$

A „*Gellérthegy*“, valamint a *K. R.* pontnak itt közölt déli vetületi összrendezőire, pontoknak egyik vetületi rendszerből a másikba való átszámításakor lesz szükségünk.

Megjegyzés. A három új magyar hengervetület, amellett, hogy a felsőrendű (I., II., III.) hálózatok redukció számítása az elképzelhető legegyszerűbb módon eszközölhető, azon fontos sajátsággal bírnak, hogy

1. a *lineármodulusnak* az egységtől való eltérése (hossznagyítás) egyik rendszerben sem lépi túl az 1/10 000 értéket;

2. a *területi modulusnak* az egységtől való eltérése (területnagyítás) egyik rendszerben sem lépi túl az 1/5000 értéket;

3. nem képzelhető egyetlen rendszerben oly 5 kilometer hosszúságú háromszögoldal, amelynek vetületi irányredukciója

$\pm$ *1.''3*-nél nagyobb volna.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ezen fontos adatokból kiindúlva alapvető következtetéseket vonhatunk a gyakorlatra nézve:

a) A háromszögelő hivatal a IV. rendű hálózatokat *irányredukció számítás nélkül* tekintheti a hengervetületen mérteknek.

b) Akár állami, akár városi, akár magáncélból végzendő szabatos vízszintes felmérések mindenkor *közvetlenül* a hengervetületi derékszögű sík összrendezőkre támaszkodva végezhetők el az ország bármely részében.

3. §. A konform gömbi vetület.

Úgy a két magyar stereográfikus-, mint a három magyar hengervetületi rendszernek egy és ugyanazon Gauss-gömbi vetületnek képét állítja elő közvetlenül a síkon.

Ezen vetület neve szabatosan kifejezve: „*Gauss-féle minimális hossztorzulású konform gömbi vetület*".

Gauss ezen vetítési módot az „*Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie*" című nagy művében ismerteti, megadva nemcsak a pontok szferoidikus rendezőinek megfelelő gömbi földrajzi összrendezőinek számítására, hanem a geodéziai vonalak (háromszögoldalak) *irány-* és *hossz*redukcióinak számításához szükséges egyenletrendszereket is: gyakorlati numerikus számításokra igen alkalmas hatványsorok alakjában.

Gauss ezen konform gömbi vetületnek egyenletrendszereit a következő *három* rendbeli követelménynek matematikai alakban való kifejezése által vezette le:

1. A vetület legyen *szögtartó*, azaz a gömb bármely pontjában az *iránymodulus* legyen egyenlő az egységgel.

2. A forgási ellipszoid parallel köreinek (Φ_1, Φ_2, Φ_3 . . .) ugyancsak *egymással párhuzamos* gömbi körök feleljenek meg a gömbvetületen mint képek (φ_1, φ_2, φ_3 . . .).

3. A *lineármodulus* (l) a gömbvetület bármely pontjában az *egységtől* legfeljebb egy *harmadrendű kicsiny mennyiségben* különbözzék, elsőrendű nagyságú mennyiségnek tekintve az illető pont távolságát a tetszőlegesen — *de egyszer és mindenkorra választandó* φ_n gömbi **normál paralleltől.***)

Ezen három itt elmondott feltétel kielégítése azt eredményezi, hogy

a) nemcsak parallelkörnek képe parallelkör, hanem a *meridián ellipszisek* direkt képei *meridiánkörök*, melyek egymást a parallelkörök két polusában metszik;

b) a normál parallelkörön nincs *semminemű* torzulás, azaz ha

$$\varphi = \varphi_n, \text{ akkor } l = 1,$$

az iránymodulus pedig *minden* pontra, tehát ezekre is:

$$i = 1;$$

c) hogy normál szélességül tehát célszerű és *észszerű* az illető ország *közép-szélességét* választani, mert igy jutunk a legkisebb értékű maximális lineármodulus értékre az ország szélein.

A magyar Gauss-gömb normál parallel körének *gömbi szélessége* 1857-ben **Horsky** által

$$\varphi_n = 46° — 30' — 0'',0000$$

kerek értéknek választatott. Ez a

$$\Phi_n = 46° — 32' — 43''41041$$

földrajzi szélességgel biró *szferoidikus parallel*-körnek képe.

---

*) A távolságot itt a gömbsugárra mint egységre kell kifejezve képzelni: ha tehát s a távolság φ_0-tól, úgy $\left(\frac{s}{R}\right)$ elsőrendű, $\left(\frac{s}{R}\right)^2$ másodrendű és $\left(\frac{s}{R}\right)^3$ harmadrendű mennyiségek.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Eren 46^0—30′·—0″,0000 normál gömbi szélesség mellett a szélső értékű lineár modulus hazánk északi határán lép fel és ott a

$$0{,}000000014\ (-)$$

logaritmikus maximális értéket éri el, ami körülbelül

$$\frac{1}{4\ millió} = 0.00000025$$

hosszváltozásnak felel meg.

A III. Fej. 3. §. 5. cikkben megállapítottak értelmében tehát hazánkban a harmadrendű hálózatoknál, illetve már minden 20 km.-nél kisebb oldalnál, gömbi hosszredukció számításnak helye nincs. — De már I. és II.-rendű hálózatainkban, ha oly oldalokról van szó, amelyek

$$\begin{cases} 45^\circ \text{ szélességen alúl, vagy} \\ 48^\circ \text{ szélességen felül feküsznek,} \end{cases}$$

gömbi oldalhosszredukció igenis már számitandó ha egy hosszt a forgási ellipszoidról a gömbre vagy a gömbről az ellipszoidra akarunk átszámitani. — A 45° és 48° parallelek közti sávon belül (krb. 350 km széles sávról van szó) gömbi hosszredukció számításnak még I. rendű oldalak esetében sincs soha helye. Ezen minimális torzulású sávba esik tehát az egész K. R. rendszer és a D. R. rendszer északi fele teljesen: ezen sávba esik az egész „Marosvásárhelyi Rendszer" is.

Az ezen §. elején előadott három rendbeli követelmény közül a *két elsőnek végtelen sok numerikus egyenlet* — melyek amellett még tetszőleges sugarú gömbre vonatkoztathatók — tesz eleget.

Gauss ezen végtelen sok megoldást a

$$1. \quad \begin{cases} \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = k_1 \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\Phi}{2}\right)^{k_2} \left(\frac{1-e \sin \Phi}{1+e \sin \Phi}\right)^{\frac{1}{2} k_2 e} \\ \lambda = k_2 (L - L_0) \end{cases}$$

vetületi egyenletekkel fejezte ki, ahol

$$k_1, \text{ és } k_2$$

két — később meghatározandó állandó.

A k_1 és k_2 állandók, úgyszintén a gömb sugarának R-nek értékeit az előadott *harmadik feltétel* szabja meg, amennyiben a 2. és 3. alatt itt felírt *három egyenletet* eredményezi:

$$2. \quad l = \frac{k_2 R \cos \varphi \sqrt{1-e^2 \sin^2 \Phi}}{a \cos \Phi}$$

amely képletben l a lineármodulus értékét, **a** és **e** pedig a Bessel ellipszoid állandóit jelentik;

$$3. \quad \begin{cases} k_2 \sin \varphi_n = \sin \Phi_n \\ k_2 \cos \varphi_n = \cos \Phi_n \sqrt{\frac{1-e^2 \sin^2 \Phi_n}{1-e^2}} \end{cases}$$

amely egyenletrendszer, ha a gömbi *normál szélességet* φ_n*-et megválasztottuk,* megadja a k_2 és a Φ_n állandók értékeit. — A $\mathbf{k_1}$ értékét most 1.-be való helyettesítéssel nyerjük.

Az R a 2. alatti képletből adódik, ha φ helyébe φ_n-t, Φ helyébe ugyanakkor az imént talált Φ_n-et, és l helyébe (minthogy a normál-parallelen vagyunk) 1-et irunk.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Eszerint

$$4. \ldots\ldots\ldots\ldots R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 \Phi_n}$$

azaz, a legcélszerűbb gömbi sugár véletlenül *azonos a szferoid normálszélességének megfelelő „középgörbületi sugárral"*, amint azt már e kötet III. Fejezetének 3. §-ában közöltük.

Ilymódon számíttatott *Horsky* és *Marek* által a szabadon választott $\varphi_n = 46° - 30'$-hez a k_1, k_2 és R értékrendszer, és a *következő* alapvető értékeket szolgáltatta:

$$\begin{cases} \log R = 6{,}52677029, \text{ bécsi ölekben} \\ \log k_1 = 0.0013079.19 \\ \log k_2 = 0.00032624 \end{cases}$$

Ezen értéket az 1.--4 alatt közölt egyenletek, illetve azoknak már Gauss által levezetett hatványsoraiból számította 1857. évben *Horsky*.

A lineár modulus.

Figyelemre méltó, hogy a lineár modulus *l*, a felirt egyenlete (2. képlet) értelmében tisztán a *földrajzi szélességnek* (φ-nek, illetve Φ-nek) függvénye.

Tehát az *l* értéke bármely pontra nézve, *egy argumentumos számtáblázatból* vehető ki, ami a gyakorlat szempontjából rendkívül előnye a Gauss vetületnek.

A *„V. U. könyvben* az 5. számú táblázatból, a *log l* érték *kilenc jegyre* élesen vehető ki akár a φ gömbi, akár a Φ szferoidikus szélességhez, egyszerű interpolálással. E táblázat megtekintése mutatja, hogy bármely pontban a lineár modulus logaritmusának

$$\pm\ 0{,}00000001$$

re éles értékét megkapjuk, ha $\pm$ *1* percre hibásan vesszük is figyelembe az illető pontnak φ, illetve Φ értékét.

A legélesebb lineármodulus számításhoz pedig elég a φ, illetve a Φ-t $\pm$ 10''-re élesen ismerni.

Nyolc jegyre éles számítás esetében az *1:75000* méretarányú katonai térkép (Speciálkarte) is megfelel a Φ argumentum keresésére.

Az oldalhosszredukció.

Az imént említett *log l* táblázat figyelmes megtekintése mutatja, hogy a leghosszabb ***másodrendű*** *háromszögoldal hosszredukcióját* számítási élességünknek (III. Fej. 3. §. 5. cikk.) teljesen megfelelőleg élesen nyerjük, ha az illető *A' B'* oldalnak akár **A'** pontbeli, akár **B'** pontbeli lineár modulusát *tekintem az illető oldal hosszredukciójának:*

$$5. \ldots\ldots\ldots \sigma^{(g)}_{A',B} = log\ l_{A'} \text{ vagy } = log\ l_{B'}.$$

Egy *40 km* hosszú, és az *ország szélén* levő háromszögoldal hosszredukciója — a *legkedvezőtlenebb fekvés* mellett — ilymódon

$$\pm\ 0{,}00000003$$

logaritmikus egységre élesen számítható, — ami a III. Fej. 3. §. 5. cikk szerinti feltételeknek teljesen megfelel.

Bármely, *200 km hosszú* A' B' oldal hosszredukciója a Gauss-féle levezetések szerint

$$\pm\ 0{,}000000004$$

egységre élesen számítható ezen egyszerű képlettel:

$$6. \ldots\ldots\ldots \sigma^{(g)}_{A',B} = \tfrac{1}{2}(log\ l_{A'} + log\ l_{B'})$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Bármely *1000 km* hosszú oldalnak hosszredukcióját pedig Gauss levezetései szerint

0,000000002-re

élesen számíthatjuk ugyanazon (6.) képlettel, ha $\overline{l}$ alatt, az

A′ B′ gömbi legnagyobb körív középpontjában fellépő lineár modulus értéket értjük.

Az oldalhosszredukciók tehát minden esetre a „V. U.“-ban közölt lineár modulus táblázat segítségével, 10″-re kikerekített φ vagy Φ argumentumokkal számíthatók.

Az azimutredukció.

Nemcsak az oldalhosszredukció, hanem az *irányredukció is rendkivül egyszerűen számítható.*

Szem előtt tartva a III. Fej. 3. §. 5. cikkbeli élességi határokat, a következő eredményekre jutunk a különböző rendű oldalak irányredukció számítására nézve, ha a Gauss-féle 7. alatti képletet vizsgáljuk:

Magyarország esetében egy *40* km hosszú háromszögoldalnak szélső esetben

$$\pm\ 0,''006$$

irányredukció érték felel meg; azért bármely 40 km.-nél rövidebb oldal esetében irányredukciónak egyáltalában helye nincsen.

40 km.-en alul: { *tehát a térszínén mért vizszintes szögek (irányok) minden redukció nélkül valódi gömbi szögeknek tekinthetők; és ugyancsak minden gömbi azimut szferoidikus azimutnak mondandó.*

Egy **120** km hosszú oldalnak 7. szerint Magyarország esetében szélső értékül

$$\pm\ 0,''034$$

felel meg mint irányredukció;

egy **50** km hosszú oldalnak pedig szélső esetben

$\pm\ 0,''008$ *az irányredukciója.*

Eddig a magyar háromszögelési hivatal az elsőrendű oldalaknál sem számított irányredukciót. A szélső értékű elhanyagolás volt tehát: $\pm$ 0,″008, amely értéknek 50 km-es oldal esetében $\pm$ *2 mm* pozició ingadozásnak felel meg, ami épen kielégíti a hivatalos élességi feltételeket.

Ezen oknál fogva a hivatal a jövőben sem fogja elsőrendű vízszintes szögméréseit redukálni a gömbre: a térszínén mért irányértékek gömbi irányértékeknek tekinthetők.

Nagy távolságoknál azonban figyelembe vesszük az azimutredukciót, melyet ezen képlettel számítunk:

$$7.\ \ldots \begin{cases} \Delta'_{A,B} = -\frac{1}{3}\frac{\widehat{A'B'}}{R}\left\{2\,K_A \sin \alpha'_{A,B} - K_B \sin \alpha'_{B,A}\right\} \\ \Delta'_{B,A} = -\frac{1}{3}\frac{\widehat{A'B'}}{R}\left\{2\,K_B \sin \alpha'_{B,A} - K_A \sin \alpha'_{A,B}\right\} \end{cases}$$

K_A és K_B értékek *(másodpercekben kifejezve)* a „*V. U.*“ 5. számú táblázatából a K rovatból vehetők ki, a közelítő

φ_A, és φ_B, illetve Φ_A, Φ_B argumentumokhoz.

A *7. képletben* az A′ B′ *oldalhossz, közelítő értéke* akár a gömbi akár a szferoidikus oldalhossznak. Ugyanez a megjegyzés áll az α azimutokra is. Az egész 7. szerinti irányredukció számítás *5 jegyű logaritmussal végezhető.*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A 7. képletben oly előjellel adódik $\Delta'_{A,B}$, hogy az

$$\omega'_{A,B} + \Delta'_{A,B} = \omega''_{A,B}$$

képletbe való helyettesítéssel nyerjük a *gömbi azimutból* a *szferoidikus azimutot,* illetve irányszöget.

A K_A és K_B értékeknek a „*V. U.*“ 5. számú táblázatából való kereséséhez elégséges $\pm$ *100″-re* bizonytalan φ, illetve Φ értékeket használni még *300 km* hosszú oldal esetében is. Az itt szereplő Φ értékek tehát *katonai topografiai térképből* vehetők ki megfelelő pontossággal.

Pontok átszámítása.

A gömbi földrajzi rendezőkből a szferoidikus földrajzi rendezők vagy viszont: az 1. alatti vetületi egyenletrendszerrel számíthatók. A λ-t tényleg így számíthatjuk: $\lambda = k_2 (L - L_0)$.

A földrajzi szélességre nézve azonban az átszámítás egyszerű lineáris interpolálásra redukálódik, hogyha a „V. U.“ könyvnek *5. alatti számtáblázatát használjuk.*

Az 5. alatti táblát Horsky—Marek—Hofmann számították még a múlt század 60-as éveiben: 10″-ről 10″-re készen adja a táblázat φ-hez a Φ értéket.

A táblázat oly egyszerű, hogy e helyt fölösleges azok alkalmazását részletesebben elmagyarázni; csak egy számpéldát mutatunk be. Adva a $\varphi_A = 50° 11' 1.''500$: keressük a Φ-t.

$$\begin{aligned} 50° 11' 0\text{-hoz} \ldots \Phi - \varphi = & \quad 3' 0.''19646 \\ \textit{diff.}\ 1{\cdot}5 \times 946 = & \quad 142 \\ & \overline{3' 0.''19788} \end{aligned}$$

eszerint

$$\Phi_A = 50° 14' 1.''69788$$

Összevetve a Gauss-féle vetületről elmondottakat, már látjuk, hogy ezen vetületnek a sík és szferoid közé iktatása, gyakorlatilag nagy előnyöket nyújt a közvetlen vetítéssel szemben. Ez az állítás akkor lesz teljesen igazolt, ha látni fogjuk, mily egyszerű vonatkozások állapíthatók meg a *gömb* és *sík* között, szemben a szferoid és sik közötti közvetlen, de komplikált vonatkozásokkal.

4. §. A stereográfikus vetületi törvények.

(*Budapesti* rendszer és *Marosvásárhelyi* rendszer vetítési törvényei.)

Ezen vetület a gömbnek perspektiv vetítéssel előállított képét adja. Képsík a koordináta rendszer kezdőpontnak (K) gömbi érintő síkja; vetítési centrum ezen pont diameterének másik végpontja: **Sz.** (34. ábra).

A vetület törvénye — ha poláris koordinátákat vezetünk be — puszta geometriai szemlélet alapján vezethető le. A 34. ábrából tüstént látható, hogy az A' pont vetítésekor a *gömbi* és *síkvetületi* poláris koordináták között a következő egyszerű egyenletrendszer írható fel:

$$1. \ldots \ldots \ldots \begin{cases} d_A = 2\,R\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\vartheta_A}{2}. \\ \delta_A = \delta'_A; \end{cases}$$

eszerint tehát

$$2. \ldots \ldots \log d_A - \log d_{A'} = \log \mathrm{tg}\,\frac{\vartheta_A}{2} - \log \frac{|\vartheta_A|}{2}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

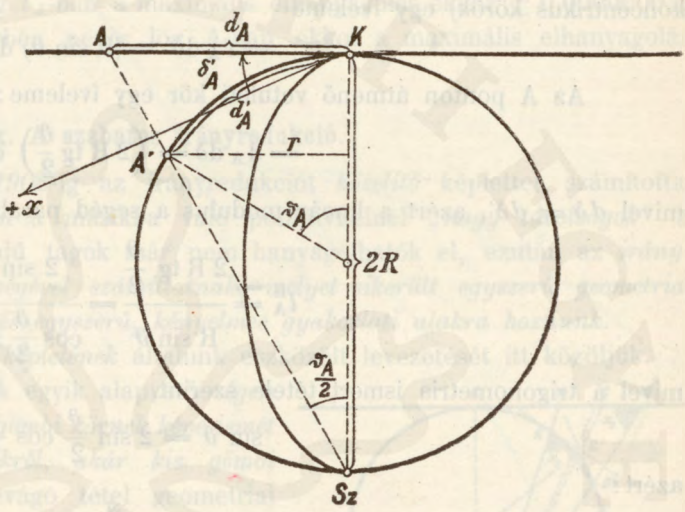
ezen centrális hosszredukció értékek a „*V. U.*“ könyv 1. számtáblázatának 3. oszlopából nyerhetők a d_A argumentumhoz.

A 34. ábrából látnivaló, hogy: 1. a térkép központjából induló összes gömbi *radius vektorok képei egyenes vonalak;*

2. a térkép központja körül képzelt összes *koncentrikus segéd parallel* körök képei *ismét koncentrikus körök;*

3. A térkép központjában a torzulások zérusak, különben a *távolsággal* (és csakis attól függően) nő a torzulás; *a torzulási viszonyok tehát a segéd parallel körökön* (*K* pont körüli koncentrikus körök) *állandók;*

4. látnivaló, hogy *bármely* pontban a *radius vektor* és a reá *merőleges irány* (a segéd parallel kör érintője) a *gömbön* is, a *síkon* is egymással derékszöget alkotnak: tehát ez a két irány a *Tissot*-féle főirányoknak tekinthető;



34. ábra.

5. *végül látható, hogy a vetületi rádius vektorok K pontbeli sík délszögei* δ_A, *minden redukció nélkül, azonosak lesznek a gömbi rádius vektorok K pontbeli délszögeivel:* δ'_A*-vel.*

1. cikk. **A stereográfikus vetület szögtartó vetület.** Ezt a fontos alaptételt a mondottak alapján egyszerű lesz igazolni és egyúttal bizonyítani azt, hogy a *lineár modulus értékét* a vetület tetszőleges **A** pontjára nézve ezen képlet szolgáltatja:

3. . . . . $l_A = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\vartheta_A}{2}\right)}$, ahol ϑ_A (34. ábra) a gömbi A' pontnak megfelelő központi szög vonatkoztatva a KA' körívre.

A szögtartóság bizonyítása abból áll, hogy kimutatjuk, *miszerint a két Tissot*-féle *főirányban a lineár modulusok értéke ugyanaz.* Ebből aztán következik, hogy az irány modulus

$$i = \frac{l\,\text{min.}}{l\,\text{max.}} = \frac{l}{l} = 1,$$

hogy tehát az indikátrix kör. Minthogy jelen esetben a radius vektor és a reá merőleges segédparallel körök iránya a főirányok, (ezek alkotnak a vetületben is derékszöget egymással): azért **ezen két irányra nézve vezessük le a lineár modulus értékeket.**

A *radius vektor* (d_A) egy íveleme, nem egyéb, mint *differenciáléja* a

$$d_A = 2R\ \text{tg}\frac{\vartheta_A}{2}\text{-nek}\ \vartheta_A\ \text{szerint:}$$

$$(\text{differenciále}\ d_A) \equiv 2R\ \frac{1}{\cos^2\frac{\vartheta_A}{2}}\ \frac{1}{2}\ d\vartheta_A = (R\,d\vartheta)\frac{1}{\cos^2\frac{\vartheta_A}{2}},$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Mivel ezen *kis centrális hossznak eredeti* gömbi íveleme 34. ábra szerint $= R\,d\vartheta$, *azért a két kis hossz viszonya, azaz a lineár modulus értéke a centrális sugár irányában lesz:*

$$4. \quad l_A^{(I)} = \frac{(R\,d\vartheta)\,\frac{1}{\cos^2\frac{\vartheta}{2}}}{R\,d\vartheta} = \frac{1}{\cos^2\frac{\vartheta_A}{2}}$$

Hasonlólag egyszerűen nyerhetjük a II. főirányban, azaz az előbbi irányra merőleges irányban a lineár modulus értékét. Az A′ ponthoz tartozó segédparallel körnek (*K* körül koncentrikus körök) egy íveleme

$$= r_A\,d\delta' = (R \sin\vartheta)\,d\delta'$$

Az A ponton átmenő vetületi kör egy íveleme:

$$= d_A\,d\delta = \left(2R\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}\right)\,d\delta$$

mivel $d\delta = d\delta'$, azért a lineár modulus a segéd parallel körök érintői irányában:

$$l_A^{II.} = \frac{2R\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}}{R\sin\vartheta} = \frac{2\sin\frac{\vartheta}{2}}{\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\vartheta};$$

mivel a trigonometria ismert tétele szerint,

$$\sin\vartheta = 2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}$$

azért:

$$5. \quad l_A^{II.} = \frac{2\sin\frac{\vartheta}{2}}{\cos\frac{\vartheta}{2}\,2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}} = \frac{1}{\cos 2\frac{\vartheta}{2}}$$

Minthogy vizsgálatunk szerint (4. és 5. képlet) tehát e két egymásra merőleges irányban

$$l_A^{I.} = l_A^{II.} = \frac{1}{\cos^2\frac{\vartheta}{2}},$$

azért az l egy pont körül minden irányban állandó és így a stereográfikus vetület *szögtartó*; bármely pontban a lineár modulust pedig tényleg megadja a 3. alatti egyszerű képlet.

Figyelembe véve azt, hogy 1. szerint

$$\tan\frac{\vartheta_A}{2} = \frac{d_A}{2R}$$

a *lineár modulus* ily alakban is fejezhető ki:

$$l_A = f(d_A), \text{ illetve}$$

$$\log l_A = f_1(d_A).$$

Ezen — *gyakorlatilag fontos* függvényalak megadja a lineár modulus értékét mint az illető A pont sík *rádius vektorának* függvényét. Ezen függvény alapján készült a „*V. U.*“ könyv *1. számú számtáblázatának 3-ik rovata,* amelyből az *ölekben* kifejezett d_A argumentumhoz számítható *egyszerű lineáris interpolálással* a log l_A értéke: a *7-ik logaritmus* egységeiben kifejezve. E táblázatban a *log* l_A a rövidség okáért σ_{do}-al van jelölve.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Konform vetület esetében tudvalevőleg a területi modulus négyzete a lineár modulusnak:

$$t_A = l_A^2, \text{ azaz}$$

$$6. \ldots \ldots \ldots \ldots \log t_A = 2 \log l_A = 2 \sigma_{d_0}$$

A területi modulus logaritmusa a vetület bármely pontjában tehát a „*V. U.*“ könyv 1. számtáblázatnak σ_{d_0} rovatából nyerhető **2**-vel való szorzás által: az ölekben kifejezett d_A argumentumhoz. Vizsgálataink szerint

a legélesebb σ_{d_0} *számításhoz elegendő a* d_A *argumentumot tíz ölre kikerekítve számításba venni.* Ugyanis

a budapesti rendszerben log l_A-ban a maximális elhanyagolás ekkor $\pm$ 0,00000003;

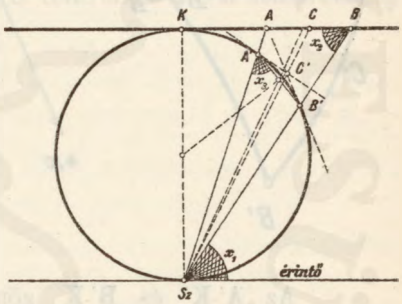
a marosvásárhelyi rendszerben pedig log A-ban ekkor a maximális elhanyagolás $\pm$ 0,00000001

2. cikk. A szabatos irányredukció.

A háromszögelő hivatal *1908*-ig az irányredukciót *közelítő* képlettel számította, miután azonban egyik rendszerből a másikba való pontátvitelnél *„nagy távolságok“* is szerepelnek, amikor a felsőbbrendű tagok már nem hanyagolhatók el, ezután az *irányredukciók azon szigorú képlet segítségével számíttatnak, melyet sikerült egyszerű geometriai megfontolások alapján levezetnünk és egyszerű, kényelmes gyakorlati alakra hoznunk.*

Az irányredukció *szabatos képletének* általunk eszközölt levezetését itt közöljük.

A stereográfikus vetületnek egyik alapvető *régen ismert* sajátsága az, hogy *bármely gömbi körnek képe ismét kör, akár legnagyobb gömbi körökről, akár kis gömbi körökről van is szó.* Ezen messzevágó tétel geometriai szemlélettel bizonyítható (35. ábra).



35. ábra.

Legyen az A′ B′ egyenes a gömbből a rajz síkjára tetszőleges hajlású sík által kimetszett körnek egyik diametere. Ezen diameternek stereográfikus képe ekkor az A B egyenes. Az A′ B′ körhöz tartozó összes vetítő sugarak egy *ferde körkúpot* alkotnak, melynek csúcsa az **Sz.** vetítési centrum. Be kell bizonyítani, hogy a képsík szintén kört metsz ki a nevezett vetítési ferde körkúpból. Ez csakis úgy lehet, hogyha az A′ B′ és az A B egyenesek *antiparalleljei* egymásnak a kúp alkotókhoz viszonyítva, azaz ha

$$\sphericalangle x_3 = \sphericalangle x_2.$$

Közvetlenül belátható, hogy

$$\sphericalangle x_1 = \sphericalangle x_2;$$

de közvetlenül belátható az is, hogy

$$\sphericalangle x_1 = \sphericalangle x_3\text{-al is,}$$

hiszen az x_1 szög ugyancsak az Sz. B′. húrhoz tartozó kerületi szögnek tekinthető.

Világos tehát, hogy $x_3 = x_2$, *azaz az A′ B′ diameter a körhenger Sz. A′ alkotójával ugyanazt a szöget zárja be, mint a mekkorát bezár a B A vetületi egyenes (sík) az Sz. B′. kúp alkotóval.* Tehát A′ B′ és A B mindig antiparallelek az A′ B′-höz tartozó vetítési kúphoz, és így ha A′ B′ körmetszet, akkor A B is körmetszete a kúpnak. Tehát tényleg: *bármely gömbi körnek képe ismét kör;* tehát a gömbi háromszögoldalak képei szintén *körívek* lesznek.

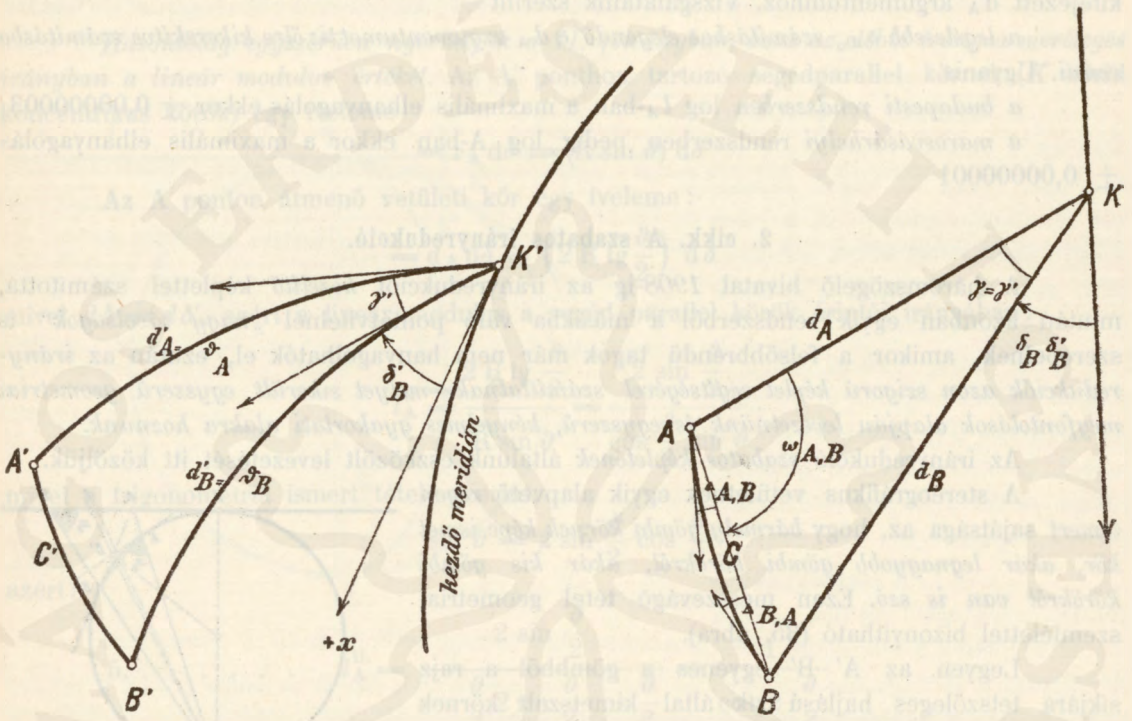
Minden hosszadalmas bizonyítás nélkül *belátható, hogy minden legnagyobb gömbi kör íve oly körív által ábrázoltatik a képsíkon, hogy a vetületi körív mindig a homorú*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

oldalát fordítja a térkép központja K felé. Ezen az irányredukciók előjeleire nézve igen fontos tétel puszta szemlélettel is *belátható;* de tüstént bizonyítani is fogjuk más tétellel kapcsolatosan.

Valamely A′ B′ legnagyobb gömbi körív (háromszögoldal) stereografikus vetületi képét (36. ábra) az *A B körívet* véve szemügyre — látható, hogy a $\Delta_{A,B}$ irányredukció szigorúan akkora, mint a $\Delta_{B,A}$ irányredukció értéke, azaz

absolut érték $\Delta_{A,B}$ = absolut érték $\Delta_{B,A}$, mert az *A B* ív körív.



36. ábra.

Az **A′ K′** és **B′ K′** gömbi legnagyobb körívek (gömbi radius vektorok) *képei* az $AK = d_A$, $BK = d_B$ egyenesek (sík radius vektorok, vagy centrális sugarak).

Minthogy konform vetülettel van dolgunk, azért az A K B (nem valódi) *háromszög alakú idom belszögei szigorúan azonosak az A′ K′ B′ valódi gömbháromszög belszögeivel.*

A belszögek összege tehát

$$= 180° + \varepsilon,$$

ahol ε jelenti az A′ K′ B′ gömbháromszög gömbi szögfölöslegét.

Az A K B valódi (egyenes oldalú) síkháromszög belszögeinek összege pedig

$$= 180°.$$

Tehát a két irányredukció *összege* = a gömbi háromszög szögfölöslegével. Minthogy a két irányredukció absolut értéke azonos, azért

7. . . . Δ = **absolut érték** $\Delta_{A,B}$ = **absolut érték** $\Delta_{B,A} = \frac{\varepsilon}{2}$. *)

*) Könnyű most igazolni azt, hogy **A B** oldal (körív) *okvetlenül a homorú oldalát* fordítja K pont, azaz a háromszög *belseje* felé. Ha ugyanis a *domború* oldalát fordítaná a háromszög belseje felé, akkor — minthogy az *A K* és *B K* oldalak egyenesek — a belszögek összege *kisebb volna* 180°-nál is: ami lehetetlen, hiszen *szükségképen* **180 + ε** a belszögek értéke.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A 7. alatti alapvető képlet szerint tehát: bármely gömbi A′ B′ oldal irányredukció számítása, visszavezethető az A′ K′ B′ centrális gömbi háromszög szögfölöslegének számítására. Ebből az ismeretes tételből indultunk ki az irányredukció új, gyakorlati képleteinek levezetésénél.

Hammer: „Lehrbuch der Trig. etc." című könyvében a **442.** és **449.** lapon találjuk a *következő általános gömbháromszögtani képletet:* Bármely A′ B′ C′ gömbháromszög esetében, a gömbi szögfölösleg két oldalból és a közbezárt szögből ezen képlettel számítható

$$\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\sin\gamma}{1+\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\cos\gamma}.$$

A mi jelzéseinket (36. ábra) bevezetve és a 7. képletet figyelembe véve:

$$8.\ldots\ldots\quad tg\frac{\varepsilon}{2} = tg\,\Delta = \frac{tg\frac{\vartheta_A}{2}\,tg\frac{\vartheta_B}{2}\,sin\,\gamma'}{1+tg\frac{\vartheta_A}{2}\,tg\frac{\vartheta_B}{2}\,cos\,\gamma'}$$

képlet adja az A, B oldal irányredukciójának azaz a 36. ábrabeli A′ B′ K′ centrális gömbháromszög szögfölösleg felének *szigorú értékét.*

Nem lesz nehéz, ezen képletbe bevezetni az A, K, B *centrális vetületi síkháromszög* adatait. Az ismert (l. 1. képlet)

$$\begin{cases} d_A = 2R\operatorname{tg}\dfrac{\vartheta_A}{2} \\ d_B = 2R\operatorname{tg}\dfrac{\vartheta_B}{2} \\ \gamma = \gamma' \end{cases}$$

vetületi alapegyenleteket 8. képletbe helyettesítve, lesz

$$9.\ldots\ldots\quad tang\,\Delta = \frac{\dfrac{d_A\,d_B\,sin\,\gamma}{4R^2}}{1+\dfrac{d_A d_B cos\gamma}{4R^2}}$$

Jelöljük (2F)-el az AKB vetületi centrális *síkháromszögnek* (36. ábra) területét. A síkháromszögtannak egy ismert tétele szerint, akkor

$$10.\ldots\ldots\quad (2F) = d_A\,d_B\,sin\,\gamma.$$

Jelöljük továbbá *zárjeles deltával* (Δ)-val a következő kifejezést:

$$11.\ldots\ldots\quad (\Delta) = \frac{(2F)}{4R^2} = \frac{d_A\,d_B\,sin\,\gamma.}{4R^2}$$

Helyettesítvén 9.-be ezen értékeket:

$$\operatorname{tang}\,\Delta = \frac{(\Delta)}{1+(\Delta)\operatorname{cotg}\,\gamma}$$ és így az A, B oldal irányredukciójának szigorú képlete:

$$12.\ldots\ldots\quad \textbf{log tg}\,\Delta = \textbf{log}\,(\Delta) - \textbf{log.}\,\{1+(\Delta)\,\textbf{cotg.}\,\gamma.\}$$

A talált képlet, a 11. alatti képlettel, megadják az irányredukciónak *absolut szigorú értékét, tetszőleges* (nehány *ezer* kilometeres) hosszúságú oldal esetére is.

A 12. képlet mindig + előjellel adja a Δ-t.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A (Δ) érték mindig + előjellel veendő.
A (Δ) cotg γ tag +, hogyha $\gamma < 90°$,
és —, hogyha $\gamma > 90°$.

Az ily módon mindig *pozitiv előjellel* nyert Δ irányredukció mily előjellel látandó el, ha síkdélszögekből vetületi délszögekre és viszont akarunk áttérni? E célból képezni kell *megközelitően* (fokokra) az $\omega_{A,B}$ szöget (36. ábra):

13. . . . . $\omega_{A,B} = \delta_{A,B} - \delta_{A,K}$

Hogyha most már:

14. . . $\begin{cases} 0 < \omega_{A,B} < 180°, \text{ akkor } \Delta_{A,B} \text{ előjele} = - \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{és } \Delta_{A,B} \quad \text{„} \quad = +, \text{ és hogyha} \\ 180 < \omega_{A,B} < 360°, \text{ akkor } \Delta_{A,B} \text{ előjele} = + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \Delta_{A,B} \quad \text{„} \quad = -. \end{cases}$

Hogy ezen előjeli megállapítás helyes, azt pusztán geometriai szemlélettel belátjuk, ha meggondoljuk, hogy az A B körív mindig a homorú oldalát fordítja K pont felé és így a $\Delta_{A,B}$ előjele a háromszögelési vázlat megtekintéséből is adódik.

3. cikk. Az irányredukció képlet gyakorlati alkalmazása.

Szélső értékek: $\begin{cases} d_A < 400 \text{ km.} \\ AB = C < 300 \text{ km.} \end{cases}$

A 10 jegyű logaritmus könyv segítségével — konkrét példa alapján — ki lehet mutatni, hogy ezen szélső d_A és C méretek esetében is a Δ-t a 12. alatti képlettel $\pm$ 0,″0001-re élesen lehet számítani, ha a

log tg Δ-ban $\pm$ *0,000 0001* hiba van is.

Ezt a szerencsés körülményt kiaknázhatjuk. Ugyanis d_A és C maximális hazai értékei mellett

a szélső értékű $\Delta = \pm 150''$. — Ámde a 10 jegyű logaritmus könyv szerint

$\log \text{tg } 150'' - \log \frac{150''}{\varrho''} = +0{,}000\,000\,8..$, és így a d = 400 km. c = 300 km határokon belül mindig log tg Δ helyett log Δ, azaz tg $\Delta = \Delta$ helyettesíthető.

Igy tehát a *szabatos irányredukció képlete* a fenti határokig $\pm$ 0,″0001-re élesen:

15. . . . . $\Delta = \frac{(\Delta)}{1 + (\Delta) \text{ cotg } \gamma},$

vagyis

16. $\begin{cases} \log \Delta = \log (\Delta) - \log \{ 1 + (\Delta) \text{ cotg } \gamma \}; \text{ vagy részletesen kiírva} \\ 11. \text{ szerint } \log (\Delta) = \log \left(\frac{1}{4R^2}\right) + \log d_A + \log d_B + \log \sin \gamma. \end{cases}$

Ezen képlet gyakorlatilag nem előnyös akkor, ha az A pontból több oldal indul ki: *ami a háromszögelésekben, műszerálláspontokban mindig meg van.*

Azért célszerű a d_B és a γ argumentumok helyett a c és $\omega_{A,B}$ argumentumokat (36. ábra) bevezetni. Ez elemi módon eszközölhető. Ugyanis a síkháromszögtan elemi tételei alapján (36. ábra.)

$$\begin{cases} \text{cotg } \gamma = \dfrac{d_A - c \cos \omega_{A,B}}{c \sin \omega_{A,B}} = \dfrac{d_A}{c \sin \omega_{A,B}} - \text{cotg } \omega_{A,B} \\ (2\,F) = d_A \; c \sin \omega_{A,B} \end{cases}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Helyettesítve ezen egyenlőségeket a Δ-ra talált 15. alatti képletbe:

$$\Delta = \frac{(\Delta)}{1 + (\Delta)\left\{\frac{d_A}{c \sin \omega_{A,B}} = \operatorname{cotg}.\ \omega_{A,B}\right\}}$$

$$= \frac{(\Delta)}{1 + (\Delta)\frac{d_A}{c \sin \omega} - (\Delta) \operatorname{cotg} \omega}$$

$$= \frac{(\Delta)}{1 + \left(\frac{d_A\, c \sin \omega}{4 R_2}\right)\frac{d_A}{c \sin \omega} - (\Delta) \operatorname{cotg} \omega}$$

$$= \frac{(\Delta)}{1 + \frac{d^2_A}{4R^2} - (\Delta) \operatorname{cotg} \omega}, \text{ átszorozva}$$

$$\Delta + \Delta\left(\frac{d^2_A}{4R^2}\right) - \Delta\,(\Delta)\ \operatorname{cotg}\ \omega = (\Delta), \text{ innen}$$

$$\Delta = (\Delta) - \Delta\frac{d^2_A}{4R^2} + \Delta\,(\Delta) \operatorname{cotg} \omega_{A,B}$$

Minthogy látni fogjuk, hogy a $(\Delta) - \Delta$ különbség hazánkban szélső esetekben is igen kicsiny mennyiség, azért a talált egyenlet jobboldalán *a magasabb rendű (igen kis értékű) tagokban (azaz a 2-ik és 3-ik tagban) a Δ helyett (Δ) írható.* És így

$$\Delta = (\Delta) - (\Delta)\frac{d^2_A}{4R^2} + (\Delta)^2 \operatorname{cotg} \omega.$$

Ha másodpercekben kifejezve akarjuk Δ-t kapni, és a (Δ)-t is *másodpercekben* kifejezve visszük a számításokba, akkor az AB irányredukció szabatos képlete ($d_A = 400$ km, $c = 300$ km esetéig):

17. . . . . $\Delta'' = (\Delta)'' - (\Delta)''\frac{d^2_A}{4R^2} + (\Delta)''^2\frac{\operatorname{cotg} \omega}{\varrho''}$

18. . . . . ahol $(\Delta'') = \left(\frac{d_A}{4R^2}\varrho''\right) c \sin \omega.$

A *végleges képletek* most már — célszerű jelzéseket is vezetve be — levezetésünket összefoglalva, a következők:

19.
$$\begin{cases} k_1 = \frac{d_A}{4R^2}\varrho'' & \ldots\ldots \log\frac{\varrho''}{4R^2} = 1.6588245 - 10. \\ k_2 = \frac{d^2_A}{4R^2} & \ldots\ldots \log\frac{1}{4R^2} = 6.344\,40 - 20. \\ (\Delta)'' = k_1\, c \sin \omega_{A,B} & \\ \Delta''_{A,B} = (\Delta)'' - (\Delta)''\, k_2 + (\Delta)''^2\frac{\operatorname{cotg} \omega}{\varrho''} & \ldots \log\frac{1}{\varrho''} = 4.685\,57 - 10. \end{cases}$$

Látnivaló, hogy a $\mathbf{k}_1$ és $\mathbf{k}_2$ mennyiségek ugyanazon A pontból induló *összes oldalakra nézve állandó* értékek. Elértük tehát célunkat: egy pontból induló sok oldalnak irányredukció számításához kényelmes képletet találtunk. Midőn tehát egy pontból induló oldalak irányredukcióit akarjuk számítani, akkor *közös argumentum* a d_A: ennek alapján számítjuk ki e pontra nézve a 19. szerinti $\mathbf{k}_1$ és $\mathbf{k}_2$ tényezőket. Ezután számítjuk az irányredukció egyes tagjait minden oldalra külön-külön.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A 19. képlet **pozitiv** előjellel adja a $(\Delta)''$-et.

A $\mathbf{k_1}$ és $\mathbf{k_2}$ helyi állandók *mindig pozitiv* előjelűek.

A redukció *második* tagja *mindig* tényleg kivonandó.

A redukció *harmadik* tagja $+$, ha $\begin{cases} 0 < \omega < 90° \\ 180 < \omega < 270° \end{cases}$

„ „ „ „ $-$, ha $\begin{cases} 90 < \omega < 180° \\ 270 < \omega < 360° \end{cases}$

Az ily módon *pozitiv* előjellel nyert Δ''-nek, mint délszögredukciónak előjele:

20. . $\begin{cases} \Delta''_{A,\,B} \text{ előjele } -, \text{ ha } 0 < \omega < 180° \\ \Delta''_{A,\,B} \text{ előjele } +, \text{ ha } 180 < \omega < 360° \\ \text{A } \Delta''_{B,\,A} \text{ előjele pedig mindig fordítottja a } \Delta''_{A,\,B} \text{ előjelének.} \end{cases}$

Ezen 20. alatt mondottak mind abból következnek, hogy az A B körív mindig a homorú oldalát fordítja K kezdőpont felé.

Vizsgáljuk a Δ'' képletében a **2**-ik és **3**-ik tagot, és lássuk mily szélső értéket vehetnek e tagok fel a különböző rendű hálózati oldalak esetében.

A $(\Delta)''$ tag szélső értékei, ha $d = 400\ km$ a következők:

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{I. rendű oldal: } c = 50\ km & \text{esetében } (\Delta)'' \text{ max.} & = & \pm\ \mathbf{25}'' \\ \text{II. „ „ } c = 25\ „ & „ \quad „ & = & \pm\ 13'' \\ \text{III. „ „ } c = 12\ „ & „ \quad „ & = & \pm\ 6'' \\ \text{IV. „ „ } c = 5\ „ & „ \quad „ & = & \pm\ 2''.5 \end{array}\right\}$$

A k_2 helyi állandó szélső értéke pedig: $\dfrac{(400)^2}{4R^2} = \dfrac{1}{1000}$.

Tehát a 19. képletbeli $(\Delta)''$ k_2 tag szélső értékei

$$\left\{\begin{array}{llll} c = 50 & \text{km esetében: } (\Delta)'' \ k_2 \text{ max.} & = & 0.''025 \\ c = 25 & „ \quad „ & = & 0.''013 \\ c = 12 & „ \quad „ & = & 0.''006 \\ c = 5 & „ \quad „ & = & 0.''0025 \end{array}\right.$$

A 19. képlet 3-ik tagjának azaz a $(\Delta'')^2 \dfrac{\operatorname{cogt}\ \omega}{\varrho''}$ tag szélső értékeinek vizsgálata céljából helyettesítsük a (Δ'') helyébe annak 19. szerinti értékét $(k_1\ c \sin \omega_{A,B})$-t:

$$(\Delta'')^2 \frac{\operatorname{cotg}\ \omega}{\varrho''} = \frac{k_1^2}{\varrho''} c^2 \sin^2 \omega \operatorname{cotg} \omega = \frac{d_A^2}{16\ R^4} \underbrace{c^2 \sin \omega \cos \omega}$$

mivel $\sin \alpha = 2 \sin \dfrac{\alpha}{2} \cos \dfrac{\alpha}{2}$, azért

$$\sin \omega \cos \omega = \frac{1}{2} \sin 2\ \omega, \text{ és igy:}$$

$$(\Delta'')^2 \frac{\operatorname{cotg}\ \omega}{\varrho''} = \frac{d_A^2}{16\ R^4} c^2 \frac{1}{2} \sin 2\ \omega = \frac{d_A^2}{32\ R^4} c^2\ sin\ 2\ \omega.$$

Ezen függvény akkor veszi fel szélső értékét, ha

$$\left\{\begin{array}{l} d_A = \text{max.} \\ c = \text{max.} \\ \text{és } \omega = \mathbf{45}°., \text{ azaz } sin\ 2\ \omega = 1. \end{array}\right.$$

Erre tekintettel

$$\left(\frac{d_A^2}{32\ R^4}\right) \text{max.} = \frac{(400)^2}{(8R^2)\ 4R^2} = \frac{1}{8R^2} \frac{1}{1000} = \frac{1}{300{\cdot}000 \text{ millió}} = 0.''000\ 0006$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

ha most már $c = 50$ km., akkor $c^2 = 2500$ és igy

$$(\Delta'')^2 \frac{\cot g\ \omega}{\varrho''} \text{ szélső értéke} = 0.000\ 0006 \times 2500 = \pm 0.''0015$$

Tehát I. rendű méréseknél *kiegyenlítés előtt* a III-ik tag nem veendő figyelembe; kiegyenlítés *után,* ha más vetületre térünk át, azonban *igen.*

Ha $c = 35$ km., akkor $c^2 = 1225$, és igy

$$(\Delta'')^2 \frac{\cot g\ \omega}{\varrho''} \text{ szélső értéke} = \pm 0.''0007,$$

ami mindenesetre elhanyagolható mennyiség. Az itt megejtett vizsgálat eredménye most már a következő gyakorlati utasitásra vezet:

21.
- 1. fokozat. **Kiegyenlítés után.**
  - I. rendű méréseknél α $\Delta''_{A,B}$ képletben mind a *három* tag veendő figyelembe.
  - II. és III. rendű méréseknél csak az *első két* tag veendő figyelembe.
  - IV. rendű méréseknél csak az *első* tag vendő figyelembe.
- 2. fokozat. **Kiegyenlítés előtt.**
  - I. rendű méréseknél csak az *első két tag* veendő figyelembe.
  - II. rendű méréseknél csak az *első két tag* veendő figyelembe.
  - III. és IV. rendű méréseknél csak az *első tag* egyedül szerepel.

Az irányredukció számitása 19. szerint a
d_A, **c** és ω argumentumok által történik. Ami ezek pontosságát illeti, úgy elegendő a d_A — t és c_A — t *kerek ölekben* venni figyelembe,
„ az ω — t, a (Δ) számításánál *kerek másodpercekben,* és
„ „ „ „ cotg ω számításánál kerek **10** másodpercekben a számításba belevinni.

A (Δ) számítása szerint **7** jegyű logar. könyvvel, a II. és III. tag számitása pedig **5** jegyűvel végeztetik szabatos számítások esetében.

Az irányredukció számításra szolgáló hivatalos nyomtatványok a különböző rendű hálózatokra 21. alatt elmondottakra tekintettel készültek el.

Megjegyzés.

Ha — valami okból — előnyösebbnek mutatkoznék az irányredukció számítást **közvetlenül** a pontok *derékszögű sík koordinátáival végezni,* akkor az eljárás a következő:

1. A 19. alatti $\Delta''_{A,B}$ képletben a harmadik tagot akkor nem számíthatjuk.
2. A $k_2 = \frac{d_A^2}{4R^2}$ állandót most a
$$k_2 = \frac{(y_B - y_A)^2 + (X_B - X_A)^2}{4R^2}\text{-el képezzük}$$
3. A $(\Delta) = \frac{(2F)}{4R^2}\varrho''$-et most a
$$(\Delta) = \frac{(X_B\ y_A - X_A\ y_B)}{4R^2}\varrho''\text{-el számítjuk.}$$

Hogy mikor előnyösebb az x_A, y_A argumentumokkal dolgozni, és mikor a **d**, **c** és ω argumentumokkal, azt mindenki adott esetben maga dönti el. Bizonyos esetekben cél-

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

szerűbb lehet az x_A, y_A argumentumokkal dolgozni. A háromszögelő hivatalnak erre az esetre is van nyomtatványa. Itt bemutatunk egy számpéldát, amely *hat* az *Ivančica* elsőrendű pontból induló elsőrendű oldalnak irányredukció számítását adja célszerű elrendezésben.

Stereográfikus vetület. Délszög- és hosszredukció. Budapesti rendszer.

I. Argumentumok a délszögredukcióhoz

	Oldal neve A—B.	$\delta_{A,B}$	$\omega_{A,B}$	log c
A ≡ Ivančica	Visz	293° 48′ 25″	55°—48′—47″	4.643 8966
	Obersthunka	324° 15′ 43″	86—16— 5″	4.623 3337
	Kl. Iványic	337° 19′ 2″	99—10—24	4.456 0412
	Sliemen	26° 6′ 18″	148— 7—10	4.257 7521
	Plesevica	38° 4′ 12″	160— 4—34	4.506 5949
	Donáti	109° 11′ 48″	231—12—10	4.214 2220

II. Az irányredukció képlet közös együtthatói:

log d_A =	5.1467547	log d_A^2 =	10.29351
+	1.6588245—10	+	6.34440—20
log k_1 =	6.8055792—10	log k^2 =	6.63791—10

III. Délszögredukció számítások.

Ivančica—Visz

log c = 4.643 8966
+ log sin ω = 9.917 6150—10
+ log k_1

log (Δ″) = 1.367 09.08	(Δ″) = +
+ log k_2	23.285 8
log II. tag = 8.005 00 - 10	II. tag = —
2 log (Δ″) = 2.734 18	0.010 1
+ log cotg ω = 9.832 03—10	
+ 4.685 57—10	
log III. tag = 7.251 78—10	III. tag = +
	0.001 8
	Δ″ I. v. = — 23″.277 5

Ivančica—Obersthunka

log c = 4.623 3337
+ log sin ω = 9.999 0781—10
+ log k_1

log (Δ″) = 1.427 99.10	(Δ″) = +
+ log k_2	26.791 1
log II. tag = 8.065 90—10	II. tag = —
2 log (Δ″) = 2.855 98	0.011 6
+ log cotg ω = 8.814 42—10	
+ 4.685 57—10	
log III. tag = 6.355 97—10	III. tag = +
	0.000 2
	Δ″ I. o. = — 26.779 7

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ivančica—Kl. Ivánic

log c = 4.456 0412
+ log sin ω = 9.994 2246—10
+ log k_1

log (Δ") = 1.255 84.50	(Δ") = +
+ log k_2	18.023 7
log II. tag = 7.893 76—10	II. tag = —
2 log (Δ") = 2.511 69	0.007 8
+ log cotg ω = 9.215 25	
+ 4.685 57—10	
log III. tag = 6.412 51—10	III. tag = —
	0.000 3

Δ"I. K. = — 18".015 6

Ivančica—Sliemen

log c = 4.257 7521
+ log sin ω = 9.722 7574
+ log k_1

log (Δ") = 0.786 08.87	(Δ") = +
+ log k_2	6.110 6
log II. tag = 7.424 00—10	II. tag = —
2 log (Δ") = 1.572 18	0.002 7
+ log cotg ω = 0.206 23	
+ 4.685 57 10	
log III. tag = 6.463 98—10	III. tag = —
	0.000 3

Δ"I. S. = — 6".107 6

Ivančica—Plesevica

log c = 4.506 5949
+ log sin ω = 9.532 4634
+ log k_1

log (Δ") = 0.844 63.75	(Δ") = +
+ log k_2	6.992 6
log II. tag = 7.482 55—10	II. tag = —
2 log (Δ") = 1.689 27	0.003 1
+ log cotg ω = 0.440 73	
+ 4.685 57—10	
log III. tag = 6.815 57—10	III. tag = —
	0.000 7

Δ"I. P. = — 6".988 8

Ivančica—Donáti

log c = 4.214 2220
+ log sin ω = 9.891 7428
+ log k_1

log (Δ") = 0.911 54.40	(Δ") = +
+ log k_2	8.157 3
log II. tag = 7.549 45—10	II. tag = —
2 log (Δ") = 1.823 09	0.003 5
+ log cotg ω = 0.905 22	
+ 4.685 57—10	
log III. tag = 6.413 88—10	III. tag = —
	0.000 3

Δ"I. D. = + 8".153 5

4. cikk. A szabatos hosszredukció.

Lambert „Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung" (1772. év III. kötet 119 l.) cimű művében a stereográfikus vetületi hossz számítására nézve geometriai uton ezt a képletet vezeti le:

$$c = \frac{R \sin \frac{\tau_{A,B}}{2}}{\cos \frac{\vartheta_A}{2} \cos \frac{\vartheta_B}{2}}$$

Ezen képlet arra az esetre van levezetve, amikor a vetület méretaránya $= \frac{1}{2}$.

Tehát 1 : 1 méretarányban a képlet ez:

22. . . . . $c = \frac{2 R \sin \frac{\tau_{A,B}}{2}}{\cos \frac{\vartheta_A}{2} \cos \frac{\vartheta_B}{2}}$,

amely képletben $\tau_{A,B}$ *jelenti az* $A'B' = C'$ *gömbi oldal gömbi központi szögét,* azaz:

$$\left(\frac{\tau_{A,B}}{2}\right) = \frac{C'}{2R}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Kifejezve ezen egyenletből a 2R értékét:

$$2R = \frac{c'}{\left(\frac{\tau_{A,B}}{2}\right)}, \text{ és azt betéve a 22. képletbe:}$$

$$c = \frac{c' \sin\frac{\tau_{A,B}}{2}}{\frac{\tau_{A,B}}{2}\cos\frac{\vartheta_A}{2}\cos\frac{\vartheta_B}{2}} = c' \frac{\sin\frac{\tau_{A,B}}{2}}{\frac{\tau_{A,B}}{2}} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\vartheta_A}{2}\cos\frac{\vartheta_B}{2}}.$$

Osztva mindkét oldalt *c'-vel:*

$$\frac{c}{c'} = \left\{\frac{\sin\frac{\tau_{A,B}}{2}}{\frac{\tau_{A,B}}{2}}\right\} \left\{\frac{1}{\cos\frac{\vartheta_A}{2}\cos\frac{\vartheta_B}{2}}\right\}, \text{ és így az AB oldal hosszredukciója:}$$

$$23. \quad \sigma_{A,B} = \log c - \log c' = \left\{\log\sin\frac{\tau_{A,B}}{2} - \log\frac{\tau_{A,B}}{2}\right\} + \left\{\log\frac{1}{\cos\frac{\vartheta_A}{2}} + \log\frac{1}{\cos\frac{\vartheta_B}{2}}\right\}$$

Jelöljük a rövidség kedvéért e képlet tagjait külön betükkel:

$$24. \quad \begin{cases} \log\dfrac{1}{\cos\frac{\vartheta_A}{2}} = \sigma_{dA} \\ \log\dfrac{1}{\cos\frac{\vartheta_B}{2}} = \sigma_{dB} \\ \left(\log\sin\dfrac{\tau_{A,B}}{2} - \log\dfrac{\tau_{A,B}}{2}\right) = \sigma_C, \text{ akkor a} \end{cases}$$

lineármodulusnak absolute szigorú képlete:

$$25. \quad \begin{cases} \underline{\sigma_{A,B} = \sigma_{dA} + \sigma_{dB} + \sigma_C, \text{ és}} \\ \underline{\log c' = \log c - \sigma_{A,B}} \end{cases}$$

A 24. és 25. alatti képletek megtekintése mutatja, hogy a ϑ és τ argumentumok helyett a **d** és **c'** hosszak szerepelhetnek argumentumokul. Szám-táblázatokat készítettünk tehát ily módon a σ_{dA}, σ_{dB} és σ_C szabatos értékeinek egyszerű keresésére. E hosszú számtáblázatok a „*V. U.*" könyvben találhatók.

Az *1.* sz. táblázat 2-ik oszlopa megadja az ölekben kifejezett $\mathbf{d}_A$-hoz és $\mathbf{d}_B$-hez a σ_{dA} és σ_{dB} értékeket *9 jegyre élesen.*

A **2.** sz. számtáblázat pedig megadja az *ölekben* kifejezett gömbi **c'**-höz a σ_C értékét ugyancsak *9 decimálisra élesen.*

Mi azonban a gyakorlatban rendesen (ugyszólván mindig) csak a c-t — azaz a *síkhosszt* ismerjük — nem pedig a c'-őt.

A gömbi hossz, (c') tehát nem kellemes argumentum.

E bajon könnyü volt segiteni! Ha az adott log c-ből, *kivonjuk* $\sigma d_A + \sigma d_B$-t, akkor a log c' *közelitő* értékét nyerjük, amit log (c')-vel jelölhetünk:

$$log\ (c') = log\ c - (\sigma d_A + \sigma d_B)$$

Az ily módon nyert **(c')** — ölekben kifejezett — oldalhosszhoz mint argumentumhoz kereshetjük 9 jegyre *élesen* az igazi:

$$\sigma_C \textit{ redukció értékét.}$$

A σ_d és σ_c szám táblázatok d max. = 254 500 és c max. = 99000 ölig használhatók.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A különböző rendü háromszögoldalak hosszredukciójára nézve vizsgálataink alapján a következő *gyakorlati utasitás* adható.

I. rendü oldalaknál:

c, d_A, d_B, argumentumokat elégséges *kerek (egész) ölekben* venni figyelembe.

A σ_c, a (c')-höz nyerhető, ahol

$$\log (c') = \log c - (\sigma d_B + \sigma d_B).$$

II. rendü oldalaknál: c max = 35 km. d_A, d_B, és c argumentumok *kerek (egész) ölekben lesznek* figyelembe véve; és a σ_c *argumentuma most a nyers* **c.**

Ekkor a maximális elhanyagolás σ-ban: ± *0,000 000,2.*

Rövid II. rendü és az összes III. rendü oldalaknál.

Ha **5** km < c < **20** km., akkor

$\sigma = \sigma d_A + \sigma d_B$, azaz a σ_C *egészen elhanyagolható.*

Ekkor a maximális elhanyagolás σ-ban: ± *0,000 0000,6.*

IV. rendü oldalaknál.

Ha c < 5 km., akkor ± 0,000 000 7 egységre (± 1 cm.-re) élesen nyerjük a hosszredukciót ezen egyszerü képlettel:

$$\sigma = \sigma_{do}, \text{ ahol}$$

σ_{o}, nem egyéb, mint az illető oldal *központjának radius vektorához* d_o*-hoz,* mint argumentumhoz a „*V. U.*“ könyv 1. táblázatának 3. oszlopából kiszedhető *lineár modulus érték:*

$$\sigma_{do} = \log \frac{1}{\cos^2 \frac{\vartheta_o}{2}}$$

Hangsúlyozzuk, hogy ilyenkor a d_o argumentumot elégséges ± **100** *ölre (± 200 meterre) élesen ismerni, amiért is ezen d_o argumentum a hálózati vázlatokból (kitüzési vázlat, alaplapok) is elég pontosan kiszedhető.*

5. cikk. Uj eljárás a hosszredukció számitására. (Fasching-féle eljárás.)

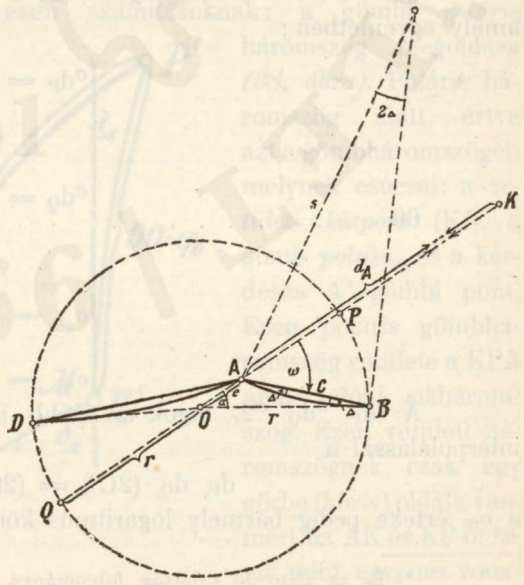
Lehet a hosszredukciót ugyanazon *d*, *c*, *ω* argumentumokkal is elvégezni, amelyek az irány redukciónak argumentumai. — Ezen gyakorlatilag igen célszerüen felhasználható uj képletet a stereográfikus vetület *tetszőleges sugarú indikátrixából* vezettük le sikgeometriai szemlélet alapján. (4. ábra.)

Képzeljük el, hogy a redukálandó A'B' = c' gömbi oldalt az A' pont körül 360°-al körülforgatom.

Előáll egy *gömbi kör,* melynek *felületi sugara* = c'.

Ezen gömbi körnek a stereográfikus vetület adta képe előbbi levezetésünk (81. lapon) szerint ismét kör.

Ezen *vetületi* kör központját jelöljük **O**-val, a *sugarát* pedig **r**-el. E kört a **c'** sugarú gömbi kör **indikátrixának** neveztük el. (37. ábra.)



37. ábra.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Az **O** indikátrix központ az AK centrális radius vektoron van mindig, még pedig sohasem **A** és **K** között, hanem A-n túl; azaz

$$d_O = d_A + e$$

ahol az **e** tehát mindig *pozitiv* előjellel veendő.

Az A' B' gömbi oldal vetülete az A B *körív:* ennek sugarát nevezzük **s**-el. A 37. ábrából látnivaló, hogy az A-hoz tartozó **s**, a B-hez tartozó s-el a 2Δ szöget zárja be, ahol Δ jelenti az **A B** oldalnak irányredukcióját.

Látnivaló, hogy a B-hez tartozó *indikátrix sugár* (O B = r) **érinti** az A B körívet,*) azaz bizonyos, hogy az $A\,O\,B$ **egyenes** oldalú háromszögben O B egyenes a A B egyenessel a Δ szöget zárja be.

Az A B O háromszög belszögei között tehát a következő összefüggés áll fen:

$$\Delta + \alpha = \omega\,; \text{ és így } \alpha = \omega - \Delta.$$

A következő alapvető képlet irható most már le a sinus tétel segélyével:

26. . . . . $\dfrac{c}{r} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(180^0 - \omega)} = \dfrac{\sin(\omega - \Delta)}{\sin\omega}$

Most keresünk összefüggést az indikátrix sugara **r** és a gömbi **c'** sugár között.

Az összefüggés — csakis a $Q\,P$ és a gömbi $Q'\,P'$ között — írható fel egyszerüen.

$$\begin{cases} Q\ P = 2r \\ Q'P' = 2c' = 2r' \end{cases}$$

Erre a P Q hosszra használhatjuk az előbb 25. alatt felírt hosszredukció képletet:

27. . . . . $\sigma = \log\dfrac{2r}{2c'} = \sigma_P + \sigma_Q + \sigma_{2r}.$

A 26. és 27. összefoglalása által nyerjük ezen uj hosszredukció képletet:

$$\log\frac{c}{c'} = \sigma = \sigma d_P + \sigma d_Q + \sigma_{2r}' + \log\frac{\sin(\omega - \Delta)}{\sin\omega}.$$

Jelöljük az utolsó tagot σ_ω betűvel, azaz legyen s

$\sigma_\omega = \log\sin(\omega - \Delta) - \log\sin\omega$, akkor a stereográfikus vetületnek *minden elhanyagolás nélküli* uj hosszredukciós képlete ez:

28. . . . $\sigma = \{\log c - \log c'\} = \sigma d_P + \sigma d_Q\ \sigma_{2r'} + \sigma_\omega,$

amely egyenletben:

60. . . . . $\begin{cases} \sigma d_P = \log\dfrac{1}{\cos\dfrac{\vartheta_P}{2}} \\ \sigma d_Q = \log\dfrac{1}{\cos\dfrac{\vartheta_Q}{2}} \\ \sigma_{2r} = \log\sin\left(\dfrac{\tau_{(2r)}}{2}\right) - \log\dfrac{\tau_{(2r)}}{2} \\ \sigma_\omega = \log\sin(\omega - \Delta) - \log\sin\omega. \end{cases}$

A σd_P, σd_Q, $\sigma 2_r$ tagok az előbb ismertetett számtáblázatokból nyerhetők egyszerű interpolálással a

$$d_P,\ d_Q,\ (2C') = (2r') \text{ argumentumokhoz;} —$$

a σ_ω értéke pedig bármely logaritmus könyvből szedhető ki a következő módon:

---

*) Ez az alapvető sajátság folyománya annak, hogy az $O\,B$ egyenes nem más, mint *vetülete az érintő kúp $O'\,B'$ alkotójának* és hogy a vetület szögtartó.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

1. Nézzük a log. könyvben, hogy *log sin* ω-nál mekkora a **10″**-re eső logaritmikus kbség = *diff 10″*.

2. $\frac{diff.\ 10''}{10} \times \Delta''$ adja a keresett σ_ω értéket; — a szorzások a *p. p.* táblázatokkal — melyek minden logaritmus könyvben megtalálhatók — végeztetnek el.

A σ_ω-t azonban csakis úgy nyerjük megfelelő élesen, hogyha $\pm$ 0″,001-re élesen ismerjük az irányredukciót: a Δ-t. Amint ezt e példa is mutatja:

$$\begin{cases} \omega = 32°—40'—27''.\ 64 \\ \Delta = 12''.\ 325, \end{cases}$$

akkor megnézzük a log könyvben, hogy

log sin 32°—40'—20″. 0-nél mekkora a 10″-re eső differencia:

diff. 10″ = *328* egység a 7-ik helyen.

Most a $\frac{328 \times 12''.325}{10}$ szorzat

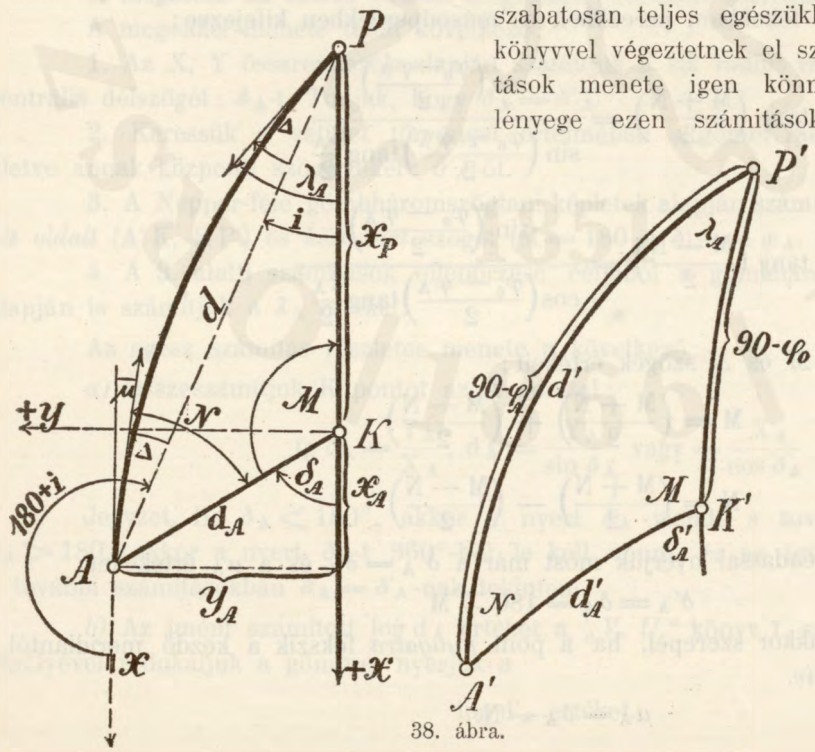
adja meg a σ_ω *értékét a 7-ik logaritmus egységeiben,*

Fontos megjegyzés: Ha $0 < \omega < 90$, vagy $270 < \omega < 360$, azaz ha ω az I. vagy IV. szögnegyedben van, akkor az *így nyert* σ_ω érték *komplementuma* lesz a képletbe helyettesítendő.

Ha $90° < \omega < 270°$, azaz ha ω a *II.* vagy *III.* szögnegyedben fekszik, akkor az előadott módon nyert σ_ω lesz a σ képletbe helyettesítendő.

6. cikk. Stereográfikus x, y és gömbi φ, λ rendezők közötti vonatkozások.

Minthogy az idevonatkozó sorok nincsenek elég élesen kifejtve, azért gömbháromszögtani zárt képletekkel vagyunk kénytelenek ezen számításokat elvégezni. Ezen számítások szabatosan teljes egészükben, 10 jegyű logaritmus könyvvel végeztetnek el szükségképen. — A számítások menete igen könnyen áttekinthető. — A lényege ezen számításoknak: a gömbi *poláris* háromszög megoldása *(38. ábra)*. Poláris háromszög alatt értve azt a gömbháromszöget, melynek csúcsai: a *vetületi központ* (K'), a gömb *polusa*, és a kérdéses A' gömbi pont. Ezen poláris gömbháromszög vetülete a KPA nem valódi síkháromszög. Ezen vetületi háromszögnek csak egy görbe (körív) oldala van, mert az AK és KP oldalak mint egyenes vonalak ábrázoltatnak.



38. ábra.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

I. Feladat.

Adva φ_A, λ_A. kerestetik a vetületi x_A, y_A rendező értékpár, és a *meridián konvergencia* A-ban.

Legyenek a K' ≡ vetületi központ ≡ koord. rendszer kezdőpont gömbi földrajzi rendezői:

$$\varphi_0, \text{ és } \lambda_0 = 0.$$

A megoldás menete a következő:

1. a KA'P' gömbháromszögre alkalmazva a *Nepper*-féle egyenleteket, számitjuk az ismeretes

$$\left.\begin{aligned} A'P' &= 90° - \varphi_A \\ K\,P' &= 90° - \varphi_0 \end{aligned}\right\} \text{ oldalak és a közbezárt } \lambda_A \text{ szög}$$

alapján az $A'K = d'_A$ gömbi oldal (radius vektor) és a δ'_A centrális gömbi délszög értékét;

2. az $A'K = d'_A$ hosszt a síkra redukálva, nyerjük a d_A sík radius vektor hosszát; ennek centrális sík délszöge = az előbb számitott δ'_A gömbi szögértékkel.

3. A sík d_A és δ_A poláris koordináták alapján számíthatjuk most már az A pont derékszögű sík koordinátáit.

A meridiánkonvergencia értékét A pontban (μ_A-t) az 1. alatti számitás adta **N** szög értékéből számíthatjuk:

$$\mu = \delta_A, - N.$$

Az egész számítás részletes menete a következő:

a) Képezzük az $\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_A)$, $\frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi_A)$ argumentumokat, fokokban, percekben, másodpercekben kifejezve.

b) Számítjuk a Nepper-féle gömbháromszögtani zárt képletekkel az $\frac{1}{2}(M + N)$ és $\frac{1}{2}(M - N)$ értékeket: — fokokban, percekben és másodpercekben kifejezve;

$$\operatorname{tang}\left(\frac{M+N}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\varphi_0 - \varphi_A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_A}{2}\right)\operatorname{tang}\frac{\lambda_A}{2}}$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{M-N}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\varphi_0 - \varphi_A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_0 - \varphi_A}{2}\right)\operatorname{tang}\frac{\lambda_A}{2}}$$

c) Számítjuk az M és N szögek értékeit:

$$M = \left(\frac{M+N}{2}\right) + \left(\frac{M-N}{2}\right)$$

$$N = \left(\frac{M+N}{2}\right) - \left(\frac{M-N}{2}\right)$$

d) egyszerű összeadással nyerjük most már a $\delta'_A = \delta_A$ és a μ_A értékeket:

$$\delta'_A = \delta_A = 180 \mp M$$

ahol a felső (—) előjel akkor szerepel, ha a pont *nyugatra* fekszik a kezdő meridiántól, azaz ha λ_A előjele *negativ*.

$$\mu_A = \delta_A - N.$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Minthogy $\delta_A > N$, azért a μ_A ezen képletből mindig + előjellel adódik.

Az A′ K oldal gömbi azimutja tehát

$$\alpha'_{A,K} = \delta_{A,K} \pm \mu_A = \delta_A + 180 \mp \mu, \text{ ahol a felső (—) előjel}$$

akkor szerepel, ha a pont *nyugatra* fekszik a kezdő meridiántól, azaz ha λ_A előjele negativ.

e) Ugyancsak egy ismert gömbháromszögtani képlettel nyerjük a szögértékben kifejezett A′ K = d′$_A$ radius vektor tangensének értékét: ϑ_A-t

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta_A}{2} = \frac{\sin\left(\frac{M+N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{M-N}{2}\right)} \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi_0 - \varphi_A}{2}\right)$$

f) A vetületi egyenletrendszer (lásd 1. képlet) értelmében most már

$$d_A = 2R \operatorname{tg} \frac{\vartheta_A}{2}\text{-ből}$$

nyerjük a sík radius vektornak hossz értékét.

g) Végül számíthatjuk síkanalitikailag az X_A, Y_A összrendezők értékpárt:

$$\begin{cases} Y_A = d_A \sin \delta_A \\ X_A = d_A \cos \delta_A \end{cases}$$

Ismételjük, hogy 10 jegyü logaritmus könyvvel kell mindezen számműveleteket elvégezni, ha a pontossági megállapodásokat respektálni akarjuk.

II. Feladat.

Adva az X_A, Y_A stereográfikus összrendezői értékpár; kerestetik μ_A, φ_A, λ_A.

Ismeretesek a K vetületi központ rendezői: $X_K = 0$, $y_K = 0$; φ_0 és tudjuk, hogy $\lambda_0 = 0$.

A megoldás az előbbi feladat megoldása: fordított sorrendben.

A megoldás menete tehát következő:

1. Az X, Y összrendezők alapján számítjuk a sík radius vektor hosszát d′$_A$-t, és a centrális délszögét: δ_A-t. Tudjuk, hogy $\delta_A = \delta'_A$.

2. Keressük a vetület törvényei értelmében a gömbi radius vektor d′$_A$ hosszát, illetve annak központi szögértékét: ϑ'_A-őt.

3. A Nepper-féle gömbháromszögtani képletek alapján számíthatjuk most — ismerve *két oldalt* (A′ K, K P′) és *közbezárt* szöget (M = 180 — δ) — a φ_A, λ_A és μ_A értékeket.

4. A 3. alatti számítások ellenőrzése céljából a gömbháromszögtani sinus képlet alapján is számítjuk a λ_A értéket.

Az egész számítás részletes menete a következő:

a) Összeszámítjuk K pontot az A ponttal:

$$\operatorname{tg} \delta_A = \frac{Y_A}{X_A};\ d_A = \frac{Y_A}{\sin \delta_A} \text{ vagy } = \frac{X_A}{\cos \delta_A}$$

Jegyzet. Ha $\delta_A < 180°$, akkor a nyert δ_A viendő a további számításokba; ha $\delta_A > 180$, akkor a nyert δ_A-t 360°-ból le kell vonni, és az így nyert szögértéket kell a további számításokban $\delta_A = \delta'_A$-nak tekinteni.

b) Az imént számított log d$_A$ értéket a „*V. U.*“ könyv 1. számú táblázat 3. oszlopa segélyével redukáljuk a gömbre, nyerjük a

log d′$_A$ értéket.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ezen értékből tüstént a másodpercekben kifejezett hosszra jutunk:

$$\log \frac{\vartheta_A}{2} = \log d'_A - \log 2R + \log \varrho''$$

ahonnan a $\frac{\vartheta_A}{2}$, a másodperc *4* decimálisára élesen visszakeresendő.

c) Képezzük a $\frac{\varphi_0 + \vartheta_A}{2}$, a $\frac{\varphi_0 - \vartheta_A}{2}$ és az $M = 180 - \delta'_A$ argumentumokat, és számítsuk

$$\operatorname{tang}\left(\frac{N+\lambda_A}{2}\right) = \frac{\sin\left(45 + \frac{\varphi_0 + \vartheta_A}{2}\right)}{\sin\left(45 + \frac{\varphi_0 - \vartheta_A}{2}\right)\operatorname{tang}\frac{M}{2}}$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{N-\lambda_A}{2}\right) = \frac{\cos\left(45 + \frac{\varphi_0 + \vartheta_A}{2}\right)}{\cos\left(45 + \frac{\varphi_0 - \vartheta_A}{2}\right)\operatorname{tang}\frac{M}{2}}$$

és ezen képletekből az $\left(\frac{N+\lambda_A}{2}\right)$ és $\left(\frac{N-\lambda_A}{2}\right)$ szögértékeket.

d) Most $N = \left(\frac{N+\lambda_A}{2}\right) + \left(\frac{N-\lambda_A}{2}\right)$

és $\lambda_A = \left(\frac{N+\lambda_A}{2}\right) - \left(\frac{N-\lambda_A}{2}\right)$-ből

nyerjük az N szög és a λ_A gömbi földrajzi hosszúság értékét.

A meridiánkonvergencia: $\mu_A = \delta_A - N$. Minthogy $\delta_A > N$, azért a μ_A ezen képletből mindig + előjellel adódik.

e) Az A pont földrajzi szélességét (φ_A-t) a:

$$\operatorname{tg}(\varphi_0 - \varphi_A) = \frac{\sin\frac{M-N}{2}}{\sin\frac{M+N}{2}}\operatorname{tang}\frac{\vartheta_A}{2}$$

gömbháromszögtani képletből fogjuk nyerni.

f) Ellenőrzésül számítjuk a

$$\sin\lambda_A = \frac{\sin M . \sin\frac{\vartheta_A}{2}}{\cos\varphi_A}$$ képletből a λ_A értékét.

Az I. és II. feladat megoldására a m. kir. háromszögelő hivatal külön nyomtatványokat használ, amelyeket itt be is mutatunk.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Stereográfikus vetület. Budai rendszer. Marosvásárhelyi rendszer.

Földrajzi összrendezőkből — stereográfikus összrendezők számítása.

1. Előkészítés.

Pont :

A≡ _____

K≡ _____

Φ_0 = ° ′ ″

φ_0 = ° ′ ″ L_0 = _____

Φ = ° ′ ″

φ = ° ′ ″ L = _____

$\frac{\varphi_0}{2}$ = ° ′ ″

$\frac{\varphi}{2}$ = ° ′ ″

$\frac{\varphi_0+\varphi}{2}$ = ° ′ ″

$\frac{\varphi_0-\varphi}{2}$ = ° ′ ″

L − L_0 = _____

log (L − L_0) = _____

(+) log α = 0.000 3262 4

log λ = _____

λ = ° ′ ″

$\frac{\lambda}{2}$ = ° ′ ″

2. A gömbháromszög megoldása.

log cos $\frac{\varphi_0-\varphi}{2}$ = _____

− log sin $\frac{\varphi_0+\varphi}{2}$ = _____

− log tg $\frac{\lambda}{2}$ = _____

log tg $\frac{M+N}{2}$ = _____

$\frac{M+N}{2}$ = ° ′ ″

$\frac{M-N}{2}$ = ° ′ ″

M = ° ′ ″

N = ° ′ ″

$\delta = 180 \pm M$ = ° ′ ″

(tájékozási állandó)

log sin $\frac{\varphi_0-\varphi}{2}$ = _____

− log cos $\frac{\varphi_0+\varphi}{2}$ = _____

− log tg $\frac{\lambda}{2}$ = _____

log tg $\frac{M-N}{2}$ = _____

log sin $\frac{M+N}{2}$ =

− log sin $\frac{M-N}{2}$ =

különbség =

+ log tg $\frac{\varphi_0-\varphi}{2}$ =

log tg $\frac{\vartheta}{2}$ =

log 2 R = 6.827 8003 000

log c =

3. y, x számítás a síkon.

log c =

log sin δ = _____

log y =

y_B = _____

log c =

log cos δ = _____

log x =

x_B = _____

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Stereográfikus vetület. Budapesti rendszer. Marosvásárhelyi rendszer.

Stereográfikus x, y összrendezőkből — földrajzi összrendezők számítása.

1. Előkészítés.

Oldal neve:	Kezdőpont:		
		$\Phi_0 =$ ° ′ ″	$L_0 =$
		$\varphi_0 =$ ° ′ ″	
		$\vartheta =$ ° ′ ″	
$\delta =$ ° ′ ″	t. p. log 2 R = 3. 172 1997 143	$\frac{\vartheta}{2} =$ ° ′ ″	$\frac{\varphi_0 + \vartheta}{2} =$ ° ′ ″
$M =$ ° ′ ″	log c =		
$\frac{M}{2} =$ ° ′ ″	log tg $\frac{\vartheta}{2}$	$\frac{\varphi_0}{2} =$ ° ′ ″	$\frac{\varphi_0 - \vartheta}{2} =$ ° ′ ″

2. A gömbháromszög két belszögének számítása.

$\log \sin \left(45° + \frac{\varphi_0 + \vartheta}{2}\right) =$	$\log \cos \left(45° + \frac{\varphi_0 + \vartheta}{2}\right) =$
$-\log \sin \left(45° + \frac{\varphi_0 - \vartheta}{2}\right) =$	$-\log \cos \left(45° + \frac{\varphi_0 - \vartheta}{2}\right) =$
$-\log \text{ tg } \frac{M}{2} =$	$-\log \text{ tg } \frac{M}{2} =$
log tg $\frac{N + \lambda}{2} =$	log tg $\frac{N - \lambda}{2} =$
$\frac{N + \lambda}{2} =$ ° ′ ″	$N =$ ° ′ ″
$\frac{N - \lambda}{2} =$ ° ′ ″	$\lambda =$ ° ′ ″
$\frac{M - N}{2} =$ ° ′ ″	$\frac{M + N}{2} =$ ° ′ ″

$\mu =$ ° ′ ″

3. A gömbháromszög egyik oldalának számítása.

$\log \sin \frac{M - N}{2} =$	
$-\log \sin \frac{M + N}{2} =$	
különbözet =	
log tg. $\frac{\vartheta}{2} =$	
log tg $\frac{\varphi_0 - \varphi}{2} =$	
$\frac{\varphi_0 - \varphi}{2} =$ ° ′ ″	
$\frac{\varphi_0}{2}$ ° ′ ″	
$\frac{\varphi}{2} =$ ° ′ ″	
$\varphi =$ ° ′ ″	

4. Ellenőrző számítás.

log sin M =	
+ log sin ϑ =	
összeg =	
− log cos φ =	
log sin λ =	
$\lambda =$ ° ′ ″	

5. Áttérés a szferoidra.

log λ =	
− log a =	0. 000 3262 400
log (L − L_0) =	
(L − L_0) =	° ′ ″
L_0 =	° ′ ″
L =	° ′ ″
Φ =	° ′ ″

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Függelék a stereográfikus vetülethez.*)

I. Cikk. A földrajzi szélességnek század másodpercre éles számítása a magyarországi stereográfikus összrendezők alapján. (Fasching-féle eljárás.)

Mindig *gömbi* földrajzi szélességről lesz szó, mert ha *ezt* ismerjük, a „*V. U.*“ könyv 123. lapján levő számtáblázattal egyszerű interpolálással nyerjük a szferoidikus szélesség értékét.

A stereográfikus vetületi tetszőleges A pontnak (melynek derékszögű sík összrendezői ismeretesek) gömbi földrajzi szélességét a *gömbi* poláris háromszögből számítottuk az előző oldalon.

Pedig önként kínálkozik — miként azt a következő cikkben a *meridián konvergenciánál* és a gömbi földrajzi *hosszúságnál* is majd megtesszük — a redukció számítással való megoldás. (5. ábrán a bal idom.)

A μ_A és λ_A számításnál a gömbi poláris háromszög $A'P'$ oldalának *irányredukcióját*, itt pedig ezen oldal vetületi *hosszredukcióját* kell csak valami ügyes gyakorlati fogással élesen kiszámítani.

Ismeretesek a kérdéses A vetületi pontnak derékszögű összrendezői x_A, y_A és egyszer és mindenkorra kiszámítottuk a gömbi „*Polus*“ összrendezőit a vetületi síkon:

Budapesti rendszerben $\begin{cases} x_P = -\ 2\,619\,969.0 \text{ öl.} \\ y_P = \quad 0.00 \text{ öl.} \end{cases}$

Kiszámíthatjuk tehát az AP vetületi egyenesnek P pontbeli *délszögét* (jelzése i) és az AP hosszúságot:

$$\text{I. . . . } \operatorname{tang} i = \frac{y_A}{x_A - x_P} \qquad \text{és} \qquad \text{II. . } \overline{AP} = \frac{x_P - x_A}{\cos i}.$$

Mivel az i szög Magyarország bármely pontjára nézve $5°$*-nál kisebb* szög, azért a II. képletben a $\cos i$-nek logaritmus értéke gyorsan és *élesen* nyerhető mindig.

Nevezzük a II. szerint élesen kiszámított AP vetületi hosszt d-nek; az ennek megfelelő A'P' gömbi meridián ívnek hosszát *ölekben* kifejezve pedig jelöljük d'-vel. Jelöljük az AP vetületi oldal hosszredukcióját σ-val, azaz legyen

$$\text{III. . . . . } \sigma = \log d - \log d'.$$

Magyarázatra sem szorul, hogy a d' értékből a gömbi A' pontnak φ gömbi földrajzi szélességét ezen képlettel számíthatjuk:

$$\text{IV. . . . . } (90° - \varphi)'' = \frac{d'}{R} \cdot \varrho'', \text{ ahol}$$

R a Gauss gömb ismeretes sugara, ϱ'' pedig az absolut szögegység másodperc száma ($\log \frac{1}{\varrho''} = \log \sin 1''$ a logaritmus könyvben.)

Mi a II. képlet alapján ismerjük a d értékét, módunkban lesz kiszámítani a σ-t; tehát ismeretes lesz III. alapján a d' érték, amelyből IV. szerint kiszámítható a φ illetve közvetlenül a $(90°-\varphi)$ értéke. Tehát

$$\text{V. . . . . } \log (90°-\varphi)'' = \left(\log d + \log \frac{\varrho''}{R}\right) - \sigma$$

Ami a σ számítását illeti, úgy az eljárást 80 km. oldalhosszig érvényesen, az előbbi §-ban tüzetesen ismertettük. Eszerint a jelen esetben

$$\text{VI. . . . . } \sigma = \sigma d_A + \sigma d_P + \sigma_d',$$

ahol az *első* tag értéke a „*V. U.*“ könyv első táblázatából (2. oszlop) kivehető a *közelítő* $AK = d_A$ argumentumhoz;

a *második* tag értéke pedig egyszer és mindenkorra ki volt számítható a budai stereográfikus vetületre nézve:

$$\sigma d_P = \log \frac{1}{\cos \frac{(90° - \varphi_K)}{2}}, \qquad \text{ahol } \varphi_K = 47°\ 26'\ 21.''1372.$$

*) A jelen függelékben közölt összes képletek és táblázatok e könyv szerzőjének levezetései.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Azonban a harmadik tag nem számítható a háromszög oldalak redukálására a „*V. U.*“ könyvben adott 2. számu táblázattal, mert itt több *ezer kilométeres* hosszakról van szó. Ezen σ_d'-nek az éles számítására kellett egy praktikus módot kieszelni.*)

Erre a célra szolgál az itt következő „*compl* σ_d'“ táblázat, amelyből *ismételt közelítő* számítással a σ_d'-nek éles értékét kaphatjuk.

Számtáblázat a compl. σ_c redukció tag számításához.

$90°-\varphi$	$(90°-\varphi)''$	compl. σ_d'	dif. **100**''-re dif. **1000** ölre		(x_A) Bud. rendsz.	(x_A) Marosv. r.
40° 20′	145 200	**0.009** 0045,1			— 135	
30	800	0794,0	124.9	75	125	
40	146 400	1545,9	125.3	75	— 115	
50	147 000	2301,1	125.9	76	105	
41°	600	3059,3	126.5	76	— 95	
10′	148 200	3820,8	127.0	76	85	
20	800	4585,4	127.5	77	— 75	
30	149 400	5353,0	128.0	77	65	
40	150 000	6123,9	128.5	77	— 55	— 105
50	600	6897,9	129.0	77	45	— 95
42°	151 200	7675,1	129.5	78	— 35	— 85
10′	800	8455,4	130.0	78	— 25	— 75
20	152 400	9238,7	130.5	78	— 15	— 65
30	153 000	**0.010** 0025,4	131.1	79	— 5	— 55
40	600	0815,1	131.7	79	+ 4	— 45
50	154 200	1608,0	132.1	79	+ 12	— 35
43°	800	2404,0	132.7	80	+ 22	— 25
10′	155 400	3203,2	133.1	80	32	— 15
20	156 000	4005,5	133.7	80	+ 42	— 5
30	600	4811,0	134.3	81	52	+ 4
40	157 200	5619,7	134.9	81	+ 62	
50	800	6431,4	135.3	81	72	+ 12
44°	158 400	7246,3	135.9	82	+ 82	+ 22
10′	159 000	8064,5	136.3	82	92	+ 32
20	600	8885,7	136.9	82	+ 102	+ 42
30	160 200	9710,1	137.4	82	112	+ 52
40	800	**0.011** 0537,7	138.0	83	+ 122	+ 62
50	161 400	1368,4	138.5	83	132	+ 72
45°	162 000	2202,3	139.0	83	+ 142	+ 82
10′	600	3039,4	139.5	84	152	+ 92
20	163 200	3879,5	140.0	84	+ 162	+ 102
30	800	4722,9	140.5	84	172	
40	164 400	5569,4	141.2	85	+ 182	
50	165 000	6419,1	141.7	85	192	
46°	600	7272,0	142.2	85	+ 202	
10′	166 200	8127,9	142.7	86	212	
20	800	8987,1	143.2	86	+ 222	

*) Az előbbi §. szerint $\sigma_d' = \left(\log \sin\left(\frac{90°-\varphi}{2}\right) - \log \frac{(90°-\varphi)}{2}\right)$.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Mielőtt ezen igen célszerűen alkalmazható táblázatnak használatával megismerkednénk, foglaljuk össze egy gyakorlati képletbe az I—VI. képleteket:

$$\text{VII.} \quad \log (90°-\varphi)'' = \left(\left\{ \log \frac{\varrho''}{R} + \log (x_P - x_A) \right\} - \left\{ \log \cos i + \sigma d_A + \sigma d_P \right\} \right) + \text{complementum } \sigma_d'.$$

Ezen VII. képlet másodpercekben adja a $(90°-\varphi)$ értéket.

E képletben a (. .)-ben foglalt rész minden esetben azonnal (kisérletezés nélkül) **véglegesen** kiszámítható. Jelöljük ezt a véglegesen kiszámítható részt egyetlen betűvel T-vel és rendezzük e részt a benne szereplő állandókra tekintettel:

$$\text{VIII.} \quad \begin{cases} \log (90°-\varphi)'' = T + \text{compl. } \sigma_d', \text{ ahol } T = (k + \log (x_P - x_A) \\ - (\log \cos i + \sigma d_A) \text{ és } k = \text{konstáns} = \log \frac{\varrho''}{R} - \sigma d_P. \end{cases}$$

A k állandó értékét a *budapesti* stereográfikus rendszerre nézve kiszámítottuk:

$$\text{IX.} \quad \ldots \ldots \ldots k = 8{,}756\ 9847\ 0 - 10.$$

Ez a k érték tehát bármely magyarországi φ érték számítására érvényes.

A VIII. képlet szerinti számítás menete most már a következő:

1. Kiszámíthatjuk a T tagot, hétjegyű logaritmus könyvvel, a lehető legélesebben.

2. Az általunk itt adott segédtáblázatból a szóban forgó A pontnak x_A abscissájához (mint megközelítő argumentumhoz) keressük a „*compl.* σ_d'“ közelítő értékét. Az így nyert érték csak megközelítő érték: jelöljük ((compl. σ_d'))-vel.

3. Ezen ((compl. σ_d')) értéket adjuk hozzá T-hez és keressük a numerust. Nyerjük 10—15 másodpercre hibásan a $(90°-\varphi_A)''$ értéket.

4. Ezen közelítő $(90°-\varphi_A)''$ értékhez mint argumentumhoz keressük a táblázat 2. és 3. oszlopából a compl. σ_d' értékét; ezen már *jól közelítő* értéket (compl. σ_d')-vel jelöljük. Ezt adva az ismeretes T-hez és keresve a numerust, már *1 másodperce* éles értékét kapjuk $(90-\varphi)''$-nek.

5. Végül ezen $(90-\varphi)''$ argumentumhoz a tábla (2. és 3. oszlop) megadja a *végleges* compl. σ_d' értéket, amelylyel VIII. szerint a végleges és legalább $\pm$ *0.″02*-re éles $(90-\varphi_A)''$ érték kiszámítható.

Leirva jóval hosszadalmasabbnak tünik fel a számítás, mint amilyen valójában. A táblázat 1. oszlopa elvégzi a $(90-\varphi)$-nek másodpercekben nyert értékéből a fok és percre való áttérést.

Egy számpélda megmutatja az egész számítás egyszerűségét.

Keressük „*Kesztej*“ pont φ-jét; adva a budapesti rendszerben

$$x_{\text{Keszt.}} = +\ 47\,399.50 \text{ öl.}$$
$$I_{\text{Keszt.}} = -\ 215\,868.10 \text{ öl.}$$

Mindenekelőtt kiszámítottuk élesen az i-t és közelítőleg a (d_K) távolságot:

$$i = 4°\ 37'\ 36.''7$$
$$(d_K) = 221\,010 \text{ öl.}$$

Ezek alapján véglegesen számíthatjuk a T értékét:

$$\log (x_P - x_A) = 6.426\ 0819\ 3$$
$$+ k = 8.756\ 9847\ 0 - 10$$
$$\text{I} = 5.183\ 0666\ 3$$
$$\log \cos i = 9.998\ 5823\ 6 - 10$$
$$+ \sigma_K = 0.000\ 2342$$
$$\text{II} = 9.998\ 8165\ 6$$

$$T = I - II = 5.184\ 2500\ 7.$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Segédszámítás a táblázattal.

$(X_A) = X_{Keszt.} = +\ 47400$ ölnek megfelel a 3. oszlopban közelítőleg

$$\begin{array}{r} 0.010\ 4005 \\ +\ \ 432 \\ \hline 0.010\ 4437 \\ +\ \ \ T \\ \hline 5.194\ 6938; \end{array} = ((\text{compl. } \sigma_{d'}))$$

ennek numerusa adja a $(90\text{-}\varphi)''$-nek durván közelítő értékét:

$$((90° - \varphi))'' = 15\ 6564.''0.$$

Ezt argumentumnak használva a 2. oszlopban, a 3. oszlop egy jobb értékét adja compl. $\sigma_{d'}$-nek:

$$\begin{array}{r} 0.010\ 4811\ 0 \\ -\ \ \ 48\ 6 \\ \hline 0.010\ 4762,4 \\ +\ \ \ T \\ \hline 5.194\ 7263\ 1; \end{array} = (\text{compl. } \sigma_{d'}).$$

és ennek numerusa:

$$(90°\text{-}\varphi)'' = 15\ 6576.''4.$$

Ezt ismét argumentumnak használva:

$$\begin{array}{rl} \text{compl. } \sigma_{d'} & = 0.010\ 4778,6 \\ +\ \ T & = 5.184\ 2500\ 7 \\ \hline & 5.194\ 7279\ 3, \text{ tehát} \end{array}$$

$$90°\text{-}\varphi = 15\ 6577.''00 = 43°29'37.''00$$

amely értéket kivonva 90°-ból.

X. . . . . $\varphi_{Keszt.} = 46°\ 30'\ 23.''00.$

Elvégeztük a „V. U." könyvnek 70. oldalán a gömbháromszögtani uton való számítást is, és az a

$$\varphi_K = 46°\ 30'\ 22.''980$$ értéket adta.

A X. alatti érték alapján a V. U. könyv 123. lapján levő táblázatból Kesztej pont *szferoidikus földrajzi* szélességére a

$$\Phi_K = 46°\ 33'\ 6.''40$$ értékre jutottunk.

II. cikk. A földrajzi hosszúságnak és a meridiánkonvergenciának század másodpercre éles számítása a magyarországi stereográfikus összrendezők alapján. (Fasching-féle eljárás.)

A szóban forgó feladatot a gömbi poláris háromszögnek *gömbháromszögtani* megfejtése által oldották meg ezideig.*)

Idevonatkozó vizsgálataink azt mutatták, hogy egyszerűbb és gyorsabb számítással jutunk célhoz, ha a szóban forgó A' gömbi ponthoz tartozó (A', P', K') gömbi poláris háromszögnek vetületi képéből (5. ábrán a bal idom) az AP oldal irányredukciója segítségével oldjuk meg a μ_A és λ_A számítását.

Ugyanis a vetületi poláris háromszögnek puszta megtekintése mutatja, hogy i-vel jelölve a PA egyenesnek délszögét és Δ-val jelölve a PA meridián vetületi irányredukcióját:

I. . . . . meridiánkonvergencia $= \mu_A = i - \Delta$.

II. . . . . földrajzi hosszúság $= \lambda_A = i + \Delta$.

Hangsúlyozzuk, hogy ez a képlet *teljesen szigorú:* elhanyagolás nincs.

*) Lásd e könyv 98. lapján közölt számpéldát.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Egyszer és mindenkorra ismeretes mennyiség a polus (P) összrendezője:

A *budapesti* rendszerben: $\begin{cases} X_P = -2\ 619\ 969.0 \text{ öl.} \\ I_P = 0.00. \end{cases}$

A *marosvásárhelyi* rendszerben: $\begin{cases} X_P = -2\ 683\ 185.0 \text{ öl} \\ I_P = 0.00\ . - \end{cases}$

Ismeretesek továbbá mindenkor az illető A pontnak vetületi derékszögű sík összrendezői: X_A és I_A.

Az ismeretes összrendezők alapján mindenekelőtt kiszámítható az I. és II. képletekben szereplő i délszög értéke:

$$\text{tang } i = \frac{I_A}{X_A - X_P}, \text{ azaz}$$

III. . . . . $log\ tang\ i = log\ I_A - log\ (X_A\ X_P)$

Mivel az i szög Magyarország bármely pontjára egy 5°-nál kisebb, hegyes szögérték; az 5°-nál kisebb szögekre nézve pedig a 7 jegyű logaritmus könyvben másodpercről-másodpercre haladó külön log tang táblázat található: az i értékét $\pm 0.''005$-re élesen számíthatjuk ki a 7 jegyű logaritmus könyv segítségével.

Hátra van még az I. és II. képletben szereplő Δ irányredukció értékének éles számítása. Itt az előző §-ban (83. lapon) levezetett *absolut szabatos* (elhanyagolás nélküli) irányredukció képletből indulunk ki és igyekezünk ezen képletet a szóban forgó speciális esetnek megfelelő alakra hozni:

$$\text{IV. . . } \log \text{ tang } \Delta = \log \left(I_A . \frac{[X_P]}{4R^2} \right) - \log \left\{ 1 \pm \left(I_A . \frac{[X_P]}{4R^2} \right) \frac{X_A}{I_A} \right\},$$

ahol R a Gauss-gömb sugara.

$$\text{V. . . . . } \begin{cases} \text{Legyen : } K = \dfrac{[X_P]}{4R^2} = \text{constáns.} \\ \text{és } (I) = I_A . K \text{ , akkor} \end{cases}$$

a IV. képlet alakja:

$$\text{VI. . . . . } \log \text{ tang } \Delta = \log (I) - \log \left\{ 1 \pm (I) \frac{X_A}{I_A} \right\}$$

Hangsúlyozzuk, hogy a VI. képlet adta Δ mindig az a hegyes szög lesz, amely a log. könyvnek tangens rovata *közvetlenül* megad.

Hangsúlyozzuk, hogy a Δ előjele mindig + lesz: tehát az I. képlet jobb oldala tényleg *különbséget* jelent, mert az i szöget is mindig + előjelűnek tekintjük.

A K értékei:

a **budapesti** rendszerben $\log K = 2.762\ 6956\ 1{-}10$

a *marosvásárhelyi* „ $\log K = 2.773\ 0500\ 2{-}10$

Hangsúlyozzuk továbbá, hogy a VI. képletben levő

$$(I) \frac{X_A}{I_A} \text{ tag}$$

tényleg *hozzáadandó* 1-hez ha az X_A előjele **negatív,** és az $(I) \frac{X_A}{I_A}$ tag **kivonandó** 1-ből, ha az X_A előjele *pozitív!*

A számítás menete tehát röviden a következő:

1. Kiszámítani az i szöget;
2. Kiszámítani a log (I) értéket;

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

3. Kiszámítani a $\log \left\{ (\mathrm{I}) \frac{X_A}{I_A} \right\}$ értéket, és ennek numerusát 1-hez adni vagy 1-ből kivonni.

4. Az így nyert $\left(1 \pm (\mathrm{I}) \frac{X_A}{I_A} \right)$ értéknek logaritmusát keresni és azt log (I)-ből kivonni.

5. Az így nyert log tang Δ értékhez a log könyvből a Δ-t keresni.

6. **I.** és **II.** szerint előállítani a μ_A és λ_A értékeit.

Ugy a μ_A mint a λ_A értékét ilymódon mindig + előjellel kapjuk. Megállapodás szerint most már ugy a μ_A mint a λ_A elé — előjelt irunk ha I_K előjele + és fordítva.

A gyakorlati számítást a következő előnyomtatott séma szerint célszerű elvégezni:

$X_A =$	$I_A =$	compl. log $I_A =$
$X_P =$	log $I_A =$	+ log $X_A =$
$(X_A - X_P) =$	+ log K = ...	+ log (I) =
log $I_A =$	log (I) =	log (I) $\frac{X_A}{I_A} =$
— log $(X_A - X_P) =$	— log $\left\{ 1 + (\mathrm{I}) \frac{X_A}{I_A} \right\} =$	num. (I) $\frac{X_A}{I_A} =$
log tang i =	log tang $\Delta =$	$\pm$ 1.000 000
i =	$\Delta =$	$\left\{ 1 \pm (\mathrm{I}) \frac{X_A}{I_A} \right\} =$
	$\mu_A = \mathrm{i} - \Delta =$	
	$\lambda_A = \mathrm{i} + \Delta =$	

A sémához megjegyezzük, hogy az X_P és *log K* értékek az 1. illetve 2. oszlopba előre beirandók aszerint, amint a budapesti, vagy a marosvásárhelyi rendszerben dolgozunk.

Ha a μ és λ értékeket *0".1*-re élesen akarjuk csak kiszámítani, úgy az *i* számítását 6 jegyű, a Δ számítását pedig elégséges 5 jegyű logaritmus könyvvel végezni, amint azt a következő két számpéldán tettük.

Stereográfikus vetület. *Budapesti rendszer.*

„*A*" *pont neve:* Derna

$x_A = +$ 13875.0	$y_A = -$ 129956.0	4.88620—10
(—) 2619969.0	5.11380	(+) 4.14224
2633844.0	+ 2.76270—10	(+) 7.87649—10
5.113796	7.87650—10	6.90493—10
(—) 6.420590	(—) 9.99965—10	(—) 0.00080340
8.693206—10	7.87685—10	1.00
i = 2° 49' 29."02	*Δ = 0° 25' 53."32*	0.99919660

$$\mu_A = i - \Delta = 2° 23' 35."70 \quad (+)$$

$$\lambda_A = i + \Delta = 3° 15' 22."34 \quad (+)$$

Mivel y_A előjele *negativ,* azért úgy a μ_A, mint a λ_A előjele *positiv*, amint azt zárjelek közt feltüntettük.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Stereográfikus vetület. *Marosvásárhelyi rendszer.*

„*A*“ *pont neve:* 3. bányakő (Petrozsény).

$x_A = +\ 65201.0$	$y_A = +\ 39687.0$	5.40135—10
$(-)\ 2683185.0$	4.59865	$+\ 4.81426$
2748386.0	$+\ 2.77305—10$	$+\ 7.37170—10$
4.598648	7.37170—10	7.58731—10
$(-)\ 6.439088$	$(-)\ 9.99831—10$	$(-)\ 0.0038665$
8.159560—10	7.37339—10	1.00
$i = 0°\ 49'\ 38.''20$	$\Delta = 0°\ 8'\ 7.''32$	0.9961335

$$\mu_A = i - \Delta = 0°\ 41'\ 30.''88\ (-)$$
$$\lambda_A = i + \Delta = 0°\ 57'\ 45.''52\ (-)$$

Mivel az y_A előjele positiv (+), azért úgy a μ_A, mint a λ_A előjele negativ (—), amint azt zárjelek között feltüntettük.

Némi gyakorlattal 7 jegyű logaritmus könyvvel $\pm$ 0.''005-re élesen *15* perc alatt lehet egy ily μ és λ számítást elvégezni, ami a régebbi számítási módokhoz képest igen nagy haladásnak mondható.

Hogy azonban a μ és λ képletében szereplő Δ irányredukció értékét **0.''1**-re élesen minden körülményesebb számítás nélkül 1—2 percnyi idő alatt előállíthassuk, igyekeztünk a számításra számtáblázatot kitalálni.

Ismét a szigorú IV. alatti kifejezésből indultunk ki:

$$tang\ \Delta = \frac{y_A \left\{\frac{|x_P|}{4R^2}\right\}}{1 - \left\{\frac{|x_P|}{4R^2}\right\} x_A} \cdot -$$

Osszuk el ezen egyenlet számlálóját és nevezőjét $\left(\frac{|x_P|}{4R^2}\right)$-el:

$$tg\ \Delta = -\frac{y_A}{\left(\frac{4R^2}{|x_P|}\right) - x_A}$$

legyen $C = \frac{4R^2}{|x_P|}$, akkor

VII. . . . . $tg\ \Delta = \frac{y_A}{C - x_A}$, amely szabatos képletben szereplő **C** állandónak értéke:

a *budapesti* rendszerben $log\ c = 7.237304391$
$c = 17270479$ öl

a *marosvásárhelyi* „ $log\ c = 7.226949980$
$c = 16863587$ öl

A VII. képlet szerint $tg\ \Delta$ akkor maximális értékű, ha y_A maximum és az $|x_A|$ maximum. A *budapesti* rendszerben

$y_A\ max. = +\ 220000$ öl
$x_A\ max. = +\ 180000$ öl, tehát a VII. képlet szerint a budapesti rendszerben:

$$tang\ \Delta_{max.} = \frac{220000}{17270479 - 180000}$$
$$= \frac{220000}{17090479}.$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Megoldva azt találjuk, hogy $\Delta_{max.} = 0° 44' 21''$. Tehát az elképzelhető $\Delta_{max.}$ érték is még oly kicsiny, hogy önként felvetődik az a gondolat, nem-e lehetne tang Δ helyett az $|\Delta|$ értéket a VII. képlet baloldalára írni?

A 6. jegyű log. könyvben

$$log\ tang\ 0° 44' 30'' = 8.112110$$

Másrészt $(44' 30'' = 2670'')$-nek

$$\text{absolut értéke } log \frac{2670}{\varrho''} = 8112086$$

tehát **24**

egység a 6-ik helyen a különbség log tg $\Delta_{max.}$ és log $|\Delta_{max.}|$ értékek között. Mivel a logaritmus könyvben log. tang. $44' 30''$-nél egy másodperc 162 egység különbözetet okoz a 6-ik helyen: azért a talált *24* egység elhanyagolása szélső értékben $^1/_7$ másodperc hibát okoz a Δ értékében. Tehát általában $\pm$ **0.**″1-re élesen adja bármely magyarországi pontra nézve a Δ értékét (másodpercekben) ez a képlet:

$$\text{VIII. } \Delta'' = \frac{y_A}{C - x_A} \varrho'', \text{ ahol } log\ \varrho'' = log \frac{1}{sin\ 1''} = 5.314425. —$$

Ezen képlet legfontosabb tanulsága az, hogy *ugyanazon x_A érték mellett a Δ'' érték lineáris függvénye y_A-nak és viszont.* Ha tehát az $y_A = 1000$ öl értékre nézve, kiszámítjuk VIII.-ból az $x_A = 1000$, $x_A = 2000$, $x_A = 3000$ öl stb. helyekre nézve a Δ'' értékeket és azokat táblázatba foglaljuk, úgy adott esetben az e táblából az x_A-hoz interpolálással kivett Δ_0'' értéket szorozva y_A-val: meglesz a Δ'' érték.

E táblázatot elkészitettük, de célszerűségi okokból nem a Δ_0'' értékeket, hanem azok logaritmusait adja a táblázat.

Stereográfikus vetület. *Marosvásárhelyi rendszer.*

Számtáblázat

a poláris háromszög irányredukciójának számítására.

(Az x_A argumentum hosszegysége = 1000 öl.)

x_A	$log\ \Delta_0''$	*diff.*		x_A	$log\ \Delta_0''$
+ 0	1.087473			— 0	1.087473
+ 10	7732	1	26	— 10	7217
+ 20	7991	2	51	— 20	6960
+ 30	8249	3	77	— 30	6704
+ 40	8507	4	103	— 40	6447
+ 50	1.088766	5	129	— 50	1.086191
+ 60	9024	6	154	60	5934
+ 70	9283	7	180	70	5678
+ 80	9541	8	207	80	5421
+ 90	9799	9	232	90	5165
+ 100	1.090057			100	1.084909

Jegyzet: mivel $\pm$ 3 log. egységnek a 6. helyen $y_A = 100\,000$ öl esetében sem felel még meg $\pm$ *0.″01* a Δ'' értékben, azért egyetlen *diff.* táblázattal interpollálhatunk dacára annak, hogy a differencia 259 és 256 között változik a táblázatban.

Egy számpélda mutatja az eljárás egyszerűségét.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

„*A*“ *pont neve:* 3. bányakő (Petrozsény).

$x_A = +\ 65\,201.0$ öl

$y_A = +\ 39\,687.0$ öl

1000 ölet véve hosszegységül, az $x_A = +\ 65.2$ értékhez a táblázattól

a $log\ \Delta_0'' = 1.089\,024$

129

5

$= 1.089158$ értéket adja.

Ugyancsak 1000 öles egységre képezve az y_A logaritmusát:

$log\ y_A = 1.598648$, kapjuk a $log\ \Delta'' = log\ \Delta_0'' + log\ y_A = 2.687806$ értéket, amelynek numerusa:

$\Delta'' = 487.''31 = 8'\ 7.''31$, amely érték 0.″01-el különbözik csak a szigorú számítással (105. lapon) nyert Δ'' értéktől. A Δ_0'' táblázattal végezve tehát a szóban forgó pontra a μ és λ számítást, a séma lesz:

Stereográfikus vetület. *Marosvásárhelyi rendszer.*

„*A*“ *pont neve: 3. bányakő (Petrozsény).*

$x_A = +\ 65201.0$	$y_A = +\ 39687.0$	Eredmény:
$-\ 2683185.0$	1.598648	
2748386.0	1.089024	$\mu = i - \Delta = 0°\ 41'\ 30.''89\ (-)$
4.598648	129	$\lambda = i + \Delta = 0°\ 57'\ 45.''51\ (-)$
$(-)\ 6.439088$	5	
$8.159560-10$	2.687806	
$i = 0°\ 49'\ 38.''20$	$\Delta = 8'\ 7.''31$	

A közölt log Δ_0'' táblázat a *marosvásárhelyi* rendszerre vonatkozik; a budapesti rendszerre vonatkozó táblázat e kötet függelékében megtalálható.

A meridiánkonvergencia az adott log Δ_0'' táblázatok segítségével a legtöbb gyakorlati célnak megfelelő pontossággal végezhető el.

E módszer szerint a μ számítása minimális gyakorlattal is 10 perc alatt elvégezhető.

3. Cikk. A meridiánkonvergencia grafikus meghatározása. (Fasching-féle meridián szerkesztés.)

Ha például egy kataszteri térképszelvénybe (stereográfikus vetületi) bele akarjuk rajzolni a meridián irányát (valódi északdéli irány), úgy azt egyszerű szerkesztéssel a következő eljárással tehetjük.

Láttuk, hogy (elhanyagolás nélkül) szigorúan áll ez a három képlet:

$$\mu_A = i - \Delta$$

$$tg\ i = \frac{y_A}{x_A - x_P}$$

$$tg\ \Delta = \frac{y_A}{C - x_A}.$$

Könnyű meggyőződni arról, hogy Magyarország esetében szélső értékben **egy percre** hibás Δ értéket kapunk, ha a tg Δ képlet jobb oldalán az x_A tagot egészen elhanyagoljuk. És 0.″2-et hanyagolunk csak el, ha a $tg\ i$ és $tg\ \Delta$ értékeket $|i|$ és $|\Delta|$ értékeknek tekintjük.

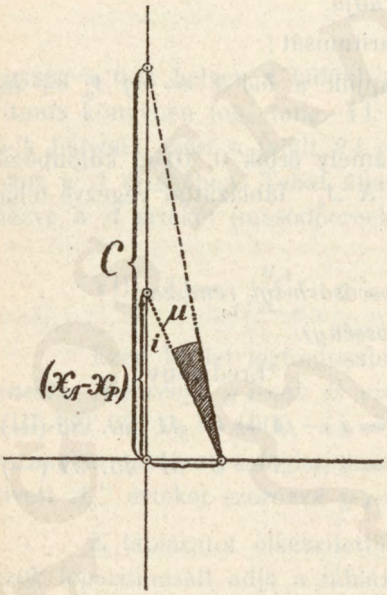
© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Tehát *grafikus* eljárásra nézve minden esetre egészen pontosnak mondható eredményt ad ez a képlet:

$$\text{IX.} \quad \mu_A = \frac{y_A}{(x_A - x_P)} - \frac{|y_A|}{C}$$

A **C** és $\mathbf{x}_P$ állandók értékeit közöltük az előbbi cikkben.

A μ-nek grafikus szerkesztése a IX. képlet alapján elemi módon eszközölhető, megjegyezvén, hogy a IX. képletben az x_P a *saját (—) előjelével helyettesítendő*, tehát $(x_A - x_P)$ valójában $= (x_A + x_P)$ ahol csak az x_A előjele lehet + vagy minus.



39. ábra.

Rajzolunk egy derékszöget*) (39. ábra) és annak hosszabbik szárára rakjuk fel tetszőleges léptékben az $(x_P - x_A)$ értékét és a C értéket a derékszög csúcsából indulólag. A másik szárra rakjuk fel az y_A értéket ugyanazon méretarányban. Az y_A végpontját összekötve az $(x_A - x_P)$ és a C méretek végpontjaival: a két összekötő vonal által bezártszög adja a μ értéket.

Ha most már a kataszteri szelvénybe bele akarjuk rajzolni a *valódi* északdéli irányt, akkor ezt a nyert μ szöget az x irányú szelvényvonal mellett felrakjuk úgy, amint azt a 40. ábra mutatja:

Ilyen esetben a IX. képletben x_A és y_A helyébe legcélszerűbb az illető térképszelvény *központjának* összrendezői értékeit helyettesíteni.

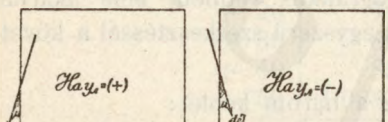
Megjegyzés az I—III. cikkekhez. A 71. lapon közöltük a **budapesti** és a **marosvásárhelyi** $+x$ tengelyek tájékozási hibáit. Ha tehát adott esetben a φ_A, λ_A és μ_A legmegfelelőbb értékeit akarjuk kiszámítani, akkor a közölt számítások előtt az adott x_A, y_A összrendezőket transformálni kell olymódon, hogy:

1. Kiszámítjuk a KA délszöget $(\delta_{K,A})$ ezen képlettel

$$tang\, \delta_{K,A} = \frac{y_A}{x_A}$$

és az AK pontos hosszát:

$$log\, \overline{KA} = \frac{y_A}{sin\, \delta_{K,A}} = \frac{x_A}{cos\, \delta_{K,A}}. \quad —$$



40. ábra.

2. Most ha az A pont a **budapesti** rendszerben van megadva, úgy a $\delta_{K,A}$ értékéből **kivonunk 6.′44**-et; ha pedig az A pont a *marosvásárhelyi* rendszerben van megadva, akkor a $\delta_{K,A}$ értékhez **hozzáadunk 16.′08**-et.

3. Az előbb nyert log KA és az így transformált délszöggel számítjuk most ki az A pont x_A és y_A transformált összrendezőit:

$$log\,(x_A) \overline{\overline{trans.}}\; log\, \overline{KA} + log\, cos\,(\delta_{K,A})_{trans.}$$

$$log\,(y_A) \overline{\overline{trans.}}\; log\, \overline{KA} + log\, sin\,(\delta_{K,A})_{trans.}$$

Az így nyert transformált összrendezőkkel végezzük el most már a φ_A, λ_A és μ_A számítást.

*) Ha van szelvénykeret, akkor a derékszög már megvan a térképen.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

5. §. A konform hengervetület.

1. cikk: A Merkátor vetület egyenletei.

A konform hengervetületet először *Merkátor* használta a középkorban: tengerészeti térképek számára (1569. évben). Az egyenes körhenger az *ekvátoron* érintette a gömböt: a henger alkotók tehát párhuzamosak voltak a gömb polusain átmenő diameterrel, az úgynevezett sarktengelylyel. Ezen vetületet *egyenes tengelyü* konform hengervetületnek nevezi az irodalom. A vetítés *törvényei* a következők: (41. ábra).

1. Az ekvátor képe legyen *egyenes* vonal.

2. A gömbi meridiánok mint egymás között ***párhuzamos egyenesek*** ábrázoltassanak és merőlegesen álljanak az ekvátor képéhez.

3. A vetületi meridián egyenesek távola egymás között szigoruan egyenlő a gömbi meridiánok egymástól való távolaival az ekvátoron. (Valódi ekvátori foktávolságok).

4. A parallel körök képei legyenek az *ekvátorral párhuzamos egyenes* vonalak.

5. A parallel körök egyenes képeinek egymástól való távolsága most már úgy legyen megállapítva, hogy *ezáltal a vetület konform legyen.*

Ha a kezdő meridián egyenes vonalu képét tekintjük **x** tengelynek, az ekvátor képét pedig **y** tengelynek, és φ, λ jelenti a pontok gömbi földrajzi rendezőit, akkor a vetületi egyenletrendszer az itt 1—5. alatt előadottak miatt szükségképen ily alaku:

$$1. \quad \begin{cases} y = R\,\lambda \\ x = f_1(\varphi) \end{cases}$$

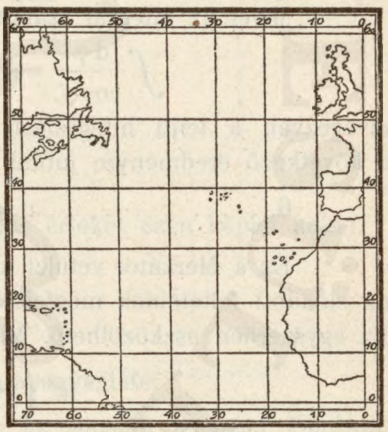
A lineármodulus pedig az egységgel egyenlő az *ekvátoron*, azután *északi* és *déli* irányban — mint a φ, illetve x függvénye nő:

$$2. \quad l = f_2(\varphi) = f_3(x).$$

A lineármodulus tehát *egy argumentumos* táblázatból lesz kiszedhető.

Mivel a λ-t másodpercekben kifejezve szoktuk használni, azért az 1. egyenletrendszerben:

$$4. \quad y = \frac{R}{\varrho''}\,\lambda''$$



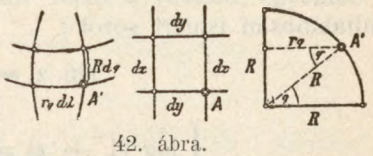
41. ábra.

Az 1. alatti vetületi egyenletrendszer második egyenletének jobb oldali függvényét az 5. alatt előadott feltételnek megfelelőleg kell megállapítani.

Minthogy az 1. és 2. követelményből kifolyólag a *meridián* és *parallelkör* iránya lesz bármely pontban a két Tissot-féle főirány, azért az 5. alatti követelmény teljesül, ha a lineár modulus e két főirányban *ugyanaz.*

A 9. ábra szerint a *meridián* irányban a lineár modulus

$$l_x = \frac{dx}{R\,d\varphi'}$$



42. ábra.

az y, azaz a parallel kör irányában pedig a lineár modulus:

$$l_y = \frac{d\,y}{r\varphi\,d\,\lambda};$$ ahol $r\varphi$ (42. ábra) a φ szélességben a parallel kör sugarát jelenti.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A konfirmitás tehát meglesz, hogyha:

$$l_x = l_y, \text{ azaz ha } \frac{dx}{R\,d\varphi} = \frac{dy}{r\varphi\,d\lambda}, \text{ azaz ha}$$

$$r\varphi\,d\lambda\,dx = R\,d\varphi\,dy, \text{ ahonnan}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{r\varphi}{R}\,\frac{d\lambda}{d\varphi}$. Mivel pedig a 9. ábra szerint $r\varphi = R\cos\varphi$, azért

5. . . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{R\cos\varphi\,d\lambda}{R\,d\varphi}$, figyelembe véve az 1. alatti első egyenletet, mely szerint

$$d\lambda = \frac{dy}{R}, \text{ és azt helyettesítve a talált 5. egyenletbe:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\varphi\,dy}{R\,d\varphi}.$$

Osztván minkét oldalt dy-al,

$$\frac{1}{dx} = \frac{1}{R}\,\frac{\cos\varphi}{d\varphi}, \text{ azaz}$$

5 *a*) . . . . . $dx = R\,\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$, és igy képezve minkét oldal

integrálját: $\int dx = R\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$

Mivel az integrál számitás egyik ismert tétele szerint

$$\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \text{log. nat. tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) + c, \text{ azért,}$$

elvégezvén a fenti integrálást azon feltétellel, hogy a $\varphi = 0^0$ esetében $x = 0$ legyen, a következő eredményre jutunk:

6. . . . . $x = R\ log.\ nat.\ tg\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)$

Ez a Merkátor vetület keresett egyenlete. A 4. és 6. egyenletek együttesen kifejezik az előadott feltételnek megfelelő vetületi törvényeket. A 6. alatti egyenletet fejtsük sorba. Ez egyszerüen eszközölhető. Mivel a goniemetria ismert képlete szerint

$$\text{tg}^2\left(45^0 + \frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}, \text{ azért}$$

$$2\ \text{log. nat. tg}\left(45^0 + \frac{x}{2}\right) = \text{log. nat.}\,\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}, \text{ azaz}$$

$\text{log. nat. tg}\left(45^0 - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\ \text{log. nat.}\,\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$ és így a 6. egyenlet igy is irható:

7. . . . . $x = \frac{R}{2}\ log.\ nat.\,\frac{1 + sin\ \varphi}{1 + sin\ \varphi}$. A felső mennyiségtanból általánosan ismert sorok:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + \ldots$$

$$\left\{\begin{array}{l} \log(1 + z) = z\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \ldots\right) \\ \log(1 - z) = z\left(-1 - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} - \ldots\right) \end{array}\right.$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

amely utóbbi két sort összevonva:

$$\log \frac{1+z}{1-z} = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots\right)$$

Ezen logaritmikus sorba **z** helyébe **sin** φ-t téve és ugyanakkor figyelembe véve a felírt *sinus* sort:

$$\frac{1}{2} log.\ nat.\ \frac{1+sin\,\varphi}{1-sin\,\varphi} = \varphi + \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{24} + \ldots$$

Helyettesítvén az itt nyert hatványsort a 7. alapegyenletbe:

$$x = R\left(\varphi + \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{24} + \ldots\right)$$

amely egyenletekben **x** ölekben adódik, ha **R**-et ölekben fejezzük ki, a φ-t pedig *absolut* szögértékekben. Ha a φ-t másodpercekben akarjuk ezen vetületi egyenletbe helyettesíteni, akkor:

$$8. \ldots\ x = \left(\frac{R}{\varrho''}\right)\varphi + \left(\frac{R}{6\varrho''^3}\right)\varphi^3 + \left(\frac{R}{24\varrho''^5}\right)\varphi^5 + \ldots$$

A 4. és 8. egyenletek tekinthetők a Merkátor vetület gyakorlati vetületi egyenletrendszerének.

Nem lesz nehéz a *lineár modulus értékét,* azaz az

$$l = f_2(\varphi) = f_3(x)$$

függvényt levezetni. (9. ábra)

$$l = lx = \frac{dx}{R\,d\varphi} \text{ és mivel } 5\,a) \text{ szerint}$$

$$dx = R\,\frac{d\varphi}{\cos\varphi}, \text{ azért}$$

$$l = \frac{R\,\frac{d\varphi}{\cos\varphi}}{R\,d\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}$$

tehát a Merkátor vetület bármely pontjában a lineár modulus értékét ezen képlet adja:

$$9. \ldots\ l = \frac{1}{cos\,\varphi}.$$

2. cikk. A ferde tengelyü hengervetület alapegyenlete.

A 4., 8. és 9. alatt levezetett egyenletek alkotják az *egyenes tengelyü konform hengervetület (Merkátor vetület)* egyenletrendszerét. Abban az esetben, ha a henger nem az ekvátoron érinti a gömböt, hanem *egy tetszőleges legnagyobb gömbi kör menetében:* akkor a levezetett képletekben φ és λ már nem földrajzi rendezőket jelentenek, hanem oly *segéd rendezőket,* amelyek a szóban forgó *érintési körre* mint *segéd ekvátorra* vonatkoznak. Nevezzük a segéd meridiánokon a *szélességet* x'-vel, a *hosszúságot* y'-vel, és képzeljük ezeket (úgy mint azelőtt a φ és λ-t) másodpercekben kifejezve. Ekkor tehát a vetületi egyenletrendszer (4., 8. és 9. szerint) ez:

$$10. \ldots \begin{cases} y = \frac{R}{\varrho''}\,y' \\ x = \left(\frac{R}{\varrho''}\right)x' + \left(\frac{R}{6\varrho''^3}\right)z'^3 + \left(\frac{R}{24\varrho''^5}\right)x'^5 + \ldots \\ l = \frac{1}{\cos x'} \end{cases}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

amely egyenletben szereplő x′ és y′ segédösszrendezők valami úton-módon φ és λ által lesznek kifejezendők:

11. . . . . $\begin{cases} y' = F_1(\varphi, \lambda) \\ x' = F_2(\varphi, \lambda) \end{cases}$ amint a

Az utóbbi két egyenlet más és más lesz aszerint amint a henger a gömböt egy *meridián* mentén, vagy pedig egy, *valamely meridiánra merőleges legnagyobb gömbi kör mentén*, vagy egy *tetszőleges* legnagyobb gömbi kör mentében érinti. A három magyar henger, amint azt ezen fejezet 2. §-ában előadtuk, a gömböt a kezdő *meridiánra merőleges legnagyobb gömbi körök mentén érintik*. Mig tehát a 10. alatti numerikus egyenletrendszer *közös* mind a három rendszerre nézve (hiszen az R ugyanaz), addig a 11. alatti numerikus egyenletrendszer *együtthatói más értékekkel* fognak bírni az *egyes* magyar rendszereknél. Ez onnan van, mert a 11. egyenletrendszerben **szükségképen** szerepelni fog az *érintési kör* azon pontjának földrajzi szélessége, melyben *ez az érintési kör a kezdő meridiánt metszi*. Ilyen *„kezdőponti szélesség“* van a magyar hengervetületeknél három féle: tehát 3 féle *numerikus* együttható rendszert nyerünk a 11. egyenletrendszerre.

Nevezzük a *„kezdőponti gömbi szélességet“* φ_0-al, akkor a magyar hengervetületek 11. egyenleteinek *általános alakja* a következő:

12.
$$\begin{cases} y' = \cos\varphi_0\,\lambda \left\{ 1 - (\varphi - \varphi_0)\operatorname{tg}\varphi_0 - \frac{\lambda^2}{6}\sin^2\varphi_0 - \frac{(\varphi-\varphi_0)^3}{3}\operatorname{tg}\varphi_0 \right. \\ \qquad\qquad + \frac{(\varphi-\varphi_0)\lambda^2}{6}\operatorname{tg}\varphi_0 - \frac{(\varphi-\varphi_0)^2}{2}\sin^2\varphi_0 \\ \qquad\qquad \left. + \frac{\lambda^4}{120}\sin^2\varphi_0\,(1 + 6\cos^2\varphi_0) \right\} \\ x' = (\varphi - \varphi_0) + \sin\varphi_0\cos\varphi_0\frac{\lambda^2}{2} - \sin^2\varphi_0\frac{(\varphi-\varphi_0)\lambda^2}{2} - \sin\varphi_0\cos\varphi_0\frac{\lambda^4}{24} \\ \quad - \sin^2\varphi_0\frac{(\varphi-\varphi_0)^3\lambda^2}{6} + \sin^2\varphi_0\,(1 + 3\cos^2\varphi_0)\frac{(\varphi-\varphi_0)\lambda^4}{24} \end{cases}$$

Ezen alapvető transformációs egyenletrendszer levezetése tisztán gömbháromszögtani úton eszközöltetett: lásd e levezetést a *„V. U.“* könyv XI. fejezetében.

Helyettesítvén ezen 12. alatti egyenleteket a 10. alatti egyenletrendszerbe, nyerjük a magyar ferdetengelyű hengervetületek általános egyenletrendszerét:

13. . .
$$\begin{cases} y = -(1)\lambda + (2)\lambda\psi + (3)\lambda^3 + (4)\lambda\psi^3 - (5)\lambda^3\psi \\ \qquad + (6)\lambda^3\psi^2 - (7)\lambda^5 \\ x = -(8)\psi - (9)\lambda^2 - (10)\psi^3 + (11)\psi\lambda^2 - (12)\psi^2\lambda^2 \\ \qquad + (13)\lambda^4 + (14)\psi^3\lambda^2 - (15)\psi\lambda^4 - (16)\psi^5 \end{cases}$$

Ezen egyenletrendszerben ψ-vel jelöltük a

$$\psi = \varphi - \varphi_0 \text{ különbséget.}$$

Hangsúlyozzuk, hogy

$$\begin{cases} \psi \textit{ positiv előjelű, ha } \varphi > \varphi_0 \\ \psi \textit{ negativ előjelű, ha } \varphi < \varphi_0, \end{cases}$$

továbbá, hogy

λ *positiv előjelű*, ha *keletre*,
λ *negativ előjelű*, ha *nyugatra* vagyunk a gellérthegyi meridiántól, vagyis az **x** tengelytől.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A 13. alatti *vetületi egyenletrendszerben* szereplő **1—16**-al jelölt együtthatók értékei a következő egyenlőségekből számítandók minden hengerre külön-külön:

$$(1) = \cos\varphi_0 \frac{R}{\varrho''} \qquad (8) = \frac{R}{\varrho''}$$

$$(2) = \sin\varphi_0 \frac{R}{\varrho''^2} \qquad (9) = \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 \frac{R}{2\varrho''^2}$$

$$(3) = \sin^2\varphi_0 \cos\varphi_0 \frac{R}{6\varrho''^3} \qquad (10) = \frac{R}{6\varrho''^3}$$

$$(4) = \sin\varphi_0 \frac{R}{3\varrho''^4} \qquad (11) = \sin^2\varphi_0 \frac{R}{2\varrho''^3}$$

$$(5) = \sin\varphi_0 \frac{R}{6\varrho''^4} \qquad (12) = \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 \frac{R}{4\varrho''^4}$$

$$(6) = \sin^2\varphi_0 \cos\varphi_0 \frac{R}{2\varrho''^5} \qquad (13) = \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 \frac{R}{24\varrho''^4}$$

$$(7) = \sin^2\varphi_0 \cos\varphi_0 (1 + 6\cos^2\varphi_0) \frac{R}{120\varrho''^5} \qquad (14) = \sin^2\varphi_0 \frac{5R}{12\varrho''^5}$$

$$(15) = \sin^2\varphi_0 (1 + 6\cos^2\varphi_0) \frac{R}{24\varrho''^5}$$

$$(16) = \frac{R}{24\varrho''^5}$$

A 13. alatti két sor itt felírt együtthatóinak *numerikus* értékeit 10 jegyre élesen számítottuk ki mind a három rendszerre nézve. Az alapul vett értékek voltak:

$$\begin{cases} \log R = 6,526\,7702\,900 \\ \log \varrho'' = 5,314\,4251\,332 \end{cases}$$

továbbá az illető *rendszer kezdőpontoknak* megfelelelő φ_0 szélességek. Itt közöljük ezen értékek (együtthatók) értékeit annyi számjegyre élesen, amint azokat tényleg gyakorlatilag használjuk.

D. R. rendszer.	**K. R. rendszer.**	**E. R. rendszer.**
$\varphi_0 = 45° - 31' - 59.''000$	$\varphi_0 = 47° - 6' - 0,''0000$	$\varphi_0 = 48° - 40' - 2,''0$
log (1) = 1.057 7518 415.	= 1.045 3142 218.	= 1.032 1728 328.
log (2) = 5.751 4082 — 10.	= 5.762 7531 — 10.	= 5.773 4943 — 10.
log (3) = 9.357 7266 — 20.	= 9.367 9788 — 20.	= 9.376 3198 — 20.
log (4) = 4.645 44 — 20.	= 4.656 78 — 20.	= 4.667 52 — 20.
log (5) = 4.344 41 — 20.	= 4.355 75 — 20.	= 4.366 49 — 20.
log (6) = 9.206 00 — 30.	= 9.216 25 — 30.	= 9.224 59 — 30.
log (7) = 8.023 80 — 30.	= 8.015 62 — 30.	= 8.004 79 — 30.
log (8) = 1.212 3451 568.	= 1.212 3451 568.	= 1.212 3451 568.
log (9) = 5.295 7848 — 10.	= 5.294 6922 — 10.	= 5.292 2920 — 10.
log (10) = 9.805 3436 — 20.	= 9.805 3436 — 20.	= 9.805 3436 — 20.
log (11) = 9.989 4412 — 20.	= 0.012 1310 — 10.	= 0.033 6134 — 10.
log (12) = 4.365 90 — 20.	= 4.364 81 — 20.	= 4.362 41 — 20.
log (13) = 3.587 75 — 20.	= 3.586 66 — 20.	= 3.584 26 — 20.
log (14) = 9.281 41 — 30.	= 9.304 10 — 30.	= 9.325 58 — 30.
log (15) = 8.877 37 — 30.	= 8.881 62 — 30.	= 8.883 93 — 30.
log (16) = 8.574 43 — 30.	= 8.574 43 — 30.	= 8.574 43 — 30.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A 13. alatti sorok alkalmazásakor ψ, és λ rendezők *másodpercekben* veendők számításba. A log ψ, illetve log λ keresésénél a másodpercnek *4-ik* decimálisa is figyelembe veendő. A (1)... (16) együtthatók *mantissáinak* száma mutatja, hogy hány számjegyre viendők be ψ és λ magasabb hatványainak logaritmusai a számításba. A 13. alatti sor, az itt közölt együtthatók felhasználásával módot nyujt tehát arra, hogy adva lévén valamely A' gömbi pont φ_A, λ_A gömbi helyhatározói, kiszámitsuk (millimeterre élesen) e pont x, y vetületi összrendezőit bármely magyar hengervetületre nézve.

A számítás gyors és hibátlan elvégzése céljából *mindhárom* hengervetületre különkülön nyomtatványokat készítettünk, amelyekbe minden művelet jelzése és az együtthatók értékei ki vannak nyomtatva. (A következő számpéldán mindaz ami vékonyan van nyomtatva, az a számítási sémán már előre nyomtatva megvolt: a kövér nyomás a számított értékek.

Hengervetület. *Középső Rendszer.*
(K. R.)

„*A*“ pont neve: **Ivančica.**

Gömbi földrajzi összrendezőkből — derékszögű síkösszrendezők számítása.

I. A gömbi ψ'', λ'' és azok hatványainak logaritmusai.

adva: $-\lambda_A = 2^\circ\ 55'\ 22.''16886$

$-\lambda'' = -10\ 522.16886$

$\log \lambda'' =$	**— 4.022 1052 671**	10 jegyre élesen
$\log \lambda^2 =$	**+ 8.044 2105**	7 „
$\log \lambda^3 =$	**— 12.066 3158**	7 „
$\log \lambda^4 =$	**+ 16.088 42**	5 „
$\log \lambda^5 =$	**— 20.110 53**	5 „

adva:

$\varphi_A = 46^\circ - 8' - 8.''21078$
$-\varphi^\circ = -47^\circ - 6' - 0.''00000$
$\psi = -\ 0^\circ - 57' - 51.''78922$
$\psi'' = -3471.''78922$

$\log \psi'' =$	**— 3.540 5533 503**	10 jegyre
$\log \psi^2 =$	**+ 7.08111**	5 „
$\log \psi^3 =$	**— 10.621 6601**	7 „
$\log \psi^5 =$	**— 17.702 77**	5 „

II. Az $y = f_1(\psi, \lambda)$ sor megoldása.

		A tagok numerusai.	
(—)	1.045 3142 218	+	—
log λ —	**4.022 1052 671**		
+	**5.066 4194 889**	**116 793.7195**	
(+)	5.762 7531 — 10		
log $\lambda\psi$ +	**7.562 6586**		
+	**3.325 4117**	**2115.4937**	
(+)	9.367 9788 — 20		
log λ^3 —	**12.066 3158**		
—	**1.434 2946**	**27.1828**	
(+)	4.656 78 — 20		
log $\lambda\psi^3$ +	**14.643 77**		
+	**9.300 55 — 10**	**0.1998**	
(—)	4.355 75 — 20		
log $\lambda^3\psi$ +	**15.606 87**		
—	**9.962 62 — 10**	**0.9175**	

III. Az $x = f_2(\psi, \lambda)$ sor megoldása.

		A tagok numerusai.	
(—)	1.212 3451 568	+	—
log ψ —	**3.540 5533 503**		
+	**4.752 8985 071**	**56610.6977**	
(—)	5.294 6922 — 10		
log λ^2 +	**8.044 2105**		
—	**3.338 9027**		**2182.2407**
(—)	9.805 3436 — 20		
log ψ^3 —	**10.621 6601**		
	0.427 0037		**2.6730**
(+)	0.012 1310 — 10		
log $\psi\lambda^2$ —	**11.584 7639**		
	1.596 8949		**— 39.5271**
(—)	4.364 81 — 20		
log $\psi^2\lambda^2$ +	**15.125 32**		
—	**9.490 13 — 10**		**0.3091**

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

	A tagok numerusai.	+	—		A tagok numerusai.	+	—
(+)	9.216 25 — 30			(+)	3.586 66 — 20		
$\log \lambda^3 \psi^2$	— **19.147 43**			$\log \lambda^4$	+ **16.088 42**		
	— **8.363 68 — 10**		**0.0231**		+ **9.675 08 — 10**		**0.4732**
(—)	8.015 62 — 30			(+)	9.304 10 — 30		
$\log \lambda^5$	— **20.110 53**			$\log \psi^3 \lambda^2$	— **18.665 87**		
	+ **8.126 15 — 10**		**0.0134**		— **7.969 97 — 10**		**0.0093**
A tagok összegei =		+ **118 909.4264**		— **28.1234**			
				(—)	8.881 62 — 30		
				$\log \psi \lambda^4$	— **19.628 97**		
eredmény: y_A =		+ ***118 881.3030*** öl			+ **8.510 59 — 10**		**0.0324**
				(—)	8.574 43 — 30		
				$\log \psi^5$	— **17.702 77**		
					+ **6.277 20 — 10**		**0.0002**
				A tagok összegei =		+ **56613.8765**	— **2222.0862**
				eredmény: x_A =		+ ***54391.7903*** öl.	

3. cikk. Síkösszrendezőkből — földrajzi gömbi szélesség és hosszúság számítása.

A 13. alatti vetületi egyenletrendszer megfordítása által (lásd a „*V. U.*“ könyv XI. Fejezetét.) nyertük a kivánt sorokat. Ezek, gyakorlati alakban írva, a következők:

$$14. \quad \begin{cases} \psi_A = -(17)\ x - (18)\ y^2 + (19)\ x^3 + (20)\ x\ y^2 - (21)\ x^2\ y^2 \\ \qquad + (22)\ y^4 + (23)\ x^3\ y^2 - (24)\ x\ y^4 - (25)\ x^5. \\ \lambda_A = -(26)\ y + (27)\ x\ y + (28)\ y^3 - (29)\ x^2\ y + (30)\ x^3\ y \\ \qquad - (31)\ x\ y^3 + (32)\ x^2\ y^3 - (33)\ x^4\ y - (34)\ y^5 \\ \psi = \varphi_A - \varphi_0. \end{cases}$$

A 14. alatti sorokban szereplő együtthatók a következő általános képletekből voltak kiszámítandók minden hengerre külön-külön, az illető hengervetületre megállapított φ_0 érték helyettesítése által. Megjegyezzük, hogy az itt szereplő (1), (2), . . . (16) számok a 13. alatti vetületi egyenletrendszernek együtthatóit jelentik.

$$(17) = \frac{\varrho''}{R}$$

$$(18) = \operatorname{tang} \varphi_0 \frac{\varrho''}{2R^2}$$

$$(19) = \frac{\varrho''}{6R^3}$$

$$(20) = \operatorname{tang}^2 \varphi_0 \frac{\varrho''}{2R^3}$$

$$(21) = \operatorname{tang}^3 \varphi_0 \frac{\varrho''}{2R^4}$$

$$(22) = \operatorname{tang} \varphi_0 (1 + 3 \operatorname{tang}^2 \varphi_0) \frac{\varrho''}{24R^4}$$

$$(23) = \operatorname{tang}^2 \varphi_0 (1 + 6 \operatorname{tang}^2 \varphi_0) \frac{\varrho''}{12R^5}$$

$$(24) = \operatorname{tang}^2 \varphi_0 (4 + 9 \operatorname{tang}^2 \varphi_0) \frac{\varrho''}{24R^5}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

$$(25) = -\frac{\varrho''}{24R^5}$$

$$(26) = \frac{1}{(1)}$$

$$(27) = \frac{(2)}{(1)^2}(17)$$

$$(28) = \frac{(2)}{(1)^2}(18) - \frac{(3)}{(1)^4}$$

$$(29) = \frac{(2)^2}{(1)^3}(17)$$

$$(30) = -\frac{(2)}{(1)^2}(19) + \frac{(4)}{(1)^2}(17)^3 + \frac{(2)^3}{(1)^4}(17)^3$$

$$(31) = \frac{(2)}{(1)^2}(20) - 2\frac{(2)(3)}{(1)^5}(17) + \frac{(5)}{(1)^4}(17) + 2\frac{(2)^2}{(1)^3}(17)(18) - 2\frac{(2)(3)}{(1)^5}(17)$$

$$(32) = \frac{(2)}{(1)^2}(21) - 10\frac{(2)^2(3)}{(1)^6}(17)^2 + 3\frac{(4)}{(1)^2}(17)^2(18) + 4\frac{(5)(2)}{(1)^5}(17)^2 - \\ - \frac{(6)}{(1)^4}(17)^2 + 2\frac{(2)^2}{(1)^3}(17)(20) + 3\frac{(2)^3}{(1)^4}(17)^2(18)$$

$$(33) = -2\frac{(2)^2}{(1)^3}(17)(19) + 2\frac{(2)(4)}{(1)^3}(17)^4 + \frac{(2)^4}{(1)^5}(17)^4$$

$$(34) - \frac{(2)}{(1)^2}(22) - 2\frac{(2)(3)}{(1)^5}(18) + 2\frac{(3)^2}{(1)^7} + \frac{(5)}{(1)^4}(18) - \frac{(7)}{(1)^6} + \frac{(3)^2}{(1)^7} + \frac{(2)^2}{(1)^3}(18)^2 - \\ - 2\frac{(2)(3)}{(1)^5}(18).$$

A (34.) együttható *három utolsó tagja ezideig nem volt kifejtve:* ezeket mi vezettük be a képletbe. A 14. alatti sorok együtthatóinak numerikus értékeit 10. illetve 7. jegyre élesen számitottuk. Alább ezen együtthatók logaritmusait annyi számjegyre közöljük, mint amily élesen azok *milliméter rendü* számitásokban figyelembe veendők. A sorok használatánál x és y ölekben fejezendő ki *(ezred* ölig) ψ és λ másodpercekben *(4 decimálisra)* adódik. Az előnyomtatott sémák ezen két sor feloldását rendkivül könnyitik.

Az együtthatók számitásakor alapul vett értékek voltak:

$$\log R = 6,\ 526\ 7702\ 900.$$
$$\log \varrho'' = 5,\ 314\ 4251\ 332,$$

továbbá a rendszer kezdőpontoknak megfelelő φ_0 szélességek.

	D. R.	***K. R.***	***É. R.***
	$\varphi_0 = 45^0 - 31' - 59.''000$	$\varphi_0 = 47^0 - 6' - 0,''0000$	$\varphi_0 = 48^0 - 40' - 2,''0$
log (17) =	8.787 6548 432 — 10	8.787 6548 432 — 10	8.787 6548 432 — 10
log (18) =	1.967 9360 — 10	1.991 7185 — 10	2.015 6011 — 10
log (19) =	4.955 9629 — 20	4.955 9629 — 20	4.955 9629 — 20
log (20) =	5.449 2472 — 20	5.496 8122 — 20	5.544 5774 — 20
log (21) =	8.930 558 — 30	9.001 906 — 30	9.073 554 — 30
log (22) =	8.449 45 — 30	8.509 71 — 30	8.571 13 — 30
log (23) =	2.476 54 — 30	2.565 40 — 30	2.655 20 — 30
log (24) =	2.441 72 — 30	2.523 13 — 30	2.605 93 — 30
log (25) =	1.300 36 — 30	1.300 36 — 30	1.300 36 — 30

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

	D. R.	*K. R.*	*É. R.*
	$\varphi_0 = 45^0 - 31' - 59.''0000$	$\varphi_0 = 47^0 - 6' - 0.''0000$	$\varphi_0 = 48^0 - 40' - 2.''0$
log (26) =	8.942 2481 584 — 10	8.954 6857 782 — 10	8.967 8271 672 — 10
log (27) =	2.423 5593 — 10	2.459 7795 — 10	2.496 8034 — 10
log (28) =	5.427 7491 — 20	5.487 7519 — 20	5.548 6584 — 20
log (29) =	5.904 8706 — 20	5.964 8732 — 20	6.025 7798 — 20
log (30) =	9.450 856 — 30	9.528 363 — 30	9.607 423 — 30
log (31) =	9.450 856 — 30	9.528 363 — 30	9.607 423 — 30
log (32) =	3.289 48 — 30	3.385 95 — 30	3.484 40 — 30
log (33) =	2.988 45 — 30	3.084 92 — 30	3.183 37 — 30
log (34) =	2.289 42 — 30	2.385 95 — 30	2.484 40 — 30

A 13. és 14. alatt közölt sorok számítási élességét mutatja az alábbi példa végeredménye, ahol az előbbi példán nyert x_A és y_A értékekből kiindulva, λ-ra nézve 0.''00002-re, φ-re nézve pedig 0.''000 24-re élesen nyertük az előbbi számpélda kiindulási értékeit.

Hengervetület. *Középső rendszer.*
(D. R.)

A pont neve: **Ivančica.**

Derékszögű sík összrendezőkből — gömbi földrajzi rendezők számítása.

adva: y = + **118 881.3030**

log y =	+ **5.075 1135 566**	10 jegyre
log y^2 =	+ **10.150 2271**	7 „
log y^3 =	+ **15.225 3407**	7 „
log y^4 =	+ **20.300 45**	5 „
log y^5 =	+ **25.375 57**	5 „

adva: x = + **54 391.7903**

log x =	+ **4.735 5333 538**	10 jegyre
log x^2 =	+ **9.471 0667**	7 „
log x^3 =	+ **14.206 6001**	7 „
log x^4 =	+ **18.942 13**	5 „
log x^5 =	+ **23.677 67**	5 „

A $\psi'' = f_1$ (y, x) sor megoldása.

A tagok numerusai.

(—) 8.787 6548 432—10.

log x +	**4.735 5333 538**	+	—
—	**3.523 1881 970**		**3335.7093**
(—) 1.991 7185—10			
log y^2 +	**10.150 2271**		
—	**2.141 9456**		**138.6582**
(+) 4.955 9629—20			
log xy^2 +	**14.206 6001**		
+	**9.162 5630—10**		**0.1454**
(+) 5.496 8122—20			
log x^3 +	**14.885 7605**		
+	**0.382 5727**		**2.4131**
(—) 9.001 906—30			
log x^2y^2 +	**19.621 294**		
—	**8.623 200—10**		**0.0420**

A $\lambda'' = f_2$ (y, x) sor megoldása.

A tagok numerusai.

(—) 8.954 6857 782—10.

log y +	**5.075 1135 565**	+	—
—	**4.029 7993 347**		**10710.2433**
(+) 2.459 7795—10			
log x y +	**9.810 6469**		
+	**2.270 4264**		**186.3916**
(+) 5.487 7519—20			
log y^3 +	**15.225 3407**		
+	**0.713 0926**		**5.1653**
(—) 5.964 8732—20			
log x^2y +	**14.546 1803**		
—	**0.511 0535**		**3.2438**
(+) 9.528 36—30			
log x^3y +	**19.281 71**		**0.0646**
+	**8.810 07—10**		

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

	A tagok numerusai.				A tagok numerusai.	
	+	−			+	−
	(+) 8.509 71—30			(−) 9.528 36—30		
log y^4	+ 20.300 45		log xy^3	+ 19.960 87		
	+ 8.810 16—10	0.0646		− 9.489 23—10		0.3085
	(+) 2.565 40—30			(+) 3.385 95—30		
log x^3y^2	+ 24.356 83		log x^2y^3	+ 24.696 41		
	+ 6.922 23—10	0.0008		+ 8.082 36—10	0.0121	
	(−) 2.523 13—30			(−) 3.084 92—30		
log xy^4	+ 25.035 98	0.0036	log x^4y	+ 24.017 24		
	− 27.559 11—10			− 7.102 16—10		0.0013
	(−) 1.300 36—30			(−) 2.385 95—30		
log x^5	23.677 67		log y^5	25.375 57		
	− 4.978 03—10			− 7.761 52—10		0.0058
A tagok összegei:	+ 2.6239	− 3474.4131	A tagok összegei:		+ 191.6336	−10713.8027
	$\psi'' =$	− 3471.7892			$\lambda'' =$	−10522.1691
		− 0° 57′ 51″7892				
	$\psi =$		*eredmény:* $\lambda =$		2° 55′	22.″1691
	$+ \varphi_0 =$	+ 47 6 0 00000				
eredmény: $\varphi = \varphi_0 + \psi =$		46° 8′ 8.″2108				

A nem kövér betükkel nyomtatottak a hivatalos nyomtatványon már előre ki vannak nyomtatva; csak az itt kövéren nyomtatott számértékek voltak számítandók.

4. cikk: A meridián konvergencia sorai.

A meridián konvergencia $\pm$ 0.″001-re élesen számítható bármely magyarországi pontra nézve, az illető pont hengervetületi derékszögü sík összrendezői alapján a következő képlet (hatványsor) segitségével:

$$15. \quad \mu = -(35)\,y + (36)\,x\,y + (37)\,y^3 - (38)\,x^2\,y - (39)\,x\,y^3 + (40)\,x^3\,y + (41)\,x^2\,y^3 - (42)\,x^4\,y - (43)\,y^5.$$

Ezen hatványsor levezetését a „*V. U.*“ könyv XI. Fejezetében közöltük.

A 15. alatti hatványsor együtthatóinak értékrendszerei, minden magyarországi hengervetületi rendszerre külön-külön a következő képletekből voltak kiszámítandók:

$$(35) = \frac{\varrho''}{R} \operatorname{tg} \varphi_0$$

$$(36) = \frac{\varrho''}{R^2} \operatorname{tg}^2 \varphi_0$$

$$(37) = \frac{\varrho''}{R^3} \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{6} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0)$$

$$(38) = \frac{\varrho''}{R^3} \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{2} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0)$$

$$(39) = \frac{\varrho''}{R^4} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_0}{3} (2 + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi_0)$$

$$(40) = \frac{\varrho''}{R^4} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_0}{3} (2 + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi_0) \equiv (39)$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

$$(41) = \frac{\varrho''}{R^5} \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{12} (1 + 20 \operatorname{tg}^2 \varphi_0) + 24 \operatorname{tg}^4 \varphi_0)$$

$$(42) = \frac{\varrho''}{R^5} \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{24} (1 + 20 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 + 24 \operatorname{tg}^4 \varphi_0) = \frac{(41)}{2}$$

$$(43) = \frac{\varrho''}{R^5} \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{120} (1 + 20 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 + 24 \operatorname{tg}^4 \varphi_0) = \frac{(41)}{10}$$

Minthogy a φ_0 érték minden egyes hengervetületi rendszerünkre nézve más és más, azért minden egyes rendszerhez *más* és *más* együttható értékrendszer tartozik. Ezen együttható értékrendszerek a következők:

	D. R.	**K. R.**	**É. R.**
	$\varphi_0 = 45^0 - 31' - 59.''00$	$\varphi_0 = 47^0 - 6' \; 0,''00$	$\varphi_0 = 48^0 - 40' - 2,''00$
log (35) =	8.795 7363 — 10	8,819 5188 — 10	8,843 4014 — 10
log (36) =	2.277 0475 — 10	2,324 6126 — 10	2,372 3777 — 10
log (37) =	5.452 01 — 20	5,508 46 — 20	5,566 24 — 20
log (38) =	5.929 13 — 20	5,985 58 — 20	6,043 37 — 20
log (39) =	9.455 13 — 30	9,532 27 — 30	9,610 95 — 30
log (40) =			
log (41) =	3.287 20 — 30	3,384 13 — 30	3,482 95 — 30
log (42) =	2.986 17 — 30	3,083 10 — 30	3,181 92 — 30
log (43) =	2.287 20 — 30	2,384 13 — 30	2,482 95 — 30

A közölt értékekből látnivaló, hogy a μ számításánál ($\pm$ 0,''001-re élesen) csakis 7 jegyü logaritmus könyvet kell alkalmazni; 10. jegyű logaritmus könyvvel tehát itt nem kell dolgozni. Ügyeljünk az x és y előjeleire.

Látnivaló, hogy a meridián konvergencia sorában x és y hatványai, szorzatai stb. ugyanoly módon szerepelnek, mint a 14. alatti λ sorában! A μ előjele a 15. alatti sorból oly módon adódik, hogy az azimut képlete ez:

16. . . . . $\omega_{A,B} = \delta_{A,B} + \mu_A - \Delta^{(s)}_{A,B}$.

A legtöbb esetben elegendő lesz a sornak *első öt tagját venni* csak figyelembe. A célszerűen előnyomtatott számítási sémát a következő példán mntatjuk be.

E számpélda végén egy azimut számítást is mutatunk be a 16. képlet szerint. Az ott szereplő délszögérték és irányredukció az ott szereplő két pont (Ivančica és Gellérthegy) K. R. vetületi derékszögü sík összrendezőiből lettek előzőleg már kiszámítva.

Hengervetület. *Középső Rendszer.*

Meridián konvergencia számítás.

„*A*“ pont neve: **Ivančica.**

adva:	y_A =	+ **118 881.30279**	adva:	x_A =	+ **54 391.79030**
log y =		**5.075 1136** 7. jegyre	log x =		**4.735 5333** 7. jegyre
log y^3 =		**15.225 34** 5. „	log x^2 =		**9.471 07** 5. „
log y^5 =		**25.375 57** 5. „	log x^3 =		**14.206 60** 5. „
			log x^4 =		**18.942 13** 5. „

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

— (19) 8.819 5188 — 10	— (22) 5.985 58 — 20	+ (25) 3.384 13 — 30
log y = **5.075 1136**	log x^2 y = **14.546 18**	log x^2 y^3 = **24.696 41**
— **3.894 6324**	— **0.531 76**	+ **28.080 54** — 10
+ (20) 2.324 6126 — 10	— (23) 9.532 27 — 30	— (26) 3.083 10 — 30
log x y = **9.810 6469**	log x y^3 = **19.960 87**	log x^4 y = **24.017 24**
+ **2.135 2595**	— **9.493 14** — 10	— **7.100 34** — 10
+ (21) 5.508 46 — 20	+ (24) 9.532 27 — 30	— (27) 2.384 13 — 30
log y^3 = **15.225 34**	log x^3 y = **19.281 71**	log y^5 = **25.375 57**
— **0.733 80**	+ **8.813 98** — 10	— **7.759 70** — 10

A tagok numerusai.

	+	—
	136.5399	**7845.7127**
	5.4175	**3.4022**
	0.0652	**0.3113**
	0.0120	**0.0013**
		0.0058
A tagok összegei:	+ **142.0346**	— **7849.4333**

$\mu'' = -$ **7707.''3987**

$\mu_A = -$ **2° 8'. 27.''3987**

Azimut számítás.

Az oldal neve: **Ivančica—Gellérthegy.**

Az *egyenes* oldal K. R. hengervetületi délszöge: $\delta_{A.\ G.}$ =	237° 59' 37.''0614
— (délszögredukció): $-\Delta_{A.\ G.}$ =	+ 32.''1095
(meridián konvergencia) + μ_A =	= — 2° 8' 27.3987
Ivaničica—Gell. gömbi azimut:	235° 51' 41.''7722

5. cikk. A délszögredukciók $\Delta_{A,\ B}$ és $\Delta_{B,\ A}$ számítása.

Az idevonatkozó levezetéseket közöltük a „*V. U.*" könyv 78—81. lapjain.

Itt magát a gyakorlati számítást mutatjuk be tüzetesen.

Az irányredukciót mindig így értelmezzük

17. . . . . $\delta_{A,\ B} = \delta'_{A,\ B} + \Delta_{A,\ B}$, azaz:

a vetületi *egyenes* délszögét megkapjuk, ha a *vetületi* (görbe) oldal délszögéhez (vagy a tájékozott mérési eredményhez) adjuk az irányredukciót.

Az ismertetendő összes irányredukció képletek ezen értelmezésnek megfelelőleg szolgáltatják a $\Delta_{A,\ B}$ irányredukció előjelét. Látni fogjuk, hogy a $\Delta_{A,\ B}$ előjele mindig az

$$(X_A + X_B),\ (X_B - X_A,)\ (y_B - y_A)$$

mennyiségek előjeleitől függ. Felállítható azonban egy egyszerű szabály, mely a háromszög hálózati vázlatra (I. kötet 2. és 3. rajz melléklete) való puszta rátekintéssel megadja a $\Delta_{A,\ B}$ helyes előjelét. *Ezt a szabályt ellenőrzésként minden egyes esetben kell alkalmazni.*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A szabály ez: bármelyik térnegyedben van is az illető oldal, — a *homorú oldalát fordítja mindig az y tengely felé.* Ennek grafikonját itt adjuk: (43. ábra); ebből mindenesetre kiadódik a helyes előjel.

Az ábrából az is látható, hogy a $\Delta_{A,B}$ mindig *ellenkező előjelű* mint $\Delta_{B,A}$, kivéve azt az esetet, amikor az AB oldal az y tengelyt metszi.

A $\Delta_{A,B}$ és $\Delta_{B,A}$ absolut értékei nem egyenlők, azaz

$$|\Delta_{A,B}| \lessgtr |\Delta_{B,A}|.$$

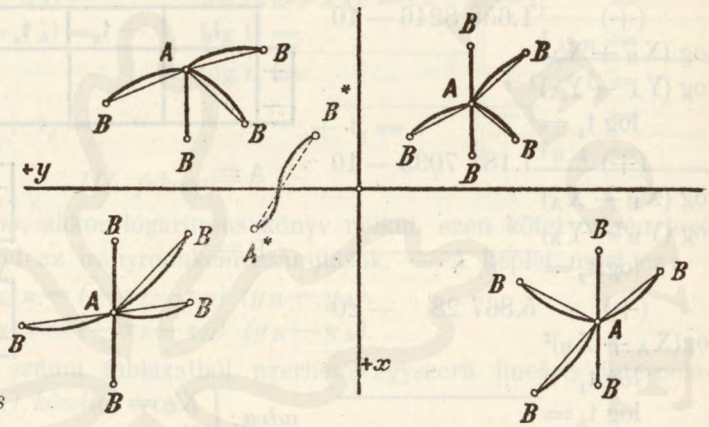
Minél hosszabb egy oldal, annál nagyobb a különbség.

Látni fogjuk, hogy 12 km.-en aluli oldalaknál e differencia azonban már oly csekély, hogy a

$$\Delta_{B,A} = -\Delta_{A,B}$$

egyenlőség vehető figyelembe.

Ezeket előrebocsájtva, ismertetjük a délszögredukció számításnak szabatos *képleteit* és előnyös *sémáit* és *számtáblázatait* nagy távolságokra és a különböző *rendű* háromszögelések eseteire.



43. ábra.

I. Fokozat.

AB = C = 500 km *maximális* oldalhosszig, Magyarország egész terjedelmére nézve ± 0,″005 maximális elhanyagolással a következő képlet szolgáltatja az irányredukció szabatos értékét.

$$18. \ldots \begin{cases} \Delta_{A,B} = +t - t_2 \\ \Delta_{B,A} = +t - t_2 \end{cases}, \text{ ahol } t = +t_1 - t_3 + t_4 + t_5$$

A sor tagjai a következő — 7 jegyű logaritmusokkal számítandó — tagokból állithatók elő.

$$19. \ldots \left\{ \begin{array}{l} t_1 = (\mathrm{I})\ (X_A + X_B)\ (Y_B - Y_A) \\ t_2 = (\mathrm{II})\ (X_B - X_A)\ (Y_B - Y_A) \\ t_3 = (\mathrm{III})\ (X_A + X_B)^2\ t_1 \\ t_4 = (\mathrm{IV})\ (Y_B - Y_A)^2\ t_1 \\ t_5 = (\mathrm{V})\ (X_A + X_B)^2\ t_3 \end{array} \right\} \text{ ahol } \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{I}) = \dfrac{\varrho''}{4\ R^2} \\ (\mathrm{II}) = \dfrac{\varrho''}{12\ R^2} \\ (\mathrm{III}) = \dfrac{1}{12\ R^2} \\ (\mathrm{IV}) = \dfrac{1}{12\ R^2} \\ (\mathrm{V}) = \dfrac{1}{10\ R^2} \end{array} \right.$$

Minthogy az (I) . . (V) együtthatókban csakis R és ϱ'' értékek szerepelnek mint állandók, ezek pedig mindhárom hengervetületünkre azonosak: azért az együtthatók *numerikus* értékei *ugyanazok mind a három hengervetületünkre.* Tehát az irányredukció képlet *közös* mind a három hengervetületünkre.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A 19. alatti együtthatók értékeit kiszámítottuk R és ϱ alapján:

$$\begin{cases} \log (\mathrm{I}) = 1.6588246 - 10 \\ \log (\mathrm{II}) = 1.1817033 - 10 \\ \log (\mathrm{III}) = 5.86728 \quad - 20 \\ \log (\mathrm{IV}) = 5.86728 \quad - 20 \\ \log (\mathrm{V}) = 5.94646 \quad - 20 \end{cases}$$

Ha az x, y rendezőket *ölekben* kifejezve vezetjük be számításainkba, akkor ezen együtthatók a $t_1 \ldots . t_5$ tagokat *másodpercekben* kifejezve szolgáltatják.

Az $(X_A + X_B)$, $(Y_B - Y_A)$, $(X_B - X_B)$ argumentumok mindig csak *kikerekített* ölekben, tehát $\pm 0{\cdot}5$ öl elhanyagolással, veendők figyelembe. Számpéldát lásd a 91. oldalon.

Számítási séma. (Nagy távolságokra.)

(+) 1.658 8246 — 10
log $(X_B + X_A)$
log $(Y_A - Y_A)$
log t_1 =

(+) 1.181 7033 — 10
log $(X_B - X_A)$
log $(Y_B - Y_A)$
log t_2 =

(+) 5.867 28 — 20
log $(X_A + X_B)^2$
log t_1
log t_3 =

(+) 5.867 28 — 20
log $(Y_B - Y_A)^2$
log t_1
log t_4 =

(+) 5.946 46 — 20
log t_3 =
log t_5 =

	t_1	$-t_3$	t_4	t_5	$= +t$
+					
−					

		$-t_2$	$+t$	$= \Delta_{A,B}$
A =	+			
	−			
B =		$-t_2$	$-t$	$= \Delta_{B,A}$
	+			
	−			

adva: $X_B =$ $X_A =$ — *adva:* $Y_B =$ $Y_A =$

$X_B + X_A =$ $Y_B - Y_A =$
$X_B - X_A =$
log $(X_B + X_A) =$ *log* $(Y_B - Y_A) =$
log $(X_B - X_A) =$

II. fokozat. $(\mathrm{A, B}_{max.} = 100$ km.)

Ha a szóban forgó oldal *35* és *100* km között fekszik, akkor az I. fokozati sornak (18. alatti) *utolsó két tagja elhanyagolható.* Ekkor a képlet, mely egész Magyarország területére értelmezve, maximumban $\pm 0''{,}005$ hibát eredményez, a következő:

20. . . . .
$$\begin{cases} \Delta_{A,B} = -t_1 + t_2 + t_3 \\ \Delta_{B,A} = +t_1 + t_2 - t_3, \text{ amely egyenletekben} \end{cases}$$

21. . . . . .
$$\begin{cases} t_1 = (\mathrm{I}) \ (x_B + x_A) \ (y_B - y_A) \\ t_2 = (\mathrm{II}) \ (x_B - x_A) \ (y_B - y_A) \\ t_3 = (\mathrm{III}) (x_A + x_B)^2 \ t_1 \end{cases}$$

Az I. II. III. együtthatók értékei azonosak az I. fokozatban közöltekkel:

22. . . . . .
$$\begin{cases} \log (\mathrm{I}) = 1.658\,8246 - 10 \\ \log (\mathrm{II}) = 1.181\,7033 - 10 \\ \log (\mathrm{III}) = 5.867\,28 - 20 \end{cases}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ezen redukció számítás $\pm$ 0.″005-re élesen végezhető el az A és B pontok *előzetes összrendezői* által, mert $(x_A + x_B)$, $(x_B - x_A)$, $(y_B - y_A)$ értékeket elegendő $\pm$ 5 ölre élesen vezetni be a számításba, azaz **10** ölekre kikerekített $(x_A + x_B)$ stb. argumentumokkal végezhetjük el a számításokat. És így 7 jegyű logaritmus könyvvel dolgozva ezen argumentumok logaritmusai (log $(x_A + x_B)$, stb.) *interpolálás* nélkül üthetők fel. A 20. szerinti számítás logaritmus könyv nélkül a „*V. U.*“ könyvben általunk kiszámított 3. b. számtáblázattal is végezhető el.

Számítási séma. (35—100 km hosszakra.)

A ≡	$(x_A + x_B)$	$(x_B - x_A)$	$(y_B - y_A)$	$x_B =$	$y_B =$
B ≡				$x_A =$	$y_A =$
	(+) 1.658 8246 — 10	(+) 1.1817033 — 10	(+) 5.867 28 — 20	$+ t_2 + t_3 =$	
	log $(x_B + x_A) =$	log $(x_B - x_A) =$	log $(x_B + x_A)^2 =$	$- t_1 =$	
	log $(y_B - y_A) =$	log $(y_B - y_A) =$	log $t_1 =$	$\Delta_{A,B} =$	
	log $t_1 =$	log $t_2 =$	log $t_3 =$	$+ t_1 + t_2 =$	
	$+ t_1 =$	$+ t_2 =$	$+ t_3 =$	$- t_3 =$	
				$\Delta_{B,A} =$	

III. fokozat.

Ha *12 km* $<$ C $<$ *35 km*, akkor logaritmus könyv nélkül, ezen kötet végén levő I. számú táblázatból végezhetők el az irányredukció számítások. — A képlet most ez:

$$23. \ldots \ldots \begin{cases} \Delta_{A,B} = (+\tau_I - \tau_{II})\ (y_B - y_A). \\ \Delta_{B,A} = (-\tau_I - \tau_{II})\ (y_B - y_A). \end{cases}$$

A $+\tau_1$ szorzó tag az I. számú táblázatból nyerhető egyszerű lineáris interpolálással; argumentum az $(x_B + x_A)$ *közelítő értéke.*

A τ_2 szorzó tag is az I. számú számtáblázatból nyerhető úgyszólván interpolálás nélkül: argumentum az $(x_B - x_A)$ *közelítő értéke.* Használati utasítás található az I. táblázatnál.

IV. fokozat.

12 kilometeren aluli oldalak irányredukciója ($\Delta_{A,B} = -\Delta_{B,A}$) ezen képlettel nyerhető: $\Delta_{A,B} = +\tau_I$.

A τ_I értéke e könyv végén levő I. táblázatból vehető ki.

Számpéldákat az irányredukció számításra a következő cikk végén adunk.

6. cikk. Szabatos oldalhosszredukció.

Ugyanazon képletek és táblázatok érvényesek mindhárom magyar hengervetületre.

I. fokozat.

Magyarország területén belül bármely *500 km* hosszú oldal hosszredukcióját adja ezen képlet — a 8-ik logar. 1. egységére élesen.

$$\log c - \log c' = \sigma = +\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6,$$

amely egyenletekben:

$$\sigma_1 = (I)'\ (x_A + x_B)^2$$
$$\sigma_2 = (II)'\ (x_B - x_A)^2$$
$$\sigma_3 = (III)'\ (x_A + x_B)^4$$
$$\sigma_4 = (IV)'\ (x_A + x_B)^2\ (x_B - x_A)^2$$
$$\sigma_5 = (V)'\ (x_A + x_B)^2\ (y_B - y_A)^2$$
$$\sigma_6 = (VI)'\ (x_A + x_B)^6,$$

amely együttható rendszerben,

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

ha a σ_1, σ_2, stb tagokat a *7-ik* logaritmus egységeiben akarjuk nyerni:

$$\log\ (\mathrm{I})' = \log \frac{10^7\ \mathrm{M}}{8\ \mathrm{R}^2} = 2.681\ 1537\ 443 - 10$$

$$\log\ (\mathrm{II})' = \log \frac{10^7\ \mathrm{M}}{24\ \mathrm{R}^2} = 2.204\ 0325 - 10$$

$$\log\ (\mathrm{III})' = \log \frac{10^7\ \mathrm{M}}{192\ \mathrm{R}^4} = 8.247\ 40 - 30$$

$$\log\ (\mathrm{IV})' = \log \frac{10^7\ \mathrm{M}}{48\ \mathrm{R}^4} = 8.849\ 46 - 30$$

$$\log\ (\mathrm{V})' = \log \frac{10^7\ \mathrm{M}}{96\ \mathrm{R}^4} = 8.548\ 43 - 30$$

$$\log\ (\mathrm{VI})' = \log \frac{10^7\ \mathrm{M}}{2880\mathrm{R}^6} = 4.017\ 77 - 40$$

A σ tehát a *7-ik* logar. egységeiben adódik, az y, x argumentumok *ölekben* fejezendők ki.

Teljesen elegendő *kerekszámú* ölekben ismerni, illetve figyelembe venni az argumentumokat.

Az egyes tagok előjele változatlan, azaz: mivel az összes argumentumok *páros* hatványúak, azért:

σ_1, σ_2, σ_5, σ_6 mindig positívek,
σ_3, σ_4 pedig mindig negatívek.

Ezen számítás célszerű, gyors elvégzésére szolgál a következő *séma*:

A ≡ ; x_A = | y_A =
B ≡ ; x_B = | x_B =

$x_A + x_B$ =
$\log(x_A + x_B)$ =
$x_B - x_A$ =
$\log(x_B - x_A)$ =

$y_B - y_A$ =
$\log(y_B - y_A)$ =

2.681 1537 — 10
$\log(x_A+x_B)^2$
$\log\ \sigma_1$ =

σ_1 = +

σ_3 = —

8.247 40 — 30
$\log(x_A+x_B)^4$
$\log\ \sigma_3$ =

2.204 0325 — 10
$\log(x_B-x_A)^2$
$\log\ \sigma_2$ =

σ_2 = +

σ_4 = —

8.849 46 — 30
$\log(x_A+x_B)^2$
$\log(x_B-x_A)^2$
$\log\ \sigma_4$ =

σ_5 = +

8.548 43 — 30
$\log(x_A+x_B)^2$
$\log(y_B-y_A)^2$
$\log\ \sigma_5$ =

σ_6 = +

összeg =

összeg =

4.017 77 — 40
$\log(x_A+x_B)^6$
$\log\ \sigma_6$ =

σ =

*) A képletekben **M** jelenti a logaritmikus *modulust:* 10-es rendszerű és természetes alapú logaritmusok között.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

II. fokozat.

Bármely *elsőrendű* háromszögoldal hosszredukcióját megkapjuk, hogyha a nagy távolságokra közölt sornak csak első három tagját vesszük figyelembe:

$$\log c - \log c' = \sigma = + \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3, \text{ ahol}$$
$$\sigma_1 = (\mathrm{I})' \ (X_A + X_B)^2$$
$$\sigma_2 = (\mathrm{II})' \ (X_B - X_A)^2$$
$$\sigma_3 = (\mathrm{III})' \ (X_A + X_B)^4,$$

amely rendszerben az együtthatók logaritmusai:

$$\log (\mathrm{I})' = 2.681\,1537 - 10$$
$$\log (\mathrm{II})' = 2.204\,03 \ \ - 10$$
$$\log (\mathrm{III})' = 8.247\,40 \ \ - 30.$$

Az $(X_A + X_B)$, $(X_B - X_A)$ argumentumokat kerek ölekben kell csak a számításba vinni. A σ ilymódon a 7-ik logar. egységeiben adódik. Célszerű séma ez:

$X_B =$	$2.681\,1537 - 10$ $\quad 2.204\,03 - 10$
$X_A =$	$\log (X_A + X_B)^2$ $\quad \log (X_B - X_A)^2$
	$\log \sigma_1 =$ $\quad \log \sigma_2 =$
	$\sigma_1 = +$ $\quad \sigma_2 = +$
	$8.247\,40 \ \ - 30$
$X_A + X_B =$ $\quad X_B - X_A =$	$\log (X_A + X_B)^4$ $\quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3$
$\log (X_A + X_B) =$ $\quad \log (X_B - X_A) =$	$\log \sigma_3 =$ $\quad =$
	$\sigma_3 = -$

Ezen képlet a hosszredukciót $\pm$ 0,000 0000 1-re élesen adja **50** km-es háromszögoldal esetében még akkor is, hogy ha az illető oldal $\pm$ **250** km-re van az X tengelytől: tehát nemcsak a vetületi rendszer határokon belül, hanem ha Magyarország bármely pontjára nézve használható.

III. fokozat.

Ha az illető oldal *12 km* és *35 km* között fekszik, akkor egészen szabatos hosszredukciót nyerünk egyszerű lineáris interpolálással az ezen kötet függelékében közölt 2. számtáblázattal:

$$\sigma = \sigma_{I.} + \sigma_{II.},$$

a $\sigma_{I.}$ a *hetedik* logaritmus egységeiben nyerhető a számtáblázatból az $(X_A + X_B)$ argumentumhoz; — $\sigma_{II.}$ pedig az $(X_B - X_A)$ argumentumhoz. Ugy az $(X_A + X_B)$ mint az $(X_A - X_B)$ argumentumok **1000** öles egységekben veendők figyelembe még pedig

35—20 km oldal esetében elég 2 decimálist venni figyelembe,
20—12 km „ „ „ 1 „ „ „

Ha tehát $X_A + X_B = 132\,462$ öl, akkor az $(X_A + X_B)$ argumentum $= 132.46$.
illetve $(X_A + X_B)$ „ $= 132.5$.

Hangsúlyozzuk, hogy úgy $\sigma_{I.}$ mint $\sigma_{II.}$ mindig + előjelűek.

Célszerű séma.

$A \equiv$	
$B \equiv$	
$X_A =$	
$X_B =$	
$(X_A + X_B) =$	$(X_B - X_A) =$
$\sigma_{I.} = +$	$\sigma_{II.} = +$
$\sigma = \sigma_{I.} + \sigma_{II.} =$	

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

IV. fokozat.

12 km-en aluli oldalaknál:

$$\sigma = + \sigma_{I.},$$

a 7-ik logaritmus **0.6** egységére élesen. Argumentum az *1000* öles egységekben kifejezett $(X_A + X_B)$. Teljesen elegendő az $(X_A + X_B)$ argumentumot ± 1 tizedesre élesen venni figyelembe. Pl.

$$(X_A + X_B) = 143\,659 \text{ öl, akkor az}$$
$$(X_A + X_B) = \textit{143.7}$$

argumentumhoz fejben való interpolálással nyerhető ± 1 egységre élesen a $\sigma_{I.} = \sigma$ érték e kötet függelékének 2. táblázatából, a 7-ik logaritmus egységeiben kifejezve.

Hangsúlyozzuk, hogy $\sigma_{I.}$ mindig *positív*.

Célszerű séma.

$X_A =$	(1000 öles egységekben **2** decimálisra kiírva.)	
$X_B =$	(„ „	„ „ „ .)
$(X_A + X_B) =$	(1000 öles	„ **1** „ „ .)

$\sigma = \sigma_{I.} =$.

Számpéldák.

Hengervetület. *K. R.*

Délszög- és hosszredukció.

(Nagy távolság esete.)

A pontok nevei: A = Gellérthegy
B = Ivančica.

I. A Δ_{AB} és Δ_{BA} délszögredukciók számítása.

$y_B = + 118\,881.0$ $x_B = + 54\,392.0$ t_1 $- t_3$ t_4 t_5 $= t$

$y_A = 0$ $x_A = - 19\,912$ $\pm$ 18·685 5 0·0019 0 $+ 18.''6872$

0.0002

t_2

$(y_B - y_A) =$ $(x_B + x_A) = + 34\,480$ $= + 13.''4223$

$\log (y_B - y_A) = + 5.075\,1125$ $(x_B - x_A) = + 74\,304$

$\log (x_B + x_A) = + 4.537\,5673$ $\Delta_{A.B.} = t - t_2 = + 5.''2649$

$\log (x_B - x_A) = + 4.871\,0122$ $\Delta_{B.A.} = - t - t_2 = - \textit{32.1095}$

$(+) 1.658\,8246 - 10$ $(+) 1.181\,7033 - 10$ $(+) 5.867\,28 - 20$

$\log (x_B + x_A) + 4.537\,5673$	$\log (x_B - x_A) + 4.871\,0122$	$\log (x_B + x_A)^2$ 9.075 13
$\log (y_B - y_A) + 5.075\,1125$	$\log (y_B + y_A) - 5.075\,1125$	$\log t_1$ 1.271 50
$\log t_1 = 1.271\,5044$	$\log t_2 = 1.127\,8280$	$\log t_3 = 6.213\,91 - 10$
113	108	
	108	

$(+) 5.867\,28 - 20$ $(+) 5.946\,46 - 20$

$\log (y_B - y_A)^2$ 10.150 22	$\log (x_B + x_A)^2$ 9.075 13
$\log t_1$ 1.271 50	$\log t_3$ 6.213 91 − 10
$\log t_4 = 7.289\,00 - 10$	$\log t_5 =$ 0

*) Minthogy $\sigma_{I.} = \sigma_1 - \sigma_3$ és $\sigma_{II.} = \sigma_2$, azért a táblázatok, ha *ölre* élesen interpolálunk, még *elsőrendű* oldalra is éles eredményeket adnak.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

II. A σ = log AB henger — log AB gömb számítása.

	2.681 1537 — 10
$\log (x_A + x_B)^2$	9.075 1346
$\log \sigma_1 =$	1.756 2883
	2.204 0325 — 10
$\log (x_B - x_A)^2$	9.742 0244
$\log \sigma_2 =$	1.946 0569
	8.548 43 — 30
$\log (x_B + x_A)^2$	9.075 13
$\log (y_B - y_A)^2$	10.150 22
$\log \sigma_5$	7.773 78 — 10
	4.017 77 — 40
$\log (x_B + x_A)^6$	27.225 39
$\log \sigma_6 =$	0

	8.247 40 — 30
$\log (x_A + x_B)^4$	18.150 26
$\log \sigma_3 =$	0
	8.849 46 — 30
$\log (x_A + x_B)^2$	9.075 13
$\log (x_B - x_A)^2$	9.742 02
$\log \sigma^4 =$	7.666 61 — 10

$\sigma_1 =$	+ 57.054	$\sigma_3 =$ — 0
$\sigma_2 =$	+ 88.320	$\sigma_4 =$ — 0.005
$\sigma_5 =$	+ 0.006	
$\sigma_6 =$	+ 0	
A tagok összegei:	+ 145.380	— 0.005

σ = *145.375*

A hosszredukció felhasználása.

Az Y.—G. egyenes D. R. vetületi hossza: 5.146 7232.403
— σ = — 145.375
gömbi oldalhossz Iv.-Gellérth. = 5.146 7087.028

Hengervetület. *D. R.*

Délszög- és hosszredukcio.

(Érvényes: bármely I. rendű oldalra.)

adva:

A≡**Ivančica**	$y_B = +126\ 825.0$	$x_B = -21\ 279.0$	$(y_B - y_A)$	$(x_B + x_A)$	$(x_B - x_A)$
B≡**Sliemen**	$y_A = +118\ 873.2$	$x_A = -37\ 536.0$	+ 7952.0	— 58815.0	+16256.0

(+)	1.658 8246 — 10	(+)	1.181 7033 — 10
(—) $\log (x_B + x_A)$	**4.769 4881**	(+) $\log (x_B - x_A)$	**4.211 0137**
(+) $\log (y_B + y_A)$	**3.900 4764**	(+) $\log (y_B - y_A)$	**3.900 4764**
(+) $\log t_1 =$	**0.328 7891**	(+) $\log t_2 =$	**9.293 1934**

(+)	5.867 28 — 20	$t_1 =$	— **2.132$_0$**
(+) $\log (x_B + x_A)^2$	**9.538 97**	— $(t + t_3)$	— **0.196$_3$**
(—) $\log t_1$	**0.328 79**	$\Delta_{A.B.} =$	— **2.328$_3$**
(—) $\log t_3 =$	**5.735 04**		

			$t_3 =$ — **0.000$_1$**
$t_1 =$ — **2.1320**	$t_2 =$ + **0.1964**	$t_3 =$ — **0.''0001**	— $(t_1 + t_2) =$ + **1.935$_6$**
			$\Delta_{B.A.} =$ + **1.935$_5$**

2.681 1537 — 10	2.204 03 — 10	8.247 40 — 30
$\log (x_A + x_B)^2$ **9.538 9762**	$\log (x_B - x_A)^2$ **8.422 03**	$\log (x_B + x_A)^4$ **19.077 94**
$\log \sigma_1 =$ **2.220 1299**	$\log \sigma_2 =$ **0.626 06**	$\log \sigma_3$ **7.325 34**
$\sigma_1 =$ + **166.01**	$\sigma_2 =$ + **4.23**	$\sigma_3 =$ + **0.00$_2$**

$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 =$ **170.24**

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Délszög- és hosszredukció számitás.

É. R.
K. R.
D. R.

Hengervetület.

(Érvényes 35 km. oldalhosszig).

A ≡ **Ivančica** B ≡ **Sliemen** $y_B = +\ 126.83$ $x_B = -\ 21.28$ hosszegység: 1000 öl.
$y_A = +\ 118.87$ $x_A = -\ 37.54$ „ 1000 „

$\tau_1 = -\ 0.268\ 13$ $y_B - y_A = +\ 7.96$ $x_B + x_A = -\ 58.82$ $\sigma_I = 166.0$
$\tau_2 = +\ 0.024\ 71$ $x_B - x_A = +\ 16.26$
$(\tau_1 - \tau_2) = -\ 0.292\ 84$

$\sigma_{II} = 4.2$

$\Delta_{A.\,B.} = (\tau_1 - \tau_2)\,(y_B - y_A) = -\ 2.''331$
$-(\tau_1 + \tau_2) = +\ 0.243\ 42$ $\Delta_{B.\,A.} = -(\tau_1 + \tau_2)\,(y_B - y_A) = +\ 1.''937$
$\sigma = \sigma_I + \sigma_{II} = 170.2$

Függelék a IV. Fejezethez.

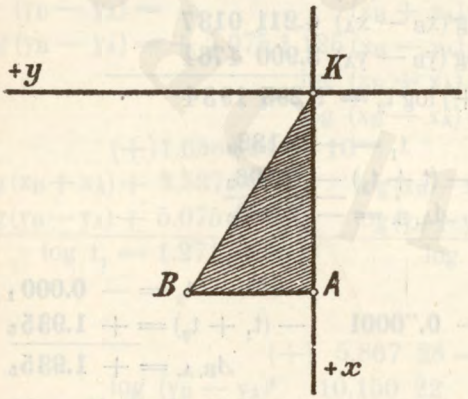
1. cikk. A stereográfikus- és a konform hengervetület irány- és hosszredukció törvényének összehasonlitása egy pont környezetében.

Tudjuk, a IV. Fej. 3. §-ából, hogy a stereográfikus vetületen egy *200 km.-es* sugarú centrálkörön belül bármely *50* km. hosszú oldal délszögredukcióját $\pm$ *0,''01*-re élesen megkapjuk, ha *a vetületi, egyenes oldalu centrális háromszög területének* megfelelő gömbi szögfölösleg felét vesszük.

$$1. \ . \ . \quad |\Delta_{A,\,B}| = |\Delta_{B,\,A}| = \frac{1}{2}\frac{F}{R^2}\varrho'' = \frac{2F}{4R^2}\varrho'' = \left(\frac{\varrho''}{4R^2}\right) 2F$$

A konform hengervetületen — **200** kilométeres sávszélesség mellett ($|^{x}\text{max.}| =$ 100 km) — bármely 12 km.-nél nem hosszabb oldal délszögredukcióját megkaphatjuk $\pm$ 0,''05-re élesen ezen egyszerüsített képlettel: (képletben . . . oldalon a t_1 tag)

$$2. \ . \ . \ . \quad |\Delta_{A,\,B}| = |\Delta_{B,\,A}| = \left(\frac{\varrho''}{4R^2}\right)(x_B + x_A)(y_B - y_A)$$



44. ábra.

Tegyük fel, hogy a szóban forgó AB oldal párhuzamos mindkét vetületen az y tengelylyel és az A pont a + x tengelyen van. (44. ábra) Jelöljük a stereográfikus rendezőket ξ, η-val. Akkor a *stereográfikus vetületen* $\xi_A = \xi_B = \xi$ lévén, a *centrális háromszög* kétszeres területe:

$$2F = (\eta_B - \eta_A)\,\xi$$

de mivel most $\eta_A = 0$, azért

$$2F = \eta_B \,.\, \xi \text{ és igy}$$

$$3. \ . \ . \quad |\Delta_{A,\,B}| \ (stereogr.) = \left(\frac{\varrho''}{4R^2}\right) \eta_B \,.\, \xi \ -$$

A hengervetületen, mivel a feltevés szerint $x_B = x_A = x$, és $y_A = 0$, az irányredukció értéke a 2. képlet értelmében:

$$4. \ . \ . \quad |\Delta_{A,\,B}| \text{ (henger)} = \left(\frac{\varrho''}{4R^2}\right) y_B \,.\, 2x = 2\left\{\left(\frac{\varrho''}{4R^2}\right) y_B \,.\, x\right\}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ha feltesszük azt, hogy

$$\left.\begin{matrix} y_B = \eta_B \\ x = \xi \end{matrix}\right\}, \text{ akkor 3. és 4. összehasonlításából kitünik, hogy}$$

5. . . . . $|\Delta_{A,B}|$ *henger* $= 2\,|\Delta_{A,B}|$ *stereográfikus*, — azaz *a hengervetületen az x tengely mentében az y-al párhuzamos irányban kétszer akkora az irányredukció, mint hasonló távolság és fekvés mellett a stereográfikus vetületen.*

Könnyü lesz azonban kimutatni, hogy az A B oldalt az A pont körül forgatva a *hengervetületen* és a *stereográfikus* vetületen, az A B oldal bármely helyzetében szintén az 5. alatt kifejezett törvény érvényes.

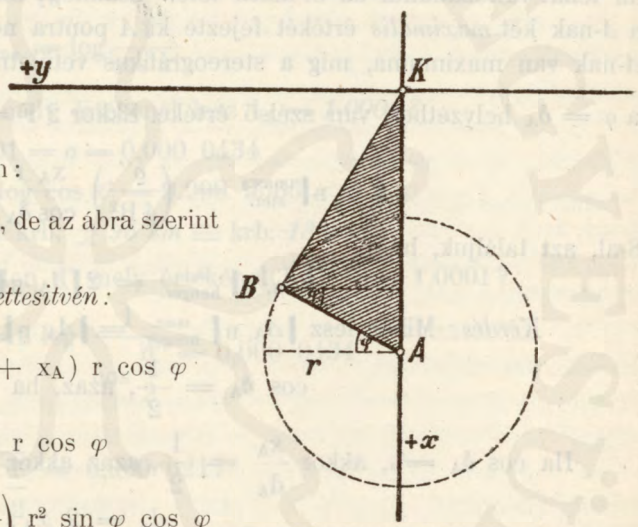
Nevezzük az AB oldalt rövidség okáért r-el, a kiinduló — azaz az y iránnyal bezárt szöget φ-vel; akkor (45. ábra)

$$(2\,F)_\varphi = \xi\ r\ \cos\varphi, \text{ tehát}$$

$$|\Delta_{A,B}|_\varphi \text{ ster.} = \left(\frac{\varrho''}{4\,R^2}\right) \xi\ r.\ \cos\varphi = |\Delta_{A,B}|_{\text{ster.}} \cos\varphi$$

ahol a $|AB|$ ster. a $\varphi = 0$-nak megfelelő redukció. Tehát a stereográfikus vetületen:

6. . $\Delta_{A,B}|_\varphi = |\Delta_{A,B}|_{\varphi=0} \cos\varphi$



45. ábra.

A *hengervetületen* 2. értelmében:

$|\Delta_{A,B}|_\varphi = \left(\frac{\varrho''}{4\,R^2}\right)(x_B + x_A)\,(y_B - y_A)$, de az ábra szerint

$$\left.\begin{matrix} (y_B - y_A) = r\cos\varphi \\ (x_B - x_A) = r\sin\varphi \end{matrix}\right\} \textit{helyettesitvén:}$$

$$|\Delta_{A,B}|_\varphi = \left(\frac{\varrho''}{4\,R^2}\right)(x_A - r\sin\varphi + x_A)\,r\cos\varphi$$

$$= \left(\frac{\varrho''}{4\,R^2}\right)(2\,x_A - r\sin\varphi)\,r\cos\varphi$$

$$= \underbrace{2\left\{\left(\frac{\varrho''}{4\,R^2}\right)(x_A\ r)\right\}}_{\text{I.}}\cos\varphi - \underbrace{\left(\frac{\varrho''}{4\,R^2}\right) r^2 \sin\varphi\cos\varphi}_{\text{II.}}$$

A I. tag nem egyéb, mint a $\varphi = 0$-nak megfelelő és 4. alatt felirt redukció érték, tehát

$|\Delta_{A,B}|_\varphi = |\Delta_{A,B}|\cos\varphi$ — (II.), figyelembe véve 5. és 6-ot

$= 2\,|\Delta_{A,B}|_\varphi$ *stereogr.* — (II.).

Lássuk a II. tag értékét. Mivel $\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2} \times \sin 2\varphi$, ennek szélső értéke pedig $\varphi = 45^0$ esetében $= \frac{1}{2}$, azért

$$\text{(II) max.} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho''}{4\,R^2}\right) r^2$$

Minthogy $\frac{\varrho''}{4\,R^2}$ értéke körülbelül $= 0{,}0023$, (ha hosszegységül 1000 métert veszek) azért $AB = r = 10$ km. esetében

$$\text{(II) max.} = \frac{1}{2}\,(0.0023)\ 100 = \frac{0.23}{2} = 0.''12$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Tehát ha az oldal *10* km.-nél nem nagyobb, akkor az **A** pontot mindig az x tengelyen képzelve $\pm$ *0.''12*-re élesen áll ez a nevezetes egyenlet:

7. . . . . $|\Delta_{A,\,B}|_{\varphi\ henger} = 2|\Delta_{A,\,B}|_{\varphi\ stereogr.}$

Ha a szóban forgó AB vetületi oldalt mindkét vetületen önmagával párhuzamosan eltolva képzelem, úgy tehát hogy $|x_A| = |x_B| = x$, és $|\xi_A| = |\xi_B| = \xi$, továbbá $y_A > 0$ és $\eta_A > 0$, akkor az $AB = r$ oldal irányredukciója a *hengeren* 2. szerint:

8. . . . . $|\Delta_{A,\,B}| = \left(\frac{\varrho''}{4R^2}\right) 2\ x\ r = 2\left\{\left(\frac{\varrho''}{4R^2}\right) x\ r\right\}$

A *stereográfikus* vetületen pedig 1. értelmében, mivel most $2F = \xi\ r$,

9. . . . . $|\Delta_{A,\,B}|_{ster.} = \left(\frac{\varrho''}{4R^2}\right) \xi\ r,$

Összevetve 8-at 9-el, lesz:

10. . . . . $|\Delta_{A,\,B}|_{ster.} = \frac{1}{2}|\Delta_{A,\,B}|_{henger.}$

áll tehát változatlanul az 5. alatti tétel. Csakhogy míg 5-ben a *stereogr.* és *henger.* redukció Δ-nak két *maximális* értékét fejezte ki A pontra nézve, addig most csak a hengervetületi Δ-nak van maximuma, mig a stereográfikus vetületnek nem a $\varphi = 0$ helyzetben, hanem a $\varphi = \delta_A$ helyzetben van szélső értéke. Ekkor $2F = d_A\ r = \frac{x_A}{\cos\delta_A}\ r$, — és így

$$|\Delta_{A,\,B}|^{(max.)}_{ster.} = \left(\frac{\varrho''}{4R^2}\right)\frac{x_A\ r}{\cos\delta_A},$$ amit összevetve

8-al, azt találjuk, hogy

$$|\Delta_{A,\,B}|^{max.}_{henger.} = 2|\Delta_{A,\,B}|^{max.}_{ster.}\ cos\ \delta_A$$

Kérdés: Mikor lesz $|\Delta_{A,\,B}|^{max.}_{henger.} = |\Delta_{A,\,B}|^{max.}_{ster.}$, akkor, ha

$$\cos\delta_A = \frac{1}{2},\ \text{azaz, ha}\ \delta_A = \mathbf{60^0}.$$

Ha $\cos\delta_A = {}^1/_2$, akkor $\frac{x_A}{d_A} = \frac{1}{2}$, azaz akkor

$$d_A = 2\ x_A.$$

Tehát ha a hengervetületen az $\frac{1}{10000}$-es hossztorzulásnak megfelelő x-et $x_{max.}$-nak nevezzük, akkor *ugyanazon szögtorzulásra* egy kétszer *akkora sugarú centrális stereográfikus körön belül jutok csak,* azaz *megengedett* $d_{max.} = 2\ x_{max.}$

Az *erdélyi stereográfikus* rendszer ezért az irányredukciók szempontjából nem kedvezőtlenebb, mint a magyar hengersávok.

Hengersávjainkban $x_{max.} = 12$ mértföld $=$ krb. 90 km.

Erdélyben $d_{max.} = 24$ „ $=$ krb. 180 km.

Az eddigi vizsgálatok eredményeit összefoglalva mondhatjuk:

a) a hengervetületi irányredukció változása egy pont környezetében ugyanazt a törvényt követi, mint a stereográfikus vetületnél;

b) a stereográfikus vetület, egész addig, amíg

$$d \leqq 2\ x$$

kedvezőbb — azaz kisebb szögtorzulásokat eredményez a vetületben, mint a *hengervetület.*

Oly országokra tehát, melyek az 1.0001 torzulási körön belül elférnek, a szögtorzulás szempontjából *sokkal* előnyösebb a *stereográfikus* vetület.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A lineármodulus értékei a stereográfikus és a hengervetületnél.

A stereográfikus vetületnél:

$$l_A = \frac{1}{\cos^2 \frac{d'}{2}}, \text{ ahol}$$

d′ jelenti az **A** pont gömbi távolát a K kezdőponttól.

A *hengervetületnél* pedig

$$l_A = \frac{1}{\cos x'}, \text{ ahol}$$

x′ jelenti az illető pontnak gömbi távolát a *K* ponton átmenő henger-érintési körtől, azaz az y tengelynek megfelelő legnagyobb gömbi körtől. Vagy σ-val jelölve a lineármodulusok logaritmusait:

$$\sigma_{ster.} = 2 \log \frac{1}{\cos \frac{d'}{2}}$$

$$\sigma_{heng.} = \log \frac{1}{\cos x'}$$

Kérdés: A hengervetületnél x′ mely értékénél lesz $l_A = 1.0001$?

$$\log 1.0001 = \sigma = 0{,}000\ 0434$$

$$\text{compl. } \sigma = \log \cos x' = 9.999\ 9566$$

$$x' = 0° 48' 30'' \equiv \text{krb. } \pm 95 \text{ km} \equiv \text{krb. } 13 \text{ mtf.}$$

Kérdés: A stereográfikus vetületen d′ mely értékénél lesz $l_A = 1.0001$?

$$\log 1.0001 = \sigma = 2 \log \frac{1}{\cos \frac{d'}{2}} = 0{,}000\ 0434$$

$$\log \frac{1}{\cos \frac{d'}{2}} = 0{,}000\ 0217$$

$$\log \cos \frac{d'}{2} = 9.999\ 9783$$

$$\frac{d'}{2} = 0° - 34' - 20''$$

$$d' = 1° - 8' - 40'' \equiv \text{krb. } 130 \text{ km} \equiv \text{krb. } 17 \text{ mtf.}$$

Míg tehát a *hengervetületnél* a maximális sávszélesség $2 \times 95 = \mathbf{180}$ km lehet, addig a *stereográfikus* vetület **260** km *átmérőjü körig használható* még 1/10000 szélső értékü hossznagyítás mellett.

Kérdés: A stereográfikus vetületen 95 km távolban a központtól, azaz *190* km sugarú körön belül *mekkora* a maximális lineármodulus értéke?

$$d' = 0° - 48' - 30''$$

$$\frac{d'}{2} = 0 - 24 - 15$$

$$\sigma = 2 \log \frac{1}{\cos 24' 15''} = 2 \times 0.000\ 0108 = 0.000\ 0216 \text{ (hengervetületnél } 0{,}000\ 0434\text{)}$$

ahonnan $l_{max.} = 1.00005$, azaz pontosan a *fele* a hengervetületi lineármodulusnak.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Miként előbb említve volt, az erdélyi rendszer maximális d-je = *180* km a magyarországi hengersávok maximális fél szélességei $x_{max.} = 90$ km.

Mig a *90 km*-es x-nek a hengervetületen krb. 1.00010 szélső értékű lineármodul felel meg, addig a stereográfikus $d = 180$ km-nek csak krb. 1.00014 szélső értékű lineármodul felel meg, dacára annak, hogy $d_{max.} = 2\ x_{max.}$

Oly országokra vagy tartományokra tehát, melyek a stereográfikus 1.0001 körbe befférnek — úgyis mint a kiegyenlítésnek, úgyis mint az alsó geodéziai felméréseknek legideálisabb vetületét a stereográfikus vetületet kell ajánlani.

Magyarország azonban legalább 8 stereográfikus rendszert involválna — azért jobb nekünk a *három* hengervetület.

2. cikk. A kiegyenlítés vetülete nem-e szükségképen szögtartó vetület?

Szabatosabban fogalmazva a kérdést: vajjon ha a kiegyenlítendő hálózatokat *akármilyen matematikai törvény* szerint vetítjük a síkra és ott elvégezzük a kiegyenlítést a legkisebb négyzetek módszere alapján — *szigorúan ugyanazon értékeket* (javításokat) szolgáltatja-e ezen közvetett eljárás, mint amire jutottunk volna, ha szögtartó vetületet alkalmaztunk volna, vagy pedig magán a szferoidon közvetítés nélkül végeztük volna el a kiegyenlítést:

A felelet ez: elméletileg nem ugyanarra az eredményre vezetnek ezek a különféle eljárások, de a *gyakorlat szempontjából ezen különböző eredmények szigorúan azonosaknak tekinthetők!* És ennek csak az az egyetlen feltétele, hogy a *redukciókat oly élesen számítsuk,* hogy azok a mérési hibákhoz képest legalább is *másodrendű végtelen kicsiny mennyiségeknek legyenek tekinthetők.* Pl. $\pm 0{,}1$ nagyságú mérési hibák esetében **legalább** is $\pm 0{,}01$-re élesen történjék a redukció.

Az imént mondott tétel igazságát be kell látnunk. Különböztessük meg a kiegyenlítésnek *két* célját:

1. úgy *javítani meg a mérési eredményeket, hogy a megjavított eredmények az összes képzelhető feltételi egyenleteknek,* — melyek hibátlan mérések esetében kielégítést nyernének — *eleget tegyenek.* Ilyen javítási, illetve *kiegyenlítő* értékrendszer *végtelen* sok van, elő is tudjuk állítani;

2. a *második* cél, *ezen végtelen sok javítási értékrendszer közt kikeresni azt, melyre nézve a*

$$[p\,\lambda\,\lambda]$$

négyzetösszeg minimum, amely kifejezésben p a mérési eredmények *súlyait*, a λ-ák pedig *ennek a javítási értékrendszernek egyes tagjait jelentik.* Azt a javítási értékrendszert, amely a négyzetösszeget minimummá teszi, a kiegyenlítendő mennyiségeknek *kiegyenlített és egyszersmind az adott körülmények közt legmegbizhatóbbaknak mondható értékrendszerét szolgáltatja, ha a javításokat tényleg elvégezzük.* Ha tehát a *redukciókat avval a szabatossággal végeztük el, mint a milyent az előbb feltételeztünk,* úgy a nyert $\alpha_{(s)}$ $\beta_{(s)}$ $\gamma_{(s)}$ szögértékek, a szóban forgó *síkháromszögelésnek ugyanazon súlyú p nyers mérési eredményeinek tekinthetők, mint amily súlyúak voltak az eredeti* α, β, γ *nyers szferoidikus mérési eredmények!*

Ismeretes, hogy a legmegbizhatóbb λ javításoknak előállítására szolgáló feltételi egyenletrendszerek együtthatói a *súlyok* és a nyers *mérési* eredmények által nyerhetők. A *súlyok, bármely vetítési módot alkalmaztak légyen is a mondottak szerint — ugyanazok.* Nem igy azonban a *nyers mérési eredményeknek* tekintendő $\alpha_{(s)}$, $\beta_{(s)}$, $\gamma_{(s)}$ redukált szögek és a redukált bázisok mérőszámai.

Ebből az következik, hogy más és más *kiegyenlitett és egyúttal az adott körülmények közt legmegbízhatóbbnak tekinthető* λ javítási értékrendszerre jutunk aszerint, amint más és

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

más *vetítési módot* használunk. Tehát a konform vetítési módok mindegyike más és más eredményt ad és ezek közt egyik értékrendszer sem lesz szükségképen azonos azon értékrendszerrel, *amelyre a szferoidon való kiegyenlítés esetében jutottunk volna.*

Ha a redukciók abszolut értékre nézve lehetőleg kicsinyek, ugy a λ értékrendszer is *jobban meg fogja közelíteni azt az értékrendszert, melyre a szferoidon való kiegyenlítéssel jutottunk volna. De világos, hogy képzelhetünk akárhány oly nem konform vetületet is pl. a kompensantiv vetület — mely hasonló megbizhatóságú eredményre vezet.*

Minthogy a kiegyenlítés 2-ik céljában amúgy is benne van az *adott körülmények közt* legmegbizhatóbb értékkitétel, azért nem *tulságosan torzuló* vetületen végezve a kiegyenlítést, minthogy *azonos súlyokkal* számolhatunk, a nyert eredményeket a gyakorlat szempontjából a legmegbízhatóbbaknak kell tekintenünk. Nem kell külön bizonyítanunk, hogy az első cél — a puszta kiegyenlítés — akármely vetület közbeigtatásával mindig *szigoruan* lesz elvégezhető.

Az előbb mondottakból azt a tanulságot mégis szabad levonnunk, hogy *ha lehetséges,* úgy oly *konform vetületet válasszunk, melynél kicsinyek* a második redukciók: de azért ez az előny nem nyom sokat a latban! A mondottakból az is következik, hogy a *gnomikus vetület — dacára annak, hogy nem szögtartó* — ha egyébiránt előnyökkel bír (és láttuk, hogy ilyeneket *igér*) a legcélszerűbb *kiegyenlítő vetületkeresésénél* mindenesetre vizsgálat tárgyává teendő.

3. cikk. A gnomikus vetület alkalmas-e az országos háromszögelés kiegyenlitő vetületének?[1])

A gnomikus vagy *centralperspektiv* sikvetület ősrégi idők óta ismeretes vetitési mód, amelyet csak ujabban kezdenek azonban gyakrabban alkalmazni. Az angol tengerészeti térképek — amióta az oceáni hajózás nem a loxodromák, hanem a legnagyobb gömbi körök vonalain történik — mind ezen vetületben készülnek, *lévén ez a vetület a matematikai projekciók végtelen sokaságában az egyedüli, amely a két ponton átmenő legnagyobb gömbi kört, mint az ezen pont síkképét összekötő egyenes vonalat ábrázolja* és igy adott két pont esetében ezen egyenest megvonva, a hajós egyszerü interpollálással nyeri mindazon φ, λ földrajzi rendezőket, melyek által meghatározott gömbi pontokon a hajóval áthaladva a legrövidebb uton ér a kiinduló pontból a végpontba. Ha amellett a gnomikus vetületből (mely nem szögtartó) kiszedett φ, λ rendezőket egy Merkator vetületü oceáni térképbe interpolálja a hajós, ugy — mivel a Merkator vetület szögtartó és a meridiánok mind párhuzamos egyenesek, a legegyszerübb papirszögmérők segitségével lemérhető az óráról-órára vagy félnapról-félnapra változtatandó *„Compass állás" nagysága, illetve mértéke.*

Valamely ország gömbvetületének gnomikus sikképe ugy áll elő, ha a gömbvetület geometriai központjához (neve φ_0, λ_0) tartozó érintő sikra képzeljük a gömbi pontokat a gömb középpontjából kiinduló sugárkúppal felvetítve.

A φ_0, λ_0 központ meridiánját mint egyenest ábrázoljuk, az lesz a derékszögü sik koordinata rendszer x tengelye (positív az északi félmeridián képe; reá merőleges és kelet felé positív az y tengely). A gömb sugara legyen R. Minthogy ábrázoló geométriai vetítésről van szó, pusztán térszemlélet alapján e vetületnek következő fontos sajátságait állíthatjuk fel:

1. az egyenlő torzulásu helyek az érintkezési pont ($x = O$, $y = O$) körül szerkesztve képzelt koncentrikus *körök* lesznek. A vetület tehát *„azimutális"*. Nulla az össz-

[1]) Ezen vetület ily szempontból ezideig még nem vizsgáltatott.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

torzulás az $x=O$, $y=O$ pontban és ettől távolodva nő, mig a képsíkkal párhuzamos vetitő sugarakkal vetitendő pontokban a lineár modulus minden irányban végtelen nagy lesz.

2. Minden legnagyobb gömbi kör képe — bármely pontján a gömbnek menjen is át — mint *egyenes vonal fog ábrázoltatni,* amit könnyű belátni, hiszen minden legnagyobb gömbi kör síkja a vetitő központon megy keresztül és igy minden legnagyobb gömbi kör képe, mint az *illető kör sikjának a képsikkal való metszésvonala áll elő.*

3. Ezen vetület nem lehet szögtartó, éppen az imént emlitett tulajdonságnál fogva: ha ugyanis szögtartó volna, akkor beállana az az eset, hogy egy legnagyobb körök által a gömbön képezett háromszögnek belszögei egyenkint és összesen egyenlők egy *valódi* (tehát egyenesekkel határolt) síkháromszög belszögeivel: ami képtelenség.

4. A linear modulus egy és ugyanazon pontban az iránynyal változik: de tüstént belátható, hogy a *főirányok* (*a* és *b* iránya) a torzulási koncentrikus körök érintői és sugarai irányába, tehát az azimutalis orthogonál fokhálózat irányába esnek — és igy Magyarország és minden ország, — mely a gömbi polust nem tartalmazza — esetében akármi legyen a φ_0, λ_0 pont: *a linear modulusok főirányai nem indentikusak a fohlálózati irányokkal, amely az imént kétségtelenül beigazolt tény, — nagy hátránya ennek a vetítési módnak, a kiegyenlitő vetület előállitására való alkalmazhatóságának.*

5. Végül tisztán ábrázoló geometriai szemlélettel, mindennemü matematikai vizsgálat nélkül kétségbevonhatatlanul megállapitható, hogy a vetület bármely pontjában (kivéve a φ_0, λ_0 pontot) a *maximalis linear modulus* nagyobb értékkel bir, mintha ugyanazon φ_0, λ_0 központot megtartva az illető ország gömbvetületének *stereografikus* képét állitottuk volna elő. Ismétlem, ez annyira belátható, hogy külön bizonyitásra valóban nem szorul. *Ugyanaz tehát a gnomikus vetületnek, mint a stereografikus vetületnek a hossztorzulási ábrája,* de az előbbinél ugyanazon koncentrikus körre nagyobb linear modulust (nagyobb értéket) kellene irni.

Könnyü volna bebizonyitani, hogy arra a matematikai alakban feltett kérdésre: melyek azon sikvetési módok, melyek az összes legnagyobb gömbi köröket, mint egyenes vonalakat ábrázolják — a válasz: a gnomikus vetület egyenletrendszere.

Mivel ezen bizonyitás minden a matematikai vetítési módokat ismertető részletes tankönyvben megtalálható, ezért egyszerüen állitom: hogy a gnomikus vetület az egyedüli amely az összes legnagyobb gömbi köröket egyenesekként ábrázolja.

Minthogy most már a Gauss-gömbre redukált háromszöghálózatok összes oldalai ily legnagyobb gömbi köröknek tekinthetők: a szferikus háromszöghálózat gnomikus síkvetületének előállitásakor *a második redukciók* (ami a konform vetitésnél irányredukciónak neveztetett) mind zérusok.

Az imént mondottak alapján áll a fontos tétel: *egy és csakis egyetlen egy oly vetitési mód létezik, mely a Gauss-gömbre redukált háromszöghálózat sikvetületének előállitására alkalmazva, a második irányredukciók számitását meg nem kivánja!* Evvel szemben végtelen nagy azon matematikai vetítési módok száma, amelyek — ha háromszöghálózat redukciójáról van szó — az *első* redukciók számitását teszik fölöslegessé: értem a konform vetületek elképzelhető végtelen sokaságát. Minthogy pedig a legcélszerübb kiegyenlítési síkvetület keresésénél alapvető szempont a *redukciók gyors számithatósága,* azért ez a szempont — és csakis ez — kötelességünkké teszi a konform vetületeken kívül a *gnomikus vetitési móddal* — de csakis evvel az egyetlen-egygyel — itt tüzetesen foglalkozni.

Láttuk ugyanis az előző §-ban, hogy a háromszöghálózat kiegyenlitését akármilyen torzulású vetületben szabatosan elvégezhetjük, tehát gnomikusan is: kizárólag a szögtartó vetületek azért — és csakis azért — alkalmaztattak eddig ezen célra, mert az összes

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

képzelhető vetitési módok között — kivéve esetleg a gnomikusat — a legegyszerübb számitásokat kivánják, hiszen

1. elmarad teljesen az első redukció számítása,

2. legegyszerübben végezhetők a hosszredukciók számitásai, mivel a linear modulusok a helynek (és nem az iránynak is) függvényei.

A konform vetületek ezen előnyeivel szemben a gnomikus vetület csak egyetlen előnyt tud felmutatni, t. i. azt, hogy a második redukciók számításai elmaradnak; hátránya azonban (mindig csakis a számítások egyszerüségére ügyelve) bármely konform vetülettel szemben az, hogy az oldalredukció nem végezhető el oly egyszerüen, mint bármely konform vetületnél, hiszen most a linear modulus nemcsak a hely, hanem az *iránynak* is függvénye. Sőt, minthogy asimutalis vetülettel van ekkor dolgunk, az egyenlő torzulási helyek tehát az $x = O$, $y = O$ pont körül irt koncentrikus körök és igy egy a vetület tetszőleges x, y pontján átmenő háromszögoldal ezen pontbeli linear modulusa

$$l_i = f_1 (x, y, i'),$$

ahol az i' a kérdéses érintőnek az első főiránynyal bezárt szögét jelenti. Tehát a gnomikus vetület esetében az l_i *háromargumentumos táblázatból* volna csak nyerhető; amellett hangsúlyoznom kell, hogy az egyik argumentum (i') — minthogy mint láttuk a főirányok nem azonosak a *fokhálózati* irányokkal — *kényelmetlenül állitható elő a gyakorlatban.*

A gyakorlatban l_i-t, mint a gömbi helyhatározók függvényértékét is képzelhetném előállitva

$$l_i = f_2 (\varphi, \lambda, i)$$

ahol φ, λ jelentik a földrajzi rendezőket, sőt különösen az i-re tekintettel az

$$l_i = f_3 (u, v, i)$$

függvényt ajánlanám, ahol u és v az *azimutalis földrajzi rendezőkkel* jelentik, amelyeknek a φ és λ-ből való átszámitására kész táblák vannak és amelyek alkalmazásával, minthogy *a torzulási főirányok indetikusak az azimutalis fokhálózattal,* bármely háromszögoldalhoz az i argumentum is kényelmesebben volna nyerhető. Ezt a módot különben az l_i közelitő számitására grafikusan igen egyszerüen lehet alkalmazni.

Feltéve azonban, hogy még ez az egyszerű grafikus mód is elég élesnek bizonyulna az i argumentum nyerésére, kétséget sem szenved, hogy *a háromszögelési oldalhosszredukció* a gnomikus vetület esetében nem oly egyszerü, mint *akármely* konform vetületnél.

Sőt összehasonlithatatlanul bonyolódottabb, mint a konform hengervetületé, ahol a lineár modulus bármely pontban (és természetesen bármely irányban) *egyargumentumos* táblázattal állitható elő.

Azt az ellenvetést tehetné itt valaki: minek az oldalredukciót a linear modulusok számitásával végezni, mikor ezen ábrázoló geometriai vetületnél (a gnomikusról van szó) a legnagyobb kör *ive* és az ennek képét adó *egyenes darab* hossza között kötött matematikai összefüggés állitható fel, teljesen szigorú számitásokat engedve! Erre az ellenvetésre a válasz ez: a redukciók számitása csakis ugy rövid és gépies, ha *numerikus táblázatokkal végezhető* — jelen esetben pedig ez lehetetlen — és még ha lehetséges volna is, akkor is azt a *három argumentumot* illetve — akármilyen — de mégis csak hármat — semmiféle fogással el nem lehet kerülni: az bizonyos!

A gnomikus vetület azonban még egyéb hátránynyal is bir a konform hengervetülettel vagy a konform kupvetülettel szemben, sőt még a sok tekintetben hasonló természetü stereografikus vetülettel szemben is.

Ugyanis a legcélszerübb kiegyenlitési vetülettől azt is megköveteljük, hogy az

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

ország gömbi vetületének *egy lehetőleg nagy és célszerü alakú részére szolgáljon alsó geodéziai vetületül.*

Az eddig mondottak alapján könnyü belátni, hogy a gnomikus vetület ezen követelménynek még sokkal kevésbbé tud megfelelni, mint a stereografikus vetület, sőt azt mondhatnám, egyáltalában nem tud megfelelni.

Ugyanis a linear modulusnak az egységtől legfeljebb $^1/_{10000}$-el való maximális eltérést tartva szem előtt, nem több, mint egy *80 kilométer sugaru kör által határolt felületrészen belül szolgálhatna a gnomikus vetület alsó geodéziai vetületül.* Ha rövidüléseket is engedünk meg, akkor 160 km. sugaru körről lehetne tehát maximumban szó: feltéve, hogy ezt a szögtorzulások engedik. De még ha engedik is, akkor még ez a terület *sem elég nagy, sem elég szerencsés alaku ahhoz, hogy Magyarország fenmaradó részét egyetlen síkon ábrázolhatnánk alsó geodéziai felmérések céljából.*

Eltekintve most már attól, hogy az országnak csak egy igen kis részére takaríthatnók meg az x, y derékszögü síkrendezők számitását, amellett még ezen kicsiny részen (körön) belül tetemes *szögtorzulásokat* és az iránytól is függő nagyságú linear modulusokat is kellene tűrnünk, ami pedig alsó geodéziai vetületnél kerülendő.

Az eddig mondottak alapján azt a fontos következtetést vonhatjuk le a további vizsgálatokra nézve: *ha a gnomikus vetítési mód az itt felsorolt többrendbeli hátrányaiért mintegy kárpótlásul az első redukciók szerfelett egyszerü*, — tehát a konform henger vagy kúpvetületnél sokszorta egyszerűbb — *számítását nem engedi, akkor minden további vizsgálat nélkül szó sem lehet a gnomikus vetület alkalmazásáról.*

Lássuk tehát, miként lehet a gnomikus vetület esetében az első redukciók számítását gyakorlatilag legcélszerűbben elvégezni.

Megtartva azt a betüs jelzést, melyet ezen cikk bevezetésében alkalmaztam, a gnomikus vetület közvetlen vetületi egyenletrendszere ez:

$$x = \frac{R \sin\lambda \cos\varphi}{\sin\varphi_0 \sin\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi \cos\lambda}$$

$$y = \frac{R(\cos\varphi_0 \sin\varphi - \sin\varphi_0 \cos\varphi \cos\lambda}{\sin\varphi_0 \sin\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi \cos\lambda}$$

Úgy az x, mint az y kifejezésében a nevező ugyanaz; jelöljük $N_{\varphi\lambda}$ betüvel, azaz a továbbiakban

1. . . . . $N_{\varphi\lambda} = \sin\varphi_0 \sin\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi \cos\lambda$
$= c_1 \sin\varphi + c_2 \cos\varphi \cos\lambda$

ahol c_1 és c_2 a térkép központja által adott mennyiségek.

Az I. fejezetben ismertetett általános érvényü Tissot-tételek alapján a szélső értékü lineár modulusok számértékei ezen egyszerü képlettel számithatók a vetület bármely pontjában:

2. . . . . $\begin{cases} a = \dfrac{1}{N^2} \\ b = \dfrac{1}{N} \end{cases}$

Ezek irányairól tudjuk, hogy az *azimutalis fokhálózat érintőivel azonosak: a* a koncentrikus körök érintői irányába esik.

Az egy tetszőleges pont környezetében előforduló maximális első redukciót ezen ismert átalános képlet adja:

$$\sin \Delta_{1^m} = \frac{a - b}{a + b}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Jelen esetben tehát a 2. értékek felhasználásával.

$$\sin \Delta_{1m} = \frac{\frac{1}{N^2} - \frac{1}{N}}{\frac{1}{N^2} + \frac{1}{N}} = \frac{1-N}{1+N}$$

Gyakorlati számításokra még alkalmasabbá tehetem ezen kifejezést, ha azon ϱ szöget számítjuk, mely a

$$\sec \varrho = b = \frac{1}{N}$$

által van adva. Ekkor ugyanis

$$3. \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \sin \Delta_{1m} = \tang^2 \frac{\varrho}{2}$$

Ezen képletet arra fogom e cikk végén felhasználni, hogy a központ körül képzelt $(\varrho - \varrho_0)$ sugarú körön belül előforduló maximalis első redukció értékét számítsam. Ugyanezen kör területén fellépő maximális líneár modulust a 2. képlet első sora szerint fogom számitani.

$$4. \ldots\ldots\ldots \quad \frac{dF}{df} = a\,b = \frac{1}{N^3_{\varphi,\,\lambda}} = \sec^3 \varrho$$

adja a gnominus vetületre a területtorzulást bármely pontban: Tissot átalános képlete alapján.

A redukciók számításához szükséges alapvető képleteket szintén Tissot ismert tételei szerint vezettem le:

$$5. \ldots \begin{cases} \dfrac{\tg u'}{\tg u} = \dfrac{b}{a} = N_{\varphi,\,\lambda} \\ l_u = \dfrac{a \cos u}{\cos u'} = \dfrac{1}{N^2_{\varphi,\,\lambda}} \dfrac{\cos u}{\cos u'} \\ \tg (u - u') = \dfrac{(a-b) \sin 2u}{(a+b) + (a-b) \cos 2u} = \dfrac{(1-N_{\varphi,\,\lambda}) \sin 2u}{(1+N_{\varphi,\,\lambda}) + (1-N_{\varphi,\,\lambda}) \cos 2u} \end{cases}$$

Az imént levezetett képleteket közelebbről vizsgálva, kétséget sem szenved, *hogy sorbafejtések által — minthogy teljesen szigorú értékekre soha sincs szükség* — eléggé egyszerű gyakorlati sorokra juthatunk. Táblázatos berendezéssel azonban nem boldogulhatunk, mivel az x és y, illetve φ, λ argumentumokon kívül az u argumentum, illetve u' is szerepel. Ezen hátrányt még súlyosbítja az a körülmény, hogy az u-t nagy pontossággal kell ismerni, ha az első redukcióban élesen akarjuk — bár csak a tized-másodperceket is — kapni; ámde az u irányszöget, mivel az azimutalis fokhálózat parallel köreire vonatkozik, bonyolódott szferikus geometriai számításokkal nyerjük csak. Ime egy oly *segédszámitás* melyet a konform kúp vagy hengervetületnél nélkülözünk, mert ott — mivel csak második redukcióról van szó — kezdő iránynak akármilyen, tehát mindenesetre a legkényelmesebb irányt választjuk.

A gnomikusnál nézetem szerint a legegyszerűbb eljárás volna — ezen segédszámítás elkerülésére — a *közelítéssel* való redukciószámítás, mely abból állana, hogy

a) napjainkban már az ország minden részére kapható 1:25000 méretarányú katonai topográfiai fokhálozatos térképből kiveszi a háromszögelő a háromszögoldal mindkét végpontjának rendezőit φ és λ-t tegalább $0{\cdot}7''$ pontossággal.

b) Ezen közelítő (φ), (λ) értékeket tisztán interpollálással berakja egy azon célra a háromszögelési hivatal által szerkesztendő krb. 1:250000 méretarányú gnomikus vetületű

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

sűrű *fokhálózatos térkép* megfelelő szelvényébe. (Ezen térkép térszini konfiguraciókat nem ábrázol.)

c) Megvan a háromszögoldal közelítő gnomikus képe (egyenes vonal) ennek irányszögét (u'-öt) most már a térképen szögmérővel 1′-re pontosan lemérheti, hiszen az első főirányokat a térkép központja körül szerkesztett koncentrikus körök érintői adják meg, amely érintők iránya a kérdéses (φ), (λ) pontban a szomszédos megrajzolt párhuzamos körök által könnyen megvonható.

d) A (φ), (λ) és (u') alapján most már számítható (N_φ) és így nyerhető az (u—u') redukció közelítő értéke.

e) Minden háromszögoldalra ezt megtéve, a mért α, β, γ szferikus belszögeknek közelítő redukciói ismeretesek lévén, az

$$\alpha \pm (\Delta_1\alpha), \quad \beta \pm (\Delta_1\beta), \quad \gamma \pm (\Delta_1\gamma)$$

redukált szögeket 180°-ra kiegyenlítve számíthatók lesznek a magasabbrendű hálózat ismert x, y-jaira támaszkodva, a síkháromszögelés elemi képletei alapján a kérdéses alappontok *néhány deciméterre megbízható* derékszögű síkkoordináta értékei:

$$(x_A), (y_A); \quad (x_B), (y_B); \quad (x_C), (y_C);$$

f) A pontos redukciók most már oly táblázatok alapján volnának előállítandók, amelyeknek argumentumai ezen derékszögű síkrendezők.

g) Ezen pontos redukciókkal megjavítva a nyers α, β, γ még kí nem egyenlített gömbi szögeket, számíthatnók a *kiegyenlítés* céljaira szükséges és legfeljebb 1—2 *dm*-re hibás derékszögű síkkoordinátákat.

h) A kiegyenlítés ezen rendezőknek legmegbízhatóbb, tehát végleges értékeit szolgáltatja.

Ismételve hangsúlyozom, hogy ez volna a képzelhető legrövidebb eljárás a gnomikus vetület gyakorlati alkalmazásánál. Ez azonban már is hosszabb, mint a konform hengervetület-é, ahol a *b)* és *g)* alatti művelet egészen elmarad.

Ezek után a gnomikus vetületről, mint kiegyenlítő vetületről szó sem lehet többé! Mint *az alsó geodéziai vetület módszere* pedig egyáltalában szóba sem jöhetett, amit a mondottakon kivül ezen számadatok tesznek egészen érthetővé, ahol az épenséggel nem ideális sztereografikus vetülettel van a gnomikus vetület szembeállítva:

$\lvert \varphi - \varphi_0 \rvert$	$2\,\Delta_1 m$	a	b
0°	0° 0′	1·000	1·000
15°	1° 59′	1·072	1·035
45°	19° 45′	2·000	1·414
75°	72° 9′	14·930	3·864
90°	180° 0′	∞	∞

$\lvert \varphi - \varphi_0 \rvert$	$2\,\Delta_1 m$	$a = b$
0°	0° 0′	1·000
15°	0° 0′	1·017
45°	0° 0′	1·172
75°	0° 0′	1·589
90°	0° 0′	2·000

A mondottak értelmében csakis a konform vetületek végtelen sokaságával kell foglalkozni, ha országos felmérésekről van szó.

4. cikk. A vetületek méretarányáról.

Két és egy fél éven át foglalkozva a matematikai vetületek irodalmával, kerestem, kutattam a vetületek *„méretarányának általános meghatározását“*: de azt szabatosan semmiféle könyvben meg nem találtam. Igyekeztem magam ezen fontos fogalmat szabatosan és

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

általánosan meghatározni: de megvallom *nem sikerült.* Amit erre nézve legjobb meggyőződésem szerint mondhatok, *az csakis az előttem ismeretes néhány száz vetületre tekinthető szigoruan érvényesnek.*

Ugyanis minden matematikai vetületnél, melyet ismerek, beszélhetünk egy vetületi *központról* vagy vetületi *középvonalról*, amely középvonal lehet a gömb esetében *parallelkör*, *meridián* vagy egy adott meridiánnal adott szöget bezáró *legnagyobb gömbi kör.*

Természetes méretarányú vetületnek most már a gömbnek azon síkképét akarom nevezni, amely képen a *központban, illetve középvonalban mindennemü torzulás zérus,* azaz:

$$a = b = 1$$
$$\frac{tg\, u'}{tg\, u} = 1$$

Azon

$$x = f_1(u, v)$$
$$y = f_2(u, v)$$

numerikus egyenletrendszert nevezem tehát a *természetes méretarányú* vetület egyenletrendszerének, amely az *(u, v)* adott parameter értékpárokhoz *(x, y)* derékszögű síkkoordináta értékeket szolgáltat, mint helyettesítési értékeket, melyek a síkon közvetlenül felrakva képzelve az illető vetítési módnak *természetes méretarányú vetületét eredményezik.* Ezen vetületet nevezem 1 : 1 méretarányú vetületnek.

Ezen méretarányt most már — anélkül, hogy a *vetítési mód* változna — *kétféleképen* lehet gyakorlatilag megváltoztatni.

1. A természetes méretarányú vetület numerikus egyenletrendszerével számítom az x, y rendezőket és a *nyert értékeket* m positiv számmal osztva:

$$\xi = \frac{x}{m'},\ \eta = \frac{y}{m'},$$

az ezen mérőszámoknak megfelelő hosszakat képzelem a térképen felrakva.

A most előálló kép az *illető vetítési módnak* megfelelő $1 : m$ méretarányu képe a gömbfelületnek.

2. De úgy is járhatok el, hogy a természetes méretarányú vetület numerikus egyenletrendszere *minden tagjának koefficienséből levonom* a szóban forgó együtthatónak azon α-adrészét, amely α szám ezen egyszerű egyenlettel: $m = 1 - \alpha$ van megadva, adott m méretarány esetében.

Ha tehát az:

$$x = a_1\, u + a_2\, v + a_3\, u^2 + \ldots$$
$$y = b_1\, u + b_2\, v + b_3\, u^2 + \ldots$$

abszolut tagot nem tartalmazó hatványsor volna az illető vetítési módnak megfelelő természetes méretarányú vetületnek egyenletrendszere, akkor az adott

$$m = 1 - \alpha$$

méretarányú vetületnek közvetlen numerikus egyenletrendszere ez:

$$\xi = \left(a_1 - \frac{a_1}{\alpha}\right) u + \left(a_2 - \frac{a_2}{\alpha}\right) v + \ldots$$
$$\eta = \left(b_1 - \frac{b_1}{\alpha}\right) u + \left(b_2 - \frac{b_2}{\alpha}\right) v + \ldots$$

Ezt a módszert említettem a Tissot-vetület magyarországi egyenletrendszerének levezetésekor.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Azt is említettem ott, hogy ha $(1 + \alpha)$ jelenti a kompenzativ vetületi *természetes méretarányú* egyenletrendszer adta maximális magyarországi lineár modulust, akkor az

$$m = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

méretarányú kompenzativ vetületi egyenletrendszer — melyet az imént bemutatott módon kell előállítani — már nem az $(1 + \alpha)$ maximális lineár modulust fogja szolgáltatni, hanem a *központban*

$$\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

a fő-határelipszisen pedig

$$\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)$$

lesznek a szélső értékü lineár modulusok!

Ezt az állítást két részben kell igazolni:

1. Közvetlenül világos, hogyha m a méretarány, akkor a *lineár modulus* bármely pontban szigoruan m-szer akkora, mint a természetes méretarányú ugyanazon törvény szerint vetített vetület esetében, mert:

$$l = lim \frac{\Delta s'}{\Delta s}, \text{ most}$$

$$l_{(m)} = lim \frac{m \Delta s'}{\Delta s} = m\, l.$$

2. Minthogy igaz tehát az, hogy

$$m = \frac{l_{(m)}}{l},$$

azért a *szóban forgó* esetben:

$$m = \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2} - \ldots$$

Azt látjuk tehát, hogy a *Tissot által ajánlott* méretarány változtatással való

$$\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)\text{-re}$$

való redukálása a maximális lineár modulusnak nem szigorú müvelet, mert nem az

$$m = 1 - \frac{\alpha}{2}, \text{ hanem}$$

az

$$m = 1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2} - \ldots$$

méretarányváltoztatást kell szigorúan véve eszközölni, ha tényleg $\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)$-re akarjuk leszorítani pontosan a maximális lineár modulust.

A hiba, mit Magyarország esetében ezáltal elkövetünk a maximális lineár modulusban:

$$0{\cdot}_{000001}.$$

Ezt már elsőrendü hálózatok hosszredukcióiban sem kell figyelembe venni.

Gyakorlatilag az m-szeres méretarány változtatást az eredeti *gömbméretváltozásával* eszközölni *csakis* fokhálózatos kis méretarányú térképeknél célszerü. Különösen abban a kivételes esetben, mikor a fokhálózat nem számitással, hanem *szerkesztéssel* történhetik.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

V. FEJEZET.

A legfontosabb térképészeti vetületek ismertetése.

I. §. A térképészeti vetületek osztályozása.

A különböző tankönyvek különböző szempontok szerint csoportosítva ismertetik a térképészeti gyakorlatban alkalmazott vetületi törvényeket.

A *torzulások* minéműsége szempontjából négy csoportra oszthatók a vetületi rendszerek:

A. csoport. Szögtartó vetületek.

B. csoport. Területtartó vetületek.

C. csoport. Kompensatív „

D. csoport. Általános torzulású vetületek.

A vetületek **keletkezését** véve alapul, két főcsoportra oszthatók:

I. Főcsoport. Perspektív vetítéssel előállítható vetületek.

II. Főcsoport. Tisztán matematikai vetítéssel előállítható vetületek.

Ezen két főcsoporton belül azután megkülönböztetnek alcsoportokat:

I. 1. csoport. Közvetlen síkvetület.

I. 2. csoport. Kúpvetület.

I. 3. csoport. Hengervetület.

Ugyanilyen három alcsoportot különböztetnek meg azután a II. Főcsoporton belül is.*)

Az említett hat esetben a *normális* elhelyezés az, ha a sík a gömböt *egy* pontban érinti, a kúp *egy* parallel körben és a henger *egy* legnagyobb gömbi körben. A vetítési törvény ugyanaz marad, de a torzulások mértéke változik, ha a vetítési sík a gömböt *egy körben metszi*, ha a kúp *két körben metszi*, ha a henger két körben metszi a gömböt.

Nagy gyakorlati vagy elméleti jelentősége azonban nincs ezen osztályozásoknak: mert a gyakorlatban minden egyes vetítési törvény külön tanulmány tárgyát kell, hogy képezzen és így választandó ki adott feladat esetében a legmegfelelőbb vetítési törvény. Az említett és ezekhez hasonló osztályozásoknak csak didaktikai szempontból van jelentősége. E tekintetben kiemelendő a *Zöppritz*-féle osztályozás, amely az alább idézett művében megtalálható és megemlítjük, hogy egészen különös, uj osztályozást állapít meg *Tissot* az ő többször idézett korszakos művében.

A matematikai vetületek nagy irodalmának jelesebb művei közül elolvasásra ajánlhatjuk a következőket:

Dr. Karl Zöppritz: (Bludau) Leitfaden der Kartenentwurfslehre. Leipzig 1899. — Kezdőknek van irva; kiterjeszkedik az összes eddig alkalmazott vetületekre; tárgyalásai mindvégig szemléltető geometriaiak; *rendszeresítése úttörő.*

M. A. Tissot: Mémoire sur la Représentation des Surfaces et les Projections des Cartes Géographiques. Paris 1881. — *A matematikai vetületek elméletének korszakot alkotó műve:* az előbb említett és ezen könyv együttesen fölöslegessé teszik más idevonatkozó tankönyvnek olvasását. Megjelent német nyelven: Hammer, Stuttgart 1887.

E. Hammer: Über die geographisch wichtigsten Kartenprojektionen. Stuttgart 1889. — Tissot könyve második részének kibővített kiadásának mondható. Különösen a *ferdetengelyű* vetületeket ajánlja gyakoribb alkalmazásra.

---

*) Aszerint amint a henger, kúp vagy vetületi sík a gömböt az ekvatoron, vagy poluson, vagy tetszőleges ponton illetve vonalon érinti megkülönböztetik az ekvatoriális, poláris, azimutális, normális, ferdetengelyű stb. alosztályokat.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Dr. Norbert Herz: Lehrbuch der Landkartenprojectionen. Leipzig 1885. — A legrészletesebb és legterjedelmesebb német tankönyv. Vizsgálatai és rendszeresitése Tissot óta már elavultaknak mondhatók.

Carl Friedrich Gauss: Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodaesie. Göttingen 1843. Erste Abhandlung. — Gauss ezen terjedelmes értekezésben ismerteti legkisebb hossztorzulású konform gömbi vetületi rendszerét; a szög- és hosszredukciók sorait és táblázatait is.

Ch. M. Schols: Sur l'emploi de la projection de Mercator. Annales de l'école politechnique de Delft. Leide 1885. — A konform hengervetület szög- és hosszredukcióinak sorai itt lettek legszabatosabban levezetve.

Ing. M. Rosenmund: „Die Aenderung des Projektionssystems der schweizerischen Landesvermessung." Bern 1903. — A ferdetengelyű konform hengervetület elméletileg és gyakorlatilag teljes tárgyalása képezi ezen egyébiránt is *értékes* könyv főrészét.

General Dr. O. Schreiber: Die Konforme-Doppelprojection der Trig. Abtheil. der königl. preussischen Landesaufnahme. Formeln-Tafeln. Berlin 1897. — A porosz kiegyenlítési vetület rendkívül szabatos gyakorlati eljárásainak világos előadása.

Grossherzoglich Mecklenburgische Landes-Vermessung. V. Theil: Die Konforme-Kegelprojektion und ihre Anwendung auf das Trigon.-Netz I. Ordnung. Schwerin 1895. — A Jordan-Paschen-féle kiegyenlítési vetület gyakorlati képleteinek levezetése.

Joh. Marek: Technische Anleitung zur Ausführung der Trigonometrischen Operationen des kgl. ungarischen Triangulirungs Bureau. Budapest 1875. — A magyar háromszögelési hivatalnak ma is ez az egyetlen „utasítása". A sztereografikus vetület alkalmazása képezi idevonatkozó főrészét.

General Bruno Schulze: Das preussische Militärische Aufnehmen. Berlin 1903. — Tankönyv a porosz topográfikusok számára. Főérdekessége a porosz polieder-vetület leírása.

W. Stavenhagen: Skizze der Entwickelung und des Standes des Kartenwesens des ausserdeutschen Europa. Gotha: Justus Perthes 1904. — Rengeteg történelmi adathalmaz; itéletei nem mindig találók; szerző elsősorban katona, aztán geodéta. Mindamellett értékes könyv.

Gustav Bancalari: Studien über die österreichisch-ungarische Militär Kartographie. Wien 1894. — *Egy egész életen át folytatott alapos tanulmányok eredményei 70 oldalon előadva. Alig ismerek tartalmasabb könyvet.*

Mitteilungen des k. u. k. Militär-Geogr.-Institutes Wien. *VI. kötet.* 1886. *Hartl*: Die Projectionen des k. u. k. Mil.-Geogr. Institutes. — Tissot-ra támaszkodó alapos vizsgálatok. *Értékes az irodalmi útmutatója is.* — *X. kötet.* 1890. *Hartl:* Die griechische Landesaufnahme. — Szerző ismerteti azt a modern szervezetet, melyet a görögországi fölmérésnek adott. Más tekintetben is tanulságos cikk. — *XXIV. kötet. General Otto Frank:* Landesaufnahme. *Korszakot alkotó cikk az osztrák-magyar katonai földmérésekre vonatkozó hivatalos felfogást illetőleg.*

Fischer: Über die Figur der Erde.

2. §. A gyakorlatilag fontosabb vetítési törvények részletes ismertetése.

A perspektiv vetítéssel előállítható *síkvetületek* között megemlítendők a *stereográfikus vetület* és a *gnomikusvetület.*

A stereográfikus (konform síkperspektív) vetülettel igen behatóan foglalkozik e kötet IV. Fejezetének 4. §-a, a gnomikus vetületet pedig behatóan tárgyaltuk a IV. Fejezet **„Függelékének"** 3. cikkében.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

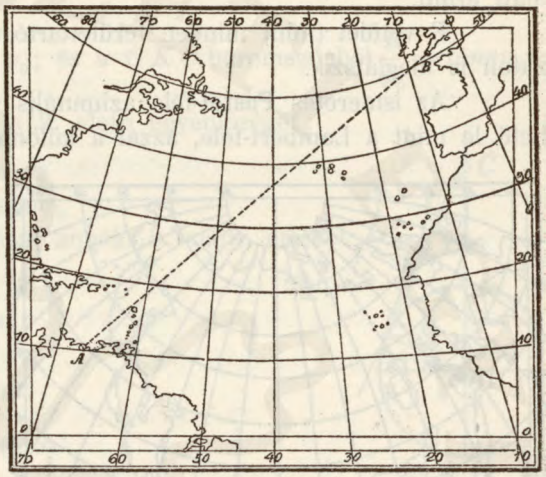
A stereográfikus *vetület a térképészetben* leginkább az északi, vagy déli poláris vidék, illetve az északi vagy déli félgömb ábrázolására alkalmazta'ik úgy, hogy a vetületi sík az északi vagy a déli polust érinti. (A vetítési csúcspont tehát a másik polusban képzelendő.) A meridiánok akkor egyenes sugarak, a parallel körök pedig *koncentrikus* és rohamosan növekvő sugarú körök; a parallel körök sugarai elemi szerkesztéssel nyerhetők.

A fokhálózat egyszerűségénél és szögtartóságánál fogva ezen vetület a csillagos ég ábrázolására igen sokszor alkalmaztatik astronomiai könyvekben.

Néha a keleti és nyugati félföldgömböt is *stereográfikusan* ábrázolják; a sík akkor az *ekvátornak* valamely pontját érinti.

Az *ekvátor* és a *kezdőpont meridiánja* ekkor két egymásra merőleges egyenes: a többi meridiánok és parallel körök képei különböző sugarú, egymást *derékszög alatt metsző körök.*

Ezen körök pontjai tisztán *grafikus* uton is megszerkeszthetők; e szerkesztés az előbb idézett térképészeti tankönyvekben megtalálható.

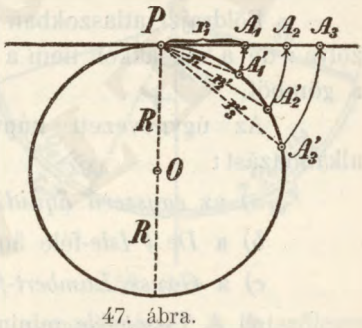


46. ábra.

A **gnomikus vetület,** amint azt már előbb a 133. oldalon előadtuk, ujabban a tengerészeti (oceáni) térképek készítésében játszik nagy szerepet: a 46. ábrán bemutatunk egy ily térképet. E térképen az $A\,B$ pontozott egyenes vonal az A-tól B felé haladó hajónak legrövidebb utját jelzi, mert minden legnagyobb gömbi kör, tehát az A pontot a B ponttal összekötő legnagyobb gömbi kör is, itt mint egyenes vonal jelentkezik.

A *közvetlen síkvetületek* között igen nagy szerepet játszik még az úgynevezett **„Lambert-féle területtartó aziutmális"** vetület, amelynek vetítési törvénye, dacára annak, hogy nem perspektivikus: puszta geometriai szemlélettel levezethető. Ebből kifolyólag a vetületi fokhálózat adott esetben körzővel és vonalzóval grafikusan megszerkeszthető. Képzeljük a vetületi síkot a *gömbi polusban* a gömbhöz érintőlegesen elhelyezve.

A polushoz tartozó gömbi átmérő bármely pontjában képzelve a vetítési centrumot, a meridiánok képei a Polusból induló egyenes vonalak (sugarak) lesznek. Szóval: szerkeszszünk a polus körül egy tetszőleges sugarú kört, azt osszuk fel 360 egyenlő részre, és ezen osztási pontokat rendre kössük össze a polussal: meglesznek a Lambert-féle vetület meridiánjai.



47. ábra.

A parallel körök képei a polus körül képzelt koncentrikus körök lesznek. E körök sugarait *úgy választva,* hogy azok mindig egyenlők legyenek az illető gömbi parallel körhöz és a polushoz tartozó *húrhosszal* (47. ábrán az r_1, r_2, r_3 . . hosszak) előáll egy területtartó vetület, amelyet Lambert-féle azimutális vetületnek nevez az irodalom és ahol tehát

$$r_A = 2\ R\ \sin\left(45° - \frac{\varphi_A}{2}\right).$$

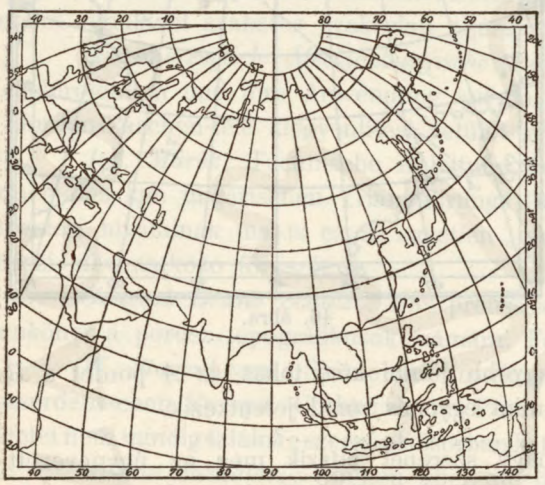
© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Hogy az igy nyert vetület területtartó, az a Tissot-féle torzulási törvény szerint be lesz bizonyítva, ha kimutatjuk, miszerint $a = \frac{1}{b}$, ahol a és b a két főtorzulású irányban (jelen esetben a *meridián* és *parallelkör* irányában) a lineár modulus értékét jelenti. Ezt a bizonyítást a tisztelt olvasó gyakorlásul maga végezheti el a IV. Fejezet 4. §-ának elején közölt hasonló levezetés mintájára.

Mint területtartó vetület egész világrészek földrajzi ábrázolására alkalmas e vetület; a 48. ábrán Európa és Ázsia fokhálózata látható ezen vetületben megszerkesztve. Ezen ábrán a vetületi sík a gömböt az egyenesnek rajzolt meridiánon $\varphi_0 = +40°$ földrajzi szélesség alatt érinti.

E vetület (mint minden területtartó vetület) a szögeket erősen torzítja, ami a hálózaton is meglátszik.

Az ismeretes **Postel**-féle azimutális vetület hasonlóan geometriai szemlélettel vezethető le mint a Lambert-féle, azzal a különbséggel, hogy (47. ábra) nem az r_1, r_2, r_3 stb. húrhosszak, hanem az $A'_1 P$, $A'_2 P$, $A'_3 P$ gömbi **ívhosszak** lesznek a síkon, mint a parallel körök sugarai felrakva. A *Postel*-féle azimutális síkvetületnél tehát a vetületi parallel kör sugara:



48. ábra.

$$r_A = \text{arc. } (90° - \varphi_A),$$

ahol φ_A jelenti az illető parallel kör gömbi földrajzi szélességét. Ez egy általános torzulású vetület azzal a speciális tulajdonsággal, hogy a meridiánok irányában az előadottak szerint a lineár modulus $= b = 1$. a vetület bármely pontjában. Könnyű levezetni, hogy

$$a = \frac{arc.\ (90° - \varphi)}{sin.\ (90° - \varphi)}.$$

A két torzulási főirány, ha a vetületi sík a polusban érint, itt is a meridián és parallel kör irány.

Földrajzi atlaszokban Afrika és Délamerika található gyakran ily vetületben ábrázolva: de a sík akkor nem a polusnál, hanem közel az illető világrész központjában érinti a gömböt.

Az úgynevezett **kúpvetületek** között különösen a következők nyernek sűrűn alkalmazást:

a) az *egyszerű äquidistáns* kúpvetület;

b) a *De l' Isle*-féle äquidistáns kúpvetület;

c) a *Gauss Lambert-féle szögtartó* kúpvetület;

d) a *Tissot-féle* minimális össztorzulású kúpvetület;

e) a *Lambert-féle területtartó* kúpvetület;

f) az *Albers*-féle területtartó kúpvetület. A kúpvetületek közzé szokták sorolni tankönyvekben

g) a *Bonne-féle* területtartó vetületet is.

Ezeket a kúpvetületeket egyenkint főbb vonásokban a következőkben fogjuk ismertetni.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

ad a. Legyen φ_0 a leképezendő terület földrajzi középszélessége; ezen φ_0 szélességnek megfelelő gömbi parallel kör sugara (49. ábra) pedig legyen r_0. Képzeljünk egy egyenes kör kúpot ezen φ_0 parallel körhöz érintőlegesen elhelyezve: akkor c lesz a kúp csúcsa, és jelöljük a C K alkotó hosszát ϱ_0-al.

A gömbi meridiánok képei legyenek a kúpalkotók; a φ_0 érintési parallel kör képe pedig a ϱ_0 sugarú kör (5. ábra) még pedig úgy, hogy e körön torzulás ne legyen, tehát a kifejtett kúpon (50. ábra) ω_0-al jelezve a C-nél jelentkező teljes *kifejtési szöget*, kell hogy

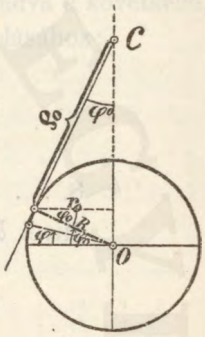
$$1. \quad r_0 \, 2\pi = \varrho_0 \, |\omega_0|.$$

Fejezzük ki a 49. ábrából az r_0-nak és ϱ_0-nak értékét mint φ_0 és R (gömbsugár) függvényét, lesz:

$$2. \quad r_0 = R \cdot \cos \varphi_0; \text{ és a } CKO \text{ háromszögből } \frac{R}{\varrho_0} = tang\,\varphi_0 = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi_0}, \text{ azaz } \frac{R \cos \varphi_0}{\sin \varphi_0} = \varrho_0$$

és figyelembe véve a 2. alatti egyenlőséget:

$$3. \quad \varrho_0 = \frac{r_0}{\sin \varphi_0}.$$



49. ábra.

Az 1. képlet jobb oldalán ϱ_0 helyébe annak 3. alatti értékét helyettesítvén

$$r_0 \, 2\pi = r_0 \frac{|\omega_0|}{\sin \varphi_0}, \text{ azaz}$$

$$2\pi = \frac{|\omega_0|}{\sin \varphi_0}, \text{ ahonnan:}$$

$$|\omega_0| = 2\pi \sin \varphi_0 \text{ és így a:}$$

$$4. \quad \omega_0'' = \left(\frac{2\pi}{\sin 1''}\right) \cdot \sin \varphi_0 = k \cdot \sin \varphi_0$$

képlet adja másodpercekben az ω_0 teljes kifejtési szöget, ahol

$$\log k = (\log 2 + \log \pi) - \log \sin 1'' = \text{konstáns érték.}$$

Eszerint tehát megválasztva adott ország esetében az R és φ_0 értékeket az 50. ábra megrajzolható, mert a ϱ_0 értéke a $\varrho_0 = R \, cotg \, \varphi_0$ egyenlőségből, az ω_0 pedig a 4. képlettel adódik.

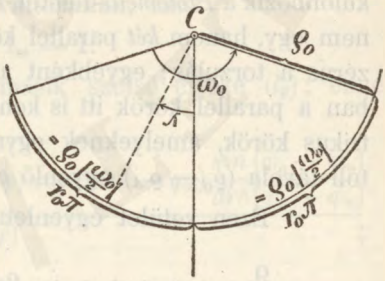
Ha a K pont meridiánjától mint kezdő meridiántól jobbra-balra haladva számítjuk a gömbi földrajzi hosszakat (λ), akkor azok vetületi értékei (λ') ezen egyenlőségből nyerhetők:

$$r_0 \, \lambda_A = \varrho_0 \, \lambda_A', \text{ azaz}$$

$\lambda_A' = \frac{r_0}{\varrho_0} \lambda_A$ és figyelembe véve a 3. képletet, lesz

$$5. \quad \lambda_A' = \sin \varphi_0 \cdot \lambda_A = C \cdot \lambda$$

ahol $C = konstáns = \sin \varphi_0$.



50. ábra.

Az 5. alatti egyenlet az äquidistans kúpvetület egyik alapegyenlete. A tetszőleges A ponthoz tartozó (szélessége φ) vetületi ϱ sugarat ezen vetületnél most már ez a képlet adja:

$$6. \quad \varrho_A = \varrho_0 + R \, |\varphi_0 - \varphi| = \varrho_0 + R \sin 1'' \, (\varphi_0 - \varphi)''$$

Vagyis a *vetületi concentrikus parallel körök egymástóli sugár irányú távolsága egyenlő a gömbi parallel körök egymástóli meridionális* távolságával.*)

*) Innen van aztán az äquidistáns elnevezés.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ebből az is következik, hogy a vetület bármely pontjában a *meridián irányban* a lineár modulus értéke = 1-el. Mivel pedig a meridiánok és parallel körök képei egymásra merőlegesek, azért e két irány a *Tissot*-féle főirány és így a vetület bármely pontjában $b = 1$.

Az a értéke, azaz a maximális lineár modulus értéke tüstént levezethető a *gömbi* és *vetületi* parallel körök ívelemének (51. ábra) viszonyából. A gömbi ívelem $= r_0 . d\lambda$; a vetületi íveken $= \varrho\, d\lambda'$ és helyettesítve $d\lambda'$ helyébe annak 5.-ből adódó értékét, lesz

$$\frac{\text{vetületi ívelem}}{\text{gömbi ívelem}} = \frac{\varrho_A \sin\varphi_0\, d\lambda}{r_0\, d\lambda} = \frac{\sin\varphi_0}{r_0} . \varrho_A$$

Ha most ϱ_A helyébe annak 6. alatti értékét helyettesítjük, lesz

$$a = \frac{\varrho_0 \sin\varphi_0}{r_0} + \frac{R \sin\varphi_0}{r_0} (\varphi_0 - \varphi) \text{ és így:}$$

7. . . . . $a = c_1 + c_2 (\varphi_0 - \varphi)''$ ahol c_1 és c_2 állandó értékek:

$c_1 = 1$, mert 3. képlet szerint

$r_0 = \varrho_0 \sin\varphi_0$; és ha a 2. egyenletet vesszük figyelembe, úgy

$$c_2 = \frac{R \sin\varphi_0}{R \cos\varphi_0} = tang\, \varphi_0.$$

azaz: $log\, c_2 = log\, tang\, \varphi_0$ tehát részletesen kiírva:

8. . . . . max. lineár modulus $= a = 1 + tang\, \varphi_0\, |\varphi_0 - \varphi|$.

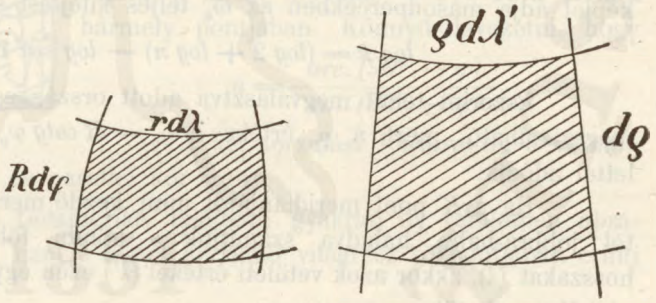
Mivel $b = 1$, azért a Tissot-törvényeket alkalmazva:

$$\text{iránymodulus} = i = \frac{b}{a} = \frac{1}{1 + tang\, \varphi_0\, |\varphi_0 - \varphi|}$$

$$\text{területi modulus} = t = ab = 1 + tang\, \varphi_0 . |\varphi_0 - \varphi|$$

Az äquidistans kúpvetületet **„Ptolemeus“**-féle vetületnek is nevezik, mert ő alkalmazta először.

ad b. A *Jos. Nic. de l' Isle* († 1768.) által először alkalmazott és különösen ujabb időben gyakrabban szereplő kúpvetület abban különbözik a *Ptolemeus*-félétől, hogy nem egy, hanem *két* parallel körön zérus a torzulás; egyébként azonban a parallel körök itt is koncentrikus körök, amelyeknek egymástoli távola $(\varrho_0 - \varrho_A)$ egyenlő e körök gömbi meridionális távolságával $(arc\, |\varphi_0 - \varphi_A|)$.



51. ábra.

Ezen vetület egyenletrendszere:

9. . . . . $\varrho_0 = tang\,(90 - \varphi_0) \dfrac{arc\,(\varphi_0 - \varphi_n)}{tang\,(\varphi_0 - \varphi_n)}$

10. . . . . $\lambda_A' = \left(\dfrac{\sin\varphi_0 \sin(\varphi_0 - \varphi_n)}{arc\,(\varphi_0 - \varphi_n)}\right) \lambda_A = k . \lambda_A$

11. . . . . $\varrho_A = \varrho_0 + arc\, |\varphi_0 - \varphi|$.

E képletekben φ_0 jelenti a leképezendő terület közép földrajzi szélességét, φ_n pedig jelenti egyikét azon két földr. szélességnek, amelynek parallel körén *zérus* a torzulás. *)

*) A másik parallel kör, amelyen zérus a torzulás az φ_m; e két parallel kör egyenlő távolban van a φ_0 parallel körtől, azaz $|arc\,(\varphi_0 - \varphi_n)| = |arc\,(\varphi_0 - \varphi_m)|$. A φ_n a kettő közül a *kisebbik* érték.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Számpélda. A $\varphi_a = 40°$ és $\varphi_f = 70°$ közötti zonát akarjuk e vetületben ábrázolni. Ez esetben tehát

$$\varphi_0 = \frac{40° + 70°}{2} = 55°\ 0'$$ és ha azt akarjuk, hogy

a térkép két szélső parallel körein absolut értékben akkora legyen a hossztorzulás, mint a φ_0 parallel körön, akkor

$$\varphi_m = \frac{\varphi_0 + \varphi_f}{2} = \frac{55° + 70°}{2} = 62°\ 30'.$$

$$\varphi_n = \frac{\varphi_0 + \varphi_a}{2} = \frac{55° + 40°}{2} = 47°\ 30',$$

tehát a 9. és 10. képletekben szereplő $(\varphi_0 - \varphi_n)$ értéke:

$$\varphi_0 - \varphi_n = 55° - (47°\ 30') = 7°\ 30'.$$

Ha a gömb sugarát $R = 6\,370\,000$ meternek vesszük és a térkép méretarányát 1 : 10 000 000-ban állapítjuk meg, úgy 9. és 11. képletek 5°-ról 5°-ra haladva a következő, *millimeterekben* kifejezett sugár értékeket adják a parallel körök megrajzolásához:

φ	ϱ	φ	ϱ
70°	276.7	50°	499.1
65°	332.3	47° 30′	526.9
62° 30′	360.1	45°	554.7
60°	387.9	40°	610.3
55°	443.9		

A 9. képletben szereplő k állandó értéke most

$k = 0.8168$ lévén,

$\lambda = 5°$-nak, $(0.8168 \times 5) = 4°\ 5'\ 3'' = \lambda'$ érték felel meg a vetületen.

Tehát $\lambda = 10°$-nak $2 \times (4°\ 5'\ 3'') = 8°\ 10'\ 6''$

$\lambda = 15°$-nak $3 \times (4°\ 5'\ 3'') = 12°\ 15'\ 9''$

felelnek meg a vetületen.

A közölt értékek alapján tehát *vonalzó, szögfelrakó* és *körző* segélyével megrajzolható 5°-ról 5°-ra a fokhálózat.

A *de l' Isle* féle kúpvetület két Tissot-féle főiránya a két fokhálózati irány.

E vetület definiciója szerint a meridiánok hossza változatlan, azaz:

12. . . . . lineár modulus a meridiánon $= l_m = 1$.

A parallel körök mentén van a lineár modulus másik szélső értéke (l_p); ennek értékét elemi levezetés alapján adja ezen képlet:

$$13.\ .\ l_P = \frac{\sin(90° - \varphi_0)\cos(\varphi_0 - \varphi) - \operatorname{arc}(\varphi_0 - \varphi)\cos(90° - \varphi_n)\dfrac{\sin(\varphi_0 - \varphi_n)}{\operatorname{arc}(\varphi_0 - \varphi_n)}}{\sin(90° - \varphi)};$$

ez egyszersmind $(t = ab)$ a területi modulus képlete.

A φ_0 parallel körön $l_P < 1$, azaz a középső parallel kör rövidítve jelenik meg.

Az említett számpélda esetében az l_P értékek a következők:

φ	l_P	φ	l_P	φ	l_P
70°	1.037	60°	0.995	45°	1.006
65°	1.008	55°	0.991	40°	1.021
62° 30	*1.000*	50°	0.996		
		47° 30	*1.000*		

Európa térképét az ujabb német Atlasokban ezen vetületben szokták közölni.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

ad c. Az egyenes körkúp a gömböt a φ_0 középszélességnek megfelelő parallel körön érinti és e parallel kör hossztorzulás nélkül jelenik meg a kifejtésben. A meridiánok képei a kúp csúcsából induló egyenes sugarak, a parallel körök pedig a kúp csúcsából leírt koncentrikus körök. Tehát a 49. és 50. ábrák tárgyalásánál előadottak alapján a következő képletek írhatók fel:

14. . . . . $\varrho_0 = \frac{r_0}{\sin \varphi_0} = \frac{R \cos \varphi_0}{\sin \varphi_0} = R \operatorname{tang} \varphi_0$

15. . . . . $\omega_0'' = k . \sin \varphi_0$, ahol

$$k = \frac{2\pi}{\sin 1''}$$

16. . . . . $\lambda_A' = \sin \varphi_0 \, \lambda_A = c \, \lambda_A$, ahol

$c = \sin \varphi_0$; és végül

17. . . . . $\varrho_A = f_1(\varphi)$, amely egyenlet jobb oldalán az $f_1(\varphi_0 - \varphi)$ függvény úgy állapítandó meg, hogy ezáltal a vetület *konform* legyen. A konformitás feltétele itt Tissot törvénye értelmében az lesz, hogy a parallel körök és a meridiánok irányában ugyanaz legyen minden pontban a *lineár modulus* értéke.

Ezt a feltételt az 51. ábrák kapcsán fejezhetjük ki matematikai alakban. Kívánjuk tehát, hogy

18. . . . . $\frac{R \, d\varphi}{d\varrho} = \frac{r \, d\lambda}{\varrho \, d\lambda}$.

Mivel $r = R \cos \varphi$ és 16. képlet szerint $\frac{d\lambda}{d\lambda'} = \frac{1}{\sin \varphi_0}$, azért e két értéket helyettesítvén 18. képletbe és R-et osztás által eliminálva lesz:

$$-\frac{d\varphi}{d\varrho} = \frac{1}{\sin \varphi_0} \frac{\cos \varphi}{\varrho} \text{ ; ezt rendezve}$$

$$-\frac{d\varrho}{\varrho} = \sin \varphi_0 \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \text{ és elvégezve az integrálást}$$

$$-\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho} = \sin \varphi_0 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi}, \text{ ezen alapegyenletre jutunk:}$$

19. . . . $\log \varrho_A = -\log \varrho_0 + \sin \varphi_0 \log \operatorname{tang} \left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)$

A 14—19. képletek alapján, hogyha adva az R és φ_0 értékek: bármely ország esetében megszerkeszthető a fokhálózat tetszőleges sűrűségben.

E vetületen a lineár modulus értéke a φ_0 parallel körön $= 1$, onnan északra és délre távolodva nő az értéke úgy azonban, hogy egyazon parallel körön az értéke állandó.

Gauss tanítványa *Paschen* a konform kúpvetületet nem gömbre, hanem *közvetlenül* a forgási ellipszoidra alkalmazta és ezen alapképletekre jut:

20. . . . . $\lambda_A' = \sin \varphi_0 . \lambda_A$

21. . . . . $\varrho = \varrho_0 \left[\frac{\operatorname{tang} \left(45° + \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\operatorname{tang} \left(45° - \frac{\varphi_0}{2}\right)} \right]^{\sin \varphi_0} . k$,

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

amely alapképletekben:

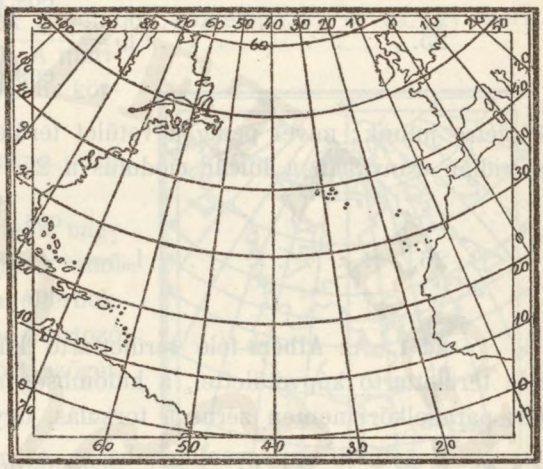
$$\varrho_0 = \frac{\alpha^2}{\beta \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0}} \operatorname{cotg} \varphi_0$$

$$k = \left[\frac{1 - e \sin \varphi_0}{1 - e \sin \varphi} \cdot \frac{1 + e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi_0}\right]^{\frac{e}{2}} \sin \varphi_0$$

ahol α az ellipszoid nagytengelye, β a kistengelye és $e^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}$, a φ_0 pedig az ország szferoidikus középszélességét jelenti.

A *Paschen*-féle vetület Schleswig-Holsteinban úgy nyert alkalmazást, hogy mint a de l'Isle-félénél *két* parallel körön nincs hossztorzulás.

Az 52. ábra egy szögtartó kúpvetületi fokhálózat részletet ábrázol. A régebbi orosz térképek ezen vetületben ábrázolták az orosz birodalmat.



52. ábra.

ad d. A **Tissot**-féle minimális össztorzulású valódi kúpvetületet részletesen e fejezet 3. §-ának végén tárgyaljuk.

ad e. Földrajzi térképek igen nagy számban készíttetnek a **Lambert**-féle területtartó kúpvetületben.

E vetület a következő feltételek matematikai alakban való kifejezése által keletkezett (53. ábra):

1. A meridiánok egy pontból induló egyenesek, a parallel körök pedig ezekre merőleges koncentrikus körök legyenek;

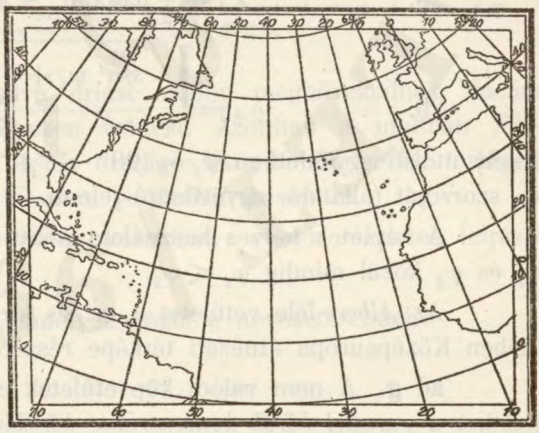
2. A középső (φ_0) parallel kör hossztartóan (hossztorzulás nélkül) ábrázoltassék;

3. A vetület legyen területtartó.

Be lehetne most már bizonyitani, hogy a 2. és 3. feltétel egyidejüleg nem lehet kielégitve úgy, hogy amellett a kúp a gömböt a φ_0 parallel körön érinti.

Ez tehát már nem valódi kúpvetület, csak a fokhálózat sugaras alakja miatt nevezik kúpvetületnek: ez tényleg tisztán matematikai vetület.

Alapegyenletei Lambert szerint a következők:



53. ábra.

22. . . . . $\varrho_0 = 2 \operatorname{tang} \left(\frac{90° - \varphi_0}{2}\right)$

23. . . . . $\lambda'_A = \sin \varphi_0 . \lambda_A$.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

$$24. \ldots\ldots\ldots \varrho_A = \frac{2 \sin\left(\frac{90^\circ - \varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{90 - \varphi_0}{2}\right)},$$

amely képletekben szereplő ϱ_0, λ'_A és ϱ_A mennyiségek jelentése az előbbiekből ismeretes.

A parallel körök irányában levezetve a lineár modulus értékét az

$$25. \ldots\ldots\ldots l_P = \frac{\cos\left(\frac{90^\circ - \varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{90^\circ - \varphi_0}{2}\right)}$$

képletre jutunk; mivel pedig a vetület területtartó, azért a reá merőleges irányban, azaz a meridián irányában a lineár modulus a 25. alattinak *reciprok* értéke:

$$26. \ldots\ldots\ldots l_m = \frac{\cos\frac{90^\circ - \varphi_0}{2}}{\cos\frac{90^\circ - \varphi}{2}}$$

ad f. Az **Albers**-féle területtartó kúpvetület *lényegileg teljesen azonos* a Lambert-féle területtartó kúpvetülettel, a különbség csak az, hogy itt nem **egy** parallelkör, hanem **két** parallelkör mentén zérus a torzulás, úgy mint a de l'Isle-félénél láttuk.

E vetület alapegyenletei, ha φ_1 és φ_2 a két zérus parallel kör földrajzi szélessége és φ_0 a középszélesség:

$$26. \ldots \varrho_1 = \frac{sin\ (90^\circ - \varphi_1)}{cos\frac{(90^\circ - \varphi_2) - (90^\circ - \varphi_1)}{2}\ cos\frac{(90^\circ + \varphi_1) + (90^\circ + \varphi_2)}{2}}$$

$$27. \ldots \varrho_2 = \frac{sin\ (90^\circ - \varphi_2)}{cos\frac{(90^\circ - \varphi_2) - (90^\circ - \varphi_1)}{2}\ cos\frac{(90^\circ + \varphi_1) + (90^\circ + \varphi_2)}{2}}$$

$$28. \ldots\ldots \lambda_A' = \frac{1}{2}\left(cos\,(90^\circ - \varphi_1) + cos\,(90^\circ - \varphi_2)\right).\lambda_A$$

$$29. \ldots\ldots \varrho_A = \sqrt{\frac{sin^2\,\psi_1 + 4\,n\,sin\frac{\psi_A + \psi_1}{2}\,sin\frac{\psi_1 - \psi_A}{2}}{n^2}}$$

amely utolsó egyenletben $\psi_1 = (90^\circ - \varphi_1)$; $\psi_A = (90^\circ - \varphi_A)$ és n a 28. egyenletben a λ_A szorzóját (állandó, együttható) jelenti.

A képletek helyes használata miatt meg kell jegyezni, hogy a szabadon választott φ_1 és φ_2 közül mindig $\varphi_1 < \varphi_2$.

Az *Albers*-féle vetületet a cs. és kir. katonai földrajzi intézet is alkalmazta ujabb időben Középeurópa átnézeti térképe részére.

ad g. A nem valódi kúpvetületek csoportjába osztották a **Bonne**-féle vetületet is, jóllehet a *parallel körök koncentrikus körökként* való ábrázolásán kívül semmi sem emlékeztet itt kúpvetületre.

A vetítési törvénye szóval elmondva igen egyszerű. A *kezdő meridián* képe egy egyenes vonal. (54. ábrán) a 100° — 100° középvonal.) Ennek egy tetszőleges C pontjából mint központból koncentrikus körökként szerkesztendők a parallel körök képei *teljesen úgy mint az äquidistáns* kúpvetületnél. Tehát a φ_0 középparallelkör vetületi sugara:

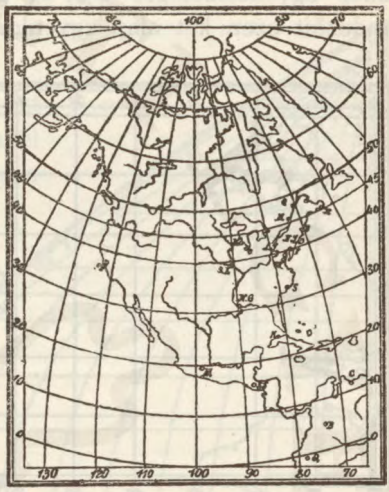
© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

30. . . . . $\varrho_0 = \frac{r_0}{\sin \varphi_0} = \frac{R \cos \varphi_0}{\sin \varphi_0} = R \operatorname{tang} \varphi_0$

31. . . . $\varrho_A = \varrho_0 + R\,|(\varphi_0 - \varphi)| = \varrho_0 + R \sin 1''.\,(\varphi_0 - \varphi)''$

Igy állíttatott elő a 54. ábrán az középmeridián és a parallel körök $\varphi_0 = 45°$-tól indulólag 5, illetve 10°-ról 10°-ra.

A meridiánok képeit most már úgy nyerjük, hogy a térképi parallel körökre felrakjuk a valódi parallel kör íveket (amiket a meridiánok a gömbön közrefognak) és az egy meridiánhoz tartozó ezen osztási pontokat összekötjük. A meridiánok eszerint általános másodrendű görbék: sem körívek, sem ellipsis ívek.



54. ábra.

Az ismertetett szerkesztésből következik e vetületre nézve a *területtartóság*.

Azonban ezzel az előnnyel szemben igen nagy a szögtorzulás, amint az a 54. ábrából is látható, ahol a fokhálózati szögek a 90°-tól helyenkint erősen eltérnek.

Ha α_A-val jelöljük egy vetületi A ponthoz tartozó $AC = \varrho_A$ sugárnak a *kezdő meridiánnal* bezárt szögét, akkor ezen α értéket adja az

32. . . $\alpha_A = \frac{\sin (90° - \varphi)}{\varrho_A} . \lambda_A$ elemi uton levezetett képlet.

A lineármodulus értéke a parallel körök irányában $= 1$; a meridiánok irányában pedig

33. . . . . $l_m = \frac{1}{\cos \vartheta}$, ahol

ϑ a parallel kör és meridián által a vetületen az illető pontban bezárt szögnek a 90°-tól való eltérését jelenti. Ezen ϑ szöget bármely pontra adja ezen képlet:

34. . . . . $\operatorname{tang} \vartheta = \left(\cos (90° - \varphi) - \frac{\sin (90° - \varphi)}{\varrho}\right) arc\, \lambda$

Mivel a ϑ értékek a központtól távolodva óriási módon megnövekednek, dacára területtartó voltának ma már nem használjuk ezen vetítést. Azonban a multban *földrajzi térképek túlnyomó része a legujabb időkig* és az országos katonai topográfiai térképek I. Napoleontól az 1860. évekig (Magyarország is) ezen vetületben készültek.

A katonai térképek most a *polieder* vetületen készülnek: ennek részletes leirását lásd a III. kötet 161. oldalán.

Végezetül áttérünk a hengervetületekre, amelyek közül a nevezetesebbek:

A. a négyzetes hengervetület,

B. a *Merkátor*-féle szögtartó vetület,

C. a *Sanson-Flamstead*-féle területtartó és ugynevezett módosított hengervetület,

D. Cassini Soldner-féle vetület.

Az itt említett fontosabb vetületeket egyenkint a következőkben ismertetjük.

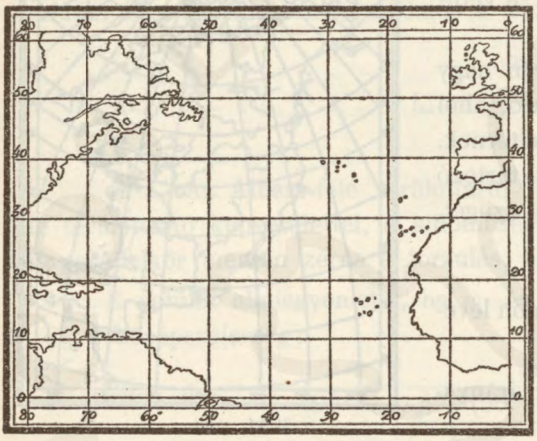
ad A. Az egyenes körhenger a gömb ekvátorát érinti. Az ekvátor a kifejtésben tehát hossztorzulás nélküli egyenes vonal. Erre a vonalra merőleges és egymással párhu-

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

zamos egyenesekként ábrázoltatnak a gömbi meridiánok: (55. ábra) egymástóli távolságuk egyenlő az *ekvátori foktávolsággal.*

A parallel körök képei párhuzamos egyenesek: egymástóli távolságuk egyenlő a gömbi meridionális foktávolsággal. Tehát fokról-fokra szerkesztve az egész fokhálózatot: egyenlő négyzeteket tartalmazó hálózatra jutunk. E vetület az ekvátortól északra — délre távolodva a parallel körök irányában *óriási* módon nagyítja a hosszakat és a polusnál e nagyítás már a *végtelen* értéket éri el, mert a *Polus* pont mint egy $2 R \pi$ hosszúságú egyenes vonal jelentkezik, ahol R a gömb sugara.

Ha egy meridián képét tekintjük x tengelynek és az ekvátor képét y tengelynek, akkor egy tetszőleges φ_A, λ_A gömbi földrajzi helyhatározók által adott pontnak összrendezőit ezen két alap egyenlet adja:



55. ábra.

$$35. \quad . \; x_A = R. \, |\varphi_A| = \left(\frac{R}{\varrho''}\right). \varphi_A''$$

$$36. \quad . \; y_A = R \, |\lambda_A| = \left(\frac{R}{\varrho''}\right). \lambda_A''$$

A lineár modulus értéke minimum a meridiánok irányában:

$$37. \; . \; . \; l_{mer.} = b = 1;$$

maximum a parallel körök irányában:

E maximális érték képlete elemi módon nyerhető. Ugyanis a parallelkör ívhossza $= r_\varphi . \, |\lambda|$; ahol $r_\varphi = R \cos \varphi$; míg a 36. képlet szerint a parallel körív vetületi hossza $= R. \, |\lambda|$. Tehát a lineár modulus a parallelkör irányában

$$38. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; l_{par.} = a = \frac{R \, |\lambda|}{R \cos \varphi . \, |\lambda|} = \frac{1}{\cos \varphi}$$

Ennek értéke $\varphi = 90°$ esetében tényleg $= \frac{1}{0} = \infty$.

Viszont amíg a φ kicsiny szögérték (tropikus zona) addig az $1/\cos \varphi$ érték közel áll az egységhez.

A maximális iránytorzulás képlete (I. Fejezet 3. §. 4. képlete szerint) e vetületnél igen egyszerű:

$$39. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \sin \Delta_{1\,m.} = \frac{a - b}{a + b} = \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$$

$$= tang^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Eszerint $\varphi = 0°$, $\pm 15°$, $\pm 30°$, $\pm 45°$ esetében a maximális iránytorzulás értékei $0° \, 0'$; $1° \, 0'$; $4° \, 7'$; $19° \, 45'$.

Tehát az ekvátortól 15°-on túl távolodva az iránytorzulások már óriási értékűek. A maximális szögtorzulások ezen $\Delta_{1\,m}$ értékek kétszerese.

ad B. A **Merkátor**-féle vetületet részletesen ismertettük e könyv IV. Fejezetének 5. §-ában. Itt csak az ezen vetületben készült fokhálózatra (40. ábra) mutatunk ismét rá, amelynél feltünő a parallel köröknek rohamos távolodása egymástól a polus felé. Hangsúlyozzuk, hogy ezen vetület és a gnomikus vetület a jelen kor tengerészeti térképeinek szokásos vetületei.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Hangsúlyozzuk egyúttal, hogy a *nagy területtorzulás* miatt e vetület földrajzi térképek készítésére *nem ajánlatos.*

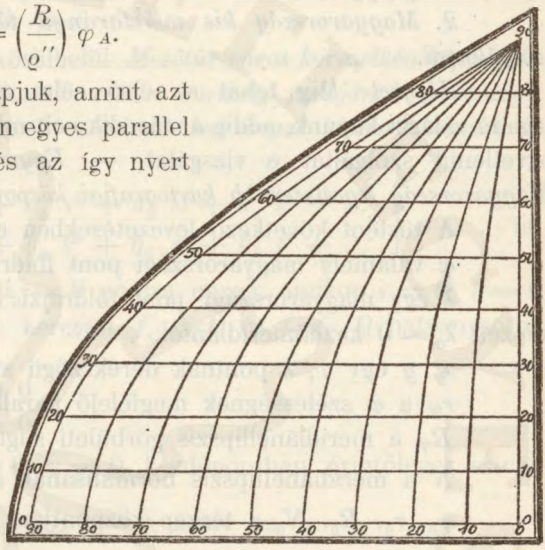
E célra határozottan célszerűbb a következő vetület alkalmazása.

ad C. A **Sanson-Flamstead**-féle vetület *területtartóságánál fogva igen gyakran használtatik egyes világrészek ábrázolására. Afrika, Amerika, Ausztrália* és *szigeteinek* térképei majdnem mindenütt ezen vetületben találhatók fel.

Fokhálózata az *56. ábrán* látható. Az ekvátor egyenes vonal; a kezdő meridián erre merőleges egyenes vonal; a parallel körök az *ekvátorral parallel egyenesek:* egymástóli merőleges távoluk egyenlő a valódi gömbi meridián ívhosszal. Tehát a kezdő meridiánt véve x tengelynek, egy tetszőleges A gömbi pont vetületi abscissája:

$$40. \quad x_A = R\,|\varphi_A| = \left(\frac{R}{\varrho''}\right)\varphi_A.$$

A meridiánok képeit most már úgy kapjuk, amint azt a *Bonne*-féle vetületnél láttuk: felrakjuk minden egyes parallel kör képére a valódi *parallel kör ívhosszakat* és az így nyert pontokat görbékkel összekötjük.



56. ábra.

E szerkesztésből világos, hogy bármely A pontra nézve

$$41. \quad y_A = \left(\frac{R}{\varrho''}\right)\lambda_A \cdot \cos\varphi$$

A területtartóság az előadott szerkesztésből folyik; továbbá világos az is, hogy a parallel körök irányában

$$42. \quad l_{par.} = 1.$$

E vetületnél a torzulási főirányok *nem azonosak* a fokhálózati irányokkal, mert a területtartósságnál fogva $a = \frac{1}{b}$, azaz a *minimális lineár modulus* minden pontban kisebb az egységnél, a maximális pedig nagyobb az egységnél és mert a két fokhálózati irány itt egymásra nem merőleges.

A fokhálózat szerkesztésének egyszerüségénél és a területtartóságnál fogva ez a vetület különösen oly világrészek földrajzi ábrázolásánál használtatik, amelyek az ekvator két oldalán terjednek el. (Afrika és Délamerika térképei rendszerint ilyenek.)

ad D. Ez lényegileg az *ad A.* alatt tárgyalt négyzetes fokhálózatú hengervetület azzal a különbséggel, hogy itt a henger nem az ekvátort, hanem az illető országrész *középső meridiánját* érinti.

Ezt a meridiánt *segédekvátornak* nevezzük, és a hozzá képzelt segédpolushoz tartozó meridiánokat *segéd meridiánoknak* nevezzük. A tetszőleges „A" gömbi ponthoz tartozó segédmeridián *ívhossza* (a segédekvátor = y tengelytől számítva) tehát az illető A pont vetületi x összrendezője. E vetület egyenleteit és torzulásait *ad A.* alatt adott képletek adják, ha a φ és λ mennyiségeket az imént definiált *segéd* fokhálózatra vonatkoztatjuk.

E vetületet először **Cassini** alkalmazta Franciaország felmérési vetületeként: az x-eket (gömbi ivhosszak) azonban csak közelitő képlettel számitotta.

Soldner az x-ek valódi gömbi értékeit számitotta; a ma is használatos 40 porosz Soldner rendszerben pedig az x-eket és y-okat mint a *szferoid* megfelelő ivhosszait

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

számitják. A *Cassini* és *Soldner*-féle vetületekre vonatkozó irodalomból kiemelendők; Mitteilungen des k. und k. Militär-Geogr. Institutes. Wien. VI. Band. 1886., továbbá *A. Börschnek* „Szferoidische Koordinatenrechnung" *(Berlin)* cimű igen alapos munkája.

3. §. Magyarország legkisebb össztorzulású (kompenzativ) vetülete.

Ezen vizsgálatnak kettős célja van:

1. Eldönteni egyszer és mindenkorra és minden kétséget kizáró módon, hogy vajjon a matematikai vetitési módok sokszorosan végtelen sokaságaiban létezhetik-e egyátalában egy olyan, amely egyetlen síkon ábrázolva Magyarországot $^1/_{10000}$*-en aluli hosszváltozást ad.*

2. Magyarország kis méretarányú térképeinek legeszményibb vetitési módját fogja szolgáltatni.

Jegyzet: Mig tehát az első célra nézve esetleg negativ eredményre vezet, azaz tagadó választ kapunk, addig a második célt mindenesetre elérjük, tehát egy positiv eredményt okvetlenül szolgáltat e vizsgálat. — *Egy további érdekes eredménye ezen vizsgálatnak Magyarország legcélszerübb kartografiai központjának* $(\varphi_0\ \lambda_0)$ *megállapítása.*

A tüstént következő levezetésekben ezen betűs jelzést fogjuk használni:

φ valamely magyarországi pont földrajzi szélessége,

λ egy magyarországi pont földrajzi hosszúsága, számitva a Magyarország közepén képzelt $\lambda_0 = 0$ kezdőmeridiántól.

x, y egy φ, λ pontnak derékszögü síkrendezői a keresett kompenzativ vetületben.

r_φ a φ szélességnek megfelelő parallelkör sugara.

R_φ a meridiánellipszis görbületi sugara φ szélességben.

N a meridiánellipszis normálisának a felület és a forgás tengely közti része.

φ_0, r_0, R_0, N_0 a térkép központjára vonatkozó adatok.

$\psi = \varphi - \varphi_0$

s a meridiánív hossza φ_0 és φ parallelkörök között.

t a φ_0 parallelkör azon ive, amely a kezdő meridián $(\lambda_0 = 0)$ és a λ meridián között van.

l_λ, l_φ a fokhálózati lineár modulusok.

$\Phi' - \Phi = \varepsilon$ a hálózati szögek változása a vetités által.

a, b, Δ_{1^m} betük jelentései e kötet I. Fejezetének 3. §-ából ismeretesek

$$\text{I.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi = \varphi - \varphi_0 \\ t = r_0\,\lambda \\ r = N\cos\varphi \\ r_0 = N\cos\varphi_0 \\ ds = Rd\varphi \\ \dfrac{dr}{ds} = -\sin\varphi \end{array} \right.$$

Az I. alatt felírt egyenletek, az utolsót kivéve, a definiciókból maguktól adódnak.

Az utolsónak felírt egyenlőség azon ∞ kicsi derékszögű háromszögből vezethető le, amely előáll, ha a Δs meridiánivelem egyik végpontjából merőlegest bocsátunk a másik végponthoz tartozó r parallelkör sugárhoz — és a határátmenetet elvégezzük.

A forgási ellipszoid leképezendő M részének (Magyarország) bármely P pontja megadható a (φ, λ), vagy (ψ, λ), vagy az (s, t) *felületi rendezői értékpárok által.*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Abban az esetben, ha az ekvator sugarát (r maximum) választom a hosszak mértékegységéül, tehát ha a meridián ív s hosszának $\frac{s \text{ (meter)}}{\text{ekvator sugár (meter)}}$ a mérőszáma, akkor közvetetlenül világos, hogy Magyarország esetében a szóba jöhető maximális s és t hosszak mérőszámai aránylag *kicsiny törtszámok* lesznek különösen akkor, ha a φ_0, λ_0 kezdőpontot (egyszersmind a vetület központja) valahol az ország közepe táján választjuk.

Magyarországra nézve:

$$s \text{ max.} = \frac{300 \ km}{6300 \ km} = \frac{1}{21}$$

$$t \text{ max.} = \frac{500 \ km}{6300 \ km} = \frac{1}{12}$$

közelítő értékekre jutunk, ha a φ_0, λ_0 pontot körülbelül *Mezőtúr város környékén képzeljük.*

Ezekre az adatokra figyelve *az előállitandó vetület bármely pontjának derékszögü síkkoordinátáit (x, y)-t az s és t független változók növekedő hatványai szerint konvergáló hatványsorokkal képzelhetjük kifejezve,* azaz:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(s,t) \equiv a_1 + a_2 s + a_3 t + a_4 s^2 + a_5 st + a_6 t^2 + \ldots \\ y &= f_2(s,t) \equiv b_1 + b_2 s + b_3 t + b_4 s^2 + b_5 st + b_6 t^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{Ia.}$$

Mivel azt akarjuk, hogy $\varphi = \varphi_0$, $\lambda = \lambda_0 = 0$ pontra nézve, amikor $s = 0$, $t = 0$ a vetületbeli x és y is zérus legyen, azért a keresett $f_1(s,t)$ és $f_2(s,t)$ hatványsorok abszolut tagokat nem tartalmazhatnak:

$$a_1 = 0$$
$$b_1 = 0$$

Mivel továbbá az x tengely az $x = 0$ $y = 0$ kezdőpontban érintőleges irányú a φ_0 parallelkör képéhez, tehát $\frac{dy}{ds} = 0$, ha $s = 0$, $t = 0$, azért az

$$y = f_2(s,t)$$

sor nem tartalmazhatja s-et az első hatványon, azaz nemcsak b_1 hanem b_2 is $= 0$, az y sorában. Egyébiránt most már a meghatározandó hatványsorok ugy határoztassanak meg, hogy minimális szög és minimális hosszváltozást eredményezzen a nyerendő vetületi egyenletrendszer.

Fejezzük ki e célból az I. fejezetben közölt átalános érvényü — tehát síkvetületre is használható — képletek alapján a hálózati lineár modulusok és a hálózati első redukció (ε) szinusának egyenleteit az

$$x = f_1(s,t)$$
$$y = f_2(s,t)$$

még ismeretlen hatványsorok esetére:

$$\text{II.} \quad \left\{\begin{aligned} l_\lambda &= \left(\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ l_\varphi &= \frac{r_0}{r}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \sin\varepsilon &= \frac{r}{r\, l_\gamma\, l_\varphi}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right). \end{aligned}\right.$$

Ezen a további vizsgálatok alapját képező II. egyenletek felállitásakor az ezen cikkben I. alatt felírt speciális képletekre is figyeltünk. *Hatványsoroknak differenciálhányadosai ismét hatványsorok lévén, a II. alatt felirt egyenletek jobboldalai is hatványsorok lesznek.*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Első cél: az x és y hatványsoraiban úgy állapítani meg a még teljesen ismeretlen koefficienseket, hogy a térkép központjában, $s = 0$, $t = 0$ helyen semminemű torzulás ne legyen, azaz a II. alatti hatványsorok ezen helyre az $l\lambda = l_\varphi = 1$ és $\sin \varepsilon = 0$ helyettesítési értékeket szolgáltassák.

Az $l\lambda$ sora, az $s = 0$, $t = 0$ helyre csakis úgy fog 1-et szolgáltatni, ha ezt az abszolut tagot a $\frac{\partial x}{\partial s}$ szolgáltatja, mert $\frac{\partial y}{\partial s}$ nem tartalmazhat abszolut tagot, mivel az $y = f_2(s, t)$-ben s^1 nem szerepel. Tehát az x sorában az s^1 tagnak *koefficiense* $a_2 = 1$.

A $\sin \varepsilon$ sor a $t = 0$, $s = 0$ helyen csak ugy lesz zérus, ha a sora abszolut tagot nem tartalmaz. Az eddig mondottakat figyelembe véve ezt a feltételt kielégítjük, ha az $x = f_1(s, t)$ sorban a t független változó első hatványa nem szerepel, azaz ha $a_3 = 0$. Ekkor ugyanis a mondottak alapján

$$\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t}$$

az $s = 0$, $t = 0$ helyen

$$1 \times 0 + 0 \times \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

lesz: *és így sin ε is nulla lesz a kezdőpontban.*

Az a harmadik követelés pedig, hogy az $s = 0$, $t = 0$ helyen l_φ is egyenlő legyen az egységgel, ezek után már csak azt követeli az x és y hatványsorainak koefficienseitől, hogy a $\frac{\partial y}{\partial t}$ hatványsorban a t^1-nek koefficiense legyen $\frac{r}{r_0}$, amikor is az

$$l_\varphi = \frac{r_0}{r}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

egyenlet jobboldala az $s = 0$, $t = 0$ helyen az

$$l_{\varphi_0} = \frac{r_0}{r}\left(0 + \frac{r}{r_0}\right) = 1$$

helyettesítési értéket szolgáltatja. Az a négyrendbeli követelmény tehát, hogy $s = 0$, $t = 0$ esetében.

$x = 0$, $y = 0$, $l\lambda - l_\varphi = 1$ és $\sin \varepsilon = 0$ legyen, a meghatározandó $x = f_1(s, t)$ $y = f_2(s, t)$ hatványsorok abszolut tagjaira, *eltekintve tehát a még egyelőre teljesen határozatlan magasabbrendű tagoktól* ezen alakot szabják meg:

$$\text{III. } \ldots \begin{cases} x = 0 + s + 0 \times t + \text{(magasabbrendű tagok)} \\ y = 0 + 0 \times s + \frac{r}{r_0}t + \text{(magasabbrendű tagok).} \end{cases}$$

Ezen még javarészt határozatlan vetítési egyenletrendszerről már is tudjuk, hogy a vetítendő ország bármely s, t helyére a hálózati linear modulus értéke az egységtől legföljebb egy elsőrendű nagysággal $\left(\frac{1}{21}\right.$ illetve $\left.\frac{1}{12}\right)$ térhet el; mivel pedig, a magasabbrendű tagoktól eltekintve általában a

$$\sin x = x - \textit{magasabbrendű tagok} \ldots$$

x-el egyenlő rendű mennyiségnek tekinthető, a III. meghatározta vetület bármely pontjában az ε hálózati első szögredukció is maximumban egy *elsőrendű mennyiség értékével bírhat.*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A további közvetlen cél most már, úgy határozni meg az ismeretlen

$$x = f_1(s, t) \text{ és } y = f_2(s, t)$$

hatványsorok tagjait, hogy az ε, $(l\lambda - 1)$, $(l\varphi - 1)$ értékek legalább is másodrendű kicsiny mennyiségek legyenek *s és t lehetséges szélső értékei mellett is.*

Ezt — a II. és III. alatti egyenleteket figyelembe véve — könnyű elérni.

Ha azt óhajtjuk, hogy $(l\lambda - 1)$ másodrendű kicsi legyen legfeljebb, úgy követelni kell, hogy sem a $\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2$ sem a $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2$ sor ne hozzon az $l\lambda$ kifejezésébe egyetlen első rendű tagot sem.

Tehát sem az y, sem az x hatványsorában s^2 és st tag nem szerepelhet, azaz hatványsorunkban: $a_4 = 0$, $a_5 = 0$; $b_4 = 0$, $b_5 = 0$.

Ugyanezt megfontolva $l\varphi$-re *még azt kell követelni,* hogy y az st-n kivül t^2-ot sem tartalmazhatja, azaz: $b_6 = 0$.

Tissot most azt mondja: ezek után a *sin* ε kifejezésében az elsőrendű tagok

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{r}{r_0}\frac{dr}{ds}\, t\text{-re}$$

redukálódnak, amely alakot I-et figyelembe véve így is írhatók:

$$\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\sin \varphi_0}{r_0}\, t$$

Ezen elsőrendű kifejezést Tissot úgy tünteti el, ha az $x = f_2(s, t)$ sorban a t^2 tag elé $\frac{\sin \varphi_0}{2\, r_0}$ koefficienst írja, amely *utóbbi* állítás igaz és be is látható.

Jegyzet: a $\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{r}{r_0}\frac{dr}{ds}\, t$ úgy állt elő, hogy a

$$\sin \varepsilon = \frac{r}{r\, l\lambda\, l\varphi}\left(\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right)$$

kifejezésben tudjuk, hogy $\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)$ nem hozhat be elsőrendü tagot, de hozhat $\frac{\partial x}{\partial t}$, amely a mondottak szerint a t^2-ot tartalmazhatja tetszőleges a_6 koefficienssel.

Ha most már $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$ helyett $\left(\frac{\partial y}{\partial r}\frac{dr}{dt}\right)\frac{\partial y}{\partial t}$-t irok és az eddigiek alapján ezen differenciálásokat el is végzem:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial r} &= \frac{t}{r_0} \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{r}{r_0} \end{aligned}\right\} \text{ lásd III.}$$

$$\frac{dr}{ds} = \sin \varphi \text{ lásd I.}$$

következésképen a *sin* ε-ban bármely s, t értékpár esetében ezen elsőrendű mennyiségek szerepelhetnek:

$$\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{r \sin \varphi}{r_0^2}\, t$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Tissot tehát — anélkül, *hogy azt egy szóval gyanittatná is* — a *sin* ε-ban előfordulható és változó nagyságu $\frac{r \sin \varphi}{r_0^2}$ helyett $\frac{r_0 \sin \varphi_0}{r_0^2}$ állandó értéket tételezte fel. Itt tehát közelitéssel van dolgunk; lássuk mekkora hibát ad ez Magyarország esetében.[1])

Az x és y soraiban az első- és másodrendü tagok koefficiensei tehát mind ismeretesek és igy az:

$$\text{IV.} \quad \begin{cases} x = s + \frac{\sin \varphi_0}{2 r_0} t^2 + \frac{A}{3} s^3 - B s^2 t + C s t \frac{D}{3} t^3 \\ y = \frac{r}{r^0} t + \frac{A'}{3} s^3 + B' s^2 t - C' s t^2 + \frac{D'}{3} t^3 \end{cases}$$

hatványsorokban csakis a *harmadrendü tagok szorzói állapitandók meg a kimondott feltételeknek megfelelően.*

Az előbb használt a_7, a_8 illetve b_7, b_8 stb. koefficiensek helyett most célszerűbb az $A/3$, B stb. jelzéseket használni ezen még teljesen ismeretlen állandók számára. Ezen IV. alatti vetületi egyenletrendszer *sin* ε, l_φ l_λ-ra következő sorokat adja, ha a II. alatti differenciálásokat és gyökvonásokat végrehajtjuk:

$$l_\lambda = 1 + A s^2 - 2 B s t + \left(C + \frac{\sin^2 \varphi_0}{2 r_0^2}\right) t^2$$

$$l_\varphi = 1 + \frac{r_0}{r}\left[B' s^2 - 2 C' s t + \left(D' + \frac{r_0^2}{2 r^2} tg^2 \varphi_0\right) t^2\right]$$

$$\sin \varepsilon = \frac{1}{r\, l_\lambda\, l_\varphi}\left(\left(\sin \varphi_0 - \frac{r}{r_0} \sin \varphi\right) t + (A' r - B r_0) s^2 + 2 (B' r + C r_0) s t + (D r_0 - C' r) t^2\right)$$

Anélkül, hogy a közelités fokán változtatnánk, φ helyébe φ_0, r helyébe r_0-t irhatunk a másodrendű tagok együtthatóiba, $r \sin \varphi$ helyébe pedig, amely mint a t együtthatója szerepel *sin* ε-ban, most azt lehet irni:

$$r \sin \varphi = r_0 \sin \varphi_0 + \left(\frac{r_0}{R_0} \cos \varphi_0 - \sin^2 \varphi_0\right) s \; ^2)$$

Az ellipszoid lapultságára sem szükséges a másodrendü tagoknál figyelni, mert hisz Magyarország esetében *amugy is a Gauss-gömb sikvetületéről van szó.* Tehát a másod- és magasabbrendü tagokban R_0 helyett 1, r_0 helyett pedig $\cos \varphi_0$ helyettesithető *minden közelités nélkül.* Ezen megengedett közelitések után:

$$\text{V.} \quad \begin{cases} l_\lambda = 1 + A s^2 - 2 B s t + (C + {}^1/_2\, tg^2\, \varphi_0)\, t^2 \\ l_\varphi = 1 + B' s^2 - 2 C' s t - (D' + {}^1/_2\, tg^2\, \varphi_0)\, t^2 \\ \sin \varepsilon = (A' - B)\, s^2 + 2 \left(B' + C - \frac{\cos^2 \varphi_0}{2 \cos^2 \varphi_0}\right) s t + (D - C')\, t^2 \end{cases}$$

---

[1]) $r \sin \varphi$ helyett $r_0 \sin \varphi_0$ szerepelve, mivel e célra gömbnek tekinthetem az ellipszoidot, amikor egységnyi gömbsugár esetében

$$r = \cos \varphi;\ r_0 = \cos \varphi_0$$

azt kell tehát megnézni, hogy

$$\cos \varphi \sin \varphi - \cos \varphi_0 = \sin \varphi_0$$

mekkora maximumban Magyarország esetében?

Eredmény: ha

$$\varphi_0 = 47^0 \text{ és } \varphi = 47^0 \pm 4^0$$

akkor a differencia maximuma $\varphi_0 + 4^0$-nál $= 0{\cdot}_{0009}$, tehát egy másodrendü $(1/12)^2$ nagyságu; igen ám, de ezen differencia t-vel szorozva kerül mint elhanyagolás az eredménybe, tehát harmadrendünek mondandó s igy *a levezetés mostani stádiumában megengedett.*

[2]) Ezen közelités Magyarországra ismét $47^0 + 4^0$-ot véve alapul, szélső esetben 0,000002-őt eredményez differenciának, tehát másodrendünél kisebb értéket.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Hogy most már $\sin \varepsilon$, illetve ε és $(l\lambda - l\varphi)$ már csak *harmadrendü* kicsiny mennyiségek legyenek, nem kell egyebet tenni, mint kimondani, hogy az

$$x = f_1(s, t)$$
$$y = f_2(s, t)$$

hatványsoraiban IV. alatt:

$$\text{VI.} \quad \ldots \ldots \ldots \begin{cases} A' = C' = B = D, \\ B' = A \\ D' = C \text{ és} \\ A + C = \dfrac{\cos^2 \varphi_0}{2 \cos^2 \varphi_0}, \end{cases}$$

akkor az V. alatt felirt egyenletek helyettesitési értékei s, t szélső értékei mellett is $\sin \varepsilon$ és $l\lambda - l\varphi$-re a nevezett rendü kicsiny mennyiségek volnának.

A IV. alatti vetületi egyenletrendszerekbe a VI. alatti koefficienseket téve: oly vetitési módot szolgáltatnak, *amelynél a hálózati lineár modulusok legföljebb másod-, a hálózati első szögredukciók pedig legföljebb harmadrendü nagyságokat képviselnének.* De tudjuk ezen értekezés I. Fejezetéből, hogy a hálózati torzulások csak asimutalis, kúp és henger vetületek esetében képviselik a szélső értékü lineártorzulásokat, a szélső első redukciókat pedig még akkor sem!

Mivel azonban (lásd az I. Fej. 3. §-át.)

$$(a - b)^2 = (l\lambda - l\varphi)^2 \cos^2 \frac{\varepsilon}{2} + (l\lambda - l\varphi)^2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \text{ és } \sin \Delta_{1m} = \frac{a - b}{a + b}$$

egyenletek állanak fenn, a talált $l\lambda$, $l\varphi$, ε és a szóban forgó szélső torzulási értékek a, b és $\Delta_1 m$ között: *tehát azok egyenlő rendü mennyiségek.* Azért igaz Tissot ezen tétele: *Ha az A és C állandó, de határozatlan értékü koefficiensek között ezen vonatkozás áll fenn.*

$$1. \ldots \ldots \ldots \quad 2(A + C) \cos^2 \varphi_0 = \cos^2 \varphi_0$$

ugy mindazon vetületek, melyeket az

$$2. \ldots \ldots \quad \begin{cases} x = s + \dfrac{\sin \varphi_0}{2 r_0} t^2 + \dfrac{A}{3} s^3 - Bs^2 t + Cst^2 + \dfrac{B}{3} t^3 \\ y = \dfrac{r}{r_0} t + \dfrac{B}{3} s^3 + As^2 t - Bst^2 + \dfrac{C}{3} t^3 \end{cases}$$

közvetetlen projekció egyenletrendszer határoz meg, avval a tulajdonsággal birnak, hogy a térkép központjában 0, legszélsőbb pontjaiban pedig legföljebb harmadrendü kicsiny első redukciókat és legföljebb másodrendü kicsiny hossztorzulásokat idéznek elő.

Egy vetületi P pont körül a lineármodulus a mellett majdnem minden irányban egyenlő és ezen képlettel számitható:

$$3. \ldots \ldots \ldots \quad (a - 1) = As^2 - 2Bst + (1/2 - A) t^2$$

amely kifejezésben az a betü a P pontbeli Tissot-indikatrix félnagytengelyének mérőszáma.

A kérdés, melyre *elsősorban* meg akarunk felelni, a következő: *melyik az a legkisebb (a—1) torzulási érték, melyre Magyarország esetében a Tissot-féle vetületben előforduló A, B és φ_0 állandók legszerencsésebb választása mellett egyáltalában juthatunk?*

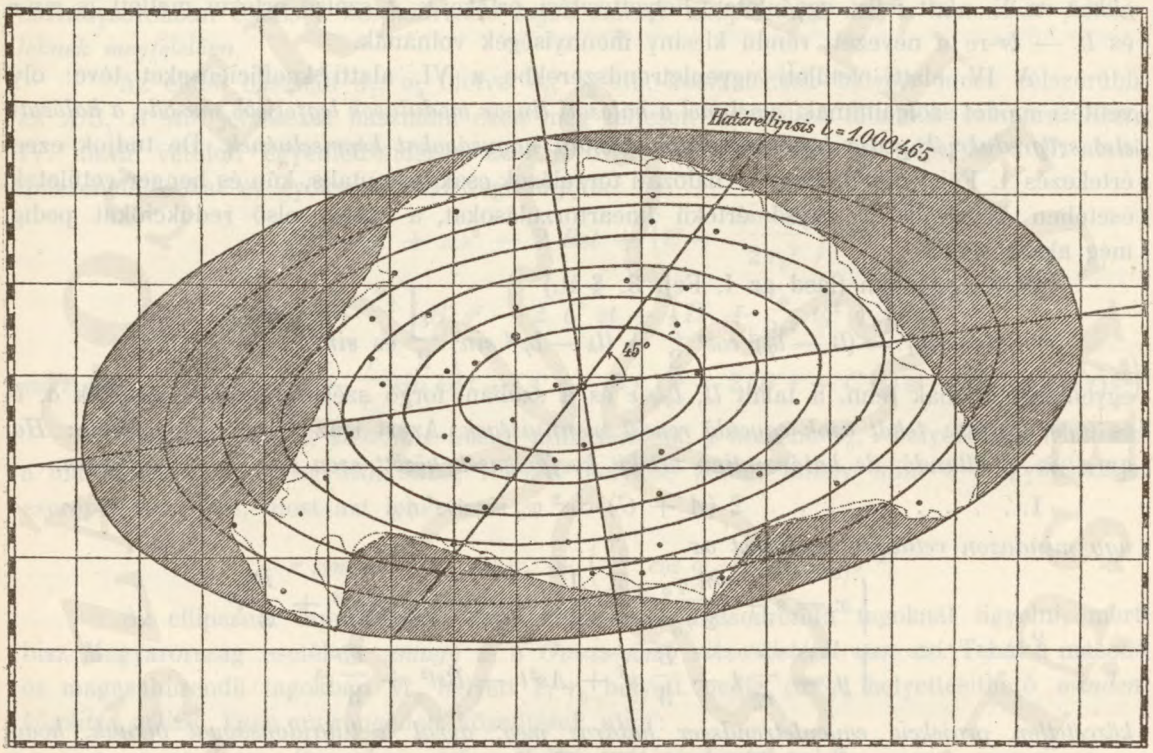
A második kérdés azután igy fog hangzani: *ismerve ezt az elérhető legkisebb (a—1) torzulási értéket, hogyan nyerjük az ezen minimális torzulási értékhez tartozó kompenzativ vetületi egyenletrendszernek numerikus felállitásához szükséges A, B és φ_0 állandókat?*

Mindkét kédésre — még pedig először az elsőre, azután a másodikra — *a Tissot által megadott utasitásokat követve könnyü lesz megfelelni, csak igazolni kell az eljárások helyességét, mert Tissot csakis eredményeket közöl, de levezetéseket nem ad.*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Képzeljük az I. fejezet 1. ábrájában szereplő *(M)* idom analogiájára — Magyarország *s*, *t* *értéktartományát* megszerkesztve az *s*, *t* derékszögü sikkoordináta rendszerre vonatkoztatva. (57. ábra.)

Ha a kompenzativ vetület általános egyenletrendszerébe (2. képletek) most már azt a φ_0 értéket helyettesitem, melytől az ellipszoidon (és az értéktartományban) számitom az *s* és *t* rendezőket, továbbá az *A* és *B* állandók helyébe tetszőlegesen választott kétnumerikus értéket teszek (miáltal az 1. feltételi egyenletből *C* numerikus értéke is határozott), ugy a kompenzativ vetület mindazon *x*, *y* pontjai, melyek ugyanazon (*a*—1) hosszorzulási értékeket szolgáltatják (pl. *a*—1 = 0,002), a megszerkesztett *értéktartományban* egy kupszeletnek, é pedig ellipszisnek, vagy hiperbolának pontjai lesznek.



A Tissot vetület torzulási ábrája

57. ábra.

Ezen fontos tétel az

$$(a-1) = As^2 - 2Bst + (1/2 - A)t^2$$

talált egyenletből önként következik, valamint az is, *hogy a nevezett kúpszeletnek központja identikus az értéktartomány s, t derékszögü koordinata rendszer kezdőpontjával,* mert az itt felirt egyenlet egy hiperbola vagy ellipszis *központi* egyenlete.

Ha $B = O$, ami azonban csak kivételes eset lesz, akkor nemcsak központi, hanem egyuttal a főtengelyekre vonatkoztatott központi egyenlete az illető kúpszeletnek. Általában ezen kúpszelet nagytengelye a *t* tengelylyel valami γ szöget fog bezárni, amely γ szög a kúpszeletek általános elméletéből ismert általános képlet alapján meg is határozható. A mondottak alapján igaz tehát az, hogy numerikusan megadott *A*, *B* és φ_0 állandók esetében, az (*a*—1) torzulási mértékét *O*-tól a ∞-ig változtatva numerikusan, az *értéktartományba* egy *koncentrikus, hasonló alaku és fekvésü kúpszeletekből álló sereget képzelhetek ezen* (*a*—1) *értékekhez szerkesztve — mint a numerikus egyenlet rendszer által megadott*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

kompenzativ vetület — hossztorzulási görbeseregét. Az is világos, hogy ezen seregben a nagyobb méretü kúpszelet nagyobb $(a—1)$ értékeknek lesz a geometriai helye, hiszen a Tissot-vetület levezetésében kiinduló tétel volt: *a központban zérus ösztorzulás, — tőle minden irányban távolodva — növekedő torzulás.*

Ezen kúpszeletsereg között egy (és általában csakis egy) oly kúpszelet képzelhető, amely éppen magába zárja az adott értéktartományt, azaz *annak szélső határait érinti két vagy több pontban.* Ezt *határkúpszeletnek* fogjuk nevezni, ennek tehát az a sajátsága, hogy *az adott* A, B, φ_0 numerikus értékek mellett, $(a—1)$ a kérdéses országra nézve *ezen kúpszelet érintkezési pontjaiban* veszi fel a maximális értéket.

Ilyen határkúpszelet adott A, B, φ_0-hoz csak egyetlen egy képzelhető, de sokszorosan végtelen, adott ország esetében a *határkúpszeletek* száma, alakja, nagysága, elhelyezése, ha az A, B, φ állandók helyett rendre a numerikus értékrendszernek tetszőleges sokaságát helyettesitem a Tissot-vetület 2. alatti általános egyenletrendszerébe.

Ezen sokszorosan végtelen számu *határkupszelet* közt most már van — és *mindenesetre van — egy,* amely az összes határkupszeletek között a *leghisebb numerikus (a—1) torzulási értékek geometriai* helyét adja.

Ezt az ily módon egészen szabatosan meghatározott kupszeletet *főhatárkúpszeletnek fogjuk nevezni és bizonyitásra nem szorul, hogy ha valami úton-módon ezt a speciális kúpszeletet Magyarország s, t tartományához sikerülne nagyságra, alakra és fekvésre helyesen odarajzolni, akkor ezen ellipszis vagy hiperbola főtengelyeinek mérőszámaiból, továbbá a lemérhető γ irányszögből és központjának helyéből az*

$$(a—1) = As^2 — 2\,Bst + (1/2 — A)\,t^2$$

egyenlet fel volna irható, tehát Magyarországnak valójában *legkisebb* össztorzulású vetületének egyenletrendszerében (2. képletek) szereplő összes állandók, A, B, C és φ_0 ismeretesek volnának, és ismernénk tehát azon elképzelhető legkisebb $(a—1)$ torzulási felső határértéket, *mely az országnak egyetlen síkra való akármilyen vetítésekor legalább is bekövetkezik.*

Úgy a felvetett első, mint a második kérdésre tehát egyszerre meg lehet felelni, ha megszerkesztem Magyarország s, t értéktartományát, abba — illetve ahhoz érintőlegesen — meg tudom szerkeszteni valami úton-módon, de szabatosan a *főhatárkúpszeletet: nagyságra, alakra és fekvésre helyesen.* A kérdés tehát most az: *hogyan nyerhetjük ezt a határkúpszeletet?*

Mivel valamely ország — tehát Magyarországnak is — s, t értéktartományának határgörbéje analitikailag nem határozható meg, (egyenlete nem irható fel) *más mód nincs és nem is képzelhető, mint a grafikus kisérletezés,* amit Tissot ajánl. Nevezetesen: átlátszó papirosra gondosan szerkeszteni koncentrikus és hasonló (tehát azonos tengelyarányú: β/α) ellipsziseket, illetve hiperbolákat és ezt a másolópapirt a már előre megszerkesztett Magyarországi s, t értéktartományon addig forgatni és tologatni, míg az ezen kúpszelet tipusnak megfelelő *határkúpszeletet* megtalálom. Meghatározni a neki megfelelő $(a—1)$ torzulási numerikus értéket.

Most ezt a kisérletet a legkülönbözőbb tengelyarányú $(\beta/\alpha = 0,1; 0,2;$ stb.) koncentrikus kúpszelet seregekre elvégezve: mindegyik egy-egy határellipszist és igy egy-egy $(a—1)$ értéket fog szolgáltatni.

Az a határkúpszelet most már, amelyik a legkisebb (a—1) torzulási numerikus értéket adja, az lesz a keresett főhatárkúpszelet: ez szolgáltatja majd A, B, C, φ_0 legcélszerűbb értékeit.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ezt az igen hosszadalmas szerkesztéseket kivánó és látszólag sok fárasztó numerikus számítással járó kisérletezést *nagyon egyszerűsíti* az a körülmény, hogy

4. . . . . $(\alpha-1)=\left(\frac{\varrho}{2}\right)^2$, ahol

ϱ jelenti az illető *határkúpszelet azon radiusvektorának mérőszámát,* (egység az ekvator sugara most is), *amely a főtengelyekkel* (α fél nagytengely, β fél kistengely) *a 45°-nyi szöget zárja be.* Magyarország esetében pedig ezenkívül az a körülmény is könnyítette a vizsgálatot, hogy csakis *ellipszisekkel* kellett a vizsgálatot végezni: *a főhatárhiperbola feltétlenül kedvezőtlenebb eredményt szolgáltatott volna.*

Az imént említett két egyszerűsítés helyességét később igazoljuk.

A megejtett részletes vizsgálat és annak eredményére nézve most a következőket közlöm:

Mindenekelőtt megszerkesztettem (57. ábra) Magyarország s, t értéktartományát.

Normál parallelül választottam a 47°-ik szélességi fokot; nulla meridiánnak pedig a Grenwichtől keletre számított 20° hosszúsági fok meridiánját. Tehát:

$$\varphi_0 = 47°\ 0'$$
$$\lambda_0 = 20°\ 0'$$

Az *Andées-Handatlas*-ban levő *Magyarország* térképről az ország határpontjainak φ és λ földrajzi rendezőit interpollálással meghatározva, képeztem minden ábrázolandó pontra a

$$\varphi - \varphi_0, \text{ és } \lambda - \lambda_0$$

különbségeket — *percnyi* pontossággal. Gömbnek tekintve most már az alapfelületet, a képezett földrajzi rendezői különbségeknek megfelelő s, t ívhosszak ezen ismert képletekből nyerhetők, előjelre is helyesen:

$$s = R\,(\varphi-\varphi_0),\ t = r_0\,(\lambda-\lambda_0)$$

ahol R jelenti a gömb sugarát, r_0 pedig a φ_0 parallelkör sugarát, amelyről tudjuk, hogy;

$$r_0 = R\cos\varphi_0,$$

Hosszegységül véve most már a gömbsugarat, $R=1$, ezen egyszerű képletekkel nyerhető s és t:

$$s = (\varphi-\varphi_0) \text{ ívpercekben}$$
$$t = \cos\varphi_0\,(\lambda-\lambda_0) \text{ ívpercekben.}$$

Az értéktartomány méretarányát most már úgy választottam, hogy: 2 ekvatori ívperc = 1 mm.

Mivel $\cos\varphi_0 = \cos 47° = +0{,}6820$, azért a következő két egyszerű táblázattal történhetett a határpontok felrakása közvetlenül az Andrée-Handatlas-ból vett $\varphi-\varphi_0$, illetve $\lambda-\lambda_0$ különbségek alapján,

s-re nézve:	$2' =$	1 *mm*
	$10' =$	5 „
	$1° = 60' =$	30 „
t-re nézve:	$\lambda-\lambda_0 = 1' =$	0·34 *mm*
	$2' =$	0·683 „
	$3' =$	1·020 „
	$4' =$	1·36 „
	$5' =$	1·70 „
	$6' =$	2·05 „
	$7' =$	2·39 „
	$8' =$	2·73 „
	$9' =$	3·07 „
	$10' =$	3·41 „
	$1° = 60' =$	20·46 „

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ezen térképen (értéktartományban) tehát egy ϱ méretet, ha azt *millimeterekben lemérem*, úgy fejezem ki az ekvator sugárra, mint egységre:

a) szorzom a lemért millimeterek számát *kettővel;*

b) szorzom ezt a szorzatot egy perc abszolut szögértékével $\frac{\pi}{60 \times 180} = 0.0003$

A térkép (értéktartománynak) ilymódon való megrajzolása után átlátszó papirosokon különböző tengelyarányú $\left(\frac{\beta}{\alpha} = 1{\cdot}0;\ 0{\cdot}9;\ 0{\cdot}8;\ \text{stb.}\right)$ koncentrikus ellipsziseket szerkesztettem néhány napon át és minden laphoz próbálgatással megállapítottam a magyarországi értéktartományhoz a határellipszis *fekvését és nagyságát.* Minden határellipszisen lemérve a 45°-os radius vektort ϱ-t, a

$$\left(\frac{\varrho\ mm \times 2 \times 0{\cdot}0003}{2}\right)^2.$$

ismert (4. szerinti) képlettel nyertem a megfelelő $(\alpha - 1)$ hossztorzulási értékeket. Ezen hosszadalmas vizsgálat számszerü eredményeit a túloldali táblázat tünteti fel:

E táblázatnak a továbbiakra nézve legfontosabb két eredménye ez:

1. A legcélszerűbb térképészeti központja Magyarországnak a

$$\varphi = 46^\circ\ 53'$$
$$\lambda = 20^\circ\ 6'$$

pont.

2. Nem képzelhető oly vetítési módszer, melylyel Magyarországot egyetlen síkon ábrázolva

$$1 \pm 0{\cdot}000465$$

értéknél kisebb maximális lineármodulust nyernénk.

Jegyzet: A táblázatban a főhatárellipszis (lásd 57. ábra) az $1{\cdot}00093$ linearmodulust eredményező pontok geometriai helyeként van feltüntetve. Ez akkor igaz, ha — mint eddig mindig feltételeztük — a φ_0, λ_0 központban zérus torzulást tételezünk fel. Ha azonban elállunk ettől a követeléstől és megengedjük azt, hogy $(\alpha - 1)$ a központban ugyanakkora *negativ* értéket vegyen fel, mint a mekkorát *positiv* értelemben ugyanakkor a határellipszis pontjaiban eredményez, akkor az $|(\alpha - 1)|$ a felére redukálható. E célból nem kell egyebet tenni, mint a felállítandó kompenzativ vetületi egyenletrendszerre nyerendő összes együtthatókból, tehát *mindegyikből* külön-külön $\frac{0{\cdot}00093}{2}$ értéket levonni és így helyettesíteni az általános egyenletrendszerbe. Röviden azt mondhattam volna: nem 1 : 1, hanem $1 : \left(1 - \frac{0{\cdot}00093}{2}\right)$ méretarányban állítom elő a legkisebb torzulási vetületet. A $(\alpha - 1)$ most azon ellipszis pontjaira egyenlő zérussal, amely ellipszis főméretei a főhatár ellipszis főméreteihez az $1 : \frac{1}{{}^1/_2\sqrt{2}}$ által van kifejezve.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Határellipsis táblázat.

$\frac{\alpha}{\beta}$		γ	Központ	Hol érinti?	$(\alpha-1)$	Megjegyzés
1·0	250	—	45° 55′ 20° 26′	Fiume, Háromszék	0·00130	
0·9	237	5° 50′	45° 58′ 20° 25′	Fiume, Háromszék-, Trencsénmegye	0·00120	
0·8	226	0° 35′	46° 17′ 20° 22′	Fiume, Carlopago, Trencsén-, Háromszékmegye	0·00110	
0·7	218	6° 0′	46° 32′ 20° 19′	Carlopago, Háromszék-, Árva-, Trencsénmegye	0·00110	
0·6	213	3° 30′	46° 41′ 20° 0′	Lika-Krbava-, Háromszék-, Árvamegye	0·000960	
0·5	210	8° 36′	46° 53′ 20° 6′	Lika-Krbava-, Háromszék-, Árva-, Trencsénmegye	0·000930	Főhatár ellipszis
0·4	214·5	8° 6′	26° 56′ 20° 5′	Lika-Krbava-, Duna-Milanovác, Árvamegye	0·000970	
0·3	217	6° 30′	46° 58′ 20° 2′	„	0·00100	
0·2	223	5° 0′	47° — 20° 30′	„	0·00110	
0·1	225	5° 0′	—	„	0·00110	
0·0	227	4° 30′	—	Árva-, Lika-Krbavamegye	0.00120	

Sajnos, még ha így járnánk is el, a maximális lineármodulus az egységtől

$$\pm \frac{4{\cdot}7}{10000}\text{-el}$$

térne el, tehát mondhatni a *négyszeresével annak, amit a megfelelő részletes felmérési vetületekre ma megengedhetőnek tarthatunk.*

Arról tehát, hogy ugyanaz a síkvetület legyen a kiegyenlítés és az alsó geodéziai felmérés vetülete: **Magyarország esetében végképen le kell mondani, az teljes lehetetlenség minden időre nézve. Ily értelmü törekvésnek, óhajnak ezek után már helye nincs: a kérdés ezzel végleg el van intézve.**

Ami most már a főhatárellipszisnek megfelelő kompenzativ vetületi egyenletrendszer A és B — eddig még ismeretlen — együtthatóinak előállítását illeti, arra nézve Tissot az I. Fejezet 3. §-ban idézett könyvében szószerint (48. oldal) ezeket mondja: „Akármi legyen is A és B értéke, mindig létezni fog egy oly E szög és egy oly F mennyiség, amelyekre nézve:

$$tg\ E = \frac{B}{A - {}^1/_4},\quad F - {}^1/_4 = (A - {}^1/_4)\ sec\ E$$

vagy ami ugyanaz:

5. . . . . $A - {}^1/_4 = (F - {}^1/_4)\ cos\ E,\ B = (F - {}^1/_4)\ sin\ E.$

Mostan az s és t változók helyébe tegyünk két másikat u és v-t, melyek az előbbiekkel ezen összefüggésben vannak:

$$u = s\ cos\ {}^1/_2\ E - t\ sin\ {}^1/_2\ E$$
$$v = s\ sin\ {}^1/_2\ E + t\ cos\ {}^1/_2\ E$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

és melyek tehát s és t-re ezen egyenleteket szolgáltatják:

$$s = u \cos {}^1/_2 E + v \sin {}^1/_2 E$$
$$t = v \cos {}^1/_2 E - u \sin {}^1/_2 E$$

Helyettesítve ezen utóbbi kifejezéseket az $(a - 1)$-re 3. alatt felirt sorában és figyelembe véve a 4. alatti egyenlőségeket:

6. . . . . $(a - 1) = F u^2 + ({}^1/_2 - F) v^2$

Tissot most azt állítja, hogy a 4-ben szereplő szög E a *kétszerese* azon szögnek, melyet a főhatárellipszis u tengelye (nagytengelye) képez az értéktartomány t tengelyével, hogy tehát ezen ismert szög lemérése által az E ismeretes; továbbá azt mondja Tissot, hogy „a főhatárellipszis fél főtengelyének négyzetei az F és $({}^1/_2 - F)$-hez forditott arányban állanak". Midőn a főtengelyek (α, β) ismeretesek, azért F is ismeretes; továbbá ismeretes E is és igy 5-ből nyerhető A és B — és ezek — és az ismeretlen φ_0 alapján 1.-ből a C együttható is.

Jegyzet: *Tissot mindezen állításai helyesek, a képletekben sajtóhibák nincsenek.*

1. Meggyőződtem, hogy az

$$(a - 1) = F u^2 + ({}^1/_2 - F) v^2$$

központi és egyúttal a kúpszelet főtengelyeire vonatkoztatott egyenlet tényleg kiadódik a nevezett helyettesitésekkel: ezt hosszu volna itt igazolni.

2. Hogy biztos legyek abban, hogy *tényleg melyik szöget és milyen előjellel véve mérjek le, a főhatárellipszisre* meghatároztam a kúpszeletek elméletéből ismert módon (Rados tanár előadása: Analisis I.) az elipszis nagytengelyének és az s tengelynek szögét.

Ha ugyanis

$$a_{11} s^2 + 2 a_{12} st + a_{22} t^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0$$

a nevezett ellipszis egyenlete, akkor

$$tg\ 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

ahol α az a szög, amit az s tengely bezár t felé való forgatással az ellipszis nagy tengelyével.

Tissot egyenlete (3.):

$$As^2 - 2 B st + ({}^1/_2 - A) t^2 - (a - 1) = 0\text{-ból}$$

eszerint

$$tg\ 2\alpha = \frac{-2B}{A - ({}^1/_2 - A)} = \frac{-B}{A - {}^1/_4}$$

Mivel Tissot olyan E szöget tételez fel, melyre nézve

$$tg\ E = \frac{+B}{A - {}^1/_4},$$

áll tehát α és E között ezen összefüggés:

7. . . . . $-tg\ 2\alpha = tg\ E$

De Tissot azt is állítja, hogy ezen E szögnek fele a nagytengely és a t tengely által bezárt szög.

Könnyü kimutatni, hogy tényleg:

$$\frac{E}{2} + \alpha = 90^0.$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ha ez tudniillik igaz, akkor áll az, hogy: $E + 2\alpha = 180^0$ azaz $2\alpha = 180^0 - E$, és akkor

$$sin\ 2\alpha = sin\ (180^0 - E) = -\ sin\ E, \text{ és}$$
$$cos\ 2\alpha = cos\ (180^0 - E) = +\ cos\ E, \text{ és igy}$$
$$\frac{sin\ 2\alpha}{cos\ 2\alpha} = tg\ 2\alpha = -\ tg\ E,$$

amit már 7. alatt is láttunk.

Az $\frac{E}{2}$ szög jelentősége tehát helyesen van megadva Tissotban.

3. Helyes Tissot azon állítása is az F meghatározására, hogy

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{(1/2 - F)}{F}$$

Ezt közvetlenül be lehet látni, ha *ezen alakban* irom a főhatárellipszis egyenletét:

$$\frac{u^2}{\alpha^2} + \frac{v^2}{\beta^2} - 1 = 0.$$

Ezt összehasonlitva a Tissot által 5. alatt levezetett

$$(a - 1) = F\,u^2 + (1/2 - F)\,v^2$$

egyenlettel, áll az, hogy

$$\alpha^2 - \frac{(a-1)}{F}\,\beta^2 = \frac{(a-1)}{1/2\ F}, \text{ tehát } \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{1/2 - F}{F}$$

Magyarország esetében tehát, mivel a főhatár ellipszisre nézve

$$\frac{\beta}{\alpha} = 0{\cdot}5 \text{ azaz } \frac{\alpha}{\beta} = 2$$

az F ezen képletből nyerhető:

$$2^2 = \frac{1/2 - F}{F}$$

ahonnan $F = 1/10 = +\ 0{\cdot}1000$.

Ezen F és a lemért $\frac{E}{2}$ szög segitségével 4-ből az:

$$A = +\ 0{\cdot}106709,\ B = +\ 0{\cdot}044356$$

értékeket nyertem az együtthatókra nézve.

C az 1. alatti föltételi egyenletből volna számitandó, r_0 pedig a Gauss gömb sugarából és φ_0-ból, *mivel azonban a Tissot legkisebb torzulású vetületét nem fogjuk alkalmazni*, a számitásokat fölösleges tovább végezni.

4. Hátra van még annak bebizonyitása, hogy

$$(a - 1) = \left(\frac{\varrho}{2}\right)^2$$

ahol ϱ a 45°-os radius vektor hosszát jelenti, — és hosszegység a gömb sugara. Könnyü kimutatni, hogy ez *szigoru értékét adja az* (a—1) *hosszegységi torzulásnak, nem közelitő értékét.*

Ugyanis, ha $\frac{u^2}{\alpha^2} + \frac{v^2}{\beta^2} - 1 = 0$ az ellipszis egyenlete, akkor $u_1 = \varrho\ cos\ 45^0\ v_1 = \varrho\ sin\ 45^0$ a 45°-os radius vektor végpontjainak rendezői, tehát ϱ-ra ezen egyenlet áll elő:

$$\frac{\varrho^2\ cos^2\ 45^0}{\alpha^2} + \frac{\varrho^2\ sin^2\ 45^0}{\beta^2} = 1$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

$$\text{mivel } \cos 45^0 = \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ azért } \frac{\varrho^2}{2\alpha^2} + \frac{\varrho^2}{2\beta^2} = 1,$$

vagy ami ugyanaz

$$\varrho^2 (\beta^2 + \alpha^2) = 2\alpha^2\beta^2 \text{ tehát } \frac{\varrho^2}{4} = \frac{\alpha^2\beta^2}{2(\alpha^2+\beta^2)} = \left(\frac{\varrho}{2}\right)^2$$

Be kell tehát bizonyitani, hogy

$$\frac{\alpha^2\beta^2}{2(\alpha^2+\beta^2)} = (a-1)$$

Az előbb azt találtuk, hogy

$$\alpha^2 = \frac{(a-1)}{F} \text{ illetve } \beta^2 = \frac{(a-1)}{(1/2 - F)}$$

Az első egyenletből

$$F = \frac{(a-1)}{\alpha^2}$$

ezt az értéket a második egyenletbe helyettesítve:

$$\beta^2 = \frac{(a-1)}{\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{a-1}{\alpha^2}\right)\right)}$$

$$\beta^2 = \frac{2\alpha^2(a-1)}{\alpha^2 - 2(a-1)}$$

$$\alpha^2\beta^2 = 2\alpha^2(a-1) + 2\beta^2(a-1) \text{ és igy } (a-1) = \frac{\alpha^2\beta^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}$$

amivel tehát kimutattak, hogy *a lineármodulusnak az egységtől való eltérését tényleg a 45⁰-os radius vektor fél mérőszámának négyzete szigoruan adja.*

Gyakorlati megjegyzések.

Nagyon jogos most az a kérdés, nem ajánlatos-e Magyarország *„kis méretarányú"* térképeit, melyek *szükségképpen egyetlen síkon kell, hogy ábrázolják az országot* és nem geodéziai mérések, hanem interpollálásnak közvetetlen eredményei, az imént nevezett legkisebb össztorzulású vetület egyenletrendszerei alapján készittetni?

Erre a kérdésre igen könnyű válaszolni:

a) Bizonyos, hogy Magyarországot alak és területhűségre egyaránt és egyszerre — ami pedig *itt fontos szempont* — semmiféle más vetítési móddal ily eszményi jól és *egyetlen* síkon nem lehet ábrázolni.

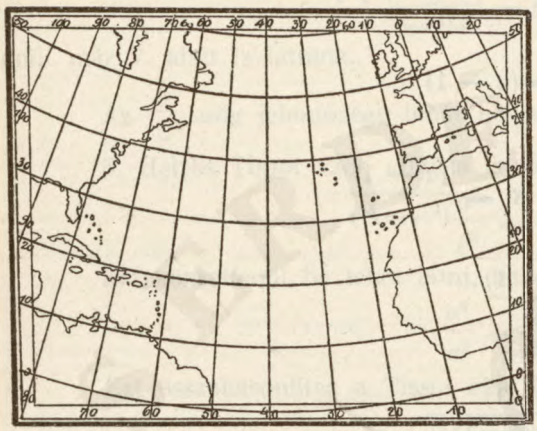
b) Bizonyos azonban az is, hogy *a fokhálózat geometriai szerkesztése lehetetlen,* sőt a számítás alapján való megrajzolása is roppant munkát igényel, mert a fokhálózat mindkét görbe serege *magasabbrendü* görbékből állana.

c) Bizonyos az is, hogy ez okból a φ, λ interpollálás is nehézkes és nem kellemes művelet.

Tissot az ő kompenzativ vetületének ezt a két *fogyatékosságát* — jobban mondva szépséghibáját — belátta és azért az olyan országokra, amelyek egy parallelkörhöz mondhatni szimmetrikusan helyezkednek el, aminek ismertető jele, hogy a főhatárellipszis γ hajlásszöge (57. ábra.) a 0⁰-hoz közeledik, azt ajánlja, hogy ez esetben nem egy pontra φ_0, λ_0, *hanem ezen közép parallelkör összes pontjaira követeljük a nulla össztorzulást,* továbbá azt, hogy a *parallelkörök képei ismét körök, a meridiánok képei* pedig a körök közös

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

központjából sugarakként induló *egyenesek legyenek:* és kimutatja, hogy ekkor módunkban van még mindig úgy választani a *projekcióbeli koncentrikus körök sugarait* szolgáltató egyenletet, hogy a vetület *csak másodrendü kicsiny (elsőrendü most s) szög és hossztorzulásokat eredményez.* (58. ábra.)



58. ábra.

Minthogy Magyarország esetében a főhatárellipszis γ szöge tényleg kicsiny és mivel ezen vetület hálózata mértanilag rendkivül egyszerüen megszerkeszthető, össztorzulásai is kisebbek akármelyik eddig ismert vagy használt térképvetületnél, egyszóval minden tekintetben az *ideálja* a „kis méretarányú térképnek", nagyon melegen ajánlom iskolai fali és atlasztérképek, valamint megyei és közigazgatási és földmivelésügyi stb. térképek készitésére.

Mily kis lineár- és területtorzulásokat ad ez az egyszerüen előállitható vetület azt mutatja ez a táblázat, ahol Magyarország ábrázolására közép parallelül a $\varphi = 47^0$ szélességet tételeztem fel:

φ	a	$\frac{dF}{df} = ab$	Jegyzet
49^0	$1{\cdot}000612$	$1{\cdot}0012$	Mivel a fokhálózat két orthogonál görbe seregből áll, az indikatricok tengelyei a fokhálózati érintők lesznek. A legnagyobb első redukció = 12'' Magyarország határain.
48^0	$1{\cdot}000152$	$1{\cdot}0003$	
47^0	$1{\cdot}000000$	$1{\cdot}0000$	
46^0	$1{\cdot}000151$	$1{\cdot}0003$	
45^0	$1{\cdot}000604$	$1{\cdot}0012$	

E térkép szerkesztése, illetve a fokhálózat előállitása röviden ez:

a) Egy vertikális vonal a papiron ábrázolja a középmeridiánt, pl. Magyarországnál $\lambda_0 = 20^0\ 30'$ Gren.

b). Ezen felveszünk, de a lapon kívül egy pontot, (C) ez legyen a meridián sugárkéve csúcspontja.

c) Megrajzolom a $\varphi_0 = 47^0$ parallelkör képét:

$$\text{sugara } \varrho_0 = r_0 \sin \varphi_0$$

ahol $r_0 = a\ 47^0$-nyi parallelkör sugara $\doteq R \cos \varphi_0$, és R a gömb sugara.

d) Rárakom ezen C körül ϱ_0 sugárral leirt körre — a középmeridiánvonaltól jobbra és balra folytatólagosan — a 47-ik szélességi fokot:

$$1^0 \equiv (R \cos \varphi_0) \left(\frac{\pi}{180}\right)$$

e) Ezen osztáspontok C-vel összekötve adják a meridián sugárkévét.

f) A többi parallelkörök sugarait ($\varrho\varphi$ a sugár, C a központ) ezen Tissot által megadott képlettel számitjuk most már:

$$\varrho = \varrho_0 \mp s \pm \frac{s^3}{6\,R^2}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A felső sorba irt előjelek $\varphi > \varphi_0$, az alsó sorba irt előjelek a $\varphi < \varphi_0$ parallelkörökre használandók; s mindig pozitiv előjellel veendő:

$$s = R \mid \varphi - \varphi^0 \mid$$

Ha nem a gömböt, hanem az ellipszoidot tekintjük alapfelületnek, úgy az s számitásához szükséges R_φ meridionális görbületi sugarakat Rehm (k. u. k. Mittheil. III.) táblájából vehetjük.

g) A fokhálózatot számozva az 1:200000 méretü polieder vetületü katonai térképekből kivehető φ, λ geografiai koordináták segélyével tisztán lineáris interpolálással rakható fel minden magyarországi pont.

Hartel ezredes („Ausztria-Magyarországra" $\varphi_0 = 47^0$) ki is számitotta a fokhálózati metszéspontok x, y derékszögü sikrendezőit a *természetes* (1 : 1) méretekben, úgy hogy a magyar térképészeti intézetek minden koordinata transformatio nélkül kész mérőszámokat kaphatnak oly nagyméretü (több lapu) térképekhez is, melyeknél a fokhálózat az ismertetett polaris koordinata módszerrel — tehát szerkesztéssel — nem volna foganatositható.

A katonai földrajzi intézet azonban legújabb kis méretarányú közhasznu és sztratégiai térképkiadványait már az Albers-féle *területtartó* vetületben készíti. (L. e kötet 151. és a III. kötet 161. oldalán.)

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

II. Rész.

Az országos felmérésekkel kapcsolatos astronomiai mérések.

I. FEJEZET.

A látszólagos éggömb különböző koordinátarendszerei.

I. §. Alapfogalmak.

A sphärikus astronomiában az égitesteket a látszólagos éggömbön levőknek tekintjük és helyeiket e gömbön **bizonyos legnagyobb gömbi körökre** vonatkozó sphärikus összrendezők segélyével definiáljuk. Mindenekelőtt tehát meg kell ismerkedni ezen legnagyobb gömbi körökkel, amelyeknek síkjai a különböző égi összrendezői rendszereknek alapsíkjai.

Az égitestek ezen összrendezői között vannak olyanok, amelyek az éggömb látszólagos napi forgásától függetlenek és olyanok, amelyeknek alapsikjai a napi forgásban nem vesznek részt. *Ez utóbbi esetben az illető égitest összrendezői folyton változnak.*

Minthogy azonban a csillagok (égitestek) ezen látszólagos általános mozgáson kivül még más, sokkal lassúbb mozgásokat is mutatnak, azért még azon összrendezőik sem tekinthetők hosszabb időn át állandóknak, amelyek a földi napi forgástól (mozgástól) független összrendezői rendszerekre vonatkoznak.

Ez az oka annak, hogy sohasem lesz elegendő valamely égitestnek *csak a helyét* megadni: meg kell még adni azt az *időpontot* is, amely ezen helyhez (összrendezőkhöz) tartozik.

Ezért az *idő* fogalmának és az *időmeghatározás* müveletének nagy szerepe van minden oly mérésnél, amely égitestekkel van összefüggésben.

Az észlelési hely „O“ helyi vertikálisának a *látható* égi félgömbbel való metszéspontját az illető hely *zenitjének*, a másik félgömbbel való metszéspontját pedig az illető hely *nadirjának* nevezzük.

Az a szög, melyet az észlelési helyről egy *csillagra* menő egyenes iránysugár a zenit-nadir vonallal bezár (számitva a zenittől), nevezzük az illető csillag *zenittávolságának*. Kivéve a napot, holdat és bolygókat, az összes álló csillagokra nézve ez a szög egyenlő azzal a szöggel, melyet a *föld* (és éggömb) központjába eltolt helyi vertikális irány a központból az illető csillagra menő gömbi sugárral bezár.*)

Az észlelő szemén át a helyi vertikálisra merőlegesen képzelt síkot nevezzük az illető hely *látszólagos horizontjának*; ezt parallel eltólva képzelve a föld és éggömb közös

*) Az állócsillagok ugyanis úgy a föld méreteihez, mint a földi pálya méreteihez képest *végtelen* nagy távolságban vannak tőlünk.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

központjába kapjuk az ugynevezett *valódi horizontot*, amely az éggömböt egy legnagyobb gömbi körben metszi.*)

Mesterséges horizontnak nevezzük a néző szemmagasságában nyugvó folyadék felszint vagy vizszintes tükröt.

A föld központján és a *zenit-nadir* pontokon átmenő legnagyobb éggömbi köröket *„vertikálköröknek“* nevezzük.

Sarkmagasságnak nevezzük azt a szöget, amelyet a földi forgási tengely az illető hely valódi horizontjával bezár.

A földi forgási tengely az égi gömböt a két világpolusban metszi.**) A *sarkmagasság tehát a világpolus zenittávolságát 90°-ra kiegészíti.*

A szög, melyet egy csillaghoz tartozó helyi *vertikálkör a helyi meridiánnal* bezár: neveztetik az illető csillag *pillanatnyi azimutjának.*

Képzeljünk el valamely földfelületi pontban („O“) egy a *földi forgási tengelyre merőleges* egyenest. A föld forgása és az éggömb relative végtelen nagy sugara miatt ez az egyenes vonal az égi gömbön az előbb emlitett polusoknak *aequator körét* metszi ki (világekvátor).

A csillagok az égi gömbön ezen ekvátor-körrel parallel körökben látszanak mozogni. Ezért és mert a világtengely (forgástengely) a horizonttal az illető hely földrajzi szélességét zárja be, világos, hogy mindazon csillagok, melyeknek a látható polustól való éggömbi szög (iv)-távolsága kisebb vagy egyenlő az illető hely földrajzi szélességével: azok éjjel-nappal *mindig a horizont felett* látszanak mozogni; mig a többi csillagok *kelnek* és a helyi horizont alá lenyugodnak és közben *keletről nyugat felé* egymással parallel körökön mozognak. És mindazon csillagok, amelyeknek *sarktávolságuk* egyenlő az illető hely földrajzi szélességének 90°-ra való kiegészitésével: azok az illető hely zenitjén mennek át naponta.

A világpolusokon és a helyi zenit ponton átmenő legnagyobb éggömbi kört a helyi meridián körnek nevezzük. Ennek *két felét* kell megkülönböztetni. A *látható* polustól a helyi zeniten át menő félkört I. résznek nevezzük; ha egy csillag ezen részen halad át, akkor azt mondjuk: a *csillag felső kulminációban van.* Alsó kulminációnál a II. félkörön halad át.

Mindazon csillagok tehát, amelyeknek gömbi távola a *láthatatlan* világpolustól nagyobb mint az illető hely földrajzi szélessége: azok az illető hélyről *„felső kulminációban“* láthatók; viszont alsó kulminacióban csakis azon csillagok láthatók, amelyeknek a *látható* világpolustól való gömbi távola *kisebb*, mint az illető hely földrajzi szélessége.

Például egy $\varphi = 47°$ (északi szélesség) helyről alsókulminációban csak azok a csillagok *láthatók*, amelyek az északi polustól 47°-nál kisebb szögtávolban keringenek; felsőkulminációban azonban az összes $180° - 47° = 133°$-nál kisebb sarktávolságban keringők láthatók.

A helyi égi meridiánnak a látható polus és a horizont közti ive (szögben) *sarkmagasságnak* neveztetik; a meridiánnak a *horizont* és az ekvator-kör közötti szögét pedig *aequatormagasságnak* nevezzük. E definiciók szerint:

$$\textit{sarkmagasság} + \textit{ekvatormagasság} = 90°.$$

---

*) *Természetes* horizont alatt azt a kört értjük, melyben a nézősugarak a földgömböt érintik.

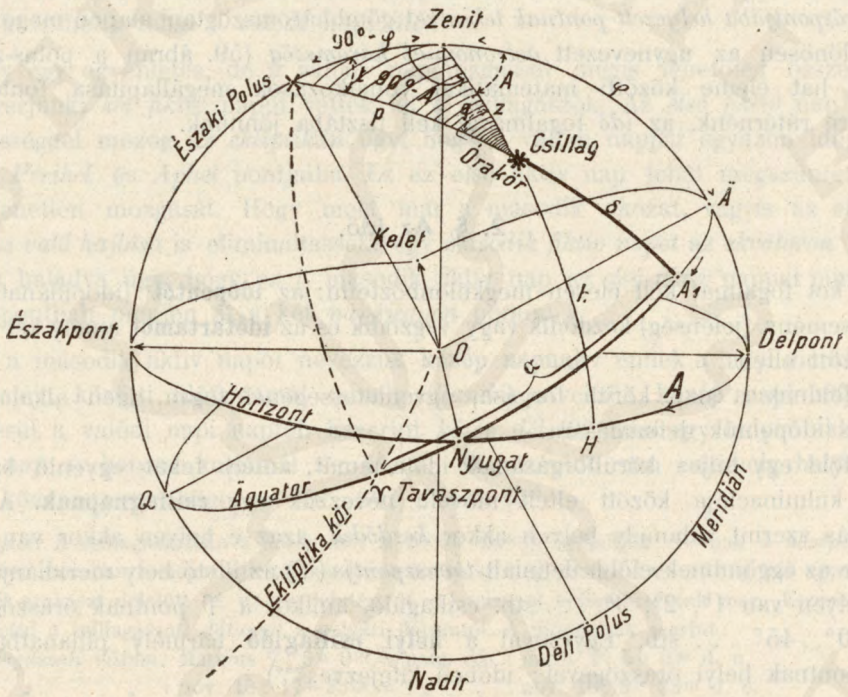
**) Az északi földgömbről látható polust *északi-*, a másikat *déli* világpolusnak nevezzük. Ez az éggömbnek egyetlen két pontja, amely mindig mozdulatlannak látszik. Pontosan a polusban ezidőszerint nincs csillag; legközelebb van az északi polushoz (krb. $1^1/_2°$-nyira) a kis medve csillagkép utolsó farkcsillaga amelyet *„poláris csillagnak“* nevezünk. (α Ursae minoris).

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Valamely csillag *mozgó koordinátáinak* (59. ábra) nevezzük a horizontra és a helyi meridiánsíkra vonatkoztatott pillanatnyi h magasságot (amely = 90° — zenittávolság) és A azimutot.

Valamely csillag *ekvatoriális* koordinátáinak nevezzük az illető csillagnak az *ekvatorra* és a két poluson átmenő *órakörökre* vonatkoztatott összrendezőit: δ deklináció, és t óraszög.

Ugyanis a két világpoluson (forgási tengelyen) átmenő síkok által az éggömbön kimetszett legnagyobb gömbi köröket *órakröknek nevezzük.* Kezdő órakör a *meridiánnak* nevezett órakör (a *zenit* óraköre). Valamely csillagon átmenő órakörnek a meridiánnal bezárt szöge az illető csillag momentán óraszöge t és a csillag órakörének az *ekvatortól a csillagig* terjedő íve a csillag *deklinációja: δ.*



59. ábra.

Mivel az álló csillagok látszólagos mozgása az ekvatorral parallel égi körökön történik, az álló csillagokra nézve δ = konstáns.

A helyi *égi meridiánkörnek* a valódi égi horizontkörrel való két metszéspontja neveztetik *déli* és *északi* pontoknak; az égi ekvatorkörnek az égi horizontkörrel való metszéspontjai pedig neveztetnek *keleti* és *nyugati* pontoknak.

Az *azimutokat* a *déli* pontból mérjük nyugat felé a horizont körön.

A föld pályájának síkja neveztetik az *ekliptika síkjának.* Ez a sík a végtelen sugaru éggömböt egy *körben* metszi, amely kör az *ekliptika körnek* neveztetik. (59. ábra.)

Ezen körön végzi a nap az ő látszólagos évi *saját mozgását*)* az általános forgási iránnyal (keletről — délen át — nyugatra) ellenkező értelemben. Ezen égi *ekliptika körnek* az égi *ekvator* körrel való két metszéspontja neveztetnek **„napéjegyen pontoknak“.**

Amikor ugyanis a nap tavasz kezdetén (március 21) és nyár végén e két pontban jelenik meg akkor az éjjel és a nappal egyenlő időtartamu.

---

*) Nyugatról délen át kelet felé naponta mintegy 1°-al tolódik el a nap az ekliptika körön. Ennek oka a földnek az ekliptika sikjában való haladása.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ezen két pont közül a *tavaszi napéjegyen* pont, amely a kos csillagképbe esik ezidőszerint és amelyet röviden *„kospontnak"* nevezünk (jelzése ♈) égi meridiánját az óraszögek kezdő meridiánjának választva: valamely csillag órakörének ezen órakörrel bezárt szögét *Rektascenciónak* (jelzése α vagy *A. R.*) nevezzük.

Az ugynezett állócsillagokra nézve a *rektascensió*, miként a *deklináció*: állandó, azaz az időtől illetve a föld forgásától független értékeknek tekinthetők lényegileg. *)

A saját mozgással biró égitestekre (hold, nap, bolygók, üstökösök) nézve α és δ értékek az időpont (dátum és óra) függvényei.

A csillagászati évkönyvek az égitestek egy nagy részére megadják évekre előremenőleg a δ és α értékeket és ezen értékek változásait.

Első közelitésben mindennemü csillagászati számitást az 59. ábra szerint, *(a földet az éggömb központjába helyezett pontnak tekintve)* gömbháromszögtani alapon megoldhatunk.**)

Különösen az ugynevezett *astronomiai háromszög* (59. ábrán a polus-zenit-csillag háromszög) hat eleme közötti matematikai vonatkozások megállapitása fontos. Mielőtt azonban erre rátérnénk, az *idő* fogalmával kell tisztába jönnünk.

2. §. Az idő.

Itt két fogalmat kell élesen megkülönböztetni: az **időpontot** (időpillanatot), amikor valamely esemény (jelenség) kezdődik vagy végződik és az **időtartamot** amely két tetszőleges időpont között eltelt.

A földnek a nap körüli forgása, egyenletességénél fogva, igen alkalmas az idő mérésére és időpontok definiálására.

A föld egy teljes körülforgásának időtartamát, amely tehát egyenlő bármely *álló csillag* két kulminációja között eltelt idővel: nevezzük egy **csillagnapnak.** A csillagnap megállapodás szerint valamely helyen akkor *kezdődik,* azaz e helyen akkor van 0^h csillagidő, amikor az éggömbnek előbb definiált *tavaszpontja* (♈) az illető hely meridiánján áthalad. Tehát e helyen van 1^h, 2^h, 3^h, . . . stb. csillagidő, amikor a ♈ pontnak óraszöge e helyen $= 15°$, $30°$, $45°$ . . . stb. Egyszóval a **helyi csillagidő** bármely pillanatban egyenlő a tavaszi pontnak helyi óraszögével: időben kifejezve. ***)

A polgári életben azonban, amely a nappal és éjjel szerint rendezkedett be, a napot kellett időszabályozóul választani. És pedig az az időtartam, mely a napnak két *egymást követő kulminációja* között telt el, neveztetik egy *valódi napnak. Valódi* dél, vagyis 0^h valódi napi idő van valamely helyen abban a pillanatban, amidőn a *napkorong központja* az illető

---

*) A δ és α értékekre befolyással biró zavaró körülményekről *(precessió, nutatió)*, valamint a föld illetve a föld pályájának nagy méreteiből eredő *parallaktikus* hibából, ugyszintén a sugártörésből származó *refrakció* hibáról és végül a fény véges sebességéből eredő *aberració* hibáról részletesen fogunk megemlékezni.

) Itt rá kell mutatni arra, hogy *elméletileg* véve egy teodolittal, amelynek forgástengelye *függőleges* bármely csillagra nézve *közvetlenül* mérhetők az **A és **z** koordináták; viszont oly teodolitszerü műszerrel, melynek forgástengelye párhuzamos a *föld forgási* tengelyével (és limbusa parallel az ekvátorral) a δ és t sphärikus összrendezőket mérhetjük közvetlenül. Tényleg azonban az igy nyert értékek igen sokféle korrekcióknak lesznek alávetendők amiről lesz szó.

***) A szögnek időben való kifejezésénél tudni kell, hogy $360° = 24.^h$,

azaz $1°$ ív $= 4^m$ idő és 1^h idő $= 15°$ ív

$1'$ ív $= 3^s$ „ 1^m „ $= 15'$ ív

$1''$ ív $= 1/15^s$ „ 1^s „ $= 15''$ ív

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

hely meridiánján áthalad. Valamely helyen, valamely időpontban tehát a *valódi idő* egyenlő a napnak e pillanatbeli óraösszegével: időben kifejezve.

Jegyzet: Március 21-én a nap átmegy a többször említett tavaszponton (♈); e napon tehát a nap és a tavaszpont közel ugyanabban a pillanatban kulminálnak bármely helyen. **E napon** tehát a 0^h csillagidő közel ugyanakkor van, amikor 0^h a *valódi napi idő*. Minthogy azonban a nap az ekliptika körön naponta közel 1°-al nyugatról-keletre tolódik el, azért március 22-én már közel 4^m-al előbb fog a tavaszpont kulminálni mint a nap, március 23-án pedig már közel 8^m-al előbb lesz csillagidő szerint 0^h mint valódi napi idő szerint stb. Ebből az következik, hogy a csillagnap kezdete (0^h csillagidő) egy év folyamán 4^m-ról 4^m-ra haladva a *napi napnak* (valódi napnak) összes óráit átfutja. *Ebben van az oka annak*, amiért a polgári élet a csillagnap szerinti időmérést nem fogadhatta el.

A *valódi napi időnek* az a nagy hátránya van, hogy *a valódi nap nem egyenlő időtartamu.*)* Időmérő mechanismusaink (ingaórák, chronometerek) egyenletes járásuak lévén, nem követhetik tehát a *valódi napi időt.*

Hogy egy egyenletes, de a valódi napmozgással mégis lehetőleg összefüggő időmértéket nyerjünk: *két fiktiv* napot vettek fel a csillagászok. Az *első fiktiv* nap egyenletes haladó sebességgel mozog az *ekliptikán* úgy, hogy a valódi nappal egyazon időponttal jut az ekliptika *Perihel* és *Aphel* pontjaiba. Ez az első fiktiv nap tehát megszünteti a valódi napnak egyenetlen mozgását. Hogy most már a második okozat, vagyis az ekliptikának az *ekvatorhoz való hajlása* is eliminálttassék: egy *második fiktiv napot* az *ekvátoron* képzeljünk egyenletesen haladva úgy. hogy ez a második fiktiv nap az *első fiktiv* nappal minden évben egyazon időpontban menjen át a két *napéjegyen* ponton.

Ezt a második fiktiv napot nevezzük **közép napnak:** ennek a helyi meridiánon való két kulminációja közötti időtartamát (amely *állandó*) nevezzük **közép napi napnak** megkülönböztetésül a valódi napi naptól. Eszerint *közép dél* (0^h) van egy helyen akkor, amikor ez a *közép nap* e helyen kulminál és 1^h, 2^h, 3^h középidő van valamely helyen, amikor e helyen a középnap óraszöge = 15°, 30° illetve 45°.

Jegyzet: A csillagászatban a *közép időt* is 0^h-tól 24^h-ig számítják: 0^h-nak a *középdélt* tekintve. A polgári életben azonban a napot éjféltől kezdve számítjuk, még pedig 0^h-tól 12^h-ig két egyenlő szakaszban, amely két szakaszt délelőtt *(d. e.)* és délután *(d. u.)* jelzővel különböztetünk meg. Eszerint tehát meg kell különböztetni a csillagászati *dátumot* a polgári dátumtól. A mondottak szerint:

csillagászati dátum: Március 7; $5^h\ 0^m$ = polg. dát.: márc. 7; $5^h\ 0^m$ d. u.
„ „ : nov. 15; $17^h\ 23^m$ = „ „ nov. 16; $5^h\ 23^m$ d. e.
polgári „ : jul. 3; 7^h d. e. = csill. dat. jul. 2; 19^h
„ „ : jul. 3; 7^h d. u. = „ „ jul. 3; 7^h.

Az egyszerű szabály itt: „az astronomiai nap dátuma mindig a reá eső polgári nap délutánjának dátumával egyezik.“ A csillagászati évkönyvekben a csillagászati dátumok szerepelnek.

Helyi idő alatt tehát vagy *helyi csillagidőt*, vagy *helyi középidőt*, vagy *helyi valódi időt* érthetünk aszerint amint a tavaszpontnak, vagy a középnapnak vagy a valódi napnak helyi óraszögét használjuk az idő megadására. Minthogy mindazon pontoknak, melyek *a földön egy meridián alatt* feküsznek. az égi gömbön is ugyanaz a meridiánkör felel meg: azért e pontokban egyazon időpillanatban *ugyanaz a helyi idő.*

Két különböző földi meridián alatt fekvő pontban azonban egyazon pillanatban

---

*) Ez közvetlenül abban nyilvánul, hogy a valódi napnak a *rektascensiója* folyton változik, még pedig *egyenetlenül.* (A valódi nap rektascensiói bármely időpontra a csillagászati évkönyvekben megtalálható.) E folytonos és egyenetlen rektascensió változásnak két oka van. Első ok, hogy a föld *egyenetlen haladó sebességgel* mozog egy elliptikus pályán (Keppler-törvény), amelynek fokusában van a nap; második ok az ekliptikának az ekvatorhoz való hajlása. Leggyorsabb a föld haladó mozgása, amikor legközelebb van a naphoz *(Perihel)* és legkisebb a haladása, amikor legtávolabb van a föld a naptól. *(Aphel.)*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

a *helyi időnek* egymástól való eltérése = a két hely földrajzi hosszúság különbségével.*) A föld forgási irányából kifolyólag pedig következik, hogy két földi pont között a keleti pontnak helyi ideje a nyugatibb pont helyi idejéhez képest a hosszuság különbséggel előbbre van.

Számpéldák.

1. Adva *bécsi* helyi idő: junius 24, $5^h\ 32^m\ 28^s7$, kerestetik e pillanatnak megfelelő *berlini* helyi idő. Mivel *Berlin*—Bécstől $l = 2°\ 59'\ 6'' = 0^h\ 11^m\ 56^s4$ hosszúsággal *nyugatra* fekszik, azért a megfelelő berlini helyi idő = junius 24, $5^h\ 20^m\ 32^s3$.

2. Adva Washington, február 7, $22^h\ 12^m\ 17^s$; kerestetik Greenwich megfelelő helyi ideje. Greenwich *keletre* fekszik Washingtontól $l = 5^h\ 8^m\ 12^s0$, amiért is a megfelelő greenwichi idő = február 8; $3^h\ 20^m\ 29^s$.

3. Ha *Szent-Pétervároń* van $7^h\ 5^m\ 10^s$ helyi idő, mennyi akkor a helyi idő *Washingtonban?*

A csillagászati évkönyv szerint:

Szentpétervár Greenwichtől keletre van $l = 2^h\ 1^m\ 13^s5$-val
Washington „ nyugatra „ $l = 5^h\ 8^m\ 12^s0$-val

tehát hosszkülönbség Szentpétervártól számitva = $7^h\ 9^m\ 25^s5$ (nyugati)
és igy Washingtoni idő = $23^h\ 55^m\ 44^s5$.

Amint e példákból is látszik, e számitásnál **helyi idő alatt akár csillagidőt, akár középidőt, akár valódi időt értünk,** az eljárás mindig csak az, hogy a fok, perc, másodpercekben megadott *l*-et *15-el* elosztva kell + vagy — előjellel hozzáadni az adott helyi időhöz. **)

Az itt adott időpontátszámitás igen gyakori. Ugyanis a csillagászati évkönyvek (Berliner Astronomisches Jahrbuch, Nautical Almanac stb.) az égitesteknek az időtől függő összrendezőit és más nagyságait az évkönyvet kiadó csillagda *valódi déli* vagy *középdéli* időpontjára vonatkoztatják. Ha tehát ily könyvből egy más helynek (*észlelési* hely) bizonyos helyi időpontjára nézve akarjuk az *ephemeridákat* kiszedni: *akkor mindenekelőtt a szóban forgó észlelési helyi időpontnak megfelelő csillagdai helyi időpontot, kell az imént ismertetett módon kiszámitani és az ezen időpontnak megfelelő ephemeridákat az évkönyvből kikeresni.*

Például tudni akarom, hogy május 5-én Budapesten *valódi* délben mi a napnak deklinációja stb. Akkor először kiszámitom, hogy a budapesti valódi délidő pillanatában mi a berlini helyi idő és ehhez az időponthoz keresem a berliner Jahrbuchban a nap deklinációját.

Valódi időnek középidőre való átalakitása és viszont.

A helyi valódi idő a *valódi napnak* helyi óraszögét (t_0) jelentvén, a közép idő pedig a képzelt *közép napnak* óraszögét (t_k) jelentvén: a momentán óraszög különbség egyenlő a valódi és a középidő közti különbséggel. Azaz:

$$t_k \text{ (fokokban)} - t_0 \text{ (fokokban)} = E \text{ (fokokban)}.$$

Ezen E értéket „*időegyenletnek*“ nevezzük és órákban, percekben és másodpercekben fejezzük ki, azaz:

$$E = \frac{t_k \text{ (fok.)} - t_0 \text{ (fok.)}}{15} = K - V.$$

*) Ezen a tételen alapszik azután a telegráfikus uton való földrajzi hosszúság-különbségek szabatos mérése is.

**) Ez abban leli magyarázatát, hogy idő alatt „*óraszöget*“ értünk és hogy ugyanabban a pillanatban akár a kospont, akár a nap, akár a középnap óraszöge az A és a B helyen az A és B hosszúság-különbségével különböznek.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Eszerint tehát ismerve valamely pillanatban az E értékét és e pillanatban a középidő (K) értékét, akkor a *valódi időt* (V) adja a

$$V = K - E,$$ és viszont ha ismerjük egy bizonyos helyi V időpontnak megfelelő E-t, akkor e pillanatban a középidő

$$K = V + E.$$

Az E időegyenlet értéke minden pillanatban egyenlő a valódi nap és az ekvatoron futó középnek rektascensió különbségével. Az E értékei napról-napra változnak, *de a nevezett csillagászati évkönyvekben az év minden egyes napjának bizonyos időpontjaira nézve pontosan meg vannak adva az E értékek, amelyek alapján aztán a föld bármely helyére és bármely időpontjára nézve lehet a helyi középidőből a helyi valódi időt és viszont kiszámítani.**)

Néhány példa teljesen meg fog minket tanítani ezen gyakori számítás végrehajtására.

1. Adva: 1868. márc. 15, $4^h\ 42^m\ 23.^s78$ valódi bécsi idő; kerestetik ezen időpontnak megfelelő bécsi középidő.

Mindenekelőtt az adott időpillanatnak megfelelő *Berlini* valódi időt kell kiszámítani ha az E-t a „*Berliner A. Jahr*"-ból akarjuk kivenni:

Valódi bécsi idő $= 4^h\ 42^m\ 23.^s78$

Hosszkülönbség $\quad -\ 11\ \ 56.40$

valódi berlini idő $= 4^h\ 30^m\ 27.38 = 4.^h\ 508.$

A nevezett évkönyvben megtaláljuk az időegyenlet értékeket a *valódi berlini déli* időpontokra:

márc. 15-én 0^h valódi berl. időre $E = +\ 8^m\ 57.^s17$ I. dif. } $-\ 17.^s35$ II. dif.

„ 16-án „ „ „ „ $E = +\ 8\ 39.82$ } $-\ 0.^s19$ } $-\ 17.54$

„ 17-én „ „ „ „ $E = +\ 8\ 22.28$

Amint itt megtettük, képezni kell tehát az időegyenleti értékek I. és II. differenciáit**) és ezek figyelembevételével $4^h\ 508$ valódi berlini időre megtaláljuk, így az

$$E = +\ 8^m\ 53.^s93$$ értéket.

Eszerint tehát az adott valódi

$4^h\ 42^m\ 23.^s78$ bécsi időben

az időegyenlet $+\ 8^m\ 53.^s93$ lévén:

a keresett bécsi középidő $= 4^h\ 51^m\ 17.^s71$

2. *Adva:* 1868. március 15., $4^h\ 51^m\ 17.^s71$ bécsi középidő; kerestetik a megfelelő *bécsi valódi idő.* Ismét a berlini évkönyvet használva, mindenekelőtt a Berlin—Bécs hosszkülönbséget alkalmazva, a megfelelő *berlini* **középidő** $= 4^h\ 39^m\ 21.^s31.$

---

*) Az E értéke évente négyszer (ápr. 15; jun. 14; aug. 31. és dec. 24-én) $= 0$ és ennek megfelelőleg évente négy maximuma van az E-nek, amelyek azonban különböző absolut értékűek és különböző előjelűek:

$+14^m\ 31^s$	$-3^m\ 53^s$	$+6^m\ 12^s$	$-16^m\ 18^s$
(febr. 12.)	(máj. 14.)	(jul. 26.)	(nov. 18.)

Fontos az E változása egy napon belül. A két legnagyobb napi változás értékei: december 23-án $+30^s$, és szeptember 17-én -21^s. Ezért ha az E értékét nem azon időpontra óhajtják, amelyre nézve azt az évkönyv megadja, úgy éles interpollálással nyerhetjük tehát csak az éles E értéket.

**) Itt a II. differenciát az E képzésénél a gyakorlatban nem kell figyelembe venni, mert legfeljebb e II. diff. $^1/_8$ részét hanyagoljuk el egyszerű interpollálással. Igy a jelen esetben is csak az I. diff.-át véve figyelembe, azaz a $24^h : 17.^s35 = 4^h\ 508 : x$ arány szerint számítva az $x = -\ 3.^s26$ értékre jutunk, aminek az $E = +\ 8^m\ 52.^s91$ érték felel meg, amely $0.^s02$-ra egyezik a fenti szigorú értékkel.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Minthogy a berlini évkönyv az időegyenlet értékét azonban a **valódi** berlini déli időpontra adja csak (nem a középdélire), azért mindenekelőtt a valódi berlini idő közelítő értékét állítjuk elő azáltal, hogy a levezetett berlini középidőből kivonjuk (azaz ellenkező előjellel adjuk) a márc. 15, 0^h -nak megfelelő E-t:

$$4^h\ 39^m\ 21.^s31 - 8^m\ 57.^s17 = 4^h\ 30^m\ 24^s$$
$$= 4.^h\ 507$$

Ezen nem *egészen* szigorú berlini valódi időhöz interpoláljuk az E-t $= +\ 8^m\ 53.^s93$ és azt kivonva az adott bécsi középidőből:

$$4^h\ 51^m\ 17.^s71$$
$$-\quad 8\ \ 53.\ 93,$$

nyerjük a keresett bécsi valódi időt $=\ 4^h\ 42^m\ 23.^s78$, amely szigorúan egyezik az előbbi példa kiinduló értékével.

Jegyzet: A 2. feladat megoldása a „*Nautical Almanach*"-al egészen az 1. feladat módjára eszközölhető, mert abban az E értékek a **valódi** délre és a **közép délre** (greenwichi) vannak közölve. A berlini évkönyv ujabban a közép délre adja az E értéket.

Csillagidőnek középidőre való átalakítása és viszont. *)

E célból a csillagászati évkönyvek tartalmazzák a kiadó csillagda meridiánjára vonatkoztatva az *év minden napjára a középdél időpontjának* (amikor a *közép* nap kulminál) megfelelő csillagászati időt: Θ_0.

Azaz az év minden egyes napjára nézve ott ki van írva a tavaszi pont helyi óraszöge arra a pillanatra, amidőn a *középnap* kulminál a kiadó csillagda meridiánján.

Ez a Θ_0 érték azonban egymaga még nem elegendő e feladat megoldására azért, mert a középnapi nap nem egyenlő hosszú időtartamú a csillagnappal és így egy időtartamnak, amelynek hossza például pontosan *négy középidő óra* ugyanez az időtartam nem pontosan négy óra csillagidőben mérve. Szóval a jelen feladatnál a Θ_0 és a csillagdai meridiántól való l földrajzi hosszkülönbségen kívül **időtartamoknak a kétféle óra egység szerinti átszámítását** is kell figyelembe venni. A kétféle idő egység között a szigorú vonatkozás a következő módon vezethető le.

Tropikus év alatt azt az időtartamot értjük, amely a napnak a tavaszponton való két egymásutáni átmenete között telik el. Ennek hossza a csillagászok számítása szerint

$$= 365.242201 \text{ közép napi nap.}$$

Ezen idő alatt a képzelt közép nap nyugatról-keletre az egész aequatort egyszer teljesen átfutotta, tehát a *tavaszponthoz képest bármely meridiánra nézve egy teljes kulminációt vesztett.* Ezért a tropikus év pontosan egy csillagnappal több csillagnapot tartalmaz, mint közép napi napot. Eszerint tehát

$$366.242201 \text{ csillagnap} = 365.242201 \text{ közép napi nap.}$$

És ebből a szigorú vonatkozásból következik, hogy:

$$1 \text{ csillagnap} = \frac{365.242201}{366.242201} \text{ közép napi nap.}$$

$$\text{azaz } 1 \text{ „} = (24^h - 3^m\ 55.^s909) \text{ közép napi nap;}$$

$$\text{viszont } 1 \text{ közép napi nap} = \frac{366.242201}{365.242201} \text{ csillag nap.}$$

$$\text{azaz } 1 \text{ „ „ „} = (24^h + 3^m\ 56.^s555) \text{ csillagidő.}$$

*) Csillagidőnek **valódi** időre való átszámítását nem tárgyaljuk itt külön, mert az eljárás: csillagidőről áttérni *középidőre* és abból *valódi* időre az előbbiek szerint. Hasonlólag *valódi* időről *csillagidőre* úgy jutunk, hogy valódi időről középidőre és aztán középidőről csillagidőre térünk át.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Eszerint egy *csillagidőben* megadott időtartamot kifejezhetünk középidőben, ha az adott csillagidőt

$$\frac{365.242201}{366.242201} = (1 - 0.00273043)\text{-al}$$

szorozzuk, azaz, ha az adott csillagidőtartamból minden egyes óráért

$$0.^h\ 00273043 = 9.^s83\text{-át}$$

kivonunk.

Megfordítva pedig egy középidőben megadott időintervallum csillagidőben

$$\frac{366.242201}{365.242201} = (1 + 0.00273791)\text{-el}$$

való szorzás által, vagy minden középóráért

$$0.^h\ 0027\ 3791 = 9.^s856\text{-nek hozzáadása által lesz kifejezve.}$$

Gyakorlati számításainkat azonban nem az itt közölt faktorokkal való szorzások által, hanem a csillagászati évkönyvekben, vagy a Bremicker 7-jegyű logaritmus könyvében közölt idő átszámító táblázatokkal végezzük el kényelmesebben.

Számpélda: A Bremicker 7-jegyű logaritmus könyv végén található táblázatokkal történt a számítás.

1. Adva $15^h\ 0^m\ 0^s$ időtartam csillagidőben.

A táblázatban $14^h\ 57^m\ 18^s$ csillagidőnek $2^m\ 27^s$
a maradék 2 42 „ 0.44

tehát az egész időtartamnak: $2^m\ 27.^s44$

javítás felel meg, azaz az adott időtartam $= 15^h\ 0^m\ 0^s - 2^m\ 27.^s44 = 14^h\ 57^m\ 32.^s56$ középidőben.

2. Adva $14^h\ 57^m\ 32.^s56$ időtartam csillagidőben.

A táblázatban $14^h\ 56^m\ 51^s$ k. időnek $2^m\ 27^s$
„ a maradék 2 41 „ „ 0.44

összesen $2^m\ 27.^s44$

és így csillagidőtartam $= 14^h\ 57^m\ 32.^s56$
$+\ 2\ 27.44$
$= 15^h\ 0^m\ 0.^s00$

Az eddig elmondottak alapján most már eredeti feladatunk megoldására: *helyi csillagidőpontokat* átszámítani *helyi középidőpontokra* — rátérhetünk.

Legyen Θ az észlelési helyen valamely pillanatban a helyi csillagidő*) és legyen K ugyane helyen a megfelelő középidő; **)

Θ_0' pedig jelentse az **észlelési helyen** a *helyi középdéli* pillanatnak megfelelő csillagidőt.

Akkor a helyi középdél óta eltelt *időtartam csillagidőben* kifejezve

$$= \Theta - \Theta_0'.$$

Ha ezen *időtartamot* átalakítjuk középidőre akár a táblázattal, akár az előbb adott szorzással: *ez az átalakított időtartam* ***) = a helyi középidővel:

$$K = \Theta - \Theta_0' - 9.^s83\ (\Theta - \Theta_0')$$

A kérdés most még csak az: miként nyerjük a K képletében szereplő Θ_0' értéket? A csillagászati évkönyv a kiadó csillagda (Berlin, vagy Greenwich stb.) meridiánjára nézve adja meg a középdéli pillanat csillagidejét: Θ_0-öt;****) ismeretes továbbá az észlelési hely és az évkönyvi csillagda földrajzi hosszúsága fokokban, percekben, másodpercekben ($\lambda°$). Miként nyerjük most már ezen Θ_0 és λ értékek alapján a keresett Θ_0' értéket?

*) Azaz a tavaszpont pillanatnyi helyi óraszöge.

**) Azaz a középnap helyi óraszöge ugyanezen pillanatban.

***) Mikor ugyanis a helyi csillagidő volt Θ_0', akkor a helyi középidő volt $0^h\ 0^m\ 0,^s00'$.

****) A Θ_0 nem egyéb, mint a középnapnak rektascensiója (A. R.) a közép dél (csillagdai) időpontjában.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ha a közép napi napnak rektascensiója állandó volna, akkor $\Theta_0' =$ volna Θ_0-al. Azonban e rektascensió az időben egyenletesen változik, még pedig úgy, hogy 24 óra középidőnek a fentiek szerint $24^h + 3^m\,56.^s555 = 24^h + 236.^s555$ csillagidő felel meg.

Ezért tehát a keresett

$$\Theta_0' = \Theta_0 - \frac{236.^s555}{24} \cdot \frac{\lambda^\circ}{15} = \Theta_0 - 9.^s8565\,\frac{\lambda^\circ}{15}$$

ahol a λ^0 előjele $+$, ha az észlelési hely az évkönyvi *csillagdától keletre* fekszik. Ha a $\frac{\lambda^\circ}{15} = l$ betűt használjuk, úgy a teljes képletet így írhatjuk:

$$1. \ldots\ldots\ldots \begin{cases} K = (\Theta - \Theta_0') - 9.^s83\,(\Theta - \Theta_0') \\ \text{ahol } \Theta_0' = \Theta_0 - 9.^s856\,l \end{cases}$$

Megjegyzés: E számításnál először is a Θ_0'-őt kell Θ_0 és l segítségével elvégezni. A $9.^s856\,l$ szorzás helyett az *l-et középidő időtartamnak* fogva fel a táblázatban megkeressük a megfelelő csillagidő *korrekciót*: ez lesz a $9.^s856\,l$ tag. *) Azután képezve a $\Theta - \Theta_0'$ értéket és azt csillagidő tartamnak tekintve a másik táblázatból keressük a megfelelő *középidő tartamot*. Ez lesz a $(\Theta - \Theta_0')$. $9.^s83$ érték, amely mindig kivonandó a $(\Theta - \Theta_0')$-ből. Ha $\Theta < \Theta_0'$, akkor a Θ-hoz adunk 24^h-t.

Számpélda. Adva bécsi csillagidő szerint 1868. január 17, $7^h\,5^m\,32.^s70$, kerestetik e pillanatban a bécsi helyi középidő.

1. Bécs Greenwich-től *keletre* (tehát l positiv) fekszik: $l = +\,1.^h\,5.^m\,31.^s9$, amit középidőnek fogva fel, a táblázat szerint a megfelelő csillagidő korrekció $= \mathbf{10.^s77}$, amely mivel l positiv, *negativ* előjellel adandó az évkönyvi Θ_0-hoz:

évkönyv szerint $\Theta_0 = 19^h\,44^m\,47.91$
redukció $= \quad - \qquad 10.77$
$\Theta_0' = 19^h\,44^m\,37.^s14,$
amit kivonva az adott $\Theta = \quad 7^h\;\;5\;\;32.70$-ből
lesz $(\Theta - \Theta_0') = 11^h\,20^m\,55.^s56$, a táblázat szerint ennek
a csillagidőtartamnak közép idő korrekciója $= -\;\; 1^m\,51.^s56$
Keresett Bécsi középidő $= 11^h\,19^m\;\;4.^s00$

Adva most mást valamely helyen egy időpontban a helyi középidő (K): kerestetik a megfelelő csillagidőpont. Rendelkezésre áll tehát a *helyi középdél* óta eltelt időtartam (K) középidő órákban kifejezve. Ezt az időtartamot az átváltoztató táblával, vagy $9.^s856$ K-nak hozzáadásával csillagidő órákban kifejezve: meglesz a helyi középdél óta eltelt időtartam csillagidőben kifejezve.

Ismerni kell tehát még a helyi déli időpontnak csillagidejét: Θ_0'-őt. Ezt teljesen az előbb ismertetett módon nyerjük, azaz

$$2. \ldots\ldots \begin{cases} \Theta_0' = \Theta_0 - 9.^s856\,l \text{ és így a keresett} \\ \Theta = \Theta_0' + K + 9.^s856\,K \end{cases}$$

Jegyzet: A számítás menete tehát itt a következő:

a) az adott K-t középidőtartamnak tekintve az átváltoztató táblával *csillagidőben* kifejezni ($9.^s856\,l + K$ értéke);

b) az $l = \frac{\lambda^\circ}{15}$ értéket középidőtartamnak tekintve *hozzá* a csillagidő korrekciót keresni ($9.^s856\,l$);

c) ezt az értéket a évkönyvi Θ_0-ból kivonni, ha *keletre* és hozzáadni, ha nyugatra vagyunk az évkönyvi csillagdától;

d) az *a)* és *c)* alatti két értéket összeadni.

*) Ezt a tagot Θ_0-ból ki kell vonni, ha az l előjele $+$, és hozzáadni, ha az l előjele negativ.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

3. §. Szabatos órák.

Csillagászati méréseknél az észlelés helyén vagy szabatos *ingaórát* vagy szabatos *chronometert* állítunk fel. Az ingaóra jobb járása miatt feltétlenül alkalmasabb e célokra: ha biztos, nyugodt felállítása lehetséges.

Legjobb az ingaórát erős, rázásoktól mentes falra vagy kőpillérre felakasztani; de szükség esetében egy 40/20 cm keresztmetszetű és a földbe legalább 1 meter mélységre sülyesztett *faoszlop* is szolgálhat az ingaóra felfüggesztésére.

1. Az ingaórák járása.

Az ingaórák vagy *„másodperc"*, vagy *„félmásodperc"* ingákkal vannak ellátva. Az újabb szerkezetű ingák a hőmérséklet befolyásával szemben **teljesen kompensáltak:** különösen áll ez a *„Strasser & Rohde"*-féle kompensált *inváringákra* *) és a budapesti *„Hoser"* cég által előállított ingákra. Ezek alapján tehát egy modern szabatos *ingaóra járása* a hőmérsékletek változásától, valamint attól, hogy az illető helyiségben különböző magasságokban esetleg érezhető hőmérséklet különbségek vannak: majdnem egészen független.

Ezekre tekintettel az ingaóra napi járásának gyakorlati képlete:

$$1. \ldots \ldots \ldots \ldots \quad j = j_0 + a\,(B - B_0),$$

ahol j_0 az illető órának **„közép járása"** és a második tag a légnyomástól, illetve az annak változásától függő javítás.

Tapasztalat szerint ez a barometeres javítás független az inga alakjától. Kisérletek szerint $a = 0.^s014$, ha $B - B_0$ (a barometeroszlop magasság változása) millimeterekben van kifejezve.

Teljesen mentesíthetjük azonban az órajárást a barometeres befolyástól úgy, hogy légmentesen elzárt szekrényben ritkított levegőben járatjuk az órát, ami azonban csakis állandó observatoriumokban lehetséges.

Riefler ügyes módon kompensálja ingáit a barometeres befolyás ellen: az inga felső végén egy kisebb aneroid szelencét alkalmaz, amely egy kis súlyt visel.

Nagy befolyása van az ingaóra járására az inga lengési szögének megváltozása. Ettől jó óráknál nem igen kell tartani: mindazonáltal Albrecht ajánlja a *kilengési szögnek* időszakos ellenőrzését. **)

Egy ingaóra járásának megváltoztatása, azaz az 1. képletben szereplő j_0 tagnak megváltozása az ingasúlynak (lencse) az erre a célra szolgáló csavarral való *emelése* vagy sülyesztése által érhető el.

Másodperc lengésű inga esetében a napi járásnak Δj *másodperccel* való megváltoztatása az ingahossznak

$$2. \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \Delta l^{mm} = 0.0230\ \Delta j$$

mérettel való változtatását involválja. A *„félmásodperc"* ingánál a 2. alatti Δl méretnek $^1/_4$ része adja ugyanazon Δj napi járás változást.

Mivel a nevezett igazító csavar forgatása megkívánja az inga megállítását, *Albrecht* a következő gyakorlati eljárást ajánlja. Az inga közepére erősítünk egy miniatür tányérkát. Most az ingacsavart úgy állítjuk be, hogy az inga napi járása *több másodperccel* késsen. A kis tányérkába azután annyi parányi kis súlyocskákat (apró serét) teszünk, hogy a járás

---

*) Az inváringa *kompenzálás nélkül* is 10-szer kevésbbé érzékeny, mint az egyszerű acélinga; ugyanis 1° hőmérsékváltozás az utóbbinál 24^h alatt $\pm$ 0.s5 hibát, az inváringánál pedig csak 0.s05 hibát okoz a járásban. A kompensált (rézzel) inváringák a hővel szemben érzéketlenek.

**) Igy 2°-os kilengési szög esetében $\pm$ 1′ lengési szögváltozásnál a napi járás már 0.s11-el változik.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

teljesen pontos legyen. Ha aztán idővel siet vagy késik az óra, súlyok hozzáadásával, illetve elvevésével kényelmesen célt érünk.

Némi befolyással lehet a szabatos járásra az óra függő súlyának helyzetváltozása az inga súlyhoz (lencséhez) képest. Ha az órasúly lefelé való haladásában ugyanis közel kerül az ingasúlyhoz, a levegő sűrűsödés járás változást okozhat.

Ezt eliminájuk vagy úgy, hogy az órát gyakrabban (de egyenlő időközökben) felhúzzuk, vagy úgy, hogy az órasúly az ingaszekrénytől elkülönített csőben mozog.

A szabatos asztronomiai ingaórák mindig csillagidő szerint járnak.

Ezen órák rendkívül szilárdan vannak megkonstruálva. Rögzített ingával egyszerű faládában szállíthatók a műszerkocsiban, rossz utakon is anélkül, hogy járásuk megváltozna.

Ezen órák 3—4 évenkint olajozandók.

2. A chronometer órák járása.

A legracionálisabb chronometer járása is csak úgy lehet pontosan számba vehető, ha az egész szerkezet a külső levegőtől (légnedvesség) az üveg és fa burkolás tökéletes záródása által a lehetőségig meg van védve és ha gyors hőmérsékváltozások ellen *jól párnázott* szekrényben tartjuk az egész chronometert.

Ezen esetben a legjobb kivitelű chronometerek (Guillaume-féle nickelacél kompensacióval) napi járását ezen képlet adja:

$$3. \ldots\ldots\ldots\ldots j = j_0 + a\,(y - y_0) + b\,(T - 15^\circ)$$

ahol a második tag az összehasonlítás óta lefolyt idő függvénye, a harmadik tag pedig a hőmérséklet (T) függvénye.

Van még egy a felhúzási időpont óta eltelt időtől függő járásváltozás, amelynek törvénye azonban egy napon belül is *rendszertelenül* megváltozhatik. Ez a *„rövid periódusu“* változás az oka annak, hogy szabatos asztronomiai méréseknél, sőt még nehézségi erő méréseknél is (ellenőrző) ingaórát kell használni.

A chronometer j_0 *„középjárásának“* szabályozására két igazító csavart kell *teljesen egyformán* elforgatni. E kényes műveletet azonban legjobb egy jó órásra bízni.

A chronometereket rendszeresen kell felhúzni; mindig vízszintes helyzetben tartandók és gyors forgatásoktól (vízszintes értelemben) megóvandók. Minden chronometer három-négy évenkint jó órás által tisztítandó és újra olajozandó.

4. §. A földfelületi pontokon valamely égitestre vonatkozólag mért zenittávolságoknak (magassági szögeknek) redukálása a földközéppontra.

A helyszinén mért zenittávolságoknak *geocentrikus zenittávolságokká**) való átalakításakor a következő javításokat kell alkalmazni:

1. a *parallaxis* miatti javítást;
2. a megirányzott égitest *sugara* miatti javítást.

Ezeket fogjuk a következőkben külön-külön tárgyalni.

ad 1. A parallaxis.

Értjük alatta azt a kicsiny szöget, amelyet az illető égitestről az észlelési helyre és a föld központjába menő két egyenes sugár egymással bezár. Ezen szög, ha álló csillagra vonatkoztatjuk, zérusnak tekinthető; azonban a holdra, napra és a bolygókra vonatkozólag számításba veendő.

*) Ezek tehát a föld méreteitől független értékek lesznek.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ha a földet első közelítésben **r** sugarú *gömbnek* tekintjük, (ami a *nap* és a *bolygók* esetében teljesen megfelel, de a holdra nézve már a földi lapultság is számít) úgy e gömb sugara egy a helyi *csillagászati horizontban* álló égitestről, amelynek távola a földtől $= \varepsilon$, az úgynevezett *horizontális parallaxis* alatt látszik, amelynek értéke (60. ábra)

1. . . . . $\pi'' = \frac{r}{\varepsilon} . \varrho''$

Ha ellenben az égitest z zenittávolság alatt jelentkezik az A pontbeli észlelő felett, akkor a 60. ábra szerint az úgynevezett magassági parallaxis (p) értéke:

2. . . . . $\sin p = \sin z \frac{r}{\varepsilon}$.

Figyelembe véve a p kicsiny voltát és az 1. alatti egyenlőséget is helyettesítvén 2.-be:

3. . . . . $p'' = \pi'' . \sin z$.

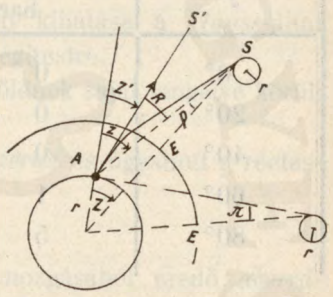
A napnak äquatorialis-horizontalparallaxisa a földnek a naptól való változó távolsága miatt bizonyos határok között változik és középértéke $= 8.''8$; a holdé krb. $1°$; és igen változó a *Venus* és *Mars* parallaxisa: $5'' - 33''$, illetve $3'' - 17''$ a határai.

A *nautikus évkönyvekben* ezen π_0'' értékek az év különböző időszakaira közöltetnek és célszerű számtáblázatok is vannak e könyvekben, amelyekkel a 3. képlet szerinti magassági parallaxis a föld bármely helyére és bármely z-re nézve a *nap* és a *bolygók* részére $\pm 1''$-re kényelmesen kivehető.

A holdra vonatkozó parallaxis számítás részére a nautikus évkönyvek oly táblázatot adnak, amelynek kiszámításánál a *földi lapultság is figyelembe* vétetett.

A parallaxis miatt javított zenittávolság eszerint

4. . . . . $Z = z - p$.



60. ábra.

ad 2. A sugárjavítás. (Radius-korrekció.)

Ha ugyanis az illető égitest nem mint kicsiny pont (mag), hanem mint **nagyobb korong** (nap, hold) jelentkezik az éggömbön, úgy a *központja közvetlenül* meg nem irányozható a távcsővel.

Ilyenkor az égitest alsó vagy felső szélét irányozzuk meg a távcsővel és az ezen pontokra mért zenittávolságokhoz adjuk (vagy belőlük kivonjuk) azon *szöget*, (ε''), amely alatt az égitest korongjának sugara a *föld középpontjából* abban az időben látható:

5. . . . . $Z = z \pm \varepsilon'' \left\{ \begin{matrix} \text{felső} \\ \text{alsó} \end{matrix} \right\}$ széle esetében.

Az égitestkorongok sugarai a csillagászati évkönyvekben az év különböző napjaira megtalálhatók; a hold és napnál mintegy $16''$, a Venusnál $5'' - 32''$ ezen geocentrikus szög. Ha az égitest a horizonttól a zenitbe tolódik, úgy ezáltal a nem végtelenben levő égitestnek az észlelőtől való távolsága is érezhetően fogy. A holdnál a távolságnak ezen kisebbedése a látszólagos átmérőnek $18''$-el való növekedését eredményezi, amiért is a földi központra vonatkozó évkönyvi holdsugárnak a hold a horizont feletti magasságából eredő megnagyobbodása, az 5. alatti képlet alkalmazása előtt a *nautikus évkönyveknek* e célra szolgáló táblázatából kiszedendő és az ε''-hoz adandó.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

ad 3. Az astronomiai refraktió.

Az összes fénysugarak, melyek a csillagzatokból a földre jutnak a földet burkoló levegő rétegek által egyenes irányukból eltéríttetnek.

Az **A** pontban (60. ábra) levő észlelő ez okból az illető S égitestet nem az S irányban, hanem az S' irányban látja, aminek a *látszólagos zenittávolság* (Z') felel meg mint mérési eredmény. A valódi helyi zenittávolság z tehát:

$$6. \ldots\ldots\ldots\ldots z = Z' + R;$$

amely R javítás astronomiai refrakciónak neveztetik. Az R elméleti és tapasztalati megfontolások szerint függvénye a helyi, pillanatnyi *barométerállásnak, levegőhőmérsékletnek* és *légnedvességnek* (páratartalom). Mivel pedig nem közömbös, hogy a fénysugár (iránysugár) merőleges-e vagy ferde-e a helyi horizontra, azért R értéke *nagy mértékben* függvénye a mért (látszólagos) zenittávolságnak is. A következő táblázatból kivehető a különböző faktorok befolyása az R javításra:

Mért zenittáv. z'	A refrakció értéke $+10°$ C és 760 mm. barom.	A refrakció (R) változik	
		1° c-nél $+10°$ c felett	1 cm barom. sülyedés 76.0 alá
0°	0′ 0″	— 0.″00	— 0.″00
20°	0 21	— 0. 07	— 0. 26
40°	0 49	— 0. 17	— 0. 64
60°	1 41	— 0. 33	— 1. 16
80°	5 19	— 1. 06	— 3. 78

E kis táblázat szerint tehát ha a mérési eredmények:

$$Z' = 80°;\ t = +20°\ C;\ B_0 = 74{\cdot}0 \text{ cm, akkor}$$
$$R = 5'\,19'' - 1.''06.\ (+10) - 3.78.\ 2,0 = 5'\,0''.$$

Bessel már egy évszázaddal ezelőtt a refrakcióra ezt a képletet vezette le:

$$7. \ldots\ldots \begin{cases} R = \alpha.\, tang\, Z'.\ B^{A}.\ \gamma^{\lambda} \text{ azaz:} \\ log\, R = log\ (\alpha\, tang\, Z') + A\, log\, B + \lambda\, log\, \gamma. \end{cases}$$

Itt α, A, λ a mért Z'-től függő nagyságok; B a helyi (0°-ra redukált) barométerállástól és γ pedig a hőmérséklettől függő értékek. Az első tag (7.-ben) az úgynevezett középrefrakció és $Z' = 0° - 45°$ határokon belül nem túlságosan abnormális körülmények között néhány másodpercre éles eredményt ad az $\alpha = 58''$ állandó érték.

A refrakció (astronomiai) számítására sok teljes táblázat áll rendelkezésre:
Nautisches Jahrbuch (Porosz) néhány másodpercre éles;
Ambronn-Domke: Astr.-geöd. Hilfstafeln (Berlin) 0.″1-re éles;
Albrecht: Formeln und Hilfstafeln (Leipzig) 1908. kétféle ($\pm$ 1″-res és 0.″01-re éles) teljes refr. táblázatot is tartalmaz.

Minthogy pillanatnyi légköri változások szigorúan figyelembe nem vehetők, azért az R tagban $z' = 0° - 60°$ határokon belül $\pm$ 0.″5 hibára, és $z' > 60°$ esetében ennél jóval nagyobb hibára is el lehetünk készülve.*)

*) Szabatos astronomiai méréseknél több, különböző z' alatti csillag bevonása és a méréseknek ismétlése által (más körülmények között) igyekszünk az R bizonytalanságától lehetőleg menekülni.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Összefoglalva az ad 1.—ad 3. alatt elmondottakat, a geocentrikus zenittávolság értéke lesz:

8. . . . . $Z = Z' - p \pm \varepsilon + R.$

Az állócsillagoknál (és csakis azoknál) a p és ε értékek mindenkor zérusak.

5. §. Aberratió, Precessió, Nutatio és az évi parallaxis.

Mivel a földnek a nap körüli éví pályán való *igen nagy haladó sebessége* a fénynek terjedési sebességéhez viszonyitva nem elenyésző kicsiny számot ad, azért a földről nézve egy csillagot, azt nem az éggömb azon helyén látjuk, ahol az a csillag e pillanatban tényleg van, hanem a csillagot mindig egy kis szöggel eltolva látjuk. Ezen eltolás **előretolás** azon irány felé, amely irányban a föld a pályáján halad. Ezt a tüneményt évi-**aberrációnak** nevezzük.

Az aberráció kihat az álló csillagok *rektascensiójára* és *deklinációjára* is. Ez a kihatás azonban — figyelembe véve a Delambre és Struve által meghatározott *absolut aberráció állandókat* — csak $85^1/_2°$-nál nagyobb deklinációval biró csillagoknál éri el a $\pm$ 0.″01 értéket, tehát csakis a *poláris* csillagoknál vehető számításba.

Az aberrációnak a rektascensióra és deklinációra való kihatása a *Gauss*-által kidolgozott számtáblázatokkal számítható ki egyébiránt bármely égitestre.

Beszélhetünk még egy *„napi aberrációról“* is, amely a földnek saját tengelye körüli forgó sebességéből ered.

Ennek hatása a helyi meridiánban a *deklinációra* nézve *zérus* és ugyanott a rectascensióra gyakorolt maximális hatása:

$$0.''3113 \cos \varphi \sec \delta.$$

Végül beszélhetünk még a csillagok (és a nap) saját mozgásából eredő *aberrációról* is. *)

Az utóbb emlitett kétféle aberráció hatások azonban csakis a hivatásos csillagászokat érdeklik; a tudományos geodeziával kapcsolatos astronomiai méréseknél ezen hatások **külön** nem vétetnek számba.

Évszázados időszakokat véve figyelembe, igen nagy hatásuak az égi testek összrendezőire a **precessió** és **nutatió** gyüjtő nevek alatt kifejezett jelenségek, amelyek az égi ekvatornak és az égi *ekliptikának* egymáshoz viszonyitott bonyolult mozgásaiból erednek.

E lassú mozgások által megváltozik a két koordinátasík egymáshoz való *hajlása* és *megváltozik* a két koordinátasík *metszési pontjainak* helye. *Tehát az álló csillagok rectascensió és deklináció értékei ezen örökös, folytonos, lassu alapsíkmozgás miatt folytonosan változnak.*

A szóban forgó örökös mozgások a *napnak* és a *holdnak*, valamint a *bolygóknak* vonzására kapcsolatban a nevezett égitesteknek a földhöz viszonyitott változó helyzetére vezethetők vissza.

A szóban forgó teljes mozgást, annak számszerü figyelembe vétele végett több rendbeli komponensekre bontották és e komponensek hatását az időre (időszámításra) valamint az égi testek összrendezőire külön-külön vizsgálták. Az erre vonatkozó levezetéseket és képleteket itt nem közöljük.**)

---

*) A nap például a térben egy egyenes vonalon mozog, amely mozgásban egész naprendszerünk is résztvesz.

**) Lásd: Herr & Tinter: Lehrbuch der Sphärischen Astronomie. Wien. 1887.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Külső hatásában a szóban forgó alapsikváltozások például abban fognak nyilvánulni, hogy mig ezidőszerint az északi világpolus a kis medve csillagzat farkának utolsó csillagához, (*α* Ursae minoris), amelynek deklinációja most = $88^1/_2°$, esik legközelebb: addig például a 14.000. évben Kr. sz. u. az *α Lyrae* csillag, amelynek deklinációja most = 38°40′ lesz a polushoz legközelebb, azaz 12.087 év mulva már ez az *α Lyrae* csillag lesz az ugynevezett sarkcsillag (poláris). *)

Ilymódon tehát oly csillagok, melyek most láthatók az északi földgömbi pontokból, idővel akkora *déli deklinációt* nyernek, hogy ezen helyekre nézve láthatatlanok lesznek és viszont. Az égboltozat *csillagképe* tehát a föld valamely pontjában a *precessió* miatt igen nagy időközökben nagyon megváltozik. Az itt emlitett *precessió* miatti polusvándorlás periodusa 24.400 év: ezalatt a világpolus (az ekvator hajlás változásai miatt) az ekliptika körül egy teljes kört ir le.

A *tavaszi* pontnak a precessió miatti visszafelé (nappal ellenkező) való folytonos lassú mozgása nemcsak a csillagok rektascensiójának változását eredményezi, hanem a *tropikus évnek* hosszát is megváltoztatja. Ez az évi változás azonban igen kicsiny = 0.000 000 068 848 nap;**) 100 év alatt a tropikus év hossza 0^s6-el rövidül.

Nutatió alatt a világtengelynek *rövid* periodusu változásait értjük. Ezek a hold pálya ugynevezett *csomópontjainak* (melyekben a földpálya sikján megy át a hold) hosszától függenek. A periodus időtartama 19 esztendő. A *nutatiónak* a rektascensióra való hatása megtalálható bármely évre 10 napról 10 napra a Nautical-Almanac-ban. A nutatiónak a *rektascensióra* és igy a *csillagidőre* (időpontra) való hatása az emlitett táblázatok segélyével figyelembe vehető. És ugyancsak a csillagászati évkönyvek módot adnak a precessiónak és az aberraciónak az *A. R.*-re illetve *δ*-ra való hatásának bizonyos időpontra vonatkozó figyelembe vételére.

E helyt meg kell még emlékezni *két*, az álló csillagokra vonatkozó jelenségről is. Az egyik jelenség a *álló csillag ugynevezett* **évi** parallaxisa; a másik az álló csillag *saját* mozgása.

A föld pályájának nagy átmérője (40 millió földr. mértföld) nem lévén végtelen kicsiny az álló csillagoknak a földtől való távolságához képest, a föld e két szélső helyzetéből az álló csillagra vont két sugár egy kis szöget: az **évi parallaxist** zárja be egymással. Csak a *napra* nézve kellett a gyakorlat részére ennek az *évi parallaxisnak* komponenseit a *rektascensióban* és *deklinációban* kifejezni: a képletek egészen hasonlók az aberráció képletekhez. Az évkönyvekből elemi interpolálással juthatunk e korrekció tag értékéhez. Az álló csillagokra nézve csak a *sarkcsillagra* (*α* ursae minoris) tudták az évi parallaktikus szöget (P = 0.″1) kimutatni; ennek hatása a sarkcsillag rektascensiójára az évkönyvekből kivehető.

Az álló csillagok *saját mozgása* (amely az *A. R.* és *δ* változásában nyilvánul) az évkönyvekben meg van adva. Igen kis *A. R.* és *δ* változásokról van itt szó, mert az ezideig kimutatott legnagyobb *évi* saját mozgás 8″. — A saját mozgás hatása az *A. R.* és *δ*-ra az időben változó: de csakis a polus közelében levő csillagokra nézve veendő figyelembe; ami az évkönyvi adatok alapján az ott található utasitás szerint egyszerüen elvégezhető.

---

*) A mostani sarkcsillag ezen időtartam alatt $\delta_{max.}$ = 89°32′-et fog még maximálisan elérni és azután folyton kisebb és kisebb lesz a *δ*-ja.

**) Eszerint azt az időtartamot, amely alatt a nap a látszólagos éggömbön pontosan *360°*-ot fut be *siderikus* évnek nevezve, ez nem azonos időtartam a *tropikus évvel*. A különbség a kettő között az a kis időtartam, amely alatt a nap azt a kis ivet irja le, melylyel a kospontot a precessió egy év alatt eltolja.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

6. §. A fontosabb képletek gyüjteménye. *)

I. Különböző rendszerű szferikus koordináták közötti összefüggésekről.

Jelzéseink:

α = rektascensió,
ϑ = deklináció,
t = óraszög ily értelemben: csillagidő — rektascensio,
a_s = azimut, a déliponttól számítva Ny, É, K-en át,
a_n = azimut, az északi ponttól számítva K, D, Ny-on át,
z = zenittávolság,
φ = földrajzi szélesség,
q = parallaktikus szög.

1. Adott óraszöghöz tartozó azimut és zenittávolság kiszámítása.

Alapegyenletek:

$$\sin z \sin a_s = -\sin z \sin a_n = \cos\delta \sin t$$

$$\sin z \cos a_s = -\sin z \cos a_n =$$
$$= -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t =$$
$$= \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t.$$

Leszármaztatott képletek:

$$\sin z = \frac{\cos\delta \sin t}{\sin a_s} = -\frac{\cos\delta \sin t}{\sin a_n}$$

$$\cos z = \cos(\varphi - \delta) - 2\cos\varphi \cos\delta \sin^2 {}^1/_2 t$$

$$\sin a_s = -\sin a_n = \frac{\cos\delta \sin t}{\sin z}$$

$$\tang a_s = \tang a_n = \frac{\sin t}{\sin\varphi \cos t - \cos\varphi \tang\delta}$$

$$\tang a_s = \tang a_n = -\frac{\cotg\delta \sec\varphi \sin t}{1 - \cotg\delta \tang\varphi \cos t}$$

$$\tang {}^1/_2 (a_s - q) = -\cotg {}^1/_2 (a_n - q) = \frac{\sin {}^1/_2 (\varphi + \delta)}{\cos {}^1/_2 (\varphi - \delta)} \tang {}^1/_2 t$$

$$\tang {}^1/_2 (a_s + q) = -\cotg {}^1/_2 (a_n + q) = \frac{\cos {}^1/_2 (\varphi + \delta)}{\sin {}^1/_2 (\varphi - \delta)} \tang {}^1/_2 t$$

Segédszögek:

$$\cos z = \frac{\cos(\varphi - M)\sin\delta}{\sin M} \text{ ahol: } \tang M = \frac{\tang\delta}{\cos t}$$

$$\tang z = \frac{\tang(\varphi - M)}{\cos a_s} = -\frac{\tang(\varphi - M)}{\cos a_n}$$

$$\tang a_s = \tang a_n = \frac{\cos M \tang t}{\sin(\varphi - M)}$$

Differenciál-képletek:

$$dz = +\cos a_s \, d\varphi - \cos q \, d\delta + \cos\delta \sin q \, dt$$
$$\sin z \, da = -\cos z \sin a_s \, d\varphi + \sin q \, d\delta + \cos\delta \cos q \, dt$$

*) A levezetések a *szferikus astronomiával* foglalkozó tankönyvekben megtalálhatók.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

2. Adott azimuthoz és adott zenittávolsághoz tartozó óraszög kiszámítása.

Alapegyenletek:

$$\cos\delta \sin t = \sin z \sin a_s.$$
$$\cos\delta \cos t = \cos\varphi \cos z + \sin\varphi \sin z \cos a_s.$$
$$\sin\delta = \sin\varphi \cos z - \cos\varphi \sin z \cos a_s.$$

Az a_n alkalmazása esetében az a részére használt függvények megmaradnak, csupán a *sin* és a *cos* előjelei megváltoztandók.

Leszármaztatott képletek:

$$\sin t = \frac{\sin z \sin a_s}{\cos\delta} = -\frac{\sin z \sin a_n}{\cos\delta}.$$

$$\cos t = \frac{\cos\varphi \cos z + \sin\varphi \sin z \cos a_s}{\cos\delta}.$$

$$tang\, t = \frac{\sin a_s}{\cos\varphi\, cotg\, z + \sin\varphi \cos a_s}.$$

Segédszögek:

$$\cos t = cotg\,(\varphi - N)\, tang\,\delta. \quad \text{— ahol: } tang\, N = tang\, z \cos a_s.$$

$$tang\, t = \frac{\sin N}{\cos(\varphi - N)}\, tang\, a_s.$$

Differencial-képletek:

$$d\delta = +\cos t\, d\varphi + \sin z \sin q\, d a - \cos q\, dz.$$
$$\cos\delta\, dt = +\sin\delta \sin t\, d\varphi + \sin z \cos q\, d a + \sin q\, dz.$$

3. Adott azimuthoz tartozó óraszög és zenittávolság kiszámítása.

$$\cos\varphi\, tang\,\delta = \sin\varphi \cos t - cotg\, a_s \sin t$$
$$\sin\delta = \sin\varphi \cos z - \cos\varphi \sin z \cos a_s.$$

Segédszögek:

$$\sin(P - t) = cotg\,\varphi\, tang\,\delta \sin P.$$
$$\sin(Q - z) = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi} \sin Q.$$

ahol: $tang\, P = \sin\varphi\, tang\, a_s.$

$$tang\, Q = \frac{tang\,\varphi}{\cos a_s}.$$

Differenciál-képletek:

$$dt = +\frac{\cos z\, tang\, q}{\cos\varphi}\, d\varphi - \frac{tang\, q}{\cos\delta}\, d\delta + \frac{\sin z}{\cos\delta \cos q}\, da.$$
$$dz = +\frac{\cos t}{\cos q}\, d\varphi - \frac{1}{\cos q}\, d\delta + \sin z\, tang\, q\, da.$$

4. Adott zenittávolsághoz tartozó óraszög és azimut kiszámítása.

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta} = \frac{\cos z}{\cos\varphi \cos\delta} - tang\,\varphi\, tang\,\delta.$$

$$tang^{1/2} t = \sqrt{\frac{\sin(S-q)\sin(S-\delta)}{\cos S \cos(S-z)}}. \quad \text{ahol } S = \frac{\varphi + \delta + z}{z}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

$$\cos a_s = -\cos a_n = \frac{\sin\varphi\cos z - \sin\delta}{\cos\varphi\sin z} = tang\,\varphi\,cotg\,z - \frac{\sin\delta}{\cos\varphi\sin z}.$$

$$tang\,{}^1/_2\,a_s = -\,cotg\,{}^1/_2\,a_n = \sqrt{\frac{\sin(S-q)\cos(S-z)}{\cos S\sin(S-\delta)}}$$

ahol $S = \frac{\varphi+\delta+z}{z}$

Differenciál-képletek:

$$dt = -\frac{1}{\cos\varphi\,tang\,a_s}\,d\varphi + \left.\frac{\frac{\cos q}{\cos\varphi\sin a_s}}{\frac{1}{\cos\delta\,tang\,q}}\right\} d\delta + \left.\frac{\frac{1}{\cos\varphi\sin a_s}}{\frac{1}{\cos\delta\sin q}}\right\} dz$$

$$da = -\frac{\frac{cotg\,t}{\cos\varphi}}{\frac{\cos t}{\sin z\sin q}}\,d\varphi = \left.\frac{\frac{1}{\cos\varphi\sin t}}{\frac{1}{\sin z\sin q}}\right\} d\delta + \frac{1}{\sin z\,tang\,q}\,dz$$

5. A parallaktikus szög kiszámítása.

Alapegyenletek:

1. $\sin z\sin q = \cos\varphi\sin t.$
   $\sin z\cos q = \sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t.$
2. $\cos\delta\sin q = \cos\varphi\sin a_s.$
   $\cos\delta\cos q = \sin\varphi\sin z + \cos\varphi\cos z\cos a_s.$

Leszármaztatott képletek:

$$\sin q = \frac{\cos\varphi\sin t}{\sin z} = \frac{\cos\varphi\sin a_s}{\cos\delta}.$$

$$\cos q = \frac{\sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t}{\sin z} = \frac{\sin\varphi\sin z + \cos\varphi\cos z\cos a_s}{\cos\delta} =$$

$$= \frac{\sin\varphi - \sin\delta\cos z}{\cos\delta\sin z} = \sin\varphi\sin a_s\,sint\,t + \cos a_s\cos t.$$

$$tang\,q = \frac{\sin t}{tang\,\varphi\cos\delta - \sin\delta\cos t} = \frac{\sin a_s}{tang\,\varphi\sin z + \cos z\cos a_s}.$$

Segédszögek:

$$tang\,q = \frac{\sin L\,tang\,t}{\cos(\delta+L)} = \frac{\cos Q\,tang\,a_s}{\cos(z-Q)}$$

ahol $tang\,L = cotg\,\varphi\cos t$

$$tang\,Q = \frac{tang\,\varphi}{\cos a_s}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Differenciál-képletek:

$$dq = -\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang} q\, d\varphi + \operatorname{cotg} t \operatorname{tang} q\, dt - \operatorname{cotg} z \operatorname{tang} q\, dz.$$
$$dq = -\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang} q\, d\varphi + \operatorname{tang}\delta \operatorname{tang} q\, dt + \operatorname{cotg} a \operatorname{tang} q\, da.$$

II. Sferikus koordináták közötti összefüggésekről különleges esetekben.

1. Az óraszög és azimut fölkeltekor vagy lenyugvákor.

$$\cos t = -\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\delta$$

$$\operatorname{tang}^{1}/_{2}\, t = \sqrt{\frac{\cos(\varphi-\delta)}{\cos(\varphi+\delta)}}$$

$$\cos a_s = -\cos a_n = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}$$

$$\operatorname{cotg}^{1}/_{2}\, a_s = -\operatorname{tang}^{1}/_{2}\, a_n = \sqrt{\frac{\operatorname{tang}^{1}/_{2}(\psi-\delta)}{\operatorname{tang}^{1}/_{2}(\psi+\delta)}}$$

. ahol $\psi = 90° - \varphi$

A refrakció hatása folytán az óraszög és az azimut még a következő értékekkel helyesbitendő:

$$\Delta t = \frac{R}{\cos\varphi \cos\delta \sin t}$$

$$\Delta a = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\sin a} R,$$

ahol R a refrakció értéke a horizontban (Bessel szerint 90° zenittávolságnál $R = 34'\,54.''1$, illetőleg 139.^{s}6)

2. Az óraszög, zenittávolság és parallaktikus szög az I. vertikalison való áthaladáskor.

$$\sin t = \frac{\sqrt{\sin(\varphi+\delta)\sin(\varphi-\delta)}}{\sin\varphi\cos\delta}$$

$$\cos t = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\operatorname{tang}\varphi}$$

$$\operatorname{tang} t = \frac{\sqrt{\sin(\varphi+\delta)\sin(\varphi-\delta)}}{\cos\varphi\sin\delta}$$

$$\operatorname{tang}^{1}/_{2} t = \sqrt{\frac{\sin(\varphi-\delta)}{\sin(\varphi+\delta)}}$$

$$\sin z = \frac{\sqrt{\sin(\varphi+\delta)\sin(\varphi-\delta)}}{\sin\varphi}$$

$$\cos z = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}$$

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sqrt{\sin(\varphi+\delta)\sin(\varphi-\delta)}}{\sin\delta}$$

$$\operatorname{tang}^{1}/_{2} z = \sqrt{\frac{\operatorname{tang}^{1}/_{2}(\varphi-\delta)}{\operatorname{tang}^{1}/_{2}(\varphi+\delta)}}$$

$$\sin q = \frac{\cos\varphi}{\cos\delta}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

$$\cos q = \frac{\sqrt{\sin(\varphi+\delta)\sin(\varphi-\delta)}}{\cos\delta}$$

$$\operatorname{tang} q = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\sin(\varphi+\delta)\sin(\varphi-\delta)}}$$

3. Az óraszög, azimut és zenittávolság a legnagyobb digressióhoz.

$$\sin t = \frac{\sqrt{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)}}{\cos\varphi\sin\delta}$$

$$\cos t = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\delta}$$

$$\operatorname{tang} t = \frac{\sqrt{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)}}{\sin\varphi\cos\delta}$$

$$\sin a_n = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}$$

$$\cos a_n = \frac{\sqrt{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)}}{\cos\varphi}$$

$$\operatorname{tang} a_n = \frac{\cos\delta}{\sqrt{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)}}$$

$$\sin z = \frac{\sqrt{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)}}{\sin\delta}$$

$$\cos z = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}$$

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sqrt{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)}}{\sin\varphi}$$

4. Csillagidő és azimut két csillagnak ugyanazon vertikalis körön való egyidejü áthaladásakor.

$$\operatorname{tang} S = \frac{\sin(\delta_1+\delta_2)}{\sin(\delta_1-\delta_2)}\operatorname{tang}{}^1/_2(\alpha_2-\alpha_1)$$

$$\sin[{}^1/_2(t_1+t_2)-S] = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\delta_2}\sin[{}^1/_2(\alpha_2-\alpha_1)-S]$$

$${}^1/_2(t_1-t_2) = {}^1/_2(\alpha_2-\alpha_1)$$

$$T = \alpha_1+t_1 = \alpha_2+t_2$$

$$\operatorname{tang} a = \frac{\operatorname{tang}[{}^1/_2(t_1+t_2)-S]}{\sin\varphi}$$

5. Csillagidő és zenittávolság, két csillagnak ugyanazon horizontalis körön való egyidejü áthaladásakor.

$$\operatorname{tang} M = \operatorname{tang}{}^1/_2(\delta_1+\delta_2)\operatorname{tang}{}^1/_2(\delta_1-\delta_2)\operatorname{cotg}{}^1/_2(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$\sin(M+R) = \operatorname{tang}\varphi\frac{\operatorname{tang}{}^1/_2(\delta_1-\delta_2)}{\sin{}^1/_2(\alpha_1-\alpha_2)}\cos M$$

$$T = {}^1/_2(\alpha_1+\alpha_2)-R$$

$$\cos z = \sin\varphi\sin\delta_1+\cos\varphi\cos\delta_1\cos(T-\alpha_1) =$$
$$= \sin\varphi\sin\delta_2+\cos\varphi\cos\delta_2\cos(T-\alpha_2).$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

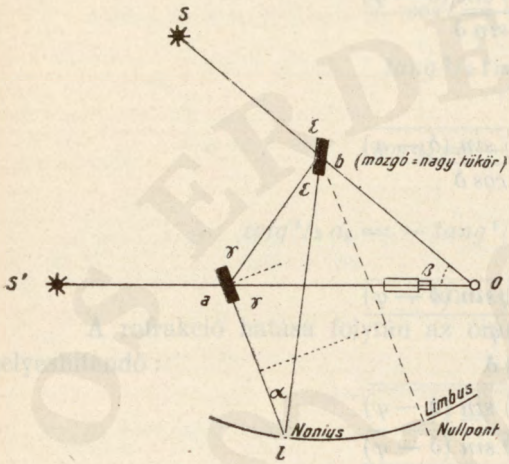
II. FEJEZET.

Astronomiai műszerek.

I. §. A tükör sextáns.

A sextáns bármely síkban alkalmazható szögek mérésére, mivel nem (mint a teodolit) két síknak, hanem két *iránynak* egymással képezett szögét méri.

A sextáns lényege és működése a 61., 62. és 63. ábrák nyomán magyarázható.



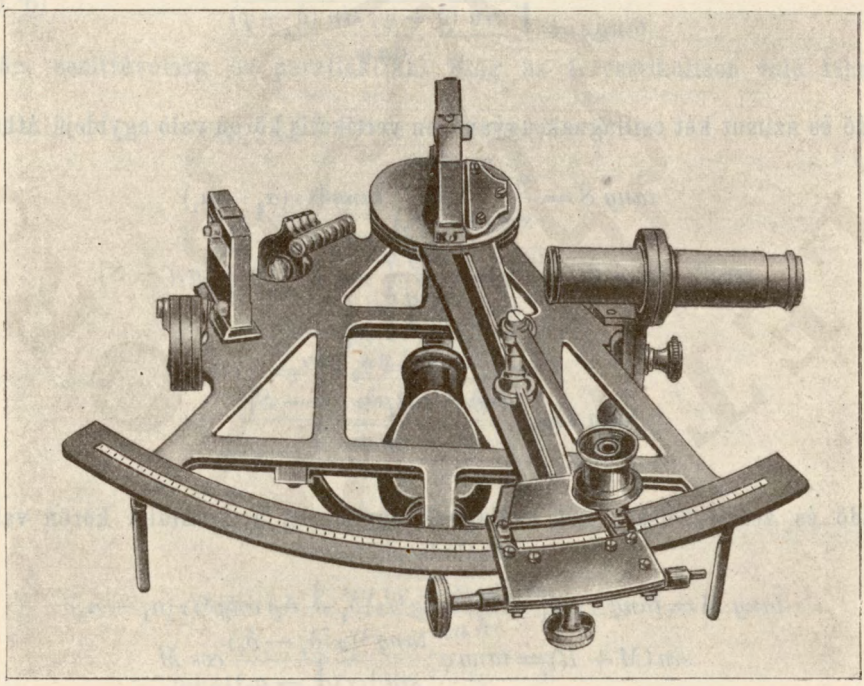
61. ábra.

A műszer síklapjára, (tehát a mérendő szög síkjára) *merőlegesen* el van helyezve *szilárdan* (mozdulatlanul) a *„kis tükör“ (a)* és a mozgatható *(b) „nagy tükör“*.

Az S csillagból jövő fénysugár a *(b)* nagy tükör sikját valami ε szög alatt éri; visszaverődik ugyancsak ε szög alatt az a tükör felé és azt γ szög alatt találván, teljes visszaverődéssel jut a kis távcsövön át az „0“-nál képzelt *szembe*. Tehát kétszeri tükrözésből eredő képét látjuk az S-nek az S' irányban és igy: α-val jelölve a két tükör által képezett szöget, és β-val jelölve az $O\,S\,S'$ szöget, áll ez az ismeretes egyenlőség, hogy

$$1. \ldots . \quad \beta = 2\,\alpha.$$

Ha tehát *két* csillagból a szembe jövő sugarak alkotta szöget meg akarom mérni, akkor a sextánst ugy kell tartanom és a „nagy tükör“ karját mindig ugy kell elforgatnom



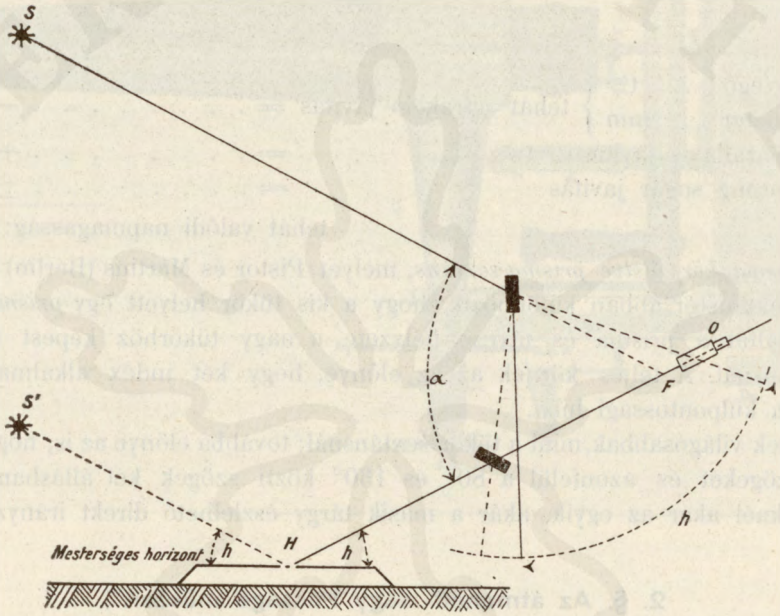
62. ábra.

hogy az egyik csillag kétszeri tükrözésből eredő képe a távcsőben a másik csillaggal egy vonalba essék: ugy a *két tükör* által bezárt α szög adja most már a keresett szög felének értékét.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Az α hajlásszög a sextáns osztási körén leolvasható; a rendes fokosztáshoz azonban a kétszeres értékek vannak odairva, tehát a 360°-nak $^1/_6$-részét *(sextáns)* azaz 60°-ot tartalmazó ily fokiven 120° a maximális leolvasás.

Ha a két tükröt parallel állitjuk, akkor a $2\alpha = 0$ leolvasást kell nyerni. Ha eltérő eredményt kapunk, ugy az eltérés adja az *indexhibát*. Az indexhibán kivül a méréseknél számitásba veendők még a következő műszerhibák: az *osztási* hiba; a tükröknek nem merőleges volta (az alaplapra); a távcső irányvonalának az alapsikkal képezett 0°-tól eltérő szöge; a tükörlapok nem sik volta; a napészleléseknél használt fénytompitó üvegek hatása; az excentricitás hiánya. Ezen hibák elmélete és számszerü figyelembe vétele részletesen tárgyaltatik *Jordán:* „Grundzüge der astronomischen Zeit- und Ortsbestimmungen“ cimü művében.*)



63. ábra.

A német haditengerészeti observatorium hivatalos adatai szerint a 10″-es noniusokkal, 6-szoros nagyitásu távcsővel ellátott elsőrendü sextánsok nominalis pontossága ± 8″ középhibával fejezhető ki.

Ha a sextánssal száraz földön végzünk méréseket, akkor nem állván (mint a tengeren) rendelkezésre a természetes horizont: *mesterséges horizontot* kell előállitani vagy egy edénybe öntött (olaj, vörös bor, tinta, higany) folyadékkal, vagy egy libellákkal és talpcsavarokkal vizszintessé tehető *sötét üveglappal.*

Ilymódon mérhető azután egy tetszőleges csillagnak (napnak) valódi *magassági szöge.* A müveletet a 63. ábra mutatja: az $S\,F$ és $S'\,H$ sugarak, mivel az égitest távola ∞, paralleleknek vehetők és igy a sextánssal mért szög a reflexiószögnek (magassági szögnek) kétszerese $= 2\,h$.

A *napra* vonatkozólag annak alsó vagy felső széle észlelendő és a nyert magassági szöghöz adandó vagy levonandó a napkorongsugár javitás.

---

*) Egy *Sextáns* megrendelésénél (ajánlható: Georg Butenschön in Bahrenfeld bei Hamburg) ne mulasszuk el az illető műszerre vonatkozó *„Prüfungsschein der k. deutschen Seewarte“*-t is mellékeltetni. Ezen alapos vizsgálaton alapuló okmány ára 6 korona.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A nap *magassági szögeinek* mérésekor a czélszerü számitási séma ez:

Chronometer:	*sextáns:*
U_1	$2\,h_1$
U_2	$2\,h_2$
U_3	$2\,h_3$
....	....
....	....
U_n	$2\,h_u$

Középérték: $\frac{[U]}{n} = U$ $\qquad \frac{[h]}{n} = 2\,h$

Indexhiba: $i = \quad - i$

$2\,h' = 2\,h - i$

$h' = \frac{2\,h - i}{2}$

Levegő ...° C
Barometer ... mm } tehát refrakció javitás $= \ldots\ldots\ldots - r$

Nap parallaxis javitás $= \ldots\ldots\ldots + p$

Napkorong sugár javitás $= \ldots\ldots\ldots \pm \varepsilon$

tehát valódi napmagasság: $\boldsymbol{h}$.

A prisma kör illetve prisma sextáns, melyet Pistor és Martins (Berlin) szerkesztettek, a leirt tükörsextánstól abban különbözik, hogy a kis tükör helyett egy *prisma* van a távcső elé téve, amiáltal a prisma és távcső helyzete a nagy tükörhöz képest más lett mint a tükör sextánsnál. A teljes körnek az az előnye, hogy két index alkalmazható, miáltal eliminálhatatik a külpontossági hiba.

A képek világosabbak, mint a tükör sextánsnál; továbbá előnye az is, hogy 0°—180°-ig mérhetünk szögeket és azonfelül a 80° és 130° közti szögek két állásban is mérhetők, mert e szögeknél akár az egyik, akár a másik tárgy észlelhető direkt irányzással.

2. §. Az átmeneti- vagy Passage műszer.*)

Rendeltetése valamely égitestnek egy fix vertikális körön való áthaladásának szabatos megfigyelése.

Áll ez a műszer (64. és 65. ábra) lényegileg egy igen nagy átmérőjü (8—10 cm), rövid gyujtótávolsággal (80—90 cm) biró zömök távcsőből (III. kötet 16. o. 23. ábra), amely az üreges, vaskos horizontális forgási tengelylyel együtt *vertikális értelemben* $z = 0°$-tól kezdve $z = \pm 110°$—$120°$-ig bármely zenittávolságra elforgatható.

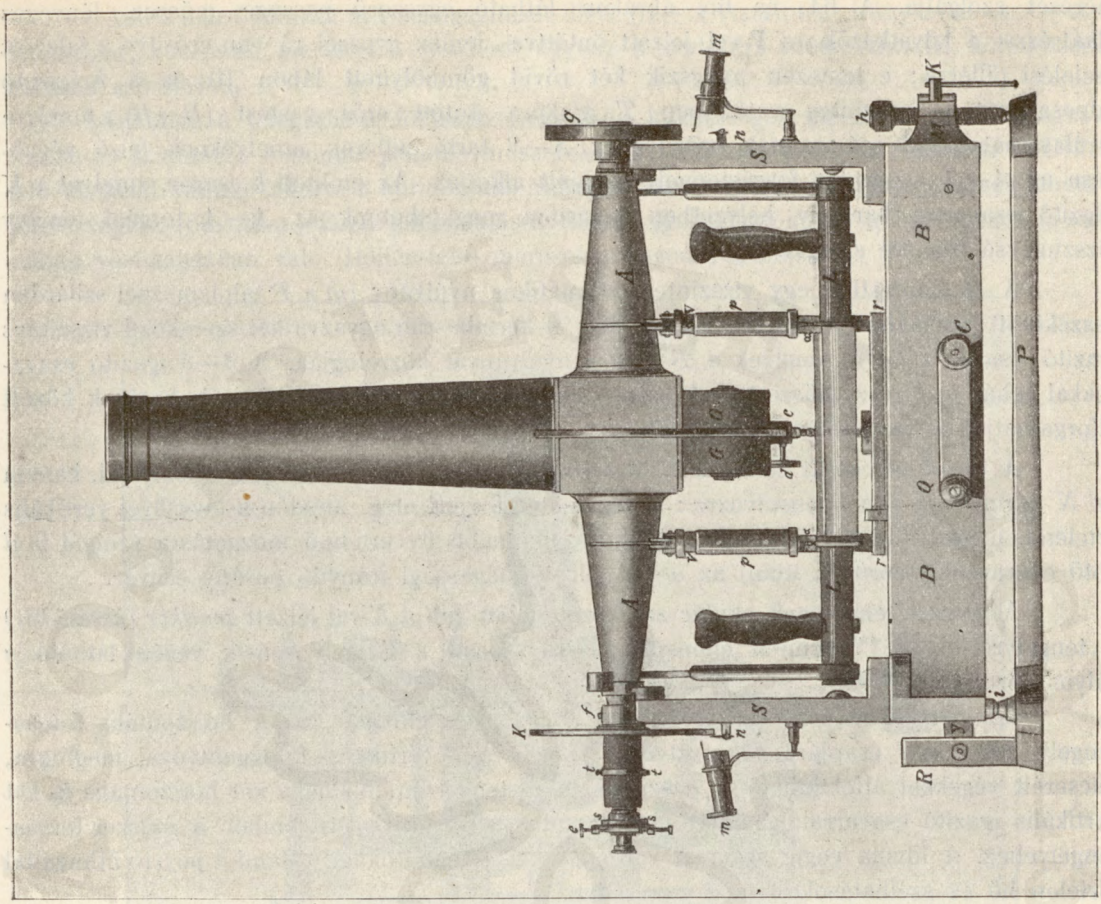
Vízszintes értelemben a távcső nem forgatható el; a teljesen igazított és szilárdan felállított passage műszer irányvonala tehát mindig ugyanazon vertikális síkban (égi vertikális körben) mozog.

A *passage* műszerek állandó iránysíkja vagy a helyi **meridián** vagy az arra merőleges függőleges sík: az úgynevezett *1-ső* vertikális.

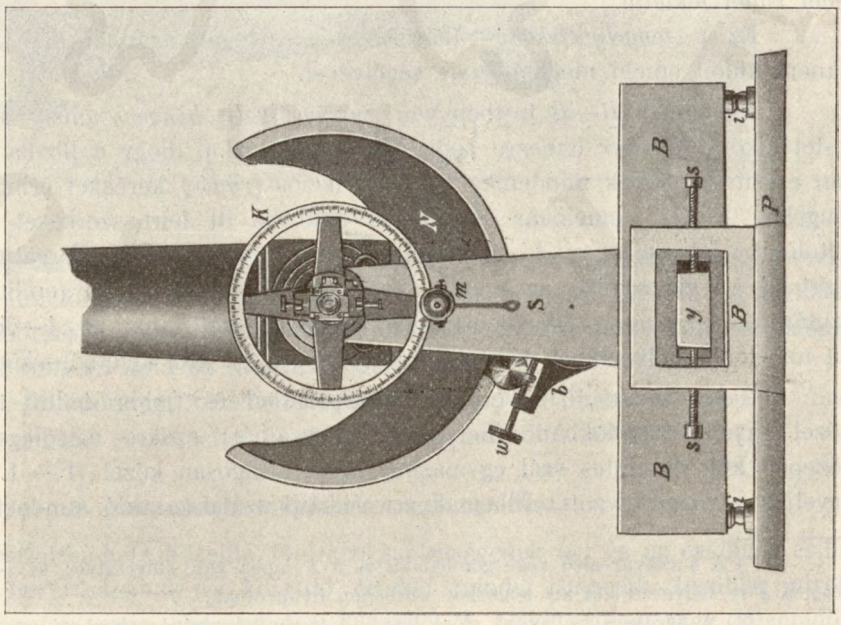
A **meridiánba** állított passage műszer vagy a szabatos helyi időmeghatározást vagy az égitestek rectascensióinak szabatos meghatározását szolgálja; az *I-ső vertikálisba* helyezett passage műszer pedig vagy a helyi sarkmagasság mérését, vagy az égitestek *deklinációinak*

*) A meredek irányzásokat és éjjeli méréseket szolgáló távcsövi szerkezeteket és berendezéseket a III. kötet 16. és 17. oldalain mutattuk be a 22—25. ábrákon; ezekről tehát sem a jelen, sem a következő §-ban külön nem fogunk megemlékezni.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.



64. ábra.



65. ábra.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

mérését szolgálja. A 64. és 65. ábrákon látható egyszerű passage műszer, lényeges alkatrészei a következők: a **P**-vel jelzett öntöttvas lemez gypssel rá van erősítve a falazott észlelési pillérre; e lemezen nyugszik két rövid gömbölyített lábon (*i*) és a *h* igazító talpcsavaron a vízszintes vetületben *T* alakúra öntött erős vastest (*B—B*), amelyre elválaszthatatlanul reá vannak erősítve az *S—S* tartó pillérek, amelyeknek felső végződése az *A—A* vízszintes forgástengely csapjait alkotják. Az említett *h* csavar, amelyet a *K* rögzítő csavarral bármely helyzetben szilárdan megköthetünk, az *A—A* forgási tengely vízszintessé tételére szolgál.*)

A *B* alaptestből egy vízszintes prizmatikus nyúlvány (*y*) a *P* talplemezzel szilárdan összekötött vertikális fémkeretbe (*R*) nyúlik; e keretbe van ágyazva két szemközti vízszintes igazító csavar (*δ—δ*), amelyek a *B* test *y* nyúlványát közrefogják. A *δ—δ* igazító csavarokkal tehát az egész műszert a *h* pont körül vízszintes értelemben szűk határok között elforgathatjuk és *szilárdan* rögzíthetjük.

A törött távcső itt nem a III. kötet 16. oldalán (23. ábra) látható *G* súlylyal, hanem az *N* segmenttel van ellensúlyozva: e segmentet fogjuk meg, amidőn a távcsövet vertikális értelemben szabadkézzel fel- vagy lehajtjuk; finomabb ily értelmű mozgatásra szolgál (a *d* kötő csavar megszorítása után) az *ω*-val jelzett magassági irányító parány csavar.

A forgási tengelynek okulár szerkezete előtt van a *K*-val jelzett *zenitkör (kereső-kör)* a tengelyre ékelve**); ennek ellensúlyozására szolgál a tengely másik végén látható *g* súlyos korong.

Egy rendkívüli érzékeny, rendkívüli nagy nyereglibella van a horizontális forgástengely két forgó csapjára függesztve. E libella két vertikális fafoggantyúval megfogva, felcserélt végekkel átfektethető a vízszintes forgástengelyen. A libella két horizontális és két vertikális igazító csavarral igazítható horizontális és vertikális értelemben a műszer forgástengelyéhez. A libella végig skálával van ellátva és üvegburokkal, valamint posztó áthuzattal hirtelen hő és szélhatásoktól meg van védve.

Hogy az észlelések *két távcsőállásban* eszközölhetők legyenek, a vízszintes forgási tengelyt (távcsővel, libellával együtt) ki lehet emelni a csapjaiból és *felcserélt végekkel* vissza lehet ismét fektetni.

Ez a *„tengelyátfektetés“* (kör kelet—kör nyugat) azonban nem szabadkézzel történik, hanem külön emelő mechanismus segélyével.

Ugyanis a *B—B* testben van egy *vertikális henger*, amely az *r—r* lemezzel egy testet alkot. Az *r—r* lemezre pedig két görbe oszlop (hogy a libella ne érje, azért görbék) van erősítve, melyek mindenike két-két frikciós *(rugós)* kerékkel érinti az *A—A* vízszintes tengelyt. A *Q C* emelőkar elforgatása által az itt leírt szerkezet nehány centimeterrel feltolódik: felemelve az *A—A* tengelyt. Most szabadkézzel elforgatjuk 180°-al a kiemelt részt (*A—A*-val együtt) az emelő szerkezet (*B—B*)-ben levő (említett) hengere köré és azután a *Q C* emelő kart ellenkezőleg forgatva (óvatosan): az *A—A* tengely a csapjaiba jut az előbbi helyzetéhez képest felcserélt végekkel. (Kör keletből—kör nyugatba és viszont.)

A *szálkereszt* áll a vertikális **középszálból** és (jobbra-balra) több vele parallel és közel egyenlő távolokban elhelyezett oldalszálból; ezekre merőlegesen van a látmező közepén **két** vízszintes szál egymáshoz nem túlságosan közel (1′— 1.′5). E két szál *között* figyeljük a megirányzott csillagnak a vertikális szálakon való átmeneti idejeit.

---

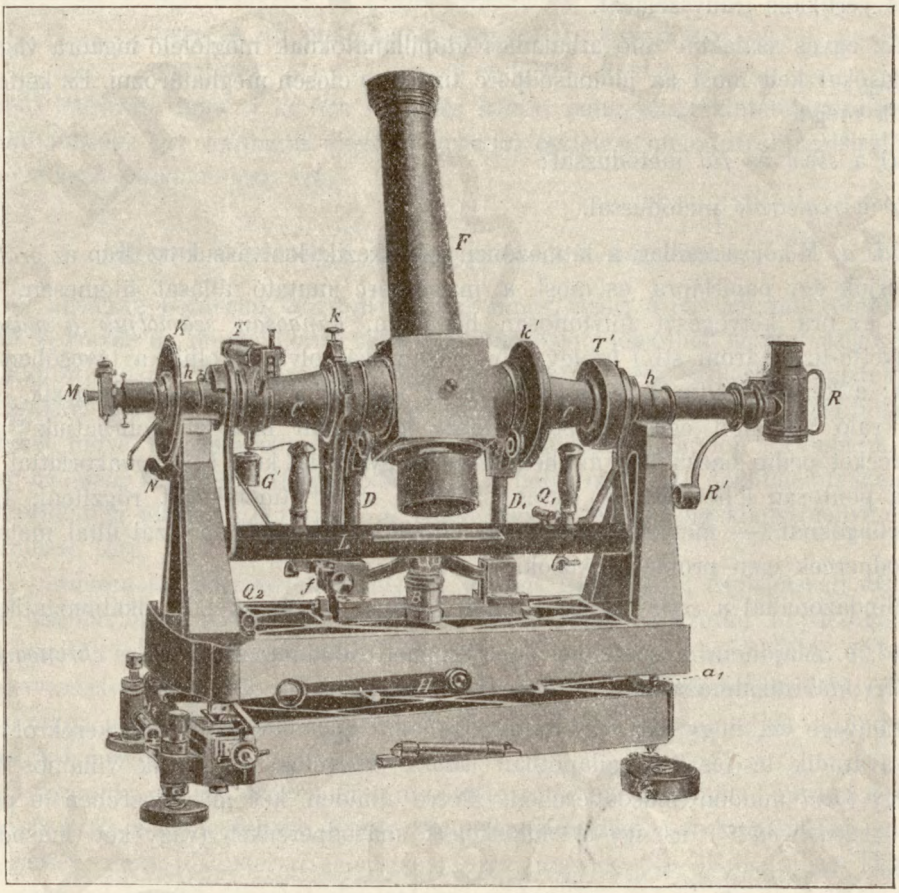
*) A *h* csavar alsó vége gömbalakú és a *P* lapba van sülyesztve; az *i—i* lábacskák gömbvégződései a *P*-re helyezett két kis lemezkén szabadon nyugszanak.

**) A kérdéses csillagnak előre kiszámított zenittávolságára hozható így a távcső.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ami a már felállíttot műszer igazítását illeti (A—A vízszintes; irányvonal az A—A-ra merőleges; középszál merőleges A—A-ra) úgy az a teodolitra adott séma (III. kötet) szerint történik szószerint.

Ujabban a telegráfikus földrajzi hosszúság különbségek mérésére (az időmeghatározáshoz) szállításra alkalmas *passage* műszereket használnak, amelyek rendesen a *Döllen*-féle alvázzal vannak ellátva a horizontális irányban való korlátolt (6°) elmozdulások lehetővé tétele végett. (66. ábra.) Ezen elmozdulások skálán leolvashatók; ez a berendezés a sarkcsillag vertikálisában való (Döllen-féle) méréseket enged végezni.



66. ábra.

E műszereken azután az okulár rendesen egy úgynevezett „*registráló-mikrometerrel*“ van ellátva az átmeneti időpontok automatikus és absolut pontos mérésére. A legtökéletesebb ilynemű berendezés a *dr. J. Repsold*-féle, amelynek feltalálásához a kalocsai csillagda egykori igazgatója (Braun J.) adta az alapvető gondolatot.

A 66. ábrán látható egy *Gustav Heyde* (Dresden)-féle passage műszer, amely *Horrebow-Talcott*-féle libella szerkezettel is el van látva, amiről később lesz szó.

A szálátmeneti időpontok meghatározása.

Miután az észlelési hely közelítő földrajzi szélességének (φ) és az évkönyvi csillagdától való földrajzi hosszúságának (λ) közelítő értékét mindig ismerjük, továbbá mivel a rendelkezésre álló ingaóra vagy chronometer állásából a helyi csillag vagy középidő is

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

közelítőleg ismeretes: az évkönyvi adatok (ephemeridák) segélyével kiszámíthatjuk előre, hogy a meridiánba vagy az I. vertikálisba állított passage műszerünk távcsövét mily zenittávolságra kell előzetesen állítani, hogy egy bizonyos csillag átmenetét megfigyelhessük és azt is tudjuk előre közelítőleg kiszámítani, hogy óránk szerint *mikor* jelentkezik a szóban forgó csillag a távcső látmezejében.

Ha ez a jelentkezés bekövetkezett, úgy először is a magassági irányító csavar forgatásával a két vízszintes szállal közrefogjuk a csillag képét és továbbra is közrefogva tartjuk. A szóban forgó csillag gyors vagy lassú *) mozgással átvonúl a látmezőn: átmetszvé az összes vertikális irányszálakat.

Az egyes szálakon való áthaladási időpillanatoknak megfelelő ingaóra vagy chronometer állásokat kell most az időmásodperc tizedeire élesen meghatározni. Ez kétféle módon történhetik meg:

a) a *szem* és *fül* metodussal;

b) a *registráló* metódussal.

ad. a. Mikor a csillag a látmezőben jelentkezik, leolvassuk az órán az *órát* és *percet* és azt leírjuk egy papírlapra és most a másodperc mutató állását ütemesen, hangosan leolvasva, az óra ketyegését folytonosan hallgatva, *hangosan számoljuk a másodperceket* (pl. tizenkettő-tizenhárom stb.) és így folytonosan számolva figyeljük a távcsőben a csillag haladását; a kezünk pedig a ceruzával írásra készen a papirlapon nyugszik. Az egyes szálakon való átmeneti egész másodperceket így aztán biztosan felírhatjuk **), a tizedmásodperceket pedig becsüljük: amihez azonban gyakorlat kell. Kellő gyakorlattal $\pm 0{\cdot}2^s$—$\pm 0{\cdot}3^s$-ra pontosan lehet így az egyes szálakon való átmeneteket rögzíteni. Igen lassú járású csillagoknál — melyek néhány másodpercig látszanak a szál által metszve — a tizedmásodpercek igen problematikusok.

Mindazonáltal a *szem- és fülmetodus szabatos* méréseknél is alkalmaztatik.

ad. b. Majdnem automatikus az átmeneti időpont rögzítés a *chronograph* vagy *registrálókészülék* alkalmazásakor.

Lényege az, hogy egy súly vagy rugó által egyenletesen hajtott kerékről egy papirszalag csavarodik le feszített állapotban (*Morse* készülék) és óránk villamos kontaktus folytán egy *tüvel* minden másodpercben, illetve minden két másodpercben e papirszalagon egy *szúrást ejt****) és így a szúrásközök másodperceket (vagy két másodperceket) jelentenek.

Hasonlóan lesz most már az áramkörbe egy nyomó billentyű *(Taster)* bekapcsolva, melynek segélyével az észlelő az átmeneti pillanatban szúrást ejthet a nevezett papirszalagon. Ezen szúrás távola a megelőző *óraszúrástól* adja az átmeneti időpont *tized* és *század* másodperceinek értékét.

A legszabatosabb méréseknél ez a registráló metodus nyer alkalmazást.

Mindkét átmenet észlelési metodusnak két kis hibaforrása van. Az egyik a csillag *sebességével*, a másik tisztán az egyéni és szerkezeti tökéletlenségekkel van összefüggésben.

---

*) Ha a csillag közel van a polushoz, úgy haladása lassú és minél távolabb van a polustól, annál nagyobb a sebessége.

**) Persze ezt a feljegyzést meg kell tenni úgy, hogy nem nézünk le a papirosra melyen írunk: szemünk állandóan a csillagra van irányítva.

***) E tűszúrások tehát a papirszalagon egyforma távolban lesznek egymástól.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Az *előbbinek* képlete:

$$\mu = \frac{b}{v} \sec\delta \operatorname{cosec}\eta,$$ ahol b egy állandó, v a nagyítás, δ a csillagdeklinációja, η pedig a csillag haladási irányának szöge a szálakhoz.

A másodiknak képlete (vertikális szálakra)

$$\varepsilon = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{v}\right)^2 \sec\delta^2 \operatorname{cosec}(90° - \eta)}$$

amely kifejezésben a és b állandók és pedig tapasztalat szerint:

szem és *fül* metodusnál $a = 0.^s07$; $b = 3.^s18$
registráló „ $a = 0.^s05$; $b = 3.^s18$

Ebből látnivaló, hogy a kétféle metodus között pontosság tekintetében nincs valami igen nagy különbség. Egy harmadik (legszabatosabb) észlelési metodusról (registráló mikrometer) a következő §-okban lesz szó.

Miként helyezzük a passage műszert a meridiánba?

Mivel absolute pontosan igazított műszer nincs, azért a passage műszernek a meridiánba való (egyszer és mindenkorra való) beállítása sem jelenthet *absolut* szigorú műveletet. A felállított műszer *kis azimutális* hibája azután az arra szolgáló képletekkel úgy lesz a méréseknél számba véve, mint akár a *collimáció* hiba, vagy az *inclináció* hiba.

Ezeket tudva, a passage műszer beállítása a következő módon történhetik.

Egy *boussola* segélyével (figyelembe véve a helyi mágneses deklinációt) szemmérték szerint a meridiánba állítjuk a műszert; a collimációt a lehetőségig kiküszöbölve és a tengelyt vízszintessé téve.

Egy chronometer segélyével, amelynek *járását ismerjük*, a csillagászati évkönyvből vett adatok alapján beirányozzuk a *sarkcsillagot* közelítőleg és azután a passage műszer vízszintes (forgató) igazító csavaraival a sarkcsillagot a középszálra hozzuk. E csavarok folytonos csavarásával követjük e csillag lassú mozgását és amikor óránk a *kulmináció időpontját* mutatja (az óra járását figyelembe véve) akkor megszüntetjük a forgatást és *megrögzítjük* a műszert.

Ez a primitiv eljárás azért adhat megfelelően pontos beállítást, mert a *sarkcsillag* a mi zonánkban 1^m alatt legfeljebb $33''$-et változik azimutban a kulmináció idején és így ha óránk járása nem tökéletesen ismeretes, azaz hogyha $2^s - 3^s$-ra hibás időpontban hagytuk is abba az igazító csavarok forgatását: a beállítás mégis oly éles, hogy a fennmaradó azimutális hiba a méréseknél a műszerhibák módjára egyszerű képletekkel számításba vehető.

A szálátmeneti időpontok redukálása a középső szálra.

Az így a meridiánba állított műszeren az előbb leírt módon figyelve valamely csillagra nézve az egyes szálakon való átmeneteket; ezeket az átmeneti időpontokat a középső szálra kell vonatkoztatni, úgy, hogy levonjuk az észlelt átmeneti időpontokból (vagy hozzáadjuk) azt a időtartamot (l), amely alatt a csillag az oldalszáltól a középszálhoz (vagy viszont) eljut.

Ezen l időtartamot adja a

1. . . . . $\sin l = \sin f . \sec\delta$

képlet, ahol f az illető szál ekvatoriális távolsága a középszáltól és δ a csillag deklinációja.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ha az *állandó* f értékeket időmásodpercekben akarjuk a számításba vinni, akkor a redukció szigorú képlete:

2. . . . . $\sin l = 15 \sin'' f^s \sec \delta.$

Gyakorlatilag fontossággal bír, hogy oly csillagokra, amelyeknek δ-ja kisebb 80°, az

3. . . . . $l^s = f^s \sec \delta$

szerint végezhetjük az éles szálredukciót.

Hogy a polus körüli csillagokra (polustávolság $< 10°$) is kényelmes legyen a számítás, a 2. képletet a

4. . . . . $\log l^s = \log (f^s \sec \delta) + d$

alakra hozták, ahol a d tag egy számtáblázatból (Albrecht: Formeln etc.) kivehető a $\log (f^s \sec \delta)$ argumentumhoz.

Jegyzet: Egy bizonyos műszerre nézve a megállapított f^s értékeket alapul véve minden egyes szálra számtáblázatot készíthetünk δ argumentummal ($\delta = 0°, 1°, 2°, 3°, \ldots 89°$), amely a $\log (f^s \sec \delta)$ értékeket is készen adja.

Az f^s értékeket az adott műszer minden egyes szálára nézve sok csillagátmenet megfigyelésből állapíthatjuk meg az 1. képlet alapján:

$$\sin f = \sin l \cos \delta$$

az ismeretes δ és az észlelt l-ekből; illetve ha 80°-nál kisebb δ-val bíró csillagokkal csináljuk e méréseket úgy az

$$f^s = l^s \cos \delta$$

képlet adja az f^s-et.

Az f^s értékek szabatos meghatározására *nagy* deklinációval bíró csillagokat célszerű használni, mert akkor a l hibája legkisebb hatású az f-re.

3. §. Az universál műszer.

Jellemző tulajdonságai, hogy

a) a magassági kör ép oly gondosan készült és ugyanoly mikroskopokkal van ellátva, mint a limbus kör,

b) éjjeli mérésekre alkalmas,

c) vagy törött, vagy külpontosan elhelyezett távcső által igen meredek (vertikális) irányzásokra is alkalmas.

Ezen astronomiai műszereknek méretei igen különbözők; tájékozásul itt említjük meg, hogy a m. kir. háromszögelő hivatal *egészen szabatos sarkmagasság és azimut méréseket* végez évek óta oly universal műszerrel, amelynek adatai:

objektiv átmérő = 47 mm;
gyujtóponttávolság = 490 mm;
magassági kör átmérője = 300 mm;
közvetlen mikroskop leolv. = 1″;
index libella pars értéke = 2.″30.

A műszert a mezei észleléseknél vagy *falazott pillérre*, vagy betonalapra állitott szállitható üreges vaspillérre (amely földdel lesz kitöltve) állitjuk és felül teljesen nyitható észlelő sátorral körülvesszük.

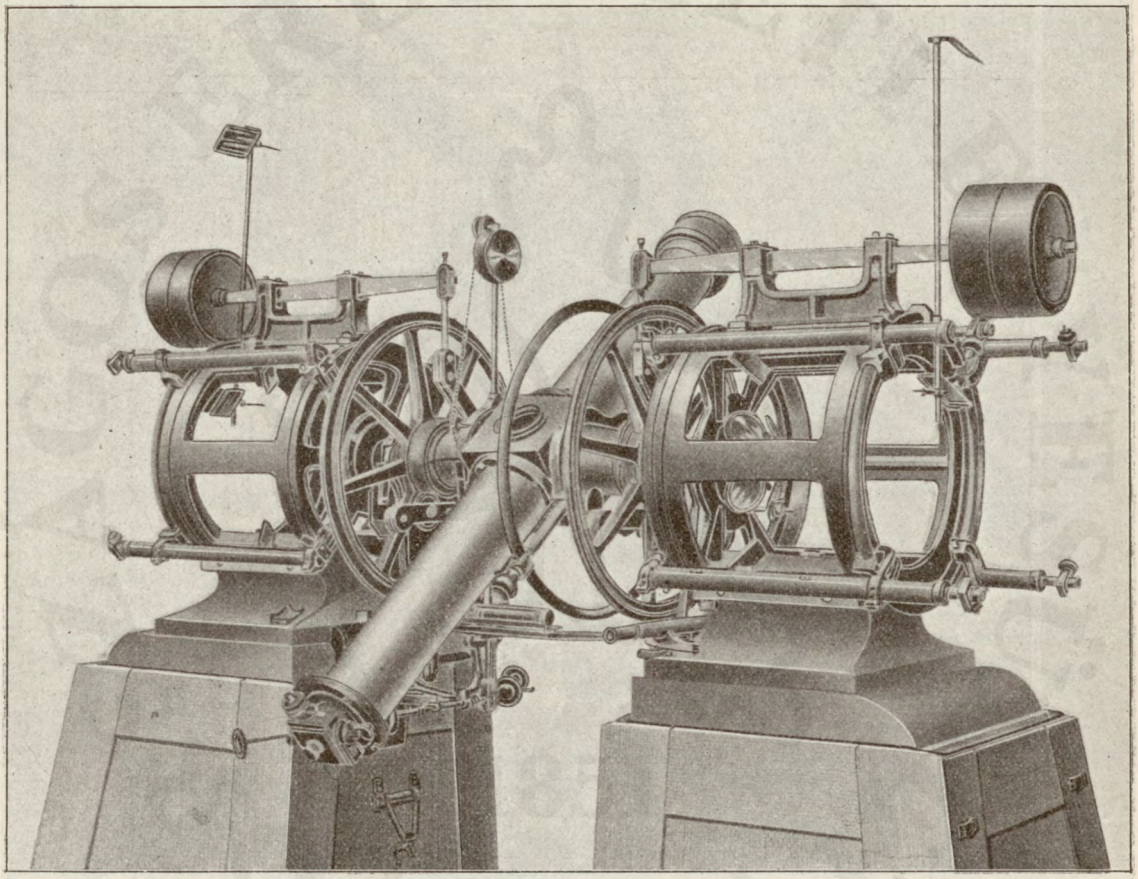
Régente szorzó rendszerűek voltak az universal műszerek, *ma azonban kizárólag* ismétlő rendszerüeket készitenek ugy a *vertikális*, mint a *vizszintes* körre nézve. A tökéletes müszernél a távcső nemcsak teljesen áthajtható, hanem szabadon át is fektethető a csapjaiban. Nagyobb müszereknél ez az átfektetés külön emelő szerkezettel végezhető. A távcső felső alkotóján (törött távcsöveknél kivánatos) közelitő irányzást engedő *dioprát* találunk.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Rendesen 5—6 vertikális és *két-három* horizontális szálat látunk a látmezőben: ezek vagy pókhálószálak, vagy platina szálak vagy ujabban üvegen létesitett hajszálvonalak. A szálkereszt megvilágitásáról a III. kötetben megemlékeztünk (16—17. oldal).

Ha az universal müszer *Horrebow-Talkott*-féle libella szerkezettel van ellátva, ugy az irányszál *Repsold*-mikrometerrel mozgatható és az egész okulár 90°-al elforgatható azért, hogy a mozgó szál vertikális és vizszintes helyzetben egyaránt használható legyen.

Ez a libella egy megszoritható gyürüvel van a horizontális forgási tengelyre szerelve: a leolvasó tükörrel ellátott libella 90°-ot zár be a forgás tengelylyel vizszintes értelemben. Ezen 1.″5—0.″9 érzékenységü libella teljes skálával (0-pont a végpont) van ellátva és egy végén vertikális, rugos mikrometer csavarral emelhető vagy sülyeszthető.



67. ábra.

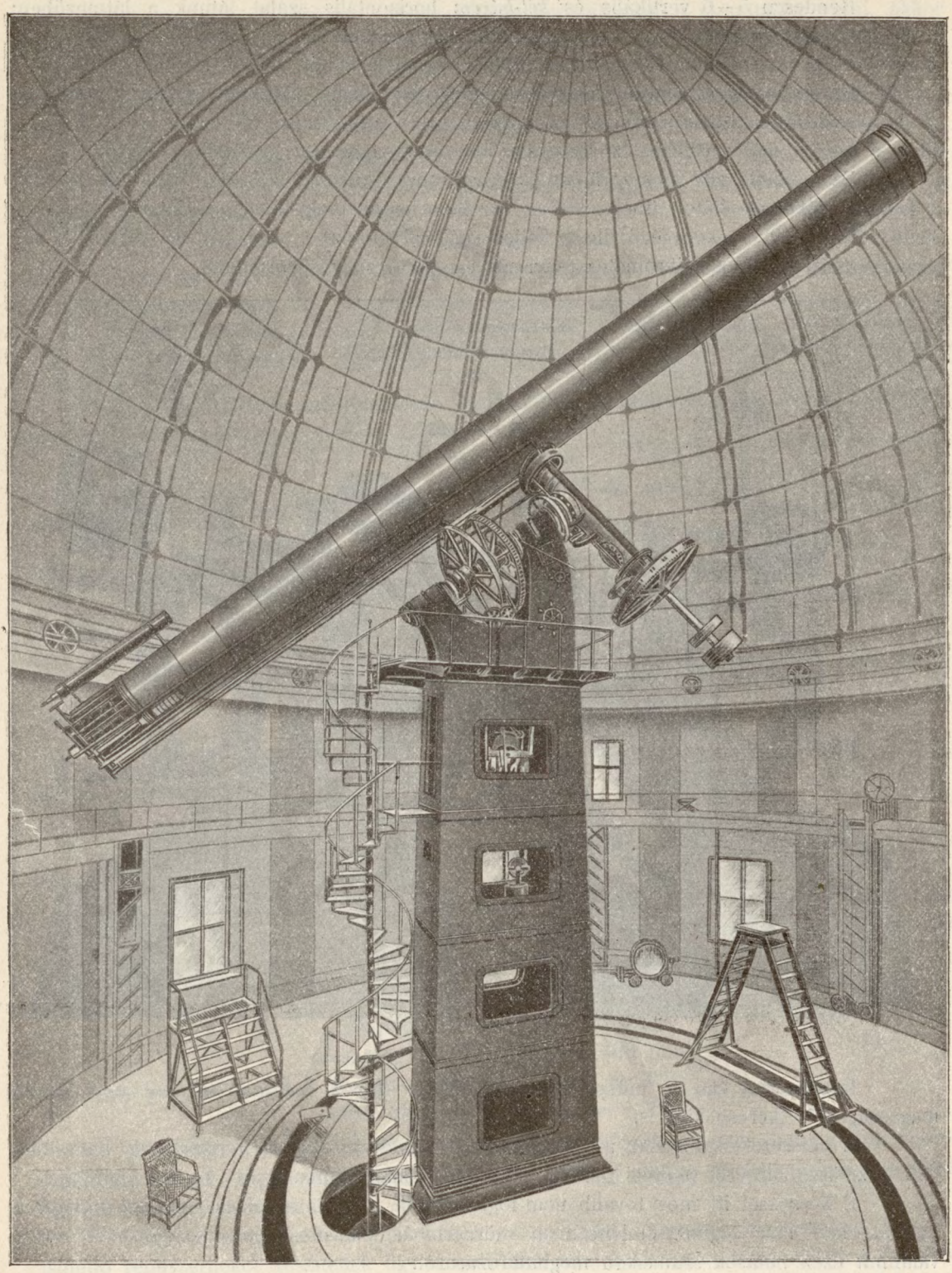
Rendszerint van a müszeren a magassági *durva beállitás* céljából egy kisebb magassági kör (kereső kör) is.

E müszerek igazitását a III. kötetben tárgyaltuk, ahol a müszerhibák hatásának lehető kiküszöböléséről (mérési módszerrel) is megemlékeztünk.

E kérdéssel itt most tovább nem foglalkozunk, mert az egyes csillagászati müveletek tárgyalásánál meg fogunk emlékezni a müszerhibák hatásának mikénti kiküszöböléséről, valamint ezen hatások számszerü meghatározásáról.

Jegyzet. Néhány speciális csillagászati müszerről is megakarunk itt emlékezni, megjegyezvén, hogy ezek a *geodéziával* kapcsolatos asztronomiai mérésekben nem szerepelnek. Ezek a *meridiánkörök*, a *refraktorok*, (ekvatoriálék) és a *reflektorok*.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.



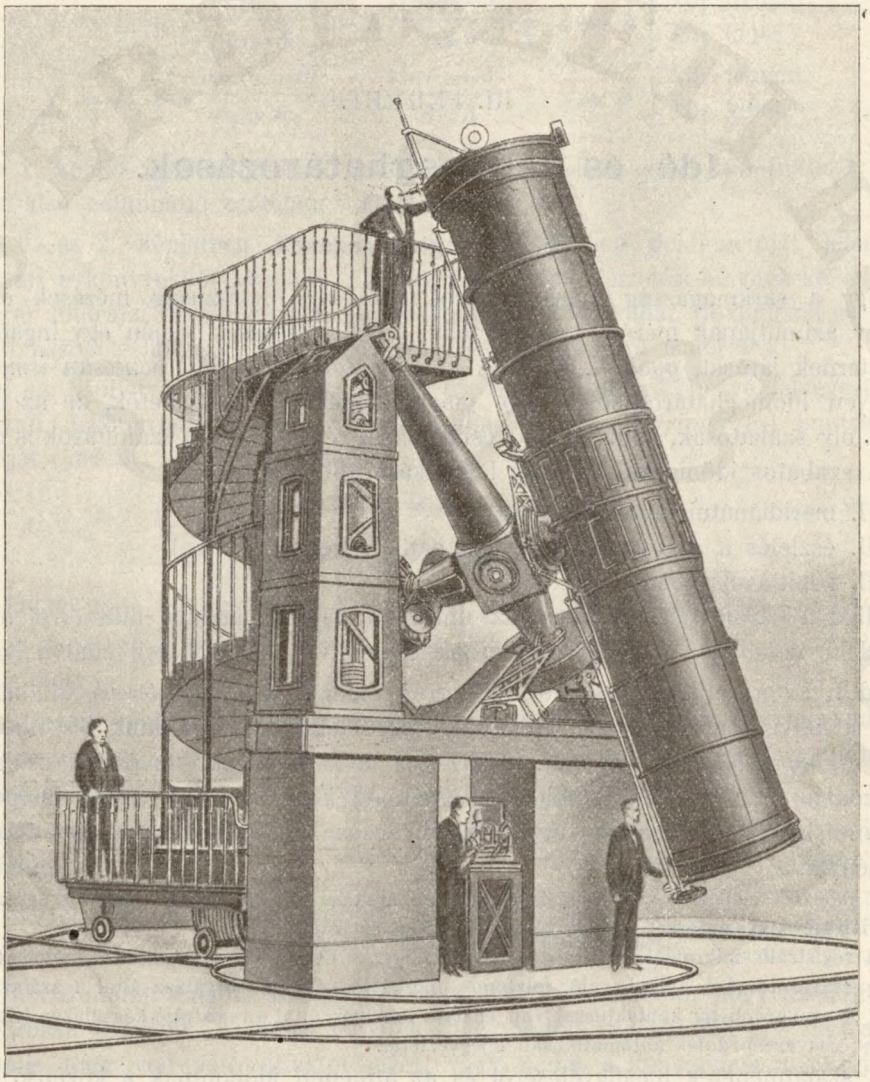
68. ábra.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A *meridiánkörök igen nagy* méretü passage műszerek, amelyek a kulmináló égitestek *deklinációinak* szabatos mérése végett két nagy, szabatosan munkált magassági körrel (mikroskopleolvasások) vannak ellátva. A 67. ábra a bécsi *Kuffner*-féle csillagda nagy meridiánkörét ábrázolja.

Két magassági kör látható: mindegyikhez négy index *(mikroskop)* tartozik. Az objektiv átmérője *16* cm, a gyujtótávolság *189 cm.*

Bármely csillag látszólagos égi mozgása folytonosan követhető oly távcsővel, amely egy a *föld forgástengelyével* parallel tengely és egy erre merőleges tengely körül forgatható. Az előbbi forgási tengelyt *polár* tengelynek, az utóbbit *deklináció* tengelynek nevezzük. A müszert a polár tengely körül forgatva a deklináció tengely az égi ekvátor sikjában mozog.



69. ábra.

A szóban forgó két tengelyre merőlegesen rászerelt körökön közvetlenül deklináció különbségek és rectascensió különbségek olvashatók le. A 68. ábrán az ezidőszerint legnagyobb *refraktort* (Lick-Observatorium Amerika) mutatjuk be. Objektiv átmérője = *91* centimeter (Crown és Flint üveg lencsepár); gyujtótávolsága *17* meter.

Ezen óriási szerkezet az észlelö által automatikusan bármily nagy vagy finom mozgásba (beállitásba) hozható. A leolvasási körök átmérői 90 cm. és 180 cm. közt változnak.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A *katoptrikus távcsöveknél (Tükörteleskopok)* az objektiv lencse helyett egy gömbi vagy parabolikus tükör van alkalmazva, amely a tárgyról jövő sugarakat felfogja és teljes visszaverődéssel a fokuszában képpé egyesiti, amely kép aztán az okuláron át nagyitva szemlélhető.

Ezen szerkezetre az a körülmény vezetett, hogy a lencsék fényszóródása miatt, nem lehet igen nagy refraktorokat szerkeszteni.

Reflektorok alatt ily katoptrikus távcsővel felszerelt ekvatoriál műszert (polár tengely, deklináció tengely, körökkel) értünk.

Ezek óriási méretekkel készülhetnek; a 69. ábrán bemutatjuk a párisi esillagdának nagy reflektorát. Ugy a refraktorok, mint a reflektorok fotographikus égitest felvételekre is be vannak rendezve.

A csillagászati műszerek és felszerelések tanulmányozására a legajánlatosabb nagyobb munka: *Dr. L. Ambronn* „Handbuch der astronomischen Instrumentenkunde. Berlin, 1899." két kötetben.

III. FEJEZET.

Idő- és helymeghatározások.

I. §. Időmeghatározások.

Ugy a sarkmagasság mérések, mint a földrajzi hosszuság mérések és valamely földi irány azimutjának mérése megkövetelik, hogy a mérések idején egy ingaórának vagy chronometernek járását, *gyakori, szabatos időmeghatározások által pontosan ismerjük.**)

Ilyen időmeghatározások a *nap* megfigyelésével is végezhetők, de az eredmények soha sem oly szabatosak, mint az álló csillagokkal végzettek és a számitások is nehézkesek.

A szabatos időmeghatározások legszokásosabb módjai:

I. meridiánátmenetek észlelése;

II. észlelés a sarkcsillag vertikálisában (Döllen módszere);

III. zenittávolságok mérése.

Mind a három eljárás vagy az universál vagy a passage müszerrel elvégezhető; a II. esetben azonban a passage müszernek Döllen-félé alvázzal kell ellátva lennie.

ad I. Ez az eljárás passage müszerrel végezve a *legtökéletesebb* különösen akkor, ha csakis a helyi zenithez közel kulmináló időcsillagokat használunk, *és mialatt a megészlelendő csillag a látmezőn átvonul, a távcsövet át is fektetjük;* az észlelt csillagok között legyen azonban mindég egy a polushoz lehetőleg közel keringő csillag is (például az α Ursae minoris). Ilymódon azután az azimuthiba és a kolimáció hiba hatása teljesen kiesik az eredményből.

E módszer mellett a szálátmeneti redukció számitása elmarad és a személyes egyenlet is kiesik, ha egy **regisztráló-mikrometerrel** ellátott passage müszert használunk.

A regisztráló mikrometerrel ugy mérünk, hogy a csillagot a mozgatható szállal takarjuk és a mikrometer csavarnak *két* kézzel való folytonos mozgatása, illetve forgatása által a szálat rajta tartjuk a csillagon. A csavardob tiz kontaktussal van ellátva: amelyek által a regisztráló készüléken (Chronographon) minden tized csavarelfordulás automatikusan lejegyeztetik.

A szálátmenetek megfigyeléséről és az átmeneti időpontnak a középső szálra való redukálásáról már az előbbi fejezetben (2. §.) megemlékeztünk. Itt most a műszerhibákat és azok hatását az időmeghatározásra kell tárgyalni.

Hibaforrások itt: a *horizontális* tengely hajlás szöge *(i)*, amely positiv előjelü, hogyha a tengely *nyugati* vége magasabb; az *azimuthiba (k)* azaz a vizszintes forgás-

*) Szabatos időmeghatározásokat kivánnak a nehézségi erő mérések (ingamérések) is, az összehasonlitó ingaóra járásának gyakori megállapitása céljából.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

tengelyre merőleges síknak a meridiánnal bezárt kis szöge, amely positiv, hogyha az említett merőleges sík a *déli* meridiántól keletre hajlik el; a távcső *collimatiója (c)* azaz a távcső optikai tengelyének a vizszintes forgástengelyre merőleges iránnyal bezárt szöge, amely *positiv*, ha a horizontális tengelynek magassági körrel ellátott fele 90°-al nagyobb szöget zár be a távcsővel positiv forgási értelemben.

Ha ezen i, k és c értékeket számszerüleg ismerjük (meghatároztuk) és ha U jelenti a *középszálra redukált átmeneti óraidőt*, akkor a valódi *meridiánon* való átmenetnek időpontja (az óránk szerint) kiszámitható a *Mayer* képlettel:

$$1. \quad T = U + i\frac{\cos(\varphi-\delta)}{\cos\delta} + k\frac{\sin(\varphi-\delta)}{\cos\delta} \pm c\sec\delta \begin{cases} \text{kör nyugat.} \\ \text{kör kelet.} \end{cases}$$

$$2. \quad T = U + i\frac{\cos(\varphi+\delta)}{\cos\delta} + k\frac{\sin(\varphi+\delta)}{\cos\delta} \mp c\sec\delta \begin{cases} \text{kör nyugat.} \\ \text{kör kelet.} \end{cases}$$

Az 1. képlet arra az esetre vonatkozik, ha a csillag *felső kulminátióját* észleltük; a 2. képlet alsó culminátió esetében alkalmazandó.

Az 1. és 2. képletben szereplő δ a figyelt csillag deklinációját jelenti, amely a csillagászati évkönyvekből kivehető; a φ pedig az illető észlelési helynek közelitő (nehány másodpercre) földrajzi összrendezője, amely vagy egy topográfiai (fokhálózatos) térképből, vagy a háromszögelésből vagy (közelitő) sarkmagasságmérésből ismeretes.

Ha az 1. illetve 2. alatti számitást az illető csillagra nézve elvégeztük, akkor a csillagászati évkönyvből kívéve az illető csillag *rektascensiójának* (α) pontos értékét*) óránk hibáját (járását) adja ez a képlet:

$$3. \quad \Delta U = \alpha - T$$

$$4. \quad \Delta u = \alpha + 12^h - T$$

ahol a 3. képlet *felső* kulminációra, a 4. képlet pedig *alsó* kulminációra vonatkozik.

E módszerrel a ΔU értéke (a mérési hibák hatását tekintve) $\pm$ 0^{s}02-ra élesen határozható meg.

Itt tüstént meg kell emliteni, hogy az 1. és 2. képlet második, harmadik és 4-ik tagjának kiszámitása (ha i, k, c, φ, δ adottak) az Albrecht-féle segédtáblázatokkal (17—22. számu) számitható ugy a polár. mint az idő csillagokra nézve.

Hátra van tehát még az i, c és k müszerhibák számértékeinek mikénti meghatározását előadni.

Az inclináció (hajlás) meghatározása.

A horizontális tengely libellájával lesz elvégezve; feltétel, hogy ezen libella parsértékét pontosan ismerjük. E hajlásmérést kétféle módon végezhetjük el: vagy a libellának a horizontális tengelyen való átfektetésével, vagy pedig a tengelynek a csapjaiban való átfektetésével, miközben a libella a tengelyen érintetlenül lóg.

A buborék mindkét végét leolvasva, a *négy leolvasás számtani közepe* szorozva a pars értékkel, megadja az i értéket. Itt azonban a következőket kell tudni: ha a libella skála 0 pontja a cső egyik *végén* van (végről osztott libella) akkor ha a kezdőpont *kelet*

*) Megjavitva a napi aberrációval amely $= \pm 0^s021 \cos\varphi \sec\delta \begin{cases} \text{felső kulmináció.} \\ \text{alsó kulmináció.} \end{cases}$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

felé van, ugy mindkét buborékvég leolvasása + előjelü; ha a 0 pont a libella közepén van (symmetrikus számozás), akkor a *nyugati* buborékvég leolvasása positiv, a keleti vég leolvasása negativ előjellel veendő.

Az ilyen módon meghatározott i érték még egy kis Δi javitást is igényel, amely a két csap nem absolut egybevágó kimunkálásából ered:

$$\Delta i = {}^1/_4 \, (i - i'),$$

ahol **i** és **i'** a két helyzetben való hajlások. Az $i - i'$ különbség sok átfektetéssel lesz meghatározva mindkét tengelyfekvésben.

A kollimatió (c) meghatározása.

Ha minden egyes csillag átmenete közt a távcsövet át tudjuk fektetni: akkor a c-t nem is kell meghatározni, mert hatása az időmeghatározásra akkor eliminálatik.

Ha ezt a módszert azonban minden egyes csillagra nézve nem tudjuk alkalmazni, akkor két módon mérhetjük meg a c együttható értékét:

1. módszer egy az észlelővel lehetőleg egy nivóban levő távoli pontra való irányzásból két távcsőállásban. Ha e két irányzás limbus leolvasásai l_j (kör jobb) és l_b (kör bal) és a megfelelő inclinációk:

i_j és i_b úgy a keresett c szigorú értéke:

$$c = \pm \frac{1}{15} \left(\frac{l_j - l_b}{2} \pm 90^\circ \right) \sin z + \frac{1}{15} \frac{i_j - i_b}{2} \cos z$$

ahol z a megészlelt tárgy zenittávolsága, amely tehát közel 90°;

2. módszer a sarkcsillag átmenetének észlelése *két távcsőállásban*. Ha U_k a sarkcsillagnak a középszálra redukált átmeneti ideje *„kör-kelet"* fekvésben és U_{ny} a *„kör-nyugati"* fekvésben *) és e két értéket az i hatásával már megjavitottuk, úgy

$$c = \pm \frac{U_k - U_{ny}}{2} \cos \delta = \pm \frac{U_k - U_{ny}}{2 \sec \delta} \begin{cases} \text{felső} \\ \text{alsó} \end{cases} \text{ kulminációnál.}$$

Tapasztalat szerint most már ez a két módszer sohasem adja szigorúan ugyanazt az eredményt: aminek oka a távcső, illetve a tengely áthajlása és ennek folyománya z-től függő c érték.

A szigorú képlet *Albrecht* szerint ezért

$$c = c_0 + b \cos z$$

ahol a c_0 és **b** legmegbízhatóbb értékei az 1. és 2. módszer szerint ismételt alkalmazásával lesz meghatározva.

Az azimuthiba (k) meghatározása.

A *passage*-műszer tárgyalásánál előadtuk, miként kell e műszert lehető pontosan a *meridiánba* beforgatni. Ez absolute pontosan sohasem érhető el; meg kell tehát határozni

*) Például 7 szál esetében megfigyeljük a sarkcsillag átmenetét a szélső (1) azután a 2., 3. és 4. szálon; most átfektetjük a horizontális tengelyt, ugyanarra a z-re állítjuk a távcsövet és mivel a sarkcsillag *lassan* mozog, az még nem ment át a következő szálon, tehát figyelhetjük az átmenetet a 3., 2. és 1. szélső szálakon.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

ismételten a fennmaradó k értéket és azután a szilárd földi iránypontot (Mire) létesíteni, amely a beállítás állandóságára enged bármikor következtetni.

A k meghatározása egy *polárcsillag* és egy (esetleg több) időcsillag átmenetének kombinálásával érhető el.

Ha U' jelenti a polár csillagnak a középszálra redukált és az inklinációval megjavított átmeneti óra idejét**) α' pedig a *rectascensióját; U* jelenti egy időcsillagnak a középszálra redukált és az i és c hatásától számítással megjavított átmeneti idejét és α e csillag rektascensiója, úgy a keresett k-t adja ezen képlet:

$$k = \frac{(\alpha' - U') - (\alpha - U)}{\left(\frac{\sin(\varphi - \delta')}{\cos \delta'}\right) - \left(\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta}\right)},$$

ahol a nevezőben levő két tag a *Mayer* képlet k-jának együtthatói, amelyeknek számszerű értékei az *Albrecht*-táblából kivehetők.

A k meghatározására különösen universál műszer esetében *Borrass* tanár (Potsdam) adott egy egészen új eljárást. (Lásd Albrecht: Formeln . . . 27. oldal.)

Az ezen cikkben előadott módon végezte szerző nehány éven át a régi műegyetemen felállított passage műszerrel a szertári chronometer járásának havi meghatározását úgy, hogy egy este 7^h és 9^h közt kulmináló polárcsillagot és *négy* időcsillagot használt egy teljes meghatározáshoz. A megfigyelés a *szem és fül* metodussal történt.

Az első két időcsillag átmenete kör keletben figyeltetett; a poláris csillag kör keletben *és* kör nyugatban (átmenet közbeni átfektetéssel) a két másik időcsillag pedig kör nyugatban észleltetett. Közben minden észlelésnél i méréseket eszközöltünk.

A k és c értékek a mérési eredményekből előzetesen, ki voltak számíthatók: így azután a *Mayer* képlet megadta a valódi meridiánon való áthaladási óraidőket. Ily módon öt értéket nyertünk a ΔU órakorrektióra: ezek számtani közepe megadta a legmegbízhatóbb óra járási értéket.

Mivel a chronometerünk *középidő* szerint járt: az évkönyvi csillagidőkből észlelés, illetve számítás előtt át kellett térni középidőre.

A chronometer azután a műegyetemi nyilvános óra járásának kiigazítására, illetve ellenőrzésére használtatott fel. Mivel a nyilvános óra *zónaidő* (középeurópai) *szerint járt:* a chronometer adta középidőből a $16^m\ 15.^s4$ értéket (budapesti zónakorrekció) kivonva, nyertük azt az időt, amit a nyilvános órának mutatnia kellett.

ad. II. A szabatos időmeghatározásnak ezen második módját különösen mezei állomásokon szokás alkalmazni. Vagy universál műszerrel, vagy Döllen-féle alvázzal ellátott passage-műszerrel végezhető a mérés. Ez utóbbi esetben (passage-műszer) azonban *Albrecht* szerint mégis helyesebb a legszabatosabb értékeket adó előbbi eljárást (meridián átmenetek) alkalmazni.

Ezen módszer az észlelési hely földrajzi szélességének ismeretét tételezi fel; akkor vagy az α vagy a λ Ursae minoris csillagnak vertikálisában (bármely időpontban) végezhető a csillagátmenetek megfigyelése.

Ha a földrajzi szélesség egészen pontos értékét nem ismerjük, úgy az α Ursae minoris vertikálisában és pedig közel a kulmináció időpontjában, végezzük el az átmenetek megfigyelését. Tehát az U' óra idő pontban beirányítjuk a sarkcsillagot a középső szálon

**) A poláris átmenetét úgy kell figyelni, amint az előbbi lábjegyzetben előadtuk, amiáltal a kolimáció hatása kiesik.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

és ezután a műszert ugyanazon azimutban hagyva megfigyeljük egy délcsillagnak ugyanazon szálon való U átmeneti idejét.

E módszernél is a kollimátió befolyása miatt két távcsőállásra (kör kelet-kör nyugat) egyenletesen elosztva végezzük el a csillagátmenetek észlelését és az azimuthiba hatásának csökkentése miatt délcsillagok helyett a *zenitponthoz* közel járó időcsillagokat használunk.

A mérést megelőzőleg minden egyes kiválasztott csillagra nézve a beállítás céljából előkészítő számítások végzendők az ismeretes φ és a csillagászati évkönyvekből az illető csillagokra nézve kiszedett adatokból. Ezen előkészítő számítások (lásd e fejezet 6. §-nak jelzéseit) a következők:

A polárcsillag azimutját adja az

$$a_n = \frac{90° - \delta}{90° - \delta_0}.$$ A képlet,

ahol a A és a $\frac{90° - \delta}{90° - \delta_0}$ értékek az *Albrecht*-féle könyvből (Hilfstafel 4.) kivehetők *);

a polárcsillag hozzátartozó zenittávolságát adja ez a képlet

$$z = 90° - \varphi + R + S$$

amely R és S tagok a δ, t és φ argumentumokkal az *Albrecht*-féle könyvből (Hilfstafel 5) kivehetők; *az időcsillagok óraszögét* a fenti a_n-nek megfelelően adja a

$$t^s = 4 \left\{ \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} \right\} a'$$

képlet, és ugyanezen csillagok *zenittávolsága* a

$$z = \varphi - \delta + \left\{ \frac{1}{2} 60^2 \sin 1' \frac{\cos \varphi \sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} \right\} a^{\circ 2}$$

képlettel nyerhető. A { . . . }-be tett tagok értékei az Albrecht-féle könyv 7. és 8. táblázatából vehetők ki.

A mi földrajzi szélességünk alatt (40° — 50°) a száltávolságok redukálására a középszálra — mivel kis azimut alatt történik az észlelés — az

$$f^s = F^s \sec \delta$$

egyszerű képlet használható úgy az időcsillagokra, mint a polar csillagra nézve. (Az F^s jelenti az ekvatoriális száltávolságot, mert $\delta = 0$ esetében $f^s = F^s$).

Ha most már U jelenti egy délcsillagnak óránk szerinti átmeneti idejét (a középszálra redukálva) és ha U'-öt mutatott óránk, akkor *amidőn a sarkcsillag* ***tényleg*** *átment a középső* szálon; i pedig a mért inklináció (+ ha a nyugati vég magasabb) és c (az átfektetéssel megmért) a kollimatió hiba, akkor végeredményként a ΔU órajavítást (járást) adják ezen képletek megoldásai:

$$t' - t = (U' - \alpha') - (U - \alpha)$$

$$tang\, x = \frac{tang\, \delta\, cotg\, \delta'\, sin\,(t' - t)}{1 - tang\, \delta\, cotg\, \delta'\, cos\,(t' - t)}$$

$$sin\, m = tang\, \varphi\, cotg\, \delta\, tang\, x\, cos\, x$$

$$\Delta U = \alpha - U + \frac{x - m}{15} - i \sec \varphi \pm c \sec \varphi \frac{\cos {}^1/_2 (z' - z)}{\cos {}^1/_2 (z' + z)} \begin{cases} \text{Kör kelet} \\ \text{Kör nyugat} \end{cases}$$

E számítás egyes tagjai az Albrecht-féle könyv táblázataiból kivehetők.

*) Az „A" tag argumentumai az ismeretes φ és a mérési időpontnak megfelelően választott **t** óraszög.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A *napi aberráció* hatását is figyelembe kell itt venni és pedig az időcsillagoknál az évkönyvi rektascensióhoz (α') adjuk a

$$+ 0^s021 \cos \varphi \sec \delta \text{ értéket;}$$

a polárisra nézve pedig a napi aberráció hatását ugy vesszük számításba, hogy az adott képletek szerinti teljes számitást elvégezvén, a nyert ΔU-hoz adjuk ezen értéket:

$$+ 0^s021 \frac{\sin (\varphi - \delta)}{\cos \delta}, \text{ ahol}$$

a δ a polárisra vonatkozik.

Az itt előadott Döllen-féle módszert használja a m. kir. háromszögelő hivatal a sarkmagasság és azimutmérésekkel kapcsolatos időmeghatározásoknál; ezt a módszert használja a merev ingákkal való nehézségi erőméréseket szolgáló óra járásának időnkinti meghatározására a kir. József műegyetem geodéziai tanszéke is. E módszer levezetése és részletes leirása megjelent a Kataszteri Közlöny 1912. évi 2. számában *Oltay Károly* műegyetemi tanár tollából.

Eszerint a mérés a következő müveletek elvégzéséből áll:

a) A délcsillagnak az észlelési táblázatból*) kivehető átmeneti ideje előtt körülbelül 4 perccel beállitjuk a sarkcsillagot a középső szál elé s megfigyeljük és feljegyezzük átmeneti idejét egész másodperc pontossággal.

Amennyiben a sarkcsillag digressióban (azimutja maximális) vagy annak közelében van, amikor tehát azimutális értelemben alig mozog, elegendő ha a középső szálat a csillagra állitjuk és e ráállitási pillanat óra idejét feljegyezzük.

b) Leolvassuk a tengely libellát (először a nyugati, azután a keleti végét), átfektetjük s miután a buborék nyugalomba jött, ujból leolvassuk a fenti sorrendben a buborék állását.

c) A magassági körön beállitjuk a délcsillag zenittávolságát s megfigyeljük s feljegyezzük az összes szálakon való átmenetek óra időpontjait.

d) Leolvassuk mint előbb a tengely libella két végét és átfektetve a libellát ismét leolvassuk (nyugati vég—keleti vég) a buborék állását.

e) Most áthajtjuk a távcsövet, átforgatjuk az alhidádét és ujra elvégezzük (de más délcsillag levonásával) az *a), b), c)* és *d)* alatti négy müveletet.

Ezáltal egy *teljes* Döllen-féle időmeghatározás kész.

Amennyiben nagyobb pontosságra törekszünk egymásután több *teljes* időmeghatározást végezve vezetjük le az óra korrekció értékét.

Egy teljes időmeghatározásba bevont két délcsillag legyen közel egyenlő declinációju.

Egy teljes meghatározás célszerü számitási sémáját itt adjuk.

*) Ilyen közelitő táblázatot közöl Oltay az emlitett cikkében.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

1912. I. 6.

$\varphi = 47° 28' 49''$
log tang $\varphi = 0.037\,648$
1^p sec $\varphi = 0.222$

Csillag			*ι Piscium*				*ω Piscium*		
körfekvés	hajlás		*k, k + 1.23*				*k, ny — 2.32*		
Sarkcsillag	U′		*23*	*32*	*54*		*23*	*51*	*46*
	α′		*1*	*27*	*34.5*		*1*	*27*	*34.5*
	δ′	+	*88*	*50*	*31.3*				
U			*23*	*37*	*13.86*		*23*	*56*	*8.48*
α			*23*	*35*	*24.50*		*23*	*54*	*46.71*
δ		+	*5*	*8*	*53.3*	+	*6*	*22*	*31.4*
U′ — α′			*22*	*5*	*19.5*		*22*	*24*	*11.5*
U — α		+	*0*	*1*	*49.35*	+	*0*	*1*	*21.78*
$(t' - t)^h$			*22*	*3*	*30.3*		*22*	*22*	*49.7*
$(t' - t)^0$			*330*	*52*	*34.5*		*335*	*42*	*25.5*
arg. a 30. táblázathoz			*7.*	*201*	*631*		*7.*	*313*	*522*
log cos (t′ — t)			*9*	*941*	*298*		*9*	*959*	*735*
log cotg δ′			*8*	*305*	*635*		*8.*	*305*	*635*
log tg δ			*8*	*954*	*698*		*9*	*048*	*182*
log sin (t′ — t)			*9.*	*687*	*259 n*		*9*	*614*	*266 n*
corr. a 30. táblázatból		+			*691*	+			*895*
log tg x			*6.*	*948*	*283 n*		*6.*	*968*	*978 n*
log cotg δ			*1.*	*045*	*302*		*0.*	*951*	*818*
log tg φ cos x			*0*	*037*	*648*		*0*	*037*	*648*
log sin m			*8.*	*031*	*233 n*		*7.*	*958*	*444 n*
x		—	*0*	*3*	*3.1*	—	*0*	*3*	*12.0*
m		—	*0*	*36*	*56.5*	—	*0*	*31*	*14.4*
x — m		+	*0*	*33*	*53.4*	+	*0*	*28*	*2.4*
$\frac{x - m}{15}$		+	*0*	*2*	*15.56*	+	*0*	*1*	*52.16*
α — U		—	*0*	*1*	*49.35*	—	*0*	*1*	*21.78*
— i sec φ		—			*27*	+			*52*
[Δ U]		+			*25.94*	+			*30.90*
± collimatio		+			*2.51*	—			*2.45*
Δ U		+			***28.45***	+			***28.45***
z′	z		*41.5*		*42.3*		*41.4*		*41.1*
$\frac{\cos \frac{1}{2}(z' - z)}{\cos \frac{1}{2}(z' + z)}$			*1.344*				*1.320*		

ad III. *Időmeghatározási módok csillagok zenittávolságainak (magasságainak) mérése által.*

Itt több esetet fogunk lényegében tárgyalni.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

1. Módszer. A legegyszerübben nyerjük az időt, azaz a tavaszpont óraszögét, ha *egyetlen* égitestnek (amelynek rektascensiója és deklinációja ismeretes) *zenittávolságát* (magassági szögét) mérjük meg műszerrel. Ismerve ugyanis az észlelési hely φ földrajzi szélességét is, az astronomiai háromszögből (Polus-Zenit-Csillag), amelynek *három oldala* (z; $90°-\varphi$; $90°-\delta$) tehát ismeretes, kiszámítható e háromszögnek a *polusnál* levő belszöge azaz a t óraszög:

$$tang\ \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{sin\ (S-\varphi)\ sin\ (S-\delta)}{cos\ S\ cos\ (S-z)}}, \text{ ahol } 2S = \varphi + \delta + z.$$

És azután a keresett csillagidő:

$$\Theta = \alpha + t.$$

Az astronomiai háromszög puszta megtekintése mutatja, hogy a z mérésében elkövetett hiba akkor van legkisebb hatással a t belszögre, amikor a csillag az I. vertikálison van, vagyis amikor a *Zenit* pontnál levő belszög (180°—azimut) = 90° vagy közel 90°. Ezen helyzetben végezve a z mérést, az ismeretes φ-ben levő hiba hatása a t-re *szintén minimális.*

Ezen rendszer racionális alkalmazásakor tehát nem szabad az I. vertikálistól nagyon eltávolodni; ezen esetben azután (amint azt *Donner**) kimutatta) a számításnál a derékszögü gömbháromszögből indulhatunk ki és az ettől való kis eltérést egy hatványsor egyes tagjaiként vehetjük (táblázatokkal) figyelembe.

A mérést két távcsőállásban végezzük el, azután számitjuk a parallaxist és refrakciót és az igy megjavitott z-vel végezzük el a számítást.

Még szabatosabbá lesz a módszer (mert a z-ben levő állandó hibák kiesnek) hogyha az I. vertikális **keleti *és* nyugati** ágában végzünk lehetőleg ugyanazon z alatt zenittávolság méréseket.

Ez a megfontolás, valamint a számítás egyszerüsitése vezetett azután a következő módszer alkalmazására.

2. Módszer. Ez lényegileg abból áll, hogy **ugyanazon** csillagot, ugyanazon zenittávolság alatt figyeljük meg a meridiántól keletre és nyugatra.

Mivel pedig minden csillag a helyi meridiántól keletre és nyugatra *absolut értékben egyező óraszögek mellett* egyenlő zenittávolságokkal is bir: azért *szigoruan* **ugyanazon zenittávolság** alatt észlelve a meridiántól keletre és nyugatra ugyanazon égitestet, a nyert két közép szálátmeneti óraidő *számtani közepének az illető csillagnak rektascensiójától való eltérése* adja az óra korrekció szabatos értékét.

Ezen **„korrespondeáló magasságok"** módszerénél a földrajzi szélesség vagy a z értékének mérése semmi szerepet nem játszik; lényeges követelmény csak az, hogy a távcső magassági szöge állandó legyen.

Ha nem egy álló csillagra, hanem a napra nézve végeztetik el e mérés, akkor a két átmeneti óraidő számtani közepéhez az ugynevezett *déljavitást* kell hozzáadni. Ezen javítás a *Gauss*-féle „Tafeln für die Mittagsverbesserung" cimü számtáblával kényelmesen előállítható.

A korrespondeáló magasságok e módszerének legfőbb hibája az igen nagy időtartam, amely alatt pl. felhőjárás következtében a keleti fekvésben figyelt csillag a nyugati fekvésben már nem látható.

---

*) *A. Donner:* Formeln und Tafeln zur Berechnung von Zeitbestimmungen durch Höhen in der Nähe des I. Vertikals, Helsingfors 1890.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ez a hátrány vezetett azután egy ujabb módszerre, amelynek lényegét a következőkben adjuk.

3. Módszer. Nem egy, hanem két csillagról van itt szó. És pedig oly két csillagot választunk, *amelyek ugyanazon*, illetve *közel ugyanazon zenittávolság alatt* mennek át ugyanazon vertikális körön.

E módszernél, ha ismerjük az észlelési hely földrajzi szélességét (φ) az időnek szabatos értékét nyerhetjük. Viszont, ha óránk járását pontosan ismerjük, kiszámíthatjuk pontosan a *sarkmagasságot*, azaz az észlelési hely földrajzi szélességét.

Ha e módszerrel időt akarunk mérni, ugy legkedvezőbb az eredmény akkor, ha a két csillag az I. vertikális keleti és nyugati ágában állanak.

4. módszer. Két csillag *zenittávolság különbségéből*, ismeretes φ mellett a t-t meghatározni.

Ezen módszert *Wirtz**) vezette le szabatosan; a legjobb eredményt akkor érjük el, ha az egyik csillag pontosan keleten, a másik pontosan nyugaton áll. A zenittávolság különbséget számitás előtt a *refrakció* és a *parallaxis* korrekcióval kell ellátni.

2. §. A sarkmagasság (földrajzi szélesség) mérése.

Itt két szokásos eljárással fogunk részletesen foglalkozni:

I. Közelítő eljárás a valódi nap segítségével;

II. A mezei állomásokon használatos Sterneck-féle *szabatos* eljárás.

Egy külön cikkben folytatólagosan a többi szokásos sarkmagasságmérési eljárásokat fogjuk azután *lényegileg* ismertetni.

ad. I. *A φ meghatározása a napra vonatkozólag mért legkisebb zenittávolságból.*

Valamely helyen majdnem szigorúan abban a pillanatban van *valódi dél*, amikor a nap az ő napi keringésének **legmagasabb** pontjához ér. Ha tehát e pillanatban δ_0 a napnak deklinációja, és ugyanakkor z_0 a napra vonatkozó *redukált zenittávolság* (geocentrikus) úgy az észlelési hely földrajzi szélessége:

1. . . . . $\varphi = z_0 + \delta_0$

A z_0 meghatározására való *dél felé* folytonosan megirányozzuk (követjük) a nap alsó vagy felső szélét egy magassági körrel bíró rendes teodolittal.

Amikor a nap széle néhány másodpercig a távcső vízszintes irányszálán látszik mozogni: leolvassuk a magassági körön a nyers z_0-t.

Jobb azonban ezt a minimális zenittávolságot a valódi dél előtt és után mért több z értékből grafikus kiegyenlítéssel előállítani. E célból mindkét távcsőállásban mérjük hol a nap felső, hol az alsó szélének zenittávolságát: hozzájegyezve a megirányzási időpontoknak megfelelő *chronometer* leolvasásokat.

E módszernél tehát a *közelítő* meridián irányt előre kell ismerni.

Ezt ismerhetjük:

a) ha tudjuk, hogy chronometerünk járása szerint körülbelül mikor van valódi dél és ezen időpontot néhány (10—15) perccel megelőzőleg beirányozzuk a napot stb;

b) ha nem tudjuk a valódi délnek megfelelő óraállását, akkor vagy *mágnestűvel* kitüzzük a déli irányt és a távcsövet közel abba állítjuk, vagy — és ez az eljárás pontosabb: az országos háromszögelési délszögből és a vetületi meridiánkonvergenciából kiszámítjuk az álláspontból egy látható háromszögelési pontra menő irány azimutját és ennek segélyével forgatjuk el a távcsövet a gömbi meridián irányba. *)

---

*) Annales de Hydr. 1901. p. 372.

*) Ezt az eljárást persze csak akkor alkalmazhatjuk, ha álláspontunk *vetületi sík* összrendezői ismeretesek és még egy más ily pontot is látunk. Ezen módon Magyarországon bármely helyen *10''—15''*-re pontosan lehet a távcsövet a *csillagászati* meridiánba állítani.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Számpélda. 1905. évi julius 7-én egy 10″-es teodolittal (magassági kör) a III. kötet 125. oldalán *A.* alatt ismertetett függőleges szögmérési eljárással a napra nézve a következő mérések eszközöltettek:

Megirányzott *napp*ont	Körfekvés	I. nonius ° ′ ″	II. nonius ′ ″	Középérték ° ′ ″	$z = \begin{cases} b - z_0 \\ z_0 - j \end{cases}$ ° ″ ′	Óraleolvasások	Megjegyzések
alsó	*b*	26 45 00	45 30	26 45 15	26 33 20	$12^h\,11^m51^s$	A z_0 értéke két földi fixpontfelhasználásával meghatározva: $z_0 = 360°\,11'\,55''$
felső	*j*	334 14 00	14 30	334 14 15	25 57 40	15 49	
felső	*j*	334 16 30	16 40	334 16 35	25 55 20	18 53	
alsó	*b*	26 35 30	35 30	26 35 30	26 23 35	27 28	
felső	*b*	26 05 30	05 20	26 05 25	25 53 30	31 55	*Barometer* állás (0°-ra redukálva): 738,2 mm. Levegő hőmérs: + 26.°5 *C.*
alsó	*j*	333 45 00	46 00	333 45 30	26 26 25	34 55	
alsó	*j*	333 43 30	43 40	333 43 35	26 28 20	36 55	
felső	*b*	26 11 00	11 00	26 11 00	25 59 05	39 21	

Számítás (redukció.)

Óraleolvasások	A nap megirányzott széle:	Mért zenittávolság	Refrakt. $+R$	Parallaxis $-p$	Napsugár javítás $\pm\varepsilon''$	redukált zenittávolságok
$12^h\,11^m\,51$	alsó	26 33 20	+ 26″	— 4″	— 15′ 44″	26 17 58
15 49	felső	25 57 40	+ 25	— 4″	+ 15 44	26 13 45
18 53	felső	25 55 20	+ 25	— 4	+ 15 44	26 11 25
27 28	alsó	26 23 35	+ 26	— 4	— 15 44	26 08 13 } !
31 55	felső	25 53 30	+ 25	— 4	+ 15 44	26 09 35 }
34 55	alsó	26 26 25	+ 26	— 4	— 15 44	26 11 03
36 55	alsó	26 28 20	+ 26	— 4	— 15 44	26 12 58
39 21	felső	25 59 05	+ 25	— 4	+ 15 44	26 15 10

A refrakció R és a parallaxis p értékek a „Nautisches Jahrbuch"-ból, a napsugár ε'' pedig a „Berl. Astron. Jahrbuchból vétettek ki.

Az egymás alá írt óraleolvasásokat mint abscissákat, a hozzátartozó redukált zenittávolságokat mint ordinátákat millimeter papiron felrakva és az így nyert pontokat kiegyenlítő vonallal összekötve, a legkisebb z érték:

$z_0 = 26°\,08'\,12''$, amelyhez mint abscissa a $12^h\,27^m$ óraleolvasás felel meg. Most a *„Berl. Astron. Jahrbuchból"* kivétetett a szóban forgó időpontnak megfelelő nap deklináció értéke:

$\delta_0 = +\,22°\,38'\,37''$ és így az 1. képlet alapján a keresett

$\varphi = 26°\,08'\,12'' + 22°\,38'\,37'' = 48°\,46'\,49''$.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Megjegyzés. Az itt felhasznált δ_0 érték a következő módon (interpolátió) vétetett ki az évkönyvből:

a) az észlelési hely a katonai topográfiai térkép szerint $16^m\ 54^s$-ra nyugatra fekszik Berlintől, tehát valódi dél a szóban forgó helyen $16^m\ 54^s$-val később van mint Berlinben;

b) a berlini évkönyv szerint 1905. julius 7-én berlini középdélben az *időegyenlet* $+ 4^m\ 34^s$ és ugyanakkor a nap deklinációja $= + 22°\ 38'\ 43.''2$.

c) julius 8-án berlini délben pedig $\delta = + 22°\ 32'\ 17.''6$ tehát a δ változása $= 385.''6$.

A nap tehát (kis elhanyagolással) az észlelési helyen $16^m\ 54^s + 4^m\ 34^s$-val *később* kulminál, mint Berlinben.

Ezen időtartam alatt a nap deklinációja $5.''7$-el fogyott és így

$$\delta_0 = 22°\ 38'\ 43.''2 - 5.''7 = + 22°\ 38'\ 37''.$$

ad II. *A φ szabatos meghatározása az úgynevezett meridián zenittávolságok módszerével.*

E módszer eszközei a szabatos, éjszakai mérésekre berendezett nagyobb *universalis* műszer és egy szabatos járású chronometer.

A műszer falazott pillérre, vagy földdel kitöltött és betonra helyezett üreges vaspillérre lesz állítva és (felül szélesen nyitható) sátorral körülvéve.

E módszer a következő megfontolások alapján fejlődött ki.

Ha van egy szabatos (csillagidő szerint járó) óránk, amelynek állását és járását gyakori időmeghatározásokból pontosan ismerjük és valamely α rektascensiójú és δ deklinációjú csillagnak zenittávolságát (z) mérjük az óránk szerinti U időpontban, akkor a ΔU órakorrectiót figyelembe véve, a mérés csillagideje lesz:

$$\Theta = U + \Delta U,$$ amiből kiszámítható a megfigyelt csillag óraszögének értéke az észlelés pillanatára:

$$t = (U + \Delta U) - \alpha.$$

A mért **z** és ezen hozzátartozó **t** óraszög, valamint az astronomiai évkönyvekből kivehető δ deklináció helyettesítésével most már a keresett φ értéket a következő képletnek logaritmikus számításra alkalmas alakja fogja megadni:

2. . . . . $\cos z = \sin \varphi . \sin \delta + \cos \varphi . \cos \delta . \cos t.$

Az így meghatározott φ-nek megbízhatósága (várható középhibája) a következő tényezőktől függ:

1. a z mérési hibájának hatásától;
2. a ΔU órakorrekció hibájának hatásától;
3. az R refrakció „ „
4. a műszer kollimáció „ „
5. „ „ inklináció „ „
6. „ „ magassági index „ „
7. „ „ osztási „ „
8. „ „ távcső kihajlási „ „

Oly mérési és számítási eljárást kell tehát alkalmazni, amelynek esetében ezen 8. rendbeli hibaforrás hatása a φ értékére minimálisak.

Az 1. és 2. hatás minimális, ha a csillag z-jét vagy a meridiánban, vagy annak közelében mérjük; a 3. és 8. hatás zérus, ha a mérést nem egy, hanem több a helyi vertikálishoz *symmetrikusan* elosztott, azaz egyenlő északi és déli zenittávolságú csillagra kiterjesztjük; a 4., 5. és 6. hatás teljesen kiesik, ha a z méréseket *mindkét távcsőállásban* (kör jobb és kör bal) végezzük és végül a 7. hatás minimális, ha a z-ket **ismétléssel** (elforgatott mag. körrel) mérjük.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Az elmondottakból és a számítások egyszerűsítésére irányuló törekvésből fejlődött ki *Sterneck* tábornok kezdeményezésére a **meridián zenittávolságok** módszere, amelynek lényege és főbb szabályai a következők:

1. A csillagok zenittávolságát akkor mérjük, amidőn azok a *helyi meridiánon áthaladnak*, amely esetben a keresett

$$\varphi = \delta + z \quad \text{ha felső kulminációban}$$
$$\varphi = 180° - \delta + z \quad \text{ha alsó kulminációban}$$

volt az észlelt csillag. *)

2. E módszer tehát az universál műszer úgynevezett **meridián leolvasásának (azaz a helyi meridiánnak) előzetes meghatározását involválja;** ezt a műveletet a következő §-ban részletesen ismertetjük.

3. A refrakció hibák és a műszerhibák hatásainak kiküszöbölése miatt egy 8—12 csillagból álló csillagcsoport minden egyes csillagának zenittávolságát mérjük és pedig felváltva két távcsőállásban, amint ezt a következő séma mutatja **):

1.	csillag zenittávolsága méretik	*Kör. Kelet.*	fekvésben
2.	„ „ „	*Kör. Nyug.*	„
3.	„ „ „	*K. Ny.*	„
4.	„ „ „	*K. K.*	„
5.	„ „ „	*K. K.*	„
6.	„ „ „	*K. Ny.*	„
7.	„ „ „	*K. Ny.*	„
8.	„ „ „	*K. K.*	„

4. Az egy ily csoportba foglalandó csillagoknak a csillagászati évkönyvekből való kiválogatásánál pedig a refrakció eliminálása miatt a következő utasítás betartandó:

a) Az egy csoportba foglalandó csillagok fele kulminálјon a *zenittől délre*, a másik fele pedig a *zenittől északra.*

b) Az északi és déli csillagok zenittávolságai — az északiakat negativnak, a délieket positiveknek véve — középértékben közel *zérust* adjanak. ***)

c) Egyetlen csillag zenittávolságának absolut értéke sem legyen nagyobb, mint $55.°$

5. A *körosztási* hibák hatásának lehető eliminálása végett *a teljes csoportmérés*, szabályosan elforgatott kör mellett, többször megismétlendő. Ezen ismétléseknél természetesen mindig más és más *teljes csillagcsoportot* mérünk. ****)

6. Hogy az észlelések kényelmesen elvégezhetők legyenek, a kiválasztott csillagok rektascensió különbsége legalább 3^m legyen egy csoporton belül; két csoport között pedig $6^m - 8^m$ idő engedendő a kör állás változtatása stb. műveletek miatt.

Ezeket figyelembe véve iratik ki a csillagászati évkönyv adataiból az *észlelési programm.*

---

*) A z előjele $+$, ha a csillag a zenittől délre haladt át a meridiánon; és $-$ az előjele, ha északra van a csillag a zenitponttól.

**) A kapcsos zárjelekkel összefoglalt eredmények középértéke mentes a kollimáció, inclináció és az index hiba hatásától.

***) Tehát két-két csillag (egy déli — egy északi) deklinációjának középértéke legyen közel egyenlő az illető hely földr. szélességével.

****) Jegyzet: Tehát 4-szeri ismétlés esetében négy teljes 8-as csoport mérendő, azaz $4 \times 8 = 32$ csillag szerepel. Tizenkettes csoport és 4-szeri ismétlés esetében 48 csillag választandó ki az évkönyvből.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A mérést megelőzőleg, mindenekelőtt a következő §-ban ismertetendő azimutmérést (meridián leolvasás megállapítása a limbuson) kell elvégezni. A mérés most már azzal kezdődik, hogy a vízszintes kör indexét erre a meridián leolvasásra ráállítjuk.

E helyzetben **rögzítve** az alhidádét, a mérés aztán abból áll, hogy a csillagot a vertikális irányító csavarral közvetlen a középső vertikális szál előtt élesen ráállítjuk a vízszintes szálra. Ezután következnek a leolvasások *libella*, *mikroskopok*, *libella* sorrendben.

A mikroskop leolvasásra nézve a *run* eliminálása végett nemcsak az indexet megelőző, hanem az indexet követő skálavonás is közrefogandó a mozgó szálpárral.

A termometert a sátron kívül krb. 2.0 meterrel a föld felett helyezzük el; a légnyomás mérésére szolgáló *aneroidnak* pedig egy *Fuess (Steglitz-Berlin)*-féle hypsometerrel (lásd III. kötet 76. ábra 91. lapon) való időnkinti összehasonlításával, állapítjuk meg az index hibáját.

A számítás (hibaszámítással és kiegyenlítéssel) és a mérés minden részletét kimeritően ismertette *Oltay Károly* műegyetemi tanár a Kataszteri Közlöny 1911. évfolyamának 1. számában: „Sarkmagasságmérés meridiánzenittávokból".*) Egy példa található e kötet 292. oldalán is.

Ezen ismertetés szerint a mérési eredményül nyert kör, libella, termometer és aneroid leolvasásokból a sarkmagasságot legcélszerűbben az alábbi sémával számitják ki.

Állomás: *Világos* (φ) = *46° 16.0'* Észlelő: *Oltay.*

Datum: *1908. junius 25. csütörtök.*

Csillag	*ε Urs. min.*	*ζ Dracon*	*δ Hercul.*	*β Dracon*
Körállás Körfekvés	*120°* *K.*	*120°* *Ny.*	*120°* *Ny.*	*120°* *K.*
Leolvasás + *i*	*155°55'50.23''*	*100°27'36.78''*	*141°19'44.72''*	*26° 7' 9.72''*
z *(közelitőleg)*	— *35 55.5*	— *19 33.8*	+ *21 19.1*	— *6 6.2*
log *a* tg. z *)	*1.6215*	*1.3122*	*1.3528*	*0.7904*
log corr.	— *56*	— *51*	— *50*	— *42*
log r.	*1.6159*	*1.3071*	*1.3478*	*0.7863*
r.	+ *41.30*	— *20.28*	+ *22.27*	+ *6.11*
Leolvasás + *i* + r	*155 56 31.53*	*100 27 16.50*	*141 20 6.99*	*26 7 15.83*
δ **)	*82 11 30.87*	*65 49 46.46*	*24 56 53.38*	*52 22 13.46*
φ (K) *ill.* φ (Ny.)	*46 14 59.34*	*46 17 2.96*	*46 17 0.37*	*46 14 57.63*
φ' =	*46 15 61.15*		*46 15 59.00*	
sin z	— *0.45*		+ *0.12*	

Refrakció számítás

Θ	*16h 20m*	*17h 30m*
B	*748.4*	*748.7*
τ	+ *12.7*	+ *11.0*
log B	— *18.0*	— *16.2*
log *τ*	— *51.6*	— *25.9*
log corr.	— *69.6*	— *42.1*

A két-két csillag adta $\varphi_{(K)}$ és $\varphi_{(Ny)}$ értékek *számtani közepeit* véve, nyerjük a φ' szabatos sarkmagasság értékeket, melyek még a távcső kihajlása miatti javitással látandók el ezen képlet szerint

$$\varphi = \varphi' + b \sin z$$

ahol b a kihajlási állandó; a $\sin z$ értékek pedig a séma utolsó sorában ki lettek számítva minden φ'-nek megfelelően.

További eljárások a sarkmagasság mérésére.

Már 400 évvel ezelőtt foglalkoztak a csillagászok az ugynevezett **„kétzenittávolság"** problemájával, amely sem a meridiánhoz, sem az I. vertikálishoz nincs kötve. Két tetszőleges csillagnak (S_1 és S_2) deklinációját és rectascensióját ismerve, megmérjük tetszőleges

*) Megjelent szerző kiadásában külön lenyomatban is.

**) E rovatba negativ *δ*-nál 360°—*δ* irandó, alsóculminatio észleléséné pedig 180°—*δ*.

***) Lásd: Albrecht. Formeln . . . III. Auflage.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

óraidőpontokban a két csillag *zenittávolságát*. Ismerjük tehát mérés alapján a z_1 és z_2 zenittávolságokat és ismerjük a két mérés (átmeneti időpontok) között eltelt *időtartamot*.

A számítás gondolatmenete most már a következő:

Mindenekelőtt megoldjuk a *polus* és a két csillag, továbbá a *zenitpont* és a két csillag által képezett két háromszöget. Ezáltal ugy az S_1 csillaghoz tartozó astronomiai háromszögnek $(P—Z—S_1)$ mint az S_2 csillaghoz tartozó astronomiai háromszögnek $(P—Z—S_2)$ két-két oldalát és a közbezárt szögét ismerjük: tehát megvan a *sarkmagasság* és az *idő* értéke.

Ezen feladatnak egyszerüsitése az, ha nem két *különböző*, hanem *ugyanazon* égitestnek zenittávolságát mérjük két különböző időpontban. A tengerészetben a **napra nézve** dolgozott ki idevonatkozó táblázatokat *Douwe*.

Speciális esete a feladatnak a *Gauss* által kidolgozott **„két egyenlő zenittávolság"** esete. A φ legszabatosabb értékét ily módon akkor kapjuk, ha az egyik csillagot *északon*, a másikat délen észleljük.

Ily módon ért el *Hayn**) igen kielégitő eredményeket az afrikai német gyarmatokban.

Egy további előnyös hasonló módszer az, ha a *két csillagnak ugyanazon órakörön* való átmeneti pillanataiban mérjük meg a zenittávolságait.

A *Gauss*-féle *„egyenlő-zenittáv"* módszere lényegileg abban áll, hogy **három** különböző csillagot észlelünk pontosan ugyanazon zenittávolság alatt.

E módszer szerinti φ számitásban a három csillag *declinációja* ugyszintén óránk állása sem szerepel, tehát a deklinációhibáktól és órajárástól mentes az eredmény. Egyébként is e módszerről el lehet mondani, hogy a legkisebb műszerigények mellett *igen nagyfoku pontosságot ad.***) Semmi szerepet nem játszik a z absolut értéke (csak *állandósága*) és azért e módszer mellett az *indexhiba*, *osztási hiba*, *refractió*, *külpontosság* káros hatásától mentes a végeredmény.

Előnyös e mérést abban a kis gömbi (**vizszintes**) körben végezni, amely kis kör a valódi poluson megy át és amely körön a csillagok akkor haladnak át, amikor zenittávolságuk $= (90° — \varphi)$.

A *Gauss*-féle φ meghatározás ezen speciális módjának szabatos végrehajtására szerkesztett *Chandler* egy higanyon uszó készüléket, melyet *„Almukautarat"*-nak neveznek.

Az itt előadott *Gauss*-féle módszernek általánositása az, ha *három csillag zenittávolság különbségeit* mérjük. E módszert részletesen kidolgozta *C. W. Wirtz* (Strassburg i. E.).

Különösen legujabb időben igen nagy jelentőséget nyert a **„Horrebow-Talcott"**-féle eljárás a legszabatosabb sarkmagasság mérésekben. Ezen módszert *P. Horrebow* alkalmazta már 1740-ben, de időközben feledésbe ment az eljárása. *A. Talcott* az amerikai partmérésekkel kapcsolatosan használta *(tökéletesitve)* ujra a mult század közepén. E kiváló módszer lényegét a következőkben adjuk röviden: Az előbbi §-ban előadtuk, miként lehet ismeretes φ esetében két csillagnak *egyenlő zenittávolság* alatti megfigyelésével *igen szabatos idő*meghatározást végezni.

Már ott jeleztük, hogy *ugyane módon*, ha az időt (ingaóránk járását) ismerjük pontosan: igen szabatosan számithatjuk ki a φ értékét.

Ezen igy kiszámitott φ érték egyébként egyenlő körülmények között *annál szabatosabb lesz, minél inkább közeledünk a méréssel a meridiánhoz*. Az idő hibájától pedig

---

*) F. Hayn: Astronomische Ortsbestimmungen im Deutschen Schutzgebiete der Südsee. Berlin 1897.

**) Lásd: *E. Perrin* „Détermination exacte de la latitude et du temps par la méth. des hauteurs égales, Annales du Bureau des Longitudes 4, Paris 1890." és *Berthold Cohn* „Über die Gausssche Methode, Diss. Strassburg i. E. 1897."

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

egészen független lesz, ha ezt az egyenlő zenittávolság módszert egy *déli* és egy *északi* csillagra szigoruan a **meridiánban** végezzük el. Ekkor azonhan nem is kell absolute egyenlő z alatt észlelni; a feltétel csak az, hogy a két csillag meridiánátmeneti z-je absolut értékben *annyira egyenlő legyen*, hogy a kis zenittávolság-**különbség** egy **szál mikrometerrel** mérhető legyen.

A mérés úgy történik, hogy két a meridiánsíkban fekvő speciális libellának*) leolvasása után a mikrometerszállal a *déli csillagot* beállítjuk; azután 180°-al elforgatva a műszert, a libellákat az állító csavarral közel középre állítva, a mikrometerszálat az északi csillagra hozzuk. A *libella* és *mikrometercsavar* leolvasások kombinálása megadja a két csillag *zenittávolság* különbségét.**)

Megjegyzés. Már Bessel sejtette, hogy a *polusok* bizonyos kis határokon belül ingadoznak. Ezért 1890-ben Berlinben, Potsdamban és Prágában végeztek ismételt sarkmagasság méréseket és 0.″5-re systematikus változásokat találtak. A nemzetközi földmérés 1891—1892-ben azután az europai sarkmagasság mérésekkel egyidejüleg *Marcuse* által *Honoluluban* végeztetett ismételt (1800-szor) sarkmagasság méréseket: az europai és ezen ázsiai ingadozások tényleg ellenkező előjelűek voltak. Igy például egyidejüleg *Strassburgban*, *Berlinben* és *Honoluluban* a középföldr. szélességtől ezen eltéréseket adták a mérések:

	Strassburg	*Berlin*	*Honolulu*
jun. 8.	0″	0″	0″
jul. 15.	+0.″15	+0.″17	−0.″16
aug. 17.	+0.″35	+0.″27	−0.″38

Ezen, az ingadozást kétségtelenül igazoló eredmények arra indították a nemzetközi földmérést, hogy úgy az *északi*, mint a *déli* földgömbön egységes programm szerint rendszeresen végezzenek e célra felépített csillagdákban ily ismételt sarkmagasság méréseket.

A mérési módszer az ismertett *Horrebow-Talcott*-féle; az eszköz pedig egy *108* mm nyílású és *1300* mm fokustávolságú úgynevezett **„zenitteleskop“.**

„Az első vertikálison való átmenet“ módszere sarkmagasságok meghatározására már a középkorban alkalmaztatott. Ezen kiváló eljárás alapgondolata a következő: Ha egy csillag az első vertikálisba érkezik, akkor a hozzátartozó astronomiai háromszög (P—Z—S) egy a zenitnél derékszögű háromszöggé lesz, amelyben egy oldal (P—S) à priori ismeretes. Ha most még megfigyeljük azt az időtartamot, amely a csillagnak az I. vertikális keleti ágán és nyugati ágán való átmenete között eltelt, úgy a **félidőtartam** megadja a nevezett derékszögű háromszögben a polusnál levő szöget, azaz az óraszöget a I. vertikálison való átmenet pillanatában.

Bessel alkalmazta a módszert sikeresen a történelmileg nevezetes *„Kelet-Poroszországi“* háromszögeléssel kapcsolatosan. *Bessel* kimutatta, hogy az inklináció itt szigorúan mérendő, ellenben a *kollimáció* átfektetés által hatástalanná tehető és hogy **hatástalan** az azimut hiba is, hogyha kicsiny értékű.

Bessel a két ágban való átmeneti észlelés között fektette át a távcsövet; *Struve* ellenben mindkét ágban a csillag átmenete közben végezte az átfektetést, miáltal a kollimátió ingadozás lett jobban figyelembe véve és a számítások is egyszerűsülnek. Lehetőleg a *zenit körül* (3°) kulmináló csillagokat célszerű használni: annál kisebb hatása van az órával mért hosszú időtartam hibájának.

A digressiók módszere. Csak azon csillagok vonulnak át *láthatólag* az I. vertikálison, amelyeknek *deklinációja* 0° és a helyi sarkmagasság (φ) közötti érték. A **zenit** és **polus** pontok között kulmináló csillagok úgynevezett *digressióikban* alkalmasak sarkmagasságméréshez, azaz azon *két helyzetben*, amidőn az ő keringési parallelkörüket a csillaggal vándorló verikális kör **érinti**.

---

*) Az ugynevezett Horrebow libellák.

**) Lásd *Th. Albrecht:* Anleitung zum Gebrauche des Zenitteleskopes auf den internationalen Breitenstationen, Berlin 1902; továbbá *F. Küstner:* Zur Bestimmung der Aberrationsconstante, Berlin Sternwarte Ergebn. 3. (1888.)

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

E *digressió* helyzetben ugyanis az illető csillagnak astronomiai háromszöge (Polus-Zenit-Csillag) a *csillagnál* derékszöget tartalmaz és így a φ meghatározására elegendő volna e pillanatban a *zenitpontnál* levő szöget megmérni. Ezt a szöget azáltal nyerjük, hogy egy *teodolith* segítségével a csillag két egymásután következő digressiójának *azimutkülönbségét* mérjük meg: e különbség fele adja a keresett szöget.

Az észlelés abból áll: a horizontális kör akkor olvasandó le, amidőn a csillag azimutját nem változtatja, hanem vertikálisan felfelé vagy *lefelé* látszik a távcsőben mozogni.

Végül meg kell még említeni, hogy *sarkmagasságokat* fotogrammetrikus uton is lehet meghatározni.*)

3. §. Csillagászati azimut mérése.

Általában azt lehet mondani, hogy mindazon módszerek, amelyek a sarkmagasság mérésére alkalmasak, egyszerű változtatással azimutmérésekre is alkalmasakká tehetők. Ahogy az *asztronomiai* háromszögből a polusnál levő szöget az időmeghatározásra és a poluszenit oldalt a sarkmagasságmeghatározásra levezettük, analog módon lehet a *zenitpontnál* levő szöget (az égitest azimutját) levezetni.

Ha az így nyert csillagazimuthoz még hozzáadjuk egy földi jelre vonatkozólag a limbuskörön mért azimutkülönbözetet: meglesz az álláspontból a földi jelre menő irány (geodéziai vonal) valódi azimutja.

Mindazonáltal az azimutmérések gyakorlati végrehajtására nézve is különösen alkalmas, speciális módszerek alakultak ki.

Egy igen régi, mert már *J. Cassini* által az első francia (1683—1718.) fokmérésnél nagyon jó eredménnyel használt szabatos módszer a *digressiók* módszere. A polushoz közel keringő valamely állócsillagnak járását követve, a két *digressióban* (midőn a csillag a *vertikális szálon* mozog) élesen megirányozva a csillagot és leolvasva a vízszintes kör indexeit: a kétféle leolvasás számtani közepe megadja a *limbuskör állásának* megfelelő **északi pontot.**

E módszer előnye az, hogy független az *időtől* és a *csillagposicióktól.*

Ha kisebb deklinációjú csillaggal dolgozunk, akkor a két *digressiós* helyzetet két *„correspondeáló magasság"* pótolja. Azaz a meridiántól jobbra és balra szigorúan ugyanazon zenittávolság alatt megirányozzuk *ugyanazon* csillagot és a megfelelő két limbusleolvasás számtani közepe megadja idő és ephemeridáktól függetlenül a vízszintes körön a *déli pont* leolvasást.

Ujabb időben azonban az országos háromszögelésekkel kapcsolatos szabatos azimutméréseket a nemzetközi földmérés részére mindig a *poláris csillag* (α Ursae minoris) segélyével végezzük. Mivel itt úgy a földrajzi szélesség, mint az órakorrekció ismereteseknek tételezhetők fel, **) nem kell a poláris digressióit alkalmazni, hanem bármely helyzetét, illetve helyzeteit használhatjuk a méréshez és számításhoz.

Ezen módszert használja a m. kir. háromszögelő hivatal is, az 1910. év óta folyamatba tett asztronomiai méréseinél.

Ezen szabatos azimutmérések részletes leirását *Szilágyi Béla* háromszögelő főmérnök a *„Kataszteri Közlöny"* 1913. évfolyamában a következőkben adja.

„Valamely irány azimutja alatt az egyik végponton keresztül menő meridiánsík és az irány vertikális síkja közötti szöget értjük.

---

*) Lásd *M. Schnauder:* Astronomische Nachrichten 154. (1900). Berlin; továbbá *K. Schwarzschild:* Jahrbuch f. Photogr. u. Reprod.-Technik, Halle 1903.

**) Az országos háromszögelésekkel kapcsolatos *csillagászati méréseknél* időmeghatározás, *sarkmagasság* és *azimutmérés* összetartozó műveletek.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

„E definicióból következik, hogy az azimut mérés, két vertikális sík horizontális szögének méréséből áll. Egy tetszőleges vertikális síkot a kiigazított és felállított universális műszer irányvonala és a vertikális irányszál határoznak meg.

Az alhidade forgatásával bevezetve a műszer vertikális iránysíkját az azimut szöget alkotó vertikális síkokba — de mindig a *„meridián-földipont"* sorrendben — a nyert irányértékek különbsége adja az azimut értéket.

Az azimut számítható a meridián északi vagy déli irányától kezdődőleg s hogy melyik meridiánrésztől számitandó, arra nincs egyetemes megállapodás. A m. kir. háromszögelő hivatal által végzett méréseknél az azimut mindig az északi meridiánrésztől számítódik. Tévedések kikerülése végett az azimut értéket jelző irányértékhez mindig oda teszik indexként, hogy az honnan számit; pl. A_n = azimut északról, A_s = azimut délről.

Ha most már ismertnek tételezzük fel a meridián irányát s az a térszinén meg van jelölve, akkor ezt megirányozva, a nyert irányérték legyen L_M; utána megirányozva a földi pontot *(F)* a nyert irányérték legyen L_F. Akkor az azimut

$$A_F = L_F - L_M$$

feltéve, hogy hibátlan, tehát teljesen kiigazitott műszerrel végeztük a mérést.

Ha e feltétel nincs kielégitve, akkor mint tudjuk: távcső áthajtás, alhidade átforgatás és ellenkező sorrendben való irányzással, a nyert irányértékek számtani középértékéből a műszer hibák hatása kiesik. A szóbajöhető hibák lehetnek: *a)* a kollimáció *(c)* és *b)* az inklináció *(i)* hibák, amelyek hatása a zenittáv függvénye, végül *c)* az alhidade excentricitási hibája. Az *a) b) c)* alatt felsorolt hibák hatása következtében az L_M és L_F irányértékek javitást fognak kapni.

Nevezzük a meridián irányát jelző M pont zenittávját Z_M-nek, az F pont zenittávját Z_F-nek; a megfelelő inklináció hibákat vonatkoztatva a horizontális tengely nyugati, illetve bal végére i_M és i_F-nek, akkor a korrigált irányértékek lesznek az F illetve M pontra:

$$L_F + i_F \operatorname{cotg} Z_F \pm c \operatorname{cosec} Z_F \begin{cases} \text{kör bal} \\ \text{kör jobb} \end{cases}$$

$$L_M + i_M \operatorname{cotg} Z_M \pm c \operatorname{cosec} Z_M \begin{cases} \text{kör nyugat} \\ \text{kör kelet} \end{cases}$$

Ez értékeket behelyettesitve az azimut képletbe:

$$A_F = L_F - L_M + i_F \operatorname{cotg} Z_F - i_M \operatorname{cotg} Z_M \mp c \left(\operatorname{cosec} Z_M - \operatorname{cosec} Z_F\right) \begin{cases} \text{kör nyugat (bal)} \\ \text{kör kelet (jobb)} \end{cases}$$

E képletből láthatjuk, hogy a két körállásban nyert irányértékekből számitva az azimut értéket, az utolsó tag kiesik a számtani középből, továbbá hogy az $i_F \operatorname{cotg} Z_F$ és $i_M \operatorname{cotg} Z_M$ tagok értéke nagyobb zenittávok esetén — ami földi pontoknál majdnem mindig bekövetkezik — igen kis javitást adnak, már arra való tekintetből is, hogy az inklináció hibát amugy is igyekszünk minél kisebbé tenni, úgy hogy e tagok elhanyagolhatók. Az excentricitási hiba pedig két diametriálisan elhelyezett mikroskóp alkalmazásával esik ki. Lényegesen megváltozik az egész eljárás, ha a meridián iránya nincs kitűzve. Ez esetben az azimut mérést megelőzőleg, a meridián irányának meghatározásáról kell gondoskodnunk; esetleg az azimut mérést mindjárt összekötjük a meridián irányának a meghatározásával.

A meridián irányát ismerni fogjuk, ha egy tetszőleges α, δ koordinátáju csillag bizonyos időpontbeli azimutját kiszámitjuk. E számitás a fundamentális csillagászati háromszög ismert képleteivel történik.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

$$tg\ A = \frac{tg\ t\ tg\ M}{sin\ (\varphi - M)} \text{ ahol } tg\ M \frac{tg\ \delta}{cos\ t}$$

$$\text{vagy } cotg\ A_n = \frac{sin\ \varphi\ cos\ t - tg\ \delta\ cos\ \varphi}{sin\ t}$$

$$tg\ A_n = -\frac{sin\ t}{tg\ \delta . cos\ \varphi - sin\ \varphi\ cos\ t}$$

t = óraszög, δ = a csillag deklináció, φ = az észlelési hely földrajzi szélessége. Az óraszög *(t)* ismerete megkivánja, hogy az észlelés pillanatában ismerjük az óra állását, tehát az órakorrekciót *(ΔU)*, melynek alapján

$$t = \Theta - \alpha = U + \Delta U - \alpha$$

U = az észlelési óra időpontja.

A meridián iránya meghatározható bármelyik csillagból, de legalkalmasabb valamelyik északi csillag.

A gyakorlatban rendszerint a Pólushoz közel fekvő s már a kora esti órákban jól látható csillagot az ugy nevezett *Északi sarkcsillagot (Poláris, α Urs. minoris)* használjuk. Hogy miért választjuk épen ezt a csillagot, megokolhatjuk azzal is, hogy megvizsgáljuk a rektascensióban (α), deklinációban (δ) és a földrajzi szélességben (φ) elkövetett hibák hatását a számitott azimut értékre.

$$cotg\ A\ sin\ t = sin\ \varphi\ cos\ t - tg\ \delta\ cos\ \varphi$$

képletet differenciálva az emlitett 3 változó szerint:

$$d\ A = \frac{cos\ \delta\ cos\ q}{sin\ z}\ dt + \frac{sin\ q}{sin\ z}\ d\delta - \frac{sin\ \alpha}{tg\ z} d\varphi$$

q = a parallaktikus szög.

E képletből láthatjuk, hogy dt, $d\varphi$ koefficiensei északi csillagra, jelesen a Polárisra kicsinyek s igy a rektascensióban (következőleg az óraszögben) és a hely földr. szélességében lévő hibák hatása kicsiny. A $d\delta$ koefficiense a legnagyobb a digressiókban, és zérus a meridiánban. De mindhárom közös tulajdonsága, hogy a *Poláris pályájának diametrális helyein végezve a mérést, hatásuk a középértékből kiesik.* Tehát hogy a csillag pályájának diametrális helyein végezhessük a mérést, cirkumpoláris csillagot kell választanunk s ezek között az *α Urs. minoris* a legalkalmasabb.

Az eljárás tehát a meridián irányának meghatározására a következő lesz.

Bizonyos óraidőpontban megfigyeljük a Poláris áthaladását a középső vertikális irányszálon. A gyakorlatban ezt ugy végezzük, hogy a vertikális irányszálat a Poláris elé állitjuk, ugy hogy 20^s—25^s mulva következzék be a Poláris áthaladása. Feljegyezzük az óraidőpontot s a távcső állását érintetlenül hagyva elvégezzük a leolvasást a tengelylibellán, melyet a leolvasás után átfektetünk. Ezután leolvassuk a mikroskópokat s utána ujra a libellát. E műveleteket távcső áthajtás és alhidade átforgatással megismételjük. Nagyobb biztonság kedvéért az egész müveletet teljesen megismételjük. Az észlelés sémája lesz:

kör nyugat	Poláris	I. azimut érték
kör kelet	Poláris	
kör kelet	Poláris	II. azimut érték
kör nyugat	Poláris	

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A mérési eredmények lesznek:

kör nyugat	$U_1\ L_1\ i_1$	kör kelet	$U'_1\ L'_1\ i'_1$
kör kelet	$U_2\ L_2\ i_2$	kör nyugat	$U'_2\ L'_2\ i'_2$

Ismert adatok: *a)* a Poláris koordinátái (α, δ)

b) az órakorrekció *(Δ U)*

c) az észlelési hely földr. szélessége (φ).

A legelső feladat az inklináció hiba következtében a horizontális kör leolvasási eredményeinek megjavitása, tehát $i_1\ cotg\ z_1$, $i_2\ cotg\ z_2$, . . . értékek számítása. A z_1, z_2, . . . Polárisra vonatkozó zenittávokat az észlelés csillag idő pontjának megfelelő időre az „Albrecht: Formeln und Hilfstafeln" 4. és 5. táblázata segélyével számitjuk. A Polárisra vonatkozólag $cotg\ z > 1.$ tehát az inklináció hiba meghatározására a legnagyobb gondot kell forditanunk, mert e korrekciók közvetlenül s teljes értékükben terhelik a meridián irányának megfelelő leolvasást. A következő lépés a Poláris óraszögének *(t)* számitása:

$$t = U + \Delta U - \alpha$$

Most már megoldhatjuk a Poláris azimutjának számitására szolgáló képletet:

$$tg\ A_n = -\frac{sin\ t}{tg\ \delta\ cos\ \varphi - sin\ \varphi\ cos\ t}$$

A gyakorlati számitásokban e formula transformált alakját használjuk, nevezetesen számlálót, nevezőt osztva $tg\ \delta\ cos\ \varphi$-vel lesz:

$$tg\ A_n = -\frac{cotg\ \delta\ sec\ \varphi\ sin\ t}{1 - cotg\ \delta\ tg\ \varphi\ cos\ t}$$

E képlet logaritmikus megoldását igen megkönnyiti az „Albrecht: Formeln stb." 30. táblázata.

Az ily módon nyert A értékeket előjelükre való tekintettel a horizontális körön nyert leolvasáshoz adva, megkapjuk az egyes körállásoknak megfelelő meridián leolvasást; *mig a simmetrikus értékeket egy középértékbe foglalva, kapjuk a műszerhibák hatásától mentes meridián leolvasást.*

A kollimáció hiba kiejtésére vonatkozólag azonban meg kell jegyeznünk, hogy ez akkor és csakis akkor esik ki automatikusan a középértékből, ha $c\ cosec\ z_1 = c\ cosec\ z_2$, vagyis ha oly gyorsan következnek a körállások egymás után, hogy a $z_1 = z_2$. Ellenkező esetben a kollimáció faktorok számitása válik szükségessé.

Példa a meridián leolvasás meghatározására:

Mérési eredmények.

Körfekvés	Irányzott csillag	Átmeneti idő U	Libella Ny. vég	Libella K. vég	i pars	i cotg Z	L + i cotg Z	Megjegyzés
Nyugat	Poláris	$18^h\ 40^m\ 43^s$	10.1 51.7	42.9 18.8	+ 4.38	+ 10.″23	205° 45′ 47.″43	
Kelet	„	18 48 32	7.2 51.3	40.0 18.7	+ 5.70	+ 13.32	25 45 15.12	1 pars cotg z = 2.″336
Kelet	„	18 51 30	51.4 7.1	18.6 40.0	+ 5.72	+ 13.36	25 45 23.96	
Nyugat	„	18 55 24	50.5 8.2	17.7 41.0	+ 4.75	+ 11.10	205 46 59.50	

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Poláris koordinátái: $\alpha = 1^h\,28^m 1.88,^s$ $\delta = 88°\,50'\,5.''6$
Sarkmagasság $\varphi = 46°\,10'\,54''$
Órakorrekció $(\Delta U) = -\,2^m\,47.18^s$

Számítás.

Körfekvés	Ny.	K.	K.	Ny.	Megjegyzés
U	18 40 43	18 48 32	18 51 30	18 55 24	
Δ U	— 0 2 47.2	— 0 2 47.2	— 0 2 47.2	— 0 2 47.2	log cotg δ = 8.308 309
$\Theta = U + \Delta U$	18 37 55.8	18 45 44.8	18 48 42.8	18 52 36.8	log sec φ = 0.159 650
α	1 28 1.9	1 28 1.9	1 28 1.9	1 28 1.9	log cotg δ sec φ = 8.467 959
$t^h = \Theta - \alpha$	17 9 53.9	17 17 42.9	17 20 40.9	17 24 34.9	
t°	257 28 28.5	259 25 43.5	260 10 13.5	261 8 43.5	log cotg δ = 8.308 309
log cos t	9.336 200n	9.263 528n	9.232 273n	9.187 273n	log tg φ = 0.017 920
log cotg δ tg φ	8.326 229	8.326 229	8.326 229	8.326 229	log cotg δ tg φ = 8.326 229
arg. a 30. tábl.	7.662 429n	7.589 757n	7.558 502n	7.513 502n	
log. sin t	9.989 570n	9.992 579n	9.993 578n	9.994 793n	
log cotg δ sec φ					
sin t	8.457 529n	8.460 538n	8.461 537n	8.462 752n	
korr. a 30. tábl.	— 1 990	— 1 685	— 1 568	— 1 414	
log tg An	8.455 539n	8.458 853n	8.459 969n	8.461 338n	
An	— 1 38 6.4	— 1 38 51.4	— 1 39 6.7	— 1 39 25.5	
LPol + hajlás	205 45 47.4	25 45 15.1	25 45 24.0	205 46 59.5	
L meridián	204 7 41.0	24 6 23.7	24 6 17.3	204 7 34.0	
Középérték	204°	7' 2.''4	204°6'	55.8	
Végeredmény		204°6'	59.''1		

Az ily módon számitott meridián leolvasást terhelik még a Poláris koordinátáiban (α, δ) lévő hibák, továbbá a csillag haladási irányától függő átmeneti időpont becslése és az órakorrekcióban levő hiba. Ez utóbbi keletkezhetik a hibás időmeghatározásból, de az óra járásának egyenetlenségéből is.

Az imént felsorolt hibák hatása ellen — amint azt már emlitettük — ugy védekezünk, hogy a méréseket a Poláris pályájának diametrális helyein végezzük. Az órakorrekcióban lévő hiba hatása ellen védekezhetünk ugy is, hogy a Poláris irányzását a digressiókban végezzük, amikor azimutális értelemben a legkisebb a változása. Ez esetben az észlelés pillanatának megfelelő azimutot ugy is számithatjuk, hogy a legnagyobb digressió időpontjának megfelelő azimut érték észlelési időpontbeli redukcióját keressük ($\Delta\,\alpha$).

A legnagyobb digressió csillag időpontja $U_0 = \alpha \pm t_0$, $cos\ t_0 = \dfrac{tg\ \varphi}{tg\ \delta}$ s az óraszöget a legnagyobb digressió időpontjára vonatkoztatva ($\Delta\,t$), ez óraszög differenciának megfelelő azimut differencia, vagy azimut redukció

$$\Delta\,\alpha = \frac{sin\ \delta\ cos\ \delta}{cos\ \varphi\ sin\ t_0}\ \frac{2\ sin^2\,{}^1/_2\ \Delta t}{sin\ 1''} \pm \frac{15^3}{2}\ sin^2\ 1''\ \frac{sin\ \delta\ cos\ \delta}{cos\ \varphi\ sin\ t_0}\ cotg\ t_0\ (\Delta\,t)^3.$$

A + előjel veendő, ha a Poláris pályájának felső részében áll. A $\dfrac{2\ sin^2\,{}^1/_2\ \Delta t}{sin\ 1''}$ kifejezés számbeli értéke az Albrecht-féle — előbb emlitett — könyv 26. táblázatából vehető ki.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A fenti képlet alkalmazható a digressió előtt és után 45^m-val, anélkül, hogy az azimut értékben 0''·01 hibát követnénk el. Ha a szélső digressióra vonatkoztatott óraszög $\Delta t < 10^m$, akkor a képlet második tagjának számítása teljesen elhanyagolható.

Ha tehát a meridián leolvasás vagy azimut meghatározás ideje közel fekszik a digressió időpontjához, e redukció módszer használata ajánlatos.

A Poláris azimutjának számítása történhetik sorbafejtett függvény alakokból is, mint pl:

$$A = -p \sec\varphi \sin t - \tfrac{1}{2} p^2 \sin 1'' \sec\varphi \operatorname{tg}\varphi \sin 2t - \tfrac{1}{2} p^3 \sin^2 1'' \sec\varphi \sin t\,[1 + 3\operatorname{tg}^2\varphi - (1 + 4\operatorname{tg}^2\varphi)\sin^2 t] - \ldots$$

ahol p = a pólus távolság = $90^0 - \delta$.

A sorbafejtett függvény alakok mindenkor előnyösebben használhatók a zárt képletekkel való számításnál, ha *a)* csak az első pár tagra kell figyelemmel lennünk, *b)* ha ezek táblázatokból számithatók.

A jelen esetben még a negyedrendű tagokat is számításba kell vennünk, ha a 0.''01 élességű határt be akarjuk tartani; táblázataink pedig nincsenek. Ugy, hogy e mód a gyakorlati számítás szempontjából jelentéktelen. Történtek kisérletek e sorbafejtéssel való számítás egyszerűsítésére, de előnyösnek egyik sem mondható s így a meridián leolvasás meghatározására legcélszerűbben a fundamentális csillagászati háromszögből levezetett s transformált formulát használjuk, amelynek feloldása az Albrecht-féle táblázatok segélyével egyszerű és könnyű.

Az eddig elmondottak alapján a meridián irányának meghatározását elintézettnek tekinthetjük s nézzük, hogy történik most már valamely földi pontra menő irány azimutjának meghatározása.

Mezei állomásokon sohasem fogjuk a meridián irányát a természetben kitűzni, nemcsak technikai nehézségek miatt, hanem mert az α, δ és ΔU értékekben lévő hibák miatt a Polárist pályájának diametrális helyein kellvén mérni, az esti és hajnali mérések közti hosszú időközre a horizontális kör állása nem tekinthető annyira stabilnak, hogy az ugyanazon körállás melletti különböző időközökben nyert meridián leolvasások számtani, középértékét fogadhatnók el.

A plausibilis eljárás tehát önként kínálkozik, nevezetesen *a meridián leolvasás meghatározásával egyidejüleg végezzük a földi pont irányzását.*

A Poláris irányzása révén számíthatjuk az előbbiek alapján a körállásnak megfelelő meridián leolvasást, mely tehát megfelel az L_M irányértéknek s ezt összekapcsolva a földi pontra nyert irányértékkel, kapjuk a földi irány azimutját.

Az azimut mérés ilyen berendezése mellett nem kell félnünk az azimutális refrakció hatásától sem*) — már amennyiben valamely pillanatban az asztronomiai azimutális refrakciót azonosnak tekinthetjük a terresztrikus azimutális refrakcióval — mert a Poláris és földi pont irányzását ugyanazon pillanatban végzetteknek tekinthetjük, miután normális viszonyok között a két irányzás közötti rövid időközben a meteorológiai viszonyok számba vehetően alig változnak.

A földi irány azimutjára felírhatjuk:

$$A_F = A_P + L_F - L_P$$

*) Igen valószinű, hogy az azimut mérés nem történik oly meteorológiai viszonyok mellett, mint amelynél a meridián leolvasás meghatároztatott és a meridián iránya a természetben kitűzetett. Mert lehet, hogy a meridián pont kitűzése után csak napok mulva, de minden esetre n a p p a l fogjuk mérni az azimutot. Ez esetben feltétlenül félnünk kell az azimutális refrakció hatásától.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

E képlet adná hibátlan mérési eredmények esetén az azimutot. De a már említett hibákra való tekintettel:

$$A_F = A_P + L_F - L_P + i_F \operatorname{cotg} z_F - i_P \operatorname{cotg} z_P \mp c\,(\operatorname{cosec} z_P - \operatorname{cosec} z_F) \begin{cases} \text{kör nyugat} \\ \text{kör kelet} \end{cases}$$

$$\text{ahol } \operatorname{tg} A_P = -\frac{\operatorname{cotg} \delta \sec \varphi \sin t}{1 - \operatorname{cotg} \delta \operatorname{tg} \varphi \cos t}$$

Az azimut mérést tehát a Poláris és földi pont közvetlen egymásután való irányzásával végezzük, esetről-esetre számítva a körállásnak megfelelő meridián leolvasást. Az azimut értékben fellépő hibák kiküszöbölése végett *a)* a méréseket az esti és hajnali órákban végezzük, *b)* a méréseket a horizontális kör periferiáján egyenletesen eloszlott körállásban végezzük, *c)* több napon át — tehát nem egy éjjelen — végezzük a mérést az azimutális refrakció hatásának kiküszöbölése végett, *d)* symmetrikus körfekvésekben mérünk.

A mérés sémája, melyet a háromszögelő hivatal méréseinél használunk, a következő:

Kör bal . . .	Földi pont (L_{F_1})
Kör nyugat .	Poláris (L_{P_1})
Kör nyugat .	Poláris (L_{P_2})
Kör kelet . .	Poláris (L_{P_3})
Kör kelet . .	Poláris (L_{P_4})
Kör jobb . .	Földi pont (L_{F_2})

Tehát irányozzuk a földi pontot (mérési eredmény az inklináció hibával való megjavítás után L_{F_1}), azután kétszer egymásután — ugyanazon *körfekvés* mellett — megfigyeljük a Poláris átmeneti idejét és elvégezzük az egyes átmeneti időkhöz tartozó leolvasást a horizontális körön, (L_{P_1}, L_{P_2}); azután távcsövet áthajtva, alhidadet átforgatva újra kétszer mérjük a Polárist (L_{P_3}, L_{P_4}) s utána zárjuk a mérést a földi pont irányzásával (L_{F_2}). Egy ily összetartozó csoportot nevezünk *fordulónak*, mely négy, egy-egy kör állásban mért azimut értéket ad.

Ezeket *időre* és *körfekvésre* simmetrikusan számtani középértékbe foglalva 2 azimut értéket nyerünk, melyek a műszer állandó hibáitól mentesek.

$$\begin{array}{c|c} L_{F_1} - L_{P_1} & L_{F_2} - L_{P_3} \\ L_{F_1} - L_{P_2} & L_{F_2} - L_{P_4} \end{array}$$

$$A_1 = \frac{(L_{F_1} - L_{P_1}) + (L_{F_2} - L_{F_4})}{2}$$

$$A_2 = \frac{(L_{F_1} - L_{P_2}) + (L_{F_2} - L_{F_3})}{2}$$

A *kollimáció* hiba kiejtése végett ügyelnünk kell arra, hogy a Poláris irányzások gyorsan következzenek egymás után, hogy egy forduló mérési idejére a kollimáció faktorok állandónak legyenek tekinthetők. Ha e feltétel valami okból nincs kielégítve, akkor a c számítandó. Ha az azimut képletében szereplő abszolut értékre a következő helyettesítéseket végezzük kör bal, illetve kör jobb esetben:

$$A_P + L_F - L_P + i_F \operatorname{cotg} z_F - i_P \operatorname{cotg} z_P = (A_F)_b$$

$$\operatorname{cosec} z_P - \operatorname{cosec} z_F = C_b$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

s analóg módon $(A_F)_j$, C_j, akkor

$$A_F = (A_F)_b - c\ C_b$$
$$A_F = (A_F)_j + c\ C_j$$

s e két ismeretlent (A_F és c) tartalmazó két egyenletből

$$c = \frac{(A_F)_b - (A_F)_j}{C_b + C_j}$$

Az ilymódon számított c értéket kell felhasználnunk a $c\ (cosec\ z_P - cosec\ z_F)$ értékek számításánál.

De amint említettük is, törekedni kell arra, hogy a Poláris irányzások gyorsan következzenek egymásután s akkor a kollimációtól függő tag automatikusan kiesik a középértékből. Egy irány azimutját, a nemzetközi földmérés céljaira végzett mérésekben, meghatározottnak tekintjük, ha 48 azimut értékünk van, ami a fentebbi séma szerint 24 forduló mérését teszi szükségessé. Az egyes fordulók előtt $\frac{180°}{24} = 7.°5$-al a horizontális kört elforgatjuk a periodikus körosztási hiba kiküszöbölése miatt. A vázolt módon nyert 48 azimut érték számtani középértékét fogadjuk el végeredménynek. Természetesen középhiba számítást is kell végeznünk, hogy a megbízhatóság mérőszámát ismerjük. Elfogadható a kiegyenlített azimut érték, ha középhibája $\mu_A < 0.''3$.

A kiegyenlített azimut érték a napi aberráció miatt $+ 0.''32 \frac{\cos \varphi}{\sin z}$ korrekciót kap.

Az azimut számítás teljességéhez tartozik még az azimut érték változásának ismerete, ha a számításhoz használt α, δ, φ-ben sorjában $d\alpha^s$, $d\delta''$, $d\varphi''$ hibát tételezünk fel.

E differenciális változás a következő differenciál egyenletből számítható:

$$dA'' = (p \sin 1'' \sec \varphi \cos t + p^2 \sin^2 1'' \sec \varphi \operatorname{tg} \varphi \cos 2t)\ d\alpha^s +$$
$$+ (\sec \varphi \sin t + p \sin 1'' \sec \varphi \operatorname{tg} \varphi \sin 2t)\ d\delta'' -$$
$$- (p \sin 1'' \sec \varphi \operatorname{tg} \varphi \sin t + {}^1/_2\, p^2 \sin^2 1'' \sec^3 \varphi\ (1 + \sin^2 \varphi) \sin 2t)\ d\varphi''$$

Körállásonként állítjuk fel e differenciál egyenleteket, melyeknek felállítása és kiszámítása kívánatos azért is, mert a nyert egyenletrendszer mutatja az azimut értékben szereplő α, δ, φ értékek *bizonytalanságából származó hibaforrások eliminálódását a mért és számításba vett fordulók alapján.*

Példa az azimut számításra: *)

Állomás: Cárhalom — Észlelő: Fleischer

Dátum: 1910. aug. 24. szerd. p. m. — Kronometer: Nardin 443

Irány: Rozália torony.

A számításhoz szükséges adatok:

$$\varphi_{Rozália} = 47°\ 41'\ 34.''1$$
$$\alpha_{Poláris} = 1^h\ 27^m\ 27.''1$$
$$\delta_{Poláris} = 88°\ 49'\ 27.''94$$
$$\Delta U = -\ 30.6_s$$

$\log \operatorname{cotg} \delta$	= 8.312 187	$\log \operatorname{cotg} \delta$	= 8.312 187
$\log \sec \varphi$	= 0.171 917	$\log \operatorname{tg} \varphi$	= 0.040 882
$\log \operatorname{cotg} \delta \sec \varphi$	= 8.484 104	$\log \operatorname{cotg} \delta \operatorname{tg} \varphi$	= 8.353 069

*) Jegyzet: Az alábbi számítási sémát Oltay Károly műegy. tanár készítette.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Körállás / Körfekvés	62.5° K. K.	K. Ny.	K. Ny.	K. K.
U	$15^h\ 54^m\ 50^s$	$16_h\ 0^m\ 46^s$	$16^h\ 3^m\ 59^s$	$16^h\ 6^m\ 12^s$
Δ U	— 30.6	— 30.6	— 30.6	— 30.6
$\Theta = U + \Delta U$	15 54 19.4	16 0 15.4	16 3 28.4	16 5 41.4
α	1 27 27.1	1 27 27.1	1 27 27.1	1 27 27.1
$t^h = \Theta - \alpha$	44 26 52.3	14 32 48.3	14 36 1.3	15 38 14.3
t°	216° 43' 4."5	218° 12' 4."5	219° 0' 19."5	219° 33' 34."5
log cos t	9.903 952$_n$	9.895 336$_n$	9.890 469$_n$	9.887 033$_n$
log cotg δ tg φ	8.353 069	8.353 069	8.353 069	8.353 069
arg. a 30. táblázathoz	8.257 021$_n$	8.248 405	8.243 538$_n$	8.240 102$_n$
log sin t	9.776 611$_n$	9.791 289$_n$	9.798 923$_n$	9.804 058$_n$
log. cotg. δ sec φ	8.484 104	8.484 104	8.484 104	8.484 104
korr. a 30. táblázatból	— 7 778	— 7 627	— 7 543	— 7 484
log tg A_n	8.252 937$_n$	8.267 766$_n$	8.275 484$_n$	8.280 678$_n$
A_n	$\mp$ 1° 1' 32."47	$\mp$ 1° 3' 40."69	$\mp$ 1° 4' 49."18	$\mp$ 1° 5' 35."96
L_P + hajlás	— 332 11 10.61	— 332 13 19.75	— 152 14 6.25	— 152 14 54.46
$L_{Meridián}$	— 331 9 38.14	— 331 9 39.06	— 151 9 17.07	— 151 9 18.50
L_F + hajlás	242 45 0.96	242 45 0.96	62 44 52.36	62 44 52.36
$A_{F_{ny}}$ illetve A_{F_k}	271 35 22.82	271 35 21.90	271 35 35.29	271 35 33.86
$\frac{A_{F_{ny}} + A_{F_k}}{2} = A_F$	271 35 28.34		271 35 28.60	

$$d\,A'' = -\,0.022\,d\,\alpha^s - 0.970\,d\,\delta'' + 0.021\,d\,\varphi''$$

4. §. Földrajzi hosszuság mérése.

Három fő csoportba sorolhatók az idevonatkozó módszerek:

I. Egyidejü jelek csoportja;

II. Időátviteli módszerek csoportja;

III. A *hold helyzetére* alapított módszerek csoportja.

A legszabatosabb eredményeket adó gyakorlati eljárás *(telegráphikus eljárás)* a II. csoportba tartozik. A következőkben az összes eljárásokat fogjuk lényegileg ismertetni. Ezt megelőzőleg azonban a nemzetközi *nullameridiánról* (kezdőmeridiánról) akarunk egyetmást elmondani.

Földrajzi hosszuság alatt azt a szöget értjük, amelyet két hely meridiánsikja egymással bezár. Mig tehát a földrajzi szélesség kiinduló pontját (a *0* szélességet) a természet maga megadja, addig a *kezdőmeridián* megválasztása emberi önkénynek van alávetve.

Az ókorban *Marinus* és *Ptolemäus* egy a „*Kap-Verd*"-i szigetektől mintegy 1°-al nyugatra fekvő meridiánt tettek nullmeridiánná. Az *arabok* kezdőmeridiánja a középkorban *Bagdad*tól pontosan 10°-ra keletre vonult el; a 16. és 17. század tengerészei és térképészei felváltva az „*Azor*"-i, „*Kanári*" és „*Kapverdi*" szigetek meridiánját jelölték 0°-al; a 17. és 18. század tengerészeti térképein a „*Pik de Teneriffa*" meridiánja van 0°-al jelölve.

Egy *Párizs*ban 1630-ban tartott astronomiai kongressuson *Ferro* meridiánját tették meg nullameridiánná azzal a definicióval, hogy ez a ferrói meridián a *párisi meridiántól pontosan 20°-al* van nyugatra.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Egy 1884. évben megtartott nemzetközi gyülekezet határozata alapján „*Greenwich*“ meridiánja lett a nemzetközi kezdőmeridián ugy a *csillagászatban*, mint különösen a tengerészetben. A greenwichi meridián egyuttal kiindulása a *zónaidő rendszernek* is; a tengerészek a greenwichtől 180°-ra levő meridiánt tekintik dátumhatárnak; nyugatról keletre hajózva e határon át, ugyanazt a dátumot *kétszer egymásután* kell venni és forditva: keletről nyugatra hajózva egy napot a dátumban át kell ugorni, illetve kihagyni.

Az astronomiai évkönyvekből a világ összes nevesebb csillagdáinak a greenwichi meridiánra vonatkoztatott földrajzi hosszai kivehetők. (0°-tól + 180°-ig a *Greenwich*-től keletre és 0°-tól — 180°-ig a *Greenwich*-től nyugatra fekvő helyek hosszai jelentkeznek.)

I. Egyidejü jelek csoportja.

Legegyszerűbb eljárásnak kinálkozik oly **égi jelenségek** megfigyelése, amelyek egy egész félgömbről egyidejüleg láthatók. A jelenség pillanatában megfigyelt **helyi idők különbségei** megadják azután a viszonylagos hosszuság különbségeket. Egészen a 19. századig a **holdfogyatkozásokat** (Mondfinsternisse) használták fel ilymódon. Szigoruan véve azonban ezen égi jelenség kezdete és vége*) a parallaktikus eltolás miatt nem egyszerre látható minden helyről: ezért ezen régen sűrűn alkalmazott eljárás nem szabatos.**)

Richer szerint e módszerrel nehány másodpercre pontos hosszuság különbséget lehet kapni, ha azon pillanat észleltetik több helyen, amidőn az árnyék bizonyos megállapított *holdkraterekhez* ér.

Galilei óta hosszuságkülönbségek megállapítására *Jupiter satellitek* (holdak) *elsötétedési* jelenségeinek megfigyelését is felhasználták.

Különösen **D. Cassini** és **Hell** fejlesztették ki ezen eljárást; tőlük erednek idevonatkozó táblázatok és gyakorlati utasitások is.

Ezidőszerint e módszer a hosszuságkülönbségek mérésére azonban már nem használtatik.

Meg kell itt még említeni, hogy többen a *csillaghullások* (Sternschnuppen) fényjelenségeit is felhasználták hosszuság különbségek mérésére; mivel azonban nem tudni előre hol és mikor jelentkezik egy meteorit és mivel az *azonositás is igen nehéz*, bizonytalan művelet: e módszer sohasem vált be jól.

Az itt előadott — **égi jelenségekre** támaszkodó — eljárásoknál sokszorta pontosabbak a ***mesterséges*** fényjelzésekre támaszkodó hosszkülönbségmérő eljárások, amelyeket *Picard* már 1671. évben, *Cassini de Tury* pedig 1739—40. években használtak fel sikeresen fokmérések céljából végzett szabatos hosszúságméréseknél. Egészen *Gauss*-ig lőpornak meggyujtásával adták a jeleket; *Gauss* óta az általa kitalált heliotrop szolgáltatta a fényjeleket.

Az állomást, amely megadta a pillanatnyi fényjeleket lehetőleg a két észlelő állomás közepébe (egyenlő távolba) helyezték. Ha a két észlelő állomás távola azonban tulságosan nagy volt, akkor **több közbenső fényállomást** létesitettek. Ezen közbenső állomásokon azonban nem kellett **helyi időt**, hanem csakis a fényjelek közt eltelt rövid időtartamokat mérni; időmeghatározásokat csak a két szélső (észlelési) állomáson kellett előzőleg és utólag végezni az óra állás pontos megismerése végett.

---

*) Azaz a valamely helyen látható teljes holdkorong elsötétedése.

**) Más hibaforrások is gyakorolnak itt döntő befolyást: pl. az árnyék széleinek elmosódottsága.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A legnagyobb ilynemü mérést *Brousseaud* francia tábornok végezte 1824-ben: *Bordeaux* és *Fiume* volt a két szélső állomás.

Ezen időtájt végzett az osztrák-magyar vezérkar is egy *igen pontos* fényjelzéses hosszuságmérést *Budapest* és *Bécs* között négy fényállomás (lőporral) közbe iktatásával. E mérések eredményei tized idő másodpercekre egyeznek az uj, egészen szabatos (telegrafikus) mérések eredményeivel.

II. Időátviteli módszerek csoportja.

R. Gemma (-Frisius) már 1530-ban emliti első izben, hogy miként lehet egy szállitható jól járó *óra segélyével az egyik helynek idejét azon helyre átvinni, amelynek hosszkülönbségét ismerni akarjuk.* Közel *200* esztendő telt azonban el, amig az *óra* (chronometer) *technika* annyira haladt, hogy ez az eszme gyakorlatilag megvalósulhatott. Amióta pedig *J. Harrison* (1735) az első szabatos tengerészeti chronometert előállította, azóta az oceáni hajózásban a mai napig kizárólag ez az eljárás dominált.

A *chronometrikus időátvitel* vezérlő gondolata a következő:

az **A** helyen huzamos időn át gyakori időmeghatározások és az előbbi fejezetben (198. oldal) emlitett módon megfigyelem az uti chronometer állását, járását és a légnyomás, hőmérsék, légnedvesség hatását a járásra. Most elutazom a meghatározandó *B* helyre és ott szabatos időmeghatározást végzek. Ismerem tehát *B*-ben a helyi időt és a chronometer egyenletéből a megfelelő **A** pontbeli helyi időt: e kettő különbsége a keresett hosszuságkülönbség. Jó ellenőrzést ad e müvelet megismétlése: **B**-ből ismét **A** helyre utazom és ott időmeghatározást végzek. Fokozhatjuk az eredmény megbizhatóságát, ha nem egy, hanem **több chronometert** viszünk magunkkal. *)

A legnagyobb ilynemü szabatos meghatározást *Struwe W.* végezte 1843—44. évben *Grenwich-Altona-Pulkava* között.

Szárazföldi utazásokhoz a lassú lengésü „*Tengerészeti (Box) chronometer*" helyett (a rázásokra tekintettel) a gyors lengésü ($^1/_5$ másodperc ütésü) *zsebchronometereket* (5—6 drbot) használják. Az időátvitel módszere igen sokat nyert a táviró feltalálása által.

A távirati módszert az időátvitelre, azaz a földrajzi hosszuságok mérésére, a *Morse* által már 1839-ben megadott útmutatás szerint először (1844) *Washington* és *Baltimore* között alkalmazták *Wilkes* és *Eld* igen jó eredménynyel.

Ezt a módszert azóta kifejlesztették, szabatosan megállapitották minden részletében**) úgy, hogy a nemzetközi földmérés céljai szempontjából *más módszer* ezidőszerint már szóba sem kerülhet.

Egy ily mérés várható pontossága ma már $\pm$ **0.″1**-re tehető.

A két állomáson naponta végzendő *időmeghatározásokhoz* passage müszert használnak és hogy a *rectascensiók* esetleges hibájától mentes eredményt kapjanak: mindkét állomáson *ugyanazon csillagokkal* végzik az időmeghatározást. Az észlelő személyes egyenletének hatását azáltal eliminálják, hogy müszer és személycserét végeznek a müvelet közben. A szálátmenetek ma már nem az egyszerü regisztráló módszerrel észleltetnek, hanem a **Repsold-féle okularmikrometer** szerkezettel (197. és 201. oldal) adódnak át automatikusan a chronographszalagra az időponti jelek.

---

*) Nagyobb hajókon *három* szabatos hajóchronometert használnak. Ezeket a *chronometer observatoriumokban* (Hamburg, Kiel, Wilhelmshaven stb.) időszakonkint teljes megfigyeléseknek vetik alá: megállapitva a *járás* egyenletét.

**) Lásd különösen: *Th. Albrecht*, Formeln u. Hülfstafeln für geographische Ortsbestimmungen Leipzig 1894. p. 110, ahol e módszer eszközei és összes szabályai a legszabatosabban közöltetnek.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A műszerhibáknak az időmeghatározásra való hatását azáltal szoritják le minimumra, hogy oly időcsillagokat használnak, melyek zenittávolságainak számtani középértéke közel = a poláris zenittávolságával.

Ma már a szálátmeneti pillanatokat nem mind a két állomás chromograph-ján regisztráljuk; ellenben egy-egy este a két állomás ingaórájának állását többször egymásközt (telegráfikusan a chronographon) összehasonlítjuk. Ilymódon a *távvezetékre* egy-egy este csak rövid időre van szükségünk: ami frekventált vonalakon indokolt is.

Ujabban már a *Marconi-féle drótnélküli távirót* is használja a nemzetközi földmérés az időátvitelre.

E módszernek különösen az oceáni hajózásban lesz igen nagy szerepe, ha elképzeljük, hogy különböző tengermenti observatoriumokban szigoruan előirt *Greenwichi* időpontban, drótnélküli jel adatik majd, amely a hajók Marconi felfogó készülékei által az összes oceáni hajóktól átvétetik. A tengerésznek ekkor még csak a *helyi* időt kell a nap segélyével mérni; a tengerészeti chronometerek járása tehát már nem játszana semmiféle döntő, nagy szerepet a földrajzi hosszmérésben.

III. A hold helyzeteire alapított módszerek.

Ezek különösen az oceáni hajózásban és szárazföldi kutató utazásoknál nyertek alkalmazást.

E módszerek közül ki kell emelni:

1. *„holdkulminatió módszerét“*,
2. a *„holdmagasságok módszerét“* és végül
3. a *„holdtávolságok módszerét“*.

E módszerek közös sajátsága, hogy gyakorlatilag csak ugy alkalmazhatók, ha a vonatkozó, részletes számtáblázatokkal rendelkezünk.

ad 1. Alapul szolgálhatnak a *Mayer Tóbiás* által 1752. évben kiadott holdtáblázatok. Az eljárás egyébként a párisi *Orontius Finaeus* (1544.) nevü csillagásztól ered. Megfigyeli a holdnak a meridiánon való átmeneti időpontját és abból levezeti a rektascensiót. Ezt két helyen végezve, a nyer rektascensió különbségből — a rektascensió változás segélyével — kiszámitja a földrajzi hosszuság különbséget. Mivel a meridiánátmenet pillanatában eltünik a holdnak rektascensióban való, parallaktikus eltolása: a számítás aránylag egyszerü. Ugy a műszerhibák, mint az alapadatok hibáinak hatásától mentes lesz az eredmény, ha a hold közvetlen közelében látható csillagok átmeneteit is észleljük. Ez alapon azután *F. B. G. Nikolai* (1826) oly számitási eljárást vezetett le, amelynél az *órakorrektió, holdsugár* valamint a holdtáblázatok hibái alig gyakorolnak befolyást az eredményre. *A. Alessió* (1902) szerint a diffraktió hatásától (amely a holdradiust különböző észlelők és távcsövek részére másnak mutatja) mentes eredményeket kaphatunk, ha nem a holdszéleket, hanem a holdkorong közepéhez közel álló *„Mösting A.“* kratert figyeljük meg.

Igen kiterjedt, alapvető szabatos ilynemü méréseket végzett 1867—70. években *G. Fleuriais* a különböző kontinenseken. *)

ad 2. A hold magasságok (vagy *zenittávolságok)* módszerét *Bongner* ajánlotta *„nouveau traité de navigation, Paris 1753.“* cimü művében. Ugyanis megmérve a hold zenittávolságát és azt a föld központjára redukálva a holdnak lasabban változó deklinátiójával a *„hold-zenit-polus“* háromszögből kiszámíthatjuk az óraszöget. Ebből azután az

*) Lásd: „Connaissance des temps“ 1870—74. évfolyamait.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

ismeretes helyi csillagidővel kiszámítható a hold rektascensiója és igy a csillagászati évkönyvi meridiánra vonatkoztatott hosszuságkülönbség is. Hogy állandó hibákat kiküszöböljünk, célszerü (mint előbb) oly csillagokat is bevonni, amelyeknek zenittávolsága és azimutja közel egyenlő a holdéval.

ad 3. E módszernek a tengerészet céljaira való alkalmassá tétele számos csillagásznak képezte törekvését. Ezek eredményeként az egyébként igen komplikált és nehézkes számitás tetszőleges közelítéssel kész számtáblázatokkal és négyjegyü logaritmusokkal eszközölhető.

A mérés abból áll, hogy megmérjük a holdnak éggömbi ivtávolságait alkalmas álló csillagoktól, vagy a négy világos bolygótól esetleg a naptól; továbbá ezen égitestek zenittávolságait.

A számítás legegyszerűbb az *Elford*-féle eljárás szerint; e módszernek táblázatai minden modern tengerészeti évkönyvben megtalálhatók.*)

A teljesség kedvéért meg kell itt még emliteni, hogy a hold által okozott *csillagtakarások* és *napfogyatkozások* jelenségeit is lehet hosszuságkülönbségek mérésére használni.

*) Lásd e módszer leirását: *J. F. Encke*: Berliner astron. Jahrbuch für 1842. p. 307-ben.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Hengervetületi redukciós táblázatok.

I. táblázat.

$\tau_{I.}$ táblázata.

$x_B + x_A$	τ_I	$x_B + x_A$	τ_I	$x_B + x_A$	τ_I
1	0.005	41	0.187	81	0.369
2	09	42	91	82	74
3	14	43	96	83	78
4	18	44	0.201	84	83
5	0.023	45	05	85	0.387
6	27	46	10	86	92
7	32	47	14	87	97
8	36	48	19	88	0.401
9	41	49	23	89	05
10	0.046	**50**	0.228	**90**	0.410
11	50	51	32	91	15
12	55	52	37	92	19
13	59	53	42	93	24
14	64	54	46	94	29
15	0.068	55	0.251	95	0.433
16	73	56	55	96	38
17	78	57	60	97	42
18	82	58	64	98	47
19	87	59	69	99	51
20	0.091	**60**	0.274	**100**	0.456
21	96	61	78	101	60
22	0.100	62	83	102	65
23	05	63	87	103	70
24	09	64	92	104	74
25	0·114	65	0.296	105	0.479
26	19	66	0.301	106	83
27	23	67	05	107	88
28	28	68	10	108	92
29	32	69	15	109	97
30	0.137	**70**	0.319	**110**	0.501
31	41	71	24	111	06
32	46	72	28	112	11
33	50	73	33	113	15
34	55	74	37	114	20
35	0.160	75	0.342	115	0.524
36	64	76	46	116	29
37	69	77	51	117	33
38	73	78	56	118	38
39	78	79	60	119	42
40	0.182	**80**	0.365	**120**	0.547

τ_I előjele azonos $(x_B + x_A)$ előjelével.
τ_{II} előjele azonos $(x_B - x_A)$ előjelével.
$(Y_B - Y_A)$ előjele a szorzásnál figyelembe veendő.

$\tau_{II.}$ táblázata.

$x_B - x_A$	τ_{II}	$x_B - x_A$	τ_{II}
0.4	0.001	13.5	0.021
1.0	0.002	14.2	0.022
1.7	0.003	14.8	0.023
2.4	0.004	15.5	0.024
3.0	0.005	16.2	0.025
3.6	0.006	16.8	0.026
4.3	0.007	17.5	0.027
5.0	0.008	18.1	0.028
5.6	0.009	18.8	0.029
6.3	0.010	19.4	0.030
6.9	0.011	20.1	0.031
7.6	0.012	20.7	0.032
8.3	0.013	21.4	0.033
8.9	0.014	22.1	0.034
9.6	0.015	22.7	0.035
10.2	0.016	23.4	0.036
10.9	0.017	24.0	0.037
11.5	0.018	24.7	0.038
12.2	0.019	25.4	0.039
12.9	0.020	26.0	0.040

p. p.

4.0

0.2	1
0.4	2
0.7	3
0.9	4

5.0

0.1	1
0.3	2
0.5	3
0.7	4
0.9	5

Jegyzet.

$$\Delta_{A,B} = (-\tau_I + \tau_{II})(Y_B - Y_A)$$
$$\Delta_{B,A} = (+\tau_I + \tau_{II})(Y_B - Y_A)$$

$(x_B + x_A)$ és $(x_B - x_A)$ argumentumok *1000* öles hosszegységre vonatkoznak: τ_I és τ_{II} másodpercekben vannak kiírva.

Az argumentumokban elégséges *egy decimálist* ($\pm$ 100 öl) kiírni, illetve figyelembe venni.

Pl. $x_B + x_A = 95.672$ öl

$x_B - x_A = 3.796$ öl, akkor a **95.7**, illetve **3.8** számok lesznek az argumentumok.

Az $(Y_B - Y_A)$ szorzónak szintén *1000* öl az egysége; itt is elégséges egy decimálist figyelembe venni.

Pl. $(Y_B - Y_A) = 5.742$ öl esetében **5.7** lesz a szorzó értéke.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

II. táblázat.

σ_I. táblázata.

$x_B + x_A$	σ_I	$x_B + x_A$	σ_I	$x_B + x_A$	σ_I
0	0	**50**	120	**100**	480
1	0	51	25	101	90
2	0	52	30	102	99
3	0	53	35	103	509
4	1	54	40	104	19
5	1	55	45	105	29
6	2	56	51	106	39
7	2	57	56	107	49
8	3	58	61	108	60
9	4	59	67	109	70
10	5	**60**	173	**110**	581
11	6	61	79	111	91
12	7	62	84	112	602
13	8	63	90	113	13
14	9	64	97	114	24
15	11	65	203	115	35
16	12	66	09	116	46
17	14	67	15	117	57
18	16	68	22	118	68
19	17	69	28	119	80
20	19	**70**	235	**120**	691
21	21	71	42	121	703
22	23	72	49	122	14
23	25	73	55	123	26
24	28	74	63	124	38
25	30	75	70	125	50
26	32	76	77	126	62
27	35	77	85	127	74
28	38	78	92	128	86
29	40	79	300	129	99
30	43	**80**	307	**130**	811
31	46	81	15	131	24
32	49	82	23	132	36
33	52	83	31	133	49
34	55	84	39	134	62
35	59	85	47	135	75
36	62	86	55	136	88
37	66	87	63	137	901
38	69	88	72	138	14
39	73	89	80	139	27
40	77	**90**	389	**140**	941
41	81	91	97	141	54
42	85	92	406	142	68
43	89	93	15	143	81
44	93	94	24	144	95
45	97	95	33	145	1009
46	102	96	42	146	23
47	106	97	52	147	37
48	111	98	60	148	51
49	115	99	70	149	65
50	120	**100**	480	**150**	1080

σ_I és σ_{II} mindig + előjelűek.

p. p.

3		4		5	
0.2	1	0.2	1	0.1	1
0.5	2	0.4	2	0.3	2
0.9	3	0.7	3	0.5	3
		0.9	4	0.7	4
				0.9	5

6		7		8	
0.1	1	0.1	1	0.1	1
0.3	2	0.3	2	0.2	2
0.5	3	0.4	3	0.4	3
0.6	4	0.5	4	0.5	4
0.8	5	0.7	5	0.6	5
0.9	6	0.8	6	0.7	6
		0.9	6	0.9	7

9		10		11	
0.1	1	0.1	1	0.1	1
0.2	2	0.2	2	0.2	2
0.3	3	0.3	3	0.3	3
0.4	4	0.4	4	0.4	4
0.5	5	0.5	5	0.5	6
0.7	6	0.6	6	0.6	7
0.8	7	0.7	7	0.7	8
0.9	8	0.8	8	0.8	9
		0.9	9	0.9	10

12		13		14	
0.1	1	0.1	1	0.1	1
0.2	2	0.2	3	0.2	3
0.3	4	0.3	4	0.3	4
0.4	5	0.4	5	0.4	6
0.5	6	0.5	7	0.5	7
0.6	7	0.6	8	0.6	8
0.7	8	0.7	9	0.7	10
0.8	10	0.8	10	0.8	11
0.9	11	0.9	12	0.9	13

σ_{II}. táblázata.

$x_B - x_A$	σ_{II}
1	0
6	1
10	2
13	3
15	4
17	5
19	6
21	7
22	8
23	9
25	10
26	11
27	12
28	13
29	14
31	15

Jegyzet.

Hosszredukció $= \sigma = \sigma_I + \sigma_{II}$.

$(x_B + x_A)$ és $(x_B - x_A)$ argumentumok **1000** öles hosszegységre vonatkoznak:

σ_I és σ_{II} a 7-ik mantissa egységeiben van kiírva.

Az argumentumokban elégséges *egy decimálist* ($\pm$ 100 öl) kiírni, illetve figyelembe venni.

Pl. $x_B + x_A = 95.672$ öl

$x_B - x_A = 3.796$ öl, akkor a **95.7**, illetve **3.8** számok lesznek az argumentumok.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

III. RÉSZ.

Közvetítő mérések kiegyenlítése egymástól független ismeretlenekkel.

I. §. Bevezetés.

A mérési hibák elmélete, a kiegyenlítő eljárás célja és annak alapelvei e mű I. kötetének (46. oldal) III. fejezetében találhatók.

Az ott tárgyalt elveknek — az összefüggés kedvéért — részben való ismétlésével a jelen fejezet célja a közvetítő mérések kiegyenlítésének *részletes tárgyalása*, különös tekintettel a gyakorlatban előforduló esetekre. Mielőtt a kiegyenlítő módszer általános ismertetését megkezdenők, szükségesnek tartjuk a mérési eredményekre a következő kikötéseket tenni:

a) hogy azok állandó és szabályos hibától mentesek legyenek, tehát csak szabálytalan vagy véletlen természetű hibák terheljék. Ezt röviden úgyis mondhatjuk, hogy a mérési eredményeket csak *0 középértékű hibák terheljék;*

b) hogy a hibák a Gauss-féle hibatörvényt kövessék:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, l^{-h^2 \varepsilon^2}$$

ahol $\varepsilon =$ a valódi hiba

$h =$ az ε egységeiben kifejezett s az észlelés pontosságától függő állandó.

Ez utóbbi feltétel kielégítése esetében nemcsak a *legkisebb középhibájú*, tehát a legnagyobb megbízhatóságú eredményt szolgáltatja a kiegyenlítő eljárás, hanem egyszersmind a *legvalószínűbb értéket* is.

Ha a hibák előfordulása nem követi a Gauss-féle hibatörvényt, de az *a)* alatti feltétel ki van elégítve, akkor a kiegyenlítő eljárás a legkisebb középhibájú eredményt szolgáltatja ugyan, de többé *nem a legvalószínűbb értéket*.

Ha az *a)*, *b)* alatt felsorolt feltételeket ki nem elégítő mérési eredményekre alkalmazzuk a kiegyenlítő eljárást, akkor *kiegyenlített* értékeket nyerünk ugyan, de ez értékek nem lesznek sem a legvalószínűbb értékek, sem a legkisebb középhibájúak. Ily esetekben a kiegyenlítő eljárásban kényelmes eszköz áll rendelkezésünkre, a feltételi egyenletekben fellépő ellentmondások eltüntetésére. A kiegyenlítő eljárásnak ez utóbbi esetekben való alkalmazása azonban ellentétben áll a légkisebb négyzetek módszere szellemével.

Elengedhetetlenül szükségesnek tartjuk tehát a kiegyenlítésbe vezetendő mérési eredmények kritikai vizsgálatát, hogy a kiegyenlítő eljárás folytán nyert eredmények csakugyan a legvalószínűbb értékek legyenek, amely cél elérése hozta létre a legkisebb négyzetek módszerét.

Kellő kritika nélkül alkalmazva a mérési eredményekre a kiegyenlítő eljárást, megtörténhetik, hogy a *kiegyenlítés adta javítások* fognak bennünket figyelmeztetni a mérési

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

eredményeket terhelő *állandó* vagy *szabályos* hibákra s ezeknek kiküszöbölése után az egész kiegyenlítést újból kell végeznünk, tehát meg kell ismételnünk.

A méréstanba tartozik azon eljárások és mérési módok ismertetése, melyeknek betartása esetén elvárhatjuk, hogy mérési eredményeink állandó és szabályos hibától mentesek. Például szögmérés vagy iránymérés esetében az állandó és szabályos hibák kiküszöbölése végett, az irányzásokat két távcsőállásban végezzük s ellenkező sorrendben irányozunk; a körosztás periodikus osztási hibájának kiküszöbölése végett pedig az egyes fordulókat a periferián egyenletesen eloszlott körállásban mérjük, hogy így a körosztásból származó állandó természetű hibát, szabálytalanná, illetve véletlen természetűvé tegyük. Alig szükséges annak felemlítése, hogy a pontraállításból és a vertikális tengely vertikálissá tételéből származó állandó hibaforrás megszüntetése végett e két műveletet a legnagyobb gonddal kell végeznünk.

2. §. A közvetítő mérések kiegyenlítésének elve.

Közvetítőmérések alatt azon mérési eseteket értjük, amikor a meghatározandó ismeretlenek maguk közvetetlenül nem mérhetők, hanem mérünk helyettük olyan mennyiségeket, amelyek a keresett ismeretlenekkel bizonyos mathematikai összefüggésben állanak. Ilyen eset például, ha valamely pont derékszögű sík koordinátáinak meghatározása végett szögmérést vagy iránymérést végzünk; ahol a mathematikai összefüggést a mérési eredmények és a derékszögű sík koordináták között, a háromszög feloldására és a koordináta számításra szolgáló ismert trigonometriai képletek adják.

Vagy ilyen eset a tahimeter összeadó (c) és a szorzó (k) állandójának meghatározása közvetetlen hosszmérés (d) és lécleolvasás (L) segélyével, ahol a mérési eredmények és a meghatározandó ismeretlenek közötti math. összefüggést a $d = c + k\,L$ ismert képlet adja.

A közvetítő mérések kiegyenlítési módszere alatt a kiegyenlítő eljárások azon esetét értjük, amikor a legvalószínűbb érték meghatározására a fölös számú mérési eredmények ugyanazon egymástól független ismeretlenek értékrendszerének függvényeként állíthatók elő, tekintet nélkül arra, hogy az egyes ismeretlenek közvetlenül mérhetők-e vagy pedig, csak az ismeretlenek és a mérési eredmények között lévő mathematikai kapcsolatok útján számítási eredményként nyerhetők.

Kiegyenlítésről csak fölös számú mérési eredmények esetén lehet szó.

A közvetítő mérések esetének fent említett két példájánál szükségünk lesz a kiegyenlítő eljárás alkalmazására, valahányszor a mérési eredmények révén a mathematikai kapcsolatok közül többet tudunk felírni, mint amennyi az ismeretlenek *egyértelmű* meghatározásához szükséges. Az előbb említett első esetben az ismeretlen pont koordinátáinak egyértelmű meghatározása végett elegendő egy alapvonal hosszának ismerete és két szög mérése; ha e pont egy másik alapvonalból is számítható a fölösszámú szögmérés révén, akkor az egymásnak ellentmondó mérési eredményekből a legvalószínűbb érték meghatározása a kiegyenlítő számítás feladata.

Az előbb említett tahimeter állandók (c és k) a mérési eredmények és az ismeretlenek közötti mathematikai kapcsolatokból egyértelműen meghatározhatók, amíg fölösszámú mérés nincs. Ha azonban két egyenletnél többet állíthatunk fel (ennyi a szükséges és elegendő egyenletek száma a c és k meghatározására), akkor a kiegyenlítő számítás feladata lesz a legvalószínűbb értékek meghatározása.

A hibátlan mérési eredmények és a meghatározandó ismeretlenek közötti mathematikai kapcsolatokat *feltételi egyenleteknek* nevezzük.

Vizsgáljuk és állítsuk fel a feltételi egyenleteket egyes gyakorlatilag fontos esetekben.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

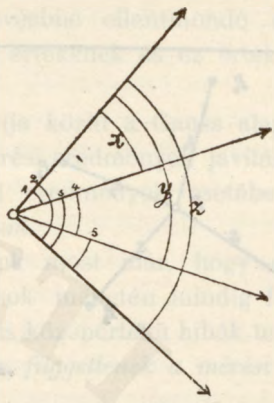
1. példa. Tegyük fel, hogy 1, 2, 3, 4, 5 szögértéket mértük s ezek hibátlan értékeit ismerjük. (Lásd 1. ábra)

Hogy a közvetítő mérések kiegyenlítését alkalmazhassuk, szükséges, hogy a mérési eredmények az ismeretlenek *ugyanazon* értékrendszerének függvényeiként legyenek előállíthatók.

Az ismeretlenek értékrendszeréül az 1. ábrában feltüntetett x, y, z szögértékeket választjuk.

A hibátlan értékek közötti kapcsolatok, tehát feltételi egyenletek lesznek:

$$1 \sphericalangle = x$$
$$2 \sphericalangle = z$$
$$3 \sphericalangle = z - x$$
$$4 \sphericalangle = y - x$$
$$5 \sphericalangle = z - y.$$

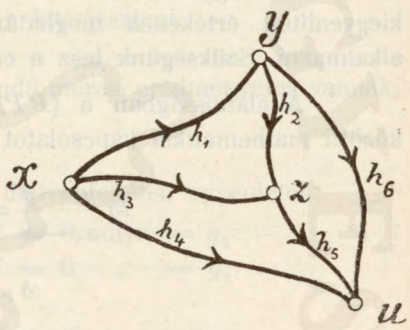


1. ábra.

2. példa. A 2. ábrában h_1, h_2 . . . h_6 szintezés útján nyert hibátlan magasság különbségeink vannak.

A szintezett vonalak hosszának mint súlyoknak alkalmazásától eltekintve, x, y, z, u abszolút magasságokat tekintve ismeretleneknek felírhatók a hibátlannak tekinthető mérési eredmények és az ismeretlenek között a következő mathematikai összefüggések:

$$h_1 = y - x$$
$$h_2 = z - y$$
$$h_3 = z - x$$
$$h_4 = u - x$$
$$h_5 = u - z$$
$$h_6 = u - y$$



2. ábra.

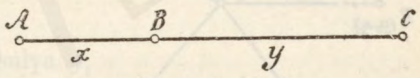
A vonalakon lévő nyíl az emelkedés irányát jelzi.

3. példa. AC alapvonal hosszának meghatározására (Lásd 3. ábra)

$$AB = l_1 \quad BC = l_3 \quad AC = l_5$$
$$BA = l_2 \quad CB = l_4 \quad CA = l_6$$

hibátlannak tekinthető mérési eredmények állanak rendelkezésünkre. Ismeretlenekül választva: $AB = x$, $BC = y$ hosszakat a következő feltételi egyenletek írhatók fel:

$$l_1 = x$$
$$l_2 = x$$
$$l_3 = y$$
$$l_4 = y$$
$$l_5 = x + y$$
$$l_6 = x + y$$



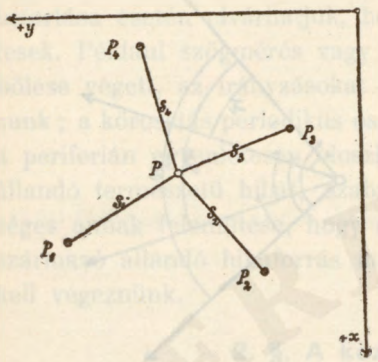
3. ábra.

A most bemutatott 3 példánál *közvetetlen* mérési eredmények állottak rendelkezésünkre, mégis sikerült a feltételi egyenleteket olyan alakban felírnunk, hogy a *közvetítő mérések* kiegyenlítésének elve alkalmazható reájuk.

4. példa. A 4. ábrában P_1, P_2, P_3, P_4 pontok derékszögű sík koordinátái (y_1, x_1, y_2, x_2, y_3, x_3, y_4, x_4) ismeretesek; kerestetik P pont (y, x) koordinátája ha S_1, S_2, . . . síkhosszak ismeretesek.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

P pont meghatározottnak tekinthető, ha két megadott alapponttól való (S_1, S_2) távolsága ismeretes.



4. ábra.

A hibátlannak tekintendő mérési eredmények és a keresett (y, x) koordináták között a következő feltételi egyenletek írhatók fel:

$$S_1 = \sqrt{(y_1 - y)^2 + (x_1 - x)^2} = F_1(y, x)$$

$$S_2 = \sqrt{(y_2 - y)^2 + (x_2 - x)^2} = F_2(y, x)$$

$$S_3 = \sqrt{(y_3 - y)^2 + (x_3 - x)^2} = F_3(y, x)$$

$$S_4 = \sqrt{(y_4 - y)^2 + (x_4 - x)^2} = F_4(y, x).$$

5. példa. P pont (lásd 5. ábra) meghatározására a P pontról teodolittal (PP_1), (PP_2), (PP_3), (PP_4), (PP_5) irányok mérettek.

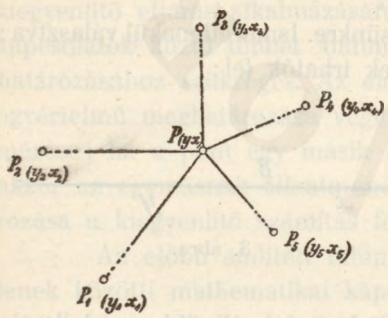
Elegendő lett volna pusztán 3 pontra menő irányt mérni, hogy a P pont koordinátái számíthatók legyenek; miután azonban fölösszámú méréseink vannak a P pont koordinátái kiegyenlített értékének meghatározása végett, a közvetítő mérések kiegyenlítését fogjuk alkalmazni. Szükségünk lesz e célból a feltételi egyenletekre.

Általánosságban a $(PP_i) = L_i$ hibátlan irányérték és a keresett ismeretlenek közötti mathematikai kapcsolatot a következő megfontolások adják:

$$tg \frac{y_i - y}{x_i - x} = tg \text{ délszög } P\text{-ről } P_i\text{-re} = tg\, \delta_{PP_i}$$

$$\delta_{PP_i} = arctg \frac{y_i - y}{x_i - x} = L_i + z.$$

Hogy az L_i irányértékből délszög (irányszög) legyen, a P pontról mért összes irányértékeket a (z) tájékozási szöggel (Bessel-féle 0 pont korrekció) meg kell javítanunk s miután e tájékozási szög egyelőre ismeretlen, z-vel jelöljük. A jelen esetben tehát a kiegyenlítés célja az y, x, z, ismeretlen értékek meghatározása.



5. ábra.

Az utolsó egyenletet rendezve, a feltételi egyenletek általános alakja lesz:

$$L_i = arctg \frac{y_i - y}{x_i - x} - z = F_i(y, x, z)$$

A két utóbb tárgyalt példában a feltételi egyenletek *nem lineáris alakúak*, de amint később a részletes tárgyalásnál látni fogjuk a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazása lineáris alakú feltételi egyenleteket kíván.

Az itt felsorolt jellemző példákból a feltételi egyenletek alakjára levonhatjuk a következő szabályokat: Közvetlen mérések esetében, amikor az ismeretlenek a *mérési eredmények egységeiben* vannak kifejezve, a feltételi egyenletek *mindig lineárisak*. Más esetekben, — tehát amikor közvetítő mérésekről van szó — a feltételi egyenletek *általánosságban nem lineárisak* s azokat a kiegyenlítés megkezdése előtt lineárissá kell tennünk.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

3. §. A közvetitő mérések kiegyenlitésének alkalmazása lineáris alaku feltételi egyenletek esetében.

A kiegyenlitő számitás célja az egymásnak többé-kevésbbé ellentmondó mérési eredményekből a meghatározandó ismeretlenek legvalószinübb értékének és ez érték megbizhatóságának meghatározása.

A kiegyenlitő eljárásnak végtelen sok elképzelhető módja közül a Gauss alapitotta „legkisebb négyzetek módszeré"-t használjuk, mely szerint a mérési eredmények javitásainak (λ) olyan értékrendszerét nyerjük, hogy egyenlő sulyu mérési eredmények esetében $[\lambda\lambda]$ *minimum*, nem egyenlő sulyu mérések esetében $[\lambda\lambda g]$ *minimum*.

E feltétel kielégitésének figyelembe vételével vizsgáljuk most már, hogy milyen úton-módon nyerjük a λ javitások értékrendszerét. A tárgyalások menetén mindig feltételezem, hogy az egymástól független mérési eredményeinket zérus középértékü hibák terhelik. A levezetendő eljárások azonban *általános érvényüek s teljesen függetlenek a mérési hibák természetétől.*

Amint az előző §-ban láttuk, a hibátlan mérési eredmények és a hibátlan ismeretlenek között mathematikai kapcsolatok állanak fenn, illetve ha ilyenek közvetlenül nem állanának fenn, a közvetitő mérések kiegyenlitésének alkalmazása céljából fel fogunk állitani.

A tárgyalást 3 ismeretlenre fogjuk a következőkben kiterjeszteni.

X, Y, Z, ismeretlenek meghatározásáról van szó.

$L_1, L_2, L_3, L_4, \ldots L_i$ egyelőre hibátlannak tekintendő mérési eredményeink vannak, melyek általánosságban:

$g_1, g_2, g_3, g_4 \ldots g_i$ súlyúak.

E mennyiségek közötti mathematikai kapcsolatok, illetve feltételi egyenletek:

$$L_1 = F_1(X, Y, Z) = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z = 0 \text{ sulya } = g_1$$
$$L_2 = F_2(X, Y, Z) = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z = 0 \quad „ \quad = g_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_i = F_i(X, Y, Z) = a_i X + b_i Y + c_i Z = 0 \quad „ \quad = g_i.$$

A X, Y, Z, hibátlan értékek meghatározását soha el nem érhetjük, hanem $l_1, l_2, l_3, \ldots l_i$ *egymástól független* $g_1, g_2, \ldots g_i$ sulyú mérési eredmények révén a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazásával, megkaphatjuk x, y, z, *kiegyenlitett* értékeket. A fenti feltételi egyenletek tehát nemcsak a *hibátlan* értékekre, hanem a *kiegyenlitett* értékekre is állni fognak szükségképen, vagyis

$$l_1 + \lambda_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z \text{ sulya } = g_1$$
$$l_2 + \lambda_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z \quad „ \quad = g_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$l_i + \lambda_i = a_i x + b_i y + c_i z \quad „ \quad = g_i.$$

A λ-ák szerint megoldott alakban irva:

$$\lambda_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z - l_1 \text{ sulya } g_1$$
$$1. \ldots\ldots \quad \lambda_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z - l_2 \quad „ \quad g_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_i = a_i x + b_i y + c_i z - l_i \quad „ \quad g_i.$$

Ezeket az egyenleteket nevezik *hibaegyenleteknek*, vagy *feltételi egyenleteknek.**)

---

*) Az 1. alatti lineáris egyenletrendszer megnevezésére az irodalomban különböző kifejezések használatosak.

Az *újabb* német irodalom a „Fehlergleichungen" kifejezést használja. *Gauss* a „Beobachtungsgleichungen" kifejezést használja, mig *Gerling, Bodola* és sokan mások a „Bedingungsgleichungen" illetve

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A feltételi egyenletek száma mindig *egyenlő* a mérési eredmények számával.

Ha n = a meghatározandó ismeretlenek száma; m = a mérési eredmények száma, illetve m = a feltételi egyenletek számával, akkor $m > n$ esetben lehet szó a kiegyenlitő eljárás alkalmazásáról amikor is $m - n$ = fölös mérések számával.

S ez természetes is, mert n ismeretlen egyértelmü meghatározásához n egyenlet kell, marad még $m - n$ számú fölös feltételi egyenletünk, vagyis minden fölös számú mérésnek megfelel egy-egy fölös számú feltételi egyenlet.

Az 1. alatti lineáris egyenletrendszer végtelen sok megoldása közül bennünket csakis az az egy megoldás érdekel, *amely egyenlő súlyok esetében a* $[\lambda\lambda]$, *nem egyenlő súlyok esetében pedig a* $[g\lambda\lambda]$ *kifejezést minimummá teszi.*

$$\text{Tehát } \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_i^2 = [\lambda\lambda] = \text{minimum},$$

$$\text{illetve } g_1\lambda_1^2 + g_2\lambda_2^2 + \ldots + g_i\lambda_i^2 = [g\lambda\lambda] = \text{minimum}$$

kifejezéseket kell kielégitenünk. Valamely függvénynek akkor lehet szélső értéke, ha a független változók szerinti első differenciál hányadosok =0, azaz

$$\frac{\partial [g\lambda\lambda]}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial [g\lambda\lambda]}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial [g\lambda\lambda]}{\partial z} = 0$$

Egyszerűség kedvéért a négyzet összeg képzését csak egyik feltételi egyenletre végzem el:

$$\lambda_i = a_i x + b_i y + c_i z - l_i \text{ súlya} = g_i$$

$$\begin{aligned} g_i\lambda_i^2 = {} & g_i a_i^2 x^2 + 2 g_i a_i b_i x y + 2 g_i a_i c_i x z - 2 g_i a_i l_i x + \\ & + g_i b_i^2 y^2 + 2 g_i b_i c_i y z - 2 g_i b_i l_i y + \\ & + 2 g_i c_i^2 z^2 - 2 g_i c_i l_i z + \\ & + g_i l_i^2 \end{aligned}$$

Hasonló négyzetösszegeket ad a többi feltételi egyenlet is, úgy hogy

$$\begin{aligned} [g\lambda\lambda] = {} & [g\,a\,a]\, x^2 + 2\,[g\,a\,b]\, x\, y + 2\,[g\,a\,c]\, x\, z - 2\,[g\,a\,l]\, x + \\ & + [g\,b\,b]\, y^2 + 2\,[g\,b\,c]\, y\, z - 2\,[g\,b\,l]\, y + \\ & + [g\,c\,c]\, z^2 - 2\,[g\,c\,l]\, z + \\ & + [g\,l\,l] \end{aligned}$$

Most már keresve az első differenciál hányadosokat sorjában az egyes független változók szerint:

$$\frac{\partial [g\lambda\lambda]}{\partial x} = 2\,[g\,a\,a]\, x + 2\,[g\,a\,b]\, y + 2\,[g\,a\,c]\, z - 2\,[g\,a\,l] = 0$$

$$\frac{\partial [g\lambda\lambda]}{\partial y} = 2\,[g\,b\,a]\, x + 2\,[g\,b\,b]\, y + 2\,[g\,b\,c]\, z - 2\,[g\,b\,l] = 0$$

$$\frac{\partial [g\lambda\lambda]}{\partial z} = 2\,[g\,c\,a]\, x + 2\,[g\,c\,b]\, y + 2\,[g\,c\,c]\, z - 2\,[g\,c\,l] = 0$$

„feltételi egyenletek" kifejezést használják. *Helmertet* figyelmeztették a „Fehlergleichungen" kifejezés hibás alkalmazására s csak azért tartotta meg ezt a kifejezést tovább is, mert mint mondja: „Dennoch möchte ich die Bezeichnung „Fehlergleichungen" nicht aufgeben, da sie sich eingebürgert hat" . . . (Lásd: Helmert, Die Ausgleichungsrechnung, Zweite Auflage, 1907. cimü mü 39. oldalán.) Dr. Fasching Antal a „hiba egyenlet" kifejezést használja. Véleményem szerint a „feltételi egyenletek" kifejezés a helyes, mert az 1. alatti λ-ák szerint megoldott egyenletrendszer, csak transformált alakja az előbb tárgyalt mathematikai kapcsolatoknak, amelyeket pedig minden esetre a feltételi egyenletrendszer kifejezés illet meg. Továbbá Helmert jogosan mondhatta, hogy a „Fehlergleichungen" kifejezést csak azért tartja meg „da sie sich eingebürgert hat". Mi ezt nem mondhatjuk, mert a magyar műszaki irodalom ezideig majdnem egyetlen számottevő geodéziai munkájában, (Bodola: A mérési hibák elmélete.) a hibaegyenlet kifejezést nem találjuk. Ha tehát még módunkban van válogatnunk a kifejezések között, akkor az egyetlenül helyes „feltételi egyenletek" kifejezést fogadjuk el.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ezeket az egyenleteket rövidités után a következőkép irhatjuk:

$$\begin{aligned} &[g\,a\,a]\ x + [g\,a\,b]\ y + [g\,a\,c]\ z - [g\,a\,l] = 0 \\ 2.\ .\ .\ .\ .\ &[g\,b\,a]\ x + [g\,b\,b]\ y + [g\,b\,c]\ z - [g\,b\,l] = 0 \\ &[g\,c\,a]\ x + [g\,c\,b]\ y + [g\,c\,c]\ z - [g\,c\,l] = 0 \end{aligned}$$

A minimum feltételéből kapott 2. alatti egyenleteket nevezzük *normál* egyenleteknek. *A normál egyenletek száma mindig egyenlő az ismeretlenek számával.*

A normál egyenletek megoldása folytán nyert x, y, z értékrendszert nevezzük az ismeretlenek *kiegyenlített* értékrendszerének s azon tulajdonsággal birnak, hogy a λ_1, λ_2 . . . λ_i javitásoknak oly értékrendszerét szolgáltatják az 1. alatti feltételi egyenletekbe való helyettesités után, hogy $[\lambda\lambda]$, illetve nem egyenlő súlyok esetén $[g\lambda\lambda]$ minimum.

A legkisebb négyzetek módszerének mechanikai alkalmazása tehát a következőkből fog állani:

1. felállítjuk a feltételi egyenleteket;
2. felállítjuk és megoldjuk a normál egyenleteket;
3. a normál egyenletekből nyert értékeket a feltételi egyenletbe helyettesitve. nyerjük a λ-ák értékrendszerét.

A 2. alatti normál egyenletrendszer szerkezetére vonatkozólag megjegyezhetjük, hogy az ismeretlenek együtthatói az egyenletrendszer diagonálisára vonatkozólag szimmetrikusak. E tulajdonságot fel fogjuk arra használni, hogy ha különösebb ok nincs, ami a normál egyenletek teljes kiirását kivánná, akkor csak a diagonális egyik oldalán lévő tagokat fogjuk kiirni; de ez esetben tanácsos a diagonálisban lévő tagok hangsúlyozása végett, azokat egy rövid vastag vonallal alá húzni.

A 2. alatti normál egyenletrendszert irjuk fel ujra, de ugy hogy csak a diagonális egyik oldalán lévő tagokat irjuk ki, s egyszerüség kedvéért egyenlő súlyú mérési eredményeket tételezzünk fel, vagyis $g_1 = g_2 = \ldots = g_i = 1$.

A normál egyenlet abszolút tagjának előjelét a következőkben mindig pozitivnak veszem, amit joggal tehetek, mert amúgy is az általános tárgyalásban határozatlan előjelünek kell tekintenünk. Speciális esetekben pedig, amint látni fogjuk az előjel magától adódik ki.

A röviditett alakban irt normál egyenletrendszer lesz:

$$\begin{aligned} &\underline{[a\,a]}\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] = 0 \\ 3.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ &+ \underline{[b\,b]}\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] = 0 \\ &+ \underline{[c\,c]}\,z + [c\,l] = 0 \end{aligned}$$

4. §. A közvetitő mérések kiegyenlitésének alkalmazása nem lineáris függvény alakok esetében.

A hibátlan mérési eredmények és a keresett ismeretlenek hibátlan értékei között bizonyos mathematikai kapcsolatok állanak fenn, amelyek nem lineáris alakuak. (Lásd 2. §. 4-ik és 5-ik példa.)

$$\begin{aligned} L_1 &= F_1\,(X, Y, Z) \text{ súlya} = g_1 \\ L_2 &= F_2\,(X, Y, Z) \quad \text{„} \quad = g_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_i &= F_i\,(X, Y, Z) \quad \text{„} \quad = g_i. \end{aligned}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A hibátlan értékek közötti mathematikai kapcsolatok állani fognak a kiegyenlített mérési eredmények ($l_1 + \lambda_1$, $l_2 + \lambda_2$, . . .) és a meghatározandó ismeretlenek kiegyenlített x, y, z értékei között is.

Tehát:

$$l_1 + \lambda_1 = f_1(x, y, z) \text{ súlya } = g_1$$
$$l_2 + \lambda_2 = f_2(x, y, z) \quad „ \quad = g_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$l_i + \lambda_i = f_i(x, y, z) \quad „ \quad = g_i$$

illetve λ-ák szerint megoldott alakban irva, a *feltételi egyenletek* lesznek:

$$\lambda_1 = f_1(x, y, z) + l_1 \text{ súlya } = g_1$$
$$\lambda_2 = f_2(x, y, z + l_2 \quad „ \quad = g_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_i = f_i(x, y, z) + l_i \quad „ \quad = g_i.$$

Miután a kiegyenlitő eljárás lineáris alakú feltételi egyenleteket kiván, az $f_i(x, y, z)$ függvény alakokat a *Taylor* sor alkalmazásával lineárissá kell tennünk, illetve sorba kell fejtenünk.

Gondosan meg kell azonban választanunk a sorbafejtés *helyét*, hogy a sor minél kevesebb tagjára kelljen kiterjeszkednünk, a kivánt élességi határ betartása mellett. E tekintetben segitségünkre szolgál a mérési eredmények azon tulajdonsága, hogy kellő gonddal végzett mérések esetén az egyes mérési eredmények *kicsiny javitásokat* kapnak a kiegyenlítés folytán.

Következésképen az l_1, l_2 . . . l_i mérési eredményekből kiválasztva annyit, amennyi az x, y, z kiegyenlített értékek *előleges* (x), (y), (z) értékeinek meghatározásához szükséges és elegendő: kicsiny lesz azon Δx, Δy, Δz javitások abszolút értéke is, amit az előleges értékhez kell adnunk, hogy a kiegyenlitett értékeket kapjuk; azaz

$$x = (x) + \Delta x \qquad y = (y) + \Delta y \qquad z = (z) + \Delta z$$

Ha tehát *előleges* értékeket vezetünk a kiegyenlitésbe, akkor a kiegyenlítés feladatát csak az előleges értékek javitási értékrendszerének a meghatározása képezi egyrészt, másrészt pedig módját nyerjük annak is, hogy a függvény sorba fejtésének oly helyét kapjuk, ahol a sor magasabb rendü tagjai elhanyagolható kicsiny értéküek.

Az *előleges* értékek meghatározása céljából kiválasztunk tehát a feltételi egyenletekből annyit, amennyi az ismeretlenek meghatározásához szükséges és elegendő s e redukált számú feltételi egyenletek megoldása után nyerjük: (x) (y) . . . *előleges* értékeket. A gyakorlatban ily előleges értékek rendszerint — már a *kiegyenlítés előtt* — rendelkezésünkre állanak. Ha például háromszögelések kiegyenlítéséről van szó, már a nyári külső munka folyamán szükségünk van a pontok előleges koordinátáira, amit egyszerű háromszög feloldásból nyerünk. A közvetítő mérések kiegyenlítése gyakorlati eseteinek tárgyalásánál egyébként látni fogjuk, hogy milyen módon teszünk szert az ismeretlenek *előleges* értékeire.

Amint láttuk, nem lineáris alakú függvények esetében a lineárissá tétel miatt is szükségünk van előleges értékekre; de szükségesnek tartjuk hangsúlyozni, hogy a közvetítő mérések kiegyenlítése esetében még *lineáris* alakú feltételi egyenletek esetében is — *kényelmi szempontból* — célszerű lesz az ismeretlenek előleges értékeinek meghatározásával a kiegyenlítő eljárás feladatává azon Δx, Δy . . . javító értékek meghatározását tenni, amely Δx, Δy, . . . javító értékeket az *előleges* (x) (y) . . . értékekhez adva, nyerjük az ismeretlenek x, y . . . *kiegyenlített* értékeit.

Az előleges értékek bevezetésének — a gyakorlat szempontjából — az a fontos előnye van, hogy csak kis számbeli értékekkel kell dolgoznunk, sőt annál kisebbek e Δx,

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Δy . . . értékek, minél jobb előleges értékeink vannak. Az előleges értékek bevezetésének tehát épen nem kicsinylendő *gyakorlati előnyei* vannak.

Lineáris alakú feltételi egyenletek esetében az előleges értékek mérőszámának megválasztása, a betartandó számítási élesség szempontjából, teljesen közömbös; nem lineáris alakú feltételi egyenletek esetében azonban a sorba fejtett függvény alak magasabb rendű tagjainak elhanyagolása céljából okvetetlenül szükséges az előleges értékek olyan megválasztása, hogy azok minél jobban megközelítsék a kiegyenlített értékeket.

A nem lineáris alakú feltételi egyenletek általános alakja lesz:

$$l_i + \lambda_i = f_i\,(x,\ y,\ z),\ \text{súlya} = g_i$$

Az előleges értékek legyenek (x), (y), (z), úgy hogy $x = (x) + \Delta x$, $y = (y) + \Delta y$, $z = (z) + \Delta z$, ezeket behelyettesítve a feltételi egyenletekbe általánosságban lesz:

$$l_i + \lambda_i = f_i\,((x) + \Delta x,\ (y) + \Delta y,\ (z) + \Delta z)$$

Taylor sorba fejtve az f_i függvényt a (x) (y) (z) helyen:

$$f_i\,(x,\ y,\ z) = f_i\,(x,\ y,\ z)_{(x)\ (y)\ (z)} + \left(\frac{\partial f_i\,(x,\ y,\ z)}{\partial x}\right)_{(x)\ (y)\ (z)} \Delta x + \left(\frac{\partial f_i\,(x,\ y,\ z)}{\partial y}\right)_{(x)\ (y)\ (z)} \Delta y + \left(\frac{\partial f_i\,(x,\ y,\ z)}{\partial z}\right)_{(x)\ (y)\ (z)} \Delta z + R$$

ahol az R maradék tag elhanyagolható, ha a sorba fejtés helyét jól választottuk meg.

Vezessük be a következő jelzéseket:

$$f_i\,(x,\ y,\ z)_{(x)\ (y)\ (z)} - l_i = \omega_i \qquad \left(\frac{\partial f_i\,(x,\ y,\ z)}{\partial x}\right)_{(x)\ (y)\ (z)} = a_i$$

$$\left(\frac{\partial f_i\,(x,\ y,\ z)}{\partial y}\right)_{(x)\ (y)\ (z)} = b_i \qquad \left(\frac{\partial f_i\,(x,\ y,\ z)}{\partial z}\right)_{(x)\ (y)\ (z)} = c_i$$

E jelzések bevezetése után a feltételi egyenletek általános alakja lineárissá tétel után lesz:

$$\lambda_i = a_i\,\Delta x + b_i\,\Delta y + c_i\,\Delta z + \omega_i,\ \text{súlya} = g_i$$

Úgy, hogy például 3 ismeretlent és 5 mérést tételezve fel, a feltételi egyenletek a következők lesznek:

4. . . . .
$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= a_1\,\Delta x + b_1\,\Delta y + c_1\,\Delta z + \omega_1,\ \text{súlya} = g_1\\
\lambda_2 &= a_2\,\Delta x + b_2\,\Delta y + c_2\,\Delta z + \omega_2,\ \text{„} = g_2\\
\lambda_3 &= a_3\,\Delta x + b_3\,\Delta y + c_3\,\Delta z + \omega_3,\ \text{„} = g_3\\
\lambda_4 &= a_4\,\Delta x + b_4\,\Delta y + c_4\,\Delta z + \omega_4,\ \text{„} = g_4\\
\lambda_5 &= a_5\,\Delta x + b_5\,\Delta y + c_5\,\Delta z + \omega_5,\ \text{„} = g_5
\end{aligned}$$

E feltételi egyenletekben szereplő a, b, c együtthatók jelentőségét előbb láttuk.

Szükségesnek tartjuk azonban a feltételi egyenletek abszolut tagjaira megjegyzést tenni; nevezetesen: $\omega_i = f_i\ (\,(x),\ (y),\ (z)\,) - l_i$, azaz az abszolut tagot mindig úgy nyerjük, hogy a *függvény helyettesítési értékéből azaz az* ***előleges*** *értékből* ***levonjuk*** *a mérési eredményt.*

Az abszolut tag ezen *értelmezésének* hangsúlyozását szükségesnek tartjuk azért, hogy az ω_i előjelének megállapításában tévedést ne kövessünk el, ami az egész kiegyenlítés *megismétlését* vonná maga után. Az ω-ák előjelében elkövetett hiba ugyanis csak a kiegyenlítés végén, az ellenőrzési számítás után tűnik ki.

A lineárissá tett feltételi egyenletekkel a kiegyenlítő számítás menete teljesen úgy történik, mint azt a 3. §-ban láttuk.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A nem lineáris alakú feltételi egyenletekből a sorbafejtés után nyert 4. alatti feltételi egyenletekre azonban *igen fontos megjegyzésünk van,* Ugyanis az $a_1\ a_2, a_3, \ldots,$ $b_1, b_2, b_3, \ldots$ konstansok a kiegyenlítő eljárás folyamán *hibátlan értékeknek tekintetnek.* Azonban a levezetésből láthatjuk, hogy ezek az értékek az egyes parciális differenciál hányadosokból adódtak, tehát szintén függvényei a mérési eredményeknek. Megtörténhetik, hogy e konstans értékek megbizhatóságának növelése céljából ugyanazon mérést megismételjük, hogy így egymástól független mérések útján módunkban legyen ugyanazon a, b, c konstansok számítása.

Megtehetnők ily esetben, hogy minden egyes mérésnek megfelelő feltételi egyenletet bevezetjük a kiegyenlitésbe (a gyakorlatban sokszor meg is tesszük), de e helyett bevezethetünk a kiegyenlítésbe *csupán csak egy feltételi egyenletet,* az ugyanazon ismeretlen meghatározása végett végzett több mérésre, amely esetben a feltételi egyenlet megváltozott súlyára is tekintettel kell lennünk.

A vizsgálatot tehát a következő általános alakú függvényalakra kell kiterjesztenünk:

$$F_i = F_i\ (l_1 + v_1,\ l_2 + v_2, \ldots l_i + v_i,\ (x) + \Delta x,\ (y) + \Delta y \ldots) = o$$

ahol $v_1, v_2 \ldots$ az ugyanazon ismeretlen meghatározására végzett mérési eredmények javitásai.

Taylor sorba fejtve az F_i függvény alakot az $l_1,\ l_2, \ldots l_i,\ (x),\ (y) \ldots$ helyen:

$$F_i\ (l_1 + v_1,\ l_2 + v_2, \ldots,\ (x) + \Delta x, \ldots) = F_i\ (l_1,\ l_2, \ldots,\ (x),\ (y), \ldots) +$$

$$+ \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_1}\right)_{l_1\ l_2\ (x)\ldots} v_1 + \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_2}\right)_{l_1\ l_2\ (x)\ \ldots} v_2 + \ldots + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\right)_{l_1,\ l_2,\ (x)\ \ldots} \Delta x + \left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right)_{l_1\ l_2\ (x)\ \ldots} \Delta y + \ldots$$

Bevezetve a következő jelzéseket:

$$F_i\ (l_1,\ l_2, \ldots,\ (x),\ (y) \ldots) = \omega_i;$$

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial l}\right)_{l_1\ l_2 \ldots (x)\ (y)\ \ldots} v_i = \lambda_i \qquad \left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\right)_{l_1\ l_2 \ldots (x)\ (y)\ \ldots} = a_i \qquad \left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right)_{l_1\ l_2 \ldots (x)\ (y)\ \ldots} = b_i$$

Rendezés után a feltételi egyenlet általános alakja lesz:

$$\lambda_i = a_i\ \Delta x + b_i\ \Delta y + \ldots + \omega_i$$

A λ-ák értékét a kiegyenlítés fogja megadni, míg a λ-ák *súlyát,* illetve várható középhibáját a

$$\lambda_i = \left(\frac{\partial F_i}{\partial l}\right)_{l_1\ l_2 \ldots (x)\ (y)} v_i$$

függvény alakból a függvény értékek középhibáinak ismert számítási módján kaphatjuk. (Lásd I. kötet 50. oldalon „A hibaterjedés törvénye")

$$\lambda = \frac{\partial F_i}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial F_i}{\partial l_2} v_2 + \ldots$$

$$\mu_\lambda^2 = \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_1}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_2}\right)^2 \mu_2^2 + \ldots$$

ahol $\mu_1, \mu_2, \ldots$ az $l_1, l_2, \ldots$ mérési eredmények középhibái.

Ily módon a középhiba négyzete és a súly közötti összefüggés folytán módunkban van a kapott feltételi egyenlet súlyát meghatározni, ugyanis

$$g = \frac{c}{\mu_{\lambda 2}}$$

Például:

$$F_1\ (L_1, L_2, L_3, Y, X) = \frac{L_1 + L_2 + L_3}{3} - \operatorname{arctg} \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$F_2\ (L_4, L_5, Y, X) = \frac{2\,L_4 + L_5}{4} - \operatorname{arctg} \frac{y - y_2}{x - x_2}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

E két feltételi egyenlet teendő lineárissá.

$$F_1 = F_1(l_1 + v_1, l_2 + v_2, l_3 + v_3, (y) + \Delta y, (x) + \Delta x) = \frac{l_1 + v_1 + l_2 + v_2 + l_3 + v_3}{3} -$$

$$- \left(\operatorname{arctg} \frac{y - y_1}{x - x_1}\right)_{\substack{y = (y) + \Delta y \\ x = (x) + \Delta x}}$$

ahol $g_{l_1} = g_{l_2} = g_{l_3} = 1 = \mu_l^2 = g_{l_4} = g_{l_5}$

F_1 függvényt az l_1, l_2, l_3, (y), (x) helyen sorba fejtve:

$$F_1 = F_1(l_1, l_2, l_3, (y)(x)) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_{l_1 l_2 l_3 (y)(x)} \Delta y + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_{l_1 l_2 l_3 (y)(x)} \Delta x + \left(\frac{\partial F_1}{\partial l_1}\right)_{l_1 l_2 l_3 (y)(x)} v_1 +$$

$$+ \left(\frac{\partial F_1}{\partial l_2}\right)_{l_1 l_2 l_3 (y)(x)} v_2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial l_2}\right)_{l_1 l_2 l_3 (y)(x)} v_3 + \ldots$$

Az itt kijelölt műveleteket végrehajtva:

$$F_1(l_1, l_2, l_3, (y), (x)) = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{3} - \operatorname{arctag} \frac{(y) - y_1}{(x) - x_1} = \omega_1$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_{l_1 l_2 l_3 (y)(x)} = \frac{(x) - x_1}{s^2}, \text{ ahol } s^2 = ((y) - y_1)^2 + ((x) - x_1)^2$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)''_{l_1 l_2 l_3 (y)(x)} = - \frac{\varrho'' \cos \delta}{s} = a_1$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)''_{l_1 l_2 l_3 (y)(x)} = \frac{\varrho'' \sin \delta}{s} = b_1$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial l_1}\right)_{l_1 l_2 l_3 (y)(x)} v_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial l_2}\right)_{l_1 l_2 l_3 (y)(x)} v_2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial l_3}\right)_{l_1 l_2 l_3 (y)(x)} v_3 = \lambda_1$$

Tehát az F_1, F_2 függvényeknek megfelelő lineáris egyenletek lesznek:

$$\lambda_1 = a_1 \Delta y + b_1 \Delta x + \omega_1$$
$$\lambda_2 = a_2 \Delta y + b_2 \Delta x + \omega_2$$

Most μ_{λ_1} és μ_{λ_2} középhibákat kell ismernünk, hogy g_{λ_1} és g_{λ_2} súlyokat is ismerjük.

$$\lambda_1 = \frac{\partial F_1}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial F_1}{\partial l_2} v_2 + \frac{\partial F_1}{\partial l_3} v_3$$

$$\lambda_2 = \frac{\partial F_2}{\partial l_4} v_4 + \frac{\partial F_2}{\partial l_5} v_5$$

A felírt függvény alakokra a λ számított függvényérték középhibája

$$\mu_{\lambda_1}^2 = \left(\frac{\partial F_1}{\partial l_1}\right)^2 \mu_{l_1}^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial l_2}\right)^2 \mu_{l_2}^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial l_3}\right)^2 \mu_{l_3}^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \mu_l^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \mu_l^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \mu_l^2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

s így $\mu^2_{\lambda_1} = 3$

Hasonlóan $\mu_{\lambda_2}^2 = \left(\frac{\partial F_2}{\partial l_4}\right)^2 \mu_{l_4}^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial l_5}\right)^2 \mu_{l_5}^2 = \left(\frac{2}{4}\right)^2 \mu_l^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \mu_l^2 = \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}$

s így $g_{\lambda_2} = \frac{16}{5} = 3.2$

Tehát a jelen esetben a kiegyenlítésbe vezetendő lineáris feltételi egyenletek s azok súlyai lesznek:

$$\lambda_1 = a_1 \Delta y + b_1 \Delta x + \omega_1 \text{ súlya} = 3$$
$$\lambda_2 = a_2 \Delta y + b_2 \Delta x + \omega_2 \text{ súlya} = 3.2$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

5. §. A normál egyenletek felállitása és megoldása.

1. Általános megjegyzések.

Amint az előző §-okban láttuk, a minimum feltételének kielégitése a normál egyenletek feloldását kivánja meg. A kiegyenlitő számitás mechanikai műveletének legnagyobb részét a normal egyenletek felállitása és megoldása képezi s akár a megoldásban, akár a felállitásban elkövetett hiba az egész művelet megismétlését teszi szükségessé. Épen ezért ugy a normál egyenletek felállitásánál, mint megoldásánál oly módokat kell keresnünk, hogy a művelet minden lépésénél *ellenőrzésünk* legyen.

A tárgyalás céljára egy 3 ismeretlent tartalmazó lineáris feltételi egyenletrendszert válaszszunk.

$$1. \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= a_1\, x + b_1\, y + c_1\, z + l_1 \\ \lambda_2 &= a_2\, x + b_2\, y + c_2\, z + l_2 \\ \lambda_3 &= a_3\, x + b_3\, y + c_3\, z + l_3 \\ \lambda_4 &= a_4\, x + b_4\, y + c_4\, z + l_4 \end{aligned}$$

E feltételi egyenleteknek a következő normál egyenletek felelnek meg:

$$2. \quad \begin{aligned} [aa]\, x + [ab]\, y + [ac]\, z + [al] &= 0 \\ [ba]\, x + [bb]\, y + [bc]\, z + [bl] &= 0 \\ [ca]\, x + [cb]\, y + [cc]\, z + [cl] &= 0 \end{aligned}$$

A normál egyenletek koefficienseinek számitásában igen könnyen követhetünk el hibát s hogy ellenőrzésünk legyen, a következő segédszámértékeket vezetjük be:

$$3. \quad \begin{aligned} a_1 + b_1 + c_1 + l_1 &= s_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 + l_2 &= s_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 + l_3 &= s_3 \\ a_4 + b_4 + c_4 + l_4 &= s_4 \end{aligned}$$

Ez esetben:

$$4. \quad \begin{aligned} [aa] + [ab] + [ac] + [al] &= [as] \\ [ba] + [bb] + [bc] + [bl] &= [bs] \\ [ca] + [cb] + [cc] + [cl] &= [cs] \end{aligned}$$

Tehát látjuk, hogy a feltételi egyenletekben szereplő együtthatók és abszolut tagok algebrai összegei adják az s segédmennyiség abszolut értékét és előjelét és e segédmennyiségek bevezetésével a normál egyenletben szereplő együtthatók és abszolut tagok képzésére ellenőrzésünk lesz.

A $[as]$, $[bs]$, $[cs]$ tagokat a normál egyenlet felállitása után nem dobjuk el, hanem felhasználjuk ellenőrzésül mindaddig, amig a normál egyenleteket meg nem oldottuk. Hogy miképen használjuk fel, azt alább fogjuk látni.

2. Gauss módszere.

A normál egyenletek feloldása többféle módon történhetik s egyelőre részletesen a *Gauss-féle eliminációs módszert* tárgyaljuk.

A normál egyenlet csak 2 ismeretlent tartalmazzon:

$$5. \quad \begin{aligned} [aa]\, x + [ab]\, y + [al] &= 0 \\ [ba]\, x + [bb]\, y + [bl] &= 0 \end{aligned}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Szorozzuk meg az első egyenletet $-\frac{[ab]}{[aa]}$-val s adjuk a második egyenlethez; azután szorozzuk meg a második egyenletet $-\frac{[ab]}{[bb]}$-vel s adjuk az első egyenlethez; ily módon két egyenletet kapunk, amelyek csak egy-egy ismeretlent tartalmaznak és pedig:

$$6. \ldots \begin{cases} \left([bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab]\right) y + \left([bl] - \frac{[ab]}{[aa]}[al]\right) = 0 \\ \left([aa] - \frac{[ab]}{[bb]}[ab]\right) x + \left([al] - \frac{[ab]}{[bb]}[bl]\right) = 0 \end{cases}$$

Bevezetve ezen egyenletekbe a Gauss használta következő rövidítéseket a 6. alatti egyenletekbe:

$$6. \begin{cases} \left([bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[aa]\right) = [bb.\,1] & \left([bl] = \frac{[ab]}{[aa]}[al]\right) = [bl.\,1] \\ \left([aa] - \frac{[ab]}{[bb]}[ab]\right) = [aa.\,1] & \left([al] = \frac{[ab]}{[bb]}[bl]\right) = [al.\,1] \end{cases}$$

lesz:

$$7. \ldots \begin{cases} [bb.\,1]\, y + [bl.\,1] = 0 \\ [aa.\,1]\, x + [al.\,1] = 0 \end{cases}$$

Ezekből az egyenletekből, melyeket *redukált normál egyenleteknek* nevezünk, — a magyar kir. háromszögelő hivatal nyomtatványain *levezetett* normál egyenleteknek nevezetnek — számíthatók x és y:

$$8. \ldots \ldots \ldots \quad y = -\frac{[bl.\,1]}{[bb.\,1]} \qquad x = -\frac{[al.\,1]}{[aa.\,1]}$$

Elegendő lett volna a 6. alatti redukált normál egyenletek közül csak az egyiket számitani, amelyből meghatározva vagy az y-t, vagy az x-et, az 5. alatti normál egyenletbe való visszahelyettesitéssel számithattuk volna a másik ismeretlent.

Nagyobb számu ismeretlent tartalmazó normál egyenletrendszer feloldásánál ezt a módot használjuk, amint azt alább fogjuk látni.

Két ismeretlent tartalmazó normál egyenletek esetén — tekintettel a megoldás könnyü és gyors voltára egyrészt, másrészt pedig mert a két ismeretlen egyidejü meghatározása bizonyos egyéb előnyöket is biztosit — mindig egyidejüleg számitjuk az ismeretleneket a következő két normál egyenletrendszerből:

$$9. \quad \begin{array}{l} [aa]\, x + [ab]\, y + [al] = 0 \\ \underline{+\,[bb]\, y + [bl] = 0} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \underline{[bb]\, y} + [ab]\, x + [bl] = 0 \\ \underline{+\,[aa]\, x} + [al] = 0 \end{array}$$

illetve a következő redukált normál egyenletekből:

$$[bb.\,1]\, y + [bl.\,1] = 0 \qquad [aa.\,1]\, x + [al.\,1] = 0$$

$$y = -\frac{[bl.\,1]}{[bb.\,1]} \qquad x = -\frac{[al.\,1]}{[aa.\,1]}$$

A normál egyenletek feloldása után nyert y, x értékeket behelyettesitve az 1. alatti feltételi egyenletekbe: megkapjuk a λ_1, λ_2 . . javító érték rendszert.

Miután (s) segédmennyiségeket nem vezettünk be a kiegyenlítésbe, tehát sem a normál egyenletek felállítására, sem azok megoldására ellenőrzésünk nincs.

Ilyen (s) segédmennyiségek bevezetésének semmi akadálya sincs s ezeket rendszerint be is vezetjük és fel is használjuk ellenőrzésül a normál egyenletek felállításánál a 3. és 4. alatti összefüggések szerint.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A normál egyenletek megoldásának helyességére azonban — két ismeretlen esetében — nem fogunk szükségképpen segédmennyiségeket bevezetni, hanem az ellenőrzés más módját fogjuk keresni és pedig a $[\lambda\,\lambda]$ négyzetösszeget két módon számítjuk, nevezetesen:

a) a normál egyenletek megoldása után a nyert ismeretleneknek a feltételi egyenletekbe való helyettesítésével;

b) a feltételi egyenletek abszolut tagjai négyzeteinek összege segélyével.

Az ily módon nyert ellenőrzés nemcsak a normál egyenletek megfejtésének helyességéről biztosit bennünket, hanem a normál egyenletek felállitásának helyességéről is.

A *b)* alatt emlitett négyzetösszegekről eddig nem szólottunk.

A 9. alatti normál egyenleteket toldjuk meg még egy egyenlettel s csak a diagonális egyik oldalán lévő tagokra szoritkozva lesz:

$$10.\ .\quad \begin{aligned} \underline{[a\,a]}\,x + \underline{[a\,b]}\,y + [a\,l] &= 0 \\ + \underline{[b\,b]}\,y + [b\,l] &= 0 \\ + \underline{[l\,l]} &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \underline{[b\,b]}\,y + [a\,b]\,x + [b\,l &= 0 \\ + \underline{[a\,a]}\,x + [a\,l &= 0 \\ + \underline{[l\,l]} &= 0 \end{aligned}$$

Ez egyenletek megoldása után kapunk egy *maradék* tagot, melyről azonnal bebizonyithatjuk, hogy egyenlő $[\lambda\,\lambda]$-val.

Legyen a feltételi egyenletek általános alakja:

$$11.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \lambda_i = a_i\,x + b_i\,y + l_i$$

Megszorozva minden feltételi egyenletet a hozzátartozó l abszolut taggal és összegezve, lesz:

$$12.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ [l\,\lambda] = [a\,l]\,x + [b\,l]\,y + [l\,l].$$

Ugyancsak megszorozva minden feltételi egyenletet a hozzátartozó λ-val és összegezve, lesz:

$$13.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ [\lambda\,\lambda] = [a\,\lambda]\,x + [b\,\lambda]\,y + [l\,\lambda]$$

Befogjuk azonban bizonyitani, hogy $[a\,\lambda] = [b\,\lambda] = 0$, mert ha

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a_1\,x + b_1\,y + l_1 \\ \lambda_2 &= a_2\,x + b_2\,y + l_2 \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

feltételi egyenleteket megszorozzuk a-val és összeadjuk, lesz

$$[a\,\lambda] = [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l]$$

ez pedig $= 0$-val, mert nem egyéb, mint a normál egyenletek első egyenlete. (Lásd 10. alatt.)

Hasonlóképen b-vel szorozva a feltételi egyenleteket és összegezve, kapjuk, hogy $[b\,\lambda] = 0$, úgy, hogy a 13. alatti egyenlet lesz:

$$14.\ .\ .\ .\ .\ .\ [\lambda\,\lambda] = -[l\,\lambda] = -[a\,l]\,x - [b\,l]\,y + [l\,l]\ .\ .\ .$$

A $[\lambda\,\lambda]$ számításának ez is egyik módja, amit azonban általánosságban más alakban használunk; ugyanis az első normál egyenletet osztva $[a\,a]$-val:

$$15.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ x + \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,y + \frac{[a\,l]}{[a\,a]} = 0.$$

A 14. egyenletben $-\,]a\,l]\,x - [b\,l]\,y$ írható ily alakban is:

$$16.\ .\ .\ -[a\,l]\left(x + \frac{[b\,l]}{[a\,l]}\,y + \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,y - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,y\right) = -[a\,l]\left(x + \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,y\right) - \left([b\,l] + \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,l]\right)y$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Az egyenlet jobboldalán lévő összegek közül az első tag zárjelben lévő része a 15. képlet alapjai $= -\frac{[al]}{[aa]}$-val, a második tag zárjelben levő része pedig $= [bl.\ 1]$; behelyettesítve ezeket a 16. képletbe: $-\frac{[al]^2}{[aa]} - [bl.\ 1]\ y$ értéket nyerjük, ahol $y = \frac{[bl.\ 1]}{[bb.\ 1]}$ a 8. képlet alapján.

A 14. képlet, a most említett transformálások és helyettesítések elvégzése után lesz:

17. . . . . $[\lambda\lambda] = -[l\lambda] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl.\ 1]^2}{[bb.\ 1]}$

A 17-ik képlet jobb oldalán lévő tagok alkotják a normál egyenletek lefejtése után a *maradék* tagot, amely tehát $= [\lambda\lambda]$-val.

Miután két ismeretlen esetén a *normál egyenleteket* kétszer oldjuk fel, egymástól függetlenül (lásd 10. alatt), a két normál egyenlet maradék tagjának *egyezni kell*, mert mindkettő külön-külön $= [\lambda\lambda]$-val.

Hangsúlyozni kívánjuk tehát a következő fontos tényeket:

a) két ismeretlen esetében az egymástól függetlenül feloldott normál egyenletek maradék tagjának *egyezősége*, biztosít bennünket arról, hogy az egyenletek *megoldásában* hibát nem követtünk el;

b) a normál egyenletek maradék tagja egyenlő tartozik lenni, a normál egyenletek megoldása után nyert x, y, kiegyenlített értékek révén a feltételi egyenletekből adódó javítások négyzetösszegeivel s az így két módon képzelt $[\lambda\lambda]$ érték egyezése biztosítékot nyújt aziránt, hogy a normál egyenletek *felállításában* hibát nem követtünk el.

Nincs azonban még mindig ellenőrzésünk a *feltételi egyenletek felállítására* vonatkozólag, jelesen a feltételi egyenletek együtthatóinak és abszolut tagjainak helyességére vonatkozólag, melyeket a következő megfontolásokból nyerünk:

A kiegyenlített x, y értékek révén számíthatók L_1, L_2, . . . kiegyenlített mérési eredmények, úgy, hogy állanak a következő összefüggések:

18. . . . . $\begin{matrix} L_1 = l_1 + \lambda_1 \\ L_2 = l_2 + \lambda_2 \end{matrix}$ ahonnan $\begin{matrix} \lambda_1 = L_1 - l_1 \\ \lambda_2 = L_2 - l_2 \end{matrix}$

Az ily módon nyert javításoknak egyezni kell az 1. alatti feltételi egyenletekből nyert javításokkal, továbbá a 18. alatti összefüggések révén nyert λ-ák négyzetösszegei is egyenlők tartoznak lenni, a fentebb *a)*, *b)* útján nyert $[\lambda\lambda]$ négyzetösszegekkel.

Ha ez egyezőségek fennállanak, biztosak lehetünk abban, hogy a kiegyenlítő számítás teljes menete helyes volt.

Amint a most említett ellenőrzésekből kitűnik, az 1. alatti feltételi egyenletekből nem okvetlenül szükséges a λ *javítások* számítása, mert ez csak egyoldalú ellenőrzést ad, nevezetesen csak a normál egyenletek felállítására és megoldására ad ellenőrzést, míg a 18. alatti összefüggésekből számított λ javító értékrendszerből képzett $[\lambda\lambda]$ és a normál egyenlet maradéktagjának egyezősége teljes bizonyságot ad arról, hogy mindenütt helyesen jártunk el. Mindamellett ajánlatosnak tartjuk a λ-ák képzését a feltételi egyenletekből, hogy így minél hamarabb jussunk, ha nem is teljes, de *részleges* ellenőrzéshez. A 18. alatti képletből nyert ellenőrzésig sok munkát kell végeznünk, ami esetleg a normál egyenletek felállításában és megoldásában elkövetett hiba folytán felesleges lehet.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

3. A megoldás több ismeretlen esetében.

Ha a normál egyenletek több ismeretlent tartalmaznak, az előző pontban tárgyaltak általános érvényűek.

E §. elején az 1., 2., 3., 4. képletekre való hivatkozással, mint amelyek a normál egyenletek felállításánál az ellenőrzésre szolgálnak, az általános tárgyalás kedvéért egy 3 ismeretlent tartalmazó normál egyenletrendszert vegyünk vizsgálat alá.

$$19. \quad \begin{aligned} [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [al] &= 0 \\ [ba]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + [bl] &= 0 \\ [ca]\,x + [cb]\,y + [cc]\,z + [cl] &= 0 \end{aligned}$$

A szimmetrikus tagokat elhagyva s az ellenőrzés miatt $[as]$, $[bs]$, . . . tagokat, valamint a normál egyenlet maradéktagjának képzése végett a $[ll]$ tagot bevezetve:

$$20. \quad \begin{aligned} \underline{[aa]}\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [al] + [as] &= 0 \\ + \underline{[bb]}\,y + [bc]\,z + [bl] + [bs] &= 0 \\ \underline{[cc]}\,z + [cl] + [cs] &= 0 \\ \underline{[ll]} + [ls] &= 0 \end{aligned}$$

Az ily alakban felállított normál egyenletrendszerről megjegyezzük, hogy $[as]$ $[bs]$ . . . tagokat *csak ellenőrzésül* vezettük be s a megoldást az x, y, z értékek meghatározásával befejezettnek tekintjük, tehát a $[as]$, $[bs]$ . . . tagok a normál egyenlet tagjaival semminemű mathematikai kapcsolatban nem állanak, az ismeretlenek értékeire semminemű befolyást nem gyakorolnak, amint az látszólag a 20. egyenletrendszerből következtethető volna. Szigorúan véve, nem szabatos a 20. egyenletrendszer felírt alakja, de a Gauss-féle eliminációs módszert alkalmazva, az egyenletekhez ragasztott segédmennyiségek nem befolyásolják az ismeretlenek értékeit. Ha az l-eket tartalmazó tagokat egy pillanatra úgy képzeljük, hogy azok egy negyedik ismeretlen együtthatói, akkor a normál egyenletek megoldásának ezen kiterjesztésével automatikus módon fog a maradék tag kiadódni.

A 20. alatt felírt normál egyenletrendszer együtthatóira és abszolut tagjaira az ellenőrzés a következő alakban érvényes:

$$21. \quad \begin{aligned} \underline{[aa]} + [ab] \,|\, + [ac] \,|\, + [al] \,|\, + [as] &= 0 \\ + \underline{[bb]} + [bc] \,|\, + [bl] \,|\, + [bs] &= 0 \\ + \underline{[cc]} + [cl] \,|\, + [cs] &= 0 \\ + \underline{[ll]} + [ls] &= 0 \end{aligned}$$

Szorozzuk meg a 20. alatti egyenletrendszer első egyenletét sorjában $-\frac{[ab]}{[aa]}$, $-\frac{[ac]}{[aa]}$, $-\frac{[al]}{[aa]}$-val, s vonjuk le a 2-ik, a 3-ik, illetve a 4-ik egyenletből:

$$22. \quad \begin{aligned} \underline{\left([bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab]\right)}\,y + \left([bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac]\right)z + \left([bl] - \frac{[ab]}{[aa]}[al]\right) + \left([bs] - \frac{[ab]}{[aa]}[as]\right) &= 0 \\ + \underline{\left([cc] - \frac{[ac]}{[aa]}[ac]\right)}\,z + \left([cl] - \frac{[ac]}{[aa]}[al]\right) + \left([cs] - \frac{[ac]}{[aa]}[as]\right) &= 0 \\ + \underline{\left([ll] - \frac{[al]}{[aa]}[al]\right)} + \left([ls] - \frac{[al]}{[aa]}[as]\right) &= 0 \end{aligned}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Legyen:

$$[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]=[bb.1],\ [bc]-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]=[bc.1],\ [bl]-\frac{[ab]}{[aa]}[al]=[bl.1],\ [bs]-\frac{[ab]}{[aa]}[as]=[bs.1]$$

$$[cc]-\frac{[ac]}{[aa]}[ac]=[cc.1],\ [cl]-\frac{[ac]}{[aa]}[al]=[cl.1],\ [cs]-\frac{[ac]}{[aa]}[as]=[cs.1]$$

$$[ll]-\frac{[al]}{[aa]}[al]=[ll.1],\ [ls]-\frac{[al]}{[aa]}[as]=[ls.1]$$

E rövidítések bevezetése után a redukált normál egyenletrendszer lesz:

23. . . . .
$$\begin{aligned}\underline{[bb.1]}\,y+[bc.1]\,z+[bl.1]+[bs.1]&=0\\ +\underline{[cc.1]}\,z+[cl.1]+[cs.1]&=0\\ +\underline{[ll.1]}+[ls.1]&=0\end{aligned}$$

Az ellenőrzésre vonatkozólag a következő egyenlőségek állanak:

$$\begin{aligned}\underline{[bb.1]}+[bc.1]\,|\,+[bl.1]\,|\,+[bs.1]&=0\\ +\underline{[cc.1]}\;\;+[cl.1]\,|\,+[cs.1]&=0\\ +[ll.1]\;\;+[ls.1]&=0\end{aligned}$$

A 23. alatti redukált normál egyenletrendszer első egyenletét megszorozva sorjában $-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}, -\frac{[bl.1]}{[bb.1]}$-vel s hozzáadva a 2-ik, illetve 3-ik egyenlethez, kapjuk a másodszor redukált normál egyenletrendszert, mely az előbbihez hasonló rövidítések után lesz:

24. . . . . .
$$\begin{aligned}\underline{[cc.2]}\,z+[cl.2]+[cs.2]&=0\\ +\underline{[ll.2]}+[ls.2]&=0\end{aligned}$$

A 24. egyenletrendszer, illetve annak első egyenlete már csak egy ismeretlent tartalmaz (z) s a $[cs.2.]$ tagot elhagyva, minthogy azt csak az ellenőrzés kedvéért írtuk a normál egyenletbe, lesz

25. . . . . .
$$\begin{aligned}[cc.2]\,z+[cl.2]&=0\\ z&=-\frac{[cl.2]}{[cc.2]}\end{aligned}$$

A 24. egyenletrendszerre vonatkozólag az együtthatókra és abszolut tagokra ugyanazon ellenőrzések állanak, mint előbb.

Folytatva a 24. egyenletrendszer további redukálását, tehát megszorozva az első egyenletet $-\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$-vel s hozzáadva a második egyenlethez, rövidített jelzés után kapjuk:

26. . . . . $[ll.3]+[ls.3]=0.$

Ha ez összefüggés áll, vagyis $[ll.3]=-[ls.3]$, akkor a normál egyenlet maradéktagjáról pedig a 2. pontban bebizonyítottuk, hogy az $=[\lambda\lambda]$.

Nincs még a feladat teljesen befejezve, mert az utolsó redukált egyenletből csak egy ismeretlen számítható. De amint ezt az egy ismeretlent ismerjük, fokozatos visszafelé való helyettesítéssel számithatjuk a többi ismeretlent; tehát a 25-ből nyert értéket a 23. képletbe helyettesítve, megkapjuk y—t, és igy tovább.

Összefoglalva a normál egyenletek megoldására vonatkozó műveleteket, mindig a következő egyenletrendszerek megoldását kell elvégeznünk:

27. . . . . .
$$\begin{aligned}\underline{[aa]}\,x+[ab]\,y+[ac]\,z+[al]+[as]&=0\\ +\underline{[bb]}\,y+[bc]\,z+[bl]+[bs]&=0\\ +\underline{[cc]}\,z+[cl]+[cs]&=0\\ +\underline{[ll]}+[ls]&=0\end{aligned}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{[bl.1]}\,y + [bc.1]\,z + [bl.1] + [bs.1] = 0 \\
28. \ldots & \qquad + \underline{[cc.1]}\,z + [cl.1] + [cs.1] = 0 \\
 & \qquad\qquad + \underline{[ll.1]} + [ls.1] = 0 \\
 & \underline{[cc.2]}\,z + [cl.2] + [cs.2] = 0 \\
29. \ldots & \qquad + [ll.2] + [ls.2] = 0 \\
30. \ldots & [bl.3] + [ls.3] = 0
\end{array}
$$

Az ismeretlenek értékei végeredményül a következő egyenletekből számíthatók;

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{I.} \ldots [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [al] = 0 \\
31. \ldots & \text{II.} \ldots [bb.1]\,y + [bc.1]\,z + [bl.1] = 0 \\
 & \text{III.} \ldots [cc.2]\,z + [cl.2] = 0 \\
 & \text{IV.} \ldots [ll.3] = [\lambda\lambda]
\end{array}
$$

A 31. egyenletrendszer a normál egyenletek megoldásának azon *igen fontos* tulajdonságára mutat, hogy az ismeretlenek értékeinek meghatározása végett elegendő pusztán a 31. egyenletrendszer végleges kiirása, *tehát nem szükséges az egyes redukált egyenletrendszerek teljes kiirása,* amint a 27.—30. alatti redukált normál egyenletrendszerek mutatják.

4. A normál egyenletek numerikus megoldása.

A normál egyenletek megoldását a Gauss-féle eliminációs módszerrel végezve bizonyos hányadosokat és szorzatokat kell képeznünk (Lásd 22. képletet).

E hányadosok és szorzatok képzését végezhetjük számtáblázatokkal, logarléccel, vagy logaritmikus úton.

Igen egyszerű megfontolások fognak bennünket arra vezetni, hogy melyik módszert alkalmazzuk.

A logaritmikus úton való számítás menetét a következőkben részletesen tárgyaljuk.

A tárgyalásban csak a normál egyenletek együtthatóit és abszolut tagjait fogjuk felírni, mert az ismeretlenekről úgy is tudjuk, hogy azokat a normál egyenlet feloldásából milyen sorrendben kapjuk.

32. .

	$-\log\frac{[ab]}{[aa]}$	$-\log\frac{[ac]}{[aa]}$	$-\log\frac{[al]}{[aa]}$	
$\log\,[aa]$	$\log\,[ab]$	$\log\,[ac]$	$\log\,[al]$	$\log\,[as]$
$\underline{[aa]}$	$[ab]$	$[ac]$	$[al]$	$[as]$
$a \ldots$	$[bb]$ $-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	$[bc]$ $-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]$	$[bl]$ $-\frac{[ab]}{[aa]}[al]$	$[bs]$ $-\frac{[ab]}{[aa]}[as]$
I. . .	$[bb.1]$	$[bc.1]$	$[bl.1]$	$[bs.1]$
$b \ldots$		$[cc]$ $-\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$	$[cl]$ $-\frac{[ac]}{[aa]}[al]$	$[cs]$ $-\frac{[ac]}{[aa]}[as]$
II. . .		$[cc.1]$	$[cl.1]$	$[cs.1]$
$c \ldots$			$[ll]$ $-\frac{[al]}{[aa]}[al]$	$[ls]$ $-\frac{[al]}{[aa]}[as]$
III. . .			$[ll.1]$	$[ls.1]$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Az I., II., III. egyenleteket újra kiírva

	$[b\,b.\,1]$	$[b\,c.\,1]$	$[b\,l.\,1]$	$[b\,s.\,1]$
		$[c\,c.\,1] - \frac{[b\,c.\,1]}{[b\,b.\,1]}[b\,c.\,1]$	$[c\,l.\,1] - \frac{[b\,c.\,1]}{[b\,b.\,1]}[b\,l.\,1]$	$[c\,s.\,1] - \frac{[b\,c.\,1]}{[b\,b.\,1]}[b\,s.\,1]$
33.	I′. . .	$[c\,c.\,2.]$	$[c\,l.\,2]$	$[c\,s.\,2]$
			$[l\,l.\,1] - \frac{[b\,l.\,1]}{[b\,b.\,1]}[b\,l.\,1]$	$[l\,s.\,1] - \frac{[b\,l.\,1]}{[b\,b.\,1]}[b\,s.\,1]$
		II′. . .	$[l\,l.\,2]$	$[l\,s.\,2]$

I′, II′ egyenleteket újra kiírva

	$[c\,c.\,2]$	$[c\,l.\,2]$	$[c\,s.\,2]$
		$[l\,l.\,2] - \frac{[c\,l.\,2]}{[c\,c.\,2]}[c\,l.\,2]$	$[l\,s.\,2] - \frac{[c\,l.\,2]}{[c\,c.\,2]}[c\,s.\,2]$
34.	I″. . .	$[l\,l.\,3]$	$[l\,s.\,3]$

A 34. egyenletből $z = -\frac{[c\,l.\,2]}{[c\,c.\,2]}$, a 33. alatti egyenletrendszer első egyenletébe, megkapjuk az y-t és z, y ismerete után behelyettesítve ezeket a 32. alatti egyenletrendszer első egyenletébe, meg lesz x.

A logaritmikus úton való számítás gyakorlati alakja az lesz, hogy 1.) a 32. egyenletrendszer első egyenletében szereplő számbeli értékek logaritmusait keressük s az illető számértékek fölé irjuk*); 2.) $-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}, -\frac{[a\,c]}{[a\,a]}, -\frac{[a\,l]}{[a\,a]}$ hányadosokat képezzük az előbb felirt log. értékekből s megkülönböztetés végett piros tintával az előbb felirt logaritmusok fölé irjuk; 3.) a $-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b], -\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,c], -\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l], -\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,s]$ tagok képzése végett (lásd 32. alatt ***a*** sort) célszerű a *log* $-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}$ előbb már piros tintával felirt hányadost egy szelet papirra írni s sorjában *log* $[a\,b]$, *log* $[a\,c]$ . . . tagok alá tolni s az összegeket képezni; azután ugyancsak egy kis szelet papirra írva $-$ *log* $\frac{[a\,c]}{[a\,a]}$ hányadost, azt a papir tologatásával a *log* $[a\,c]$, *log* $[a\,l]$, . . . tagok alá toljuk; e műveletek végeredménye a 32. egyenlet ***a, b, c*** soraiban lévő számok logaritmusai lesznek, amelyeknek numerusát keresve, a kapott számértékeket beirjuk sorjában az ***a b c*** sorokba; 4.) a most nyert számértékeket *összevonva*

*) Jegyzet. E műveletnél meg fogjuk engedni, hogy a log. kiirásánál negativ számok esetében a log. után irandó (*n*) negativ helyett (—) minus jelet írjunk.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

előjelre való tekintettel a normál egyenletek felettük álló együtthatóival és abszolut tagjaival: megkapjuk az *egyszer* redukált normál egyenlet állandó számértékeit, amelyek I, II, III. számmal vannak a 32. egyenletrendszerben jelölve.

A most tárgyalt művelet szóról-szóra megismétlendő a 33. alatti egyenletekre vonatkozólag, természetesen most a $-\log\frac{[a\,b]}{[a\,a]}$ hányadosok helyébe a $-\log\frac{[b\,c.\,1]}{[b\,b.\,1]}$ hányadosok lépnek és így tovább.

Az előbb elmondottakat egy számpéldán fogjuk most bemutatni.

Legyenek a normál egyenletek:

$$
\begin{aligned}
+544.8\,x - 275.9\,y - 61.4\,z + 15.4\,t + 82.1 &= 0\\
+434.7\,y + 63.5\,z - 10.8\,t - 77.0 &= 0\\
+590.0\,z - 277.9\,t - 204.7 &= 0\\
+183.2\,t + 93.4 &= 0\\
+181.5 &= 0
\end{aligned}
\qquad 35.\ldots
$$

A fenti egyenletrendszer megoldását táblázatos alakban írva végezzük el s ellenőrzés végett bevezetjük az s segédmennyiségeket.

	x	y	z	t	l	s		numerus
		+ 9.704 51	+ 9.051 93	− 8.451 28	− 9.178 10		$-\log\frac{[a\,b]}{[a\,a]}$ $[a\,b] = -2.145\,26$	− 139.7
	+ 2.736 24	− 2.440 75	− 1.788 17	+ 1.187 52	+ 1.914 34	− 2.484 30	$-\log\frac{[a\,b]}{[a\,a]}$ $[a\,c] = -1.492\,68$	− 31.1
	+ 544.8	− 275.9	− 61.4	+ 15.4	+ 82.1	− 305.0	$-\log\frac{[a\,b]}{[a\,a]}$ $[a\,d] = +0.982\,03$	+ 7.8
		+ 434.7	+ 63.5	− 10.8	− 77.0	− 134.5	$-\log\frac{[a\,b]}{[a\,a]}$ $[a\,l] = +1.618\,85$	+ 41.6
		− 139.7	− 31.1	+ 7.8	+ 41.6	− 154.5	$-\log\frac{[a\,b]}{[a\,a]}$ $[a\,s] = -2.188\,81$	− 154.5
I. . . .		+ 295.0	+ 32.4	− 3.0	− 35.4	− 289.0	$-\log\frac{[a\,c]}{[a\,a]}$ $[a\,c] = -0.840\,10$	− 6.9
							$-\log\frac{[a\,c]}{[a\,a]}$ $[a\,d] = +0.239\,45$	+ 1.7
36.			+ 590.0	− 277.9	− 204.7	− 109.5	$-\log\frac{[a\,c]}{[a\,a]}$ $[a\,l] = +0.966\,27$	+ 9.3
			− 6.9	+ 1.7	+ 9.3	− 34.4	$-\log\frac{[a\,c]}{[a\,a]}$ $[a\,s] = -1.536\,23$	− 34.4
II. . . .			+ 583.1	− 276.2	− 195.4	− 143.9	$-\log\frac{[a\,d]}{[a\,a]}$ $[a\,d] = -9.638\,80$	− 0.4
				+ 183.2	+ 93.4	− 3.3	$-\log\frac{[a\,d]}{[a\,a]}$ $[a\,l] = -0.365\,62$	− 2.3
				− 0.4	− 2.3	+ 8.6	$-\log\frac{[a\,d]}{[a\,a]}$ $[a\,s] = +0.935\,58$	+ 8.6
III. . . .				+ 182.8	+ 91.1	+ 5.3	$-\log\frac{[a\,l]}{[a\,a]}$ $[a\,l] = -1.092\,44$	− 12.4
					+ 181.5	− 75.3	$-\log\frac{[a\,l]}{[a\,a]}$ $[a\,s] = +1.662\,40$	+ 46.0
					− 12.4	+ 46.0		
IV. . . .					+ 169.1	− 29.3		

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Az először redukált normál egyenlet lesz tehát:

		y	z	t	l	s	
			− 9.040 73	+ 8.007 30	+ 9.079 18		
		+ 2.469 82	+ 1.510 55	− 0.477 12	− 1.549 00	− 2.460 90	$-\log\frac{[b\,c.\,1]}{[b\,b.\,1]}\,[b\,c.\,1] = -0.551\,28$ — 3.6
I.	. . . .	+ 295.0	+ 32.4	− 3.0	− 35.4	− 289.0	$-\log\frac{[b\,c.\,1]}{[b\,b.\,1]}\,[b\,d.\,1] = +9.517\,85$ + 0.3
			+ 583.1	− 276.2	− 195.4	− 143.9	$-\log\frac{[b\,c.\,1]}{[b\,b.\,1]}\,[b\,l.\,1] = +0.589\,73$ + 3.9
			− 3.6	+ 0.3	+ 3.9	+ 31.7	$-\log\frac{[b\,c.\,1]}{[b\,b.\,1]}\,[b\,s.\,1] = +1.501\,63$ + 31.7
37.	I′		+ 579.5	− 275.9	− 191.5	− 112.2	
				+ 182.8	+ 91.1	+ 5.3	$-\log\frac{[b\,d.\,1]}{[b\,b.\,1]}\,[b\,d.\,1] = -8.484\,42$ 0.0
				0.0	− 0.4	− 2.9	$-\log\frac{[b\,d.\,1]}{[b\,b.\,1]}\,[b\,l.\,1] = -9.556\,30$ − 0.4
	II′			+ 182.8	+ 90.7	+ 2.4	$-\log\frac{[b\,d.\,1]}{[b\,b.\,1]}\,[b\,s.\,1] = -0.468\,20$ − 2.9
					+ 169.1	− 29.3	
					− 4.2	− 34.7	$-\log\frac{[b\,l.\,1]}{[b\,b.\,1]}\,[b\,l.\,1] = -0.628\,18$ − 4.2
	III′				+ 164.9	− 64.0	$-\log\frac{[b\,l.\,1]}{[b\,b.\,1]}\,[b\,s.\,1] = -1.540\,08$ − 34.7

A másodszor redukált normál egyenlet lesz:

		z	t	l	s	
			+ 9.677 70	+ 9.519 12		$-\log\frac{[c\,d.\,2]}{[c\,c.\,2]}\,[c\,d.\,2] = -2.118\,45$ − 131.4
		+ 2.763 05	− 2.440 75	− 2.281 27	− 2.049 61	$-\log\frac{[c\,d.\,2]}{[c\,c.\,2]}\,[c\,l.\,2] = -1.959\,87$ − 91.2
	II′	+ 579.5	− 275.9	− 191.5	− 112.1	$-\log\frac{[c\,d.\,2]}{[c\,c.\,2]}\,[c\,s.\,2] = -1.727\,31$ − 53.4
			+ 182.8	+ 90.7	+ 2.4	
38.	. .		− 131.4	− 91.2	− 53.4	$-\log\frac{[c\,l.\,2]}{[c\,c.\,2]}\,[c\,l.\,2] = -1.801\,29$ − 63.3
	I″		+ 51.4	− 0.5	− 51.0	$-\log\frac{[c\,l.\,2]}{[c\,c.\,2]}\,[c\,s.\,2] = -1.568\,73$ − 37.0
				+ 164.9	− 64.0	
				− 63.3	− 37.0	
	II″			+ 101.6	− 101.0	

A harmadszor redukált normál egyenlet lesz:

		t	l	s	
			+7.98801*		
		+ 1.710 96	−9.69897	− 1.707 57	$-\log\frac{[d\,l.\,3]}{[d\,d.\,3]}\,[d\,l.\,3] = -7.686\,98$ 0.0
39.	. .	+ 51.4	− 0.5	− 51.0	$-\log\frac{[d\,l.\,3]}{[d\,d.\,3]}\,[d\,s.\,3] = -9.695\,58$ − 0.5
			+ 101.6	− 101.0	
			0.0	− 0.5	
	I‴		+ 101.6	− 101.5	

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A harmadszor redukált normál egyenlet már csak egy ismeretlent tartalmaz, amelyből

$$t = -\frac{[d\,l.\,3]}{[d\,d.\,3]}$$

de e számérték logaritmusa már meg is van. (Lásd a 39. alatt *)-al jelölt logaritmust.)

$$t = +\,0.010$$

Ez értéket a II′ egyenletbe helyettesítve kapjuk:

$$z = +\,0.335$$

Hasonlóképen az I, illetve az első eredeti normál egyenletbe való helyettesités után nyerjük y és x értékét.

$$y = +\,0.083 \qquad x = -\,0.071.$$

A normál egyenlet lefejtése után nyert maradék tag $[l\,l.\,4] = +\,101.6 = [\lambda\,\lambda]$.
A normál egyenlet megoldására ellenőrzés, hogy

$$[l\,l.\,4] + [l\,s.\,4] = o$$

A tárgyalt példában a 39. egyenlet I‴ sorát nézve $[l\,l.\,4] - [l\,s.\,4] = 0.1$, tehát a megoldás helyes.

A normál egyenletek megoldásának van *egyszerűbb módja is.*

Már láttuk eddig is, hogy az ismeretlenek, e fejezet 31. alatt felírt egyenletrendszeréből számíthatók.

Összehasonlítva a 31. alatti egyenletrendszert a 32—34. redukált normál egyenletekkel, azt találjuk, hogy az ismeretlenek meghatározásához elegendő azon *négy* egyenlet felírása, amelyeket a 31. egyenletrendszer tartalmaz.

Tehát a 32—34. alatti egyenletek teljes kiírása nem is szükséges, úgy hogy a következő eljárást követhetjük:

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

x	y	z	t	l	s
$\underline{[a\,a]}$	$[a\,b]$	$[a\,c]$	$[a\,d]$	$[a\,l]$	$[a\,s]$
	$\underline{[b\,b]}$	$[b\,c]$	$[b\,d]$	$[b\,l]$	$[b\,s]$
	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,c]$	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,d]$	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l]$	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,s]$
	$[b\,b.\,1]$	$[b\,c.\,1]$	$[b\,d.\,1]$	$[b\,l.\,1]$	$[b\,s.\,1]$
		$\underline{[c\,c]}$	$[c\,d]$	$[c\,l]$	$[c\,s]$
		$-\frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,c]$	$-\frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,d]$	$-\frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,l]$	$-\frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,s]$
		$-\frac{[b\,c.\,1]}{[b\,b.\,1]}[b\,c.\,1]$	$-\frac{[b\,c.\,1]}{[b\,b.\,1]}[b\,d.\,1]$	$-\frac{[b\,c.\,1]}{[b\,b.\,1]}[b\,l.\,1]$	$-\frac{[b\,c.\,1]}{[b\,b.\,1]}b\,s.\,1]$
		$[c\,c.\,2]$	$[c\,d.\,2]$	$[c\,l.\,2]$	$[c\,s.\,2]$
40. . .			$\underline{[d\,d]}$	$[d\,l]$	$[d\,s]$
			$-\frac{[a\,d]}{[a\,a]}[a\,d]$	$-\frac{[a\,d]}{[a\,a]}[a\,l]$	$-\frac{[a\,d]}{[a\,a]}[a\,s]$
			$-\frac{[b\,d.\,1]}{[b\,b.\,1]}[b\,d.\,1]$	$-\frac{[b\,d.\,1]}{[b\,b.\,1]}[b\,l.\,1]$	$-\frac{[b\,d.\,1]}{[b\,b.\,1]}[b\,s.\,1]$
			$-\frac{[c\,d.\,2]}{[c\,c.\,2]}[c\,d.\,2]$	$-\frac{[c\,d.\,2]}{[c\,c.\,2]}[c\,l.\,2]$	$-\frac{[c\,d.\,2]}{[c\,c.\,2]}[c\,s.\,2]$
			$[d\,d.\,3]$	$[d\,l.\,3]$	$[d\,s.\,3]$
				$\underline{[l\,l]}$	$[l\,s]$
				$-\frac{[a\,l]}{[a\,a]}[a\,l]$	$-\frac{[a\,l]}{[a\,a]}[a\,s]$
				$-\frac{[b\,l.\,1]}{[b\,b.\,1]}[b\,l.\,1]$	$-\frac{[b\,l.\,1]}{[b\,b.\,1]}[b\,s.\,1]$
				$-\frac{[c\,l.\,2]}{[c\,c.\,2]}[c\,l.\,2]$	$-\frac{[c\,l.\,2]}{[c\,c.\,2]}[c\,s.\,2]$
				$-\frac{[d\,l.\,3]}{[d\,d\,3]}[d\,l.\,3]$	$-\frac{[d\,l.\,3]}{[d\,d\,3]}[d\,s.\,3]$
				$[l\,l.\,4]$	$[l\,s.\,4]$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ezen minta szerint oldva meg a 35. alatti normál egyenletrendszert:

	+ 9.704 51	+ 9.051 93	— 8.451 28	— 9.178 10	
+ 2.736 24	— 2.440 75	— 1.788 17	+ 1.187 52	+ 1.914 34	— 2.484 30
+ 544.8	— 275.9	— 61.4	+ 15.4	+ 82.1	— 305.0
	+ 434.7	+ 63.5	— 10.8	— 77.0	— 134.1
	— 139.7	— 31.1	+ 7.8	+ 41.6	— 154.5
		— 9.040 73	+ 8.007 30	+ 9·079 18	
	+ 2.469 82	+ 1.510 55	— 0.477 12	— 1.549 00	— 2.460 90
	+ 295.0	+ 32.4	— 3.0	— 35.4	— 289.0
		+ 590.0	— 277.9	— 204.7	— 109.5
		— 6.9	+ 1.7	+ 9.3	— 34.4
		— 3.6	+ 0.3	+ 3.9	+ 31.7
			+ 9.677 70	+ 9.519 12	
		+ 2.763 05	— 2.440 75	— 2.282 17	— 2.049 61
41.		+ 579.5	— 275.9	— 191.5	— 112.1
			+ 183.2	+ 93.4	— 3.3
			— 0.4	— 2.3	+ 8.6
			0.0	— 0.4	— 2.9
			— 131.4	— 91.2	— 53.4
				+ 7.988 01	
			+ 1.710 96	— 9.698 97	— 1.707 57
			+ 51.4	— 0.5	— 51.0
				+ 181.5	— 75.3
				— 12.4	+ 46.0
				— 4.2	— 34.7
				— 63.3	— 37.0
				0.0	— 0.5
				+ 101.6	— 101.5

A normál egyenletek megoldásának ez utóbbi alakja *gazdaságosabb* mint a 36—39-ben bemutatott eljárás s ha csak különösebb ok nem késztet bennünket a 32—34. alatti megoldási forma betartására: mindig a 40. alatti megoldási formát fogjuk használni.

Indokoltnak tartjuk e helyütt az e §-ban tárgyalt eljárások teljes bemutatását egy kisebb példán.

Legyenek — a már lineárissá tett — feltételi egyenletek a következők:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= y - 0.48\,x - 0.92 \\
\lambda_2 &= y + 0.10\,x - 0.83 \\
\lambda_3 &= y + 0.48\,x + 1.15 \\
\lambda_4 &= y + 0.38\,x - 0.04 \\
\lambda_5 &= y - 0.24\,x - 2.98 \\
\lambda_6 &= y - 0.17\,x + 0.58
\end{aligned}
\qquad 42. \ldots\ldots\ldots
$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Célszerű a feltételi egyenleteket a következő alakban írni:

y	x	l	s	
+ 1	− 0.48	− 0.92	+ 0.40	= 0
+ 1	+ 0.10	− 0.83	− 0.27	= 0
+ 1	+ 0.48	+ 1.15	− 2.63	= 0
+ 1	+ 0.38	− 0.04	− 1.34	= 0
+ 1	− 0.24	− 2.98	+ 2.22	= 0
+ 1	− 0.17	+ 0.58	− 1.41	= 0
a	b	l	s	

$[aa] = +6.00$, $[ab] = +0.07$, $[al] = -3.04$, $[as] = -3.03$

44. . . . $[bb] = +0.70$, $[bl] = +1.51$, $[bs] = -2.28$

$[ll] = +12.08$, $[ls] = -10.55$

Mielőtt a normál egyenleteket felállitanók, meg kell győződnünk a normál egyenlet együtthatóinak és abszolut tagjainak helyességéről, vagyis az előzők értelmében kell, hogy:

$$[aa] + [ab] + [al] + [as] = 0$$
$$[ba] + [bb] + [bl] + [bs] = 0$$
$$[al] + [bl] + [ll] + [ls] = 0$$

A 44-ből behelyettesitve ide az egyes tagokat, azt találjuk, hogy e feltételeket az együtthatók és az abszolut tagok kielégitik.

Miután a normál egyenletek csak 2 ismeretlent tartalmaznak, a megoldáshoz nem szükséges az s segédmennyiségeket is felhasználni, hanem az ismeretlenek más sorrendű csoportositásával, egymástól függetlenül, kétszer oldjuk meg a normál egyenleteket és pedig

$$\underline{[aa]}\,x + [ab]\,y + [al] = 0$$
$$+ \underline{[bb]}\,y + [bl] = 0$$
$$+ \underline{[ll]} = 0$$

x	y	l	
	− 8.066 95	+ 9.704 72	
+ 0.778 15	+ 8.845 10	− 0.482 87	numerus
+ 6.00	+ 0.07	− 3.04	− 6.912 05 0.00
	+ 0.70	+ 1.51	+ 8.549 82 + 0.04
	0.00	+ 0.04	− 0.187 59 − 1.54
		+ 12.08	
		− 1.54	

45. . .

	− 0.345 23	
+ 9.845 10	+ 0.190 33	
+ 0.70	+ 1.55	− 0.535 56 − 3.43
	+ 10.54	
	− 3.43	
	+ 7.11	$= [ll.2]$

$\log y = -0.345\,23$

$y = -2.21$

$$\underline{[bb]}\,y + [ab]\,x + [bl] = 0$$
$$+ \underline{[aa]}\,x + [al] = 0$$
$$+ \underline{[ll]} = 0$$

y	x	l	
	− 9.000 00	− 0.333 88	
+ 9.845 10	+ 8.845 10	+ 0.178 98	numerus
+ 0.70	+ 0.07	+ 1.51	− 7.845 10 − 0.01
	+ 6.00	− 3.04	− 9.178 98 − 0.15
	− 0.01	− 0.15	− 0.512 86 − 3.26
		+ 12.08	
		− 3.26	

	+ 9.726 36	
+ 0.777 43	− 0.503 79	
+ 5.99	− 3.19	− 0.230 15 − 1.70
	+ 8.82	
	− 1.70	
$[ll.2] =$	+ 7.12	

$\log x = +9.726\,36$

$x = +0.53$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A normál egyenletek megoldására ellenőrzésül szolgálnak a maradék tagok, amelyek — amint a példából láthatjuk — egyeznek.

5. A normál egyenletek indirekt megoldása.

A 4. pontban részletesen tárgyalt megoldási módon kivül még igen sokféle megoldás képzelhető el *direkt* és *indirekt* uton.

Az indirekt úton való megoldások közül az úgynevezett *próbálgatási* módszert akarjuk részletesen ismertetni, melyet már *Gauss* használt s amelyet *Gerling* ismertetett részletesen először. (Lásd: Gerling „Ausgleichungsrechnungen" 1843. Hamburg und Gotha. 386. oldalon §. 111. alatt.)

Ennek a módszernek a lényege abban áll, hogy az ismeretlenek meghatározandó értékeinek olyan előleges értékeit határozzuk meg próbálgatás útján, amelyek a normál egyenletek abszolut tagjait minden határon túl kisebbé teszik. Ha sikerülne valamilyen úton-módon az ismeretlenek értékrendszerének olyan csoportját találni, mely a normál egyenleteket ellentmondás nélkül kielégitené, azaz hogy e helyettesitési értékrendszer bevezetése után a normál egyenletek összes abszolút tagjai egyidejüleg zérusokká redukálódnának, ez az értékrendszer volna az ismeretlenek keresett értékrendszere.

A fenti fogalmazásból következik, hogy e módszer bizonyos helyettesítési értékek számszerű behelyettesítését kivánja meg. Tehát szorzási műveleteket kell végeznünk, nevezetesen a helyettesítési értéket meg kell szoroznunk az illető ismeretlen együtthatójával. Ebből következik, hogy e módszernek gyakorlati jelentősége csak oly esetekben lesz, amikor a szorzási műveletek kényelmesen lesznek elvégezhetők, amikor tehát az együtthatók kis egész számok, vagy pedig egyenlők a pozitiv vagy negativ egységgel. Állomás kiegyenlítéseknél, ahol az ismeretlenek együtthatói egyenlők $\pm$ 1-el, a próbálgatási módszer nagy jelentőségű.

Egyébként mindig a számító fogja eldönteni, hogy melyik módszerrel jut hamarább célhoz.

Megemlíthetem, hogy a magyar kir. háromszögelő hivatal munkálataiban ez a mód nagy elterjedtségnek örvend s az állomás kiegyenlítéseknél és a trigonometrikus magassági hálózatok kiegyenlítésénél kivétel nélkül ezt használják.

Valamely több ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszer abszolut tagjaira — az ismeretleneknek ugyanazon értéket tulajdonítva — legnagyobb befolyása a legnagyobb együtthatójú ismeretlennek van. Kikeressük tehát először is a legnagyobb abszolut taggal bíró egyenletet s megnézzük, hogy a legnagyobb együtthatójú ismeretlennek milyen előleges értéket kell tulajdonítanunk — a többi ismeretlen helyettesitési értékét egy pillanatra zérusnak képzelve — hogy az abszolut tag eltünjék. Ha megtaláltuk ez értéket, behelyettesítjük, az ugyanazon oszlopban szereplő ismeretlenek helyébe s a kapott értékeket összevonjuk az egyenletrendszer abszolut tagjaival. Ily módon egy ismeretlennek bizonyos helyettesítési értéket tulajdonítva, megkapjuk e helyettesítési érték mellett fentmaradó abszolut tagokat.

Addig fogunk ily helyettesítési értékekkel kísérletezni, míg az egyenletek abszolut tagjai sorjában zérusokká, illetve a kivánt élesség szempontjából elhanyagolható kicsinynyé válnak.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Az eljárás menete:

46. . . . . .

x	y	z	l	Maradék tagok			
a_1	b_1	c_1	l_1	$(l_1)_1$	$(l_1)_2$	$(l_1)_3$	. . .
a_2	b_2	c_2	l_2	$(l_2)_1$	$(l_2)_2$	$(l_2)_3$	. . .
a_3	b_3	c_3	l_3	$(l_3)_1$	$(l_3)_2$	$(l_3)_3$	. . .

Helyettesitési értékek		
α_1	β_1	γ_1
α_2	β_2	γ_2
α_3	β_3	γ_3
α_4	β_4	γ_4
$[\alpha]$	$[\beta]$	$[\gamma]$

$x = [\alpha]$
$y = [\beta]$
$z = [\gamma]$

Egy két ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszert véve, megoldandó:

47. . . . . $\begin{aligned} 8x - 2y + 19 &= 0 \\ 3x + 9y - 37 &= 0 \end{aligned}$

Táblázatos alakban írva:

x	y	l	Maradék tagok						
$+\underline{8}$	-2	$+19$	$+11$	$+3$	$+2.2$	-0.2	-0.4	0	-0.06
$+3$	$+\underline{9}$	-37	-1	-4	-0.4	-1.3	-0.4	-0.25	$+0.02$

48.

-1_2	$+4_1$
-0.3_4	$+0.4_3$
$+0.05_6$	$+0.1_5$
	$+0.03_7$
-1.25	$+4.53$

$x = -1.25$
$y = -4.53$

Jegyzet. A helyettesitési érték mellett lévő indexek $(_1, \ldots _7)$ jelzik a helyettesitések sorrendjét.

Az eljárás helyességét igazolandó, a nyert x, y értékeket be kell helyettesítenünk az eredeti egyenletekbe s azonosságot kell kapnunk, illetve a fenmaradó abszolut tagnak egyezni kell az utolsó maradék taggal.

Behelyettesitve az első egyenletbe x és y értékét:

$$\begin{aligned} 8x - 2y + 19 &= 0 \\ 8.(-1.25) - 2.(4.53) + 19 &= -0.6 \\ -10.00 - 9.06 + 19 &= -0.6 \\ -0.6 &= -0.6 \end{aligned}$$

Az eljárásunk tehát helyes volt.

A 48. alatti példában mindig egy-egy ismeretlent helyettesítettünk egyszerre; miután a szorzási és összeadási műveletek igen egyszerűek, egyszerre több ismeretlent is helyettesíthetünk, amikor is sokkal gyorsabban jutunk célhoz.

Mint minden műveletnél, úgy itt is ellenőrzésről kell gondoskodnunk. Az egyenletek megoldása utáni ellenőrzést nem fogadhatjuk el, mert ha hiba csúszik be, csak az eljárás végén jövünk reá, s esetleg az egész megoldást meg kell ismételnünk. Már pedig kivánatos, hogy megoldás közben is legyen ellenőrzésünk.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ennek két módja van:

a) Gyakran olyan alakúak a normál egyenletek, hogy az abszolut tagok összege egyenlő zérussal. Ez esetben az egyes maradék tagok összegeinek is egyenlőnek kell lenni zérussal.

b) Ha az abszolut tagok összege nem zérus, akkor egy segéd egyenletet vezetek be, úgy hogy az együtthatók összegei és az abszolut tagok összegei is zérusok legyenek; de ez utolsó összeg egyenletet az ismeretlenek meghatározásainál figyelmen kívül hagyjuk, illetve ***csak*** ellenőrzésül használjuk fel.

A 48. alatti példába az ellenőrzés kedvéért ilyen összegegyenletet bevezetve, lesz

49.

x	y	l	Maradéktagok						
+8	−2	+19	+11	+3	+2.2	−0.2	−0.4	0	−0.06
+3	+9	−37	−1	−4	−0.4	−1.3	−0.4	−0.25	+0.02
−11	−7	+18	−10	+1	−1.8	+1.5	+0.8	+0.25	+0.04
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Helyettesitési értékek

-1_2	$+4_1$
-0.3_4	$+0.4_3$
$+0.05_6$	$+0.1_5$
	$+0.03_7$
−1.25	+4.53

Az egyes helyettesítések után az abszolut tagok összegének zérusnak kell lenni.

Példa.

Trigonometrikus magasságmérések kiegyenlítésénél, egyenlő súlyuaknak véve a mérési eredményeket, rendszerint a következő alaku normál egyenletrendszert kell megoldanunk:

Az ismeretlenek legyenek sorjában I, II, . . .

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	l	Maradék tagok		
+3	−1	.	.	.	.	.	.	−1	.	−1	+ 6	+ 2	+ 2	+ 2
−1	+6	−1	−1	−1	.	−1	.	−1	.	.	+ 40	− 64	− 1	+ 1
.	−1	+5	−1	−1	.	−1	.	−1	.	.	+ 10	+ 18	− 3	− 1
.	−1	−1	+4	−1	−1	.	.	.	.	.	+ 10	− 19	− 4	+ 1
.	−1	−1	−1	+7	−1	−1	−1	−1	.	.	− 30	+ 74	+ 3	− 2
.	.	.	−1	−1	+5	−1	.	.	−1	−1	+ 242	− 42	− 1	0
.	−1	−1	.	−1	−1	+7	−1	−1	−1	.	+ 30	+ 25	+ 4	+ 1
.	.	.	.	−1	.	−1	+4	−1	−1	.	+ 70	− 5	+ 1	+ 1
−1	−1	−1	.	−1	.	−1	−1	+8	−1	−1	− 44	− 19	+ 4	− 1
.	.	.	.	.	−1	−1	−1	−1	+5	−1	− 198	+ 30	+ 2	− 1
−1	.	.	.	.	−1	.	.	−1	−1	+4	− 136	0	− 7	− 1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 408 − 408	+149 −149	+16 −16	+ 6 − 6

Helyettesitési értékek

+ 4	−24	−10	29	− 3	−50	− 8	−10	+ 6	+40	+34
+ 4	+10	− 3	+ 5	− 8	+ 6	− 3	− 2	+ 2	− 5	.
.	.	.	+ 1	− 1	.	− 1	− 1	− 1	. 1	+ 1
+ 8	−14	−13	−23	−12	−44	−12	−13	+ 7	+34	+35

= az ismeretlenek értékei.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

E példában három csoport helyettesítéssel célt érünk. Az abszoluttagok milliméter egységben vannak kifejezve s a harmadik helyettesítés után a legnagyobb maradék tag 2 m/m.; folytathattuk volna a helyettesitést még tovább, de trigonometrikus magasságokról lévén szó a kivánt élességet e bent maradó ellentmondások dacára elértük.

Ez utóbbi példa élénk bizonyítéka annak, hogy a próbálgatási módszer milyen gazdaságosan használható a normál egyenletek megoldására.

Hangsúlyozni kívánjuk azonban, hogy amikor az ellentmondások teljesen szigorú eltüntetéséről van szó, jobb a Gauss-féle eliminációs módszert használni.

6. §. A kiegyenlített értékek megbizhatóságának számítása.

1. Általános fogalmak.

Amint a bevezetésben mondottuk a kiegyenlítő számításnak kettős célja van:

a) az egymásnak többé-kevésbbé ellentmondó mérési eredményekből az ismeretlenek legvalószinűbb értékének meghatározása;

b) a kiegyenlített értékek megbizhatósági mérőszámának számítása.

A megbizhatóság mérőszámául a *középhiba* szolgál. (Lásd I. kötet 2. §.)

Az I. kötetben megadott definiciók ismétlésével felírhatjuk, hogy

$$1. \quad \mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$$

ahol ε alatt a valódi hibák értendők. Az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ valódi hibák azonban általánosságban mindig ismeretlenek maradnak előttünk; de ismerjük az előbbi fejezetek alapján a kiegyenlített értékek javításait, amelyek szintén alkalmasak a *középhiba* számítására. *Közvetlen* mérési eredményekből számított kiegyenlített érték középhibájára egy ismeretlen esetén találtuk a következőket:

$$2. \quad \mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}$$

E képlet adja az egységsúlyú mérési eredmény középhibáját, míg a *kiegyenlített* érték középhibája

$$3. \quad \mu_x = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n(n-1)}} = \frac{\mu}{\sqrt{n}}$$

Nem egyenlő súlyú közvetlen mérési eredmények esetében az egységsúlyú mérési eredmény középhibája:

$$4. \quad \mu = \sqrt{\frac{[g\lambda\lambda]}{n-1}}$$

A kiegyenlített érték középhibája:

$$5. \quad \mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{[g]}}$$

A g_i súlyú l_i mérési eredmény μ_i középhibája:

$$6. \quad \mu_i = \frac{\mu}{\sqrt{g_i}}$$

Közvetítő mérések esetében az egységsúlyú mérési eredmény középhibája

$$7. \quad \mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{f}}$$

ahol f = fölös mérések száma.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ha $m =$ a feltételi egyenletek száma, illetve a mérési eredmények száma ; $n =$ az ismeretlenek száma ; akkor miután m egyenletből m ismeretlen közvetetlenül számítható, marad még $m - n$ számú feltételi egyenletünk s ez egyenlő a fölös mérések számával.

Tehát $$f = m - n$$

8. . . . . s így $\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{m-n}}$

A feltételi egyenletekben szereplő $x, y, \ldots$ ismeretlenek kiegyenlített értékeinek $\mu_x, \mu_y, \ldots$ várható középhibája a 6. képlet figyelembe vételével :

$$\mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{g_x}}$$

9. . . . . .

$$\mu_y = \frac{\mu}{\sqrt{g_y}}$$

. . . . .

Szükségünk lesz tehát a kiegyenlített értékek középhibáinak számítása végett a $g_x, g_y \ldots$ *kiegyenlítés adta* súlyokra, melyeket a következő megfontolásokból nyerhetünk :

A kiegyenlítő eljárásból, jelesen a normál egyenletekből, az ismeretlenek (x, y, z) az $l_1, l_2 \ldots$ mérési eredmények lineáris függvényeiként adódnak.

A normál egyenletek redukálása után a kiegyenlített értékek a következő egyenletekből adódnak : (Lásd 5. §. 31. alatt).

$$\begin{aligned} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] &= 0 \\ [b\,b.1]\,y + [b\,c.1]\,z + [b\,l.1] &= 0 \\ [c\,c.2]\,z + [c\,l.2] &= 0 \end{aligned}$$

10. . . . . .

Ez egyenletekből számítva az ismeretleneket :

$$z = \frac{[c\,l.2]}{[c\,c.2]}$$

$$y = \frac{[b\,c.1]\,[c\,l.2]}{[b\,b.1]\,[c\,c.2]} + \frac{[b\,l.1]}{[b\,b.1]}$$

11.

$$x = \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\left(\frac{[b\,c.1]}{[b\,b.1]} \cdot \frac{[c\,l.2]}{[c\,c.2]} + \frac{[b\,l.1]}{[b\,b.1]}\right) + \frac{[a\,c]}{[a\,a]} \cdot \frac{[c\,l.2]}{[c\,c.2]} + \frac{[a\,l]}{[a\,a]}$$

Ezen egyenlőségekbe bevezetve a rövidített $[b\,b.1], [b\,c.1], \ldots, [c\,c.2], [c\,l.2] \ldots$ jelzések helyett az 5. §-ban 22. és 23. képletben adott értékeket, általánosságban a következő egyenlőségeket kapjuk :

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \ldots \\ y &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \ldots \\ z &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \ldots \end{aligned}$$

12. . . . . .

Miután az $l_1, l_2, \ldots$ mérési eredményeket ugyanazon körülmények között, ugyanannyiszor s ugyanolyan gonddal mértük, szükségképen kell, hogy

$$\mu_{l_1} = \mu_{l_2} = \ldots = 1$$

Ezen feltevés mellett a 12. alatti lineáris függvényalakra alkalmazva a függvényértékek középhiba számításainak elvét. (Lásd I. kötet 2. §. 50. old.)

13. . . . . $\mu_x = \sqrt{[\alpha\,\alpha]}$; $\mu_y = \sqrt{[\beta\,\beta]}$; $\mu_z = \sqrt{[\gamma\,\gamma]}$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Módunkban lesz tehát a középhiba és súly közötti összefüggés révén a $g_x, g_y, g_z, \ldots$ súlyokat számítanunk és pedig

14. . . . . $g_x = \frac{1}{[\alpha\alpha]}, \qquad g_y = \frac{1}{[\beta\beta]}, \qquad g_z = \frac{1}{[\gamma\gamma]}$

s ezek alapján a kiegyenlített értékek középhibái, amint előbb láttuk:

$$\mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{g_x}}; \qquad \mu_y = \frac{\mu}{\sqrt{g_y}}; \qquad \mu_z = \frac{\mu}{\sqrt{g_z}}; \ldots . \quad 9$$

A középhiba számításokban szereplő $[\alpha\alpha], [\beta\beta], \ldots$ értékeket *súlykoefficienseknek* nevezzük.

A 11. képletből, két ismeretlent tételezve fel a tárgyalás egyszerűsítése végett,

$$y = \frac{[b\,l.\,1]}{[b\,b.\,1]} = \frac{[b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l]}{[b\,b.\,1]}$$

A szögletes ([. .]) zárjel alatti tagokat az ismert értelmezés alapján részletesen kiírva

$$y = \frac{(b_1 l_1 + b_2 l_2 + \ldots) - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}(a_1 l_1 + a_2 l_2 + \ldots)}{[b\,b.\,1]} = \frac{\left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]} a_1\right) l_1}{[b\,b.\,1]} + \frac{\left(b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]} a_2\right) l_2}{[b\,b.\,1]} + \ldots$$

Bevezetve a következő jelzéseket:

15. . . . $\frac{\left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]} a_1\right)}{[b\,b.\,1]} = \beta_1 \qquad \frac{\left(b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]} a_2\right)}{[b\,b.\,1]} = \beta_2$

lesz:

16. . . . . $y = \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \ldots$

A 14. képletekben szereplő $[\alpha\alpha], [\beta\beta] \ldots$ tagokra van szükségünk. Képezzük tehát $[\beta\beta]$ négyzetösszeget.

A 15. alatti egyenlőségeket négyzetre emelve:

$$\beta_1^2 = \frac{1}{[b\,b.\,1]^2}\left(b_1^2 - 2\,a_1\,b_1\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]} + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2} \cdot a_1^2\right)$$

$$\beta_2^2 = \frac{1}{[b\,b.\,1]^2}\left(b_2^2 - 2\,a_2\,b_2\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]} + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2} \cdot a_2^2\right)$$

. . . . . .

Ezeket összeadva lesz:

$$[\beta\beta] = \frac{1}{[b\,b\,1.]^2}\left([b\,b] - 2\,[a\,b]\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]} + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}[a\,a]\right)$$

Röviditések és összevonások után kapjuk:

17. . . . . $[\beta\beta] = \frac{1}{[b\,b.\,1]^2}\left([b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]\right) = \frac{1}{[b\,b.\,1]}$

Tehát $g_y = \frac{1}{[\beta\beta]} = [b\,b.\,1]$

18. . . . . .

hasonlóképen $g_x = \frac{1}{[\alpha\alpha]} = [a\,a.\,1]$

Azt az igen fontos eredményt kapjuk, hogy az utolsó redukált normál egyenletben lévő ismeretlen együtthatója, egyszersmint az illető ismeretlen súlya.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Kimondhatjuk tehát azt a szabályt, hogy a g_x, g_y . . . súlyok meghatározásának egyik módja az, hogy a normál egyenleteket az ismeretlenek más-más csoportosítása mellett újra és újra megoldjuk s mindannyiszor, az utolsó redukált normál egyenletben lévő ismeretlen együtthatója, az illető ismeretlen súlya.

Ha tehát valamennyi kiegyenlített érték középhibáját akarjuk ismerni, akkor annyiszor kell megoldanunk a normál egyenleteket, ahány ismeretlent tartalmaznak.

Ez az oka annak, — amire már előbb hivatkoztunk, — hogy két ismeretlent tartalmazó normál egyenletet mindíg kétszer oldunk meg, de az ismeretlenek más-más csoportosítása mellett.

Két ismeretlen esetén e két megoldás nem nagy munka, s ellenőrzésünk is lesz, mert mindkét egyenlet maradék tagja ugyanazon számbeli értékű tartozik lenni. Ezért tartjuk feleslegesnek két ismeretlent tartalmazó normál egyenlet megfejtése esetén az s segédmennyiségeknek a normál egyenletek megoldásába való bevezetését pusztán az ellenőrzés miatt.

A most tárgyalt eljárást alkalmazzuk az 5. §-ban tárgyalt 42. alatti példára.

A normál egyenletek megoldása után kaptuk, hogy

$$y = -2.21$$
$$x = +0.53$$

Mekkorák e kiegyenlített értékek középhibái μ_y és μ_x?

A normál egyenletek maradék tagja $[ll.2] = [\lambda\lambda] = 7.12$, (Lásd 5. §. 45. egyenlet) s így a súlyegység középhibája

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{f}} = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{m-n}} = \sqrt{\frac{7.12}{6-2}} = \pm 1.33$$

A jelen §. 9. képlete alapján pedig:

$$\mu_y = \frac{\mu}{\sqrt{g_y}}, \quad \mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{g_x}}$$

Az előbbiek alapján g_y és g_x súlyok az utolsó normál egyenletek együtthatói, tehát (Lásd 5. §. 45. egyenleteket)

$$g_y = 0.7 \qquad g_x = 5.99$$
$$\mu_y = \frac{1.33}{\sqrt{0.7}} \qquad \mu_x = \frac{1.33}{\sqrt{5.99}}$$
$$\mu_y = \pm 1.58 \qquad \mu_x = \pm 0.54.$$

A hivatkozott példa végeredménye lesz:

$$y = -2.21 \qquad x = +0.53$$
$$\mu_y = \pm 1.58 \qquad \mu_x = \pm 0.54$$
$$\mu = \pm 1.33$$

A középhiba számításra vonatkozólag meg kell jegyeznünk. hogy a számított középhibák megbízhatósága annál nagyobb, minél nagyobb a fölös mérések száma.

Csekély számú fölös mérések esetében a középhiba számítás teljesen illuzórikus eredményeket adhat s legkevésbbé lesz alkalmas arra, hogy a kiegyenlített értékek megbizhatóságának mérőszáma legyen.

Adott esetekben, a megbizhatóság kérdésének mérlegelésénél, az itt mondottakra figyelemmel kell lennünk.

Ez a megjegyzés — és ezt hangsúlyozni akarjuk — csak a középhiba számításokra vonatkozik és nem a kiegyenlített értékekre is. A kiegyenlítő eljárás minden esetben, ha a mérési eredményeket a bevezetőrészben ismertetett természetű hibák terhelik, a mérési eredmények alapján a keresett értékek legvalószínűbb értékét adja.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

2. A súlykoefficiensek számítása több ismeretlen esetében.

A súlykoefficiensek számításainak előbb ismertetett módja nem lesz gazdaságos akkor, ha a normál egyenletek kettőnél több ismeretlent tartalmaznak. Nem lesz gazdaságos pedig azért, mert ez a mód a normál egyenletek többszöri — egymástól független — megoldását kívánja.

Tehát előáll annak a szükségessége, hogy a normál egyenletek olyan megoldását keressük, amely csekély munka árán, mellékeredményként adja meg a középhiba számításhoz szükséges súlykoefficienseket.

Ennek a megoldásnak a tárgyalásával akarunk most bővebben foglalkozni.

Amint előbb láttuk a bevezetésben a 12. képlet alatt, az ismeretlenek a mérési eredmények lineáris függvényeként állíthatók elő:

$$19. \quad \begin{aligned} x &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \alpha_4 l_4 \\ y &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 + \beta_4 l_4 \\ z &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 + \gamma_4 l_4 \end{aligned}$$

x, y, z, függvényértékek középhibáira felírhatjuk:

$$20. \quad \begin{aligned} \mu_x^2 &= [\alpha\alpha] & \mu_y^2 &= [\beta\beta] & \mu_z^2 &= [\gamma\gamma] \\ \text{illetve } g_x &= \frac{1}{[\alpha\alpha]} & g_y &= \frac{1}{[\beta\beta]} & g_z &= \frac{1}{[\gamma\gamma]} \end{aligned}$$

A 19. alatti lineáris egyenletek helyett rendelkezésünkre állanak a feltételi egyenletek, és pedig

$$21. \quad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= l_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= l_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= l_3 \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z &= l_4 \end{aligned}$$

Ezen feltételi egyenletek segélyével kell kifejeznünk a 19. alatti egyenletek együtthatóit.

Szorozzuk meg a feltételi egyenleteket rendre α_1, α_2, α_3, α_4-el s a szorzás végrehajtása után adjuk őket össze:

$$22. \quad \begin{aligned} \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \alpha_4 l_4 = {} & \alpha_1 (a_1 x + b_1 y + c_1 z) + \\ & + \alpha_2 (a_2 x + b_2 y + c_2 z) + \\ & + \alpha_3 (a_3 x + b_3 y + c_3 z) + \\ & + \alpha_4 (a_4 x + b_4 y + c_4 z) = x [a\alpha] + y [b\alpha] + z [c\alpha] \end{aligned}$$

Összehasonlítva a 19. alatti egyenleteket a 22. alatti egyenlőséggel, szükségképen kell, hogy az x együtthatója egyenlő legyen 1-el, az y, z együtthatója pedig 0 legyen azaz kell hogy

$$\begin{aligned} [a\alpha] &= 1 \\ [b\alpha] &= 0 \\ [c\alpha] &= 0 \end{aligned}$$

Az itt tárgyalt eljárást alkalmazva s β_1, β_2, . . . , azután γ_1, γ_2, . . . -al szorozva és összeadva a feltételi egyenleteket, szükségképen kell, hogy álljanak a következő egyenlőségek:

$$23. \quad \begin{aligned} [a\alpha] &= 1 & [a\beta] &= 0 & [a\gamma] &= 0 \\ [b\alpha] &= 0 & [b\beta] &= 1 & [b\gamma] &= 0 \\ [c\alpha] &= 0 & [c\beta] &= 0 & [c\gamma] &= 1 \end{aligned}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A most nyert fontos eredményekre később fogunk hivatkozni.

Két ismeretlent tartalmazó normál egyenlet esetében láttuk (Lásd 6. §. 15. képlet), hogy az ismeretlenek a mérési ereményekben lineáris függvényeként állíthatók elő. Általánosságban több ismeretlen esetében e §. 11. képlete szerint állíthatók elő e lineáris függvény alakok. Ezen képlet gyakorlatilag azonban nem használható, mert lehetetlen, adott számértékek esetében felírnunk.

Felállítottuk azt az alapelvet, hogy a súlykoefficiensek számítását a normál egyenletek megoldásával egyidejüleg akarjuk nyerni; nézzük tehát a normálegyenleteket.

$$\begin{aligned} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] &= 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] &= 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + [c\,l] &= 0 \end{aligned} \qquad 24.$$

A normál egyenletek megoldásának sokféle módja közül, válasszuk ki a *határozatlan koefficiensek* módszerét.

Szorozzuk meg a normál egyenleteket sorjában Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, egyelőre még ismeretlen szorzókkal s összegezzük őket:

$$\begin{aligned} &[a\,a]\,Q_{11}\,x + [a\,b]\,Q_{11}\,y + [a\,c]\,Q_{11}\,z + [a\,l]\,Q_{11} + \\ &+ [a\,b]\,Q_{12}\,x + [b\,b]\,Q_{12}\,y + [b\,c]\,Q_{12}\,z + [b\,l]\,Q_{12} + \\ &[a\,c]\,Q_{13}\,x + [b\,c]\,Q_{13}\,y + [c\,c]\,Q_{13}\,z + [c\,l]\,Q_{13} = 0 \end{aligned} \qquad 25.$$

Ha ezen egyenletből az x értékét ki akarjuk számítani, akkor kell hogy az x együtthatója egyenlő legyen 1-el, az y, z együtthatói pedig zérusok legyenek; azaz szükségképen kell hogy álljanak a következő egyenlőségek:

$$\begin{aligned} [a\,a]\,Q_{11} + [a\,b]\,Q_{12} + [a\,c]\,Q_{13} &= 1 \\ [a\,b]\,Q_{11} + [b\,b]\,Q_{12} + [b\,c]\,Q_{13} &= 0 \\ [a\,c]\,Q_{11} + [b\,c]\,Q_{12} + [c\,c]\,Q_{13} &= 0 \end{aligned} \qquad 26.$$

A most kapott egyenletrendszert Q_{11}, Q_{12}, Q_{13} szerint megoldva és behelyettesítve a 25. alatti egyenlőségbe, x-et az l mérési eredmények lineáris alakjában nyerjük:

$$\begin{aligned} x = [a\,l]\,Q_{11} + [b\,l]\,Q_{12} + [c\,l]\,Q_{13} &= \\ = (a_1\,Q_{11} + b_1\,Q_{12} + c_1\,Q_{13})\,l_1 + \\ + (a_2\,Q_{11} + b_2\,Q_{12} + c_2\,Q_{13})\,l_2 + \\ + (a_3\,Q_{11} + b_3\,Q_{12} + c_3\,Q_{13})\,l_3 + \\ + (a_4\,Q_{11} + b_4\,Q_{12} + c_4\,Q_{13})\,l_4 \end{aligned} \qquad 27.$$

összehasonlítás kedvéért ideirva 19. alatti egyenleteket:

$$\begin{aligned} x = a_1\,l_1 + a_2\,l_2 + a_3\,l_3 + a_4\,l_4 &= [\alpha\,l] \\ y &= [\beta\,l] \\ z &= [\gamma\,l] \end{aligned} \qquad 19.$$

A 19. és 20. képlet alatti egyenlőségek akkor és csakis akkor állhatnak fenn, ha

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1\,Q_{11} + b_1\,Q_{12} + c_1\,Q_{13} \\ \alpha_2 &= a_2\,Q_{11} + b_2\,Q_{12} + c_2\,Q_{13} \\ \alpha_3 &= a_3\,Q_{11} + b_3\,Q_{12} + c_3\,Q_{13} \\ \alpha_4 &= a_4\,Q_{11} + b_4\,Q_{12} + c_4\,Q_{13} \end{aligned} \qquad 28.$$

Megszorozva ezen egyenleteket sorjában α_1, α_2, α_3, α_4-el és összeadva:

$$[a\,\alpha] = [a\,\alpha]\,Q_{11} + [b\,\alpha]\,Q_{12} + [c\,\alpha]\,Q_{13} \qquad 29.$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A 29. egyenletben szereplő $[a\,a]$, $[b\,a]$, $[c\,a]$ tagokról bebizonyitottuk (Lásd 23. képlet), hogy

$$[a\,a] = 1 \qquad [b\,a] = 0 \qquad [c\,a] = 0$$

s ezen értékek behelyettesítése után a 29. egyenletbe, kapjuk:

$$30. \ldots [a\,a] = Q_{11} = \frac{1}{g_x}; \quad [a\,\beta] = Q_{12}; \quad [a\,\gamma] = Q_{13}$$

Analóg módon nyerjük;

$$[\beta\,\beta] = Q_{22} = \frac{1}{g_y} \qquad [\beta\,\gamma] = Q_{23} \qquad [\gamma\,\gamma] = Q_{33} = \frac{1}{g_z}$$

Összefoglalva az eddigi tárgyalást, a súlykoefficiensek ismerete mindig a következő normál egyenletek megoldását kivánja meg:

$$31. \ldots \begin{array}{l|l} [aa]\,Q_{11} + [ab]\,Q_{12} + [ac]\,Q_{13} = 1 & [aa]\,Q_{21} + [ab]\,Q_{22} + [ac]\,Q_{23} = 0 \\ [ab]\,Q_{11} + [bb]\,Q_{12} + [bc]\,Q_{13} = 0 & [ab]\,Q_{21} + [bb]\,Q_{22} + [bc]\,Q_{23} = 1 \\ [ac]\,Q_{11} + [bc]\,Q_{12} + [cc]\,Q_{13} = 0 & [ac]\,Q_{21} + [bc]\,Q_{22} + [cc]\,Q_{23} = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} [a\,a]\,Q_{31} + [a\,b]\,Q_{32} + [a\,c]\,Q_{33} = 0 \\ [a\,b]\,Q_{31} + [b\,b]\,Q_{32} + [b\,c]\,Q_{33} = 0 \\ [a\,c]\,Q_{31} + [b\,c]\,Q_{32} + [c\,c]\,Q_{33} = 1 \end{array}$$

A levezetés menetéből következik, hogy $Q_{12} = Q_{21}$, $Q_{13} = Q_{31}, \ldots$

A 31. alatti normál egyenleteket nevezzük a *súlykoefficiensek egyenletének*. Ezeknek megoldása után ismerni fogjuk a következő súlykoefficienseket:

$$32. \quad \underline{[a\,a] = Q_{11}} \qquad \begin{array}{l} [a\,\beta] = Q_{12} = Q_{21} \\ \underline{[\beta\,\beta] = Q_{22}} \end{array} \qquad \begin{array}{l} [a\,\gamma] = Q_{13} = Q_{31} \\ [\beta\,\gamma] = Q_{23} = Q_{32} \\ \underline{[\gamma\,\gamma] = Q_{33}} \end{array}$$

Amennyiben különös vizsgálatok, vagy különös függvényértékek középhibáinak számítása szükségessé nem teszi az összes súlykoefficiensek számitását, meg fogunk elégedni az *aláhúzott értékek* kiszámításával, amelyekre a *kiegyenlített* értékek középhibáinak számításánál van szükségünk.

A feladatunkat tehát részben elintézettnek tekintjük a következőkben, ha $[a\,a]$, $[\beta\,\beta]$ és $[\gamma\gamma]$ értékeket ismerjük.

A *súlykoefficiensek egyenletének* szerkezete teljesen olyan, mint a normál egyenleteké, az ismeretlenek együtthatói teljesen azonosak, pusztán az absolut tagok helyébe kell sorjában 1, 0, 0,; 0, 1, 0, illetőleg 0, 0, 1 értéket helyettesitenünk.

A súlykoefficiensek meghatározását tehát mindig a normál egyenletek megoldásával egyidejüleg végezzük, miután igy sok közös művelet elvégzését takaritjuk meg.

A súlykoefficiensek ismerete a következő egyenletek megoldását kivánja tehát meg:

$$33. \ldots \begin{array}{l} \underline{[a\,a]}\,Q_{11} + [a\,b]\,Q_{12} + [a\,c]\,Q_{13} = 1 \\ \qquad + \underline{[b\,b]}\,Q_{12} + [b\,c]\,Q_{13} = 0 \\ \qquad + \underline{[c\,c]}\,Q_{13} = 0 \end{array}$$

$$34. \ldots \begin{array}{l} \underline{[b\,b.\,1]}\,Q_{22} + [b\,c.\,1]\,Q_{23} = 1 \\ \qquad + \underline{[c\,c.\,1]}\,Q_{23} = 0 \end{array}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

35. . . . . $\underline{[c\,c\,2]}\ Q_{33} = 1$

Amint láthatjuk, ezeknek az egyenleteknek megoldása az előbbi §-ok alapján semmi nehézségbe nem ütközik. Pusztán az az egy megjegyzésünk van, hogy a súlykoefficiensek meghatározásának ez a módja még mindig körülményes.

Ez késztet bennünket arra, hogy a normál egyenletek megoldásának egy másik módját is ismertessük, amely módot a normál egyenletek *szimmetrikus megoldásának* nevezhetünk.

Ezt a módszert Jordan ismerteti a „Handbuch der Vermessungskunde" I. kötetben, amint azt itt alább közöljük.

Az 5. §. 3. pontja 31. képlete szerint a normál egyenletben lévő ismeretlenek számítása a következő egyenletrendszerből történik:

36. . . .
$$\begin{aligned} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,d]\,t + [a\,l] &= 0 \\ [b\,b.1]\,y + [b\,c.1]\,z + [b\,d.1]\,t + [b\,l.1] &= 0 \\ [c\,c.2]\,z + [c\,d.2]\,t + [c\,l.2] &= 0 \\ [d\,d.3]\,t + [d\,l.3] &= 0 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből számítható t, melyet a 3-ik egyenletbe helyettesitve megkapjuk z értékét; hasonló visszafelé való helyettesítésekkel megkaphatjuk x és y értékét.

A helyettesítések után a következő alaku egyenletek adódnak:

37. . .
$$\begin{aligned} [a\,a]\ x &= [a\,l] - \frac{[b\,l.1]}{[b\,b.1]}\,[a\,b] - \frac{[c\,l.2]}{[c\,c.2]}\,[a\,c.1] - \frac{[d\,l.3]}{[d\,d.3]}\,(a\,d.2) \\ [b\,b.1]\ y &= [b\,l.1] - \frac{[c\,l.2]}{[c\,c.2]}\,[b\,c.1] - \frac{[d\,l.3]}{[d\,d.3]}\,(b\,d.2) \\ [c\,c.2]\ z &= [c\,l.2] - \frac{[d\,l.3]}{[d\,d.3]}\,(c\,d.2) \\ [d\,d.3]\ t &= -[d\,l.3] \end{aligned}$$

A (. . .) zárjelek jelentése a következő:

38. .
$$\begin{aligned} (a\,c.1) &= [a\,c] - \frac{[b\,c.1]}{[b\,b.1]}\,[a\,b] & (a\,d.2) &= (a\,d.1) - \frac{[c\,d.2]}{[c\,c.2]}\,(a\,c.1) \\ (a\,d.1) &= [a\,d] - \frac{[b\,d.1]}{[b\,b.1]}\,[a\,b] & (b\,d.2) &= [b\,d.1] - \frac{[c\,d.2]}{[c\,c.2]}\,[b\,c.1] \\ (a\,l.1) &= [a\,l] - \frac{[b\,l.1]}{[b\,b.1]}\,[a\,b] & (a\,l.2) &= (a\,l.1) - \frac{[c\,l.2]}{[c\,c.2]}\,(a\,c.1) \\ (a\,l.3) &= (a\,l.2) - \frac{[d\,l.3]}{[d\,d.3]}\,(a\,d.2) & [b\,l.2] &= [b\,l.1] - \frac{[c\,l.2]}{[c\,c.2]}\,[b\,c.1] \\ (b\,l.3) &= (b\,l.2) - \frac{[d\,l.3]}{[d\,d.3]}\,(b\,d.2) & (c\,l.3) &= [c\,l.2] - \frac{[d\,l.3]}{[d\,d.3]}\,[c\,d.2] \end{aligned}$$

Ezen rövidített jelzések levezetése után a normál egyenlet ismereteinek értéke lesz:

39. . .
$$x = -\frac{(a\,l.3)}{[a\,a]} \qquad y = -\frac{(b\,l.3)}{[b\,b.1]} \qquad z = -\frac{(c\,l.3)}{[c\,c.2]} \qquad t = -\frac{[d\,l.3]}{[d\,d.3]}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Az egyenletrendszer *szimmetrikus* megoldása a következő táblázat szerint történik:

	[a a]	[a b]	[a c]	[a d]	[a l]					
		[b b]	[b c]	[b d]	[b l]					
			[c c]	[c d]	[c l]					
	I.			[d d]	[d l]					
					[l l]					
		[b b. 1]	[b c. 1]	[b d. 1]	[b l. 1]	[a b]				
			[c c. 1]	[c d. 1]	[c l. 1]	[a c]	II′			
		II.		[d d. 1]	[d l. 1]	[a d]				
					[l l. 1]	[a l]				
40.			[c c. 2]	[c d. 2]	[c l. 2]	(a c. 1)	[b c. 1]			
				[d d. 2]	[d l. 2]	(a d. 1)	[b d. 1]	III′		
			III.		[l l. 2]	(a l. 1)	[b l. 1]			
				[d d. 3]	[d l. 3]	(a d. 2)	(b d. 2)	[c d. 2]	IV′	
			IV.		[l l. 3]	(a l. 2)	(b l. 2)	[c l. 2]		
				V.	[l l. 4]	(a l. 3)	(b l. 3)	(c l. 3)	[d l. 3]	V′
						— [a a]	— [b b. 1]	— [c c. 2]	— [d d. 3]	
						x	y	z	t	

A számitás menete:

1. A normál egyenletek együtthatóit az I. szerint kiirjuk.

2. A *szokásos* redukálás utján képezzük a II. alatti redukált egyenleteket s függelékül megtoldjuk az első egyenlet [a b], [a c], . . . együtthatóival (II′).

3. A II′-vel megtoldott redukált egyenletrendszert a szokásos módon redukáljuk tovább, de a redukciót kiterjesztjük a függelék tagokra is, miáltal a (a c. 1), (a d. 1) . . . tagokat nyerjük.

4. A III. alatti redukált egyenletrendszert megtoldjuk a [b c. 1], [b d. 1] . . . tagokkal s folytatjuk a redukálást.

5. A redukció befejezése után nyert (a l. 3), (b l. 3), . . . tagokat, osztva sorjában (Lásd 39. képletet) — [a a], — [b b. 1], . . . értékekkel, megkapjuk az összes ismeretlenek értékét.

Az imént bemutatott elv szerint, tehát a *normál egyenletek szimmetrikus* megoldási módján végezzük el az 5. §. 35. alatti példa megoldását.

	+ 9.704 51	+ 9.051 93	— 8.451 28	— 9.178 10
+ 2.736 24	— 2.440 75	— 1.788 17	+ 1.187 52	+ 1.914 34
+ 544.8	— 275.9	— 61.4	+ 15.4	+ 82.1
	+ 434.7	+ 63.5	— 10.8	— 77.0
	— 139.7	— 31.1	+ 7.8	+ 41.6
	+ 295.0	+ 32.4	— 3.0	— 35.4
		+ 590.0	— 277.9	— 204.7
		— 6.9	+ 1.7	+ 9.3
	I. . . .	+ 583.1	— 276.2	— 195.4
			+ 183.2	+ 93.4
			— 0.4	— 2.3
			+ 182.8	+ 91.1
				+ 181.5
				— 12.4
				+ 169.1

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

	— 9.040 73	+ 8.007 30	+ 9.079 18	
+ 2.469 82	+ 1.510 55	— 0.477 12	— 1.549 00	— 2.440 75
+ 295.0	+ 32.4	— 3.0	— 35.4	— 275.9
	+ 583.1	— 276.2	— 195.4	— 61.4
	— 3.6	+ 0.3	+ 3.9	+ 30.3
	+ 579.5	— 275.9	— 191.5	— 31.1
		+ 182.8	+ 91.1	+ 15.4
		0.0	— 0.4	— 2.8
II. . . .		+ 182.8	+ 90.7	+ 12.6
			+ 169.1	+ 82.1
			— 4.2	— 33.1
			+ 164.9	+ 49.0

	+ 9.677 70	+ 9.519 12		
+ 2.763 05	— 2.440 75	— 2.281 27	— 1.492 76	+ 1.510 54
+ 579.5	— 275.9	— 191.5	— 31.1	+ 32.4
	+ 182.8	+ 90.7	+ 12.6	— 3.0
	— 131.4	— 91.2	— 14.8	+ 15.4
III. . . .	+ 51.4	— 0.5	— 2.2	+ 12.4
		+ 164.9	+ 49.0	— 35.4
		— 63.3	— 10.3	+ 10.7
		+ 101.6	+ 38.7	— 24.7

	+ 7.988 01				
+ 1.710 96	— 9.698 97	— 0.342 42	+ 1.093 42	— 2.440 75	
+ 51.4	— 0.5	— 2.2	+ 12.4	— 275.9	
	+ 101.6	— 38.7	— 24.7	— 191.5	
	0.0	0.0	+ 0.1	— 2.7	
	+ 101.6	+ 38.7	— 24.6	— 194.2	— 0.5 számláló
		— 544.8	— 295.0	— 579.5	— 51.4 nevező
IV. . . .	log számláló	+ 1.58 771	— 1.39 094	— 2.28 825	— 9.698 97
	log nevező	— 2.73 624	— 2.46 982	— 2.76 305	— 1.710 96
		— 8.85 147	+ 8.92 112	+ 9.52 520	+ 7.988 01
		— 0. 0 71	+ 0. 0 83	+ 0. 3 35	+ 0.010
		x	y	z	t

Amint láthatjuk a most nyert x, y, z, t értékek *teljesen* azonosak az 5. §. 36—39. egyenletekből nyert eredményekkel.

Ha logarléc használata lehetséges, akkor a normál egyenletek megfejtésének ez a módja feltétlenül előnyösen használható.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Az itt bemutatott eljárást fogjuk használni a *súlykoefficiensek egyenletének* megoldásánál.

Az előbbi példához csatlakozva határozzuk meg $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, $[\gamma\gamma]$, $[\delta\delta]$, illetve Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}, Q_{44} *súlykoefficienseket.*

E célból állítsuk fel a súlykoefficiensek egyenletét.

41. . .
$$\begin{aligned} 544.8\,Q_{11} - 275.9\,Q_{12} - 61.4\,Q_{13} + 15.4\,Q_{14} - 1 &= 0 \\ + 434.7\,Q_{12} + 63.5\,Q_{13} - 10.8\,Q_{14} + 0 &= 0 \\ + 590.0\,Q_{13} - 277.9\,Q_{14} + 0 &= 0 \\ + 183.2\,Q_{14} + 0 &= 0 \end{aligned}$$

42. . .
$$\begin{aligned} + 295.0\,Q_{22} + 32.4\,Q_{23} - 3.0\,Q_{24} - 1 &= 0 \\ + 583.1\,Q_{23} - 276.2\,Q_{24} + 0 &= 0 \\ + 182.8\,Q_{24} + 0 &= 0 \end{aligned}$$

43. . .
$$\begin{aligned} + 579.5\,Q_{33} - 275.9\,Q_{34} - 1 &= 0 \\ + 182.8\,Q_{34} + 0 &= 0 \end{aligned}$$

44. . .
$$+ 51.4\,Q_{44} - 1 = 0$$

A 41—44. egyenletek megoldása után megkapjuk Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}, Q_{44} súlykoefficienseket, esetleg $Q_{12} = Q_{21}$, $Q_{31} = Q_{31}$, . . . súlykoefficienseket is, ha azokra valami okból szükségünk lenne.

A 41—44. egyenleteket a normál egyenletek *szimmetrikus* megoldási módján fejtjük meg s miután rendszerint Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}, Q_{44} értékekre van csak szükségünk, a megoldást is csak ezekre terjesztjük ki:

45. .

	+ 9.70 451	+ 9.05 193	— 8.45 128	
+ 2.73 624	— 2.44 075	— 1.78 817	+ 1.18 752	— 0.00 000
+ 544.8	— 275.9	+ 61.4	+ 15.4	— 1
	+ 434.7	+ 63.5	— 10.8	0
	— 139.7	— 31.1	+ 7.8	— 0.51
		+ 590.0	— 277.9	0
		— 6.9	+ 1.7	— 0.11
			+ 183.2	0
			— 0.4	+ 0.03

46. . . . . .

	— 9.04 072	+ 8.00 730	+ 7.23 775	
+ 2.46 982	+ 1.51 055	— 0.47 712	— 9.70 757	— 2.44 075
+ 295.0	+ 32.4	— 3.0	— 0.51	— 275.9
	+ 583.1	— 276.2	— 0.11	— 61.4
	— 3.6	+ 0.3	+ 0.06	+ 30.30
		+ 182.8	+ 0.03	+ 15.4
		0.0	— 0.01	— 2.81
				— 1.0
				— 0·48

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

47. . . . .

	+ 9.67 770	+ 5.93 592	
+ 2.76 305	— 2.44 075	— 8.69 897	— 1.49 276
+ 579.5	— 275.9	— 0.05	— 31.10
	+ 182.8	+ 0.02	+ 12.59
	— 131.4	— 0.02	— 14.81
			— 1.48
			0.00

48. . . . . .

+ 1.71 096		— 0.34 635	
+ 51.4	0.0	— 2.22	
		+ 1.48	
		— 0.00	
		— 1.48	számláló
		— 544.8	nevező
	log számláló	0.17 026	
	log nevező	2.73 624	

num log 7.43 402 = + 0.00 272 = Q_{11}

49. . . . . .

	— 9.04 072	+ 8.00 730	
+ 2.46 982	+ 1.51 055	— 0.47 712	— 0.00 000
+ 295.0	+ 32.4	— 3.0	— 1.00
	+ 583.1	— 276.2	0.00
	— 3.6	+ 0.3	+ 0.11
		+ 182.8	0.00
		0.0	— 0.01

50. . . . . .

	+ 9.67 770	— 6.27 834	
+ 2.76 305	— 2.44 075	+ 9.04 139	+ 1.51 054
+ 579.5	— 275.9	+ 0.11	+ 32.4
	+ 182.8	— 0.01	— 3.0
	— 131.4	+ 0.05	+ 15.43
			— 1.00
			— 0.01

51. . . . . .

	— 6.89 110	
+ 1.71 096	+ 8.60 206	+ 1.09.447
+ 51.4	+ 0.04	+ 12.43
		— 1.01
		— 0.01
	számláló	— 1.02
	nevező	— 295.0
	log számláló	— 0.00 860
	log nevező	— 2.46 982

num. log. + 7.53 878 = + 0.00 346 = Q_{22}

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

52. .

	+ 9.67 770	
+ 2.76 305	— 2.44 075	— 0.00 000
+ 579.5	— 275.9	— 1.00
	+ 182.8	— 0.00
	— 131.4	— 0.48

53. .

	+ 7.97 028	
+ 1.71 096	— 9.68 124	— 2.44 075
+ 51.4	— 0.48	— 275.9
		— 1.00
		— 2.58
	számláló	— 3.58
	nevező	— 579.5
	log. számláló	— 0.55 388
	log. nevező	— 2.76 305

num. log. $+ 7.79\,083 = + 0\text{-}00\,618 = Q_{33}$

54. . $+ 51.4\, Q_{44} - 1.0 = 0$

$Q_{44} = + 0.019\,46$

Végeredmény:

$Q_{11} = + 0.00\,272 = [\alpha\,\alpha]$

$Q_{22} = + 0.00\,346 = [\beta\,\beta]$

$Q_{33} = + 0.00\,618 = [\gamma\,\gamma]$

$Q_{44} = + 0.01\,946 = [\delta\,\delta]$

Most már módunkban van a kiegyenlített értékek középhibáinak számítását elvégezni:

$$\mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{g_x}} = \mu\sqrt{Q_{11}} \qquad \mu_y = \frac{\mu}{\sqrt{g_y}} = \mu\sqrt{Q_{22}}$$

$$\mu_z = \frac{\mu}{\sqrt{g_z}} = \mu\sqrt{Q_{33}} \qquad \mu_t = \frac{\mu}{\sqrt{g_t}} = \mu\sqrt{Q_{44}}$$

3. Függvényértékek középhibájának számítása a kiegyenlített értékek alapján.

Igen gyakran előfordul az az eset, hogy a *kiegyenlített értékekből számított függvény értékek* középhibáit is ismerni akarjuk.

Például a kiegyenlítés adta P_1, P_2 pontok (x_1, y_1), (x_2, y_2) koordinátáiból számított síkhossz (d) középhibáját akarjuk ismerni. (μ_d).

A kiegyenlitő számításból ismeretesek μ_{x_1}, μ_{x_2}, μ_{y_1}, μ_{y_2} középhiba értékek.

Tegyük fel, hogy d távolság az x_1, y_1, x_2, y_2, kiegyenlített koordináták lineáris függvény alakjában van kifejezve:

55. . . . $d = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 y_1 + A_4 y_2 = F(x_1, y_1, x_2, y_2)$

ahol μ_{x_1}, μ_{x_2}, μ_{y_1}, μ_{y_2} középhibák ismeretesek.

A függvényértékek középhiba számításának ismert módját alkalmazva:

56. . . . . $\mu_d^2 = A_1^2\,\mu_{x_1}^2 + A_2^2\,\mu_{x_2}^2 + A_3^2\,\mu_{y_1}^2 + A_4^2\,\mu_{y_2}^2$

Ha ezen a módon végeznők a számítást, *teljesen hibás* eredményt kapnánk, mert a középhiba számítás fenti módja *csak egymástól független mérési eredményekből* számított középhibákra áll. Ezt a követelményt pedig nem elégitik ki a kiegyenlítés adta középhibák, mert azok nem egymástól független mérési eredmények középhibái, hanem a *kiegyenlített* értékek középhibái. Amint e §. 19. képletében láttuk, a kiegyenlített értékek a mérési eredmények lineáris függvényeként állíthatók elő:

57. . . . . $x = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \ldots$

$y = \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \ldots$

. . . . . .

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ha ismernők l_1, l_2, . . . mérési eredmények *valódi hibáit* (ε_1, ε_2, . . .), akkor

58. . . . . $\varepsilon_x = \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \ldots$

$\varepsilon_y = \beta_1 \varepsilon_1 + \beta_2 \varepsilon_2 + \ldots$

. . . . . .

59. . . . . s így $\varepsilon_d = A_1 \varepsilon_x + A_2 \varepsilon_y + \ldots$

Ezt négyzetre emelve:

60a. . . . . $\varepsilon_d^2 = A_1^2 \varepsilon_x^2 + A_2^2 \varepsilon_y^2 + 2 A_1 A_2 \varepsilon_x \varepsilon_y + \ldots$

Az itt szereplő ε_d, ε_x, ε_y, . . . valódi hibák ismeretlenek s vesszük helyettük, azok legmegbizhatóbb értékeit, tehát a *középhibákat:*

$$\varepsilon_d^2 = \mu_d^2, \qquad \varepsilon_x^2 = \mu_x^2, \qquad \varepsilon_y^2 = \mu_y^2, \ldots$$

$\varepsilon_x \varepsilon_y = \alpha_1 \beta_1 \varepsilon_1^2 + \alpha_2 \beta_2 \varepsilon_2^2 + \alpha_1 \beta_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \ldots$ Ez következik az 58. képletből.

Az ε_1, ε_2 valódi hibák szintén ismeretlenek s vesszük helyettük μ^2 középhibát ($\mu =$ az l_1, l_2, . . . mérési eredmények középhibája); a kettős szorzatokat pedig elhanyagolhatjuk, mert a mérési eredményeket csak véletlen természetű hibák terhelik, amely esetben a pozitiv és negativ hibák egyenlő számosságúak s így szorzatuk összege = 0.

Ezeket behelyettesítve:

60b. . . . $\mu_d^2 = A_1^2 \mu_x^2 + A_2^2 \mu_y^2 + 2 A_1 A_2 \mu_x \mu_y + \ldots$

$\mu_d^2 = A_1^2 \mu_x^2 + A_2^2 \mu_y^2 + 2 A_1 A_2 [\alpha\beta] \mu^2 + \ldots$

de $\mu_x = [\alpha\alpha] \mu^2$; $\mu_y^2 = [\beta\beta] \mu^2$ s így

$\mu_d^2 = \mu^2 \, (A_1^2 [\alpha\alpha] + A_2^2 [\beta\beta] + 2 A_1 A_2 [\alpha\beta] + \ldots)$

A $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$-ról már előbb láttuk, hogy:

$$[\alpha\alpha] = \frac{1}{[a\,a.\,1]} \qquad [\beta\beta] = \frac{1}{[b\,b.\,1]}$$

s analóg módon $[\alpha\beta] = \dfrac{1}{[a\,b.\,1]}$

Ezeket behelyettesítve:

61. . . . $\mu_d^2 = \mu^2 \left(\dfrac{A_1^2}{[a\,a.\,1.]} + \dfrac{A_2^2}{[b\,b.\,1]} + 2 \dfrac{A_1 A_2}{[a\,b.\,1]} + \ldots \right)$

vagy pedig $\mu_d = \dfrac{\mu}{\sqrt{g_d}}$ ahol $\dfrac{1}{g_d} = \dfrac{A_1^2}{[a\,a.\,1]} + \dfrac{A_2^2}{[b\,b.\,1]} + 2 \dfrac{A_1 A_2}{[a\,b.\,1]} + \ldots$

$[\alpha\alpha] = Q_{11}$

$[\alpha\beta] = Q_{12}$ $\qquad$ $[\beta\beta] = Q_{22}$

$[\alpha\gamma] = Q_{13}$ $\qquad$ $[\beta\gamma] = Q_{23}$ $\qquad$ $[\gamma\gamma] = Q_{33}$

$$62. \frac{1}{g_d} = \left\{ \begin{array}{r} A_1^2 [\alpha\alpha] + 2 A_1 A_2 [\alpha\beta] + 2 A_1 A_3 [\alpha\gamma] + \\ + A_2^2 [\beta\beta] \quad + 2 A_2 A_3 [\beta\gamma] + \\ + A_3^2 [\gamma\gamma] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{r} A_1^2 Q_{11} + 2 A_1 A_2 Q_{12} + 2 A_1 A_3 Q_{13} + \\ + A_2^2 Q_{22} + 2 A_2 A_3 Q_{23} + \\ + A_3^2 Q_{33} \end{array} \right|$$

Ez a képlet alkalmas a *számított* függvényérték *súlyának* a meghatározására, bár nem a *legkényelmesebb.*

Hangsúlyozzuk, hogy A_1, A_2, A_3 együtthatók a *kiegyenlített értékekből számított és lineárissá tett függvényérték együtthatóit jelentik.*

A 62. egyenletet így is írhatjuk:

$$63. \quad \frac{1}{g_d} = \left\{ \begin{array}{l} A_1 (A_1 Q_{11} + A_2 Q_{12} + A_3 Q_{13}) + \\ + A_2 (A_1 Q_{21} + A_2 Q_{22} + A_3 Q_{23}) + \\ + A_3 (A_1 Q_{31} + A_3 Q_{32} + A_3 Q_{33}) \end{array} \right\} = A_1 q_1 + A_2 q_2 + A_3 q_3 = [A\,q]$$

ahol $q_1 = A_1 Q_{11} + A_2 Q_{12} + A_3 Q_{13}$

64. . . . . $q_2 = A_1 Q_{21} + A_2 Q_{22} + A_3 Q_{23}$

$q_3 = A_1 Q_{31} + A_2 Q_{32} + A_3 Q_{33}$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ezek után tehát a számított függvényérték súlyának meghatározásához pusztán $q_1\ q_2\ q_3$ értékekre lesz szükségünk.

A 64. egyenleteket megszorozva $[a\,a]$, $[a\,b]$ ... értékekkel, rövidítés után a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} &\underline{[a\,a]}\,q_1 + [a\,b]\,q_2 + [a\,c]\,q_3 = A_1 \\ 65.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ &+ \underline{[b\,b]}\,q_2 + [b\,c]\,q_3 = A_2 \\ &+ \underline{[c\,c]}\,q_3 = A_3 \end{aligned}$$

Ebből az egyenletből számított q_1, q_2, q_3 értékeket a 63. képletbe helyettesítve, nyerjük a számított függvényérték súlyát.

Egy lényegesen egyszerűbb módja a számításnak a következő képlet szerint végezhető:

$$66.\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{1}{g_d} = \frac{A_1^{\,2}}{[a\,a]} + \frac{[A_2\,1]}{[b\,b.1]} + \frac{[A_3.2]}{[c\,c.2]}$$

Összehasonlítva ezt a 13. oldalon lévő 17. képlettel, azt találjuk, hogy a $[l\,l]$ tag elhagyása után a többi tagot a normál egyenletek maradék tagjaként számíthatjuk; de meg kell jegyeznünk, hogy a maradék tag negativ előjellel fogja adni az $\frac{1}{g_d}$ értéket, ami az elimináció következménye.

Az itt elmondottak alapján igen egyszerű és könnyű a kiegyenlített értékekből számított függvényértékek súlyának meghatározása.

A számítás menete lesz:

1. A számítandó mennyiséget a kiegyenlített értékek lineáris függvényeként állítjuk elő, tehát $d = A_1 x + A_2 y + \ldots$. alakban.

2. A kiegyenlítés adta *eredeti normál* egyenletet újra megoldjuk, de azzal a módosítással, hogy a $[a\,l]$, $[b\,l]$, ... abszolut tagok helyébe sorjában az A_1, A_2, ... együtthatókat helyettesítjük a lineárissá tett függvényalakból.

3. Akár a 65. egyenletből nyert q_1, q_2, ... értékeknek a 63. képletbe való helyettesítésével, akár a 66. képlet segélyével, mely utóbbit közvetetlenül mint a normál egyenlet maradék tagját kapjuk, módunkban lesz a függvényérték *súlyának reciprók* értékét számítanunk.

4. $\mu_d = \frac{\mu}{\sqrt{g_d}}$ képlet alapján számíthatjuk a függvényérték várható középhibáját.

μ alatt a kiegyenlítő számítás adta egység súlyú mérési eredmény várható középhibáját értjük.

Megjegyzés. Adott esetekben célszerű a *súlykoefficiensek egyenleteit* (lásd e §. 41—44. egyenleteit) megoldani s akkor a függvényérték súlya a 62. képletből számítható legegyszerűbb módon.

7. §. Példák.

Az előbbi §-okban tárgyalt általános elvek alkalmazásával kíséreljük meg egyes jellegzetes példák teljes kiszámítását.

A számítás menete minden esetben a $[\lambda\lambda]$ illetve $[g\lambda\lambda]$ minimum feltételének kielégítésével a következő lesz:

1. Felállítjuk és lineárissá tesszük a feltételi egyenleteket.
2. Felállítjuk és megoldjuk a normál egyenleteket.
3. Középhiba számítást végzünk.

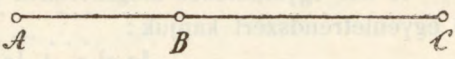
1. példa.

Az A—C hossz meghatározása végett közvetlen hosszméréseket végzünk; a méréseket ugyanazon eszközzel, azonos körülmények között, ugyanazon egyén végzi s eltekintünk a különböző hosszaknak súlyokként való figyelembe vételétől.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A mérési eredmények:

$A - B = 218.123\ m = l_1, g = 1$
$B - A = 218.133\ \ = l_2, g = 1$
$B - C = 300.296\ \ = l_3, g = 1$
$C - B = 300.274\ \ = l_4, g = 1$
$A - C = 518.420\ \ = l_5, g = 1$
$C - A = 518.400\ \ = l_6, g = 1$



6. ábra.

A kiegyenlítő számítást a *közvetítő mérések* kiegyenlítéseként óhajtván végezni, a mérési eredményeket egymástól független ismeretlenek értékrendszereként kell előállítanunk.

Az $l_1, l_2, \ldots$ egymástól független mérési eredményekről feltesszük, hogy csak zérus középértékű hibákat tartalmaznak; kiegyenlített értékeik legyenek $L_1, L_2, \ldots$,

$$\text{úgy hogy } \begin{aligned} l_1 + \lambda_1 &= L_1 \\ l_2 + \lambda_2 &= L_2 \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Egymástól független ismeretlenekként válasszuk a következő értékeket:

$$L_1 = x = l_1 + \lambda_1$$
$$1.\ a. \ldots\ldots L_3 = y = l_3 + \lambda_3$$

Ezen megállapodások után a feltételi egyenletek lesznek:

1 b . .

$l_1 + \lambda_1 = x$	$\lambda_1 = +x \quad . - l_1$	$\lambda_1 = +x \quad . - 218.123$
$l_2 + \lambda_2 = x$	$\lambda_2 = +x \quad . - l_2$	$\lambda_2 = +x \quad . - 218.133$
$l_3 + \lambda_3 = y$	$\lambda_3 = \quad . + y - l_3$	$\lambda_3 = \quad . + y - 300.296$
$l_4 + \lambda_4 = y$	$\lambda_4 = \quad . + y - l_4$	$\lambda_4 = \quad . + y - 300.274$
$l_5 + \lambda_5 = x + y$	$\lambda_5 = +x + y - l_5$	$\lambda_5 = +x + y - 518.420$
$l_6 + \lambda_6 = x + y$	$\lambda_6 = +x + y - l_6$	$\lambda_6 = +x + y - 518.400$

Megállapítjuk, hogy a feltételi egyenletek száma egyenlő a mérések számával.

Az 1 b) alatti feltételi egyenletekből képezhetjük a szokásos módon a normál egyenleteket. Azonban láthatjuk, hogy a $[a\,l]$, $[b\,l]$, $[l\,l]$ tagok, valamint a normál egyenlet adta x, y értékek nagy számok lesznek s a kívánt élesség elérése végett a normál egyenlet megoldását igen élesen kell végeznünk.

Hogy ezt elkerülhessük s hogy kényelmesebb legyen a számítás az x, y értékek *előleges értékeit* vezetjük a kiegyenlítésbe (x), (y); ezáltal a kiegyenlítés feladatát azon Δx, Δy értékek meghatározása képezi, amelyekkel *megjavítva* az előleges értékeket, a kiegyenlített értékeket kapjuk, vagyis

$$x = (x) + \Delta x$$
$$y = (y) + \Delta y$$

Ezeket az értékeket behelyettesítve az 1. alatti feltételi egyenletekbe:

$\lambda_1 = +\Delta x \quad . \quad +((x) \quad . \quad -218.123)$	$\lambda_1 = +\Delta x \quad . \quad +\omega_1$
$\lambda_2 = +\Delta x \quad . \quad +((x) \quad . \quad -218.133)$	$\lambda_2 = +\Delta x \quad . \quad +\omega_2$
$\lambda_3 = \quad . \quad +\Delta y + (\quad (y) - 300.296)$	$\lambda_3 = \quad . \quad +\Delta y + \omega_3$
$\lambda_4 = \quad . \quad +\Delta y + (\quad (y) - 300.274)$	$\lambda_4 = \quad . \quad +\Delta y + \omega_4$
$\lambda_5 = +\Delta x + \Delta y + ((x) + (y) - 518.420)$	$\lambda_5 = +\Delta x + \Delta y + \omega_5$
$\lambda_6 = +\Delta x + \Delta y + ((x) + (y) - 518.400)$	$\lambda_6 = +\Delta x + \Delta y + \omega_6$

Legyen: $(x) = 218{\cdot}128\ m$, $(y) = 300.280\ m$, akkor $(x) + (y) = 518.408$

$\omega_1 = +\ 5\ mm$
$\omega_2 = -\ 5\ \ "$
$\omega_3 = -\ 16\ "$
$\omega_4 = +\ 6\ \ "$
$\omega_5 = -\ 12\ "$
$\omega_6 = +\ 8\ \ "$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

S így a feltételi egyenletek végleges alakja lesz:

2. . . . .
$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= +\Delta x \quad . \quad + 5 \\
\lambda_2 &= +\Delta x \quad . \quad - 5 \\
\lambda_3 &= \quad . \quad +\Delta y - 16 \\
\lambda_4 &= \quad . \quad +\Delta y + 6 \\
\lambda_5 &= +\Delta x +\Delta y - 12 \\
\lambda_6 &= +\Delta x +\Delta y + 8
\end{aligned}$$

A normál egyenlet együtthatói lesznek:

$$[a\,a] = +4 \qquad [a\,b] = +2 \qquad [a\,\omega] = -4$$
$$[b\,b] = +4 \qquad [b\,\omega] = -14$$
$$[\omega\,\omega] = +550$$

A normál egyenlet lesz:

$$\begin{aligned}
+\underline{4}\,\Delta x + 2\,\Delta y - \quad 4 &= 0 \\
+\underline{4}\,\Delta x - \quad 14 &= 0 \\
+\underline{550} &= 0
\end{aligned}$$

A normál egyenletek megoldása:

			log	num.
	− 9.698 97	+ 0.000 00	− 0.000 00	− 1.0
+ 0.602 06	+ 0.301 03	− 0.602 06	+ 0.301 03	+ 2.0
+ 4	+ 2	− 4	− 0.602 06	− 4.0
	+ 4	− 14		
	− 1	+ 2		
		+ 550		
		− 4		
		+ 0.602 06		
	+ 0.477 12	− 1.079 18	− 1.681 24	− 48.0
	+ 3	− 12		
		+ 546		
		− 48		

$[\omega\,\omega.2] = +498$

$\log \Delta y = +0.602\,06$

$\Delta y = +4.00$

3. . . .

			log	num.
	− 9.698 97	+ 0.544 07	− 0.000 00	− 1.0
+ 0.602 06	+ 0.301 03	− 1.146 13	+ 0.845 10	+ 7.0
+ 4	+ 2	− 14	− 1.690 20	− 49.0
	+ 4	− 4		
	− 1	+ 7		
		+ 550		
		− 49		
		− 0.000 00		
	+ 0.477 12	+ 0.477 12	− 0.477 12	− 3
	+ 3	+ 3		
		+ 501		
		− 3		

$[\omega\,\omega.2] = +498$

$\log \Delta x = -0.00\,000$

$\Delta x = -1.00$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Miután az egymástól függetlenül megoldott normál egyenletek maradék tagjai $[\omega\omega.2]$ egyenlők, tehát a *normál egyenletek megoldása helyes.*

A normál egyenletek adta Δx, Δy javításokat az *előleges* értékekhez adva, kapjuk a kiegyenlített értékeket:

$$
\begin{aligned}
y &= (y) + \Delta y = 300.280 + 0.004 = 300.284\ m \\
4.\ \ldots \quad x &= (x) + \Delta x = 218.128 - 0.001 = 218.127\ „ \\
x + y &= (x) + (y) + \Delta x + \Delta y = 518.408 - 0.001 + 0.004 = 518.411\ m
\end{aligned}
$$

A 2. alatti feltételi egyenletekből számítva a λ javításokat;

$$
\begin{array}{llll|l}
\lambda_1 = -1 + 5 & & = +4 & & \lambda_1^2 = 16 \\
\lambda_2 = -1 - 5 & & = -6 & & \lambda_2^2 = 36 \\
\lambda_3 = +4 - 16 & & = -12 & & \lambda_3^2 = 144 \\
5.\ \ldots \quad \lambda_4 = +4 + 6 & & = +10 & & \lambda_4^2 = 100 \\
\lambda_5 = -1 + 4 - 12 & & = -9 & & \lambda_5^2 = 81 \\
\lambda_6 = -1 + 4 + 8 & & = +11 & & \lambda_6^2 = 121 \\
\hline
 & & & & [\lambda\lambda] = 498
\end{array}
$$

A feltételi egyenletekből képezett javítások négyzetösszege $[\lambda\lambda] = 498$; a normál egyenletek maradék tagja $[\omega\omega.2] = 498$, tehát *a normál egyenletek felállítása* is helyes volt.

Most még a *feltételi egyenletek* (Lásd 2. képlet alatt) *felállítására kell ellenőrzésről* gondoskodnunk, jelesen a feltételi egyenletek *abszolut* tagjaira vonatkozólag.

Az 1 a) alatti összefüggésből következik, hogy

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= x - l_1 = 218.127 - 218.123 = +\ 4\ mm. \\
\lambda_2 &= x - l_2 = 218.127 - 218.133 = -\ 6\ „ \\
\lambda_3 &= y - l_3 = 300.284 - 300.296 = -12\ „ \\
6.\ \ldots \quad \lambda_4 &= y - l_4 = 300.284 - 300.274 = +10\ „ \\
\lambda_5 &= x + y - l_5 = 518.411 - 518.420 = -\ 9\ „ \\
\lambda_6 &= x + y - l_6 = 518.411 - 518.400 = +11\ „
\end{aligned}
$$

A most kapott javítások *szigorúan* egyeznek a *feltételi egyenletekből* nyert javításokkal (Lásd 5. alatt) s így minden irányban meggyőződtünk eljárásunk helyességéről.

Az 5. alatti számítást el is hagyhattuk volna, mert ha a 6. alatt nyert javítások négyzetösszege *egyezik* a normál egyenlet maradék tagjával, ez *egyetemes* ellenőrzés minden irányban. Ennek azonban egy hátránya van, hogy t. i. az ellenőrzés csak a kiegyenlítés *végén* adódik ki s ha valahol hibát követtünk el, az egész eljárást meg kell ismételnünk. Úgy hogy ajánlatosabbnak tartjuk, esetleg több munka árán is, az összes szóbajöhető ellenőrzések elvégzését.

Hátra van még a *középhiba számítás.*

Az egységsúlyú mérési eredmény várható középhibája

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{f}} = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{m-n}} = \sqrt{\frac{498}{6-2}} = \pm\ 11.1 \text{ milliméter}$$

Az egységsúlyú mérési eredmény a jelen esetben az egyik vonaldarab egyszeri mérése.

A *kiegyenlített* értékek várható középhibája:

$$\mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{g_x}} = \frac{\mu}{\sqrt{[aa.1]}} = \frac{11.1}{\sqrt{3}} = \pm\ 6.4 \text{ milliméter}$$

$$\mu_y = \frac{\mu}{\sqrt{g_y}} = \frac{\mu}{\sqrt{[bb.1]}} = \frac{11.1}{\sqrt{3}} = \pm\ 6.4 \text{ milliméter}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Szükségünk van még a kiegyenlített $A - C$ bázishossz várható középhibájára is.

$$A\,C = x + y = 518.411\ m.$$

A kiegyenlítés adta μ_x és μ_y ismeretesek s így a *kiegyenlített értékekből számított függvényérték középhibája* (μ_{x+y}) a 33. oldal 61. képletéből számítva:

$$\mu^2_{x+y} = \mu^2 \left(\frac{1}{[aa.1]} + \frac{1}{[bb.1]} + \frac{2}{[ab.1]} \right)$$

$$A\ [ab.1] = [ab] - \frac{[aa]}{[ab]}\,[bb] = -6$$

$$\mu_{x+y} = \mu \sqrt{\frac{1}{[aa.1]} + \frac{1}{[bb.1]} + \frac{2}{[ab.1[}} = \mu \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{6}} = \frac{\mu}{\sqrt{3}}$$

$$\mu_{x+y} = \pm \frac{11.1}{\sqrt{3}} = \pm\ 6.4 \text{ milliméter.}$$

Ezt az eredményt kellett is kapnunk, mert az $A\,C$ mérésére végzett l_5 és l_6 mérések, épen olyan egységsúlyú mérési eredmények, mint akár az $A\,B$, akár a $B\,C$ mérési eredmények.

A jelen esetben felesleges volt a μ_{x+y} érték számítása, de a teljesség kedvéért szükségesnek tartottuk ezt is elvégezni, főként a begyakorlás szempontjából.

A $[ab.1]$ meghatározását végezhettük volna a következő egyenletből

$$\begin{aligned} +\underline{4}\,Q_{11} + 2\,Q_{12} - 1 &= 0 \\ +\underline{4}\,Q_{12} + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Ebből az egyenletből nyert $Q_{12} = \dfrac{1}{[ab.1]}$

2. példa.

Az $A-C$ hossz meghatározása végett hosszméréseket végzünk. Feltételezzük, hogy az egyes mért hosszak teljesen azonos körülmények között mérettek. (Lásd 6. ábra).

A mérési eredmények:

1. . . . . $\left\{ \begin{array}{l} A - B = 218.123\ m = l_1 \\ B - A = 218.133\ \,, = l_2 \\ B - C = 300.296\ \,, = l_3 \\ C - B = 300.274\ \,, = l_4 \\ A - C = 518.420\ \,, = l_5 \\ C - A = 518.400\ \,, = l_6 \end{array} \right.$

Meghatározandó a mérési eredmények alapján $A-C$ bázishossz legvalószínűbb értéke és várható középhibája.

A feladat megoldását a közvetítő mérések kiegyenlítéseként akarjuk végezni, egymástól független ismeretlenekkel.

Ezen példát már előbb megoldottuk, de eltekintettünk a különböző nagyságú hosszaknak súlyokként való figyelembe vételétől.

Igen egyszerű megfontolások mutatják, hogy ugyanazon körülmények között rövidebb hosszakat nagyobb pontossággal mérünk, mint hosszabb távolságokat.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ha L_{km} távolságot közvetlenül mérünk, akkor n-szer kell a h hosszúságú mérőrúdjainkat, vagy mérő szalagunkat egymás mellé illesztenünk. Anélkül, hogy a közvetetlen hosszmérésnél fellépő hibaforrásokat részletesen tárgyalnók, tegyük fel, hogy a mérőegységünk egyszeri illesztésénél vagy lefektetésénél fellépő középteljeshiba legyen μ, akkor az n szakaszban mért L távolság középteljeshibája

$$\mu_L = \sqrt{\mu^2 + \mu^2 + \ldots} \ (n\text{-szer}) = \mu\sqrt{n} \ ; \ L_{km} = n.\ h \ ; \text{ legyen } \begin{cases} h = 1 \\ \mu = 1 \end{cases} \text{ akkor } \mu_L = \sqrt{L_{km}}$$

Miután $g_i = \frac{c}{\mu_i^2}$; $g_L = \frac{c}{L_{km}}$ vagyis közvetetlen hosszméréseknél a távolság reciprók értéke a súly.

A mi esetünkben tehát:

$$g_1 = \frac{c}{0.22} = g_2 = 0.45$$

$$g_3 = \frac{c}{0.30} = g_4 = 0.33$$

$$g_5 = \frac{c}{0.52} = g_6 = 0.19$$

c-t 0.1 km-nek választottuk, vagyis egységsúlyú eredmény a 100 m hosszúságú vonaldarab mérése.

A feltételi egyenletek lesznek mint előbb 2. alatt:

$$2. \quad \begin{cases} \lambda_1 = +\Delta x \ . \ +5 & g_1 = 0.45 \\ \lambda_2 = +\Delta x \ . \ -5 & g_2 = 0.45 \\ \lambda_3 = \ . \ +\Delta y - 16 \ . & g_3 = 0.33 \\ \lambda_4 = \ . \ +\Delta y + 6 & g_4 = 0.33 \\ \lambda_5 = +\Delta x + \Delta y - 12 & g_5 = 0.19 \\ \lambda_6 = +\Delta x + \Delta y + 8 & g_6 = 0.19 \end{cases}$$

A normál egyenlet együtthatói lesznek:

$$[aag] = +1.28 \qquad [abg] = +0.38 \qquad [awg] = -0.76$$
$$[bbg] = +1.04 \qquad [bwg] - 4.02$$
$$[wwg] = +158.38$$

A normál egyenlet lesz:

$$+\underline{1.28}\,\Delta x + 0.38\,\Delta y - 0.76 = 0$$
$$+\underline{1.04}\,\Delta y - 4.02 = 0$$
$$+\underline{158.38} = 0$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A normál egyenletek megoldása:

− 9.89279	− 9.47257	+ 9.77360		
+ 0.10721	+ 9.57978	− 9.88081	log.	numerus
+ 1.28	+ 0.38	− 0.76	− 9.05235	− 0.11
	+ 1.04	− 4.02	+ 9.35338	+ 0.23
	− 0.11	+ 0.23	− 9.65441	− 0.45
		+ 158.38		
		− 0.45		
	− 0.03152	+ 0.61016		
	+ 9.96848	− 0.57864		
	+ 0.93	− 3.79	− 1.18880	− 15.45
		+ 157.93		
		− 15.45		
	[ω w g. 2] =	+ 142.48		
	log Δ y =	+ 0.61016		
	Δ y =	+ 4.08		

3. . . . .

− 9.98297	− 9.56275	+ 0.58720		
+ 0.01703	+ 9.57978	− 0.60423	log.	numerus
+ 1.04	+ 0.38	− 4.02	− 9.14253	− 0.14
	+ 1.28	− 0.76	+ 0.16698	+ 1.47
	− 0 14	+ 1.47	− 1 19143	− 15.54
		+ 158.38		
		− 15.54		
	− 9.94310	− 9.79436		
	+ 0.05690	+ 9.85126		
	+ 1.14	+ 0.71	− 9.64562	− 0.44
		+ 142.84		
		− 0.44		
	[w w g. 2] =	142.40		
	log Δ x =	− 9.79436		
	Δ x =	− 0.62		

A kiegyenlített értékek lesznek

4. . .
$$\begin{cases} x = (x) + \Delta x = 218.128 - 0.0006 = 218.127_4 \text{ m.} \\ y = (y) + \Delta y = 300.280 + 0.0041 = 300.284_1 \text{ m.} \\ x + y = (x) + (y) + \Delta x + \Delta y = 518.408 - 0.0006 + 0.0041 = 518.411_5 \text{ m.} \end{cases}$$

A 2. alatti feltételi egyenletekből számítva a javításokat:

5. . . . . .
$$\begin{cases} \lambda_1 = -0.6 \quad . \quad + 5 = + 4.4 \\ \lambda_2 = -0.6 \quad . \quad - 5 = - 5.6 \\ \lambda_3 = \quad . \quad + 4.1 - 16 = - 11.9 \\ \lambda_4 = \quad . \quad + 4.1 + 6 = + 10.1 \\ \lambda_5 = -0.6 + 4.1 - 12 = - 8.5 \\ \lambda_6 = -0.6 + 4.1 + 8 = + 11.5 \end{cases}$$

A normál egyenletek felállításának ellenőrzése végett számítsuk ki a feltételi egyenletek adta javításokból $[\lambda \lambda g]$ négyzet összeget:

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

5 a . .

$\lambda_1 = +\ 4.4$	$g_1 = 0.45$	$\lambda_1^2 = 19.36$	$g_1 \lambda_1^2 = 8.71$
$\lambda_2 = -\ 5.6$	$g_2 = 0.45$	$\lambda_2^2 = 31.36$	$g_2 \lambda_2^2 = 14.11$
$\lambda_3 = -\ 11.9$	$g_3 = 0.33$	$\lambda_3^2 = 141.61$	$g_3 \lambda_3^2 = 46.73$
$\lambda_4 = +\ 10.1$	$g_4 = 0.33$	$\lambda_4^2 = 102.01$	$g_4 \lambda_4^2 = 33.66$
$\lambda_5 = -\ 8.5$	$g_5 = 0.19$	$\lambda_5^2 = 72.25$	$g_5 \lambda_5^2 = 13.73$
$\lambda_6 = +\ 11.5$	$g_6 = 0.19$	$\lambda_6^2 = 132.25$	$g_6 \lambda_6^2 = 25.13$
			$[g\lambda\lambda] = 142.07$

Miután $[ww.2] = [g\lambda\lambda]$ az eddigi műveleteink helyesek voltak.

A $[ww.2]$ és $[g\lambda\lambda]$ nem *teljesen* egyeznek, aminek oka a számítási elhanyagolásokban van. De amikor, mint itt is, az eltérés csak egy pár egységet tesz ki a tizedes számjegyekben, a két eredmény teljesen azonosnak tekinthető.

A feltételi egyenletek abszolút tagjai képzésének ellenőrzése végett képezzük még a javításokat a következő módon:

6. . . .

$$\begin{cases} \lambda_1 = x - l_1 & = 218.127_4 - 218.123 = +\ 4.4 \\ \lambda_2 = x - l_2 & = 218.127_4 - 218.133 = -\ 5.6 \\ \lambda_3 = y - l_3 & = 300.284_1 - 300.296 = -\ 11.9 \\ \lambda_4 = y - l_4 & = 300.284_1 - 300.274 = +\ 10.1 \\ \lambda_5 = +x + y - l_5 & = 518.411_5 - 518.420 = -\ 8.5 \\ \lambda_6 = +x + y - l_6 & = 518.411_5 - 518.400 = +\ 11.5 \end{cases}$$

A most nyert javítások szigorúan egyeznek az 5. alatti javításokkal s így a kiegyenlítésben hibát nem követtünk el.

Hátra van még a középhiba számítás.

A súlyegység várható középhibája $\mu = \sqrt{\frac{[g\lambda\lambda]}{f}} = \sqrt{\frac{142.07}{4}} = \pm\ 5.96$ mm.

Tehát egy 100 m hosszúságú vonaldarab mérésének várható középhibája

$$\mu_{0.1\ \mathrm{km}} = \pm\ 5.96 \text{ millimeter}$$

$$\mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{g_x}} = \frac{5.96}{\sqrt{1.14}} = \pm\ 5.6 \text{ millimeter}$$

$$\mu_y = \frac{\mu}{\sqrt{g_y}} = \frac{5.96}{\sqrt{0.93}} = \pm\ 6.1 \text{ millimeter}$$

Az $A - C = x + y$ kiegyenlített bázishossz középhibáját az $F = x + y$ függvényalakból kell számítanunk a μ_x, μ_y segélyével; de figyelemmel kell lennünk arra, hogy μ_x, μ_y várható középhibák egymástól nem függetlenek.

A függvényértékek középhibaszámításának előbb ismertetett módját alkalmazva:

$$\mu^2_{\ x+y} = \mu^2 \left(\frac{1}{[aa.1]} + \frac{1}{[bb.1]} + \frac{2}{[ab.1]} \right)$$

ahol $\frac{1}{[ab.1]} = Q_{12}$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

s ez meghatározható a következő normál egyenletből:

$$+ \underline{1.28}\ Q_{11} + 0.38\ Q_{12} - 1 = 0$$
$$+ \underline{1.04}\ Q_{12} - 0 = 0$$

$$\text{Innen } Q_{12} = -\frac{1}{3.13}$$

$$[a\,b.\,1] = -3.13$$

$$\mu_{x+y} = \mu \sqrt{\frac{1}{[a\,a.\,1]} + \frac{1}{[b\,b.\,1]} + \frac{2}{[a\,b.\,1]}} = \mu \sqrt{\frac{1}{1.14} + \frac{1}{0.93} - \frac{2}{3.13}} = 6.79 \text{ milliméter.}$$

Végeredmény:

$x = 218.127_4$ m.	$\mu_x = \pm 5.6$	milliméter.
$y = 300.284_1$ m.	$\mu_y = \pm 6.1$	„
$x + y = 518.411_5$ m.	$\mu_{x+y} = \pm 6.8$	„

3. példa.

Egy Reichenbach rendszerű tahimeter összeadó (d) és szorzó (k) állandójának meghatározása végett a távcső irányvonalának horizontális állása mellett, ismert távolságra felállított vertikális lécen a következő leolvasások tétettek:

a szélső szálak leolvasásának különbsége l

1. . . . . .

$d_1 = 40$ méterre	$l_1 = 0.4630$
$d_2 = 60$ „	$l_2 = 0.6975$
$d_3 = 84$ „	$l_3 = 0.9780$
$d_4 = 104$ „	$l_4 = 1.2120$
$d_5 = 124$ „	$l_5 = 1.4455$
$d_6 = 144$ „	$l_6 = 1.6805$

Reichenbach rendszerű tahimeter esetén, vertikális léctartás és horizontális irányzás mellett, a távolság (d)

$$d = C + K\,L$$

ahol C = az összeadó állandó, K = szorzó állandó, L = a szélső szálak leolvasási különbsége.

Az előbbi képlet *hibátlan értékek* esetében áll, de állani fog a *kiegyenlített* értékekre is, vagyis

$$d_i = c + k\,(l_i + \lambda_i)$$

Ez lesz a feltételi egyenletek általános alakja. Megoldva $l_i + \lambda_i$ szerint:

2. . . . . $l_i + \lambda_i = \frac{d_i}{k} - \frac{c}{k} = f_i\,(c,\ k)$

Miután $f\,(c,\ k)$ nem lineáris alakú, a mérési eredmények adta bármely (c), (k) helyen sorba kell fejtenünk. (c) és (k) előleges értékeket a feltételi egyenletekből határozhatjuk meg; s legyen

$$(c) = 0.330 \text{ m}$$
$$(k) = 85.000$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A kiegyenlítés feladatát tehát azon Δc, Δk javítások fogják képezni, amelyek mellett

$$c = (c) + \Delta c$$
$$k = (k) + \Delta k$$

Sorbafejtve a feltételi egyenletet a (c), (k) helyen:

$$3. \quad . \quad . \quad l_i + \lambda_i = f_i(c, k)_{(c)(k)} + \left(\frac{\partial f_i(c, k)}{\partial c}\right)_{(c)(k)} \Delta c + \left(\frac{\partial f_i(c, k)}{\partial k}\right)_{(c)(k)} \Delta k + R_i$$

Az R_i maradéktagról feltesszük, hogy elhanyagolható, mert a sorbafejtés helyét jól választottuk meg.

$$4. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} f_i(c, k)_{(c)(k)} = \dfrac{d_i - (c)}{(k)} \\ \left(\dfrac{\partial f_i(c, k)}{\partial c}\right)_{(c)(k)} = -\dfrac{1}{(k)} \\ \left(\dfrac{\partial f_i(c, k)}{\partial k}\right)_{(c)(k)} = -\dfrac{d_i - (c)}{(k)^2} \end{cases}$$

A feltételi egyenletek lineáris alakja tehát lesz:

$$l_i + \lambda_i = -\frac{1}{(k)} \Delta c - \frac{d_i - (c)}{(k)^2} \Delta k + \frac{d_i - (c)}{(k)}$$
$$\lambda_i = -\frac{1}{(k)} \Delta c - \frac{d_i - (c)}{(k)^2} \Delta k + \frac{d_i - (c)}{(k)} - l_i$$

Bevezetve a következő jelzéseket:

$$a_i = -\frac{1}{(k)}$$
$$b_i = -\frac{d_i - (c)}{(k)^2}$$
$$\omega_i = -\frac{d_i - (c)}{(k)} - l_i$$

A feltételi egyenletek általános alakja lesz:

$$\lambda_i = a_i \Delta c + b_i \Delta k + \omega_i$$

$d_1 = 40$ m	$l_1 = 0.4630$		
$d_2 = 60$ „	$l_2 = 0.6975$	$(c) = 0.330$ m	
$d_3 = 84$ „	$l_3 = 0.9780$	$(k) = 85.000$	
$d_4 = 104$ „	$l_4 = 1.2120$		
$d_5 = 124$ „	$l_5 = 1.4455$		
$d_6 = 144$ „	$l_6 = 1.6805$		

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Kiszámítva a 4. alatti képletek alapján a feltételi egyenletek állandó tagjait:

$$a_1 = -\frac{1}{(k)} = -0.0118 \qquad b_1 = -\frac{d_1 - (c)}{(k)^2} = -0.0055$$

$$a_2 = -\frac{1}{(k)} = -0.0118 \qquad b_2 = -\frac{d_2 - (c)}{(k)^2} = -0.0083$$

$$a_3 = -\frac{1}{(k)} = -0.0118 \qquad b_3 = -\frac{d_3 - (c)}{(k)^2} = -0.0116$$

$$a_4 = -\frac{1}{(k)} = -0.0118 \qquad b_4 = -\frac{d_4 - (c)}{(k)^2} = -0.0143$$

$$a_5 = -\frac{1}{(k)} = -0.0118 \qquad b_5 = -\frac{d_5 - (c)}{(k)^2} = -0.0171$$

$$a_6 = -\frac{1}{(k)} = -0.0118 \qquad b_6 = -\frac{d_6 - (c)}{(k)^2} = -0.0199$$

$$\omega_1 = \frac{d_1 - (c)}{(k)} - l_1 = 0.4667 - 0.4630 = +3{\cdot}7 \text{ milliméter}$$

$$\omega_2 = \frac{d_2 - (c)}{(k)} - l_2 = 0.7020 - 0.6975 = +4.5 \quad „$$

$$\omega_3 = \frac{d_3 - (c)}{(k)} - l_3 = 0.9844 - 0.9780 = +6.4 \quad „$$

$$\omega_4 = \frac{d_4 - (c)}{(k)} - l_4 = 1.2196 - 1.2120 = +7.6 \quad „$$

$$\omega_5 = \frac{d_5 - (c)}{(k)} - l_5 = 1.4549 - 1.4455 = +9.4 \quad „$$

$$\omega_6 = \frac{d_6 - (c)}{(k)} - l_6 = 1.6902 - 1.6805 = +9.7 \quad „$$

A kényelmesebb számitás miatt az a_i, b_i, együtthatókat százzal, illetőleg tizzel szorozva vigyük a feltételi egyenletekbe s igy a feltételi egyenletek lesznek:

5. . . . . .

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -1.18\,\Delta c - 0.055\,\Delta k + 3.7 \\
\lambda_2 &= -1.18\,\Delta c - 0.083\,\Delta k + 4.5 \\
\lambda_3 &= -1.18\,\Delta c - 0.116\,\Delta k + 6.4 \\
\lambda_4 &= -1.18\,\Delta c - 0.143\,\Delta k + 7.6 \\
\lambda_5 &= -1.18\,\Delta c - 0.171\,\Delta k + 9.4 \\
\lambda_6 &= -1.18\,\Delta c - 0.199\,\Delta k + 9.7
\end{aligned}$$

$$[a\,a] = 8.3544 \qquad [a\,b] = +0.90506 \qquad [a\,\omega] = -48.734$$
$$[b\,b] = +0.11266 \qquad [b\,\omega] = -5.9439$$
$$[\omega\,\omega] = +315.11$$

A normál egyenlet lesz:

$$\begin{aligned}
+\underline{8.3544}\,\Delta c \quad &+ 0.90506\,\Delta k \quad - 48.734 = 0 \\
&+ \underline{0.11266}\,\Delta k \quad - 5.9439 = 0 \\
&\qquad\qquad + \underline{315.11} = 0
\end{aligned}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A normál egyenletek megoldása:

− 9.078 0847	− 9.034 7621	+ 0.765 9168		
+ 0.921 9153	+ 9.956 6774	− 1.687 8321	log.	numerus
+ 8.3544	+ 0.90506	− 48.734	− 8.991 4395	− 0.09805
	+ 0.11266	− 5.944	+ 0.722 5942	+ 5.2795
	− 0.09805	+ 5.280	− 2.453 7489	− 284.28
		+ 315.11		
		− 284.28		
	− 1.835 3498	+ 1.657 5179		
	+ 8.164 6502	− 9.822 1681		
	+ 0.01461	− 0.664	− 1.479 6860	− 30.17
		+ 30.83		
		− 30.17		

$[\omega\,\omega.\,2] = + 0.66$

$log\,\Delta k = + 1.657\,5179$

$\frac{\Delta k}{10} = + 45.45$

$\Delta k = + 454.5$

6. . .

− 0.948 2303	− 0.904 9077	+ 1.722 3091		
+ 9.051 7697	+ 9.956 6774	− 0.774 0788	log.	numerus
+ 0.11266	+ 0.90506	− 5.944	− 0.861 5851	− 7.2709
	+ 8.3544	− 48.734	+ 1.678 9865	+ 47.752
	− 7.2709	+ 47.752	− 2.496 3879	− 313.61
		+ 315.11		
		− 313.61		
	− 9.965 1711	+ 9.957 2826		
	+ 0.034 8289	− 9.992 1115		
	+ 1.0835	− 0.982	− 9.949 3941	− 0.89
		+ 1.50		
		− 0.89		

$[\omega\,\omega.\,2] = + 0.61$

$log\,\Delta c = + 9.957\,2826$

$\frac{\Delta c}{100} = + 0.906$

$\Delta c = + 90.6$ millimeter

A kiegyenlített értékek lesznek:

$\lambda = (c) + \Delta c = 0.330 + 0.0906 = 0.4206$

$k = (k) + \Delta k = 85.000 + 0.455 = 85.455$

A normál egyenletek *felállításának* ellenőrzése végett számítsuk ki a feltételi egyenletekből (lásd 5. alatt) a $[\lambda\,\lambda]$-t.

7.

$\lambda_1 = -1.18\times0.906 - 0.055\times45.45 + 3.7 = -1.069 - 2.503 + 3.7 = + 0.13$ $\quad \lambda_1^2 = 0.017$

$\lambda_2 = -1.18\times0.906 - 0.083\times45.45 + 4.5 = -1.069 - 3.776 + 4.5 = - 0.34$ $\quad \lambda_2^2 = 0.115$

$\lambda_3 = -1.18\times0.906 - 0.116\times45.45 + 6.4 = -1.069 - 5.278 + 6.4 = + 0.05$ $\quad \lambda_3^2 = 0.003$

$\lambda_4 = -1.18\times0.906 - 0.143\times45.45 + 7.6 = -1.069 - 6.506 + 7.6 = + 0.02$ $\quad \lambda_4^2 = 0.000$

$\lambda_5 = -1.18\times0.906 - 0.171\times45.45 + 9.4 = -1.069 - 7.771 + 9.4 = + 0.56$ $\quad \lambda_5^2 = 0.314$

$\lambda_6 = -1.18\times0.906 - 0.199\times45.45 + 9.7 = -1.069 - 9.044 + 9.7 = - 0.41$ $\quad \lambda_6^2 = 0.168$

$[\lambda\,\lambda] = \overline{0.617}$

Amint látjuk $[\lambda\,\lambda] = [\omega\,\omega.\,2]$ s igy a normálegyenletek felállítása helyes.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A *kiegyenlített* értékekből számított javitások lesznek a 2. alatti egyenlet szerint:

8. . . . . .

$$\lambda_1 = \frac{d_1 - c}{k} - l_1 = \frac{40.000 - 0.421}{85.455} - 0.4630 = +0.1 \qquad \lambda_1^2 = 0.01$$

$$\lambda_2 = \frac{d_2 - c}{k} - l_2 = \frac{60.000 - 0.421}{85.455} - 0.6975 = -0.3 \qquad \lambda_2^2 = 0.09$$

$$\lambda_3 = \frac{d_3 - c}{k} - l_3 = \frac{84.000 - 0.421}{85.455} - 0.9780 = \quad 0.0 \qquad \lambda_3^2 = 0.00$$

$$\lambda_4 = \frac{d_4 - c}{k} - l_4 = \frac{104.000 - 0.421}{85.455} - 1.2120 = \quad 0.0 \qquad \lambda_4^2 = 0.00$$

$$\lambda_5 = \frac{d_5 - c}{k} - l_5 = \frac{124.000 - 0.421}{85.455} - 1.4455 = +0.6 \qquad \lambda_5^2 = 0.36$$

$$\lambda_6 = \frac{d_6 - c}{k} - l_6 = \frac{144.000 - 0.421}{85.455} - 1.6805 = -0.4 \qquad \lambda_6^2 = 0.16$$

$$[\lambda\lambda] = 0.62$$

A most nyert *javítások* szigoruan egyeznek a 7. alatti javitásokkal s igy a kiegyenlítés egész menetét ellenőrizhetjük.

A kiegyenlített értékek megbízhatóságának mérlegelése végett *középhiba számítást* kell végeznünk.

Az *egységsúlyú mérési eredmény* várható középhibája (μ) az ismert összefüggések alapján

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{f}} = \sqrt{\frac{0.617}{4}} = \pm 0.39 \text{ mm}$$

9. . . . . .

$$\frac{\mu_{\Delta k}}{10} = \frac{\mu}{\sqrt{g_{\Delta k}}} = \frac{\mu}{\sqrt{[b\,b.1]}} = \frac{0.39}{\sqrt{0.0146}} = \pm 3.22$$

$$\mu_{\Delta k} = \pm 32.2$$

$$\frac{\mu_{\Delta c}}{100} = \frac{\mu}{\sqrt{g_{\Delta c}}} = \frac{\mu}{\sqrt{[a\,a.1]}} = \frac{0.39}{\sqrt{1.0835}} = \pm 0.374 \text{ mm}$$

$$\mu_{\Delta c} = \pm 37.4 \text{ milliméter.}$$

Végeredmény:

10. . . . . .

$$c = 0.4206 \text{ m} \qquad \mu_{\Delta c} = \pm 0.0374 \text{ m}$$

$$k = 85.4545 \qquad \mu_{\Delta k} = \pm 0.0322$$

Egy meglepő eredményt mutatnak a várható középhibák, nevezetesen, hogy az összeadó állandó várható középhibája $= \pm 37.4$ milliméter. Tehát a kiegyenlitő számítás, e közvetlenül *milliméter* pontossággal mérhető állandó érték meghatározására a fenti alakban *nem alkalmas.* Nem is azért mutattuk be e példát, mintha alkalmasnak tartanók a gyakorlati alkalmazásra, hanem pusztán a kiegyenlítő számítás mechanikai gyakorlása végett. A földméréstan illető fejezete foglalkozik a tahimeter állandók meghatározásával s már ott figyelmeztetést nyerünk, hogy az állandók meghatározását — éppen az összeadó állandó közvetlen mérhetősége miatt — más módon végezzük.

Nekünk e példa kiválóan alkalmasnak mutatkozott a közvetlen mérések kiegyenlítésének gyakorlására, nem lineáris alakú feltételi egyenletek esetében.

Felmerülhet most már az a kérdés, hogy a most bemutatott eljárással meghatározott tahimeter állandók felhasználásával, egy bizonyos léc leolvasásból számított távolságnak mekkora a várható középhibája?

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Tegyük fel, hogy horizontális irányzás mellett egy vertikálisan felállított cm. beosztásu lécről leolvastunk $L = 1.723$ métert.

Kérdés: milyen távolságra van e pont és mekkora e távolság várható középhibája?

A távolság a következő képlettel számítható:

$$d = c + k\,L = 0.421 + 85.455 \times 1.723 = 147.660 \text{ m.}$$

E távolság várható középhibája:

$$\mu_d = f\,(c,\, k),$$ ahol ismeretesek μ_c és μ_k a *kiegyenlítő* számítás adta, egymástól *nem független* várható középhibák.

Hogy a *függvényérték* várható középhibáját a 33. oldalon bemutatott eljárással megoldhassuk, irjuk a függvényt a következő alakban:

$$d = A_1\,c + A_4\,k$$

$$\text{ahol } A_1 = +1, \qquad A_2 = L$$

$$11. \ldots\ldots \quad \mu_d^2 = \mu^2 \left(\frac{A_1^2}{[a\,a.1]} + \frac{A_2^2}{[b\,b.1]} + \frac{2\,A_1\,A_2}{[a\,b.\,1[} \right)$$

Ebben a képletben $[a\,b.\,1]$ kivételével minden adat ismeretes.

$$\frac{1}{[a\,b.1]} = [a\,\beta] = Q_{12}$$

A Q_{12} érték meghatározása a következő normál egyenletekből történhetik:

$$\underline{[a\,a]}\,Q_{11} + [a\,b]\,Q_{12} - 1 = 0 \qquad + \underline{8.3544}\,Q_{11} + 0.90506\,Q_{12} - 1 = 0$$
$$+ \underline{[b\,b]}\,Q_{12} + 0 = 0 \qquad + \underline{0.11266}\,Q_{12} + 0 = 0$$

Megoldás után

$$Q_{12} = -\ 74.148$$

$$\frac{1}{[a\,b.1]} = -\frac{1}{74.15}$$

$$\frac{1}{[a\,a.1]} = -\frac{1}{1.0835}$$

$$\frac{1}{[b\,b.1]} = -\frac{1}{1.461}$$

Az értékek behelyettesítve:

$$\frac{\mu_d}{100} = \mu \sqrt{\frac{1}{1.0835} + \frac{2.968}{1.461} - \frac{2 \times 1.723}{74.148}} = \mu \sqrt{0.9225 + 2.0315 - 0.0465} =$$

$$= 0.39 \sqrt{2.9075} = \pm\, 0.6650$$

$$\mu_d = \pm\, 66.5 \text{ milliméter.}$$

4. példa.

Universális műszerrel *sarkmagasság* mérést végeztünk és pedig oly módon, hogy a csillagok meridián zenittávolságait mértük, a felső illetve az alsó kulmináció pillanatában.

A szferikus asztronómia ismert törvényei szerint, a meridiánban mért zenittávolságokból φ sarkmagasság értéket a következő módon nyerjük:*)

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \delta \pm z \quad \text{felső} \\ \varphi &= 180^\circ - \delta + z \quad \text{alsó} \end{aligned}\right\} \text{ kulmináció esetében}$$

*) Lásd e kötet 212. oldatán a 2. §-t.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Két ellenkező körállásból nyert sarkmagasság érték számtani középértéke adja az indexhibától mentes sarkmagasság értéket, amelyet azonban a távcső lehajlása miatt még meg kell korrigálnunk.

A távcső irányvonalának lehajlását, horizontális irányzás mellett ($z = 90°$), nevezzük b-nek; egy tetszőleges z zenittáv mellett a távcső lehajlása a horizontális állás mellett adódó b lehajlásnak csak komponense lesz és pedig $b \sin z$. Tehát a lehajlási korrekció minimális lesz $z = 0°$, és maximális lesz $z = 90°$ esetében. Vannak módszerek, amelyekkel a távcső lehajlásának értéke horizontális irányzás mellett meghatározhatók, de gyakorlatilag legmegfelelőbb a b lehajlási konstáns értékét ismeretlennek tekinteni s a fölös számú mérések révén a φ sarkmagasság értékkel együtt egyidejűleg a legkisebb négyzetek módszerének segítségével meghatározni.

Legyenek a kettős körállásból nyert — tehát indexhibától mentes — sarkmagasság értékek, mint egymástól függetlenül nyert, közvetlenül mért egyenlő súlyú mérési eredmények: $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$; az ezeknek megfelelő $\sin z$ értékek pedig sorjában: $\sin z_1$, $\sin z_2$, $\sin z_3$, $\ldots \sin z_n$.

A fölös számú mérések révén meghatározandó azon φ és b érték, amelyek mellett a mérési eredmények javításainak négyzetösszege $[\lambda\lambda]$ minimum.

Mindenekelőtt a feltételi egyenletek általános alakját kell felállítanunk.

Az ismert összefüggések révén a kiegyenlített mérési eredmények legyenek:

$$\begin{array}{l|l} \varphi = \varphi_1 + \lambda_1 & \varphi_1 = l_1 \mp b \sin z_1 \quad \begin{cases} - \text{ északi csillag.} \\ + \text{ déli csillag.} \end{cases} \\ \varphi = \varphi_2 + \lambda_2 & \varphi_2 = l_2 \mp b \sin z_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \varphi = \varphi_n + \lambda_n & \varphi_n = l_n \mp b \sin z_n \end{array}$$

Ezek alapján a feltételi egyenletek általános alakja lesz:

$$\varphi = \varphi_i + \lambda_i = l_i \mp b \sin z_i + \lambda_i$$

Itt ismeretlenek a φ és b értékek s ezeket független változóknak tekintve, — a λ szerint megoldott alakban írva a feltételi egyenlet lesz:

$$\lambda_i = \varphi - l_i \pm b \sin z_i$$

Kényelmi szempontból — amint ezt eddig is tettük — a független változók helyett vezessünk be előleges értékeket s legyen $\varphi = (\varphi) + \Delta\varphi$; a b amúgy is kis szám lévén, megtartjuk. Lesz:

$$\lambda_i = + \Delta\varphi \pm b \sin z_i + (\varphi) - l_i$$

amely egyenletben $\Delta\varphi$ és b ismeretlenek. Annyi ilyen feltételi egyenletünk lesz, ahány mérési eredményünk van. Általánosságban tehát a következő lineáris alakú feltételi egyenleteink lesznek:

$$\begin{array}{l|l} \lambda_1 = + \Delta\varphi \pm b \sin z_1 + ((\varphi) - l_1) & (\varphi) - l_1 = \omega_1 \\ \lambda_2 = + \Delta\varphi \pm b \sin z_2 + ((\varphi) - l_2) & (\varphi) - l_2 = \omega_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \lambda_n = + \Delta\varphi \pm b \sin z_n + ((\varphi) - l_n) & (\varphi) - l_n = \omega_n \end{array}$$

Az eljárás további részét a normál egyenletek felállítása és megoldása, továbbá a kiegyenlített mérési eredmények számítása és középhiba számítás képezik.

Alább Gurgóhegy I. r. háromszögponton végzett sarkmagasságmérés kiegyenlítését mutatjuk be.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

$(\varphi) = 46° 30' 24.''00$

Körállás	Mérési eredmények l	Feltételi egyenletek								Normál egyenletek			
		$\Delta\varphi$		$\sin z$		$(\varphi) - l = \omega$		s		$a\,a$		$a\,b$	
0°	46° 30′ 22.''30	+	1	−	0.48	+	1.70	+	2.22	+	1	+	0.48
	24.34	+	1	+	0.10	−	0.34	+	0.76	+	1	+	0.10
	25.82	+	1	+	0.48	−	1.82	−	0.34	+	1	+	0.48
	25.65	+	1	+	0.38	−	1.65	−	0.27	+	1	+	0.38
	22.35	+	1	−	0.24	+	1.65	+	2.41	+	1	−	0.24
	25.45	+	1	+	0.17	−	1.45	−	0.28	+	1	+	0.17
30°	23.04	+	1	−	0.62	+	0.96	+	1.34	+	1	−	0.62
	24.57	+	1	+	0.07	−	0.57	+	0.50	+	1	+	0.07
	24.65	+	1	+	0.40	−	0.65	+	0.75	+	1	+	0.40
	24.70	+	1	−	0.21	−	0.70	+	0.09	+	1	−	0.21
	25.18	+	1	−	0.06	−	1.18	−	0.24	+	1	−	0.06
	26.83	+	1	+	0.48	−	2.83	−	1.35	+	1	+	0.48
60°	24.86	+	1	+	0.02	−	0.86	+	0.16	+	1	+	0.02
	21.54	+	1	−	0.24	+	2.46	+	3.22	+	1	−	0.24
	23.54	+	1	+	0.02	+	0.46	+	1.48	+	1	+	0.02
	22.89	+	1	+	0.03	+	1.11	+	2.14	+	1	+	0.03
	25.12	+	1	+	0.22	−	1.12	+	0.10	+	1	+	0.22
	23.57	+	1	−	0.09	+	0.43	+	1.34	+	1	−	0.09
90°	23.19	+	1	+	0.42	+	0.81	+	2.23	+	1	+	0.42
	23.68	+	1	+	0.20	+	0.32	+	1.12	+	1	−	0.20
	25.18	+	1	−	0.02	−	1.18	−	0.20	+	1	−	0.02
	26.99	+	1	−	0.18	−	2.99	−	2.17	+	1	−	0.18
	24.12	+	1	−	0.34	−	0.12	+	0.54	+	1	−	0.34
	25.56	+	1	+	0.18	−	1.56	−	0.38	+	1	+	0.18
120°	23.20	+	1	+	0.10	+	0.80	+	1.90	+	1	+	0.10
	25.57	+	1	−	0.48	−	1.57	−	1.05	+	1	−	0.48
	22.04	+	1	−	0.40	+	1.96	+	2.56	+	1	−	0.40
	22.78	+	1	+	0.48	+	1.22	+	2.70	+	1	+	0.48
	24.22	+	1	+	0.02	−	0.22	+	0.80	+	1	+	0.02
	21.06	+	1	+	0.28	+	2.94	+	4.22	+	1	+	0.28
150°	25.30	+	1	+	0.03	−	1.30	−	0.27	+	1	+	0.03
	24.89	+	1	−	0.04	−	0.89	+	0.07	+	1	−	0.04
	23.43	+	1	+	0.21	+	0.57	+	1.78	+	1	+	0.21
	27.00	+	1	−	0.26	−	3.00	−	2.26	+	1	−	0.26
	23.68	+	1	−	0.06	+	0.32	+	1.26	+	1	−	0.06
	23.70	+	1	+	0.15	+	0.30	+	1.45	+	1	+	0.15
										+	36.00	+	0.32

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

$(\varphi) = 46° \ 30' \ 24.''00$

együtthatóinak képzése

$a\,\omega$	$a\,s$	$b\,b$	$b\,\omega$	$b\,s$	$\omega\,\omega$	$\omega\,s$
+ 1.70	+ 2.22	+ 0.2304	− 0.8160	− 1.0656	+ 2.8900	+ 3.7740
− 0.34	+ 0.76	+ 0.0100	− 0.0340	+ 0.0760	+ 0.1156	− 0.2584
− 1.82	− 0.34	+ 0.2304	− 0.8736	− 0.1632	+ 3.3124	+ 0.6188
− 1.65	− 0.27	+ 0.1444	− 0.6270	− 0.1026	+ 2.7225	+ 0.4455
+ 1.65	+ 2.41	+ 0.0576	− 0.3960	− 0.5784	+ 2.7225	+ 3.9765
− 1.45	− 0.28	+ 0.0289	− 0.2465	− 0.0476	+ 2.1025	+ 0.4060
+ 0.96	+ 1.34	+ 0.3844	− 0.5952	− 0.8308	+ 0.9216	+ 1.2864
− 0.57	+ 0.50	+ 0.0049	− 0.0399	+ 0.0350	+ 0.3249	− 0.2850
− 0.65	+ 0.75	+ 0.1600	− 0.2600	+ 0.3000	+ 0.4225	− 0.4875
− 0.70	+ 0.09	+ 0.0441	+ 0.1470	− 0.0189	+ 0.4900	− 0.0630
− 1.18	− 0.24	+ 0.0036	+ 0.0708	+ 0.0144	+ 1.3924	+ 0.2832
− 2.83	− 1.35	+ 0.2304	− 1.3584	− 0.6480	+ 8.0089	+ 3.8205
− 0.86	+ 0.16	+ 0.0004	− 0.0172	+ 0.0032	+ 0.7396	− 0.1376
+ 2.46	+ 3.22	+ 0.0576	− 0.5904	− 0.7728	+ 6.0516	+ 7.9212
+ 0.46	+ 1.48	+ 0.0004	+ 0.0092	+ 0.0296	+ 0.2116	+ 0.6808
+ 1.11	+ 2.14	+ 0.0009	+ 0.0333	+ 0.0542	+ 1.2321	+ 2.3754
− 1.12	+ 0.10	+ 0.0484	− 0.2464	+ 0.0220	+ 1.2544	− 0.1120
+ 0.43	+ 1.34	+ 0.0081	− 0.0387	− 0.1206	+ 0.1849	+ 0.5762
+ 0.81	+ 2.23	+ 0.1764	+ 0.3402	+ 0.9366	+ 0.6561	+ 1.8063
+ 0.32	+ 1.12	+ 0.0400	− 0.0640	− 0.2240	+ 0.1024	+ 0.3584
− 1.18	− 0.20	+ 0.0004	+ 0.0236	+ 0.0040	+ 1.3924	+ 0.2360
− 2.99	− 2.17	+ 0.0324	+ 0.5382	+ 0.3906	+ 8.9401	+ 6.4883
− 0.12	+ 0.54	+ 0.1156	+ 0.0408	− 0.1836	+ 0.0144	− 0.0648
− 1.56	− 0.38	+ 0.0324	− 0.2808	− 0.0684	+ 2.4336	+ 0.5928
+ 0.80	+ 1.90	+ 0.0100	+ 0.0800	+ 0.1900	+ 0.6400	+ 1.5200
− 1.57	− 1.05	+ 0.2304	+ 0.7536	+ 0.5040	+ 2.4649	+ 1.6485
+ 1.96	+ 2.56	+ 0.1600	− 0.7840	− 1.0240	+ 3.8416	+ 5.0176
+ 1.22	+ 2.70	+ 0.2304	+ 0.5856	+ 1.2960	+ 1.4884	+ 3.2940
− 0.22	+ 0.80	+ 0.0004	− 0.0044	+ 0.0160	+ 0.0484	− 0.1760
+ 2.94	+ 4.22	+ 0.0784	+ 0.8232	+ 1.1816	+ 8.6436	+ 12.4068
− 1.30	− 0.27	+ 0.0009	− 0.0390	− 0.0081	+ 1.6900	+ 0.3510
− 0.89	+ 0.07	+ 0.0016	+ 0.0356	− 0.0028	+ 0.7921	− 0.0623
+ 0.57	+ 1.78	+ 0.0041	+ 0.1197	+ 0.3738	+ 0.3249	+ 1.0146
− 3.00	− 2.26	+ 0.0676	+ 0.7800	+ 0.5876	+ 9.0000	+ 6.7800
+ 0.32	+ 1.26	+ 0.0036	− 0.0192	− 0.0756	+ 0.1024	+ 0.4032
+ 0.30	+ 1.45	+ 00.255	+ 0.0450	+ 0.2175	+ 0.0900	+ 0.4350
− 7.99	+ 28.33	+ 2.8920	− 2.9049	+ 0.3075	+ 77.7653	+ 66.8704

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Normál egyenletek feloldása.

$[a\,a]$	$[a\,b]$	$[a\,w]$	$[b\,b]$	$[b\,a]$	$[b\,w]$
+ 36.00	+ 0.32	− 7.99	+ 2.892	+ 0.32	− 2.905
	+ 2.892	− 2.905		+ 36.00	− 7.99
	− 0.003	+ 0.071		− 0.035	+ 0.321
		+ 77.765			+ 77.765
		− 1.773			− 2.918

$[bb.\,1]$	$[b\,w.\,1]$	$[a\,a.\,1]$	$[a\,w.\,1]$
+ 2.889	− 2.834	+ 35.965	− 7.669
	+ 75.992		+ 74.847
	− 2.780		− 1.636

$[w\,w.\,2.] = + 73.212$ $\qquad$ $[w\,w.\,2] = 73.211$

$b = + 0.981$ $\qquad$ $\Delta\varphi = + 0.213$

Az egységsúlyú mérési eredmény — tehát egy kettős körállásból levezetett sarkmagasságérték középhibája

$$\mu = \sqrt{\frac{73.212}{36-2}} = \pm 1.''468$$

$$\mu_{\Delta\varphi} = \frac{\mu}{\sqrt{g_\varphi}} = \frac{1.468}{\sqrt{35.965}} = \pm 0.''244 \qquad \mu_b = \frac{\mu}{\sqrt{g_b}} = \frac{1.468}{\sqrt{2.889}} = \pm 0.''863$$

A kiegyenlítés eredménye lesz tehát:

$$\varphi = (\varphi) + \Delta\varphi = 46^\circ\ 30'\ 24.''213$$

$$b = + 0.''98$$

$\mu = \pm 1.''468$ $\qquad$ $\mu_{\Delta\varphi} = \pm 0.244$ $\qquad$ $\mu_b = \pm 0.863$

Szükségünk van még a kiegyenlített mérési eredményekre és az ellenőrző számításokra. Ezeket a műveleteket is táblázatos összeállításban végezzük el és pedig a *normál egyenletek felállításának* s *megoldásának* ellenőrzésére, behelyettesítjük a normál egyenletek megoldása után nyert $\Delta\varphi$ és b értékeket sorjában az egyes feltételi egyenletekbe. Az ily módon nyert λ javítások négyzetösszegeinek egyezni kell a normál egyenletek maradék tagjával, vagyis kell hogy $[w\,w.\,2] = [\lambda\,\lambda]$.

A *feltételi egyenletek felállításának* ellenőrzésére pedig képezzük a $\lambda_i = \varphi - (l_i \mp b \sin z)$ különbségeket s ha az ily módon nyert javítások egyeznek a feltételi egyenletekből nyert javításokkal, akkor számításunk helyes

	$\Delta\varphi$	$\pm b \sin z_i$	ω_i	λ_i	$\lambda_i\lambda_i$	l_i	$\mp b \sin z_i$	$l_i \mp b \sin z_i = \varphi_i$	$\varphi - \varphi_i = \lambda_i$
0°	+ 0.21	− 0.47	+ 1.70	+ 1.44	2.0736	46° 30′ 22.″30	+ 0.47	46° 30′ 22.″77	+ 1.44
	+ 0.21	+ 0.10	+ 0.34	− 0.03	0.0009	24.34	− 0.10	24.24	− 0.03
	+ 0.21	+ 0.47	− 1.82	− 1.14	1.2996	25.82	− 0.47	25.35	− 1.14
	+ 0.21	+ 0.37	− 1.65	− 1.07	1.1449	25.65	− 0.37	25.28	− 1.07
	+ 0.21	− 0.24	+ 1.65	+ 1.62	2.6244	22.35	+ 0.24	22.59	+ 1.62
	+ 0.21	+ 0.17	− 1.45	− 1.07	1.1449	25.45	− 0.17	25.28	− 1.07

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

	$\Delta\varphi$	$\pm b \sin z_i$	ω_i	λ_i	$\lambda_i\lambda_i$	l_i	$\mp b \sin z_i$	$l_i \mp b \sin z_i = \varphi_i$	$\varphi - \varphi_i = \lambda_i$
30°	+ 0.21	— 0.61	+ 0.96	+ 0.56	0.3136	46° 30′ 23.″04	+ 0.61	46° 30′ 23.″65	+ 0.56
	+ 0.21	+ 0.07	— 0.57	— 0.29	0.0841	24.57	— 0.07	24.50	— 0.29
	+ 0.21	+ 0.39	— 0.65	— 0.05	0.0025	24.65	— 0.39	24.26	— 0.05
	+ 0.21	— 0.21	— 0.70	— 0.70	0.4900	24.70	+ 0.21	24.91	— 0.70
	+ 0.21	— 0.06	— 1.18	— 1.03	1.0609	25.18	+ 0.06	25.24	— 1.03
	+ 0.21	+ 0.47	— 2.83	— 2.15	4.6225	26.83	— 0.47	26.36	— 2.15
60°	+ 0.21	+ 0.02	— 0.86	— 0.63	0.3969	24.86	— 0.02	24.84	— 0.63
	+ 0.21	— 0.24	+ 2.46	+ 2.43	5.9049	21 54	+ 0.24	21.78	+ 2.43
	+ 0.21	+ 0.02	+ 0.46	+ 0.69	0.4761	23.54	— 0.02	23.52	+ 0.69
	+ 0.21	+ 0.03	+ 1.11	+ 1.35	1.8225	22.89	— 0.03	22.86	+ 1.35
	+ 0.21	+ 0.22	— 1.12	— 0.69	0.4761	25.12	— 0.22	24.90	— 0.69
	+ 0.21	— 0.09	+ 0.43	+ 0.55	0.3025	23.57	+ 0.09	23.66	+ 0.55
90°	+ 0.21	+ 0.41	+ 0.81	+ 1.43	2.0449	23.19	— 0.41	22.78	+ 1.43
	+ 0.21	— 0.20	+ 0.32	+ 0.33	0.1089	23.68	+ 0.20	23.88	+ 0.33
	+ 0.21	— 0.02	— 1.18	— 0.99	0.9801	25.18	+ 0.02	25.20	— 0.99
	+ 0.21	— 0.18	— 2.99	— 2.96	8.7616	26.99	+ 0.18	27.17	— 2.96
	+ 0.21	— 0.33	— 0.12	— 0.24	0.0576	24.12	+ 0.33	24.45	— 0.24
	+ 0.21	+ 0.18	— 1.56	— 1.17	1.3689	25.56	— 0.18	25.38	— 1.17
120°	+ 0.21	+ 0.10	+ 0.80	+ 1.11	1.2321	23.20	— 0.10	23.10	+ 1.11
	+ 0.21	— 0.47	— 1.57	— 1.83	3.3489	25.57	+ 0.47	26.04	— 1.83
	+ 0.21	— 0.39	+ 1.96	+ 1.78	3.1684	22.04	+ 0.39	22.43	+ 1.78
	+ 0.21	+ 0.47	+ 1.22	+ 1.90	3.6100	22.78	— 0.47	22.31	+ 1.90
	+ 0.21	+ 0.02	— 0.22	+ 0.01	0.0001	24.22	— 0.02	24.20	+ 0.01
	+ 0.21	+ 0.27	+ 2.94	+ 3.42	11.6964	21.06	— 0.27	20.79	+ 3.42
150°	+ 0.21	+ 0.03	— 1.30	— 1.06	1.1236	25.30	— 0.03	25.27	— 1.06
	+ 0.21	— 0.04	— 0.89	— 0.72	0.5184	24.89	+ 0.04	24.93	— 0.72
	+ 0.21	+ 0.21	+ 0.57	+ 0.99	0.9801	23.43	— 0.21	23.22	+ 0.99
	+ 0.21	— 0.26	— 3.00	— 3.05	9.3025	27.00	+ 0.26	27.26	— 3.05
	+ 0.21	— 0.06	+ 0.32	+ 0.47	0.2209	23.68	+ 0.06	23.74	+ 0.47
	+ 0.21	+ 0.15	+ 0.30	+ 0.66	0.4356	23.70	— 0.15	23.55	+ 0.66
					73.2019				

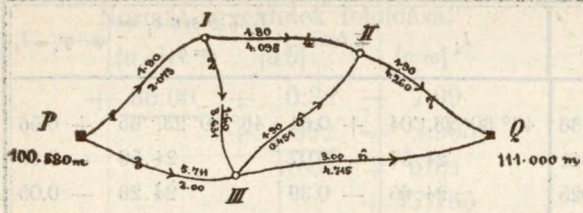
Amint látjuk, a két módon képezett javítások sorjában szigorúan egyeznek s így a kiegyenlítő számításban hiba nincs.

5. példa.

Két magassági alappontra támaszkodó szintezési hálózat egyenlítendő ki.

Meghatározandók *I*, *II*, *III* pontok legvalószínűbb értéke és várható középhibája; továbbá $h_1, h_2, \ldots, h_7$ magassági különbségek legvalószínűbb értéke és $\mu_{h_1}, \mu_{h_2}, \ldots, \mu_{h_7}$ várható középhibák.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.



7. ábra.

1. . . .

Mérési eredmények.	Távolság km.
$h_1 = 2.073\ m$	1.90
$h_2 = 3.631$	1.60
$h_3 = 5.711$	2.00
$h_4 = 4.095$	1.80
$h_5 = 0.451$	1.90
$h_6 = 4.715$	3.00
$h_7 = 4.260$	1.90

Adottak P és Q pontok abszolut magasságai:

$$P = 100.580\ m.$$
$$Q = 111.000\ m.$$

A mérési eredményekről feltesszük, hogy csak zérus, középértékű hibát tartalmaznak.

Mielőtt az egymásnak ellentmondó mérési eredmények kiegyenlítését megkezdenők, el kell döntenünk, hogy az egyes mérési eredmények milyen súlyúak.

Két pont közötti magasság különbség (h) összetevődik az egyes műszerállásokban mért h_1 h_2 . . . magasság különbségekből. Ha d az állandó léctávolság, akkor egy leolvasás középteljes hibája, mely úgy a libella beállításból vagy libella leolvasásból, mint a lécleolvasásból származik, legyen μ.

Miután $T_{km} = 2\ m\ d$, ahol m = a műszerállások száma; a végpontok közötti magasság különbség pedig:

$$h = h_1 + h_2 + \ldots + h_n\ ;\ \mu_{h_1} = \mu\sqrt{2} = \ldots = \mu_{h_n}$$

s így lesz $\mu_h = \sqrt{\mu_{h_1}^2 + \mu_{h_2}^2 + \ldots + \mu_{h_n}^2} = \sqrt{2\,\mu^2 + 2\,\mu^2 + \ldots (n\text{-szer})} = \mu\sqrt{2\,n}$

$$\text{de } 2\,n = \frac{T_{km}}{d}$$

$$\text{s így } \mu_h = \frac{\mu}{\sqrt{d}}\sqrt{T_{(km)}}$$

vagyis valamely szintezett vonal várható középhibája arányos a távolság négyzetgyökével; tehát a *szintezett vonal súlya fordított arányban áll a kilométerekben kifejezett távolsággal* s így

$$g_i = \frac{C}{T_{i_{km}}}.$$

Ha I, II, III, H_1, H_2, . . . H_7 jelentik a hibátlan illetve a kiegyenlített értékeket, akkor felirhatók a következő összefüggések:

2. . .

$I - P = H_1$	$H_1 = h_1 + \lambda_1$	$I = (I) + \Delta_I$
$III - I = H_2$	$H_2 = h_2 + \lambda_2$	$II = (II) + \Delta_{II}$
$III - P = H_3$	$H_3 = h_3 + \lambda_3$	$III = (III) + \Delta_{III}$
$II - I = H_4$	$H_4 = h_4 + \lambda_4$	
$II - III = H_5$	$H_5 = h_5 + \lambda_5$	
$Q - III = H_6$	$H_6 = h_6 + \lambda_6$	
$Q - II = H_7$	$H_7 = h_7 + \lambda_7$	

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Bevezetve az utóbbi egyenlőségeket az első egyenletrendszerbe:

$$\begin{aligned}
(I) + \Delta_I \quad &- \quad P \quad &&= h_1 + \lambda_1 \\
(III) + \Delta_{III} \quad &- \quad (I) - \Delta_I \quad &&= h_2 + \lambda_2 \\
(III) + \Delta_{III} \quad &- \quad P \quad &&= h_3 + \lambda_3 \\
(II) + \Delta_{II} \quad &- \quad (I) - \Delta_I \quad &&= h_4 + \lambda_4 \\
(II) + \Delta_{II} \quad &- (III) - \Delta_{III} \quad &&= h_5 + \lambda_5 \\
(Q) - (III) &- \Delta_{III} \quad &&= h_6 + \lambda_6 \\
(Q) - (II) &- \Delta_{II} \quad &&= h_7 + \lambda_7
\end{aligned}$$

3. λ-ák szerint rendezve:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= + \Delta_I + (I) - P - h_1 & g_1 &= \frac{10}{1.9} = 5.3 \\
\lambda_2 &= - \Delta_I + \Delta_{III} + (III) - (I) - h_2 & g_2 &= \frac{10}{1.6} = 6.3 \\
\lambda_3 &= + \Delta_{III} + (III) - P - h_3 & g_3 &= \frac{10}{2.0} = 5.0 \\
\lambda_4 &= - \Delta_I + \Delta_{II} + (II) - (I) - h_4 & g_4 &= \frac{10}{1.8} = 5.6 \\
\lambda_5 &= + \Delta_{II} - \Delta_{III} + (II) - (III) - h_5 & g_5 &= \frac{10}{1.9} = 5.3 \\
\lambda_6 &= - \Delta_{III} + Q - (III) - h_6 & g_6 &= \frac{10}{3.0} = 3.3 \\
\lambda_7 &= - \Delta_{II} + Q - (II) - h_7 & g_7 &= \frac{10}{1.9} = 5.3
\end{aligned}$$

A 3. alatti utolsó egyenletrendszert *feltételi egyenletek*-nek nevezzük.

Kényelmi szempontból súlyegységül egy 10 km-es vonal szintezését választva,

$$g_1 = \frac{10}{1.9} = 5.3, \ldots$$

Előleges értékek legyenek:

$$\begin{aligned}
(I) &= 102.655\ m \\
(II) &= 106.744\ \text{„} \\
(III) &= 106.288
\end{aligned}$$

A feltételi egyenletek abszolut tagjait sorjában ω_1, ω_2, ... jelölve, táblázatos alakban írva a feltételi egyenletek lesznek:

4.

	Δ_I	Δ_{II}	Δ_{III}	ω_{mm}	s	g
$\lambda_1 =$	+ 1	.	.	+ 2	− 3	5.3
$\lambda_2 =$	− 1	.	+ 1	+ 2	− 2	6.3
$\lambda_3 =$	.	.	+ 1	− 3	+ 2	5.0
$\lambda_4 =$	− 1	+ 1	.	− 6	+ 6	5.6
$\lambda_5 =$	.	+ 1	− 1	+ 5	− 5	5.3
$\lambda_6 =$	.	.	− 1	− 3	+ 4	3.3
$\lambda_7 =$	.	− 1	.	− 4	+ 5	5.3

A normál egyenlet együtthatói lesznek:

$$\begin{aligned}
&[a\,a\,g] = + 17.2 \\
&[a\,b\,g] = - 5.6 \quad [b\,b\,g] = + 16.2 \\
&[a\,c\,g] = - 6.3 \quad [b\,c\,g] = - 5.3 \quad [c\,c\,g] = + 19.9 \\
&[a\,\omega\,g] = + 31.6 \quad [b\,\omega\,g] = + 14.1 \quad [c\,\omega\,g] = - 19.0 \quad [\omega\,\omega\,g] = + 540.0 \\
&[a\,s\,g] = - 36.9 \quad [b\,s\,g] = - 19.4 \quad [c\,s\,g] = + 10.7 \quad [\omega\,s\,g] = - 566.7
\end{aligned}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Normál egyenlet:

$$\begin{array}{rrrr} +\underline{17.2}\,\Delta_I & -\ 5.6\,\Delta_{II} & -\ 6.3\,\Delta_{III} & +\ 31.6 = 0 \\ & +\underline{16.2}\,\Delta_{II} & -\ 5.3\,\Delta_{III} & +\ 14.1 = 0 \\ & & +\underline{19.9}\,\Delta_{III} & -\ 19.0 = 0 \\ & & & +\underline{540.0} = 0 \end{array}$$

Megoldás után az eredmény:

6. . . . . $\Delta_I = -2.59 \qquad \Delta_{II} = -1.88 \qquad \Delta_{III} = -0.37$

A maradék tag $[g\,\lambda\,\lambda] = 438.7 = [\omega\,\omega.\,4]$

A kiegyenlített értékek lesznek:

$$\begin{array}{rl} I. = & (I) + \Delta_I = 102.6550 - 0.002\,6 = 102.652\,4\ m \\ 7. \ldots\ II. = & (II) + \Delta_{II} = 106.7440 - 0.001\,9 = 106.742\,1\ „ \\ III. = & (III) + \Delta_{III} = 106.2880 - 0.000\,4 = 106.287\,6\ „ \end{array}$$

A 6. alatt nyert Δ_I, Δ_{II}, Δ_{III} értékeket behelyettesítve a 4. alatti feltételi egyenletekbe megkapjuk a mérési eredmények javításait; képezve az ily módon nyert javításokból a $[g\,\lambda\,\lambda]$ négyzet összeget, az egyezni tartozik a normál egyenlet megoldásának maradék tagjával $[\omega\,\omega.\,4]$.

Az itt elmondottakat elvégezve:

	$\lambda_1 = -0.6$	$g_1 = 5.3$	$\lambda_1^2 = 0.36$	$\lambda_1^2 g_1 = 1.908$
	$\lambda_2 = +4.2$	$g_2 = 6.3$	$\lambda_2^2 = 17.64$	$\lambda_2^2 g_2 = 111.132$
	$\lambda_3 = -3.4$	$g_3 = 5.0$	$\lambda_3^2 = 11.56$	$\lambda_3^2 g_3 = 57.800$
8. . .	$\lambda_4 = -5.3$	$g_4 = 5.6$	$\lambda_4^2 = 28.09$	$\lambda_4^2 g_4 = 157.304$
	$\lambda_5 = +3.5$	$g_5 = 5.3$	$\lambda_5^2 = 12.25$	$\lambda_5^2 g_5 = 64.925$
	$\lambda_6 = -2.6$	$g_6 = 3.3$	$\lambda_6^2 = 6.76$	$\lambda_6^2 g_6 = 22.308$
	$\lambda_7 = -2.1$	$g_7 = 5.3$	$\lambda_7^2 = 4.41$	$\lambda_7^2 g_7 = 23.373$
				$[g\,\lambda\,\lambda] = 438.750$

Miután $[\omega\,\omega.\,4] = [g\,\lambda\,\lambda]$ a normál egyenlet felállítása és megoldása helyes.

A *feltételi egyenletek felállításának ellenőrzésére* képezzük a kigyenlített magasság különbségeket.

	$H_1 = I - P = 2.072\,4$	$\lambda_1 = H_1 - h_1 = -0.6$
	$H_2 = III - I = 3.635\,2$	$\lambda_2 = H_2 - h_2 = +4.2$
	$H_3 = III - P = 5.707\,6$	$\lambda_3 = H_3 - h_3 = -3.4$
9. . . .	$H_4 = II - I = 4.089\,7$	$\lambda_4 = H_4 - h_4 = -5.3$
	$H_5 = II - III = 0.454\,5$	$\lambda_5 = H_5 - h_5 = +3.5$
	$H_6 = Q - III = 4.712\,4$	$\lambda_6 = H_6 - h_6 = -2.6$
	$H_7 = Q - II = 4.257\,9$	$\lambda_7 = H_7 - h_7 = -2.1$

Miután a 9. alatti javítások egyeznek a 8. alatti javításokkal, számításunk helyes.

A kiegyenlített értékek megbizhatóságának mérlegelése végett középhiba számítást kell végeznünk.

A súlyegység — a jelen esetben súlyegység egy 10 km-es vonal szintezése — várható középhibája

$$\mu = \sqrt{\frac{[g\,\lambda\,\lambda]}{f}} = \sqrt{\frac{438.7}{7-3}} = \pm 10.47 \text{ milliméter}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A *kiegyenlített* értékek várható középhibáinak számítása végett számítsuk ki az összes súlykoefficienseket:

	+ 9.512 66	+ 9.563 81				+ 9.710 87	
− 8.764 47	− 0.748 19	− 0.799 34	− 0.000 00	− 8.841 64	− 0.869 23		
+ 17.2	− 5.6	− 6.3	− 1.0	+ 14.4	− 7.4	− 1.0	
	+ 16.2	− 5.3	0		+ 17.6	0.0	
	− 1.8	− 2.1	− 0.3		− 3.8	− 0.5	
		+ 19.9	0				
		− 2.3	− 0.4				

	+ 9.710 87	+ 8.318 77			+ 8.559 09		
− 8.841 64	− 0.869 23	− 9.477 13	− 0.477 13	− 8.860 12	− 9.698 97	− 0.869 23	
+ 14.4	− 7.4	− 0.3	− 5.6	+ 13.8	− 0.5	− 7.4	
	+ 17.6	− 0.4	− 6.3			− 1.0	
	− 3.8	− 0.2	− 2.9			− 0.3	
			− 1.0				
			− 0.1				

10. .

számláló	− 1.3	− 0.5
nevező	− 14.4	− 13.8
	+ 0.090 3	+ 0.036 2
	Q_{22}	Q_{23}

	+ 8.638 27				+ 13.8	− 1.0
− 8.860 12	− 9.778 15	− 0.963 79	− 0.869 23			
+ 13.8	− 0.6	− 9.2	− 7.4	számláló	− 1.0	
		− 1.1	− 0.3	nevező	− 13.8	
		− 0.4	− 0.3		+ 0.0725	$= Q_{33}$
számláló		− 1.5	− 0.6	− 0.6		
nevező		− 17.2	− 14.4	− 13.8		
		+ 0.087 2	+ 0.041 7	+ 0.043 5		
		Q_{11}	Q_{12}	Q_{13}		

A súlykoefficiensek lesznek sorjában:

$$Q_{11} = + 0.087\,2$$

11. . $Q_{12} = + 0.041\,7 \qquad Q_{22} = + 0.090\,3$

$$Q_{13} = + 0.043\,5 \qquad Q_{23} = + 0.036\,2 \qquad Q_{33} = + 0.0725$$

Most már számíthatók a *kiegyenlített érték középhibái* μ_{AI}, μ_{AII}, μ_{AIII}.

$$\mu_{AI} = \mu\sqrt{Q_{11}} = \pm 3.09 \text{ milliméter}$$

12. . . . . $\mu_{AII} = \mu\sqrt{Q_{22}} = \pm 3.15$ „

$$\mu_{AIII} = \mu\sqrt{Q_{33}} = \pm 2.82 \text{ „}$$

A *kiegyenlített magasságkülönbségek* középhibáinak számítása a függvényértékek középhibái számításának módján történik, de tekintettel kell lennünk arra, hogy kiegyenlítés adta várható középhibákból kell számítanunk a függvényérték középhibáját.

Például $\mu_{h_4} = ?$

$$h_4 = - I + II$$

az egymástól *nem független* várható középhibák pedig: μ_{AI} μ_{AII}.

Irjuk a függvényt a következő alakban: $h_4 = A_1\, I + A_2\, II$; ahol $A_1 = - 1$, $A_2 = + 1$; alkalmazva a 6. §. 61. képletét:

$$\mu_{h_4} = \mu\sqrt{A_1^2\, Q_{11} + A_2^2\, Q_{22} + 2\, A_1\, A_2\, Q_{12}} =$$

$$= 10.47\sqrt{0.087\,2 + 0.090\,3 - 2 \times 0.041\,7} = \pm 3.21 \text{ mm.}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ily módon számíthatók még a μ_{h_2} és μ_{h_5} értékek s lesznek:

$$\mu_{h_2} = \mu\sqrt{A_1^2\, Q_{11} + A_2^2\, Q_{33} + 2\, A_1\, A_2\, Q_{13}} = \pm 2.83 \text{ milliméter}$$

$$\mu_{h_5} = \mu\sqrt{A_1^2\, Q_{22} + A_2^2\, Q_{33} + 2\, A_1\, A_2\, Q_{23}} = \pm 3.15 \quad \text{„}$$

A μ_{h_1}, μ_{h_3}, μ_{h_6}, μ_{h_7} számítása nem is szükséges, mert $\mu_{h_1} = \mu_{\Delta_I}$, $\mu_{h_3} = \mu_{\Delta_{III}}$, $\mu_{h_6} = \mu_{\Delta_{III}}$, $\mu_{h_7} = \mu_{\Delta_{II}}$.

Az eredmények összeállítása:

I	= 102.6524 m	μ_{Δ_I}	= ± 3.09	milliméter
II	= 106.7421 „	$\mu_{\Delta_{II}}$	= ± 3.15	„
III	= 106.2876 „	$\mu_{\Delta_{III}}$	= ± 2.82	„
H_1	= 2.0724 „	μ_{h_1}	= ± 3.09	„
H_2	= 3.6352 „	μ_{h_2}	= ± 2.83	„
H_3	= 5.7076 „	μ_{h_3}	= ± 2.82	„
H_4	= 4.0897 „	μ_{h_4}	= ± 3.21	„
H_5	= 0.4545 „	μ_{h_5}	= ± 3.15	„
H_6	= 4.7124 „	μ_{h_6}	= ± 2.82	„
H_7	= 4.2579 „	μ_{h_7}	= ± 3.15	„
		$\mu_{10\ km}$	= ± 10.47	milliméter

6. példa.

Állomás kiegyenlítések.

A közvetitő mérések kiegyenlítésének igen gyakori alkalmazását találjuk az állomás kiegyenlítéseknél. Ha valamely állomáson — háromszögponton — összefutó ν számú irány relatív helyzetének meghatározására $(\nu-1)$-nél több, egymástól független szög, vagy ν számú iránynál több irányérték áll rendelkezésünkre, akkor a fölös számú mérések révén az egymásnak többé-kevésbbé ellentmondó mérési eredményekből a keresett szög vagy irányértékek legmegbizhatóbb értékeit kell kiszámítanunk.

Anélkül, hogy e helyütt a szög és iránymérés közötti különbséget tárgyalnók: akár szög, akár iránymérések esetében a fölös számú mérések révén, az előbbiekben tárgyalt elvek szerint a közvetitő mérések kiegyenlítését fogjuk alkalmazni, egymástól független ismeretlenekkel.

α.

Az A pontban összefutó B, C, D, E irányok meghatározása végett a következő egymástól független, zérus középértékü hibát tartalmazó, egyenlő súlyú mérési eredmények állanak rendelkezésünkre:

1.	$\sphericalangle 1 = 20°\ 0'\ 10.''21$	$g = 1$
	$\sphericalangle 2 = 65°\ 12'\ 31.''43$	$g = 1$
	$\sphericalangle 3 = 96°\ 25'\ 51.''72$	$g = 1$
	$\sphericalangle 4 = 45°\ 12'\ 22.''76$	$g = 1$
	$\sphericalangle 5 = 76°\ 25'\ 40.''28$	$g = 1$
	$\sphericalangle 6 = 31°\ 13'\ 22.''83$	$g = 1$

Miután a kiegyenlítést a közvetitő mérések kiegyenlítése szerint egymástól független ismeretlenekkel akarjuk elvégezni, a mérési eredményeket az ismeretlenek ugyanazon értékrendszerének függvényeként kell előállítanunk. Válasszuk egymástól független ismeretlenekül a 8. ábrán feltüntetett x, y, z értékeket, amelyek szükségesek és elegendők a 4 irány relatív helyzetének meghatározására.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A *hibátlan mérési eredmények* és az *ismeretlenek hibátlan értékei* között mathematikai kapcsolatok állanak fenn, amelyeket *feltételi egyenleteknek nevezünk.* E mathematikai kapcsolatok állanak a *kiegyenlített értékekre* is.

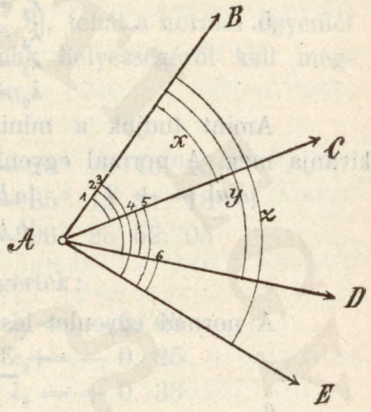
Legyenek a mérési eredmények *kiegyenlített* értékei sorjában:

$$\begin{array}{lll} 1^*)+\lambda_1 & 3+\lambda_3 & 5+\lambda_5 \\ 2+\lambda_2 & 4+\lambda_4 & 6+\lambda_6 \end{array}$$

A $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ javító értékrendszertől megkívánjuk, hogy $[\lambda\lambda]$ minimum legyen.

A mérési eredmények *kiegyenlített* értékei és az egymástól független ismeretlenek kiegyenlített értékei között felírhatók a következő feltételi egyenletek:

$$2.\quad \begin{array}{l} 1+\lambda_1 = +x \quad . \quad . \\ 2+\lambda_2 = \quad . +y \quad . \\ 3+\lambda_3 = \quad . \quad . +z \\ 4+\lambda_4 = -x+y \quad . \\ 5+\lambda_5 = -x \quad . +z \\ 6+\lambda_6 = \quad . -y+z \end{array}$$



8. ábra.

Amint eddig is tettük, az ismeretlenek helyébe a kényelmesebb számítás végett, azok *előleges* értékeit (x), (y), (z) vezetjük be, úgy hogy

$$\begin{array}{l} x = (x) + \Delta x \\ y = (y) + \Delta y \\ z = (z) + \Delta z \end{array}$$

Ezeket az értékeket a feltételi egyenletekbe behelyettesítve s λ-ák szerint rendezve, kapjuk:

$$3.\quad \begin{array}{ll} \lambda_1 = +\Delta x + ((x) - 1) & \text{legyen} \quad (x) - 1 = \omega_1 \\ \lambda_2 = +\Delta y + ((y) - 2) & \quad\quad (y) - 2 = \omega_2 \\ \lambda_3 = +\Delta z + ((z) - 3) & \quad\quad (z) - 3 = \omega_3 \\ \lambda_4 = -\Delta x + \Delta y + ((y) - (x) - 4) & \quad\quad (y) - (x) - 4 = \omega_4 \\ \lambda_5 = -\Delta x + \Delta z + ((z) - (x) - 5) & \quad\quad (z) - (x) - 5 = \omega_5 \\ \lambda_6 = -\Delta y + \Delta z + ((z) - (y) - 6) & \quad\quad (z) - (y) - 6 = \omega_6 \end{array}$$

A feltételi egyenletek végleges alakja lesz tehát:

$$4.\quad \begin{array}{l} \lambda_1 = +\Delta x + \omega_1 \\ \lambda_2 = +\Delta y + \omega_2 \\ \lambda_3 = +\Delta z + \omega_3 \\ \lambda_4 = -\Delta x + \Delta y + \omega_4 \\ \lambda_5 = -\Delta x + \Delta z + \omega_5 \\ \lambda_6 = -\Delta y + \Delta z + \omega_6 \end{array}$$

Legyenek az előleges értékek: $(x) = 20^\circ\ 0'\ 11.''00$

$(y) = 65^\circ\ 12'\ 32.''00$

$(z) = 96^\circ\ 25'\ 53.''00$

Miután a kiegyenlítés csak a másodpercek egységeire vonatkozik, a fokot, percet el is hagyhatjuk. Úgy hogy:

$(x) = 11.''00$

$(y) = 32.''00$

$(z) = 53.''00$

*) 1, 2, 3 . . . számok a mért szögeket jetentik.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Most már a 3. alatti egyenlőség alapján:

$$\omega_1 = (x) - 1 = 11.''00 - 10.''21 = + 0.''79$$
$$\omega_2 = (y) - 2 = 32.''00 - 31.''43 = + 0.''57$$
$$\omega_3 = (z) - 3 = 53.''00 - 51.''72 = + 1.''28$$
$$\omega_4 = (y) - (x) - 4 = 21.''00 - 22.''76 = - 1.''76$$
$$\omega_5 = (z) - (x) - 5 = 42.''00 - 40.''28 = + 1.''72$$
$$\omega_6 = (z) - (y) - 6 = 21.''00 - 22.''83 = - 1.''83$$

Behelyettesitve a most nyert abszolut tagokat a feltételi egyenletekbe:

5. . . . .
$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= + \Delta x \quad . \quad . \quad . \quad . + 0.79 \\
\lambda_2 &= \quad . \quad . + \Delta y \quad . \quad . + 0.57 \\
\lambda_3 &= \quad . \quad . \quad . \quad . + \Delta z + 1.28 \\
\lambda_4 &= - \Delta x + \Delta y \quad . \quad . - 1.76 \\
\lambda_5 &= - \Delta x \quad . \quad . + \Delta z + 1.72 \\
\lambda_6 &= \quad . \quad . - \Delta y + \Delta z - 1.83
\end{aligned}$$

Amint tudjuk a minimum feltételének kielégítése a normál egyenlet megoldását kívánja meg. A normál egyenlet együtthatói lesznek:

$$[a\,a] = + 3 \qquad [a\,b] = - 1 \qquad [a\,c] = - 1 \qquad [a\,\omega] = + 0.83$$
$$[b\,b] = + 3 \qquad [b\,c] = - 1 \qquad [b\,\omega] = + 0.64$$
$$[c\,c] = + 3 \qquad [c\,\omega] = + 1.17$$
$$[\omega\,\omega] = + 11.96$$

A normál egyenlet lesz:

6. . . . .
$$\begin{aligned}
+ 3\,\Delta x - \Delta y - \Delta z + 0.83 &= 0 \\
+ 3\,\Delta y - \Delta z + 0.64 &= 0 \\
+ 3\,\Delta z + 1.17 &= 0 \\
+ 11.96 &= 0
\end{aligned}$$

A normál egyenlet megoldása:

− 9.522 88	+ 9.522 88	+ 9.522 88	− 9.441 96	
+ 0.477 12	− 0.000 00	− 0.000 00	+ 9.919 08	
+ 3	− 1	− 1	+ 0.83	$\log \Delta x = 9.93952$ n
	+ 3	− 1	+ 0.64	$\Delta x = - 0.87$
	− 0.33	− 0.33	+ 0.28	
		+ 3	+ 1.17	
		− 0.33	+ 0,28	
			+ 11.96	
			− 0.23	
	− 9.573 49	+ 9.697 34	− 9.537 28	
	+ 0.426 51	− 0.123 85	+ 9.963 79	
	+ 2.67	− 1.33	+ 0.92	$\log \Delta y = 9.913\,81$ n
		+ 2.67	+ 1.45	$\Delta y = - 0.82$
		− 0.66	+ 0.46	
			+ 11.73	
			− 0.32	
		− 9.696 80	− 9.977 83	
		+ 0.303 20	+ 0.281 03	
		+ 2.01	+ 1.91	$\log \Delta z = 9.97783$ n
			+ 11.41	$\Delta z = - 0.95$
			− 1.81	
			$[\omega\,\omega.\,3] = 9.60$	

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A normál egyenletből nyert javítások (Δx, Δy, Δz) segélyével először is *ellenőrzésről* kell gondoskodnunk. Az 5. alatti feltételi egyenletekbe behelyettesítve Δx, Δy, Δz értékeket, megkapjuk a mérési eredmények javításait.

8. . . . .

$\lambda_1 = -0.87 + 0.79 = -0.08$		$\lambda_1^2 = 0.006$
$\lambda_2 = -0.82 + 0.57 = -0.25$		$\lambda_2^2 = 0.062$
$\lambda_3 = -0.95 + 1.28 = +0.33$		$\lambda_3^2 = 0.109$
$\lambda_4 = +0.87 - 0.82 - 1.76 = -1.71$		$\lambda_4^2 = 2.924$
$\lambda_5 = +0.87 - 0.95 + 1.72 = +1.64$		$\lambda_5^2 = 2.690$
$\lambda_6 = +0.82 - 0.95 - 1.83 = -1.96$		$\lambda_6^2 = 3.842$
		$[\lambda\,\lambda] = 9.633$

Miután a feltételi egyenletekből számított $[\lambda\,\lambda] = [\omega\,\omega.\ 3]$, tehát a normál egyenlet megoldása helyes. Most még a feltételi egyenletek felállításának helyességéről kell meggyőződnünk, a *kiegyenlített* értékekből számított javítások révén.

A kiegyenlített értékek lesznek:

$x = (x) + \Delta x = 11.00 - 0.87 = 10.''13$	$x = 20°\ 0'\ 10.''13$
$y = (y) + \Delta y = 32.00 - 0.82 = 31.''18$	$y = 65°\ 12'\ 31.''18$
$z = (z) + \Delta z = 53.00 - 0.95 = 52.''05$	$z = 96°\ 25'\ 52.''05$

9. . . . .

Kiegyenlitett szögértékek:	Mért szögérték:	
$\sphericalangle 1 = 20°\ 0'\ 10.''13$	$20°\ 0'\ 10.''21$	$\lambda_1 = -0.''08$
$\sphericalangle 2 = 65°\ 12'\ 31.''18$	$65\ 12\ 31\ 43$	$\lambda_2 = -0.25$
$\sphericalangle 3 = 96°\ 25'\ 52.''05$	$96\ 25\ 51\ 72$	$\lambda_3 = +0.33$
$\sphericalangle 4 = 45°\ 12'\ 21.''05$	$45\ 12\ 22.\ 76$	$\lambda_4 = -1.71$
$\sphericalangle 5 = 76°\ 25'\ 41.''92$	$76\ 25\ 40.\ 28$	$\lambda_5 = +1.64$
$\sphericalangle 6 = 31°\ 13'\ 20.''87$	$31\ 13\ 22.\ 83$	$\lambda_6 = -1.96$

A mért és kiegyenlített szögértékekből képezett javítások (lásd 8. és 9. alatti eredményeket) szigoruan egyeznek tehát a kiegyenlitő számításban hiba nincs.

Most még a kiegyenlített értékek megbízhatóságának megitélése végett középhiba számítást kell végeznünk.

Az egységsúlyú mérési eredmény — a jelen esetben egy két távcső állásban mért szögérték — várható középhibája.

$$\mu_o = \sqrt{\frac{[\lambda\,\lambda]}{f}} = \sqrt{\frac{9.63}{3}} = \sqrt{3.21} = \pm 1.''79$$

A *kiegyenlített* értékek középhibái $\mu_x = \mu_y = \mu_z$

$$\mu_z = \frac{\mu_o}{\sqrt{g_z}} = \frac{1.79}{\sqrt{2.01}} = \pm 1.''27$$

$$\mu_x = \mu_y = \mu_z$$

A kiegyenlített 1, 2, . . . szögértékek középhibáit lineáris függvény alakokból kell számítanunk, ugyanis

$$\begin{aligned}
\sphericalangle 1 &= x \\
\sphericalangle 2 &= y \\
\sphericalangle 3 &= z \\
\sphericalangle 4 &= y - x \\
\sphericalangle 5 &= z - x \\
\sphericalangle 6 &= z - y
\end{aligned}$$

tehát $\mu_1 = \mu_x$; $\mu_2 = \mu_y$; $\mu_3 = \mu_z$.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A 4, 5, 6 szögek a kiegyenlített x, y, z szögekből képzendők s igy középhibáik számitása 6. §-ban tárgyalt elvek szerint történik.

Például kerestetik μ_4?

$$\sphericalangle 4 = y - x$$

ahol ismeretesek: $\mu_y \quad \mu_x$

μ_y, μ_x egymástól nem független — kiegyenlítés adta — középhibák s igy μ_4 a 6. §. 61. képlete szerint számítható.

$$\sphericalangle 4 = A_1 y + A_2 x; \qquad \text{ahol } A_1 = +1; \qquad A_2 = -1.$$

A hivatkozott 61. képletet alkalmazva:

$$10. \ldots \mu_4 = \mu\sqrt{A_1^2[\alpha\alpha] + A_2^2[\beta\beta] + 2A_1A_2[\alpha\gamma]} = \mu\sqrt{A_1^2 Q_{11} + A_2^2 Q_{22} + 2A_1A_2[Q_{12}}$$

A középhiba számításhoz szükségünk van tehát a *súlykoefficiensekre*, melyeket az ismert módon a normál egyenletből határozunk meg.

A súlykoefficiensek meghatározására az általános tárgyalásban bemutattunk ugyan már példát, mindamellett a kezdők utánszámításának megkönnyitésére a számítás teljes menetét közöljük.

A 7. alatti normál egyenlet abszolut tagjai helyébe 1, 0, 0 értéket helyettesítve, a μ_4 számításához szükséges súlykoefficiensek a következő egyenletrendszerből számíthatók:

	+ 9.522 88	+ 9.522 88	+ 9.522 88			
— 9.522 88	— 0.000 00	— 0.000 00	— 0.000 00			
+ 3	— 1	— 1	— 1.00			
	+ 3	— 1	0.00			
	— 0.33	— 0.33	— 0.33			
		+ 3	0.00			
		— 0.33	— 0.33			
		+ 9.697 34	+ 9.215 85			
	— 9.573 49	— 0.123 85	— 9.518 51	— 0.000 00		
	+ 2.67	— 1.33	— 0.33	— 1.00		
11. . . .		+ 2.67	— 0.33	— 1.00		
		— 0.66	— 0.16	— 0.50		
				— 1.00		
				— 0.16		
			+ 9.387 00			
		— 9.696 80	— 9.690 20	— 1.176 09	— 0.123 85	
		+ 2.01	— 0.49	— 1.50	— 1.33	
				— 1.16	— 0.33	
				— 0.37	— 0.33	
			számláló	— 1.53	— 0.66	— 0.49
			nevező	— 3.00	— 2.67	— 2.01
				+ 0.5	+ 0.25	+ 0.25
				$Q_{11} = [\alpha\alpha]$	$Q_{12} = [\alpha\beta]$	$Q_{13} = [\alpha\gamma]$

Bemutatjuk e helyütt a *normál egyenletek megoldásának* egy igen egyszerü módját.

$$\begin{array}{rrrrr} +3Q_{11} & -Q_{12} & -Q_{13} & -1.00 & =0 \\ -Q_{11} & +3Q_{12} & -Q_{13} & +0 & =0 \\ -Q_{11} & -Q_{12} & +3Q_{13} & +0 & =0 \\ \hline +Q_{11} & +Q_{12} & +Q_{13} & -1 & =0 \end{array}$$

Ez az utolsó egyenlet nem egyéb, mint a három normál egyenlet összege.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Hozzáadva ezt sorjában minden egyenlethez, lesz:

$$+ 4\,Q_{11} - 2 = 0; \qquad Q_{11} = + 0.5$$
$$+ 4\,Q_{12} - 1 = 0; \qquad Q_{12} = + 0.25$$
$$+ 4\,Q_{13} - 1 = 0; \qquad Q_{13} = + 0.25$$

Amint láthatjuk speciális esetekben igen egyszerü lehet normál egyenletek megoldása.

A most számított értékeket behelyettesítve a 10.-be

$$12. \ldots\ldots \mu_4 = \mu \sqrt{0.5 + 0.5 - 2 \times 0.25} = \mu \sqrt{0.5} = \pm 1.''27$$

Tehát azt az eredményt kaptuk, hogy a 4, 5, 6 képezett szögek középhibái egyenlők μ_x, μ_y, μ_z-vel.

Végeredmény:

$$x = 20^\circ\ 0'\ 10.''13 \qquad \mu_x = \pm 1.''27 = \mu \sqrt{0.5}$$
$$y = 65\ 12\ 31.\ 18 \qquad \mu_y = \pm 1.\ 27 = \mu \sqrt{0.5}$$
$$z = 96\ 25\ 52.\ 05 \qquad \mu_z = \pm 1.\ 27 = \mu \sqrt{0.5}$$

$$g_x = g_y = g_z = 2 = \frac{1}{Q_{11}}$$
$$g_4 = g_5 = g_6 = 2$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_6 = \mu \sqrt{0.5} = \pm 1.''27$$

Tehát minden kombinációban végezve a szögmérést, — 4 irány esetén — ha a mért szögek súlya = 1, a *kiegyenlített* szögértékek súlya = 2; általánosságban r irány esetében a kiegyenlített szögértékek súlya $\frac{r}{2}$;

Az előbb kiegyenlített szögértékek irányérték alakban irva lesznek:

$$A = 0^\circ\ 0'\ 0.''00$$
$$B = 20\ 0\ 10.\ 13$$
$$C = 65\ 12\ 31.\ 18$$
$$D = 96\ 25\ 52.\ 05$$

ahol egy-egy irányérték súlya = 2.

Felhasználjuk itt az alkalmat arra is, hogy röviden az iránymérések és a szögmérések közötti vonatkozásokat megállapitsuk. A szög nem egyéb mint két irányérték különbsége; ha l_j, l_b-vel jelöljük az irányértékeket, akkor $\alpha_{\sphericalangle} = l_j - l_b$; legyen az iránymérés középhibája μ, akkor az irányértékekből képezett szögérték várható középhibája:

$$\mu_\alpha = \sqrt{\mu^2 + \mu^2} = \mu \sqrt{2}$$

Ha egy irányérték súlya $g_i = 1$, akkor a szögérték súlya ($g_{\sphericalangle}$) a középhiba és súly közötti ismert összefüggésből számítható:

$$g_i : g_{\sphericalangle} = \mu_\alpha^2 : \mu^2$$
$$1 : g_{\sphericalangle} = 2\mu^2 : \mu^2$$
$$g_{\sphericalangle} = \frac{1}{2}$$

Tehát ha az irányérték súlya = 1, a szögérték súlya = $\frac{1}{2}$. Ezt az eredményt felhasználva a fenti példánál, a következőket állapithatjuk meg: a négy irányt minden

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

kombinációban mérve, a kiegyenlített szögértékek súlya = 2, illetve egy-egy irányérték súlya is = 2; ha két teljes fordulóban mértük volna az összes irányokat, akkor egy kiegyenlített irányérték súlya = 2.

Egy két távcső állásban mért irány középhibája legyen μ, akkor 4 irány esetében egy *kiegyenlített* irány közéghibája $\mu_i = \frac{\mu}{\sqrt{4}} = \frac{\mu}{2}$ s így a kiegyenlitett irányokból képezett bármelyik szög középhibája $\mu_{\sphericalangle} = \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + \frac{\mu^2}{4}} = \mu\sqrt{0.5}$; tehát ugyanazt az eredményt kapjuk iránymérés esetében, mintha szögmérést végeztünk volna minden kombinacióban.

Miután azonosak az eredmények a módszerek megválasztásánál az fog dönteni, hogy melyik módszer gazdaságosabb.

A most tárgyalt példánál szögmérést végezve minden kombinációban — kettős távcső állásban végezve a méréseket — 24 irányértéket kell leolvasnunk; ha iránymérést végeztünk volna két *teljes* fordulóban 16 irányértéket kellett volna leolvasnunk.

Még kedvezőtlenebb lesz az arány több irány esetén, mert a kombinációk száma rohamosan nő. Például 6 irány esetében a kombinációk száma 15 s így a *mért irányértékek* száma = 60; ha iránymérést végzünk két teljes fordulóban, a mért irányértékek száma 24.

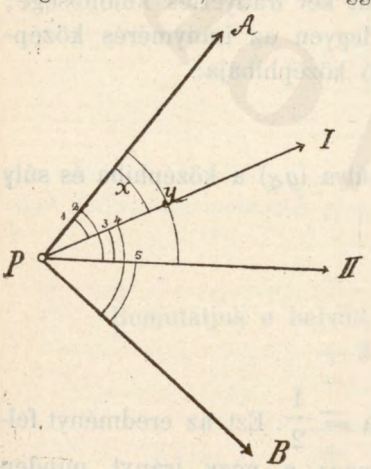
Amint látjuk az iránymérés feltétlenül gazdaságosabb, *addig amig teljes fordulókat* mérhetünk. Rövidebb irányok rendszerint mérhetők teljes fordulóban, de hosszú irányok, aminők az I. r. hálózatokban vannak, ritkán mérhetők teljes fordulóban.

Az iránymérés másik nagy hátránya, hogy a meteorologiai viszonyok változása következtében alig tételezhető fel egyrészt a limbus állás változatlansága, másrészt az azimutális értelmű refrakcio változatlansága a mérés alatt.

Mint végeredményt kimondhatjuk, hogy I. r. hálózatokban legelőnyösebben a szögmérés, alsóbb rendű hálózatokban az iránymérés alkalmazható.

β.

Igen gyakran előfordúl az az eset, hogy szilárd szárak közé kell új irányokat meghatároznunk, tehát a függetlenül mért szögértékeink nemcsak a $[g\,\lambda\,\lambda]$ minimum feltételnek megfelelő javításokat kapnak, hanem bizonyos *kényszert* is tartoznak kielégíteni.



9. ábra.

P pontról a PA, PB irányok közé PI és PII irányok helyzete határozandó meg. Szögmérést végeztünk, mérési eredményeink 1., 2., . . ., 5. egymástól független, egyenlő súlyú szögértékek, melyekről feltesszük, hogy csak zérus középértékű hibát tartalmaznak.

A feladatot közvetítő mérések kiegyenlítéseként egymástól független ismeretlenekkel akarjuk végezni, tehát a mérési eredményeket ugyanazon ismeretlenek értékrendszerének függvényeként kell előállítanunk.

Válasszuk ismeretlenekül az x, y szögértékeket.

Adott az $APB_{\sphericalangle} = a = 91° 27' 30.''65$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Mérési eredmények:

1. . . . . 1 = 33° 10′ 45.″00
2 = 55 40 53. 14
3 = 22 30 10. 62
4 = 58 16 42. 17
5 = 35 46 33. 45

A feltételi egyenletek lesznek:

$1 + \lambda_1 = x = (x) + \Delta x$
$2 + \lambda_2 = y = (y) + \Delta y$
$3 + \lambda_3 = y - x = (y) - (x) + \Delta y - \Delta x$
$4 + \lambda_4 = \alpha - x = \alpha - (x) - \Delta x$
$5 + \lambda_5 = \alpha - y = \alpha - (y) - \Delta y$

Legyen $(x) = 33° 10′ 45.″00$
$(y) = 55 40 54. 09$
$(y) - (x) = 22 30 9. 00$

λ-ák szerint rendezve:

$\lambda_1 = + \Delta x \quad . \quad + (x) - 1$
$\lambda_2 = \quad . \quad + \Delta y + (y) - 2$
$\lambda_3 = - \Delta x + \Delta y + (y) - (x) - 3$
$\lambda_4 = - \Delta x + . \quad + \alpha - (x) - 4$
$\lambda_5 = \quad . \quad - \Delta y + \alpha - (y) - 5$

$(x) - 1 = 0.″00$
$(y) - 2 = + 0. 86$
$(y) - (x) - 3 = - 1. 62$
$\alpha - (x) - 4 = + 3. 48$
$\alpha - (y) - 5 = + 3. 20$

A feltételi egyenletek végleges alakja lesz:

2. . . . . $\lambda_1 = + \Delta x \quad . \quad + 0.″00$
$\lambda_2 = \quad . \quad + \Delta y + 0. 86$
$\lambda_3 = - \Delta x + \Delta y - 1. 62$
$\lambda_4 = - \Delta x \quad . \quad + 3. 48$
$\lambda_5 = \quad . \quad - \Delta y + 3. 20$

A normál egyenlet együtthatói:

$[a\,a] = + 3 \qquad [a\,b] = - 1 \qquad [a\,\omega] = - 1.86$
$[b\,b] = + 3 \qquad [b\,\omega] = - 3.96$
$[\omega\,\omega] = + 25.71$

A normál egyenletek megoldása:

Δx	Δy	
− 9.52288	+ 9.52288	+ 9.79239
+ 0.47712	− 0.00000	− 0.26951
+ 3	− 1	− 1.86
	+ 3	− 3.96
	− 0.33	− 0.62
		+ 25.71
		− 1.15

num. log. − 9.52288 = − 0.33
„ − 9.79239 = − 0.62
„ − 0.06190 = − 1.15

	− 9.57349	+ 0.23436
	+ 0.42651	− 0.66087
	+ 2.67	− 4.58
		+ 24.56
		− 7.86

num. log. − 0.89523 = − 7.86

$[\omega\,\omega.\ 2] = + 16.70$
$log\ \Delta y = 0.23436$
$\Delta y = + 1.72$

3. . . . .

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Δy	Δx	
− 9.52288	+ 9.52288	+ 0.12058
+ 0.47712	− 0.00000	− 0.59770
+ 3	− 1	− 3.96
	+ 3	− 1.86
	− 0.33	− 1.32
		+ 25.71
		− 5.23

num. log. − 9.52288 = − 0.33
„ − 0.12058 = − 1.32
„ − 0.71828 = − 5.23

− 9.57349	+ 0.07592	
+ 0.42651	− 0.50243	
+ 2.67	− 3.18	
	+ 20.48	
	− 3.79	

num. log. − 0.57835 = − 3.79

$[\omega\omega].\ 2] = + 16.69$
$log\ \Delta x = 0.07592$
$\Delta x = + 1.19$

A kiegyenlített értékek lesznek:

$$x = (x) + \Delta x = 33^\circ\ 10'\ 45.''00 + 1.''19 = 33^\circ\ 10'\ 46.''19$$
$$y = (y) + \Delta y = 55\ \ 40\ \ 54.00\ \ + 1.72\ \ = 55\ \ 40\ \ 55.72$$

A 2. alatti feltételi egyenletekbe helyettesítve a Δy, Δx értékeket, kapjuk a mérési eredmények javításait:

4. . .

$$\lambda_1 = + 1.19 + 0.00 \qquad = + 1.''19 \quad | \quad \lambda_1^2 = 1.416$$
$$\lambda_2 = + 1.72 + 0.86 \qquad = + 2.\ 58 \quad | \quad \lambda_2^2 = 6.656$$
$$\lambda_3 = - 1.19 + 1.72 - 1.62 = - 1.\ 09 \quad | \quad \lambda_3^2 = 1.188$$
$$\lambda_4 = - 1.19 + 3.48 \qquad = + 2.\ 29 \quad | \quad \lambda_4^2 = 5.244$$
$$\lambda_5 = - 1.72 + 3.20 \qquad = + 1.\ 48 \quad | \quad \lambda_5^2 = 2.190$$
$$[\lambda\lambda] = 16.694$$

A most nyert $[\lambda\lambda]$ egyezik a normál egyenletek maradéktagjával s így a normál egyenletek felállítása és megoldása helyes.

A kiegyenlített mérési eredmények lesznek:

5. . . . . .

$$1 = 33^\circ\ 10'\ 46.''19$$
$$2 = 55\ \ 40\ \ 55.\ 72$$
$$3 = 22\ \ 30\ \ 9.\ 53$$
$$4 = 58\ \ 16\ \ 44.\ 46$$
$$5 = 35\ \ 46\ \ 34.\ 93$$

Levonva ezekből sorjában az 1. alatti mérési eredményeket:

6. . . . . .

$$\lambda_1 = + 1.19$$
$$\lambda_2 = + 2.58$$
$$\lambda_3 = - 1.09$$
$$\lambda_4 = + 2.29$$
$$\lambda_5 = + 1.48$$

Miután e javítások szigorúan egyeznek a feltételi egyenletekből számított javításokkal, a kiegyenlítő számításban hiba nincs.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A súlyegység — tehát egy *mért* szög — várható középhibája:

$$7. \ldots\ldots\ldots \mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{f}} = \sqrt{\frac{16.694}{3}} = \pm 2.''359$$

A *kiegyenlített* értékek középhibája:

$$\mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{g_x}} = \frac{2.359}{\sqrt{2.67}} = \pm 1.''445 \qquad \mu_y = \frac{\mu}{\sqrt{g_y}} = \frac{2.359}{\sqrt{2.67}} = \pm 1.''445$$

Amint látjuk a kiegyenlítő számítás minden kiegyenlített érték súlyát 2.67-nek adja, tehát irány értékek alakjában írva:

$$\begin{aligned} PA &= \ 0^\circ\ 0'\ 0.''00 \\ PI &= 33\ \ 10\ 46.19 \quad \text{és} \quad g = 2.67 \\ PII &= 55\ \ 40\ 55.72 \end{aligned}$$

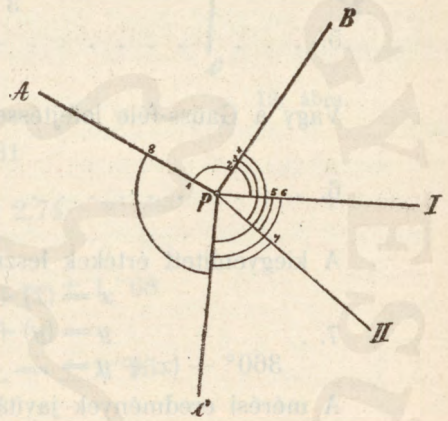
7.

Toronyban végezve szögmérést, az egy-egy ablakból való korlátolt kilátás miatt, az összes szögek nem mérhetők egy műszerállásból.

Tegyük fel, hogy három állásból végeztük a szögmérést s az excentrikus állásból a középpontra átvitt egyenlő súlyú mért szögértékeink a következők:

1. . . . .

$$\begin{aligned} 1 \sphericalangle &= \ 87^\circ\ 25'\ 35.''42 \\ 2 \sphericalangle &= \ 51^\circ\ 37\ 10.\ 02 \\ 3 \sphericalangle &= 102\ \ 24\ 45.\ 00 \\ 4 \sphericalangle &= 168\ \ 35\ \ 2.\ 61 \\ 5 \sphericalangle &= \ 50\ \ 47\ 36.\ 21 \\ 6 \sphericalangle &= 116\ \ 57\ 57.\ 10 \\ 7 \sphericalangle &= \ 66\ \ 10\ 19.\ 38 \\ 8 \sphericalangle &= 103\ \ 59\ 26.\ 40 \end{aligned}$$



10. ábra.

Meghatározandók A, B, I, II, C kiegyenlített irányértékek.

Igen egyszerű megfontolások arra vezetnek bennünket, hogy a kiegyenlítést két *lépésben* lesz célszerű elvégeznünk.

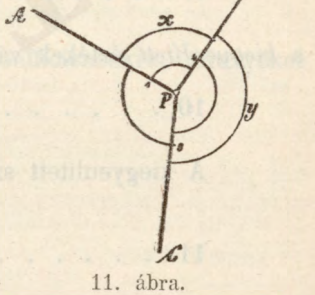
A kiegyenlített értékek ugyanis a $[g\,\lambda\,\lambda]$ minimum feltételen kívül még egy feltételnek eleget tartoznak tenni, nevezetesen kell, hogy

$$\sphericalangle AB + \sphericalangle BC + \sphericalangle CA = 360^\circ$$

Ha e feltétel ki lesz elégítve, akkor a 2., 3., . . . 7. szögértékek kiegyenlítését végezzük el, azon megszorítással, hogy $\sphericalangle BC$ adott érték.

Az első lépés lesz tehát az 1., 4., 8. szögértékekben fellépő ellentmondások eltüntetése.

Független változókúl választva az ábrában feltüntetett x, y szögértékeket, a szokásos eljárással kell, hogy



11. ábra.

$$\begin{aligned} 1 + \lambda_1 &= x &&= (x) + \Delta x \\ 4 + \lambda_4 &= y &&= (y) + \Delta y \\ 8 + \lambda_8 &= 360^\circ - (x + y) &&= 360^\circ - ((x) + \Delta x + (y) + \Delta y) \end{aligned}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A feltételi egyenletek tehát lesznek:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (x) + \Delta x - 1 \\ 2.\ \ldots\ldots\ldots\ \lambda_4 &= (y) + \Delta y - 4 \\ \lambda_8 &= 360° - (x)\,\Delta x - (y) - \Delta y - 8 \end{aligned}$$

Legyen: $(x) = 87°\ 25'\ 35.''42$

$(y) = 168\ \ 35\ \ 2.61$

Ezeket az értékeket behelyettesítve a 2. alatti egyenletekbe, a feltételi egyenletek végleges alakja lesz:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= +\Delta x + \ \ . \ \ 0 \\ 3.\ \ldots\ldots\ldots\ \lambda_4 &= \ \ \ \ + \Delta y + 0 \\ \lambda_8 &= -\Delta x - \Delta y - 4.43 \end{aligned}$$

A normál egyenlet lesz:

$$\begin{aligned} &+2\Delta x + \Delta y + 4.43 = 0 \\ 4.\ \ldots\ldots\ldots\ &+\Delta x + 2\Delta y + 4.43 = 0 \end{aligned}$$

A második egyenletet levonva: $+\ \Delta x - \Delta y + 0 = 0$ s ezt hozzáadva mindegyik egyenlethez lesz:

$$\begin{aligned} 3\Delta x + 4.43 &= 0 \\ 5.\ \ldots\ldots\ldots\ \Delta x &= -1.48 \\ \Delta y &= -1.48 \end{aligned}$$

Vagy a Gauss-féle lefejtéssel végezve a normál egyenlet megoldását

$$\begin{aligned} g_x &= +1.5 \\ 6.\ \ldots\ldots\ldots\ g_y &= +1.5 \\ [\omega\,\omega.\,2] &= +6.55 \end{aligned}$$

A kiegyenlített értékek lesznek:

$$\begin{aligned} x = (x) + \Delta x &= 87°\ 25'\ 35.''42 - 1.48 = 87°\ 25'\ 33.''94 \\ 7.\ \ y = (y) + \Delta y &= 168\ \ 35\ \ 2.\ 61 - 1.48 = 168\ \ 35\ \ 1.\ 13 \\ 360° - (x + y = \ldots\ &= 103\ \ 59\ 21.\ 97 + 2.96 = 103\ \ 39\ 24.\ 93 \end{aligned}$$

A mérési eredmények javításai lesznek a 3. alatti feltételi egyenletekből számítva

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1.''48 \\ 8.\ \ldots\ldots\ldots\ \lambda_4 &= -1.''48 \\ \lambda_8 &= -1.''47 \\ [\lambda\,\lambda] &= +6.54 \end{aligned}$$

Az egységsúlyú mérési eredmény várható középhibája:

$$9.\ \ldots\ldots\ \mu = \sqrt{\frac{[\lambda\,\lambda]}{f}} = \sqrt{\frac{6.54}{1}} = \pm 2.''56$$

a *kiegyenlített* értékek várható középhibái pedig lesznek:

$$10.\ \ldots\ldots\ \mu_x = \mu_y = \frac{\mu}{\sqrt{1.5}} = \frac{2.56}{1.22} = \pm 2.''10$$

A kiegyenlített szögértékek irányérték alakjában írva lesznek:

$$\begin{aligned} A &= \ \ 0°\ \ 0'\ \ 0.''00 \\ 11.\ \ldots\ldots\ B &= 87\ \ 25\ 35.\ 42 \\ C &= 256\ \ 0\ 33.\ 94 \end{aligned}$$

a *kiegyenlítés* adta súlyuk $g_A = g_B = g_C = 3$.

Végeredményül tehát azt nyertük, hogy a horizontzárlat *után* mutatkozó ellentmondásokat a mért szögértékekre *egyenlően* el kell osztanunk.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

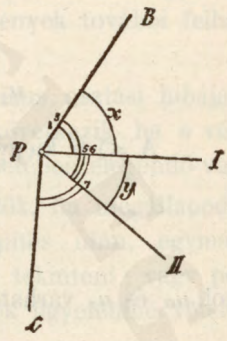
Feladatunk második része a BC szárak közé bemért szögértékek kiegyenlítése, azon megszorítás mellett, hogy $\sphericalangle BPC = 168° 35' 1.''13$

Az ábrában jelölt x, y szögértékeket független változóknak tekintve s tekintettel a $\sphericalangle BPC$ szög által adódó kényszerre, a feltételi egyenletek lesznek:

$$
\begin{aligned}
\lambda_2 &= +\Delta x \quad . \quad + 0 \\
\lambda_3 &= +\Delta x + \Delta y + 1.23 \\
\lambda_5 &= \quad . \quad + \Delta y + 0 \\
\lambda_6 &= -\Delta x \quad . \quad - 5.89 \\
\lambda_7 &= -\Delta x - \Delta y - 4.48
\end{aligned}
\qquad 12.
$$

A normál egyenlet lesz:

$$
\begin{aligned}
\underline{+4\,\Delta x} + 2\,\Delta y + 11.60 &= 0 \\
\underline{+3\,\Delta y} + 2.71 &= 0 \\
\underline{+56.275} &= 0
\end{aligned}
\qquad 13.
$$



12. ábra.

Megoldva az eredmény lesz:

$$
\begin{aligned}
\Delta x &= -2.''92 \\
\Delta y &= +0.\ 05 \\
g_y &= +2.\ 00 \\
g_x &= +2.\ 67 \\
[\omega\omega.\ 2] &= 22.631
\end{aligned}
\qquad 14.
$$

$$\mu = \sqrt{\frac{22.63}{3}} = \pm 2.74$$

$$x = 51° 37' \ \ 7.''10\,; \quad \mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{g_x}} = \pm 1.''68$$

$$y = 50 \ \ 47 \ \ \ 36.25\,; \quad \mu_y = \frac{\mu}{\sqrt{g_y}} = \pm 1.''95$$

A kiegyenlített mérési eredmények s javításaik a következők:

$$
\begin{aligned}
2 &= \ 51° 37' \ \ 7.''10 & \lambda_2 &= -2.''92 \\
3 &= 102 \ \ 24 \ \ 43.\ 35 & \lambda_3 &= -1.\ 65 \\
5 &= \ 50 \ \ 47 \ \ 36.\ 25 & \lambda_5 &= +0.\ 04 \\
6 &= 116 \ \ 57 \ \ 54.\ 13 & \lambda_6 &= -2.\ 97 \\
7 &= \ 66 \ \ 10 \ \ 17.\ 78 & \lambda_7 &= -1.\ 60
\end{aligned}
\qquad 15.
$$

A középhibák számítása végett szükségünk van a súlykoefficiensekre, amelyeket a következő egyenletekből számíthatunk:

$$
\begin{aligned}
\underline{+4}\,Q_{11} + 2\,Q_{12} - 1 &= 0 \\
\underline{+3}\,Q_{12} + 0 &= 0
\end{aligned}
\qquad 16.
$$

A megoldás után lesz:

$$
\begin{aligned}
Q_{11} &= +0.375 = \frac{1}{g_x} \\
Q_{21} = Q_{12} &= -0.25 \\
Q_{22} &= +0.5 \quad = \frac{1}{g_y}
\end{aligned}
$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Számítsuk ki a $\sphericalangle BPII. = 3\sphericalangle$ kiegyenlített értékének várható középhibáját.

$$\sphericalangle 3 = x + y$$

Ismeretesek μ_x, μ_y egymástól nem független — kiegyenlítés adta — várható középhibák. A fenti függvényalakot írjuk a következő alakban:

$$\sphericalangle 3 = A_1 x + A_2 y, \text{ ahol } A_1 = +1,\ A_2 = +1$$

Alkalmazva a függvényérték középhiba számítására a 6. §. 61. képletét:

$$\mu_3 = \mu \sqrt{A_1^2 Q_{11} + A_2^2 Q_{22} + 2 A_1 A_2 Q_{12}}$$

$$\mu_3 = 2.74 \sqrt{+ 0.375 + 0.500 - 2 \times 0.25} = \pm 1.''68$$

A $\sphericalangle 6$ kiegyenlített értékének várható középhibája számítandó.

$$\sphericalangle 6 = \sphericalangle BPC - x,\ \sphericalangle BPC = a$$

akkor $\sphericalangle 6 = a - x$

ahol μ_a és μ_x várható középhibák egymástól *függetlenek* és az előbbi számítástól ismeretesek.

$\mu_a = \pm 2.''10$ (lásd 10. képlet), $\mu_x = \pm 1.''68$ (lásd 14. képlet)

$$\mu_6 = \sqrt{\mu_a^2 + \mu_x^2} = \pm 2.''68$$

E két utóbbi példa jellemzően mutatja a függvényértékek középhibáinak számítását *egymástól független* s *egymástól függő* középhibák esetében.

7. példa.

Iránymérések kiegyenlítése.

Az alsóbbrendű háromszög hálózatok mérésének majdnem egyetlen, de mindenesetre a leggazdaságosabb módja az *iránymérés. Bessel* 1832/35. Kelet-Poroszországban végzett nagy háromszögeléseinél irányokat mért, *fordulónként* más-más körállásban. Az *angolok* is — már a múlt század 40-es éveiben — a felsőrendű hálózatok mérésénél az iránymérést alkalmazták.

Újabban az amerikai *Egyesült-Államokban* fejlesztett nagy *fokmérési* hálózatokban a *„Coast and Geodetic Survey"* is irányokat mért.

A magyarországi alsóbbrendű háromszöghálózatokban kivétel nélkül irányokat mérünk, míg I. r. háromszöghálózatunk szögeit *Schreiber*-féle módon mérjük.

Annak az eldöntése, hogy irány- vagy szögmérést végezzünk-e, igen egyszerű.

A *Schreiber*-féle szögmérés tudományos szempontból a legmegfelelőbb, mert az ily módon mért szögértékekből a *legegyszerűbb* módon nyerhetők a kiegyenlített irányértékek, amelyek mint közvetetlenül mért, egyenlő súlyú, egymástól független irányértékek vezethetők a kiegyenlítésbe.

A mérés *berendezése,* szintén a legideálisabb, mert egyszerre mindig csak 2—2 irányt kell mérnünk. Ez pedig pillanatok alatt elvégezhető, amely rövid idő alatt sem a meteorológiai viszonyok megváltozásától, sem a pillér elcsavarodásától — mint állandó hibaforrástól — nem kell tartanunk.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Az iránymérések — speciális esetekben — vetekednek a Schreiber-féle szögméréssel, nevezetesen akkor, ha sikerül valamennyi irányt egy fordulóba összefoglalva mérnünk s gondoskodunk a hőokozta pillér elcsavarodás hatásának kiküszöböléséről. A teljes fordulóban való iránymérés, a mérés *időtartamának* szempontjából feltétlenül előnyösebb.

Hátrányai azonban *a)* hogy sok irány mérése esetében az állandó hibaforrások — pillér elcsavarodás, műszer stabilitás, stb. — éreztetik hatásukat;

b) hogy *ritkán* sikerül valamennyi irányt *teljes* fordulóban mérnünk s így *csonka* fordulókkal lesz dolgunk.

A csonka fordulókban mért irányok *szigorú* kiegyenlítése — ha a kiegyenlített irányok súlyait is ismerni akarjuk — elég körülményes s az eredmények további felhasználása épen a különböző súlyok miatt lesz igen nehézkes.

A csonka fordulók hátránya az is, hogy a körosztás periodikus osztási hibájának kiküszöbölése, illetve véletlen természetű hibává való tétele nem következik be s végül, hogy sokkal több irányt kell mérnünk, mint amennyi teljes fordulók esetében elegendő volna.

Az iránymérés most felsorolt hibái részben megszüntethetők, ha megállapodunk abban, hogy a csonkafordulókból nyert irányértékeket a kiegyenlítés után, egymástól független, egyenlő súlyú, közvetetlen mérési eredményeknek fogjuk tekinteni; vagy pedig — mint az angolok tették — a kiegyenlítés után mutatkozó javítások figyelembe vételével empirikus úton súlyokat vezetünk be.

Az iránymérések gyakorlati kivitele, a mérések berendezése, valamint a különböző hibaforrások hatásának megszüntetése vagy kiküszöbölése a földméréstan idevágó fejezeteiben talál részletes tárgyalást. E helyütt feltesszük, hogy *zérus középértékű hibát tartalmazó, egymástól független, közvetetlen mérési eredmények* állanak rendelkezésünkre.

Fölös számú mérési eredmények révén meghatározandók a mérési eredmények legvalószínűbb, tehát legnagyobb megbízhatóságú értékei. Ennek a feltételnek a kielégítése a mérési eredmények olyan javító értékrendszerének meghatározását kívánja, amely egyenlő súlyok esetében a $[\lambda\lambda]$, nem egyenlő súlyok esetében a $[g\lambda\lambda]$ függvény alakot minimummá teszi.

Vezessük be a következő jelzéseket:

$I, II, III, \ldots, s$, jelentsék a fordulók számát

$l_1^I, l_2^I, \ldots, l_k^I$ jelentsék az első I fordulóban mért irányértékeket

$l_1^{II}, l_2^{II}, \ldots, l_k^{II}$ „ „ II „ „ „

. . . . . .

$z^I, z^{II}, \ldots$ az $I, II, \ldots$ fordulókhoz tartozó tájékozási állandó

i_1 az $l_1^I, l_1^{II}, \ldots$ mérési eredmények kiegyenlített értéke

i_2 az $l_2^I, l_2^{II} \ldots$ „ „ „ „

. . . . . .

Miután a fordulók tetszőleges körállásban mérettek, minden fordulóhoz tartozik egy egyelőre még ismeretlen szögérték, amelyekkel az egyes fordulók elforgatandók, hogy az elforgatás után megjavítva a nyers mérési eredményeket*) a legvalószínűbb javításokkal, a kiegyenlített irányértékeket adják.

---

*) Az elforgatás után az irányértékeket jogosan nevezzük nyers mérési eredményeknek, mert a fordulók sajátsága, hogy minden irányértéket egy fordulónként állandó értékkel megváltoztathatok, anélkül hogy mérési eredményi jellegük megváltoznék. Két ily elforgatott irányérték közötti különbség, azonos a mért fordulóból képezett irányérték különbséggel.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Nevezzük a mérési eredmények javításait sorban: $\lambda_1^I, \lambda_2^I, \ldots$

$\lambda_1^{II}, \lambda_2^{II}, \ldots$

akkor felírhatók a következő mathematikai összefüggések, illetve feltételi egyenletek:

$$1. \quad \begin{array}{l|l} l_1^I + \lambda_1^I + z^I = i_1 & \lambda_1^I = i_1 - (l_1^I + z^I) \\ l_2^I + \lambda_2^I + z^I = i_2 & \lambda_2^I = i_2 - (l_2^I + z^I) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ l_k^I + \lambda_k^I + z^I = i_k & \lambda_k^I = i_k - (l_k^I + z^I) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ l_1^{III} + \lambda_1^{III} + z^{III} = i_1 & \lambda_1^{III} = i_1 - (l_1^{III} + z^{III}) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ l_k^s + \lambda_k^s + z^s = i_k & \lambda_k^s = i_k - (l_k^s + z^s) \end{array}$$

k jelenti az irányok, *s* a fordulók számát.

A feltételi egyenletekben szereplő z^I, z^{II}, ... tájékozási állandókat *Bessel*-féle 0 pont korrekciónak is nevezik. Ezek úgyis foghatók fel, mint a kiegyenlített értékek körállásának megfelelő 0 irány és a kiegyenlített fordulók 0 iránya közötti különbség.

A különböző körállásban mért fordulók 0 iránya közötti különbség egyenlő az azonos irányokra vonatkozó irányértékek különbségével; de miután minden nyers irányértéket hibák terhelnek, következik, hogy minden irányértékpár más-más 0 pont korrekciót ad. A nyers mérési eredmények adta 0 pont korrekciót nevezhetjük a *z*-ék *mért* értékrendszerének, míg a kiegyenlített mérési eredmények adta összetartozó irányértékpárok különbségei adják a *z*-ék kiegyenlített értékrendszerét.

A kiegyenlített s így egyelőre még ismeretlen értékeink legyenek: $i_1, i_2, \ldots, i_k, z^I, z^{II}, \ldots, z^s$

Módunkban áll ezeknek az értékeknek *előleges* értékeit felvennünk, amelyek a kiegyenlítés *után* javításokat kapnak, úgy hogy

$$2. \quad \begin{array}{ll} i_1 = (i_1) + \lambda_{i_1} & z^I = (z^I) + \lambda_{z^I} \\ i_2 = (i_2) + \lambda_{i_2} & z^{II} = (z^{II}) + \lambda_{z^{II}} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ i_k = (i_k) + \lambda_{i_k} & z^s = (z^s) + \lambda_{z^s} \end{array}$$

Ezeknek az értékeknek a behelyettesítése után a *feltételi* egyenletek általános alakja lesz:

$$\lambda_k^s = (i_k) + \lambda_{i_k} - (l_k^s + (z^s) + \lambda_{z^s})$$

$$\lambda_k^s = -\lambda_{z^s} + \lambda_{i_k} + ((i_k) - (l_k^s + (z^s)))$$

Legyen: $(i_k) - (l_k^s + (z^s)) = \omega_k^s$; akkor

$$3. \quad \ldots\ldots\ldots \lambda_k^s = -\lambda_{z^s} + \lambda_{i_k} + \omega_k^s$$

A feltételi egyenletek száma annyi lesz, mint a hány egymástól független mérési eredményünk van.

A feltételi egyenletek alakjának felállításával tulajdonképeni feladatunk — az elmélet szempontjából — be is van végezve; ezután ugyanis a normál egyenletet kell felállítanunk s megoldanunk.

A részletes tárgyalást mégsem mellőzhetjük a feladat *speciális* volta miatt.

Behatóan kell először is foglalkoznunk a **teljes fordulókkal**, mert az ebből a tárgyalásból levonható szabályok általánosíthatók s a későbbi tárgyalásnál felhasználhatók.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Legyenek a fordulónként mért, egyenlő súlyú mérési eredményeink a következők:

4.

I. ford.	*II.* ford.	. . . .	*s.* ford.
l_1^I	l_1^{II}	. . . .	l_1^s
l_2^I	l_2^{II}	. . . .	l_2^s
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
l_k^I	l_k^{II}	. . . .	l_k^s

A fölös számú mérési eredményekből meghatározandók $i_1, i_2, \ldots i_k, z^I, z^{II}, \ldots z^s$ kiegyenlített értékek.

$(i_1), (i_2), \ldots, (i_k), (z^I), (z^{II}), \ldots, (z^s)$ előleges értékek felvétele után, a szokásos alakban írott feltételi egyenleteink lesznek:

5.
$$\begin{aligned}
\lambda_1^I &= -\lambda_{z^I} + \lambda_{i_1} + \omega_1^I \\
\lambda_2^I &= -\lambda_{z^I} + \lambda_{i_2} + \omega_2^I \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_k^I &= -\lambda_{z^I} + \lambda_{i_k} + \omega_k^I \\
\lambda_1^{II} &= -\lambda_{z^{II}} + \lambda_{i_1} + \omega_1^I \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_k^{III} &= -\lambda_{z^{III}} + \lambda_{i_k} + \omega_k^I \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_k^s &= -\lambda_{z^s} + \lambda_{i^k} + \omega_k^s
\end{aligned}$$

Könnyebb áttekinthetőség végett, írjuk a feltételi egyenleteket táblázatos alakba:

6.

	λ_{z^I}	$\lambda_{z^{II}}$	. .	λ_{z^s}	λ_{i_1}	λ_{i_2}	. .	λ_{i_k}	ω	g
$\lambda_1^I =$	-1	.	.	.	$+1$	.	.	.	ω_1^I	1
$\lambda_2^I =$	-1	.	.	.	.	$+1$	.	.	ω_2^I	1
. . .	. .	.	.	.	.	.	.	.	. . .	. .
$\lambda_k^I =$	-1	.	.	.	.	.	.	$+1$	ω_k^I	1
$[\lambda^I] =$	$-k$	.	.	.	$+1$	$+1$	.	$+1$	$[\omega^I]$	$-\frac{1}{k}$
$\lambda_1^{II} =$	.	-1	.	.	$+1$	.	.	.	ω_1^{II}	1
$\lambda_2^{II} =$	.	-1	.	.	.	$+1$	.	.	ω_2^{II}	1
. . .	.	. .	.	.	.	.	.	.	. . .	. .
$\lambda_k^{II} =$	.	-1	.	.	.	.	.	$+1$	ω_k^{II}	1
$[\lambda^{II}] =$	.	$-k$	.	.	$+1$	$+1$	.	$+1$	$[\omega^{II}]$	$-\frac{1}{k}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\lambda_1^s =$	.	.	.	-1	$+1$	.	.	.	ω_1^s	1
$\lambda_2^s =$	.	.	.	-1	.	$+1$	.	.	ω_2^s	1
. . .	.	.	.	. .	.	.	.	.	. . .	. .
$\lambda_k^s =$	.	.	.	-1	.	.	.	$+1$	ω_k^s	1
$[\lambda^s] =$	.	.	.	$-k$	$+1$	$+1$	.	$+1$	$[\omega^s]$	$-\frac{1}{k}$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A $[\lambda^I]$, $[\lambda^{II}]$, . . ., $[\lambda^s]$ összegegyenletek alkalmazásával elérhetjük, hogy a normál egyenlet egyes tagjai kiesnek. Ezeket az egyenleteket Schreiber-féle fiktív feltételi egyenleteknek nevezzük s súlyuk $g = -\frac{1}{k}$

Egyelőre a Schreiber-féle fektív feltételi egyenletekre való tekintet nélkül, képezzük a normál egyenletet:

7. . .

	$\lambda_z{}^I$	$\lambda_z{}^{II}$	. .	$\lambda_z{}^s$	λ_{i_1}	λ_{i_2}	. .	λ_{i_k}	ω	
$[\lambda^I] =$	$+k$	.	.	.	-1	-1	.	-1	$[\omega^I]$	$= 0$
$[\lambda^{II}] =$	.	$+k$	.	.	-1	-1	.	-1	$[\omega^{II}]$	$= 0$
. . .	.	.	.	.	. .	. .	.	. .	. . .	. .
$[\lambda^s] =$	.	.	.	$+k$	-1	-1	.	-1	$[\omega^s]$	$= 0$
$[\lambda_1] =$	-1	-1	.	-1	$+s$	.	.	.	$[\omega_1]$	$= 0$
$[\lambda_2] =$	-1	-1	.	-1	.	$+s$	.	.	$[\omega_2]$	$= 0$
. . .	. .	.	.	. .	.	.	.	.	. . .	. .
$[\lambda_k] =$	-1	-1	.	-1	.	.	.	$+s$	$[\omega_k]$	$= 0$

Egyszerű megtekintésből láthatjuk, hogy a *normál egyenlet nem egyéb, mint részint a fordulónként, részint az irányonként csoportosított feltételi egyenletek összege.* A normál egyenletek száma egyenlő az ismeretlenek számával.

A jelen esetben **s** számú fordulónk és **k** számú irányunk van, tehát az ismeretlenek száma $= k + s$ s ugyanennyi a normál egyenletek száma is.

A felírt normál egyenletből a következő fontos szabályok vonhatók le:

a) $[\lambda^I] = [\lambda^{II}] = . . . = 0$ *vagyis a javítások összege fordulónként* $= 0$

b) $[\lambda_1] = [\lambda_2] = . . . = 0$ *vagyis a javítások összege irányonként* $= 0$

c) az első egyenletet kiírva:

$$+ k\,\lambda_z{}^I - \lambda_{i_1} - \lambda_{i_2} - . . . - \lambda_{i_k} + [\omega^I] = 0$$

s ebből következik, hogy

8. . . . . $\lambda_z{}^I = \frac{[\lambda_i]}{k} + \frac{[\omega^I]}{k}$

Ha az előleges értékeket úgy választjuk, hogy az ellentmondások összege fordulónként $= 0$, akkor

9. . . . . $\lambda_z{}^I = \frac{[\lambda_i]}{k}$.

$\lambda_z{}^{II} = \frac{[\lambda_i]}{k}$

. . . .

azaz $\lambda_z{}^I = \lambda_z{}^{II} = . . . = \lambda_z{}^s$ teljes fordulók esetében.

d) a normál egyenlet utolsó egyenleteiből valamelyiket teljesen kiírva:

$$- \lambda_z{}^I - \lambda_z{}^{II} - . . . - \lambda_z{}^s + s\,\lambda_{i_1} + [\omega_1] = 0$$

10. . . . . $\lambda_{i_1} = \frac{[\lambda_z]}{s} + \frac{[\omega_1]}{s}$

$\lambda_{i_2} = \frac{[\lambda_z]}{s} + \frac{[\omega_2]}{s}$

. . . . .

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ha az előleges értékeket úgy választjuk, hogy $[\omega_1] = [\omega_2] = \ldots = 0$, akkor

$$\lambda_{i_1} = \frac{[\lambda_z]}{s}$$

11. . . . . .

$$\lambda_{i_2} = \frac{[\lambda_z]}{s}$$

. . . .

A *c)* és *d)* alatti összefüggésekből következik, hogy λ_z-ékből a λ_i-k és λ_i-kből a λ_z-ék kölcsönösen meghatározhatók.

Ezeknek az eredményeknek a felhasználása teszi lehetővé az iránymérések kiegyenlítésének megközelítő eljárással való megoldási módjait. Ezekre később vissza fogunk térni.

A 6. alatti feltételi egyenletekből a Schreiber-féle fiktív feltételi egyenletek figyelembe vételével felállított normál egyenlet lesz:

12. . . számuk $= k - 1$

$$\begin{cases} +\underline{\left(s - \frac{s}{k}\right)\lambda_{i_1}} - \frac{s}{k}\lambda_{i_2} - \ldots - \frac{s}{k}\lambda_{i_k} + \left([\omega_1] - \frac{[\omega]}{k}\right) = 0 \\ -\frac{s}{k}\lambda_{i_1} + \underline{\left(s - \frac{s}{k}\right)\lambda_{i_2}} - \ldots - \frac{s}{k}\lambda_{i_k} + \left([\omega_2] - \frac{[\omega]}{k}\right) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\frac{s}{k}\lambda_{i_1} - \frac{s}{k}\lambda_{i_2} - \ldots + \underline{\left(s - \frac{s}{k}\right)\lambda_{i_k}} + \left([\omega_k] - \frac{[\omega]}{k}\right) = 0 \end{cases}$$

összegezve: $+\frac{s}{k}\lambda_{i_1} + \frac{s}{k}\lambda_{i_2} + \ldots + \frac{s}{k}\lambda_{i_k} + \frac{[\omega]}{k} = 0$

Az utóbbi összegegyenletet sorjában levonva az egyes egyenletekből, kapjuk:

$$\lambda_{i_1} = \frac{[\omega_1]}{s}$$

$$\lambda_{i_2} = \frac{[\omega_2]}{s}$$

13. . . . . .

. . . . .

$$\lambda_{i_k} = \frac{[\omega_k]}{s}$$

Vagyis teljes fordulók esetében az ellentmondások számtani középértéke adja az előleges érték javítását; illetve *a kiegyenlített irányérték = mért irányértékek számtani középértékével.*

Ha a feltételi egyenleteket *irányonként* csoportosítjuk s a Schreiber-féle egyenletek tekintetbe vételével felállítjuk a normál egyenletet, analóg módon kapjuk, hogy

$$\lambda_z{}^I = \frac{[\omega^I]}{k}$$

$$\lambda_z{}^{II} = \frac{[\omega^{II}]}{k}$$

14. . . . . .

. . . . .

$$\lambda_z{}^s = \frac{[\omega^s]}{k}$$

Tehát teljes fordulók esetében a tájékozási állandó előleges értékének javítása = a fordulonként ellentmondások számtani középértékével.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy teljes fordulók esetében a *számtani középérték* a kiegyenlített érték, tekintet nélkül a fordulók tájékozási állandójának értékére.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

De mindenesetre — már *kényelmi* szempontból is — az egyes fordulókat előlegesen tájékozzuk, még pedig oly módon, hogy valamelyik *közös* iránynak azonos értéket tulajdonítunk. Közvetlenül bennünket a *kiegyenlített irányértékek* érdekelnek s ezeket amint a 13. képletből láthatjuk a tájékozási ismeretlenre való tekintet nélkül is megkaphatjuk.

Hivatkozva most az 1. képletre

$$
\begin{array}{l}
i_1 = l_1^{\,I} + z^I + \lambda_1^{\,I} \\
i_1 = l_1^{\,II} + z^{II} + \lambda_1^{\,II} \\
\text{15.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
i_1 = l_1^{\,s} + z^s + \lambda_1^{\,s} \\
\hline
\text{összegezve:} \quad i_1 = \dfrac{[l_1]}{s} + \dfrac{[z]}{s} + \dfrac{[\lambda_1]}{s}
\end{array}
$$

De tudjuk, hogy $[\lambda_1] = 0$, s elérhetjük, hogy $[z]$ is $= 0$, úgy hog $i_1 = \dfrac{[l_1]}{s}$, azaz újra be van bizonyítva, hogy a számtani középérték a kiegyenlített érték.

Általánosságban azonban $[z] \lesseqgtr 0$ s így

$$i_k = \frac{[l_k]}{s} + \frac{[z^s]}{s} = \frac{(l_1^{\,I} + z^I) + (l_1^{\,II} + z^{II}) + \ldots + (l_1^{\,s} + z^s)}{s}$$

vagyis a *kiegyenlített irányértékeket* a tájékozott fordulókból az azonos irányokra vonatkozó irányértékek számtani középértéke adja.

A kiegyenlítéshez — adott esetekben szükséges — *előleges értékeket* két módon nyerhetjük.

Általánosságban *teljesen közömbös* az előleges értékek számbeli értéke, azonban, ha módunkban van válogatni, olyan előleges értékeket választunk, amelyek lehetőleg megközelítik a kiegyenlített értékeket, továbbá *ellenőrzésre* is alkalmat adnak. Az ellenőrzés főként a feltételi egyenletek abszolut tagjaira vonatkozólag szükséges.

Két esetet fogunk megkülönböztetni:

a) A mért irányértékek *tetszőleges körállásra* vonatkoztatva vannak megadva.

$l_1^{\,I}, \; l_2^{\,I}, \ldots$
$l_1^{\,II}, l_2^{\,II}, \ldots$ a mért irányértékek.
. . . . .

A keresett ismeretlenek $i_1, \; i_2, \ldots, \; z^I, \; z^{II}, \ldots$ *előleges* értékei legyenek (i_1), $(i_2), \ldots, (z^I), (z^{II}) \ldots$

A mért fordulókat *egy-egy közös irány* segélyével az *előzőre* állítjuk.

Ha a fordulókat ily megközelítő eljárással egymásba forgattuk, akkor az azonos irányokra vonatkozó irányértékek számtani középértékét fogadjuk el (i_1), (i_2) . . . előleges értékeknek.

Azután sorjában levonva ez *előleges* értékekből a *mért* irányértékeket, kapjuk a *mért* irányértékek adta *tájékozási állandókat*. Ily módon minden forduló annyi tájékozási állandót ad, a hány irány foglaltatik a fordulóban.

A tájékozási állandó *előleges* értékéül a nyert tájékozási állandók fordulónkénti számtani középértékét fogadjuk el.

$$
\begin{array}{l}
(i_1) - l_1^{\,I} = z_1^{\,I} \\
(i_2) - l_2^{\,I} = z_2^{\,I} \\
\ldots\ldots\ldots \\
\text{16.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (i_k) - l_k^{\,I} = z_k^{\,I} \\
\hline
\dfrac{[(i)] - [l^I]}{k} = \dfrac{[z^I]}{k} = (z^I)
\end{array}
$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A feltételi egyenletek abszolút tagjai pedig a következő módon adódnak:

$$17. \quad \begin{aligned} z_1^I - (z^I) &= \omega_1{}^I \\ z_2^I - (z^I) &= \omega_2{}^I \\ &\cdots\cdots \\ z_k^I - (z^I) &= \omega_k{}^I \end{aligned}$$

A most vázolt módon választva az előleges értékeket elérjük, hogy a feltételi egyenletek abszolút tagjainak összege fordulónként zérus; következésképen a Schreiber-féle egyenletek abszolút tagjai is zérusok.

b) A mért irányértékek fordulónként *közös* körállásra vonatkoztatva vannak megadva. Ez az eset gyakori a felsőrendű hálózatokban, amikor már a mezei állomáson — ellenőrzés végett — a különböző körállásban mért irányértékeket *közös kezdőértékre* állítjuk.

Ilyenkor a tájékozási állandók előleges értékéül *zérust* veszünk, előleges (i_1), (i_2), . . . értékeknek pedig a közös irányokra vonatkozó irányértékek számtani középértékét fogadjuk el. Ebben az esetben az ellentmondások összege *irányonként* zérus.

Példa a *teljes fordulók* kiegyenlítésére.

Irány	I.	II.	III.	IV.	Közép	(λ^I)	(λ^{II})	(λ^{III})	(λ^{IV})	$[(\lambda^s)]$
1.	36° 10′ 60.″00	60.00	60.00	60.00	60.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2.	78 2 16. 20	17.80	14.50	15.00	15.88	− 0.32	− 1.92	+ 1.38	+ 0.88	+ 0.02
3.	100 5 57. 10	56.00	58.20	57.20	57.12	+ 0.02	+ 1.12	− 1.08	− 0.08	− 0.02
4.	111 14 35. 00	35.00	37.20	36.10	35.82	+ 0.82	+ 0.82	− 1.38	− 0.28	− 0.02
5.	175 1 16. 40	18.00	16.00	17.20	16.90	+ 0.50	− 1.10	+ 0.90	− 0.30	− 0.00
						− 0.32	− 3.02	− 2.46	− 0.66	
						+ 1.34	+ 1.94	+ 2.28	+ 0.88	
					$\lambda_z{}^s = \frac{[i_k] - [l]}{s} =$	+ 0.20	− 0.22	− 0.03	+ 0.04	

Irány	I.	II.	III.	IV.	Közép	λ^I	λ^{II}	λ^{III}	λ^{IV}	$[\lambda_s]$
1.	60.20	59.78	59.97	60.04	60.00	− 0.20	+ 0.22	+ 0.03	− 0.04	+ 0.01
2.	16.40	17.58	14.47	15.04	15.87	− 0.53	− 1.71	+ 1.40	+ 0.83	− 0.01
3.	57.30	55.78	58.17	37.24	57.12	− 0.18	+ 1.34	− 1.05	− 0.12	− 0.01
4.	35.20	34.78	37.17	36.14	35.82	+ 0.62	+ 1.04	− 1.35	− 0.32	− 0.01
5.	16.60	17.78	15.97	17.24	16.90	+ 0.30	− 0.88	+ 0.93	− 0.34	− 0.01
					$[\lambda_k{}^s] =$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

A fenti példából láthatjuk, hogy az első lépcsőben sikerült a fordulókat oly módon egymás mellé állítanunk, hogy a számtani középértékkel szemben mutatkozó javítások összege *fordulónként* és *irányonként* = 0; következőleg a második táblázatban lévő fordulók a *kiegyenlített fordulók* s az irányonként vett számtani középérték a *kiegyenlített érték.*

Végeredmény:

$$\begin{aligned} i_1 &= 36° 11′ 0.″00 \\ i_2 &= 78 2 15. 87 \\ i_3 &= 100 5 57. 12 \\ i_4 &= 111 14 35. 82 \\ i_5 &= 175 1 16. 90 \end{aligned}$$

$$z^I = + 0.″20\,; \quad z^{II} = - 0.″22\,; \quad z^{III} = - 0.″03\,; \quad z^{IV} = + 0.″04$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Most még a középhiba számítását kell teljes fordulók esetében tárgyalnunk.

Az *egységsúlyú mérési eredmény* — a jelen esetben egy két távcső állásban mért irányérték — várható középhibája:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{f}}$$

ahol $f =$ a fölös mérések számával.

Az összes mérések száma $= ks$, az ismeretlenek száma pedig *a)* $s - 1$ tájékozási állandó, *b)* k irányérték; tehát a szükséges mérések száma $= k + s - 1$ s így

$$f = k\,s - (k + s - 1) = (k - 1)(s - 1)$$

18. . . . . tehát $\mu = \sqrt{\dfrac{[\lambda\,\lambda]}{(k-1)(s-1)}}$

A *kiegyenlített* értékek várható középhibájának számításához, azok súlyaira illetőleg Q_{11}, Q_{22}, . . . súlykoefficiensekre van szükségünk.

A *súlykoefficiensek* számítását a normál egyenlet segélyével végezzük az ismert módon:

$$\begin{array}{lllllll}
 & +\left(s - \frac{s}{k}\right) Q_{11} & - \frac{s}{k} Q_{12} & - \ldots & - \frac{s}{k} Q_{1k} & - 1 = 0 \\
 & - \frac{s}{k} Q_{11} & + \left(s - \frac{s}{k}\right) Q_{12} & - \ldots & - \frac{s}{k} Q_{1k} & + 0 = 0 \\
19. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & - \frac{s}{k} Q_{11} & - \frac{s}{k} Q_{12} & - \ldots & + \left(s - \frac{s}{k}\right) Q_{1k} & + 0 = 0 \\
\hline
\text{összegezve:} & + \frac{s}{k} Q_{11} & + \frac{s}{k} Q_{12} & + \ldots & + \frac{s}{k} Q_{1k} & - 1 = 0
\end{array}$$

Ezt hozzáadva sorjában mindegyik egyenlethez, kapjuk:

$$s\,Q_{11} - 2 = 0\,;\; Q_{11} = \frac{2}{s}$$

$$s\,Q_{12} - 1 = 0\,;\; Q_{12} = \frac{1}{s}$$

. . . . . .

Hasonlóképen $Q_{22} = \dfrac{2}{s}$

$$Q_{23} = \frac{1}{s}$$

. . . .

Tehát egy-egy kiegyenlített irányérték súlya teljes fordulók esetében, ha $g_{l_1}{}^I = g_{l_2}{}^I = \ldots = g_{l_k}^s = 1$

21. . . . . $g_{i_k} = s$

mert i_k kiegyenlített irányérték nem egyéb, mint a *kezdő iránytól* számított szögérték; azt

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

pedig tudjuk, hogy ha egy szög súlya $\frac{s}{2}$, akkor az irány súlya $= s$. Tehát egy s fordulóban mért irányérték várható középhibája $\mu_i = \frac{\mu}{\sqrt{s}}$.

Csonka fordulók.

A teljes fordulók kiegyenlítésének részletes tárgyalásából nyert eredmények felhasználásával a csonka fordulók kiegyenlítését egyszerű módon végezhetjük. De egyrészt a bemutatandó rövidebb eljárások megbízhatóságának megítélése végett, másrészt a különböző módok számítási időtartamának összehasonlítása végett, először végezzük el a kiegyenlítést a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazásával.

A feltételi egyenletek alakja, a feltételi egyenletekben szereplő ismeretlenek száma, az előleges értékek felvételének módjai, stb. a teljes fordulók kiegyenlítésénél részletesen tárgyaltatott s azokat *ismerteknek* fogjuk feltételezni.

Egy háromszög ponton iránymérést végeztünk s a mérési eredmények a következők:

22.

Irány	Forduló I.	II.	III.	IV.	V.
1.	0° 0′ 0.″0	—	70° 0′ 0.″0	—	136° 10′ 0.″0
2.	32 41 14. 7	63° 41′ 10.″3	—	137° 41′ 18.″3	—
3.	—	136 4 30. 0	175 4 38. 2	210 4 31. 4	241 14 29. 0
4.	123 19 42. 3	154 19 46. 7	—	228 19 41. 2	—
5.	179 25 31. 4	—	249 25 30. 6	284 25 34. 0	315 35 38. 0
6.	219 32 25. 6	250 32 28. 0	289 32 23. 0	—	—
7.	308 49 16. 0	339 49 11. 2	—	53 49 12. 0	84 59 18. 0

Irány	(i) Előleges érték	λ_i	Kiegyenlitett érték	0-ra redukálva
1.	0° 0′ 0.″0	— 0.″837	359° 59′ 59.″163	00.″000
2.	32 41 14. 7	— 0. 078	32 41 14. 622	15. 459
3.	105 4 30. 6	+ 1. 084	105 4 31. 684	32. 521
4.	123 19 42. 3	+ 1. 288	123 19 43. 588	44. 425
5.	179 25 31. 4	+ 1. 465	179 25 32. 865	33. 702
6.	219 32 25. 6	— 0. 083	219 32 25. 517	26. 354
7.	308 49 16. 0	— 2. 015	308 49 13. 985	14. 822

Feladatunk meghatározni az 1, 2, . . . , 7. irányok legmegbizhatóbb értékeit, a rendelkezésünkre álló fölös számú mérések alapján.

(i_1), (i_2),, . . . , (i_7) előleges értékek felvétele után (z^I), (z^{II}), . . . , (z^V) előleges értékeket vesszük fel a 16. képlet alapján. Ez a felvétel ellenőrzést ad a feltételi egyenletek abszolút tagjainak képzésénél, mert egyrészt fordulónként $[\omega] = 0$, másrészt a normál egyenlet abszolút tagjainak összege is $= 0$.

Gyakorlatilag tehát igen fontos előnyök származnak az előleges értékek felvételének bizonyos módjától.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A fenti mérési eredmények alapján a feltételi egyenletek lesznek:

Forduló	Irány	Mért irányok l	Előleges érték (i)	$z^s_k = (i) - l$	Feltételi λ	Feltételi λ_z
I	1	0°— 0'— 0''0	0°— 0'— 0''0	359°—59'—60''0	λ_1^I	— 1
	2	32 — 41 — 14 7	— 14 7	60 0	λ_2^I	— 1
	4	123 — 19 — 42 3	— 42 3	60 0	λ_4^I	— 1
	5	179 — 25 — 31 4	— 31 4	60 0	λ_5^I	— 1
	6	219 — 32 — 25 6	— 25 6	60 0	λ_6^I	— 1
	7	308 — 49 — 16 0	— 16 0	60 0	λ_7^I	— 1
			$(z^I) = \frac{[(i)-l]}{k_I} = 0 - 0 - 0.0$		$[\lambda^I]$	$[\lambda_z I] = -6$
II	2	63 — 41 — 10 3	32 — 41 — 14 7	358 — 59 — 64 4	λ_2^{II}	— 1
	3	136 — 4 — 30 0	105 — 4 — 30 6	60 6	λ_3^{II}	— 1
	4	154 — 19 — 46 7	123 — 19 — 42 3	55 6	λ_4^{II}	— 1
	6	250 — 32 — 28 0	219 — 32 — 25 6	57 6	λ_6^{II}	— 1
	7	339 — 49 — 11 2	308 — 49 — 16 0	64 8	λ_7^{II}	— 1
			$(z^{II}) = \frac{[(i)-l]}{k^{II}} = 328 - 59 - 60.60$		$[\lambda^{II}]$	$[\lambda_z II] = -5$
III	1	70 — 0 — 0 0	0 — 0 — 0 0	289 — 59 — 60 0	λ_1^{III}	— 1
	3	175 — 4 — 38 2	105 — 4 — 30 6	52 4	λ_3^{III}	— 1
	5	249 — 25 — 30 6	179 — 25 — 31 4	60 8	λ_5^{III}	— 1
	6	289 — 32 — 23 0	219 — 32 — 25 6	62 6	λ_6^{III}	— 1
			$(z^{III}) = \frac{[(i)-l]}{k_{III}} = 289 - 59 - 58.95$		$[\lambda^{III}]$	$[\lambda_z III] = -4$
IV	2	137 — 41 — 18 3	32 — 41 — 14 7	254 — 59 — 56 4	λ_2^{IV}	— 1
	3	210 — 4 — 31 4	105 — 4 — 30 6	59 2	λ_3^{IV}	— 1
	4	228 — 19 — 41 2	123 — 19 — 42 3	61 1	λ_4^{IV}	— 1
	5	284 — 25 — 34 0	179 — 25 — 31 4	57 4	λ_5^{IV}	— 1
	7	53 — 49 — 12 0	308 — 49 — 16 0	64 0	λ_7^{IV}	— 1
			$(z^{IV}) = \frac{[(i)-l]}{k_{IV}} = 254 - 59 - 59.62$		$[\lambda^{IV}]$	$[\lambda_z IV] = -5$
V	1	136 — 10 — 0 0	0 — 0 — 0 0	223 — 49 — 60 0	λ_1^V	— 1
	3	241 — 14 — 29 0	105 — 4 — 30 6	61 6	λ_3^V	— 1
	5	315 — 35 — 38 0	179 — 25 — 31 4	53 4	λ_5^V	— 1
	7	84 — 59 — 18 0	308 — 49 — 16 0	58 0	λ_7^V	— 1
			$(z^V) = \frac{[(i)-l]}{k_V} = 223 - 49 - 58.25$		$[\lambda^V]$	$[\lambda_z V] = -4$

23. . .

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

egyenletek									λ	$\lambda\lambda$
λ_{i_1}	λ_{i_2}	λ_{i_3}	λ_{i_4}	λ_{i_5}	λ_{i_6}	λ_{i_7}	ω	g		
+1							0	1	− 0.79	0.6241
	+1						0	1	− 0·03	0.0009
			+1				0	1	+ 1.33	1.7689
				+1			0	1	+ 1.51	2.2801
					+1		0	1	− 0.04	0.0016
						+1	0	1	− 1.97	3.8809
+1	+1		+1	+1	+1	+1	0	$-\frac{1}{6}$	0	
	+1						+ 3.80	1	+ 3.68	13.5424
		+1					0	1	+ 1.05	1.1025
			+1				− 5.00	1	− 3.75	14.0625
					+1		− 3.00	1	− 3.12	9.7344
						+1	+ 4.20	1	+ 2.15	4.6225
	+1	+1	+1		+1	+1	0	$-\frac{1}{5}$	0	
+1							+ 1.05	1	− 0.19	0.0361
		+1					− 6.55	1	− 5.87	34.4569
				+1			+ 1.85	1	+ 2.91	8.4681
					+1		+ 3.65	1	+ 3.16	9.9856
+1		+1		+1	+1		0	$-\frac{1}{4}$	0	
	+1						− 3.22	1	− 3.65	13.3225
		+1					− 0.42	1	+ 0.32	0.1024
			+1				+ 1.48	1	+ 2.42	5.8564
				+1			− 2.22	1	− 1.10	1.2100
						+1	+ 4.38	1	+ 2.02	4.0804
	+1	+1	+1	+1		+1	0	$-\frac{1}{5}$	0	
+1							+ 1.75	1	+ 0.99	0.9801
		+1					+ 3.35	1	+ 4.51	20.3401
				+1			− 4.85	1	− 3.31	10.9561
						+1	− 0.25	1	− 2.19	4.7961
+1		+1		+1		+1	0	$-\frac{1}{4}$	0	

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ezeknek a feltételi egyenleteknek megfelelő *normál egyenlet* lesz:

	λ_{i_1}	λ_{i_2}	λ_{i_3}	λ_{i_4}	λ_{i_5}	λ_{i_6}	λ_{i_7}	ω
1.	+ 140	— 10	— 30	— 10	— 40	— 25	— 25	+ 168.0
2.	— 10	+ 146	— 24	— 34	— 22	— 22	— 34	+ 34.8
3.	— 30	— 24	+ 186	— 24	— 42	— 27	— 39	— 217.2
24. . . 4.	— 10	— 34	— 24	+ 146	— 22	— 22	— 34	— 211.2
5.	— 40	— 22	— 42	— 22	+ 188	— 25	— 37	— 313.2
6.	— 25	— 22	— 27	— 22	— 25	+ 143	— 22	+ 39.0
7.	— 25	— 34	— 39	— 34	— 37	— 22	+ 191	+ 499.8
összeg	0	0	0	0	0	0	0	0.0

A normál egyenlet felállítására ellenőrzés, hogy az ismeretlenek *együtthatói soronként* és *oszloponként zérust* adnak; az abszolút tagok összege szintén zérus.

Miután a normál egyenlet együtthatói *egész* számok, előnyösen végezhetjük a megoldást *próbálgatási* módszerrel. (Lásd 260. oldalon a normál egyenletek indirekt megoldási módját.)

Az eredmény lesz:

25. . . . . $\lambda_{i_1} = -0.''838$
$\lambda_{i_2} = -0.\ 078$
$\lambda_{i_3} = +1.\ 084$
$\lambda_{i_4} = +1.\ 288$
$\lambda_{i_5} = +1.\ 465$
$\lambda_{i_6} = -0.\ 083$
$\lambda_{i_7} = -2.\ 015$

Miután irányokról van szó, adjunk mindegyik javításhoz + 2.″015 értéket s lesznek:

26. . . . . $\lambda_{i_1} = +1.''178$
$\lambda_{i_2} = +1.\ 937$
$\lambda_{i_3} = +3.\ 099$
$\lambda_{i_4} = +3.\ 303$
$\lambda_{i_5} = +3.\ 480$
$\lambda_{i_6} = +1.\ 930$
$\lambda_{i_7} = +0.\ 000$

A normál egyenlet adta javításokat hozzáadva a 22. táblázatban lévő előleges értékekhez, kapjuk a kiegyenlített értékeket.

A mérési eredmények javításait úgy kapjuk, hogy a 23. alatti feltételi egyenletekbe behelyettesítjük λ_{i_1}, λ_{i_2}, . . . értékeket. E helyettesítés eredményei a 23. táblázat utolsó előtti rovatában találhatók.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A *tájékozási állandók javításait* a Schreiber-féle egyenletekből számíthatjuk:

27. . . .
$$\begin{aligned}
[\lambda^I] &= -6\,\lambda_z{}^I - 0.261 = 0; & \lambda_z{}^I &= -0.''0434\\
[\lambda^{II}] &= -5\,\lambda_z{}^{II} + 0.196 = 0; & \lambda_z{}^{II} &= +0.\ 0392\\
[\lambda^{III}] &= -4\,\lambda_z{}^{III} + 1.629 = 0; & \lambda_z{}^{III} &= +0.\ 4071\\
[\lambda^{IV}] &= -5\,\lambda_z{}^{IV} + 1.744 = 0; & \lambda_z{}^{IV} &= +0.\ 3488\\
[\lambda^{V}] &= -4\,\lambda_z{}^{V} - 0.304 = 0; & \lambda_z{}^{V} &= -0.\ 0759
\end{aligned}$$

Ezek alapján a tájékozási állandók kiegyenlített értékei lesznek:

28.
$$\begin{aligned}
z^I &= (z^I) + \lambda_z{}^I = 0^\circ\ 0'\ 0.''0 - 0.''04 = 359^\circ\ 59'\ 59.''96\\
z^{II} &= (z^{II}) + \lambda_z{}^{II} = 328\ 59\ 60.\ 60 + 0.\ 04 = 328\ 59\ 60.\ 64\\
z^{III} &= (z^{III}) + \lambda_z{}^{III} = 289\ 59\ 58.\ 95 + 0.\ 41 = 289\ 59\ 59.\ 36\\
z^{IV} &= (z^{IV}) + \lambda_z{}^{IV} = 254\ 59\ 59.\ 62 + 0.\ 35 = 254\ 59\ 59.\ 97\\
z^{V} &= (z^{V}) + \lambda_z{}^{V} = 223\ 49\ 58.\ 25 - 0.\ 08 = 223\ 49\ 58.\ 17
\end{aligned}$$

Megjavítva a *mért* fordulókat a hozzájuk tartozó tájékozási állandóval kapjuk a *kiegyenlített fordulókat:*

29. .

Irány	I	II	III	IV	V	Középérték (Kiegyenl. ért.)
	forduló					
1	359°59′59.″96	—	359°59′59.″36	—	359°59′58.″17	359°59′59.″16
2	32 41 14. 66	32°41′10.″90	—	32°41′18.″27	—	32 41 14. 61
3	—	105 4 30. 60	105 4 37. 56	105 4 31. 37	105 4 27. 17	105 4 31. 68
4	123 19 42. 26	123 19 47. 30	—	123 19 41. 17	—	123 19 43. 58
5	179 25 31. 36	—	179 25 29. 96	179 25 33. 97	179 25 36. 17	179 25 32. 86
6	219 32 25. 56	219 32 28. 60	219 32 22. 36	—	—	219 32 25. 51
7	308 49 15. 96	308 49 11. 80	—	308 49 11. 97	308 49 16. 17	308 49 13. 98

A *mért* és *kiegyenlített* fordulókban az azonos irányok különbségei fogják megadni a mérési eredmények javításait.

30.

λ	λ^I	λ^{II}	λ^{III}	λ^{IV}	λ^V
λ_1	−0.″80	—	−0.″20	—	+0.99
λ_2	−0. 05	+3.″71	—	−3.66	—
λ_3	—	+1. 08	−5. 88	+0.31	+4.51
λ_4	+1. 32	−3. 72	—	+2.41	—
λ_5	+1. 50	—	+2. 90	−1.11	−3.31
λ_6	−0. 05	−3. 09	+3. 15	—	—
λ_7	−1. 98	+2. 18	—	+2.01	−2.19

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ezek a javítások egyeznek a feltételi egyenletekből számított javításokkal s így a kiegyenlítésben hiba nincs.

Az egységsúlyú mérési eredmény — a jelen esetben a két távcső állásban és *egy* fordulóban mért irányérték — várható középhibája:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{f}}; \text{ jelen esetben: } [\lambda\lambda] = 166.21$$

f = a fölös mérések száma. Legyen az összes mért irányértékek száma = K, a meghatározandó irányok száma = k, a fordulók száma = s; az ismeretlenek száma lesz: k irányérték és $s - 1$ tájékozási állandó, tehát összesen $k + s - 1$; levonva ezt a mért irányértékek számából

31. . . . . $f = K - k - s + 1$

A példánkban $K = 24$, $k = 7$, $s = 5$, tehát $f = 24 - 7 - 5 + 1 = 13$

$$\mu = \sqrt{\frac{166.21}{13}} = \pm 3.''58$$

A kiegyenlített értékek várható középhibájának számítása végett szükségünk van a súlykoefficiensekre.

Anélkül, hogy a középhibaszámítások e módját részletesen tárgyalnók, miután ennek inkább elméleti jelentősége van, itt csak utalunk a forrásokra, ahol az eljárás tárgyaltatik:

a) Helmert: Veröffentlichung des kgl. Preus. Geod. Inst. . . . I. Heft, Berlin 1893.

b) Helmert: Astron. Nachr. 134. Band 1893. „Über eine Vereinfachung bei der Einführung von Stationsergebnissen in der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes".

c) Jordan: Handb. d. Vermessungskunde 1910. Stuttgart; §. 61—63, 78—79, 83—85, 90. és 92.

A kiegyenlített értékek középhibájának számítására egy gyakorlatilag előnyös módot mutatunk be, megjegyezvén, hogy az eredmény a szigorúan számítottal szemben elhanyagolható differenciát mutat.

Ha a kiegyenlített irányértékek súlyai sorjában g_1, g_2, . . .

az egységsúlyú mérési eredmények irányonként μ_1, μ_2, . . .,

akkor a kiegyenlített irányértékek középhibái:

32. . . . . $\mu_{i_1} = \frac{\mu_1}{\sqrt{g_1}}$, $\mu_{i_2} = \frac{\mu_2}{\sqrt{g_2}}$, . . .

ahol

33. . . . . $\mu_1 = \sqrt{\frac{[\lambda_1\lambda_1]}{f_1}}$, $\mu_2 = \sqrt{\frac{[\lambda_2\lambda_2]}{f_2}}$, . . .

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A 33. képlet szerint szükségünk van *irányonként* a javítások négyzetösszegeire s a fölös mérések számára, ezeket összeállítva alább adjuk:

34.

$[\lambda_1 \lambda_1] =$	1.6403	$f_1 =$	$3 - 1 - 0.666 + 0.143 =$ 1.477
$[\lambda_2 \lambda_2] =$	26.8658	$f_2 =$	$3 - 1 - 0.567 + 0.143 =$ 1.576
$[\lambda_3 \lambda_3] =$	56.0019	$f_3 =$	$4 - 1 - 0.900 + 0.143 =$ 2.243
$[\lambda_4 \lambda_4] =$	21.6878	$f_4 =$	$3 - 1 - 0.567 + 0.143 =$ 1.576
$[\lambda_5 \lambda_5] =$	22.9143	$f_5 =$	$4 - 1 - 0.866 + 0.143 =$ 2.277
$[\lambda_6 \lambda_6] =$	19.7216	$f_6 =$	$3 - 1 - 0.618 + 0.143 =$ 1.525
$[\lambda_7 \lambda_7] =$	17.3799	$f_7 =$	$4 - 1 - 0.816 + 0.143 =$ 2.327
$[\lambda\lambda] =$	166.2116	$f =$	$24 - 7 - 5.000 + 1.001 =$ 13.001

Az f_1, f_2, . . . fölös mérések számát úgy kapjuk, hogy az egy-egy irányra vonatkozó mérések számából levonunk egyet, mert ez a szükséges mérés száma, levonjuk azonkivül a z-ékből (tájékozási állandók) eső értéket, de hozzáadjuk az egy felesleges tájékozási szög révén, az ezen irányra eső részt.

Az első irányra eső z érték az első fordulóból $-1/6$, a harmadikból $-1/4$, az ötödikből $-1/4$, összesen: $-1/6 - 1/4 - 1/4 = -0.666$. Ezek a levonandó részösszegek végeredményben a tájékozási ismeretlenek számát, tehát ötöt tartoznak adni.

A 34. táblázat utolsó sora mutatja, hogy a fölös mérések számát és a javitásokat is jól osztottuk el *irányonként,* mert az összegek kiadják, hogy a fölösmérések száma = 13.

Kiszámítva most már *irányonként* az egységsúlyú mérési eredmény várható középhibáját és a kiegyenlített értékek középhibáját (súlynak tekintve az egy-egy irányra vonatkozó mérések számát):

35.

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{[\lambda_1 \lambda_1]}{f_1}} = \pm 1.''05 \qquad \mu_{i_1} = \frac{\mu_1}{\sqrt{g_1}} = \frac{1.05}{\sqrt{3}} = \pm 0.''61$$

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{[\lambda_2 \lambda_2]}{f_2}} = \pm 1.\ 30 \qquad \mu_{i_2} = \frac{\mu_2}{\sqrt{g_2}} = \frac{1.30}{\sqrt{3}} = \pm 0.\ 75$$

$$\mu_3 = \sqrt{\frac{[\lambda_3 \lambda_3]}{f_3}} = \pm 5.\ 00 \qquad \mu_{i_3} = \frac{\mu_3}{\sqrt{g_3}} = \frac{5.00}{\sqrt{4}} = \pm 2.\ 50$$

$$\mu_4 = \sqrt{\frac{[\lambda_4 \lambda_4]}{f_4}} = \pm 3.\ 70 \qquad \mu_{i_4} = \frac{\mu_4}{\sqrt{g_4}} = \frac{3.70}{\sqrt{3}} = \pm 2.\ 14$$

$$\mu_5 = \sqrt{\frac{[\lambda_5 \lambda_5]}{f_5}} = \pm 3.\ 17 \qquad \mu_{i_5} = \frac{\mu_5}{\sqrt{g_5}} = \frac{3.17}{\sqrt{4}} = \pm 1.\ 58$$

$$\mu_6 = \sqrt{\frac{[\lambda_6 \lambda_6]}{f_6}} = \pm 3.\ 60 \qquad \mu_{i_6} = \frac{\mu_6}{\sqrt{g_6}} = \frac{3.60}{\sqrt{3}} = \pm 2.\ 08$$

$$\mu_7 = \sqrt{\frac{[\lambda_7 \lambda_7]}{f_7}} = \pm 2.\ 73 \qquad \mu_{i_7} = \frac{\mu_7}{\sqrt{g_7}} = \frac{2.73}{\sqrt{4}} = \pm 1.\ 37$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Röviditett eljárások a csonka fordulók kiegyenlítésére.

(Angol módszer, Engel módszer.)

A teljes fordulók részletes tárgyalásánál találtuk, hogy *a) javitások összegei fordulónként és irányonként összegezve zérust tartoznak adni, b) a λ_i-kből a λ_z-ik és λ_z-ből a λ_i-k kölcsönösen meghatározhatók.*

Miután sem a λ_i, sem a λ_z értékek nem ismeretesek, előleges értékeiket vesszük fel s a *b)* alatti összefüggések révén törekedni fogunk az *a)* alatti feltételek kielégítésére.

A mérési eredmények legyenek:

$$\begin{array}{l} l_1^{I},\ l_1^{II}, \ldots \\ l_2^{I},\ l_2^{II}, \ldots \\ l_3^{I},\ l_3^{II}, \ldots \\ \ldots\ldots \end{array}$$

A fordulókat úgy állítjuk egymás mellé, hogy a közös irányok csak másodpercekben különbözzenek egymástól. Ezt igen könnyen elérhetjük azáltal, hogy a következő fordulót, mindig az *előző* forduló *valamelyik közös* irányával azonos irányértékre állítjuk. Ha ez megtörtént, *soronként* számtani középértéket veszünk s kapjuk (i_1), (i_2) . . . *előleges* irányértékeket. Ezek alapján módunkban van a fordulók *előleges* tájékozási állandójának, $\Delta^1{}_z{}^I$, $\Delta^1{}_z{}^{II}$, . . . javitásait meghatározni. Nevezetesen legyen

$$\begin{array}{l} (i_1) - l_1^{I} = \Delta_1^{I} \\ (i_2) - l_2^{I} = \Delta_2^{I} \\ \ldots\ldots\ldots \\ (i_1) - l_1^{III} = \Delta_1^{III} \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Ha a felvett előleges értékek a kiegyenlített értékek, akkor kell hogy $\Delta_1^{I} + \Delta_1^{II} + \Delta_1^{III} + \ldots = 0$ és $\Delta_1^{I} + \Delta_2^{I} + \Delta_3^{I} + \ldots = 0$.

Miután az előleges értékek a soronkénti számtani középértékek, tehát

$$\Delta_1^{I} + \Delta_1^{II} + \Delta_1^{III} + \ldots = 0$$

$$\text{és} \quad \frac{\Delta_1^{I} + \Delta_2^{I} + \Delta_3^{I} + \ldots}{n_I} \lesseqgtr 0 = \Delta^1{}_z{}^{I}$$

$$36. \ldots\ldots \quad \frac{\Delta_1^{II} + \Delta_2^{II} + \Delta_3^{II} + \ldots}{n_{II}} \lesseqgtr 0 = \Delta^1{}_z{}^{II}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Az ily módon nyert $\Delta^1{}_z{}^{I}$, $\Delta^1{}_z{}^{II}$, . . . javításokkal *elforgatva* az egyes fordulókat, *megismèteljük az egész eljárást s mindaddig folytatjuk, amíg $\Delta_1^{s} + \Delta_2^{s} + \ldots$ összeg is egyenlő lesz zérussal.*

Ha ez bekövetkezik, akkor elértük, hogy a javítások összege fordulónként és irányonként $= 0$.

A csonka fordulók kiegyenlítésének ezt a módját nevezzük *angol módszernek.*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Az előbbi példát — melyet ott a legkisebb négyzetek módszere szerint egyenlítettünk ki — kifogjuk egyenlíteni a most tárgyalt angol módszer szerint.

Irányok	I.	II.	III.	IV.	V.	O-ra redukált kiegyenlített irányok
	forduló					
1	0°— 0'— 0''0		70°— 0'— 0''0		136°—10'— 0''0	0°— 0'— 0''000
2	32 —41 —14 7	63°—41'—10''3		137°—41'—18''3		32 —41 —15 467
3		136 — 4 —30 0	175 — 4 —38 2	210 — 4 —31 4	241 —14 —29 0	105 — 4 —32 532
4	123 —19 —42 3	154 —19 —46 7		228 —19 —41 2		123 —19 —44 433
5	179 —25 —31 4		249 —25 —30 6	284 —25 —34 0	315 —35 —38 0	179 —25 —33 711
6	219 —32 —25 6	250 —32 —28 0	289 —32 —23 0			219 —32 —26 365
7	308 —49 —16 0	339 —49 —11 2		53 —49 —12 0	84 —59 —18 0	308 —49 —14 830
		$1^I - 1^{II}$	$1^I - 1^{III}$ $1^{II} - 1^{III}$	$1^I - 1^{IV}$ $1^{II} - 1^{IV}$ $1^{III} - 1^{IV}$	$1^{II} - 1^V$ | $1^{III} - 1^V$ $1^I - 1^V$ | $1^{IV} - 1^V$	
		328—59—64.4	289—59—60. 0	254—59—56.40	223—49—60.00	
		55.6	52. 4	52.60	60.28	
		57.6	60. 8	59.20	61.60	
		64.8	62. 6	67.08	69.48	
	$(z^{II}) =$	329— 0— 0.6	65. 6	61.10	62.46	
		$(z^{III}) =$	289—59—60.28	66.10	53.40	
				57.40	52.88	
				56.88	56.06	
				64.00	58.00	
				59.80	53.80	
			$(z^{IV}) =$	254—59—60.06	54.06	
				$(z^V) =$	223—49—58.37	

Jegyzet:

E példában az utóbb következő fordulókat az *összes előzőkre betájékoztuk.*

Ez a művelet el is hagyható.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Irány	l^I	l^{II}	l^{III}	l^{IV}	l^V
1	0°—0′— 0.″0		0° 0′ 0.″28		359° 59′ 58.″37
2	32 41 14.7	32° 41′ 10.″90		32° 41′ 18.″36	
3		105 4 30. 60	105 4 38. 48	105 4 31. 46	105 4 27. 37
37. . 4	123 19 42.3	123 19 47. 30		123 19 41. 26	
5	179 25 31.4		179 25 30. 88	179 25 34. 06	179 25 36. 37
6	219 32 25.6	219 32 28. 60	219 32 23. 28		
7	308 49 16.0	308 49 11. 80		308 49 12. 06	308 49 16. 37

I. Lépcső.

1	60.″15		59.″68		58.″44
2	14. 85	11.″09		18.″42	
3		30. 79	37. 88	31. 52	27. 44
4	42. 45	47. 49		41. 32	
5	31. 55		30. 28	34. 12	36. 44
6	25. 75	28. 79	22. 68		
7	16. 15	11. 99		12. 12	16. 44

II. Lépcső.

	l^I	l^{II}	l^{III}	l^{IV}	l^V
1	60.16		59.59		58.40
2	14.86	11.13		18.46	
3		30.83	37.79	31.56	27.40
4	42.46	47.53		41.36	
5	31.56		30.19	34.16	36.40
6	25.76	28.83	22.59		
7	16.16	12.03		12.16	16.40

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

$(i) = \frac{[l]}{n}$	Δ^I	Δ^{II}	Δ^{III}	Δ^{IV}	Δ^V	
359° 59' 59."55	— 0."45		— 0."73		+ 1."18	= 0
32 41 14. 65	— 0. 05	+ 3."75		— 3.71		= 0
105 4 31. 98		+ 1. 38	— 6. 50	+ 0.52	+ 4. 61	= 0
123 19 43. 62	+ 1. 32	— 3. 68		+ 2.36		= 0
179 25 33. 18	+ 1. 78		+ 2. 30	— 0.88	— 3. 19	= 0
219 32 25. 83	+ 0. 23	— 2. 77	+ 2. 55			= 0
308 49 14. 06	— 1. 94	— 2. 26		+ 2.00	— 2. 31	= 0
	+ 0. 89	+ 0. 94	— 2. 38	+ 0. 29	+ 0. 29	= 0
$\frac{[\Delta]}{n} = \Delta_z =$	+ 0. 15	+ 0. 19	— 0. 60	+ 0. 06	+ 0. 07	= 0

359° 59' 59."42	— 0."73		— 0."26		+ 0."98
32 41 14. 79	— 0. 06	+ 3."70		— 3."63	
105 4 31. 91		+ 1. 12	— 5. 97	+ 0. 39	+ 4. 47
123 19 43. 75	+ 1. 30	— 3. 74		+ 2. 43	
179 25 33. 10	+ 1. 55		+ 2. 82	— 1. 02	— 3. 34
219 32 25. 74	— 0. 01	— 3. 05	+ 3. 06		
308 49 14. 17	— 1. 98	+ 2. 18		+ 2. 05	— 2. 27
	+ 0. 07	+ 0. 21	— 0. 35	+ 0. 22	— 0. 16
$\frac{[\Delta]}{n} = \Delta_z =$	+ 0. 01	+ 0. 04	— 0. 09	+ 0. 04	— 0. 04

$(i) = \frac{[l]}{n}$	Δ^I	Δ^{II}	Δ^{III}	Δ^{IV}	Δ^V
359 — 59 — 59.38	— 0.78		— 0.21		+ 0.98
32 — 41 — 14.82	— 0.04	+ 3.69		— 3.64	
105 — 4 — 31.90		+ 1.07	— 5.89	+ 0.34	+ 4.50
123 — 19 — 43.78	+ 1.32	— 3.75		+ 2.42	
179 — 25 — 33.08	+ 1.52		+ 2.89	— 1.08	— 3.32
219 — 32 — 25.73	— 0.03	— 3.10	+ 3.14		
308 — 49 — 14.19	— 1.97	+ 2.16		+ 2.03	— 2.21
	+ 0.03	+ 0.08	— 0.07	+ 0.07	— 0.05
$\frac{[\Delta]}{n} =$	+ 0.000	+ 0.016	— 0.017	+ 0.014	— 0.012

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Kiegyenlített értékek

	$l^I + \lambda^I$	$l^{II} + \lambda^{II}$	$l^{III} + \lambda^{III}$	$l^{IV} + \lambda^{IV}$	$l^V + \lambda^V$
1	60.165		59.543		58.388
2	14.865	11.146		18.474	
3		30.846	37.773	31.574	27.388
4	42.465	47.546		41.374	
5	31.565		30.173	34.174	36.388
6	25.765	28.846	22.573		
7	16.165	12.946		12.174	16.388

Amint látjuk a kiegyenlített értékek s a mérési eredmények javításai ezzel a módszerrel is ugyanazok, mint amelyeket a szigorú eljárással kaptunk.

Ennek a módszernek feltétlenül nagyobb az előnye. Hátránya azonban, hogy a különböző *lépcsőkben* újra és újra le kell írnunk az összes irányértékeket.

Az angol módszernek ez a hátránya súlyosan esik a latba akkor, ha sok az *irányok* és *fordulók* száma.

Az angol módszernek ezen a hátrányán segített *Engel Ernő* a cs. kir. osztrák háromszögelő hivatal főnöke. (Lásd: Ernst Engel „Vereinfachtes Verfahren zur Ausgleichung unvollständiger Satzbeobachtungen.“ Különlenyomat az „Österreichische Zeitschrifft für Vermessungswesen“ c. folyóiratból.)

Az *Engel-módszer* velejében a következő:

A λ_i és λ_z értékeket komponenseikre bontva határozzuk meg, úgy, hogy

$$38. \quad \begin{aligned} \lambda_{i_1} &= \Delta^1 i_1 + \Delta^2 i_1 + \Delta^3 i_1 + \dots \\ \lambda_z{}^I &= \Delta^1 z^I + \Delta^2 z^I + \Delta^3 z^I + \dots \end{aligned}$$

A $\Delta^1 i_1$, $\Delta^1 i_2$, $\Delta^1 i_3$, ... értékek igen egyszerű módon nyerhetők az előleges értékek felvétele után, ugyanis:

$$39. \quad \begin{aligned} \Delta^1 z^I &= \frac{[(i) - l]}{n} = \frac{[\Delta_i^I]}{n} \\ \Delta^1 z^{II} &= \frac{[(i) - l]}{n} = \frac{[\Delta_i^{II}]}{n} \\ &\dots \end{aligned}$$

Ha $\Delta^1 z^I$, $\Delta^1 z^{II}$, $\Delta^1 z^{III}$, ... értékek ismeretesek, akkor

$$40. \quad \begin{aligned} \Delta^1 i_1 &= \frac{[\Delta^1 z]}{n} \\ \Delta^1 i_2 &= \frac{[\Delta^1 z]}{n} \\ &\dots \end{aligned}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

i	λ^I	λ^{II}	λ^{III}	λ^{IV}	λ^V
359 — 59 — 59.365	— 0.800		— 0.178		+ 0.977
32 — 41 — 14.828	— 0.037	+ 3.682		— 3.646	
105 — 4 — 31.895		+ 1.049	— 5.878	+ 0.321	+ 4.507
123 — 19 — 43.795	+ 1.330	— 3.751		+ 2.421	
179 — 25 — 33.075	+ 1.510		+ 2.902	— 1.099	— 3.313
219 — 32 — 25.728	— 0.037	— 3.118	+ 3.155		
308 — 49 — 14.193	— 1.972	+ 2 147		+ 2.019	— 2.195
$[\Delta] =$	— 0.006	+ 0.009	+ 0.001	+ 0.016	— 0.024

Ez a két művelet *felváltva* ismétlődik.

Az eljárás menete vázlatosan:

41. . . .

Mérési eredmények				(i)	$\Delta^1 i$	Δ_i^2	Δ_i^3	. . .	λ	i
l_1^I	l_1^{II}	l_1^{III}	. . .	$\frac{[l]}{n}$	$\Delta^1 i_1$	$\Delta^2 i_1$	$\Delta^3 i_1$	. . .	$[\Delta i_1]$	$(i_1) + [\Delta i_1]$
l_2^I	l_2^{II}	l_2^{III}	. . .	$\frac{[l]}{n}$	$\Delta^1 i_2$	$\Delta^2 i_2$	$\Delta^3 i_2$	. . .	$[\Delta i_2]$	$(i_2) + [\Delta i_2]$
. . .	. . .	. . .	. . .	$\frac{[l]}{n}$	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . . . .

$\lambda_z =$

$\Delta^1 z^I$	$\Delta^1 z^{II}$	$\Delta^1 z^{III}$	. . .
$\Delta^2 z^I$	$\Delta^2 z^{II}$	$\Delta^2 z^{III}$	. . .
$\Delta^3 z^I$	$\Delta^3 z^{II}$	$\Delta^3 z^{III}$	. . .
$[\Delta z^I]$	$[\Delta z^{II}]$	$[\Delta z^{III}]$	. . .

A mérési eredmények javításai:

42. . . . . $\lambda_1^I = i_1 - (l_1^I + [\Delta z^I])$
$\lambda_2^I = i_2 - (l_2^I + [\Delta z^I])$
. . . . . .

De kaphatjuk a javításokat a következő — kényelmesebb — módon is:

43. . . . . $\lambda_1^I = (i_1) - l_1^I - [\Delta z^I] + [\Delta i_1]$
$\lambda_1^{III} = (i_1) - l_1^{III} - [\Delta z^{III}] + [\Delta i_1]$
. . . . . .

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Az előbb kiegyenlített példát most *Engel* módszere szerint fogjuk kiegyenlíteni:

Irány	I.	II.	III.	IV.	V.	Középérték
	forduló					
1	359—59—60.0	—	60.28	—	58.37	59 — 59.55
2	32—41—14.7	10.9	—	18.36	—	14.65
3	105— 4—	30.6	38.48	31.46	27.37	31.98
4	123—19—42.3	47.3	—	41.26	—	43.62
5	179—25—31.4	—	30.88	34.06	36.37	33.18
6	219—32—25.6	28.6	23.28	—	—	25.83
7	308—49—16.0	11.8	—	12.06	16.37	14.06
	Δ_z^I	Δ_z^{II}	Δ_z^{III}	Δ_z^{IV}	Δ_z^V	42.87
	+ 0.150	+ 0.190	— 0.600	+ 0.060	+ 0.070	— 0.130
	+ 0.013	+ 0.044	— 0.093	+ 0.046	— 0.040	— 0.030
	+ 0.002	+ 0.012	— 0.021	+ 0.011	— 0.014	— 0.010
$\lambda_z = [\Delta_z] =$	+ 0.165	+ 0.246	— 0.714	+ 0.117	+ 0.016	— 0.170

Irány	λ_I	λ_{II}	λ_{III}	λ_{IV}	λ_V	$[\lambda]$
1	— 0.80	—	— 0.20	—	+ 0.98	— 0.02
2	— 0.04	+ 3.68	—	— 3.66	—	— 0.02
3	—	+ 1.05	— 5.87	+ 0.32	+ 4.51	+ 0.01
4	+ 1.33	— 3.75	—	+ 2.42	—	0.00
5	+ 1.51	—	+ 2.91	— 1.10	— 3.31	+ 0.01
6	— 0.04	— 3.12	+ 3.16	—	—	0.00
7	— 1.97	+ 2.15	—	+ 2.02	— 2.19	+ 0.01
	+ 2.84 — 2.85	+ 6.88 — 6.87	+ 6.07 — 6.07	+ 4.76 — 4.76	+ 5.49 — 5.50	
$[\lambda]$	— 0.01	+ 0.01	0.00	0.00	— 0.01	— 0.01

8. példa.

Koordináta kiegyenlítés iránymérések esetében.

Bevezetés: A háromszöghálózatok kiegyenlítését rendszerint korreláta módszer szerint végezzük. Valahányszor azonban valamely hálózatba egyes izolált pontokat, esetleg kisebb hálózatokat kell közbeiktatnunk, mindig a koordináta kiegyenlítést fogjuk alkalmazni a fölös számú mérések révén fellépő elkerülhetetlen ellentmondások eltüntetésére.

Szabatosabban fogalmazva: I. r. hálózatok kiegyenlítését mindig korreláta módszer szerint fogjuk végezni, míg II., III. ... rendű hálózatok kiegyenlítésénél a koordináta módszert fogjuk alkalmazni.

A koordináta módszer előnye a korreláta kiegyenlítéssel szemben az, hogy a normál

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Δ_i^1	Δ_i^2	Δ_i^3	$\lambda_i = [\Delta_i]$	Kiegyenlített irányok		Jegyzet
— 0.130	— 0.040	— 0.011	— 0.181	59.37	60.00	
+ 0.130	+ 0.034	+ 0.008	+ 0.172	14.82	15.45	
— 0.070	— 0.011	— 0.003	— 0.084	31.90	32.53	
+ 0.130	+ 0.034	+ 0.008	+ 0.172	43.79	44.42	
— 0.080	— 0.019	— 0.006	— 0.105	33.08	33.71	
— 0.090	— 0.012	— 0.002	— 0.104	25.73	26.36	
+ 0.120	+ 0.016	+ 0.003	+ 0.139	14.20	14.83	
+ 0.010	+ 0.002	— 0.003	+ 0.009	42.89		

egyenletek száma *független* a fölös mérések számától s hogy a feltételi egyenletek felállítása semmi különösebb megfontolást nem igényel; ugyszólván automatikusan állíthatók fel.

Korreláta kiegyenlítés esetében — mint tudjuk — 3 fajta feltételi egyenletről lehet szó, amelyek között lesznek nem lineáris alakuak is s igy azokat lineárisokká kell tennünk; nagy figyelemmel kell továbbá kiválogatnunk az egymástól független feltételi egyenleteket. A koordináta módszer esetében ezek a megfontolások elesnek.

Példával illusztrálandó a két módszer hátrányait illetőleg előnyeit, felemlitjük, hogy a Berlin város körül fejlesztett II. r. hálózat 29 pontból állott s korreláta kiegyenlítéssel egy-egy pontra átlagban 6 normál egyenlet esett; ha koordináta kiegyenlítést végeztek volna, egy-egy pontra csak *két* normál egyenlet esett volna. A szászországi hálózatban 34 pont kiegyenlítése koordináta módszer szerint 65 normál egyenlet *felállítását* és *meg-*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

oldását kívánta meg, míg korreláta kiegyenlítés esetében 159 normál egyenlet felállítása és megoldása lett volna szükséges. Ezek után nyilvánvaló a koordináta módszer előnye.

A koordináta módszert a magyarországi hálózatok kiegyenlítésénél 1868. óta használják s *Marek János* volt háromszögelő hivatali főnök vezette be, aki e módszer jogosultságáról a tudományos világot is igyekezett meggyőzni.*)

A koordináta módszer nagyobb teret akkor nyert, amikor *Schreiber* a porosz orsz. felmérés háromszögelési osztályának vezetője 1876. az alsóbbrendü hálózatok kiegyenlítésénél e módszer használatát tette kötelezővé.**)

1. A feltételi egyenletek felállitása.

Akár előmetszésről, akár hátrametszésről van szó, úgy az új, mint a régi pontokon irányokat kell mérnünk. *Független változóknak tekintve a meghatározandó pont y, x koordinátáit, a mérési eredményeket ezek függvényeként kell előállítanunk.*

Nevezzük a végleges irányokat a koordináta rendszer $+ x$ tengelyétől számítva (δ) *délszögeknek*, irányszögeknek vagy tájékozott irányoknak, akkor az ismert összefüggések révén

$$1. \ldots\ldots \quad tg\ \delta_i = \frac{y-y_i}{x-x_i} \qquad\qquad \delta_i = arctg\ \frac{y-y_i}{x-x_i}$$

Legyenek $l_1, l_2, \ldots, l_i$ a mérési eredmények, irányértékek, amelyekről feltesszük, hogy csak zérus középértékü hibát tartalmaznak.

Legyenek: $L_1, L_2, \ldots, L_i$ a hibátlannak tekinthető, vagy kiegyenlített irányértékek,

$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_i$ a hibátlannak tekinthető, vagy kiegyenlített délszögek,

$z_1, z_2, \ldots, z_i$ a hibátlannak tekinthető, vagy kiegyenlített tájékozási állandók.

Ez utóbbiak állomásonként egyenlők.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$ a mért irányértékek javitásai.

Most felirhatjuk a következő összefüggéseket:***)

$$2. \ldots\ldots \quad \begin{aligned} \delta_i &= L_i + z_i = l_i + \lambda_i + z_i \\ \lambda_i &= -z_i + \delta_i - l_i \end{aligned}$$

Ez a feltételi egyenletek legáltalánosabb alakja, amelyen azonban még átalakitásokat kell végeznünk, hogy a független változók szerepeljenek benne.

Behelyettesitve 2-be az 1. alatti értéket:

$$4. \ldots\ldots \quad \begin{aligned} \lambda_i &= -z_i + arctg\ \frac{y-y_i}{x-x_i} - l_i \\ \text{vagy } l_i + \lambda_i &= -z_i + arctg\ \frac{y-y_i}{x-x_i} = f(y, x, z) \end{aligned}$$

Miután a függvényalak nem lineáris, a Taylor sor segitségével lineárissá tesszük a (y), (x), (z) helyen, ahol a függvény növekmény legyen Δy, Δx, úgy hogy

$$y = (y) + \Delta y \qquad x = (x) + \Delta x \qquad z = (z) + \Delta z$$

---

*) Lásd: Zeitschrift für Vermessungswesen. 1874. évfolyam.

**) Lásd: Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abtheilung der Landesaufnahme, Ausgleichung und Berechnung der Triangulation zweiter Ordnung. 1877. Szept. 8. Berlin.

***) Egy irányértékből akkor lesz délszög (tájékozott irány), ha az irányértékhez adjuk a tájékozási állandót (z).

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A (x), (y), (z) értékeket *előleges* értékeknek fogjuk nevezni s a kiegyenlitő eljárás feladata lesz azon Δy, Δx, Δz javitások meghatározása, amelyek mellett egyenlő súlyok esetén a $[\lambda\lambda]$, nem egyenlő súlyok esetén a $[p\lambda\lambda]$ függvény minimum lesz. A sorba fejtett függvény alak lesz:

$$f(y,x,z) = f(y,x,z)_{(y)(x)(z)} + \left(\frac{\partial f(y,x,z)}{\partial y}\right)_{(y)(x)(z)} \Delta y + \left(\frac{\partial f(y,x,z)}{\partial x}\right)_{(y)(x)(z)} \Delta x +$$

5. . . .

$$+ \left(\frac{\partial f(y,x,z)}{\partial z}\right)_{(y)(x)(z)} \Delta z + R$$

A R maradék tagról feltesszük, hogy ha jól választottuk meg a sorbafejtés helyét, elhanyagolható.

A sorbafejtett függvényalak egyes tagjai lesznek:

$$f(y,x,z)_{(y)(x)(z)} = arctg \frac{(y) - y_i}{(x) - x_i} - z_i = (\delta_i) - (z_i)$$

$$\left(\frac{\partial f(y,x,z)}{\partial y}\right)_{(y)(x)(z)} \Delta y = \frac{1}{1 + \left(\frac{(y)-y_i}{(x)-x_i}\right)^2} \cdot \frac{1}{(x) - x_i} \Delta y = \frac{(x) - x_i}{((x) - x_i)^2 + ((y) - y_i)^2} \Delta y =$$

$$= \frac{(x) - x_i}{(s)^2} \Delta y$$

mert $((x) - x_i)^2 + ((y) - y_i)^2 = (s)^2$

$$\left(\frac{\partial f(y,x,z)}{\partial x}\right)_{(y)(x)(z)} \Delta x = \frac{1}{1 + \left(\frac{(y) - y_i}{(x) - x_i}\right)^2} \cdot - \frac{(y) - y_i}{((x) - x_i)^2} \Delta x = -$$

$$= - \frac{(y) - y_i}{((x) - x_i)^2 + ((y) - y_i)^2} \Delta x = - \frac{(y) - y_i}{(s)^2} \Delta x$$

$$\left(\frac{\partial f(y,x,z)}{\partial z}\right)_{(y)(x)(z)} \Delta z_i = - \Delta z_i$$

Miután: $\frac{(x) - x_i}{(s)} = cos\,(\delta_i)$ $\qquad$ $\frac{(y) - y_i}{(s)} = sin\,(\delta_i)$

az egyes differenciál hányadosok behelyettesitése után a feltételi egyenletek általános alakja lesz:

6. . . $\lambda_i = - \Delta z_i + \frac{cos\,(\delta_i)}{(s)} \Delta y - \frac{sin\,(\delta_i)}{(s)} \Delta x + (\delta_i) - (l_i + (z_i))$

A feltételi egyenletek ilyen alakban való felállitása tehát megkivánja, hogy a kiegyenlitendő pont *előleges* koordinátáinak felvétele után előleges délszögeket (δ), előleges távolságokat (s) és előleges tájékozási állandókat (z) számitsunk.

Az *előleges* koordináták számítása rendszerint úgy történik, hogy a mérési eredmények alapján akár előmetszéssel akár hátrametszéssel számítjuk a pont koordinátáit. Ezek *rendszerint* olyan jók, hogy a sorbafejtés R maradéktagja elhanyagolható s Δy, Δx koordináta javitások csak tized métereket, vagy tized öleket tesznek ki.

Erre való tekintettel — kényelmi szempontból — tized métert vagy tized ölet fogunk egységül választani s igy az (s) távolság helyett $10(s)$-et vezetünk a feltételi egyenletekbe; s miután λ javitásokat ivmásodpercekben akarjuk a $\frac{cos\,(\delta_i)}{(s)}$ és $\frac{sin\,(\delta_i)}{(s)}$ kifejezéseket ϱ''-el megszorozzuk.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Az itt mondottakat végrehajtva a feltételi egyenletek végleges alakja lesz:

$$7. \ldots \lambda_i = -\Delta z_i + \frac{\varrho'' \cos(\delta_i)}{10\,(s)}\,\Delta y - \frac{\varrho'' \sin(\delta_i)}{10\,(s)}\,\Delta x + \omega_i$$

$$\text{ahol } \omega_i = (\delta_i) - (l_i + (z_i)).$$

A feltételi egyenletek abszolút tagjaira vonatkozólag — mint eddig is a példákban láttuk — fontos, hogy *előjelre helyesen* akkor kapjuk, ha az *előleges értékből levonjuk* a *mérést;* illetve a jelen esetben a mért és *előlegesen tájékozott* irányt.

Bevezetve a következő jelzéseket:

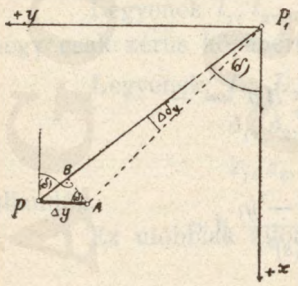
$$\frac{\varrho'' \cos(\delta_i)}{10\,(s)} = a_i \qquad \frac{\varrho'' \sin(\delta_i)}{10\,(s)} = b_i$$

$$8. \ldots \lambda_i = -\Delta z_i + a_i \Delta y + b_i \Delta x + \omega_i$$

A következőkben a feltételi egyenleteknek mindig ezt az alakját fogjuk használni.

2. Az a_i, b_i együtthatók geometriai jelentősége és számitása.

Az a_i, b_i, együtthatókat a következőkben mindig *iránykoefficienseknek* fogjuk nevezni. Legyen P pont a kiegyenlitendő pont s P_1 a P meghatározására szolgáló egyik pont.



13. ábra.

Ha P pont az y tengely irányában Δy-al változik, akkor (δ) délszög is változik $\Delta\delta y$ szöggel. Ennek a változásnak mérőszáma az $A\,B$ hossz. Az ábrából felirható:

$$A\,B = \Delta y \cos(\delta)$$

s ha $\Delta y = 1$, a $10\,(s)$ egységben, akkor — miután kis szögről van szó —

$$\Delta\delta_y'' = \frac{\varrho'' \cos(\delta)}{10\,(s)}$$

vagyis az $\boldsymbol{a} = \dfrac{\varrho'' \cos(\delta)}{10\,(s)}$ együttható nem egyéb, mint az y tengely irányában való tized-méternyi vagy ölnyi elmozdulásnak megfelelő délszögváltozás.

Analóg módon $\boldsymbol{b} = -\dfrac{\varrho'' \sin(\delta)}{10\,(s)}$ együttható nem egyéb, mint az x tengely irányában való tized méternyi vagy ölnyi elmozdulásnak megfelelő $\Delta\delta_x''$ délszögváltozás.

Ugy hogy:

$$a_i \Delta y + b_i \Delta x = \Delta\delta_y'' + \Delta\delta_x'' = \Delta\delta''$$

vagyis a fenti összeg mutatja, hogy az *előleges* délszög hány másodpercnyi változást szenved a kiegyenlités folytán, nevezetesen, amikor az előleges koordináták a kiegyenlitésből Δy, Δx javitásokat kapnak.

Felirhatjuk tehát

$$9. \ldots \Delta\delta'' = \Delta\delta_y'' + \Delta\delta_x'' = \delta - (\delta)$$

Ez a tulajdonság ellenőrzésül fog szolgálni a kiegyenlités után; ugyanis a *végleges* és *előleges* délszögek különbsége egyenlő tartozik lenni, az $a\Delta y + b\Delta x$ összegekkel.

Az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ iránykoefficiensek számitására igen sok mód van, melyek közül a nálunk leghasználatosabbakat fogjuk felsorolni.

1. A számitás legpontosabb módja az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ képletének logaritmusokkal való megoldása, amikor az előjeleket is megkapjuk. Lásd I. kötet 78. oldal.

2. Előnyösen végezhetjük a számitást logaritmikus differenciák segélyével.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ugyanis az $y_i - y$, $x_i - x$, különbségek logaritmusának kiirásánál kiirjuk az egy tized méternyi vagy ölnyi távolságnak megfelelő logaritmikus differenciát is. Az előleges délszög számításánál pedig kiirjuk a szög tangensének 1″-re eső logaritmusát. Akkor

$$10. \ldots \quad a = \frac{0{\cdot}1 \text{ méternyi vagy ölnyi log. diff. log } (y_i - y)\text{-nál}}{\text{log. diff. } 1''\text{-re log. tg.-nél}}$$

$$b = \frac{0{\cdot}1 \text{ méternyi vagy ölnyi log. diff. log. } (x_i - x)\text{-nél}}{\text{log. diff. } 1''\text{-re log. tg.-nél}}$$

Ennek az igen praktikus és gyors eljárásnak hátránya, hogy az iránykoefficiensek abszolut értékét megadja, de *előjelét* nem. Továbbá — miután logaritmikus függvényről van szó — lineárisan interpollálni nem lehet. Ebből következik, hogy ha az a és b értékek nagy számok, akkor az utolsó számjegyek nem lesznek megbizhatók.

Az *előjelek* megállapításánál ügyeljünk a következőkre:

1. Az a, b iránykoefficiensek előjelei egyeznek a *sin*, *cos* következő negyedbeli előjeleivel. Ha tehát a délszög a 2-ik negyedben fekszik, akkor a és b a *sin*, *cos* harmadik negyedbeli előjeleit követik; tehát a előjele —, b előjele —; de csak *akkor* és *csakis akkor*, ha a délszög *a régi pontról* számittatik, vagyis az oldalszámítási nyomtatványon úgy írjuk elő a pontokat, hogy a kiegyenlített, tehát adott pontról a *kiegyenlítendő pontra* menő délszöget kapjuk számítási eredményként.

Szemlélettel is eldönthetjük az iránykoefficiensek előjeleit — amit igen tanácsos is ellenőrzésképen *mindig* megtenni — nevezetesen, ha a $+ y$, $+ x$ tengely irányában való pontelmozdulás esetében a délszög nő, akkor az előjel +, ellenkező esetben —.

A szemlélettel való előjel megállapitásnak még egy egyszerübb módja, hogy a mozgó pontban erőt képzeljünk hatni, előbb parallel a $+ y$ tengelylyel s ha ez az óramutató forgásával megegyezőleg forgat, akkor az előjel +; azután a $+ x$ tengely irányában s ha ez az óramutatóval *ellenkező* irányban forgat, akkor az előjel —.

Az iránykoefficiensek abszolut értékének nagyságára is van ellenőrzésünk és pedig a *nagyobb* összrendező differenciának *kisebb* iránykoefficiens érték felel meg; a *kisebb* összrendező differenciának *nagyobb* iránykoefficiens érték felel meg.

3. Az iránykoefficiensek számíthatók táblázatokból és grafikonokból. Lásd Jordan: Handb. d. Vermessungsk. I. Band.

L'auné Ede a m. kir. háromszögelő hivatal volt főnöke szerkesztett egy grafikont, mely a háromszögelő hivatal *kitüzési vázlatainak* szokásos méret arányában (1 : 21600) van szerkesztve s negyedrendü pontok kiegyenlitése esetében igen előnyösen használható. Az előjelek megállapitása itt is a 2. pont alatt emlitett eljárással történik.

3. A feltételi egyenletek alakja külső, belső és külső-belső irányok esetén.

A feltételi egyenletek alakjára találtuk, hogy általánosságban

$$\lambda = -\Delta z + \frac{\varrho'' \cos(\delta)}{10\,(s)}\Delta y - \frac{\varrho'' \sin(\delta)}{10\,(s)}\Delta x + \omega$$

illetve $\lambda = -\Delta z + a\,\Delta y + b\,\Delta x + \omega$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A feltételi egyenleteknek ez az alakja érvényes *külső irányok* esetében.

Ha *belső irányokra* irjuk fel a feltételi egyenleteket, úgy azok teljesen megegyeznek — az abszolut tag kivételével — az előbbiekkel, pusztán előjel csere lesz; tehát

$$11. \ldots \lambda = -\Delta z - \frac{\varrho'' \cos(\delta)}{10\,(s)} \Delta y + \frac{\varrho'' \sin(\delta)}{10\,(s)} \Delta x + \omega$$

Külső-belső irányoknál, ha mindkét pont mozgó, azaz kiegyenlitendő pont, a feltételi egyenletek felállitását két lépésben végezzük;

a) egyik pontot fixnek képzeljük s róla, mint külső pontról a rendes módon felirjuk a feltételi egyenletet:

$$\lambda_1 = a_1 \Delta y + b_1 \Delta x + \omega_1$$

b) most a belső pontot képzeljük fixnek s a külsőt mozgópontnak:

$$\lambda_2 = -a_1 \Delta y - b_1 \Delta x + \omega_2$$

A kettő összefoglalásából kapjuk egy mozgó pontpárra érvényes alakját a feltételi egyenleteknek:

$$12. \ldots \lambda = a \Delta y + b \Delta x - a_1 \Delta y - b_1 \Delta x + \omega.$$

4. Hátrametszések kiegyenlítése.

Egy pont koordinátáinak meghatározása végett *iránymméréseket* végzünk. Amint tudjuk három jó fekvésü pontra menő irány mérése elegendő a pont koordinátáinak egyértelmü meghatározására. Ha több irányt is mérünk, akkor a fölös számú mérések alapján kiegyenlítéssel kell a pont helyét meghatároznunk.

Legyenek a mérési eredményeink: $l_1, l_2, \ldots, l_i$

a hibátlannak tekinthető, vagy kiegyenlített értékeink: $L_1, L_2, \ldots, L_i$

a hibátlannak tekinthető, vagy kiegyenlített délszögeink: $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_i$

a mérési eredmények javításai: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$.

A hibátlan irányértékekhez, hogy azok délszögek, vagy tájékozott irányok legyenek, tartozik a *tájékozási állandó*, melynek kiegyenlített értéke legyen: z.

Felírhatjuk a következő összefüggéseket:

$$13. \ldots \begin{aligned} l_1 + \lambda_1 &= L_1 \\ l_2 + \lambda_2 &= L_2 \\ &\ldots\ldots \\ l_n + \lambda_n &= L_n \end{aligned}$$

Továbbá:

$$14. \ldots \begin{aligned} L_1 + z &= \delta_1 \\ L_2 + z &= \delta_2 \\ &\ldots\ldots \\ L_n + z &= \delta_n \end{aligned}$$

Miután δ_n a *külső pontról számítva:*

$$\delta_n = arctg \frac{y - y_n}{x - x_n}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

ezt behelyettesítve a 14. képletbe s a 13. képlettel való rendezés után a feltételi egyenletek alakja lesz:

$$15. \quad \lambda_n = -z + arctg \frac{y - y_n}{x - x_n} - l_n$$

Az y, x, z előleges (y), (x), (z) értékeit felvéve s a 15. alatti képletet sorbafejtve, a szokásos jelzéseket bevezetve, a feltételi egyenletek lesznek:

$$16. \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -\Delta z + a_1 \Delta y + b_1 \Delta x + \omega_1 \\ \lambda_2 &= -\Delta z + a_2 \Delta y + b_2 \Delta x + \omega_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n &= -\Delta z + a_n \Delta y + b_n \Delta x + \omega_n \end{aligned}$$

A feltételi egyenletek ilyen alakja már előbbről ismeretes s pusztán az abszolut tagra kell megjegyzést tennünk.

A feltételi egyenletek abszolut tagjának értelmezése az előbbiek szerint, lásd 7. képlet

$$17. \quad \omega = (\delta) - (l + (z))$$

Hátrametszések esetében a tájékozási állandó előleges (z) értékének felvételi módja rendszerint a következő:

A felvett (y), (x) előleges koordinátákat összeszámítva sorjában a mért pontokkal kapjuk (δ_1), (δ_2), . . ., (δ_n) *előleges* délszögeket.

Levonva sorjában az *előleges délszögekből* a *mért* irányokat, kapjuk az egyes mérési eredmények adta tájékozási állandókat; minden *mért* irányérték más-más tájékozási állandót ad. A tájékozási állandó *előleges értékének* az előbb nyert tájékozási állandók *számtani középértékét fogadjuk el.*

$$18. \quad \begin{array}{l|l} (\delta_1) - l_1 = z_1 & z_1 - (z) = \omega_1 \\ (\delta_2) - l_2 = z_2 & z_2 - (z) = \omega_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \underline{(\delta_n) - l_n = z_i} & \underline{z_i - (z) = \omega_i} \\ (z) = \dfrac{[z]}{n} & [\omega] = 0 \end{array}$$

A kiegyelítő eljárás további menete az ismert módon történik, tehát, hogy $[\lambda\lambda]$ minimum legyen, a független változókat a normál egyenletből kell számítanunk.

A normál egyenlet lesz:

$$19. \quad \begin{aligned} n\Delta z - [a]\Delta y - [b]\Delta x - [\omega] &= 0 \\ -[a]\Delta z + [aa]\Delta y + [ab]\Delta x + [a\omega] &= 0 \\ -[b]\Delta z + [ab]\Delta y + [bb]\Delta x + [b\omega] &= 0 \end{aligned}$$

Ezt a normál egyenletet a rendes módon megoldva, megkapjuk a felvett előleges értékek javításait s így meg lesznek a kiegyenlített értékek.

Az első ismeretlen kiküszöbölése *után* a *redukált* normál egyenlet lesz:

$$20. \quad \begin{aligned} \left([aa] - \frac{[a]}{n}[a]\right)\Delta y + \left([ab] - \frac{[a]}{n}[b]\right)\Delta x + \left([a\omega] - \frac{[a]}{n}[\omega]\right) &= 0 \\ \left([ab] - \frac{[b]}{n}[a]\right)\Delta y + \left([bb] - \frac{[b]}{n}[b]\right)\Delta x + \left([b\omega] - \frac{[b]}{n}[\omega]\right) &= 0 \end{aligned}$$

Ezekre az egyenletekre később fogunk hivatkozni.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Irjuk fel mégegyszer a feltételi egyenleteket:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\Delta z + a_1 \Delta y + b_1 \Delta x + \omega_1 \\
\lambda_2 &= -\Delta z + a_2 \Delta y + b_2 \Delta x + \omega_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda_n &= -\Delta z + a_n \Delta y + b_n \Delta x + \omega_n \\
\text{összegezve } [\lambda] &= -n\,\Delta z + [a]\,\Delta y + [b]\,\Delta x + [\omega]
\end{aligned}$$

Az utolsó összegegyenlet nem egyéb, mint a 19. alatti első egyenlet s következőleg *hátrametszés esetében a javítások összege* $[\lambda] = 0$.

— n-nel osztva az összegegyenletet:

$$21. \quad \ldots\ldots\ldots + \Delta z - \frac{[a]}{n}\Delta y - \frac{[b]}{n}\Delta x - \frac{[\omega]}{n} = 0.$$

Hozzáadva ezt sorjában mindegyik feltételi egyenlethez, kapjuk a *redukált feltételi* egyenleteket:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \left(a_1 - \frac{[a]}{n}\right)\Delta y + \left(b_1 - \frac{[b]}{n}\right)\Delta x + \left(\omega_1 - \frac{[\omega]}{n}\right) \\
22. \ldots \quad \lambda_2 &= \left(a_2 - \frac{[a]}{n}\right)\Delta y + \left(b_2 - \frac{[b]}{n}\right)\Delta x + \left(\omega_2 - \frac{[\omega]}{n}\right) \\
\lambda_n &= \left(a_n - \frac{[a]}{n}\right)\Delta y + \left(b_n - \frac{[b]}{n}\right)\Delta x + \left(\omega_n - \frac{[\omega]}{n}\right)
\end{aligned}$$

A 22. alatti egyenletekből számított normál egyenlet együtthatója — csak az elsőt számítjuk — lesz:

$$\left(a_1 - \frac{[a]}{n}\right)^2 + \left(a_2 - \frac{[a]}{n}\right)^2 + \ldots + \left(a_n - \frac{[a]}{n}\right)^2 = [aa] - 2\,[a]\,\frac{[a]}{n} + \frac{[a]}{n}\,[a] = [aa] - \frac{[a]}{n}\,[a]$$

Ez pedig egyezik a 20. alatti egyenlet együtthatójával, úgy, hogy a *redukált feltételi egyenletekből szintén a 20. alatti redukált normál egyenletet kapjuk.*

A Δz kiküszöbölésének van még egy módja, a Schreiber-féle összegegyenletek segélyével.

Ezek az egyenletek képzelt egyenletek $-\frac{1}{n}$ súlylyal.

Legyenek a feltételi egyenletek:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\Delta z + a_1 \Delta y + b_1 \Delta x + \omega_1 \qquad g = 1 \\
\lambda_2 &= -\Delta z + a_2 \Delta y + b_2 \Delta x + \omega_2 \qquad g = 1 \\
23. \ldots \quad &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \ldots \\
\lambda_n &= -\Delta z + a_n \Delta y + b_n \Delta x + \omega_n \qquad g = 1 \\
\text{összeg: } [\lambda] &= -n\,\Delta z + [a]\,\Delta y + [b]\,\Delta x + [\omega] \qquad g = -\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Az utolsó összegegyenlet figyelembe vételével a normál egyenletek lesznek:

$$24. \quad \left([aa] - [a]\,\frac{[a]}{n}\right)\Delta y + \left([ab] - [a]\,\frac{[b]}{n}\right)\Delta x + \left([\omega\omega] - [\omega]\,\frac{[\omega]}{n}\right) = 0.$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Láthatjuk, hogy a Schreiber-féle képzelt feltételi egyenlet segélyével képezett normál egyenlet azonos a 20. alatti normál egyenlettel.

Elvégezve a normál egyenlet megoldását, a normál egyenlet maradék tagja $[\omega\omega.\ 2] = [\lambda\lambda.]$

A normál egyenletből kapott Δy, Δx javításokat behelyettesítve az eredeti *feltételi egyenletekbe* (Lásd 16. alatt) kapjuk a javításokat, illetőleg a javításoknak Δz-vel meghamisított értékeit, melyeket v betűvel jelezhetünk

$$v_i = \lambda_i + \Delta z = a_i \Delta y + b_i \Delta x + \omega_i$$

Sorjában kiszámítva a v értékeket, a 21. képlet szerint kiszámítjuk Δz értéket:

$$24\,a \ldots\ldots\ldots \quad \Delta z = \frac{[a]}{n} \Delta y + \frac{[b]}{n} \Delta x + \frac{[\omega]}{n}$$

Δz értéke a számítás menetén rendelkezésünkre is fog állani, mert a Δy, Δx értékeket amúgy is a feltételi egyenletekbe kell helyettesítenünk s így az $a\,\Delta y$, illetve $b\,\Delta x$ szorzatokat csak összegeznünk kell s a számtani középértéküket *ellenkező* jellel véve a v értékekhez kell adnunk, hogy λ_1, λ_2, . . . javításokat megkapjuk.

Ha a feltételi egyenletekből nyert $[\lambda\lambda]$ négyzetösszeg egyezik a normál egyenlet maradék tagjával, akkor a normál egyenlet *felállítása* és *megoldása* helyes volt.

Most még a *feltételi egyenletek felállítására* kell ellenőrzés.

A normál egyenlet adta Δy, Δx értékeket az előleges (y), (x) koordinátákhoz adva kapjuk a pont kiegyenlített koordinátáit:

$$y = (y) + \Delta y$$
$$x = (x) + \Delta x$$

A kiegyenlített koordináták révén számíthatók a *végleges délszögek*, δ_1, δ_2, . . ., δ_n, valamint Δz révén számítható $z = (z) + \Delta z$ s így

$$\lambda_i = -z + \delta_i - l_i = \delta_i - (l_i + z)$$

vagy pedig mint az ellentmondások számításánál tettük

$$25. \ldots\ldots\ldots \quad \begin{array}{l|l} \delta_1 - l_1 = z_1 & z_1 - \frac{[z]}{n} = \lambda_1 \\ \delta_2 - l_2 = z_2 & z_2 - \frac{[z]}{n} = \lambda_2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \delta_n - l_n = z_n & z_n - \frac{[z]}{n} = \lambda_n \\ \hline z = \frac{[z]}{n} & [\lambda] = 0 \end{array}$$

Ha az ily módon számított λ_1, λ_2, . . ., λ_n értékek egyeznek a feltételi egyenletekből számított javításokkal, akkor a kiegyenlítő számításban számítási hiba nincs.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A 25. képletből számított z érték egyenlő tartozik lenni a $(z) + \Delta z$ összeggel, illetőleg $z - (z) = \Delta z$. Ily módon a Δz is két módon számittatott.

Tekintettel a számítási műveletek sokaságára minden ellenőrzést fel kell használnunk. Amint a bevezetésben láttuk (lásd: 9. képl.)

$$\Delta\delta = \delta - (\delta) = a\,\Delta y + b\,\Delta x$$

Tehát a végleges délszög számításnál is lesz ellenőrzésünk, nevezetesen a végleges és előleges délszög közötti különbség egyenlő tartozik lenni az $a\,\Delta y + b\,\Delta x$ szorzatok összegével. Miután az $a\,\Delta y$, $b\,\Delta x$ szorzatokat előbb szoktuk kiszámítani, mint a végleges délszögeket, célszerű lesz a feltételi egyenletek adta $\Delta\delta = a\,\Delta y + b\,\Delta x$ értékeket irónnal a délszögszámítási nyomtatványunk szélére írnunk s a végleges délszög számításnál mindjárt megnézzük, hogy annyival változik-e a délszög, mint amennyit a feltételi egyenlet mutat. Ha hibára találunk, akkor nem folytatjuk tovább a délszögszámítást, hanem igyekszünk a hiba forrását kipuhatolni, amit rendszerint az előleges délszög vagy az iránykoefficiensek számításában szoktunk elkövetni s aminek következménye lesz, hogy az egész számítást meg kell ismételnünk.

A feladat megoldásának teljességéhez tartozik még a kiegyenlített értékek megbizhatóságának számítása. Az egységsúlyú mérési eredmény — tehát egy irányérték — várható középhibája

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{f}}$$

ahol $f =$ a fölös mérések számával.

Hátrametszés esetében 3 ismeretlenünk van, a két koordináta $(\Delta y, \Delta x)$ és a tájékozási állandó (Δz); vagy három irány mérése a szükséges és elegendő a pont egyértelmű meghatározásához. Ha n az összes mérések száma, akkor $f = n - 3$, s így

$$26. \quad \mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-3}}$$

A kiegyenlített értékek középhibájának számításához, szükségünk van a kiegyenlített értékek kiegyenlítés adta súlyaira (g_y, g_x).

Amint tudjuk a redukált normál egyenlet utolsó ismeretlenének az együtthatója az illető ismeretlen súlya, vagyis

$$g_y = [aa.\,1],\quad g_x = [bb.\,1]$$

$$27. \quad \text{Tehát} \quad \mu_y = \frac{\mu}{\sqrt{[aa.\,1]}} \qquad \mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{[bb.\,1]}}$$

Az eddigeket alkalmazzuk egy számpéldára.

A számítás menete lesz:

1. Előleges koordináta számítás.
2. Előleges délszög- és iránykoefficiens számítás.
3. Az ellentmondások $(\omega_1, \omega_2, \ldots)$ képzése.
4. A feltételi egyenletek táblázatos kiírása.
5. A normál egyenletek felállítása és megoldása.
6. A normál egyenletek adta Δy, Δx értékek behelyettesítése az eredeti feltételi egyenletekbe.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

7. A feltételi egyenletekből nyert λ-ákból a $[\lambda\lambda]$ képzése.
8. Végleges délszögszámítás az $y = (y) + \Delta y$, $x = (x) + \Delta x$ segélyével.
9. A végleges délszögekből a λ_1, λ_2, . . . javítások számítása.
10. Középhiba számítás.

A gyakorlatban célszerű a mért irányokat *megszámozni* s már a délszögszámítási nyomtatványon a számozás sorrendjében végezni a délszög- és iránykoefficiens számítást. Miután a végleges és előleges délszög számítást ugyanazon a nyomtatványon végezzük, célszerü az előleges számitás *utolsó* számjegyeit irónnal írni s ezeket a végleges délszög számításnál tintával átírjuk.

Kiegyenlítendő pont: D. ny. b. v.

Adott pontok: Lőrincke: $y = -$ 83 897.180 öl $x = -$ 71 128.739 öl
Vöröshegy: $y = -$ 84 581.049 $x = -$ 74 700.493
É. k. b. v.: $y = -$ 85 860.133 $x = -$ 72 575.215
Heringes: $y = -$ 87 055.017 $x = -$ 72 989.526
44 j. r.: $y = -$ 85 737.216 $x = -$ 71 165.735

Mért irányok a D. ny. b. v. pontról:

Lőrincke	=	54° 47′	39.″7
Vöröshegy	=	167 54	30. 9
É. k. b. v.	=	231 35	57. 4
Heringes	=	242 53	12. 6
44. j. r.	=	325 41	5. 4

A Dny. b. v. pont előleges koordinátái legyenek:

$(y) = -$ 85 156.000
$(x) = -$ 72 017.000

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

P_2-ről P_1-re menő délszög megállapítása					$y_1 - y_2 = y_1 - y_2$	$x_1 - x_2 = x_1 - x_2$	$tg\,\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$	$\frac{a}{b} = \frac{\log \text{diff. } 0.1\text{-re } (\log (y_1 - y_2)\text{-nél})}{\log \text{diff. } 1''\text{-re } (\log tg\,\alpha\text{-nál})}$	$S = \frac{y_1 - y_2}{\sin\alpha} ha (y_1 - y_2) > (x_1 - x_2)$	$\log a = \log \frac{\cos \delta_{2-1}}{10.\,S.\,\sin 1''}$
$y_1 - y_2$	$x_1 - x_2$	$tg\,\alpha$	Negyed	Délszög P_2-ről P_1-re $\delta\,2-1$						
+	+	+	I	α	+ N	+ D	$\log (y_1 - y_2) - \log (x_1 - x_2) = \log tg\,\alpha$	$\log \text{diff. } 0.1\text{-re } \log (y_1 - y_2)\text{-nél}$	$\log (y_1 - y_2) - \log \sin\alpha \log S$	$\log \frac{a}{b}$ { $\log \cos \delta_{2-1}$ + compl: log. 10. sin 1'' + compl: log S $\log (-\sin \delta_{2-1})$ } $\log b$
+	−	−	II	$180° - \alpha$			α	$\log \text{diff. } 1''\text{-re } \log tg\,\alpha\text{-nál}$		
−	−	+	III	$180° + \alpha$	− K	− É	Ellenőrző számítás $\log [(y_1 - y_2) + (x_1 - x_2)] - \log [(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)] = \log tg\,tg\,\psi$ $\psi = \delta\,2-1 + 45°$	$\log \text{diff. } 0.1\text{-re } \log (y_1 - y_2)\text{-nél}$	$\log (x_1 - x_2) - \log \cos\alpha = \log S$	
−	+	−	IV	$360° - \alpha$				$\log \text{diff. } 0.1\text{-re } \log (x_1 - x_2)\text{-nél}$		
A pont neve vagy száma								$\log \text{diff. } 1''\text{-re } \log tg\,\alpha\text{-nál}$		
1					2	3	4	5	6	7

	D. ny. b. v.		—	*85 156.059*	—	*72 017.086*	*3.099 9840*	*345*	*3.099 9840*	$\log a$ = *0.887 56*
	Lőrincke		∓	*83 897.180*	∓	*71 128.739*	*2.948 5826*	*489*	*9.912 2495*	$\log \cos \delta$ = *9.760 83*
			—	*1 258.879*	—	*888.347*	*0.151 4014*	*44.7*	*3.187 7345*	= *4.314 43*
1.	$a = -$ *7.7*							$a = -$ *7.7*		*cpl: log S* = *6.812 30*
	$b = +$ *10.9*						$a =$ *54 47 26.6*			$\log (-\sin \delta)$ = *9.912 26*
		Délszög: *Lőrincke — D. ny. b. v.*					= *234 47 26.6*	$b = +$ *10.9*		$\log b$ = *1.038 99*
							= *54*			$a = 7.7$ $b = 10.9$
	D. ny. b. v,		—	*85 156.059*	—	*72 017.086*	*2.759 6754*	*755*	*3.428 6865*	$\log a$ = *0.866 23*
	Vöröshegy		∓	*84 581.049*	∓	*74 700 493*	*3.428 6865*	*162*	*9.990 2513*	$\log \cos \delta$ = *9.990 25*
			—	*575.010*	+	*2 683.407*	*9.330 9889*	*102.8*	*3.438 4352*	= *4.314 43*
2.	$a = +$ *7.3*							$a = +$ *7.3*		*cpl: log S* = *6.561 55*
	$b = +$ *1.6*						$a =$ *12 5 40.7*			$\log (-\sin \delta)$ = *9.321 18*
		Délszög: *Vöröshegy — D. ny. b. v.*					= *347 54 19.3*	$b = +$ *1.6*		$\log b$ = *0.197 16*
							= *167*			$a = 7.3$ $b = 1.6$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

	D. ny. b. v.	—	*85 156.059*	—	*72 017.086*	*2.847 6813*	*617*	*2.847 6183*	$\log a = 1.154\ 15$
	É. k. b. v.	∓	*85 860.133*	∓	*72 575.215*	*2.746 7346*	*778*	*9.894 1201*	$\log \cos \delta = 9.793\ 26$
		+	*704.074*	+	*558.129*	*0.100 8837*	*43.3*	*2.953 4982*	$= 4.314\ 43$
3.	$a = +14.3$						$a = +14.3$		$cpl: \log S = 7.046\ 46$
	$b = -18.0$					$a = 51\ 35\ 44.4$			$\log(-\sin\delta) = 9.894\ 11$
		Délszög: *É. k. b. v. — D. ny. b. v.*				$= 51\ 35\ 44.4$	$b = -18.0$		$\log b = 1.255\ 00$
						$= 231$			$a = 14.3 \quad b = 18.0$
	D. ny. b. v.	—	*85 156.059*	—	*72 017.086*	*3.278 5154*	*228*	*3.278 5154*	$\log a = 0.644\ 11$
	Heringes	∓	*87 055.017*	∓	*72 989.526*	*2.987 8628*	*447*	*9.949 4295*	$\log \cos \delta = 9.658\ 79$
		+	*1 898.958*	+	*972.440*	*0.290 6526*	*51.9*	*3.329 0859*	$= 4.314\ 43$
4.	$a = +4.4$						$a = +4.4$		$cpl: \log S = 6.670\ 89$
	$b = -8.6$					$a = 62\ 53\ 0.3$			$\log(-\sin\delta) = 9.949\ 42$
		Délszög: *Heringes — D. ny. b. v.*				$= 62\ 53\ 0.3$	$b = -8.6$		$\log b = 0.934\ 74$
						$= 242$			$a = 4.4 \quad b = 8.6$
	D. ny. b. v.	—	*85 156.059*	—	*72 017.086*	*2.764 2935*	*747*	*2.930 1086*	$\log a = 1.218\ 19$
	44.	∓	*85 737.216*	∓	*71 165.735*	*2.930 1086*	*510*	*9.916 9356*	$\log \cos \delta = 9.916\ 91$
		+	*581.157*	—	*851.351*	*9.834 1849*	*45.3*	*3.013 1730*	$= 4.314\ 43$
5.	$a = -16.5$						$a = -16.5$		$cpl: \log S = 6.986\ 85$
	$b = -11.3$					$a = 34\ 19\ 6.9$			$\log(-\sin\delta) = 9.751\ 18$
		Délszög: *44. — D. ny. b. v.*				$= 145\ 40\ 53.1$	$b = -11.3$		$\log b = 1.052\ 46$
						$= 325$			$a = 16.5 \quad b = 11.3$

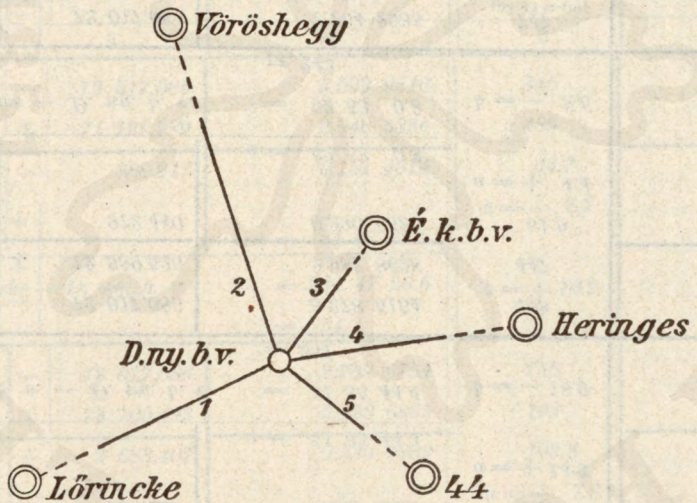
Jegyzet: A magy. kir. háromszögelő hivatal nyomtatványa.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

I. Álláspont. *)

D. ny. b. v. számu pontnak előleges összrendezői:	$(y) = -\ 85\ 156.000$	$(x) = -\ 72\ 017.000$
javitás	$\Delta_y = -\ 0.059$	$\Delta_x = -\ 0.086$
D. ny. b. v. számu pontnak végleges összrendezői:	$y = -\ 85\ 156.059$	$x = -\ 72\ 017.086$
Középhibák:	$m_y = \pm\ 0.004$	$m_x = \pm\ 0.004$

II. Vázlat.



14. ábra.

*) Jegyzet: A magy. kir. háromszögelő hivatal nyomtatványa. Egyes jelzések mások, mint a szövegben, de az összefüggés könnyen látható.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár. 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

III. *w* ellentmondások, v végleges hibák és [vv] képzése.

A.) Belső irányok.

1	2	3	4			5			6			7	8			9			10	11
Irány száma	Az álláspont neve vagy száma	Az irányzott pont neve vagy száma	Mért irányok (α)			Előleges délszög (δ)			Előleges tájékozási szög $(\delta_n)-\alpha_n=(J_n)$ $\frac{[(J_n)]}{n}=(J)$			$(J_n)-(J)=w$	Végleges délszögek δ			Tájékozási szög $\delta_n-\alpha_n=J_n$ $\frac{[J_n]}{n}=J$			Hibák $J_n-J=\lambda$	$\lambda\lambda$
			°	'	"	°	'	"	°	'	"	"	°	'	"	°	'	"	"	
1		Lőrincke	54	47	39.7	54	47	31.4	359	59	51.7	+ 8.3	54	47	26.6	359	59	46.9	— 0.6	0.36
2		Vöröshegy	167	54	30.9	167	54	25.0			54.1	+ 10.7	167	54	19.3			48.4	+ 0.9	0.81
3	D. ny. b. v.	É. k. b. v.	231	35	57.4	231	35	37.3			39.9	— 3.5	231	35	44.4			47.0	— 0.5	0.25
4		Heringes	242	53	12.6	242	52	55.5			42.9	— 0.5	242	53	0.3			47.7	+ 0.2	0.04
5		44.	325	41	5.4	325	40	33.6			28.2	— 15.2	325	40	53.1			47.7	+ 0.2	0.04
							(Z) =		359	59	43.4			Z =		359	59	47.5	+ 1.3— 1.1	1.50

IV. A normálegyenlet együtthatóinak képzése.

1	2	3	4	5	6	7	8	9		10		11	12		13
				levezetett				pab		paw		pbb	pbw		
R	p	a	b	a	b	w	paa	+	—	+	—		+	—	w^2
1	1	— 7.7	+ 10.9	— 8.1	+ 16.0	+ 8.3	+ 65.61	.	129.60	.	67.23	+ 256.00	132.80	.	+ 68.89
2	1	+ 7.3	+ 1.6	+ 6.9	+ 6.7	+ 10.7	+ 47.61	46.23	.	73.83	.	44.89	71.69	.	114.49
3	1	+ 14.3	— 18.0	+ 13.9	— 12.9	— 3.5	+ 193.21	.	179.31	.	48.65	166.41	45.15	.	12.25
4	1	+ 4.4	— 8.6	+ 4.0	— 3.5	— 0.5	+ 16.00	.	14.00	.	2.00	12.25	1.65	.	0.25
5	1	— 16.5	— 11.3	— 16.9	— 6.2	— 15.2	+ 285.61	104.78	.	256.88	.	38.44	94.24	.	231.04
		— 24.2 + 26.0	— 37.9 + 12.5	+ 24.8 — 25.0	+ 22.7 — 22.6	+ 19.0 — 19.2	608.04	151.01	322.91	330.71	117.88	517.99	345.53	.	+ 426.92
		+ 1.8 — 5 =	— 25.4 — 5 =												
		— 0.4	+ 5.1				+ 608.0	.	— 171.9	+ 212.8	.	518.0	+ 345.5	.	+ 426.9

V. A normálegyenlet és annak megoldása:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	$a]$	$b]$	$w]$		Egy irány középhibája:		$b]$	$a]$	$w]$	
	$-7.216\,0964$	$+9.451\,3723$	$-9.544\,0680$		$m = \pm\sqrt{\frac{[w.w.2]}{r-n}} = \pm\sqrt{\frac{1.8}{2}}$		$-7.285\,6702$	$+9.520\,9461$	$-9.824\,1183$	
	$+2.783\,9036$	$-2.235\,2759$	$+2.327\,9716$				$+2.714\,3298$	$-2.235\,2759$	$+2.538\,4481$	
$[a$	$+608.0$	-171.9	$+212.8$	$-1.686\,6482$	$= \pm 0.''95$	$[b$	$+518.0$	-171.9	$+345.5$	$-1.756\,2220$
$[b$		$+518.0$	$+345.5$	$+1.779\,3439$	Az összrendezők középhibái:	$[a$		$+608.0$	$+212.8$	$+2.059\,3942$
		-48.6	$+60.2$					-57.0	$+114.7$	
$[w$			$+426.9$	$-1.872\,0396$	$m_y = \pm\sqrt{\frac{m^2}{[aa.1]}}$	$[w$			$+426.9$	$-2.362\,5664$
			-74.5		$= \pm 0.004$				-230.4	
		$-7.328\,4569$	$-9.936\,6619$	$\log \Delta x =$				$-7.258\,8484$	$-9.774\,0597$	$\log \Delta y =$
		$+2.671\,5431$	$+2.608\,2050$	$-9.936\,6619$	$m_x = \pm\sqrt{\frac{m^2}{[bb.1]}}$			$+2.741\,1516$	$+2.515\,2113$	$-9.774\,0597$
$[b.1$		$+469.4$	$+405.7$	$\Delta x =$	$= \pm 0.004$	$[a.1$		$+551.0$	$+327.5$	$\Delta y =$
				-0.86						-0.59
$[w.1$			$+352.4$			$[w.1$			$+196.5$	
			-350.6	$-2.544\,8669$					-194.7	$-2.289\,2710$
$[w.2$			$+1.8$			$[w.2$			$+1.8$	

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

VI. Az irányváltozások kiszámitása, λ végleges hibák és $[\lambda\lambda]$ képzése:

	R	$a.\Delta y$	$b.\Delta x$	$\Delta\delta = a.\Delta y + b.\Delta x$	$v + i = \Delta\delta + w$	v	vv	
	1	+ 4.54	− 9.37	− 4.83	+ 3.5	− 0.6	0.36	
	2	− 4.31	− 1.38	− 5.69	+ 5.0	+ 0.9	0.81	
	3	− 8.44	+15.48	+ 7.04	+ 3.5	− 0.6	0.36	
$\log m^2 = 9.954\,24$	4	− 2.60	+ 7.40	+ 4.80	+ 4.3	+ 0.2	0.04	$\log m^2 = 9.954\,24$
$+ \log \frac{1}{[aa.1]} = 7.258\,85$	5	+ 9.74	+ 9.72	+19.46	+ 4.3	+ 0.2	0.04	$+ \log \frac{1}{[bb.1]} = 7.328\,46$
$\log m_y^2 = 7.213\,09$					+20.6 : 5 = 4.1		1.61	$\log m_x^2 = 7.282\,70$
$\log m_y = 8.606\,55$					$-\Delta z = -4.1$			$\log m_x = 8.641\,35$
$m_y = \pm 0.040$								$m_x = \pm 0.044$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

5. Előmetszés kiegyenlítése.

Egy pont koordinátáinak meghatározása végett külső pontokon irányméréseket végzünk. Két alkalmas fekvésű pontról végzett iránymérés elegendő a pont koordinátáinak egyértelmű meghatározásához. Ha több pontról végzünk iránymérést, akkor a pont koordinátáinak legvalószínűbb értékét kiegyenlítő számítással határozzuk meg.

A külső pontokon mért irányértékek tetszőleges körállásra vonatkoznak s így állomásonként az egyes irányértékekhez egy-egy tájékozási állandó tartozik.

A tárgyalás egyszerűsítése végett képzeljük magunkat az egyik ponton.

Az új pontra menő irányt — rendszerint — két-három régi pontra menő irány közé mérjük be.

Legyenek a mérési eredményeink: l_1, l_2, l, l_3.

Az l_1, l_2, l_3 irányértékek a kiegyenlített pontokra menő mért irányértékek.

Az l irányérték az új pontra vonatkozik.

A hibátlannak tekinthető, vagy kiegyenlített irányértékeink legyenek: L_1, L_2, L, L_3.

δ_1, δ_2, δ_3 délszögek az előbbi kiegyenlítésből már ismeretesek s a mi szempontunkból hibátlanoknak tekintendők.

Az l_1, l_2, l, l_3 mérési eredmények javításai legyenek λ_1, λ_2, λ, λ_3, akkor

$$\begin{aligned} l_1 + \lambda_1 &= L_1 \\ l_2 + \lambda_2 &= L_2 \\ l + \lambda &= L \\ l_3 + \lambda_3 &= L_3 \end{aligned} \qquad 28.$$

Az L_1, L_2, L, L_3 irányértékekhez tartozik egy szögérték, amelynek segélyével az irányértékek délszögek vagy irányszögek lesznek, tehát

$$\begin{aligned} L_1 + z &= \delta_1 \\ L_2 + z &= \delta_2 \\ L + z &= \delta \\ L_3 + z &= \delta_3 \end{aligned} \qquad 29.$$

Az egyes délszögekre pedig áll, hogy

$$\begin{aligned} \delta_1 &= arctg \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \\ \delta_2 &= arctg \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} \\ \delta &= arctg \frac{y - y_A}{x - x_A} \\ \delta_3 &= arctg \frac{y_A - y_D}{x_A - x_D} \end{aligned} \qquad 30.$$

A kiegyenlítendő pont előleges koordinátái legyenek (y), (x), a tájékozási állandó előleges értéke legyen (z), úgy hogy

$$\begin{aligned} y &= (y) + \Delta y \\ x &= (x) + \Delta x \\ z &= (z) + \Delta z, \text{ akkor} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1 + \lambda_1 &= L_1 = \delta_1 - (z) - \Delta z \\ l_2 + \lambda_2 &= L_2 = \delta_2 - (z) - \Delta z \\ l + \lambda &= L = \delta - (z) - \Delta z \\ l_3 + \lambda_3 &= L_3 = \delta_3 - (z) - \Delta z \end{aligned}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

λ-ák szerint megoldott alakban írva:

$$31. \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -\Delta z + \delta_1 - (l_1 + (z)) \\ \lambda_2 &= -\Delta z + \delta_2 - (l_2 + (z)) \\ \lambda &= -\Delta z + \delta - (l + (z)) \\ \lambda_3 &= -\Delta z + \delta_3 - (l_3 + (z)) \end{aligned}$$

Miután δ_1, δ_2, δ_3 délszögek ismeretesek, legyen

$$\begin{aligned} \delta_1 - (l_1 + (z)) &= \omega_1 \\ \delta_2 - (l_2 + (z)) &= \omega_2 \\ \delta_3 - (l_3 + (z)) &= \omega_3 \end{aligned}$$

Tehát a régi pontokra menő irányoknak megfelelő feltételi egyenletek *lineárisak* s csak az új pontra menő iránynak megfelelő feltételi egyenletet kell lineárissá tennünk.

$$\lambda = -\Delta z + arc\ tg \frac{y - y_A}{x - x_A} - (l + (z))$$

E függvény alakot sorbafejtve a (y), (x) helyen:

$$\lambda = -\Delta z + a\,\Delta y + b\,\Delta x + \omega$$

$$\text{ahol } a = \frac{\varrho''\ cos\,(\delta)}{10\,(s)} \qquad b = -\frac{\varrho''\ sin\,(\delta)}{10\,(s)} \qquad \omega = (\delta) - (l + (z))$$

Ezek után a tárgyalt pontról mért irányértékeknek megfelelő feltételi egyenletek lesznek:

$$32. \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -\Delta z + & &+ \omega_1 \\ \lambda_2 &= -\Delta z + & &+ \omega_2 \\ \lambda &= -\Delta z + a\,\Delta y + b\,\Delta x + \omega \\ \lambda_3 &= -\Delta z + & &+ \omega_3 \end{aligned}$$

Ahány külső pontról iránymérést végeztünk, annyi ilyen feltételi egyenletrendszert kapunk.

Az ω_1, ω_2, ω, ω_3 ellentmondásokat ugyanoly módon kapjuk, mint azt a hátrametszés kiegyenlítésénél láttuk; tehát

$$33. \quad \begin{array}{rcl|rcl} \delta_1 - l_1 & = & z_1 & z_1 - (z) & = & \omega_1 \\ \delta_2 - l_2 & = & z_2 & z_2 - (z) & = & \omega_2 \\ (\delta) - l & = & z_k & z_k - (z) & = & \omega \\ \delta_3 - l_3 & = & z_3 & z_3 - (z) & = & \omega_3 \\ \hline (z) & = & \dfrac{[z]}{4} & [\omega] & = & 0 \end{array}$$

Az eddigi tárgyalásban úgy képzeltük, hogy három régi irány közé mértük be az új irányt s kaptunk 4 feltételi egyenletet. Ha k irány közé mérjük be az új irányt, akkor $k + 1$ feltételi egyenletünk lesz.

E $k + 1$ számú feltételi egyenletre felírva a normál egyenletet:

$$34. \quad \begin{aligned} \underline{(k+1)}\ \Delta z + a\ \Delta y + b\ \Delta x + [\omega] &= 0 \\ \underline{+ a^2}\ \Delta y + ab\ \Delta x + a\omega &= 0 \\ \underline{+ b^2}\ \Delta x + b\omega &= 0 \\ \underline{+ [\omega\omega]} &= 0 \end{aligned}$$

a Δz kiküszöbölése *után* a *redukált* normál egyenlet lesz:

$$35. \quad \begin{aligned} \underline{\left(a^2 - \frac{a}{k+1}\,a\right)}\,\Delta y + \left(ab - \frac{a}{k+1}\,b\right)\Delta x + \left(a\omega - \frac{a}{k+1}\,[\omega]\right) &= 0 \\ \underline{+\left(b^2 - \frac{b}{k+1}\,b\right)}\,\Delta x + \left(b\omega - \frac{b}{k+1}\,[\omega]\right) &= 0 \\ \underline{+\left([\omega\omega] - \frac{[\omega]}{k+1}\,[\omega]\right)} &= 0 \end{aligned}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ilyen redukált normál egyenleteket kapunk állomásonként s az összetartozó tagok összegezése *után* kapjuk az összes feltételi egyenleteknek megfelelő normál egyenletrendszert.

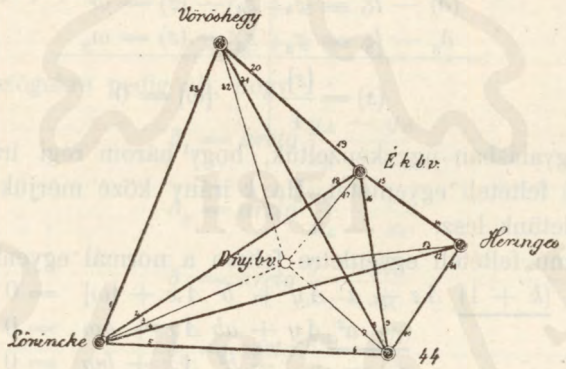
A normál egyenletek felállítását rendszerint a Schreiber-féle összegegyenletek segélyével végezzük, tehát állomásonként $-\frac{1}{n}$ súlylyal egy képzelt feltételi egyenletet vezetünk be s ezáltal a normál egyenletekből a tájékozási ismeretlenek kiesnek.

A normál egyenletek megoldása után nyert Δy, Δx koordináta javítások segélyével kiszámítjuk az eredeti feltételi egyenletekből a mért irányértékek javításait.

Az eljárás teljesen ugyanaz lesz, mint a hátrametszés kiegyenlítésénél, tehát a számítás gyakorlati végrehajtásánál a következőket kell elvégeznünk:

1. Előleges koordináta számítás.
2. Előleges délszög és iránykoefficiens számítás.
3. A feltételi egyenletek abszolut tagjainak képzése.
4. A feltételi egyenletek táblázatos összeállítása.
5. A normál egyenletek felállítása és megoldása.
6. A normál egyenletek adta Δy, Δx értékek behelyettesítése az *eredeti* feltételi egyenletekbe.
7. A feltételi egyenletekből számított λ-ákból a $[\lambda\lambda]$ képzése.
8. Végleges délszög számítás az $y = (y) + \Delta y$, $x = (x) + \Delta x$ segélyével.
9. A végleges délszögek segítségével a λ_1, λ_2 . . . javítások számítása.
10. Középhiba számítás.

Számpélda az előmetszés kiegyenlítésére.



15. ábra.

Kiegyenlítendő pont a D. ny. b. v. pont.

Mérési eredmények:

Álláspont: *Lörincke*	1. Vöröshegy	= 190°	49′	33.″2
	2. É. k. b. v.	= 233	36	2.1
	3. D. ny. b. v.	= 234	46	36.5
	4. Heringes	= 239	28	38.3
	5. 44. j. r.	= 268	50	7.0

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Álláspont: *44. j. r.*	6. Lőrincke	=	88	51	31.1
	7. D. ny. b. v.	=	145	41	26.8
	8. Vöröshegy	=	161	53	56.7
	9. É. k. b. v.	=	184	59	39.4
	10. Heringes	=	215	51	44.1
Álláspont: *Heringes*	11. 44. j. r.	=	35°	51′	50.″8
	12. Lőrincke	=	59	30	19.0
	13. D. ny. b. v.	=	62	53	51.1
	14. É. k. b. v.	=	70	53	25.5
Álláspont: É. k. b. v.	15. Heringes	=	250°	52′	36.″0
	16. 44. j. r.	=	4	59	1.1
	17. D. ny. b. v.	=	51	35	42.4
	18. Lőrincke	=	53	36	49.0
	19. Vöröshegy	=	148	57	27.3
Álláspont: Vöröshegy	20. É. k. b. v.	=	328°	56′	24.″1
	21. 44. j. r.	=	341	52	8.6
	22. D. ny. b. v.	=	347	53	10.5
	23. Lőrincke	=	10	49	11.5

A végleges pontok koordinátái:

Lőrincke	$y = -$ 83 897.180 öl	$x = -$ 71 128.739 öl
Vöröshegy	$y = -$ 84 581.049	$x = -$ 74 700.493
É. k. b. v.	$y = -$ 85 860.133	$x = -$ 72 575.215
Heringes	$y = -$ 87 055.017	$x = -$ 72 989.526
44. j. r.	$y = -$ 85 737.216	$x = -$ 71 165.735

A D. ny. b. v. *előleges* koordinátái legyenek: $(y) = -$ 85 156.000 $(x) = -$ 72 017.000.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Álláspont	Irány száma	Irányzott pont	Mérési eredmények l	Kiegyenlítés előtt: δ illetve (δ)	Kiegyenlítés előtt: $(\delta) - l$	Kiegyenlítés előtt: ω	Kiegyenlítés után: δ	Kiegyenlítés után: $\delta - l$	Kiegyenlítés után: λ	Kiegyenlítés után: $\lambda\lambda$
Lőrincke	1	Vöröshegy	190° 49' 33."2	190° 50' 20."4	0° 0' 47.2	— 1.9	190° 50'20. '4	0 0 47.2	— 0.9	0.81
	2	É. k. b. v.	233 36 2.1	233 36 50.3	48.2	— 0.9	233 36 50.3	48.2	+ 0.1	0.01
	3	D. ny. b. v.	234 46 36.5	234 47 31.4	54.9	+ 5.8	234 47 26.2	49.7	+ 1.6	2.56
	4	Heringes	239 28 38.3	239 29 27.1	48.8	— 0.3	239 29 27.1	48.8	+ 0.7	0.49
	5	44. j. r.	268 50 7.0	268 50 53.4	46.4	— 2.7	268 50 53.4	46.4	— 1.7	2.89
					(z_o) = 0° 0' 49.1	0.0	z =	0 0 48.1	+ 0.1	
44. j. r.	6	Lőrincke	88 51 31.1	88 50 53.4	359 59 22.3	+ 4.5	88 50 53.4	359 59 22.3	+ 1.6	2.56
	7	D. ny. b. v.	145 41 26.8	145 40 33.6	6.8	— 11.0	145 40 48.3	21.5	+ 0.8	0.64
	8	Vöröshegy	161 53 56.7	161 53 16.2	19.5	+ 1.7	161 53 16.2	19.5	— 1.2	1.44
	9	É. k. b. v.	184 59 39.4	184 59 2.4	23.0	+ 5.2	184 59 2.4	23.0	+ 2.3	5.29
	10	Heringes	215 51 44.1	215 51 1.5	17.4	— 0.4	215 51 1.5	17.4	— 3.3	10.89
					(z_o) = 359 59 17.8	0.0	z =	359 50 20.7	+ 0.2	
Heringes	11	44. j. r.	35 51 50.8	35 51 1.5	359 59 10.7	+ 2.3	35 51 1.5	359 59 10.7	+ 1.1	1.21
	12	Lőrincke	59 30 19.0	59 29 27.1	8.1	— 0.3	59 29 27.1	8.1	— 1.5	2.25
	13	D. ny. b. v.	62 53 51.1	62 52 55.5	4.4	— 4.0	62 53 0.2	9.1	— 0.5	0.25
	14	É. k. b. v.	70 53 25.5	70 52 36.0	10.5	+ 2.1	70 52 36.0	10.5	+ 0.9	0.81
					(z_o) = 359 59 8.4	0.0	z =	359 59 9.6	0.0	
É. k. b. v.	15	Heringes	250 52 36.0	250 52 36.0	359 59 60.0	— 0.3	250 52 36.0	359 59 60.0	— 1.9	3.61
	16	44. j. r.	4 59 1.1	4 59 2.4	61.3	+ 1.0	4 59 2.4	61.3	— 0.6	0.36
	17	D. ny. b. v.	51 35 42.4	51 35 37.3	54.9	— 5.4	51 35 45.2	62.8	+ 0.9	0.81
	18	Lőrincke	53 36 49.0	53 36 50.3	61.3	+ 1.0	53 36 50.3	61.3	— 0.6	0.36
	19	Vöröshegy	148 57 27.3	148 57 31.2	63.9	+ 3.6	148 57 31.2	63.9	+ 2.0	4.00
					(z_o) = 359 59 60.3	0.1	z =	0 0 1.9	— 0.2	
Vöröshegy	20	É. k. b. v.	328 56 24.1	328 57 31.2	0 1 7.1	— 2.4	328 57 31.2	0 1 7.1	— 1.4	1.96
	21	44. j. r.	341 52 8.6	341 53 16.2	7.6	— 1.9	341 53 16.2	7.6	— 0.9	0.81
	22	D. ny. b. v.	347 53 10.5	347 54 25.0	14.5	+ 5.0	347 54 21.0	10.5	+ 2.0	4.00
	23	Lőrincke	10 49 11.5	10 50 20.4	8.9	— 0.6	10 50 20.4	8.9	+ 0.4	0.16
					(z_o) = 0 1 9.5	+ 0.1	z =	0 1 8.5	+ 0.1	48.02 = $[\lambda\lambda]$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Feltételi egyenletek.

Irány száma	a	b	ω	g	$a\,\Delta y$	$b\,\Delta x$	$\Delta\delta$	$v=\lambda+\Delta z=\Delta\delta+\omega$	λ	$\lambda\lambda$
1			− 1.9	1				− 1.9	− 0.9	0.81
2			− 0.9	1				− 0.9	+ 0.1	0.01
3	− 7.7	+ 10.9	+ 5.8	1	+ 2.92	− 8.07	− 5.15	+ 0.6	+ 1.6	2.56
4			− 0.3	1				− 0.3	+ 0.7	0.49
5			− 2.7	1				− 2.7	− 1.7	2.89
	− 7.7	+ 10.9	0	$-\frac{1}{5}$				$\Delta z=+1.0$	+ 0.1	
6			+ 4.5	1				+ 4.5	+ 1.6	2.56
7			− 11.0	1				+ 3.6	+ 0.7	0.49
8	− 16.5	− 11.3	+ 1.7	1	+ 6.27	+ 8.36	+ 14.63	+ 1.7	− 1.2	1.44
9			+ 5.2	1				+ 5.2	+ 2.3	5.29
10			− 0.4	1				− 0.4	− 3.3	10.89
	− 16.5	− 11.3	0.0	$-\frac{1}{5}$				$\Delta z=-2.9$	0.1	
11			+ 2.3	1				+ 2.3	+ 1.1	1.21
12	+ 4.4	− 8.6	− 0.3	1	− 1.67	+ 6.36	+ 4.69	− 0.3	− 1.5	2.25
13			− 4.0	1				+ 0.7	− 0.5	0.25
14			+ 2.1	1				+ 2.1	+ 0.9	0.81
	+ 4.4	− 8.6	0.0	$-\frac{1}{4}$				$\Delta z=-1.2$	0.0	
15			− 0.3	1				− 0.3	− 1.9	3.61
16			+ 1.0	1				+ 1.0	− 0.6	0.36
17	+ 14.3	− 18.0	− 5.4	1	− 5.43	+ 13.32	+ 7.89	+ 2.5	+ 0.9	0.81
18			+ 1.0	1				+ 1.0	− 0.6	0.36
19			+ 3.6	1				+ 3.6	+ 2.0	4.00
	+ 14.3	− 18.0	0.0	$-\frac{1}{5}$				$\Delta z=-1.6$	− 0.2	
20			− 2.4	1				− 2.4	− 1.4	1.96
21	+ 7.3	+ 1.6	− 1.9	1	− 2.77	− 1.18	− 3.95	− 1.9	− 0.7	0.81
22			+ 5.0	1				+ 1.0	+ 2.0	4.00
23			− 0.6	1				− 0.6	+ 0.4	0.16
	+ 7.3	+ 1.6	0.0	$-\frac{1}{4}$				$\Delta z+-1.0$	+ 0.1	48.02

A normál egyenlet együtthatói:

$$[aa] = + 483.31 \qquad [ab] = - 143.52 \qquad [a\omega] = + 78.5$$
$$[bb] = + 513.79 \qquad [b\omega] = + 327.12$$
$$[\omega\omega] = + 321.5$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A normálegyenlet és annak megoldása:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	$a]$	$b]$	$w]$				$b]$	$a]$	$w]$	
	− 7.315 78	+ 9.472 63	− 9.210 65		Egy irány középhibája:		− 7.289 21	+ 9.446 06	− 9.803 89	
	+ 2.684 22	− 2.156 85	+ 1.894 87		$\mu^0 = \pm\sqrt{\frac{[w.w.2.]}{f}} =$		+ 2.710 79	− 2.156 85	+ 2.514 68	
$[a$	+ 483.3	− 143.5	+ 78.5	− 1.629 48	$= \pm 1.''71$	$[b$	+ 513.8	− 143.5	+ 327.1	− 1.602 91
		− 42.6	+ 23.3					− 40.1	+ 91·4	
$[b$		+ 513.8	+ 327.1	+ 1.367 50	Az összrendezők középhibái:	$[a$		+ 483.3	+ 78.5	+ 1.960 74
			− 12.8		$\mu_y = \pm\sqrt{\frac{\mu_o^2}{[aa.1]}}$				− 208.2	
$[w$			+ 321.5	− 1.105 52	$= \pm 0.008$	$[w$			+ 321.5	− 2.318 57
		− 7.326 80	− 9.871 36		$\mu^z = \pm\sqrt{\frac{\mu_o^2}{[bb.1]}}$			− 7.353 40	− 9.583 59	
		+ 2.673 20	+ 2.544 56					+ 2.646 60	+ 2.230 19	
$[1b$		+ 471.2	+ 350.4	$\Delta x =$	$= \pm 0.008$	$[1a$		+ 443.2	+ 169.9	$\Delta y =$
			260.6	− 0.744					− 65·1	− 0.383
$[1w$			+ 308.7			$[1w$			+ 113.3	
$[2w$			+ 48.1	− 2.415 92		$[2w$			+ 48.2	− 1.813 78

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A kiegyenlített pont koordinátái lesznek:

$(y) = -\ 84\ 160.000$	$(x) = -\ 72\ 017.000$
$\Delta y = -\ 0.038$	$\Delta x = -\ 0.074$
$y = -\ 85\ 160.038$	$x = -\ 72\ 017.074$
$\mu_y = \pm\ 0.008$	$\mu_x = \pm\ 0.008$

Az egységsúlyú mérési eredmény középhibájának számításához szükséges fölös mérések számát úgy kapjuk, hogy az összes mérések számából levonjuk a szükséges mérések, illetve az ismeretlenek számát. A jelen esetben az összes mérések száma = 23; az ismeretlenek száma = a 2 koordináta javítás + 5 tájékozási ismeretlen, összesen 7.

$$f = 23 - 7 = 16$$

$$\mu_0 + \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{f}} = \sqrt{\frac{46.5}{16}} = \pm\ 1.''71$$

A kiegyenlített koordináták várható középhibáját pedig μ_0-ból úgy számítjuk, hogy a kiegyenlítés adta súlyokat vesszük tekintetbe.

Amint tudjuk $g_y = [aa.\ 1]$, $g_x = [bb.\ 1]$ s így

$$\mu_y = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_y}} = \frac{\mu_0}{\sqrt{[aa.\ 1]}} = \pm\ 0.008$$

$$\mu_x = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_x}} = \frac{\mu_0}{\sqrt{[bb.\ 1]}} = \pm\ 0.008$$

6. Az előmetszés kiegyenlítésének más módja.

Az előmetszések kiegyenlítésének most tárgyalt módja teljesen szabatos, de kevésbbé használatos. Hátránya, hogy sok a feltételi egyenletek száma.

A kiegyenlítés másik és a gyakorlatban használatosabb módja az, amikor *tájékozott irányokkal* végezzük a kiegyenlítést. Amint tudjuk, az új pontra menő irányt két-három, esetleg több régi pontra menő irány közé mérjük be. Miután a régi pontokra menő kiegyenlített, tehát végleges délszögek ismeretesek, módunkban áll ezek segélyével a ponton végzett irányértékeinket tájékozni.

Legyenek újra: l_1, l_2, l, . . ., l_k a mérési eredmények, számuk $k + 1$.

A végleges délszögek legyenek: δ_1, δ_2, δ_3, . . ., δ_k; akkor a mérési eredmények adta tájékozási állandók lesznek sorjában:

$$\begin{aligned}
\delta_1 - l_1 &= z_1 \\
\delta_2 - l_2 &= z_2 \\
\delta_3 - l_3 &= z_3 \\
&\ldots\ldots \\
\delta_k - l_k &= z_k
\end{aligned}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Az egyenlő súlyú mérési eredmények adta tájékozási állandók kiegyenlített értéke lesz:

$$z = \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_k}{k} = \frac{[z]}{k}$$

Az ily módon számított z súlya $g_z = k$ s módunkban áll a súlyegység — most *egy tájékozott irányérték* — várható középhibáját μ_0 számítanunk; a tájékozási állandó várható középhibája

$$\mu_z = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_z}} = \frac{\mu_0}{\sqrt{k}}$$

Ezek alapján az új pontra menő tájékozott irányérték várható középhibája

$$36. \ldots\ldots\ldots \quad \mu_t^2 = \frac{\mu_0^2}{k} + \mu_0^2$$

s így az új pontra menő *tájékozott irány súlya*:

$$37. \ldots\ldots\ldots \quad g_t = \frac{k}{k+1}$$

Ha tehát az új pontra menő tájékozott irányt — délszöget — akarjuk a kiegyenlítésbe vinni, akkor *súlyára* is tekintettel kell lennünk. Ennek a módnak mindenesetre nagy előnye, hogy a $k + 1$ számú feltételi egyenlet helyett csak egy feltételi egyenlettel lesz dolgunk. Hogy ezt megtehetjük-e anélkül, hogy a kiegyenlítés adta eredmények élessége szenvedne, bizonyításra szorul.

Az új pontra menő tájékozott iránynak megfelelő feltételi egyenlet lesz:

$$38. \ldots\ldots \quad v = (\lambda) = a\,\Delta y + b\,\Delta x + \omega; g = \frac{k}{k+1}$$

Zárjelbe tettük a λ-t szándékosan, *hangsúlyozni* akarván, hogy ez a feltételi egyenletet csak számítási kényelemből használjuk. Az ezekből számított (λ) javítások nem a *valódiak*, mert a valódi javítások csak a

$$\lambda = -\Delta z + a\,\Delta y + b\,\Delta x + \omega$$

alakú feltételi egyenletekből számíthatók. A 38. alatti feltételi egyenletek a $\lambda + \Delta z = (\lambda) = v$ értéket adják, úgy, hogyha a Δz és a λ javítás is nagyobb szám, *teljesen hibás* középhibákat fogunk számítani. Erre példát is fogunk később bemutatni.

A 38. alatti a feltételi egyenletnek megfelelő normál egyenlet lesz:

$$39. \ldots \quad \begin{aligned} &+ a^2 \frac{k}{k+1}\Delta y + ab \frac{k}{k+1}\Delta x + a\omega \frac{k}{k+1} = 0 \\ &+ b^2 \frac{k}{k-1}\Delta x + b\omega \frac{k}{k+1} = 0 \\ &+ \omega z \frac{k}{k+1} = 0 \end{aligned}$$

Ha bebizonyítjuk, hogy ennek az egyenletnek együtthatói s abszolút tagjai egyenlők a 35. alatti egyenletek megfelelő tagjaival, akkor eljárásunk helyes volt.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Egyenlőségbe állítva a megfelelő együtthatókat:

$$a^2 - \frac{a^2}{k+1} = a^2 \frac{k}{k+1}; \quad ab - \frac{ab}{k+1} = ab \frac{k}{k+1}; \ldots$$

Látjuk, hogy ezek *azonosságok* s így jogosan használhatjuk a 32. alatti feltételi egyenletek helyett a 38. alatti kifejezést.

Pusztán az utolsó egyenletek abszolút tagjai s így a lefejtés *után* a normál egyenletek maradéktagjai nem lesznek azonosak; de ez természetes is, mert az utóbbi esetben az *egy* kiválasztott feltételi egyenleten kívül, a többit figyelmen *kívül* hagytuk.

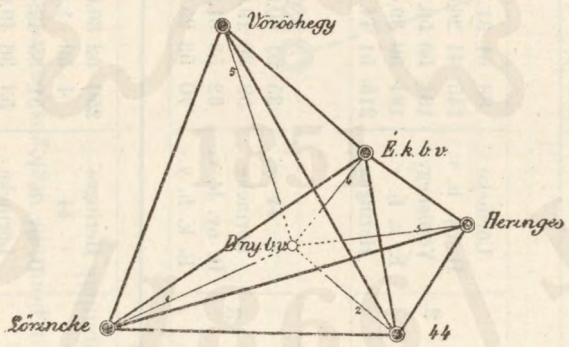
Ezzel szemben azonban más-más lesz a *fölös mérések* száma is.

A *tájékozott irányokkal való előmetszés* kiegyenlítése tehát a következő lépésekben fog történni:

1. A mért irányértékek tájékozása *állomásonként.*
2. Az előleges (y), (x) számítása két kedvező metszést adó tájékozott irányérték segélyével.
3. Előleges délszög és iránykoefficiens számítás.
4. A feltételi egyenletek abszolút tagjainak képzése.
5. A feltételi egyenletek táblázatos összeállítása, különös figyelemmel a $\frac{k}{k+1} = g$ súlyokra.
6. A normál egyenletek felállítása és megoldása.
7. A normál egyenletek adta Δy, Δx értékek behelyettesítése az *eredeti* feltételi egyenletekbe.
8. A feltételi egyenletekből számított g λ-ákból a $[g\,\lambda\lambda]$ képzése.
9. Végleges délszög számítás az $y = (y) + \Delta y$, $x = (x) + \Delta x$ segélyével.
10. A végleges délszögek segítségével a λ_1, λ_2, . . . javítások számítása.
11. Középhiba számítás.

Számpélda az előmetszés kiegyenlítésére *tájékozott irányok* segítségével.

Kiegyenlítendő pont a *D. ny. b. v.* pont.



16. ábra.

A kiegyenlített pontok koordinátái a mérési eredmények, előleges koordináták és délszögek ugyanazok, mint előbb.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Állás-pont	Irány száma	Mért irány	l	Kiegyenlítés előtt: (δ) és δ	Kiegyenlítés előtt: $\delta - l$	Kiegyenlítés előtt: Mért és tájékozott irány $l + (z_o)$	Kiegyenlítés után: δ	Kiegyenlítés után: $\delta - l$	λ	$\lambda\lambda$
Lőrincke	1	Vöröshegy	190° 49' 33."2	190° 50' 20."4	0° 0' 47."2		190° 50' 20."4	0 0 47."2		
		É. k. b. v.	233 36 2.1	233 36 50.3	48.2		233 36 50.3	48.2		
		D. ny. b. v.	234 45 36.5	234 47 31.4		234' 47' 24."2	234 47 26.2	49.7	+ 1.6	2.56
		Heringes	239 28 38.3	239 29 27.1	48.8		239 29 27.1	48.8		
		44	268 50 7.0	268 50 53.4	46.4		268 50 53.4	46.4		
				$(z_o) =$	0 0 47.7		$z =$	0 0 48.1		
44 j. r.	2	Lőrincke	88 51 31.1	88 50 53.4	359 59 22.3		88 50 53.4	359 59 22.3		
		D. ny. b. v.	145 41 26.8	145 40 33.6		145 40 47.4	145 40 48.3	21.5		
		Vöröshegy	161 53 56.7	161 53 16.2	19.5		161 53 16.2	19.5	+ 0.8	0.64
		É. k. b. v.	184 59 39.4	184 59 2.4	23.0		184 59 2.4	23.0		
		Heringes	215 51 44.1	215 51 1.5	17.4		215 51 1.5	17.4		
				$(z_o) =$	359 59 20.6		$z =$	359 59 20.7		
Heringes	3	44	35 51 50.8	35 51 1.5	359 59 10.7		35 51 1.5	359 59 10.7		
		Lőrincke	59 30 19.0	59 29 27.1	8.1		59 29 27.1	8.1		
		D. ny. b. v.	62 53 51.1	62 52 55.5		62 52 60.9	62 53 0.2	9.1	− 0.5	0.25
		É. k. b. v.	70 53 25.5	70 52 36.0	10.5		70 52 36.0	10.5		
				$(z_o) =$	359 59 9.8		$z =$	359 59 9.6		
É. k. b. v.	4	Heringes	250 52 36.0	250 52 36.0	359 59 60.0		250 52 36.0	359 59 60.0		
		44	4 59 1.1	4 59 2.4	61.3		4 59 2.4	61.3		
		D. ny. b. v.	51 35 42.4	51 35 37.3		51 35 44.0	51 35 45.2	62.8	+ 0.9	0.81
		Lőrincke	53 36 49.0	53 36 50.3	61.3		53 36 50.3	61.3		
		Vöröshegy	148 57 27.3	148 57 31.2	63.9		148 57 31.2	63.9		
				$(z_o) =$	359 59 61.6		$z =$	359 59 61.9		
Vöröshegy	5	É. k. b. v.	328 56 24.1	328 57 31.2	0 1 7.1		328 57 31.2	0 1 7.1		
		44	341 52 8.6	341 53 16.2	7.6		341 53 16.2	7.6		
		D. ny. b. v.	347 53 10.5	347 54 25.0		347 54 18.4	347 54 21.0	10.5	+ 2.0	4.00
		Lőrincke	10 49 11.5	10 50 20.4	08.9		10 50 20.4	8.9		
				$(z_o) =$	0 1 7.9		$z =$	0 1 8.5		8.26

A mérési eredményeket bevezetjük sorjában a táblázat l rovatába s az új pontra menő irányt az ismert módon betájékozzuk. Meghatározzuk egyidejüleg az így nyert tájékozott irány *súlyát* is a

$$g = \frac{k}{k+1}$$

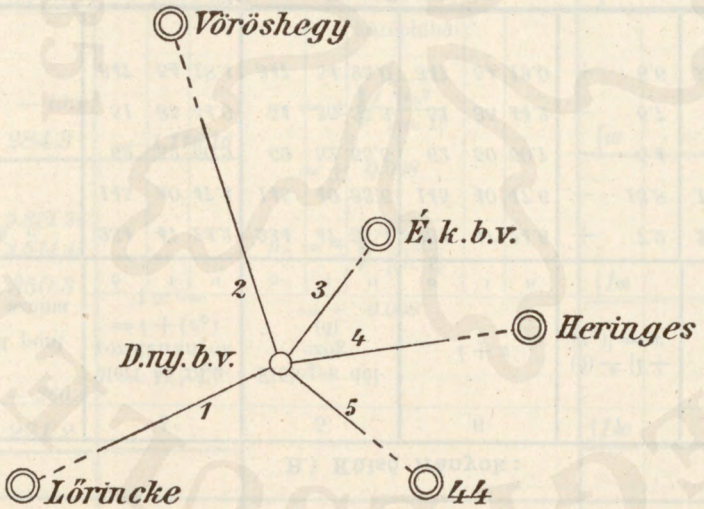
képlet segélyével s bevezetjük a feltételi egyenletek táblázatának g rovatába.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

I. Álláspont.

D. ny. b. v. számu pontnak előleges összrendezői:	$(y) = -- 85\ 156.000$	$(x) = — 72\ 017.000$
javitás	$\Delta_y = — 0.038$	$\Delta_x = — 0.074$
D. ny. b. v. számu pontnak végleges összrendezői:	$y = — 85\ 156.038$	$x = — 72\ 017.074$
Középhibák:	$\mu_y = \pm 0.008$	$\mu_x = \pm 0.008$

II. Vázlat.



16 a) ábra.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

III. w ellentmondások, v végleges hibák és [vv] képzése.

B.) Külső irányok:

1	2	3	4			5			6			7	8			9		10	11
Irány száma	Az álláspont neve vagy száma	Az irányzott pont neve vagy száma	Mért és tájékozott irányok $= l + (z_o)$			Előleges délszög (δ)			$l + z$			$(\delta) - [l + (z_o)] = w$	Végleges délszögek δ			$\delta - (l + (z_o)) = v$	$vv\,g$	$\delta - [l+z] = \lambda$	$\lambda\lambda$
			°	'	"	°	'	"	°	'	"	"	°	'	"			"	"
1	*Lőrincke*	*D. ny. b. v.*	*234*	*47*	*24.2*	*234*	*47*	*31.4*	*234*	*47*	*24.6*	+ *7.2*	*234*	*47*	*26.2*	+ *2.0*	*3.20*	+ *1.6*	*2.56*
2	*44 j. r.*	„	*145*	*40*	*47.4*	*145*	*40*	*33.6*	*145*	*40*	*47.6*	— *13.8*	*145*	*40*	*48.3*	+ *0.9*	*0.97*	+ *0.7*	*0.49*
3	*Heringes*	„	*62*	*52*	*60.9*	*62*	*52*	*55.5*	*62*	*50*	*60.7*	— *5.4*	*62*	*53*	*0.2*	— *0.7*	*0.36*	— *0.5*	*0.25*
4	*É. k. b. v.*	„	*51*	*35*	*44.0*	*51*	*35*	*37.3*	*51*	*35*	*44.2*	— *6.7*	*51*	*35*	*45.2*	+ *1.2*	*1.15*	+ *1.0*	*1.00*
5	*Vöröshegy*	„	*347*	*54*	*18.4*	*347*	*54*	*25.0*	*347*	*54*	*19.0*	+ *6.6*	*347*	*54*	*21.0*	+ *2.6*	*5.07*	+ *2.0*	*4.00*
																	10.75		*8.30*

Feltételi egyenletek.

A normál egyenlet együtthatóinak képzése.

1	2	3	4	5	6	7	8	9		10		11	12		13
Irány	g	a	b	levezetett a	levezetett b	w	gaa	gab +	gab —	gaw +	gaw —	gbb	gbv +	gbv —	w^2
1	*0.80*	— *7.7*	+ *10.9*			+ *7.2*	*47.43*		*67.14*		*44.35*	*95.05*	*62.78*		*41.47*
2	*0.80*	— *16.5*	— *11.3*			— *13.8*	*217.80*	*149.16*		*182.16*		*102.15*	*124.72*		*152.35*
3	*0.75*	+ *4.4*	— *8.6*			— *5.4*	*14.52*		*28.38*		*17.80*	*55.47*	*34.83*		*21.87*
4	*0.80*	+ *14.3*	— *18.0*			— *6.7*	*163.99*		*205.92*		*76.65*	*259.20*	*96.48*		*35.91*
5	*0.75*	+ *7.3*	+ *1.6*			+ *6.6*	*39.97*	*8.76*		*36.13*		*1.92*	*7.92*		*32.67*
								+ *157.92*	— *301.44*	+ *218.29*	*138.80*	*513.79*	*326.73*		*284.27*
							483.71		— *143.52*	+ *79.49*		*513.79*	*326.73*		*284.27*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

V. A normál egyenlet és annak megoldása:

1	2	3	4	5
	$a]$	$b]$	$w]$	
	− 7.315 42	+ 9.472 27	− 9.215 79	
	+ 2.684 58	− 2.156 85	+ 1.900 37	
$[a$	+ 483.7	− 143.5	+ 79.5	− 1.629 12
		− 42.6	+ 23.6	
$[b$		+ 513.8	+ 326.7	+ 1.372 64
			− 13.1	
$[w$			+ 284.3	− 1.116 16
		− 7.326 80	− 9.871 24	
		+ 2.673 20	+ 2.544 44	
$[1b$		+ 471.2	+ 350.3	$\Delta x =$
				− 0.743
			− 260.4	
$[1w$			+ 271.2	
$[2w$			+ 10.8	− 2.415 68

6

Egy irány középhibája:

$$\mu_o = \pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{r-n}} = \sqrt{\frac{8.23}{3}}$$

$$\mu_o = \pm\ 1.''7$$

Az összrendezők középhibái:

$$\mu_y = \pm\sqrt{\frac{\mu_o^2}{[aa.1]}}$$

$$= \pm\ 0.008$$

$$\mu_x = \pm\sqrt{\frac{\mu_o^2}{[bb.1]}}$$

$$= \pm\ 0.008$$

7	8	9	10	11
	$b]$	$a]$	$w]$	
	− 7.289 21	+ 9.446 06	− 9.803 36	
	+ 2.710 79	− 2.156 85	+ 2.514 15	
$[b$	+ 513.8	− 143.5	+ 326.7	− 1.602 91
		− 40.1	− 91.2	
$[a$		+ 483.7	+ 79.5	+ 1.960 21
			− 207.7	
$[w$			+ 284.3	− 2.317 51
		− 7.353 01	− 9.585 24	
		+ 2.646 99	+ 2.232 23	
$[1a$		+ 443.6	+ 70.7	$\Delta y =$
				− 0.384
			− 65.7	
$[1w$			+ 76.6	
$[2w$			+ 10.9	− 1.817 47

VI. Az irányváltozások kiszámítása, v végleges hibák és [vv] képzése:

R	$a\,\Delta y$	$b\,\Delta x$	$\Delta\delta = a.\Delta y + b\Delta x$	$\lambda + \Delta z = \Delta\delta + w = v$	λ	$\lambda\lambda$	$\lambda+\Delta z = v$	gvv
1	+ 3.00	− 8.13	− 5.18	+ 2.0	+ 1.6	2.56	4.00	3.20
2	+ 6.44	+ 8.48	+ 14.92	+ 1.1	+ 0.9	0.81	1.21	0.97
3	− 1.72	+ 6.45	+ 4.73	− 0.7	− 0.5	0.25	0.49	0.36
4	− 5.58	+ 13.50	+ 7.92	+ 1.2	+ 1.0	1.00	1.44	1.15
5	− 2.85	− 1.20	− 4.05	+ 2.5	+ 1.9	3.61	5.95	4.68
						8.23		10.36

$+\Delta z^{*}_{\text{Lőrincke}} = +\frac{2.0}{5} = +0.4$

$+\Delta z_{44} = +\frac{1.1}{5} = +0.2$

$+\Delta z_{\text{Heringes}} = -\frac{0.7}{4} = -0.2$

$+\Delta z_{\text{É. k. b. v.}} = +\frac{1.2}{5} = +0.2$

$+\Delta z_{\text{Vörösh.}} = +\frac{2.5}{4} = +0.6$

*) Jegyzet:

$$+\Delta z = \frac{[a]}{n}\Delta y + \frac{[b]}{n}\Delta x + \frac{[\omega]}{n}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022

A gyakorlatban igen sokszor *figyelmen kívül* hagytuk a *tájékozott irányok* súlyát, illetőleg miután rendszerint 2 — 3 — 4 irányhoz csatlakozva mérjük be az új irányt, a tájékozott irányérték súlya $\frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5}$, tehát közel áll az egységhez.

Azaz bizonyos elhanyagolásokkal minden tájékozott irányérték súlyát 1-nek tekinthetjük. Hogy ez milyen hatással van a kiegyenlítendő pont koordinátáira, azt gyakorlati példán fogjuk bemutatni.

Kiegyenlítjük újra a *D. ny. b. v.* pontot.

A kiegyenlítéshez szükséges adatok teljesen ugyanazok, mint az előbbi példánál, úgy, hogy a feltételi egyenletek is azonosak, pusztán állomásonként mások-mások a súlyok.

A kiegyenlítés menete az ismert módon történik.

Feltételi egyenletek:								A normálegyenlet együtthatóinak képzése:									
1	2	3	4	5	6	7	8	9		10		11	12		13
Irány R	g	a	b	levezetett a	levezetett b	w	gaa	gab +	gab —	gaw +	gaw —	gbb	gbw +	gbw —	w^2
1	1	— 7.7	+ 10.9			+ 7.2	+ 59.29	.	83.93	.	55.44	+ 118.81	78.48	.	+ 51.84
2	1	— 16.5	— 11.3			— 13.8	+ 272.25	186.45	.	227.70	.	+ 127.69	155.94	.	+ 190.44
3	1	+ 4.4	— 8.6			— 5.4	+ 19.36	.	37.84	.	23.76	+ 73.96	46.44	.	+ 29.16
4	1	+ 14.3	— 18.0			— 6.7	+ 204.49	.	257.40	.	95.81	+ 324.00	120.60	.	+ 44.89
5	1	+ 7.3	+ 1.6			+ 6.6	+ 53.29	11.68	.	48.18	.	+ 2.56	10.56	.	+ 43.56
							+ 608.68	198.13	379.17	275.88	175.01	+ 647.02	412.02		+ 359.89
							+ 608.7		— 181.8	+ 100.9		+ 647.0	+ 412.0		+ 359.9

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár, 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

V. A normálegyenlet és annak megoldása:

1	2	3	4	5
	$a]$	$b]$	$w]$	
	$-7.215\,5967$	$+9.473\,2753$	$-9.219\,4879$	
	$+2.784\,4033$	$-2.257\,6786$	$+2.003\,8912$	
$[a$	$+608.7$	-181.0	$+100.9$	$-1.730\,9539$
$[b$		$+647.0$	$+412.0$	$+1.477\,1665$
		-53.8	$+30.0$	
$[w$			$+359.9$	$-1.223\,3791$
			-16.7	$\log \Delta x =$
		$-7.226\,7989$	$-9.872\,2212$	$-9.872\,2212$
		$+2.773\,2011$	$+2.645\,4223$	
$[1b$		$+593.2$	$+442.0$	$\Delta x =$
				-0.745
$[1w$			$+343.2$	
			-329.3	$-2.517\,6435$
$[2w$			$+13.9$	

6

Egy irány középhibája:

$$\mu^\circ = \pm\sqrt{\frac{[w.w.2]}{r-n}} = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{3}}$$

$$= \pm \quad 1''7$$

Az összrendezők középhibái:

$$\mu_y = \pm\sqrt{\frac{\mu^{2\,\circ}}{[aa.1]}}$$

$$= \pm\, 0.008$$

$$\mu_x = \pm\sqrt{\frac{\mu^{2\,\circ}}{[bb.1]}}$$

$$= \pm\, 0.008$$

7	8	9	10	11
	$b]$	$a]$	$w]$	
	$-7.189\,0957$	$+9.446\,7743$	$-9.803\,9929$	
	$+2.810\,9043$	$-2.257\,6786$	$+2.614\,8972$	
$[b$	$+647.0$	-181.0	$+412.0$	$-1.704\,4529$
$[a$		$+608.7$	$+100.9$	$+2.061\,6715$
		-50.6	$+115.3$	
$[w$			$+359.9$	$-2.418\,8901$
			-262.4	$\log \Delta y =$
		$-7.253\,2880$	$-9.588\,1437$	$-9.588\,1437$
		$+2.746\,7120$	$+2.334\,8557$	
$[1a$		$+558.1$	$+216.2$	$\Delta y =$
				-0.387
$[1w$			$+97.5$	
			-83.8	$-1.922\,9994$
$[2w$			$+13.7$	

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

VI. Az irányváltozások kiszámitása, λ végleges hibák és $[\lambda\lambda]$ képzése:

R	$a\,\Delta y$	$b\,\Delta x$	$\Delta\delta = a\,\Delta y + b\,\Delta x$	$\lambda + \Delta z = v = \Delta\delta + w$	λ	$\lambda\lambda$	v	vv
1	+ 3.00	− 8.18	− 5.18	+ 2.0	+ 1.6	2.56	+ 2.0	4.00
2	+ 6.44	+ 8.48	+ 14.92	+ 1.1	+ 0.9	0.81	+ 1.1	1.21
3	− 1.72	+ 6.45	+ 4.73	− 0.7	− 0.5	0.25	− 0.7	0.49
4	− 5.58	+ 13.50	+ 7.92	+ 1.2	+ 1.0	1.00	+ 1.2	1.44
5	− 2.85	− 1.20	− 4.05	+ 2.6	+ 2.0	4.00	+ 2.6	6.76
						8.62		13.90

$$\Delta z_1 = +\frac{2.0}{5} = +0.4$$

$$\Delta z_2 = +\frac{1.1}{5} = +0.2$$

$$\Delta z_3 = -\frac{0.7}{4} = -0.2$$

$$\Delta z_4 = +\frac{1.2}{5} = +0.2$$

$$\Delta z_5 = +\frac{2.6}{4} = +0.6$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A felvett előleges koordináták:

$$(y) = -85\,156.000 \qquad (x) = -72\,017.000$$
$$\Delta y = -0.039 \qquad \Delta x = -0.075$$
$$y = -85\,156.039 \qquad x = -72\,017.075$$

A szabatos középhibaszámításhoz a kiegyenlített *mérési* eredmények valódi javításaira van szükségünk s ezért, mint az előbbi példánál is tettük, állomásonként meg kell határoznunk a Δz értékeket s a redukált feltételi egyenlet adta javításokból le kell vonnunk, illetve hozzáadunk.

A példából láthatjuk, hogy több irányhoz való csatlakozás esetében az új pontra menő tájékozott irány egységsúlyúnak tekinthető, mert a kiegyenlített koordináták csak a 3. tizedesben különböznek egy-egy egységgel.

Az előmetszés kiegyenlítésének eredményeit egymás mellé állítva:

1. A szigorú kiegyenlítés eredménye:

$$y = -85\,160.038 \qquad x = -72\,017.074$$
$$\mu_y = \pm 0.008 \qquad \mu_x = \pm 0.008$$
$$\mu_0 = \pm 1.''7.$$

2. A tájékozott irányokkal való kiegyenlítés eredménye a tájékozott irányok *súlyára* való tekintettel:

$$y = -85\,160.038 \qquad x = -72\,017.074$$
$$\mu_y = \pm 0.008 \qquad \mu_x = \pm 0.008$$
$$\mu_0 = \pm 1.''7.$$

3. A tájékozott irányokkal való kiegyenlítés eredménye, a tájékozás folytán megváltozott súlyok figyelmen kívül hagyásával:

$$y = -85\,160.039 \qquad x = -72\,017.075$$
$$\mu_y = \pm 0.008 \qquad \mu_x = \pm 0.008$$
$$\mu_0 = \pm 1.''7.$$

Ezek az eredmények teljesen azonosak.

Ha a harmadik esetben elhanyagoltuk volna a tájékozott irányok kiegyenlítés adta javításait, akkor az egységsúlyú mérési eredmény várható középhibája:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[vv]}{f}} = \sqrt{\frac{13.90}{3}} = \pm 2.''2$$

vagyis körülbelül 30%-kal nagyobb középhibát kaptunk.

7. Külső-belső irányokkal való kiegyenlítés.

Részletesen tárgyaltuk eddig a hátrametszéssel és előmetszéssel meghatározott pontok kiegyenlítését. E két művelet összetevése folytán a kiegyenlítendő pontnak nemcsak külső, vagy belső irányai lesznek, hanem külső és belső irányai egyidejűleg.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A pontok koordinátái megbízhatóságának növelése s a hálózat összefüggésének biztosítása céljából törekedni fogunk — ahol azt a körülmények megengedik — hogy a pontok meghatározása külső és belső irányok segélyével történjék.

Különösen kívánatos ez oly pontoknál, amelyek további pontok meghatározására szolgálnak.

A feltételi egyenletek alakját s felállításuknak módját külön-külön tárgyaltuk s azok külön-külön érvényesek a jelen esetben is.

Mindamellett szükségesnek tartjuk bizonyos megjegyzéseket tenni s ez főként a külső és belső irányok *súlyaira* vonatkozik.

A belső irányokat *egységsúlyúaknak* fogjuk tekinteni; a külső irányok súlyát *empirikusan* $\frac{1}{2}$-nek vehetjük. Schreiber (Lásd: Rechnungsvorschriften für die Trig. Abth. der Landesaufnahme. Ausgleichung und Berechnung der Triangulation II. Ordn.) és Jordán a külső irányok súlyára $g = \frac{1}{2}$ értéket ajánlanak; de Schreiber felteszi, hogy az uj irányt csak *egy* régi szárhoz csatlakozva mértük be, Jordán pedig a $g = \frac{1}{2}$ értékre megjegyzi:

„Wenn diese Regel auch etwas grob erscheinen sollte, so ist doch kaum etwas anderes möglich, und jedenfalls ist die Regel $p = \frac{1}{2}$ a piori besser als ein vorkommendes rundes Verfahren, wonach die äusseren und inneren Richtungen als *gleiches* Gewicht = 1 erhalten sollen."

Hogy a külső tájékozott irány és a belső irány között a súlyok szempontjából összefüggést találjunk, vegyük figyelembe a következő megfontolásokat:

Az előbb láttuk (Lásd 37. képletet), hogy egy k számú kiegyenlített irányra támaszkodó *tájékozott* irányérték súlya $g_t = \frac{k}{k+1}$. Vizsgáljuk meg, hogy ez az érték használható-e súlyként a belső pontokon végzett iránymérés felvett egységsúlyával szemben.

A külső pontról mért irányérték tájékozott értékének súlya $= \frac{k}{k+1}$.

Ez az érték nő, aszerint amint több és több régi irányhoz csatlakozunk, úgy hogy a tájékozott külső irány súlyának értéke szélső esetben *minden határon* túl megközelítheti az egységet; azaz most már *mérési eredménynek* tekintve a további kiegyenlítés szempontjából a tájékozott irányértéket, annak súlya közel egyenlő lesz az egységgel, vagyis a belső pontról mért irányértékek súlyával. Ennek a viszonynak a súlyok szempontjából fenn kell is állani s itt nem osztjuk *Jordán* nézetét a külső irányok $\frac{1}{2}$ súlyára vonatkozólag.

Egy több szilárd szárra támaszkodó tájékozott irány súlya van akkora mint a belső irányé.

Ha pedig a szilárd pontok koordinátáinak nagyobb középhibái vannak, s a tájékozott irány megbízhatósága s így súlya is kicsiny, ezt az ingadozást a belső irányok épen úgy megérzik, mint külsők. Vagyis gyenge alappontokra támaszkodó belső irányokból épen olyan gyenge lesz a pont meghatározás, mint az ugyanazon gyenge alappontokra támaszkodó tájékozott irányokból.

Egyébként az előbbi példákból láthatjuk, hogy akár külső, akár belső irányokból határozzuk meg a pontot, a kiegyenlített koordináták s várható középhibáik azonosak.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Ezek után a meggondolások után joggal fogjuk a külső pontokon mért irányérték súlyát $\frac{k}{k+1}$ értéknek felvenni.

E súlyok felvétele pedig vagy úgy történik, hogy a külső pontokon mért *összes* irányértékeket bevezetjük a kiegyenlítésbe s pontonként keressük a tájékozási ismeretlent, vagy pedig egy képzelt feltételi egyenletet vezetünk be $\frac{k}{k+1}$ súlylyal.

Külön meg kell emlékeznünk az oda-vissza mért irányok feltételi egyenleteiről.

Amint tudjuk a *külső* iránynak megfelelő feltételi egyenlet:

$$\lambda_1 = -\Delta z_1 + a_1 \Delta y + b_1 \Delta x + w_1 \qquad g_1 = \frac{k}{k+1}.$$

A *belső* iránynak megfelelő feltételi egyenlet pedig

$$\lambda_2 = -\Delta z_2 + a_1 \Delta y + b_1 \Delta x + w_2 \qquad g_2 = 1.$$

Tegyük fel, hogy Δz-ket kiküszöbölve a redukált feltételi egyenletek lesznek:

$$\lambda_1 = +a_1 \Delta y + b_1 \Delta x + w_1 \qquad \text{súlya} = g_I$$
$$\lambda_2 = +a_1 \Delta y + b_1 \Delta x + w_2 \qquad \text{súlya} = g_{II}.$$

Az ezeknek megfelelő normál egyenlet:

$$\underline{(g_I + g_{II})\, a^2}, \Delta y + (g_I + g_{II})\, a_1 b_1 \Delta x + (g_I a_1 w_1 + g_{II} a_1 w_2) = 0$$
$$\underline{(g_I + g_{II})\, b^2_1} \Delta x + (g_I b_1 w_1 + g_{II} b_1 w_2) = 0$$
$$\underline{(g_I w_1^2 + g_{II} w_2^2)} = 0$$

A feltételi egyenletekből előállítva a következő *képzelt* feltételi egyenletet:

$$v = a_1 \Delta y + b_1 \Delta x + \frac{g_I w_1 + g_{II} w_2}{g_I + g_{II}} \qquad \text{súlya} = g_I + g_{II}$$

ez az egyenlet szintén ugyanazt a normál egyenletet adja, mint az előbbi két feltételi egyenlet. Tehát ha akarjuk az oda-vissza mért irányok feltételi egyenleteit összevonhatjuk s így módunkban lesz a feltételi egyenletek számát redukálnunk. Ez esetben azonban a normál egyenlet maradék tagja más lesz, mintha külön-külön vettük volna figyelembe a feltételi egyenleteket. A feltételi egyenletek összevonásának különösebb gyakorlati jelentősége nincs sőt az áttekinthetőséget zavarják.

A külső-belső irányokkal való kiegyenlítést gyakorlati példán fogjuk bemutatni.

A számítás menete:

1. Előleges koordináta számítás.
2. Előleges délszög és iránykoefficiens számítás.
3. A feltételi egyenletek abszolút tagjainak képzése.
4. A feltételi egyenletek táblázatos összeállítása.
5. A normál egyenletek felállítása és megoldása.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

6. A normál egyenletek adta Δy, Δx értékek behelyettesitése az eredeti feltételi egyenletekbe.

7. A feltételi egyenletekből számított λ-ákból $[\lambda\lambda]$ képzése.

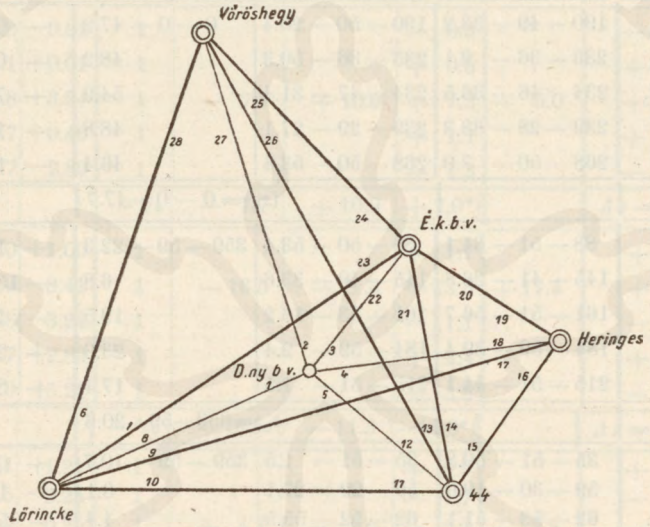
8. Végleges délszögek számítása az $y = (y) + \Delta y$, $x = (x) + \Delta x$ segélyével.

9. A végleges délszögek segítségével a λ_1, λ_2, . . . javítások számítása.

10. Középhiba számítás.

A kiegyenlítést úgy fogjuk végezni, hogy a régi pontban az összes irányoknak megfelelő feltételi egyenleteket felállítjuk.

Kiegyenlítő pont a *D. ny. b. v.* pont.



17. ábra.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Álláspont	Irányszáma	Irányzott pont	Mért és a síkba redukált irány = l	Előleges (δ)	Előleges (δ) − l	$(z_0) - l - (\delta) = \omega$	Kiegyenlítés $\delta - l$
D. ny. b. v.	1	Lőrincke	54°—47′—39.7″	52°—47′—31.4″	359°—59′—51.7″	+ 8.3″	359°—59′—46.7″
	2	Vöröshegy	167 — 54 — 30.9	167 — 54 — 25.3	54.1	+ 10.7	49.1
	3	É. k. b. v.	231 — 35 — 57.4	231 — 35 — 37.3	39.9	— 3.5	47.4
	4	Heringes	242 — 53 — 12.6	242 — 52 — 55.5	42.9	— 0.5	47.6
	5	44	325 — 41 — 5.4	325 — 40 — 33.6	28.2	— 15.2	45.6
				(z_0)=359—59—43.4			z=359—59—47.3
Lőrincke	6	Vöröshegy	190 — 49 — 33.2	190 — 50 — 20.4	0 — 0 — 47.2	— 0.5	0 — 0 — 47.2
	7	É. k. b. v.	233 — 36 — 2.1	233 — 36 — 50.3	48.2	+ 0.5	48.2
	8	D. ny. b. v.	234 — 46 — 36.5	234 — 47 — 31.4	54.9	+ 7.2	49.9
	9	Heringes	239 — 28 — 38.3	239 — 29 — 27.1	48.8	+ 1.1	48.8
	10	44	268 — 50 — 7.0	268 — 50 — 53.4	46.4	— 1.3	46.4
				(z_0)= 0 — 0 —47.7			z = 0 — 0 48.1
44	11	Lőrincke	88 — 51 — 31.1	88 — 50 — 53.4	359 — 59 — 22.3	+ 1.7	359 — 59 — 22.3
	12	D. ny. b. v.	145 — 41 — 26.8	145 — 40 — 33.6	6.8	— 13.8	24.2
	13	Vöröshegy	161 — 51 — 56.7	161 — 53 — 16.2	19.5	— 1.1	19.5
	14	É. k. b. v.	184 — 59 — 39.4	184 — 59 — 2.4	23.0	+ 2.4	23.0
	15	Heringes	215 — 51 — 44.1	215 — 51 — 1.5	17.4	— 3.2	17.4
				(z_0)=359—59—20.6			z=359—59—21.3
Heringes	16	44	35 — 51 — 50.8	35 — 51 — 1.5	359 — 59 — 10.7	+ 0.9	359 — 59 — 10.7
	17	Lőrincke	59 — 30 — 19.0	59 — 29 — 27.1	8.1	— 1.7	8.1
	18	D. ny. b. v.	62 — 53 — 51.1	62 — 52 — 55.5	4.4	— 5.4	9.1
	19	É. k. b. v.	70 — 53 — 25.5	70 — 52 — 36.0	10.5	+ 0.7	10.5
				(z_0)=359—59—9.8			359 — 59 — 9.6
É. k. b. v.	20	Heringes	250 — 52 — 36.0	250 — 52 — 36.0	359 — 59 — 60.0	— 1.6	0 — 0 — 0.0
	21	44	4 — 59 — 1.1	4 — 59 — 2.4	61.3	— 0.3	1.3
	22	D. ny. b. v.	51 — 35 — 42.4	51 — 35 — 37.3	54.9	— 6.7	2.4
	23	Lőrincke	53 — 36 — 49.0	53 — 36 — 50.3	61.3	— 0.3	1.3
	24	Vöröshegy	148 — 57 — 27.3	148 — 57 — 31.2	63.9	+ 2.3	3.9
				(z_0)—359—59—61.6			z=0 — 0 — 1.8
Vöröshegy	25	É. k. b. v.	328 — 56 — 24.1	328 — 57 — 31.2	0 — 1 — 7.1	— 0.8	0 — 1 — 7.1
	26	44	341 — 52 — 8.6	341 — 53 — 16.2	7.6	— 0.3	7.6
	27	D. ny. b. v.	347 — 53 — 10.5	347 — 54 — 25.0	14.5	+ 6.6	9.5
	28	Lőrincke	10 — 49 — 11.5	10 — 50 — 10.4	8.9	+ 1.0	8.9
				(z_0) = 0 — 1 — 7.9			z = 0 — 1 — 8.3

Megjegyzés:

A végleges pontok koordinátái:

Lőrincke: y = — 83897 . 180, x = — 71128 . 739
Vöröshegy: y = — 84581 . 049, x = — 74700 . 493
É. k. v. p.: y = — 85860 . 133, x = — 72575 . 215
Heringes: y = — 87055 . 017, x = — 72989 . 526
44 y = — 85737 . 216, x = — 71165 . 735
D. ny. b. v. (y) = — 85156 . 000, (x) = — 72017 . 000

A D. ny. b. v. kiegyenlített koordinátái:

(y) = — 85156 . 000, (x) = — 72017 . 000
$+\Delta y$ = — 0 . 050, $+\Delta x$ = — 0 . 081
y = — 85156 . 050, x = — 72017 . 081

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{f}} = \sqrt{\frac{61.40}{28-8}} = \pm 1.7''$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

után			Feltételi egyenletek							
δ	λ	λ^2	g	a	b	ω	$\Delta\delta = a\Delta y + b\Delta x$	$(\lambda) = \lambda + \Delta z = a\Delta y + b\Delta x + \omega = \Delta\delta + \omega$	λ	$\lambda\lambda$
54°—47′—26.4″	— 0.6″	0.36	1	+ 7.7	+10.9	+ 8.3	— 4.98	+ 3.3	— 0.6	0.36
167 — 54 — 20.0	+ 1.8	3.24	1	+ 7.3	+ 1.6	+10.7	— 4.95	+ 5.7	+ 1.8	3.24
231 — 35 — 44.8	+ 0.1	0.01	1	—14.3	—18.0	— 3.5	+ 7.4	+ 3.9	0	—
242 — 53 — 0.2	+ 0.3	0.09	1	— 4.4	— 8.6	— 0.5	+ 4.8	+ 4.3	+ 0.4	0.16
325 — 40 — 51.0	— 1.7	2.89	1	—16.5	—11.3	—15.2	+17.4	+ 2.2	— 1.7	2.89
			— 1/5	+ 1.8	—25.4	0*)		$\Delta z = +3.9$		
190 — 50 — 20.4	— 0.9	0.81	1			— 0.5		— 0.5	— 0.9	0.81
233 — 36 — 50.3	+ 0.1	0.01	1			+ 0.5		+ 0.5	+ 0.1	0.01
234 — 47 — 26.4	+ 1.8	3.24	1	— 7.7	+10.9	+ 7.2	— 5.0	+ 2.2	+ 1.8	3.24
239 — 29 — 27.1	+ 0.7	0.49	1			+ 1.1		+ 1.1	+ 0.7	0.49
268 — 50 — 53.4	— 1.7	2.89	1			— 1.3		— 1.3	— 1.7	2.89
			— 1/5	— 7.7	+10.9	+ 7.0*)		$\Delta z = +0.4$		
88 — 50 — 53.4	+ 1.0	1.00	1			+ 1.7		+ 1.7	+ 1.0	1.00
145 — 40 — 33.6	+ 2.9	8.41	1	—16.5	—11.3	—13.8	+17.4	+ 3.6	+ 2.9	8.41
161 — 53 — 16.2	— 1.8	3.24	1			— 1.1		— 1.1	— 1.8	3.24
184 — 59 — 2.4	+ 1.7	2.89	1			+ 2.4		+ 2.4	+ 1.7	2.89
215 — 51 — 1.5	— 3.9	15.21	1			— 3.2		— 3.2	— 3.9	15.21
			— 1/5	—16.5	—11.3	—14.0*)		$\Delta z = +0.7$		
35 — 51 — 1.5	+ 1.1	1.21	1			+ 0.9		+ 0.9	+ 1.1	1.21
59 — 29 — 27.1	— 1.5	2.25	1			— 1.7		— 1.7	— 1.5	2.25
62 — 53 — 0.2	— 0.5	0.25	1	+ 4.4	— 8.6	— 5.4	+ 4.8	— 0.6	— 0.4	0.16
70 — 52 — 36.0	+ 0.9	0.81	1			+ 0.7		+ 0.7	+ 0.9	0.81
			— 1/4	+ 4.4	— 8.6	— 5.5*)		$\Delta z = -0.2$		
250 — 52 — 36.0	— 1.8	3.24	1			— 1.6		— 1.6	— 1.8	3.24
4 — 59 — 2.4	— 0.5	0.25	1			— 0.3		— 0.3	— 0.5	0.25
51 — 35 — 44.8	+ 0.6	0.36	1	+14.3	—18.0	— 6.7	+ 7.4	+ 0.7	+ 0.5	0.25
53 — 36 — 50.3	— 0.5	0.25	1			— 0.3		— 0.3	— 0.5	0.25
148 — 57 — 31.2	+ 2.1	4.41	1			+ 2.3		+ 2.3	+ 2.1	4.41
			— 1/5	+14.3	—18.0	— 6.6*)		$\Delta z = +0.2$		
328 — 57 — 31.2	— 1.2	1.44	1			— 0.8		— 0.8	— 1.2	1.44
341 — 53 — 16.2	— 0.7	0.49	1			— 0.3		— 0.3	— 0.7	0.49
347 — 54 — 20.0	+ 1.2	1.44	1	+ 7.3	+ 1.6	+ 6.6	— 5.0	+ 1.6	+ 1.2	1.44
10 — 50 — 20.4	+ 0.6	0.96	1			+ 1.0		+ 1.0	+ 0.6	0.36
		61.54	— 1/4	+ 7.3	+ 1.6	+ 6.5*)		$\Delta z = +0.4$		61.40

$$\mu_y = \frac{\mu_o}{\sqrt{g_y}} = \frac{1.7}{\sqrt{995}} = \pm\ 0.006\ m.$$

$$\mu_x = \frac{\mu_o}{\sqrt{g_x}} = \frac{1.7}{\sqrt{941}} = \pm\ 0.006\ m.$$

A súlyegység (μ_o) képletében szereplő f = a fölös mérések számával. A jelen esetben 28 mért irányértékünk van, ebből két irányérték kell az előleges koordináták számításához s van még állomásonként egy-egy tájékozási ismeretlenünk, tehát 6, 6 + 2 = 8-at levonva a 28-ból, meg lesz a fölös mérések száma.

A kiegyenlített koordináták várható középhibáinak számításához szükséges g_y g_x súlyokat a normális egyenlet lefejtésekor nyerjük, mint az utolsó ismeretlen együtthatóit.

*) Jegyzet: Schreiber-féle fiktív feltételi egyenletek.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

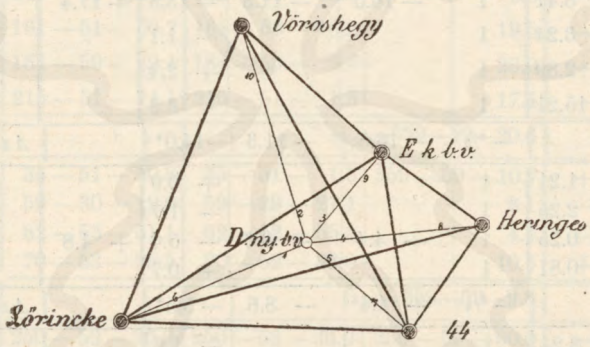
A feltételi egyenleteknek megfelelő normál egyenlet:

$$\begin{aligned} \underline{+\ 1091.4}\ \Delta y - \ 315.6\ \Delta x + \ 291.3 &= 0 \\ \underline{+\ 1031.8}\ \Delta x + \ 673{\cdot}6 &= 0 \\ \underline{+\ 748{\cdot}5} &= 0 \end{aligned}$$

Megoldás után kapjuk: $\Delta y = -\ 0.50 \qquad \Delta x = -\ 0.81.$

A kiegyenlített koordinátákat és a középhiba számítást a táblázatos összeállítás „Megjegyzés“ rovatában találjuk.

Bemutatjuk most *ugyanennek* a példának a megoldását más módon. A régi pontokon *tájékozzuk a mért irányokat* s az új pontra menő tájékozott irány feltételi egyenletét $\frac{k}{k+1}$ súlylyal vesszük számításba.



17. a.) ábra.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Álláspont	Irányszáma	Irányzott pont	Mért és a síkba redukált irány = l	Előleges (δ)	Előleges $(\delta) - l$	Előleges ω	Kiegyenlítés után δ	Kiegyenlítés után $\delta - l$	Kiegyenlítés után λ	Kiegyenlítés után $\lambda\lambda$	λ illetve $\lambda + \Delta z$	$g\lambda^2$ illetve $g(\lambda+\Delta z)^2$
D. Ny. b. v.	1	Lőrincke	54° — 47′ — 39.″7	54° — 47′ — 31.″4	359° — 59′ — 51.″7	+ 8·3	54° 47′ 26.″4	359° 59′ 46.″7	— 0·6	0·36	— 0·6	0·36
	2	Vöröshegy	167 — 54 — 30·9	167 — 54 — 25·0	54·1	+ 10·7	167 54 20·0	49·1	+ 1·8	3·24	+ 1·8	3·24
	3	É. k. b. v.	231 — 35 — 57·4	231 — 35 — 37·3	39·9	— 3·5	231 35 44·8	47·4	+ 0·1	0·01	+ 0·1	0·01
	4	Heringes	242 — 53 — 12·6	242 — 52 — 55·5	42·9	— 0·5	242 53 0·2	47·6	+ 0·3	0·09	+ 0·3	0·09
	5	44	325 — 41 — 5·4	325 — 40 — 33·6	28·2	— 15·2	325 40 51·0	45·6	— 1·7	2·89	— 1·7	2·89
				(z_0) = 359 — 59 — 43·4			z = 359 59 47·3		— 0·1			
Lőrincke		Vöröshegy	190 — 49 — 33·2	190 — 50 — 20·4	0 — 0 — 47·2		190 50 20·4	0 0 47·2	— 0·9			
		É. k. b. v.	233 — 36 — 2·1	233 — 36 — 50·3	48·2		233 36 50·3	48·2	+ 0·1			
	6	D. Ny. b. v.	234 — 46 — 36·5	234 — 47 — 31·4	54·9	+ 7·2	234 47 26·4	49·9	+ 1·8	3·24	+ 2·2	3·87
		Heringes	239 — 28 — 38·3	239 — 29 — 27·1	48·8		239 29 27·1	48·8	+ 0·7			
		44	268 — 50 — 7·0	268 — 50 — 53·4	46·4		268 50 53·4	46·4	— 1·7			
				(z_0) = 0 — 0 — 47·7			z = 0 0 48·1		0·0			
44		Lőrincke	88 — 51 — 31·1	88 — 50 — 53·4	359 — 59 — 22·3		88 50 53·4	359 59 22·3	+ 1·0			
	7	D. Ny. b. v.	145 — 41 — 26·8	145 — 40 — 51·0	6·8	— 13·8	145 40 51·0	24·2	+ 2·9	8·41	+ 3·6	10·37
		Vöröshegy	161 — 53 — 56·7	161 — 53 — 56·7	19·5		161 53 16·2	19·5	— 1·8			
		É. k. b. v.	184 — 59 — 39·4	184 — 59 — 39·4	23·0		184 59 2·4	23·0	+ 1·7			
		Heringes	215 — 51 — 44·1	215 — 51 — 1·5	17·4		215 51 1·5	17·4	— 3·9			
				(z_0) = 359 — 59 — 20·6			z = 359 59 21·3		— 0·1			
Heringes		44	35 — 51 — 50·8	35 — 51 — 1·5	359 — 59 — 10·7		35 51 1·5	359 59 10·7	+ 1·1			
		Lőrincke	59 — 30 — 19·0	59 — 29 — 27·1	8·1		59 29 27·1	8·1	— 1·5			
	8	D. Ny. b. v.	62 — 53 — 51·1	62 — 52 — 55·5	4·4	— 5·4	62 53 0·2	9·1	— 0·5	0·25	— 0·7	0·36
		É. k. b. v.	70 — 53 — 25·5	70 — 52 — 36·0	10·5		70 52 36·0	10·5	+ 0·9			
				(z_0) = 359 — 59 — 9·8			z = 359 59 9·6		0·0			
É. k. b. v.		Heringes	250 — 52 — 36·0	250 — 52 — 36·0	359 — 59 — 60·0		250 52 36·0	0 0 0·0	— 1·8			
		44	4 — 59 — 1·1	4 — 59 — 2·4	61·3		4 59 2·4	1·3	— 0·5			
	9	D. Ny. b. v.	51 — 35 — 42·4	51 — 35 — 37·3	54·9	— 6·7	51 35 44·8	2·4	+ 0·6	0·36	+ 0·8	0·51
		Lőrincke	53 — 36 — 49·0	53 — 36 — 50·3	61·3		53 36 50·3	1·3	— 0·5			
		Vöröshegy	148 — 57 — 27·3	148 — 57 — 31·2	63·9		148 57 31·2	3·9	+ 2·1			
				(z_0) = 359 — 59 — 61·0			z = 0 0 1·8		— 0·1			
Vöröshegy		É. k. b. v.	328 — 56 — 24·1	328 — 57 — 31·2	0 — 1 — 7·1		328 57 31·2	0 1 7·1	— 1·2			
		44	341 — 52 — 8·6	341 — 53 — 16·2	7·6		341 53 16·2	7·6	— 0·7			
	10	D. Ny. b. v.	347 — 53 — 10·5	347 — 54 — 25·0	14·5	+ 6·6	347 54 20·0	9·5	+ 1·2	1·44	+ 1·6	1·92
		Lőrincke	10 — 49 — 11·5	10 — 50 — 10·4	8·9		10 50 20·4	8·9	+ 0·6			
				(z_0) = 0 — 1 — 7·9			z = 0 1 8·3		— 0·1	20·29		23·62

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Feltételi egyenletek:							A normálegyenlet együtthatóinak képzése:								
1	2	3	4	5	6	7	8	9		10		11	12		13
Irány R	p	a	b	levezetett a	levezetett b	w	gaa	gab +	gab −	gaw +	gaw −	gbb	gbw +	gbw −	w^2
1	1	− 7.7	+ 10.9			+ 8.3	+ 59.29	.	83.93	.	63.91	+ 118.81	90.47		68.89
2	1	+ 7.3	+ 1.6			+ 10.7	+ 53.29	11.68	.	78.11	.	+ 2.56	17.12		114.49
3	1	+ 14.3	− 18.0			− 3.5	+ 204.49	.	257.40	.	50.05	+ 324.00	63.00		12.25
4	1	+ 4.4	− 8.6			− 0.5	+ 19.36	.	37.84	.	2.20	+ 73.96	4.30		0.25
5	1	− 16.5	− 11.3			− 15.2	+ 272.25	186.45	.	250.80	.	+ 127.69	171.76		231.04
	$-\frac{1}{5}$	+ 1.8	− 25.4			0	− 0.65	9.14	.	.	.	− 129.03	.		.
6	$\frac{4}{5}$	− 7.7	+ 10.9			+ 7.2	47.43	.	67.14	.	44.35	+ 95.05	62.78		41.47
7	$\frac{4}{5}$	− 16.5	− 11.3			− 13.8	217.80	149.16	.	182.16	.	+ 102.15	124.75		152.32
8	$\frac{3}{4}$	+ 4.4	− 8.6			− 5.4	14.52	.	28.38	.	17.82	+ 55.47	34.83		21.87
9	$\frac{4}{5}$	+ 14.3	− 18.0			− 6.7	163.99	.	205.92	.	76.65	+ 259.20	96.48		35.92
10	$\frac{3}{4}$	+ 7.3	+ 1.6			+ 6.6	39.97	8.76	.	36.14	.	+ 1.92	7.92		32.67
							+ 1092.39	+ 365.19	− 680.61	+ 547.21	− 254.98	+ 1160.81	673.41		711.17
							− 0.65	.	.	.	.	− 129.03	.		.
							+ 1091.74	.	− 315.42	+ 292.23	.	+ 1031.78	673.4		711.17

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A normálegyenlet és annak megoldása:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	$a]$	$b]$	$w]$		Egy irány középhibája:		$b]$	$a]$	$w]$	
	− 8.961 8967	+ 9.460 7584	− 9.427 5769		$\mu = \pm\sqrt{\frac{[w.w.2]}{r-n}} = \sqrt{\frac{[g\lambda\lambda]}{7}}$		− 6.986 4045	+ 9.485 2662	− 9.814 6776	
	+ 3.038 1033	− 2.498 8617	+ 2.465 6802				+ 3.013 5955	− 2.498 8617	+ 2.828 2731	
$[a$	+ 1091.7	− 315.4	+ 292.2	− 1.959 6201	$= \pm 1.''71$	$[b$	+ 1031.8	− 315.4	+ 673.4	− 1.984 1279
		− 91.1	+ 84.4					− 96.4	+ 205.8	
$[b$		+ 1031.8	+ 673.4	+ 1.926 4386	Az összrendezők középhibái:	$[a$		+ 1091.7	+ 292.2	+ 2.313 5393
			− 78.2		$\mu_y = \pm\sqrt{\frac{m^2}{[aa.1]}}$				− 439.5	
$[w$			+ 711.2	− 1.893 2571	$= \pm 0.006$	$[w$			+ 711.2	− 2.642 9597
		− 7.026 5489	− 9.906 1035		$\mu_x = \pm\sqrt{\frac{m^2}{[bb.1]}}$			− 7.002 0460	− 9.699 2753	
		+ 2.973 4511	+ 2.879 5546					+ 2.997 9540	+ 2.697 2293	
$[1b$		+ 940.7	+ 757.8	$\Delta x =$	$= \pm 0.006$	$[1a$		+ 995.3	+ 498.0	$\Delta y =$
			− 610.5	− 0.806					− 249.2	− 0.500
$[1w$			+ 633.0			$]1w$			+ 271.7	
$[2w$			+ 22.5	− 2.785 6581		$[2w$			+ 22.5	− 2.396 5046

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

VI. Az irányváltozások kiszámitása, v végleges hibák és [vv] képzése:

R	$a.\Delta y$	$b.\Delta x$	$\Delta\delta = a.\Delta y + b.\Delta x$	$v + i = \Delta\delta + w$	λ	g	$g\lambda\lambda$
1	+ 3.85	− 8.83	− 4.98	+ 3.3	− 0.6	1	+ 0.36
2	− 3.66	− 1.30	− 4.95	+ 5.7	+ 1.8	1	3.24
3	− 7.15	+ 14.58	+ 7.43	+ 3.9	0	1	0
4	− 2.20	+ 6.97	+ 4.77	+ 4.3	+ 0.4	1	0.16
6	+ 8.25	+ 9.15	+ 17.40	+ 2.2	− 1.7	1	2.89
				− 3.9			
6	+ 3.85	− 8.83	− 4.98	+ 2.2	+ 2.2	0.80	3.87
7	+ 8.25	+ 9.15	+ 17.40	+ 3.6	+ 3.6	0.80	10.37
8	− 2.20	+ 6.97	+ 4.77	− 0.6	− 0.6	0.75	0.27
9	− 7.15	+ 14.58	+ 7.43	+ 0.7	+ 0.7	0.80	0.39
10	− 3.65	− 1.30	− 4.95	+ 1.6	+ 1.6	0.75	1.92
							23.47

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A kiegyenlített koordináták lesznek $(y) = -85\,156.000$ $(x) = -72\,017.000$

$\Delta y = -0.050$ $\Delta x = +0.081$

$y = -85\,156.050$ $x = -72\,017.081$

A szokásos módon elvégezve a középhiba számítást, az egységsúlyú mérési eredmény középhibája

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[g\,\lambda\lambda]}{f}}$$

$f =$ fölös mérések számával. A jelen esetben a mérési eredmények száma $= 10$, az ismeretlenek száma 3, t. i. a két koordináta javítás és 1 tájékozási állandó.

Tehát

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{23.5}{10-3}} = \pm 1.''83.$$

A középhiba számításnak ez a módja néha hamis eredményeket adhat — amint azt előbb is mondottuk — különösen akkor, ha $\lambda + \Delta z$ és λ között nagyobb különbség van.

A középhiba számításnak teljesen szabatos módja az lesz, hogy a Δz-vel *megjavított* javításokat vesszük csak figyelembe.

Ennek *egyik* módja az, hogy a régi pontokon is — mint a belső irányoknál — $\Delta z = \frac{[a]}{n}\Delta y + \frac{[b]}{n}\Delta x + \frac{[\omega]}{n}$ értékeket számítjuk s ellenkező jellel (λ)-hoz adva, kapjuk a javítások *valódi* értékét; a másik mód az, hogy a végleges délszög számítás *után ujból* tájékozzuk a méréseket. A tájékozási állandó *előleges* és *végleges* értéke közötti különbség egyenlő tartozik lenni az előbb számított Δz-vel. Az ujabb tájékozás után számított λ javítások a Δz-től mentesek lesznek.

Az előbbi példában a „Kiegyenlítés utáni" rovatokban, λ oszlopban vannak a Δz-től *mentes* javítások. Ezeket négyzetezve s összeadva kapjuk:

$$[\lambda\lambda] = 20.20$$

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{7}} = \pm 1.''71.$$

Ez az érték *szigorúan* egyezik amit 374. oldalon számítottunk.

Levonjuk ezekután a következő fontos szabályt:

Külső- belső irányokkal bíró pontok kiegyenlítése esetében, a kiegyenlítés leggazdaságosabb módja az lesz, hogy a feltételi egyenleteket csak az új pontra, vagy pontokra menő irányokra írjuk fel s tekintetbe veszszük a tájékozott irányok súlyát is. Ha pontos középhiba számítást akarunk végezni, akkor a kivülről jövő irányok tájékozási állandójának újabb meghatározásával képezzük az új irányok tájékozási javítástól mentes értékét, s ezek figyelembe vételével számítjuk az egységsúlyú mérési eredmény várható középhibáját.

Miután rendszerint két irány közé mérjük be az új irányt, ha azonban lehet, akkor több közé, a tájékozott irány súlya $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} - \frac{4}{5}$ *értéket vesz fel. Ennek folytán — amint arról gyakorlati számításokból meggyőződtünk — nem követünk el nagy hibát, ha ily esetekben a külső tájékozott irány súlyát is egységsúlyúnak vesszük s úgy végezzük a kiegyenlítést. Ez az elhanyagolás gyakorlati szempontból jelentéktelen változást okoz a kiegyenlített koordinátákban és semmi esetre sem akkora hibát, mint aminőt a* Δz *elhanyagolása folytán az egységsúlyú eredmény középhibájának számításában kapunk.*

Ez utóbbi elhanyagolást azonban kerülendőnek tartjuk.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

8. Nagyobb hálózatok kiegyenlítése.

Részletesen tárgyaltuk az eddigiekben egyes izolált pontok kiegyenlítését. Ugyanezen elvek szerint történik több összefüggő pontból álló *csoport* kiegyenlítése is.

A kiegyenlítő eljárás mechanikai keresztülviteléhez megjegyzésünk nincs is.

Pusztán a csoportok kiválasztására, a kiegyenlítést *megelőző* előmunkálatokra, s a számítási élességre akarunk még kiterjeszkedni.

Koordináta módszerrel — *rendszerint* — már meglévő háromszöghálózatban, végezzük a pontok sűrítését, vagy meglévő háromszöghálózathoz csatlakozva új háromszöghálózatot fejlesztünk.

Ez utóbbira jellemző példa a magy. kir. háromszögelő hivatal által az utóbbi években fejlesztett Dunántúli I. r. hálózat. Ennek a hálózatnak a kiegyenlítésénél a Duna folyam mentén levő régi I. r. hálózat azonos pontjai szilárdaknak fogadtattak el, úgyszintén két háromszögoldal *hossza* az ország nyugati határán.

A Duna folyam mentén fekvő I. r. hálózati pontokra támaszkodva, a nyugati határon lévő két háromszögoldal *hosszának* — *mint kényszernek* — figyelembe vételével végeztetett több csoportban a kiegyenlítés.

Ennek a nagyszabású feladatnak a megoldásánál — a kényszerek alkalmazása folytán — igen érdekes és elméleti jelentőségű kérdések is megoldattak.

A koordináta módszer alkalmazásának gyakoribb esete az előbb említett *pontsűrítés*. Meglévő I. r. hálózatba — a hálózati összefüggésre való tekintettel — új háromszögpontok határoztatnak meg és pedig II., III., . . . rendben.

A II. r. hálózatot *törési* hálózatnak szoktuk nevezni.

A mellékelt ábra egy I. r. hálózatban fejlesztett II. és III. r. hálózat fejlesztését mutatja. I. r. pontok: Nagyhegy, Vulkán, Cs.-kő, Magascsúcs és Hajtó.

A három elsőrendű háromszöget három törési ponttal — Dimbó, Tisztás, Boldogtető, megtörtük s e megtört hálózatba közbeigtattuk a III. r. pontokat.

Bennünket a jelen esetben nem a hálózat geométriai tulajdonságai érdekelnek, hanem a *kiegyenlítés menete*.

A mellékelt hálózat kiegyenlítése a következő lépcsőkben történt:

1. Dimbó, Boldogtető, Tisztás II. r. pontok.
2. Medvehegy, Korabia, Bráza III. r. pontok.
3. Kőhegy III. r. pont.
4. Kisdomb III. r. pont.
5. Zsidóhegy III. r. pont.

A kiegyenlítésnek ez a sorrendje a hálózati összeköttetések folytán önként kínálkozott.

Elméleti szempontból, talán jobb lett volna az egész harmadrendű hálózatot egy csoportban kiegyenlíteni, miáltal a *harmónia* a pontok között jobban biztosíttatott volna. Ennek azonban igen jelentős *gyakorlati* hátrányai vannak, nevezetesen a munka mennyisége *majdnem* kvadratikusan nő a pontok számával s ha egy hiba csúszik a számításba, az egész eljárást meg kell ismételnünk. Ez a veszély pedig — amint a gyakorlat mutatja — mindig fenyeget bennünket, úgy hogy nem tanácsos a nagy csoportokban való kiegyenlítés.

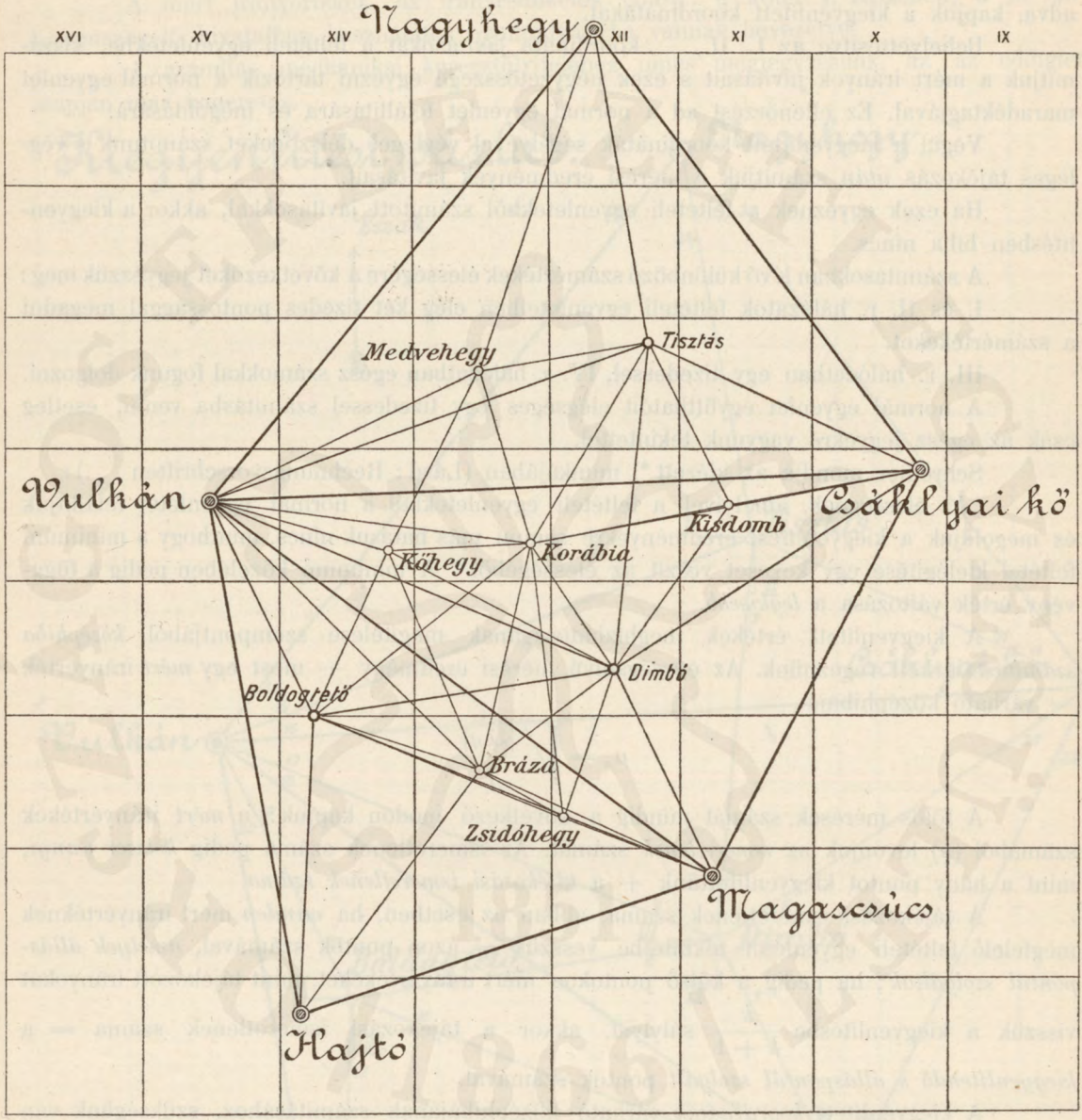
Most már minden adatunk meg van a feltételi egyenletek felállításához.

Egy célszerűen vonalozott táblázatot készítünk s beírva először is az irányok számát.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Főhálózati vázlat.

Alsó-Fehér és Torda-Aranyos vm. 1911. Marosvásárhelyi koord. rendsz.



18. ábra.

Minden csoportról külön-külön vázlatot készítünk, az irányokat megszámozzuk s az előleges koordináták javításait I., II., . . . számokkal bejelöljük.

E vázlat alapján történik az előleges délszög számítás előírása a *számozás* sorrendjében. Ezen a nyomtatványon számítjuk egyidejűleg az előleges délszögeket és az a, b iránykoefficienseket.

Ezek megtörténte után az előleges délszögeket a mérési eredmények mellé írva képezzük állomásonként a tájékozási szögeket s az ellentmondásokat. (ω)

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

sorjában állomásonként, bevezetjük a megfelelő rovatokba az a, b, ω értékeket. Ha ellenőrzéssel akarjuk végezni a normál egyenlet együtthatóinak képzését, akkor — a jelen fejezet bevezetésében tárgyalt módon, az s összeg tagot is képezzük.

A feltételi egyenletekből felállítjuk a normál egyenletet s megoldjuk.

A megoldás után nyert I, II., . . . koordináta javításokat az előleges koordinátához adva, kapjuk a kiegyenlített koordinátákat.

Behelyettesítve az I., II., . . . koordináta javításokat a feltételi egyenletekbe, kiszámítjuk a mért irányok javításait s ezek négyzetösszege egyezni tartozik a normál egyenlet maradéktagjával. Ez ellenőrzést ad a normál egyenlet felállítására és megoldására.

Végül a kiegyenlített koordináták segélyével végleges délszögeket számítunk s végleges tájékozás *után* számítjuk a mérési eredmények javításait.

Ha ezek egyeznek a feltételi egyenletekből számított javításokkal, akkor a kiegyenlítésben hiba nincs.

A számításokban lévő különböző számértékek élességére a következőket jegyezzük meg:

I. és II. r. hálózatok feltételi egyenleteiben elég két tizedes pontossággal megadni a számértékeket.

III. r. hálózatban egy tizedessel, IV. r. hálózatban egész számokkal fogunk dolgozni.

A normál egyenlet együtthatóit elégséges egy tizedessel számításba venni, esetleg csak az egész jegyekre vagyunk tekintettel.

Schreiber mondja az idézett *) munkájában (Lásd: Rechnungsvorschriften . . .):

„Az élességnek, amelylyel a feltételi egyenletekből a normál egyenletet felállítjuk és megoldjuk a kiegyenlítési eredményekre semmi más hatásuk nincs, minthogy a minimum feltétel kielégítése egy keveset veszít az élességéből." A minimum közelében pedig a függvény érték változása a *legkisebb*.

A kiegyenlített értékek megbízhatóságának megítélése szempontjából *középhiba számítást* is kell végeznünk. Az egységsúlyú mérési eredmény — most egy *mért* irányérték — várható középhibája

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda\, g]}{f}}$$

A fölös mérések számát mindig a következő módon kapjuk: a *mért* irányértékek számából (n) levonjuk az *ismeretlenek* számát. Az ismeretlenek száma pedig *kétszer annyi*, mint a hány pontot kiegyenlítettünk + a *tájékozási ismeretlenek száma*.

A tájékozási ismeretlenek száma, abban az esetben, ha *minden* mért irányértéknek megfelelő feltételi egyenletet tekintetbe vesszük = azon pontok számával, *amelyek állás-pontúl szolgáltak*; ha pedig a külső pontokon mért irányértékeket, mint tájékozott irányokat visszük a kiegyenlítésbe $\frac{k}{k+1}$ súlylyal, akkor a tájékozási ismeretlenek száma = a *kiegyenlítendő s álláspontúl szolgált* pontok számával.

A kiegyenlített *koordináták* várható középhibájának számításához, szükségünk van a Q_{11}, Q_{22}, . . . súlykoefficiensekre. Ezek számítása az *eredeti* normál egyenletből történik és pedig úgy, hogy a normál egyenlet abszolút tagjai helyébe sorjában — 1, 0, 0, . . . értékeket, illetve 0, — 1, 0, 0, . . . értékeket teszünk s így megkapva a *súlykoefficienseket* meghatározó egyenleteket, azokat megoldjuk.

A nyert Q_{11}, Q_{22} . . . súlykoefficiensek meghatározása után:

$$\mu_{y_1} = \mu_0 \sqrt{Q_{11}},\ \mu_{x_1} = \mu_0 \sqrt{Q_{22}},\ \mu_{y_2} = \mu_0 \sqrt{Q_{33}},\ \ldots$$

*) Lásd 336. oldalon a *) *)' lábjegyzetet.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

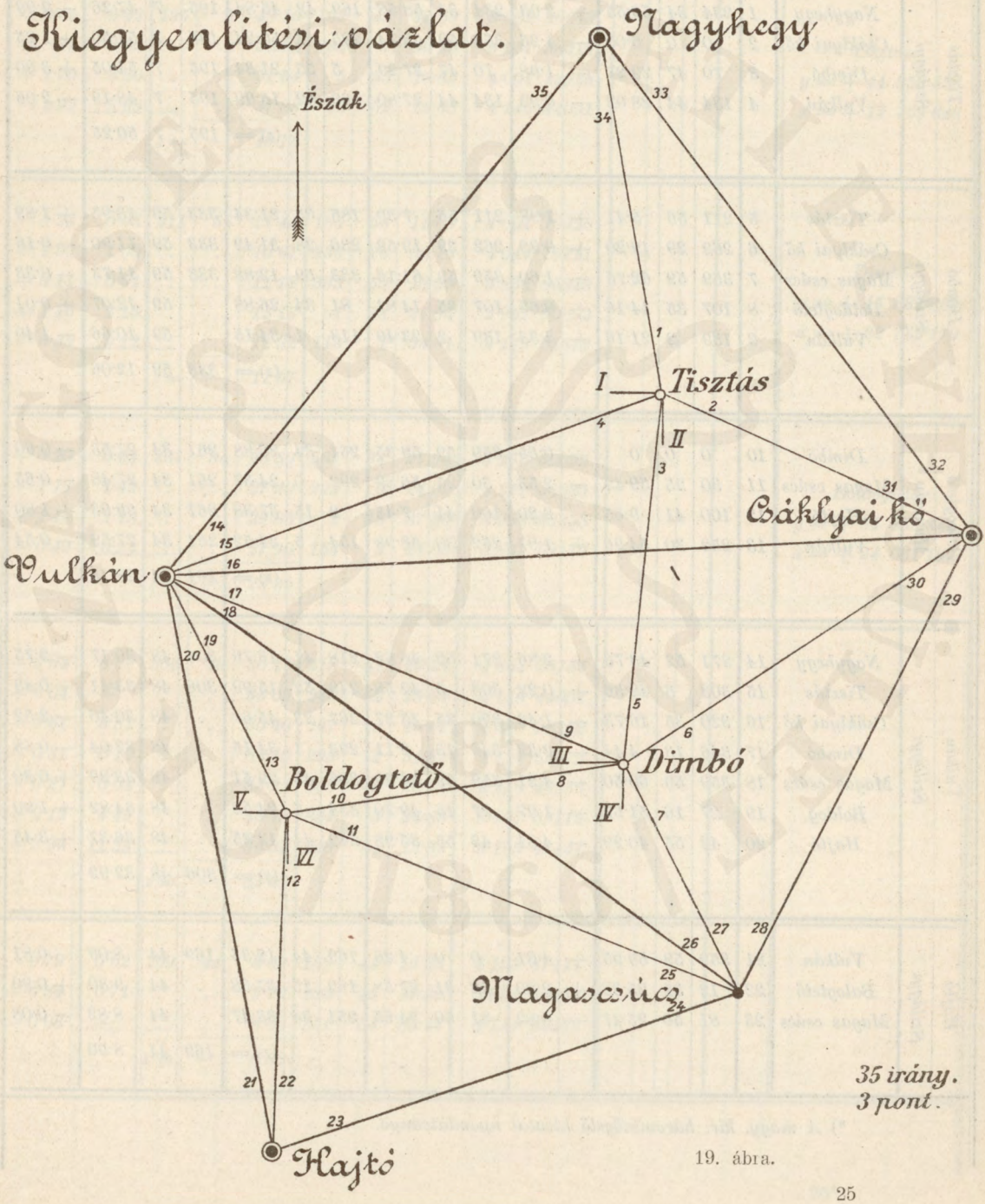
9. Példa a több pontból álló csoport kiegyenlítésére.

(Törési hálózat.)

A mellékelt kiegyenlitési vázlatban (Lásd 19. ábra) feltüntetett s megszámozott irányokat mértük a *Dimbó, Boldogtető, Tisztás* pontok meghatározására.

A mért irányértékek, az irányredukciók (Lásd: e kötet I. részében) a m. kir. háromszögelő hivatalban használatos nyomtatványba vannak bevezetve.

A számítás mechanikai keresztülviteléhez nincs megjegyzésünk, az az eddigiek alapján már ismeretes.



19. ábra.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Álláspont	Észlelő 1911-ik évben	Az irányzott pont neve *)	Irány	A látkörben előlegesen kiegyenlített irányok			Átvezetés a síkra (Irány redukció)		A síkra átvezetett irányok			Előlegesen kiszámított						w
												déli irányszög			tájékozási szög			
				°	′	″	±	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″	
Tisztás	*Szilágyi*	*Nagyhegy*	1	234	34	56·55	+	2·03	234	34	58·58	169	42	45·84	195	7	47·26	— 2·99
		Csáklyai kő	2	0	0	0·00	—	1·26	359	59	58·74	295	7	50·24	195	7	51·50	+ 1·25
		Dimbó	3	70	47	29·27	—	1·98	70	47	27·29	5	55	21·34	195	7	54·05	+ 3·80
		Vulkán	4	134	44	28·02	—	0·22	134	44	27·80	69	52	15·99	195	7	48·19	— 2·06
														(z) =	195	7	50·25	
Dimbó	*Szilágyi*	*Tisztás*	5	211	56	5·41	+	1·98	211	56	7·39	185	55	21·34	333	59	13·95	+ 1·89
		Csáklyai kő	6	262	29	19·20	+	0·32	262	29	19·52	236	28	31·42	333	59	11·90	— 0·16
		Magas csúcs	7	359	59	62·75	—	1·60	359	59	61·15	333	59	12·88	333	59	11·73	— 0·33
		Boldogtető	8	107	35	14·16	+	0·65	107	35	14·81	81	34	26·88	.	59	12·07	+ 0·01
		Vulkán	9	139	2	21·16	+	2·33	139	2	23·49	113	1	34·15	.	59	10·66	— 1·40
														(z) =	333	59	12·06	
Boldogtető	*Munteán*	*Dimbó*	10	0	0	0	—	0·65	359	59	59·35	261	34	26·88	261	34	27·53	— 0·60
		Magas csúcs	11	30	25	59·42	—	2·53	30	25	56·89	292	0	24·37	261	34	27·48	— 0·65
		Hajtó	12	100	41	9·65	—	2·20	100	41	7·45	2	15	37·38	261	34	29·93	+ 1·80
		Vulkán	13	252	30	54·96	+	1·97	252	30	56·93	154	5	24·52	261	34	27·59	— 0·54
														(z) =	261	34	28·13	
Vulkán	*Szilágyi*	*Nagyhegy*	14	271	52	43·76	+	2·86	271	52	46·62	218	41	16·79	306	48	30·17	— 2·75
		Tisztás	15	303	3	42·36	+	0·22	303	3	42·58	249	52	15·99	306	48	33·41	+ 0·49
		Csáklyai kő	16	320	35	16·73	—	1·46	320	35	15·27	267	23	45·67	.	48	30·40	— 2·52
		Dimbó	17	346	13	4·44	—	2·33	346	13	2·11	293	1	34·15	.	48	32·04	— 0·88
		Magas csúcs	18	359	59	60·50	—	4·21	359	59	56·29	306	48	29·51	.	48	33·22	+ 0·30
		Boldog	19	27	16	51·67	—	1·97	27	16	49·70	334	5	24·52	.	48	34·82	+ 1·90
		Hajtó	20	42	55	40·29	—	4·31	42	55	35·98	349	44	12·35	.	48	36·37	+ 3·45
														(z) =	306	48	32·92	
Hajtó	*Szilágyi*	*Vulkán*	21	359	59	59·95	+	4·31	0	0	4·26	169	44	12·35	169	44	8·09	— 0·81
		Balogtető	22	12	31	25·38	+	2·20	12	31	27·58	182	15	37·38	.	44	9·80	+ 0·90
		Magas csúcs	23	81	50	25·47	—	0·82	81	50	24·65	251	34	33·47	.	44	8·82	— 0·08
														(z) =	169	44	8·90	

*) *A magy. kir. háromszögelő hivatal nyomtatványa.*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Végeredmények a kiegyenlítés után													Észrevétel
		a síkban számított							gömbi				
		tájékozási szög			déli irányszög			oldal-logarithmusa	irányok			oldallogarithmusa	
λ	$\lambda\lambda$	°	′	″	°	′	″		°	′	″		
— 0·65	0·42	195	7	49·10	162	42	47·68	3·982 96663					
+ 79	0·62	.	.	50·54	295	7	49·28	3·957 38213					Tisztás
+ 1·79	3·20	.	.	51·54	5	55	18·83	4·001 12928					$y = +44\ 853{\cdot}456$
— 1·92	3·69	.	.	47·83	69	52	15·63	4·146 44031					$x = +12\ 759{\cdot}646$
		$z =$	—	49·75									
— 0·23	0·05	211	56	11·44	185	55	11·83	4·001 12928					
— 1·00	1·00	.	.	10·67	236	28	30·19	4·044 76711					
+ 0·11	0·01	.	.	11·78	333	59	12·93	3·836 85243					Dimbó
+ 1·46	2·13	.	.	13·13	81	34	27·94	3·957 60092					$y = +45\ 887{\cdot}869$
— 0·35	0·12	.	.	11·32	113	1	34·81	4·119 55872					$x = +22\ 732{\cdot}179$
		$z =$	—	11·67									
+ 0·20	0·04	261	34	28·59	261	34	27·94	3·957 60092					
— 1·19	1·42	.	.	27·20	292	0	24·09	4·111 46625					Boldogtető
+ 1·46	2·13	.	.	29·85	2	15	37·30	3·952 33258					$y = +54\ 859{\cdot}844$
— 0·49	0·24	.	.	27·90	154	5	24·83	3·857 59112					$x = +24\ 061{\cdot}137$
		$z =$	—	28·39									
— 2·84	8·07	306	48	30·17	218	41	16·79	4·262 38754					
+ 0·04	—	.	.	33·05	249	52	15·63	4·146 44031					
— 2·61	6·81	.	.	30·40	267	23	45·67	4·330 08152					
— 0·31	0·10	.	.	32·70	293	1	34·81	4·119 55872					
+ 0·21	0·04	.	.	33·22	306	48	29·51	4·276 46236					
+ 2·12	4·49	.	.	35·13	334	5	24·83	3·857 59112					
+ 3·36	11·29	.	.	36·37	349	44	12·35	4·195 47441					
		$z =$	—	33·01									
— 0·79	0·62	169	44	8·09	169	44	12·35	4·195 47441					
+ 0·84	0·71	.	.	9·72	182	15	37·30	3·952 33258					
— 0·06	—	.	.	8·82	251	34	33·47	4·114 08459					
		$z =$	—	8·88									

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Álláspont	Észlelő 1911-ik évben	Az irányzott pont neve	Irány	A látkörben előlegesen kiegyenlített irányok			Átvezetés a síkra (Irány redukció)		A síkra átvezetett irányok			Előlegesen kiszámított déli irányszög			Előlegesen kiszámított tájékozási szög			w
				°	′	″	±	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″	
Magas csúcs	*Szilágyi*	*Hajtó*	24	359	59	58·97	+	0·82	359	59	59·79	71	34	33·47	71	34	33·68	+ 0·77
		Boldogtető	25	40	25	48·48	+	2·53	40	25	51·01	112	0	24·37	.	34	33·36	+ 0·45
		Vulkán	26	55	13	54·36	+	4·21	55	13	58·57	126	48	29·51	.	34	30·94	— 1·97
		Dimbó	27	82	24	37·53	+	1·60	82	24	39·13	153	59	12·88	.	34	33·75	+ 0·84
		Csáklyai kő	28	135	17	33·53	+	1·58	135	17	35·11	206	52	7·94	.	34	32·83	— 0·08
														(z) =	71	34	32·91	
Csáklyai kő	*Szilágyi*	*Magas csúcs*	29	330	23	38·45	—	1·58	330	23	36·87	26	52	7·94	56	28	31·07	+ 1·65
		Dimbó	30	0	0	0·0	—	0·32	359	59	59·68	56	28	31·42	56	28	31·74	+ 2·32
		Tisztás	31	58	39	20·87	+	1·26	58	39	22·13	115	7	50·24	.	28	28·11	— 1·31
		Nagyhegy	32	86	49	2·27	+	2·98	86	49	5·25	143	17	32·02	.	28	26·77	— 2·65
														(z) =	56	28	29·42	
Nagyhegy	*Szilágyi*	*Csáklyai kő*	33	0	0	0·0	—	2·98	359	59	57·02	323	17	32·02	323	17	35·00	— 0·88
		Tisztás	34	26	25	11·94	—	2·03	26	25	9·91	349	42	45·84	323	17	35·93	+ 0·05
		Vulkán	35	75	23	42·94	—	2·86	75	23	40·08	38	41	16·79	.	17	36·71	+ 0·83
														(z) =	323	17	35·88	

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Végeredmények a kiegyenlítés után													Észrevétel
		a síkban számított							gömbi				
		tájékozási szög			déli irányszög			oldal-logarithmusa	irányok			oldallogarithmusa	
λ	$\lambda\lambda$	°	′	″	°	′	″		°	′	″		
+ 0·81	0·66	71	34	33·68	71	34	33·47	4·114 08459					
+ 0·21	0·04	.	.	33·08	112	0	24·09	4·111 46625					
— 1·93	3·72	.	.	30·94	126	48	29·51	4·276 46236					
+ 0·93	0·86	.	.	33·80	153	59	12·93	3·836 85243					
— 0·04	—	.	.	32·83	206	52	7·94	4·139 35092					
	$z =$	71	34	32·87									
+ 2·19	4·80	56	28	31·07	26	52	7·94	4·139 35092					
+ 1·63	2·66	.	.	30·51	56	28	30·19	4·044 76711					
— 1·73	2·99	.	.	27·15	115	7	49·28	3·957 38213					
— 2·11	4·45	.	.	26·77	143	17	32·02	4·220 19109					
	$z =$	56	28	28·88									
— 1·49	2·22	323	17	35·00	323	17	32·02	4·220 19109					
+ 1·28	1·64	.	.	37·77	349	42	47·68	3·982 96663					
+ 0·22	0·05	.	.	36·71	38	41	16·79	4·262 38754					
	$z =$	323	17	36·49									

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{71{\cdot}29}{21}} = \pm 1{\cdot}8''$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Feltételi

		+ 0.86	+ 0.06	— 0.31	+ 0.59	+ 0.04	+ 0.17
	g	*I.*	*II.*	*III.*	*IV.*	*V.*	*VI.*
1	1	+ 2·11	+ 0·38				
2	1	— 0·97	— 2·06				
3	1	— 2·05	+ 0·21	+ 2·05	— 0·21		
4	1	— 0·51	+ 1·38				
	$-\frac{1}{4}$	— 1.42					
			+ 0·09	+ 2·05	— 0·21		
5	1	— 2·05	+ 0·21	+ 2·05	— 0·21		
6	1			+ 1·03	— 1·55		
7	1			— 2·70	— 1·32		
8	1			— 0·33	+ 2·25	+ 0·33	— 2·25
9	1			+ 0·62	+ 1·44		
	$-\frac{1}{5}$	— 2·05	+ 0·21	+ 0·67	+ 0·61	+ 0·33	— 2·25
10	1			— 0·33	+ 2·25	+ 0·33	— 2·25
11	1					— 0·60	— 1·48
12	1					— 2·30	+ 0·09
13	1					+ 2·58	+ 1·26
	$-\frac{1}{4}$			— 0·33	+ 2·25	+ 0·01	— 2·38
14	1						
15	1	— 0·51	+ 1·38				
16	1						
17	1			+ 0·62	+ 1·44		
18	1						
19	1					+ 2·58	+ 1·26
20	1						
	$-\frac{1}{7}$	— 0·51	+ 1·38	+ 0·62	+ 1·44	+ 2·58	+ 1·26
21	1						
22	1					— 2·30	+ 0·09
23	1						
	$-\frac{1}{3}$					+ 2·30	+ 0·09
24	1						
25	1					— 0·60	— 1·48
26	1						
27	1			— 2·70	— 1·32		
28	1						
	$-\frac{1}{5}$			— 2·70	— 1·32	— 0·60	— 1·48
29	1						
30	1			+ 1·03	— 1·55		
31	1	— 0·97	— 2·06				
32	1						
	$-\frac{1}{4}$	— 0·97	— 2·06	+ 1·03	— 1·55		
33	1						
34	1	+ 2·11	+ 0·38				
35	1						
	$-\frac{1}{3}$	+ 2·11	+ 0·38				

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

egyenletek.

$-s$	ω	$a\,\Delta y + b\,\Delta x = \Delta\delta$	$\Delta\delta + \omega = \lambda + \Delta z$	Δz	λ	$\lambda\lambda$
— 2·49	— 2·39	+ 1·79	— 1·20		— 0·69	0·4761
+ 3·03	+ 1·25	— 0·96	+ 0·29		+ 0·80	0·6400
	+ 3·80	— 2·51	+ 1·29	+ 0.51	+ 1·80	3·2400
— 0·87	— 2·06	— 0·36	— 2·42		— 1·91	3·6481
					0·00	
— 0·33						
	+ 1·89	— 2·51	— 0·62		— 0·23	0·0529
+ 0·52	— 0·16	— 1·23	— 1·39		— 1·00	1·0000
+ 4·02	— 0·33	+ 0·06	— 0·27	+ 0·39	+ 0·12	0·0144
	+ 0·01	+ 1·06	+ 1·07		+ 1·46	2·1316
— 2·06	— 1·40	+ 0·66	— 0·74		— 0·35	0·1225
					0·00	
+ 2·48						
	— 0·60	+ 1·06	+ 0·46		+ 0·46	0·0400
+ 2·08	— 0·65	— 0·28	— 0·93		— 0·93	1·4161
+ 2·21	+ 1·80	— 0·08	+ 1·72	— 0·26	+ 1·72	2·1316
— 3·84	— 0·54	+ 0·32	— 0·22		— 0·22	0·2304
					— 0·01	
+ 0·45						
	— 2·75		— 2·75		— 2·84	8·0656
— 0·87	+ 0·49	— 0·36	+ 0·13		+ 0·04	0·0016
	— 2·52		— 2·52		— 2·61	6·8121
— 2·06	— 0·88	+ 0·66	— 0·22		— 0·31	0·0961
	+ 0·30		+ 0·30	— 0·09	+ 0·21	0·0441
— 3·84	+ 1·90	+ 0.32	+ 2·22		+ 2·13	4·5369
	+ 3·45		+ 3·45		+ 3·36	11·2896
					— 0·02	
— 6·77						
	— 0·81		— 0·81		— 0·79	0·6241
+ 2·21	+ 0·90	— 0·08	+ 0·82	+ 0·02	+ 0·84	0·7056
	— 0·08		— 0·08		— 0·06	0·0036
					— 0·01	
+ 2·21						
	+ 0·77		+ 0·77		+ 0·81	0·6561
+ 2·08	+ 0·45	— 0·28	+ 0·17		+ 0·21	0·0441
	— 1·97		— 1·97	+ 0·04	— 1·93	3·7249
+ 4·02	+ 0·84	+ 0·06	+ 0·90		+ 0·94	0·8836
	+ 0·08		— 0·08		— 0·04	0·0016
					— 0·01	
+ 6·10						
	+ 1·65		+ 1·65		+ 2·20	4·8400
+ 0·52	+ 2·32	— 1·23	+ 1·09		+ 1·64	2·6896
+ 3.03	— 1·31	— 0·96	— 2·27	+ 0.55	— 1·72	2·9584
	— 2·65		— 2·65		— 2·10	4·4100
					+ 0·02	
+ 3·55						
	— 0·88		— 0·88		— 1·48	2·1904
— 2·49	+ 0·05	+ 1.79	+ 1·84	— 0·60	+ 1·24	1·5376
	+ 0·83		— 0·83		+ 0·23	0·0529
					— 0·01	
— 2·49						71·3112

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Normál egyenlet.

	I.	*II.*	*III.*	*IV.*	*V.*	*VI.*	ω	*s*	
		— 9·214 1993	*+ 9·631 5000*	*— 8·666 1211*	*— 8.284 7804*	*+ 8·698 7085*	*+ 0·010 3347*		I. = + 0·86
	+1·2203696	+ 0·434 5689	— 0·851 8696	+ 9·886 4907	— 9·505 1500	— 9.919 0781	— 1·230 7043	+ 0.656 0982	+ *log* 9.934 4985
I.	+ 16·61	+ 2·72	— 7·11	+ 0·77	+ 0·32	— 0·83	— 17·01	+ 4·53	
2		+ 11·28	+ 1·28	— 1·20	— 0·52	— 0·15	— 1·97	— 11·44	
1		— 0·45	+ 1·16	— 0·13	— 0·05	+ 0·14	— 2·79	— 0·74	II. = + 0·06
			— 9.352 7613	*+ 9·089 2231*	*+ 8·721 2464*	*+ 6·965 3715*	*— 8·879 1854*		+ *log* 8·778 1513
		+ 1·034 6285	+ 0·387 3898	— 0·123 8516	— 9·755 8749	— 8·000 000	+ 9·913 8139	— 1·085 6473	
II.		+ 10·83	+ 2·44	— 1·33	— 0·57	— 0·01	+ 0·82	— 12·18	
3			+ 23·15	+ 3·14	— 0·81	+ 0·68	+ 11·29	— 31·62	
2			— 3·04	+ 0·33	+ 0·14	— 0·36	— 7·28	+ 1·94	
1			— 0·55	+ 0·30	+ 0·13	—	— 0·19	+ 2·75	III. = — 0·31
				— 9·284 9725	*+ 8.441 0249*	*— 8·213 7811*	*— 9·290 6945*		— *log* 9·491 3617
			+ 1·291 3689	+ 0·576 3414	— 9.732 3938	+ 9.505 1500	+ 0·582 0634	— 1·430 2364	
III.			— 19·56	+ 3·77	— 0.54	+ 0·32	+ 3·82	— 26·93	
4				+ 20·06	+ 0·75	— 9.16	— 9·83	— 4·53	
1				— 0·04	— 0·01	+ 0·04	+ 0·79	— 0·21	
2				— 0·16	— 0·07	—	+ 0·10	— 1·50	IV. = + 0·59
3				— 0·73	+ 0·10	— 0·06	— 0·74	+ 5·20	+ *log* 9·770 8520
					— 8·605 7757	*+ 9.681 1277*	*+ 9.704 1604*		
				+ 1·281 7150	+ 9·886 4907	— 0·962 8427	— 0.985 8754	— 0·017 0333	
IV.				+ 19·13	+ 0·77	— 9·18	— 9·68	— 1·04	
5					+ 22·02	+ 5·96	— 2·78		
1					— 0·01	+ 0·02	+ 0·33	— 24·94	
2					— 0·03	—	+ 0·04	— 0·10	
3					— 0·01	+ 0·01	+ 0·11	— 0·64	V. = + 0·04
4					— 0·03	+ 0·37	+ 0·39	— 0·75	+ *log* 8·602 6000
						— 9·462 2205	*+ 8·939 7968*	— 0·04	
					+ 1·341 2366	+ 0·803 4571	— 0·281 0334	— 1·421 4394	
V.					+ 21·94	+ 9·36	— 1·91	— 26·39	
6						+ 14·60	+ 3·58	— 14·68	
1						— 0·04	— 0·83	+ 0·22	
2						—	—	— 0·01	
3						— 0·01	— 0·06	+ 0·44	VI. = + 0·17
4						— 4 41	— 4·65	— 0·49	+ *log* 9·236 2579
5						— 1·84	+ 0·55	+ 7·65	
							+ 9·236 2579		
						+ 0·919 0781	— 0·155 3360	— 0·836 9567	
VI.						+ 8·30	— 1·43	— 6·87	
ω							+ 94·87	— 78·15	
1							— 17·42	+ 4·63	
2							— 0·06	+ 0·93	
3				$\mu_0 = \sqrt{\frac{[\omega\omega.6]}{21}} = \pm 1.''8$			— 0·75	+ 5·26	
4							— 4·90	— 0·52	
5							— 0·17	— 2·29	
6							— 0·25	— 1·18	
							$[\lambda\lambda] = [\omega\omega.6] =$	+ 71·32	— 71·32

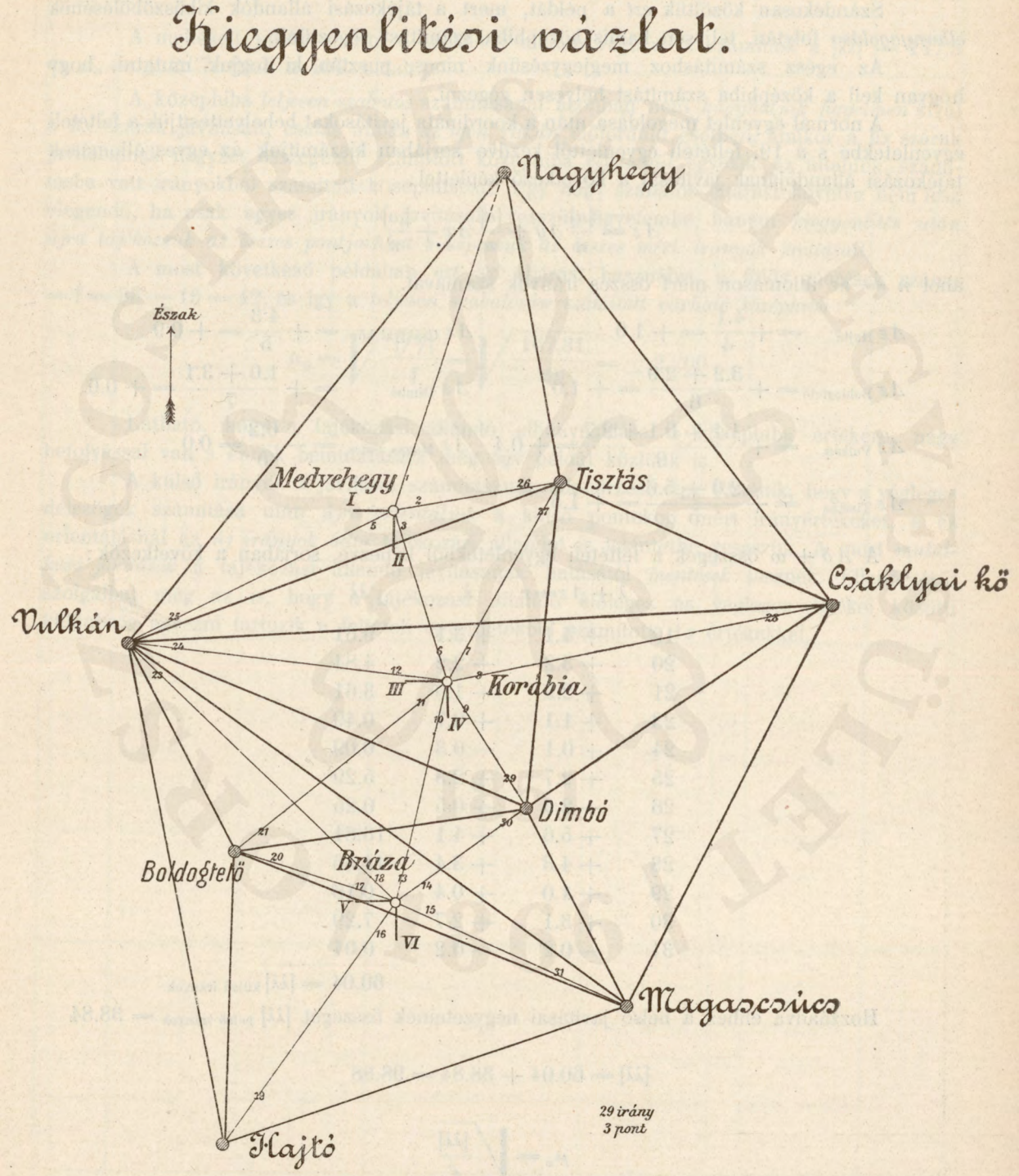
Az egységsúlyú mérési eredmény középhibájának számításához szükséges fölös mérések számát a következő módon kapjuk: az összes mérések száma = 35, az ismeretlenek száma = 6 koordináta javítás + 8 tájékozási állandó, összesen 14 ismeretlen. $f = 35 - 14 = 21$.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

10. Három pontból álló III. r. csoport kiegyenlítése.

Kiegyenlítendő pontok: *Medvehegy, Korabia, Bráza.* (Lásd 20. ábra.)

Ennek a csoportnak a kiegyenlítését (396—404. oldalakon) úgy végeztük, hogy a *külső* pontokon mért irányértékeket *tájékoztuk* s az új pontra menő *tájékozott* irányérté-



20. ábra.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

keket tekintettük mérési eredményeknek. A külső és belső irányokat egységsúlyúnak, tekintettük.

A kiegyenlítés *után* kiszámítottuk a feltételi egyenletekből javításokat.

A javítások helyes értékeit kapjuk a *kiegyenlítendő* pontokon, de hamis eredményt kapunk a szilárd pontokon.

Szándékosan közöltük *ezt* a példát, mert a tájékozási állandók kiküszöbölésének *elhanyagolása* folytán, teljesen hamis középhiba számítást végeztünk.

Az egész számításhoz megjegyzésünk nincs, pusztán ki fogjuk mutatni, hogy hogyan kell a középhiba számítást helyesen végezni.

A normál egyenlet megoldása után a koordináta javításokat behelyettesítjük a feltételi egyenletekbe s a 19. feltételi egyenlettől kezdve sorjában kiszámítjuk az egyes állomások tájékozási állandójának javítását a következő képlettel:

$$\Delta z = \frac{[a]}{n}\Delta y + \frac{[b]}{n}\Delta x + \frac{[\omega]}{n},$$

ahol n = az állomáson mért összes irányok számával.

$$\Delta z_{\text{Hajtó}} = +\frac{4.1}{4} = +1.0 \qquad \Delta z_{\text{Csáklyai kő}} = +\frac{4{\cdot}3}{5} = +0{\cdot}9$$

$$\Delta z_{\text{Boldogtető}} = +\frac{3.2+2.9}{6} = +1.0 \qquad \Delta z_{\text{Dimbó}} = +\frac{1.0+3.1}{7} = +0.6$$

$$\Delta z_{\text{Vulkán}} = +\frac{1.1+0.1+2.7}{9} = +0.4 \qquad \Delta z_{\text{Magas csúcs}} = -\frac{0.2}{5} = 0.0$$

$$\Delta z_{\text{Tisztás}} = +\frac{2.0+5.6}{5} = +1.5$$

A $\Delta\delta + \omega$ összegek a feltételi egyenletekből képezve, sorjában a következők:

	$\lambda + \Delta z = v$	λ	$\lambda\lambda$
19	+ 4.1	+ 3.1	9.61
20	+ 3.2	+ 2.2	4.84
21	+ 2.9	+ 1.9	3.61
23	+ 1.1	+ 0.7	0.49
24	+ 0.1	− 0.3	0.09
25	+ 2.7	+ 2.3	5.29
26	+ 2.0	+ 0.5	0.25
27	+ 5.6	+ 4.1	16.81
28	+ 4.3	+ 3.4	11.56
29	+ 1.0	+ 0.4	0.16
30	+ 3.1	+ 2.7	7.29
31	− 0.2	− 0.2	0.04
			60.04 = $[\lambda\lambda]$ külső irányok.

Hozzáadva ehhez a belső javításai négyzeteinek összegét $[\lambda\lambda]_{\text{belső irányok}} = 38.84$

$$[\lambda\lambda] = 60.04 + 38.84 = 98.88$$

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{f}}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

$f = 29$ mért irányból levonva $6 + 3$-at a 6 koordináta javításért és a 3 tájékozási ismeretlenért. $f = 29 - 9 = 20$

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{98.88}{20}} = \pm 2.''2$$

A mellékelt példa szerint a szokásos módon végezve a számitást a $[\lambda\lambda] = 147.3$ és $\mu_0 = \pm 2.''7$. (lásd a 404. oldalt.)

A középhiba *teljesen szabatos* számitásánál azonban nem *hagyhatjuk figyelmen* kivül a fix szárak javitásait, csakis abban az *igen ritkán* előforduló esetben, amikor a fix szárak javitásainak négyzet összegéből számitott középhiba *véletlenül* egyezik az általunk számitásba vett irányokból számitott középhibával. Ugy hogy szabatos eljárást követve nem lesz elegendő, ha csak egyes irányok javitásait vesszük figyelembe, hanem *kiegyenlités után újra tájékozzuk az összes pontjainkat s képezzük az összes mért irányok javitásait.*

A most következő példában *ezt* az eljárást használva, a fölös mérések száma $= f = 58 - 16 = 42$, és igy a *teljesen szabatosan számitott várható középhiba:*

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[\gamma\gamma]}{f}} = \sqrt{\frac{167.31}{42}} = \pm 2.''00$$

Látható, hogy a tájékozási állandó elhanyagolása a középhiba értékére, nagy befolyással van s ennek bemutatására még egy példát közlünk is.

A külső irányok λ javitásai számításának ellenőrzése úgy történik, hogy a végleges délszögek számítása után *újra orientáljuk* a külső pontokon mért irányértékeket, s ez orientálásnál az *új irányok adta* tájékozási állandót is tekintetbe veszszük. A most *mutatkozó javítások* a tájékozási állandó javításának hatásától *mentesek* lesznek. Ellenőrzésül szolgálhat még az is, hogy a tájékozási állandó előleges és végleges értékei közötti különbség egyezni tartozik a feltételi egyenletekből számított Δz értékekkel.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Álláspont	Észlelő 1911-ik évben	Az irányzott pont neve	Irány	A látkörben előlegesen kiegyenlitett irányok			Átvezetés a sikra		A sikra átvezetett irányok			Előlegesen kiszámitott						w
												déli irányszög			tájékozási szög			
				°	′	″	±	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″	
Medvehegy	*Szilágyi*	*Nagy hegy*	*1*	*217*	*42*	*45·7*	+	*2·2*	*217*	*42*	*47·9*	*198*	*49*	*34·4*	*241*	*6*	*46·5*	—
		Pojenicza	*2*	*279*	*6*	*54·8*	—	*0·1*	*279*	*6*	*54·7*	*260*	*13*	*40·1*	.	*6*	*45·4*	— *1·1*
		Korábia	*3*	*0*	*0*	*0·0*	—	*1·3*	*359*	*59*	*58·7*	*341*	*6*	*44·3*	.	*6*	*45·6*	— *0·9*
		Vulkán	*5*	*82*	*31*	*23·8*	—	*0·4*	*82*	*31*	*23·4*	*63*	*38*	*11·8*	.	*6*	*48·4*	+ *1·9*
														(z) =			*46·5*	
Korábia	*Szilágyi*	*Medvehegy*	*6*	*63*	*49*	*38·8*	+	*1·3*	*63*	*49*	*40·1*	*161*	*6*	*44·3*	*97*	*17*	*4·2*	— *4·8*
		Tisztás	*7*	*112*	*39*	*2·8*	+	*1·0*	*112*	*39*	*3·8*	*209*	*56*	*5·3*	*97*	*17*	*1·5*	— *7·5*
		Csáklyai kő	*8*	*162*	*1*	*35·1*	—	*0·5*	*162*	*1*	*34·6*	*259*	*18*	*41·2*	*97*	*17*	*6·6*	— *2·4*
		Dimbó	*9*	*230*	*38*	*23·9*	—	*1·1*	*230*	*38*	*22·8*	*327*	*55*	*34·1*	.	*17*	*11·3*	+ *2·3*
		Bráza	*10*	*276*	*41*	*40·7*	—	*1·4*	*276*	*41*	*39·3*	*13*	*58*	*54·4*	.	*17*	*15·1*	+ *6·1*
		Boldogtető	*11*	*313*	*53*	*41·8*	—	*0·6*	*313*	*53*	*41·2*	*51*	*10*	*56·7*	.	*17*	*15·5*	+ *6·5*
		Vulkán	*12*	*0*	*0*	*0*	+	*1·1*	*0*	*0*	*1·1*	*97*	*17*	*10·0*	.	*17*	*8·9*	— *0·1*
														(z) =		*17*	*9·0*	
Bráza	*Szilágyi*	*Korábia*	*13*	*318*	*55*	*22·0*	+	*1·4*	*318*	*55*	*23·4*	*193*	*58*	*54·4*	*235*	*3*	*31·0*	+ *8·3*
		Dimbó	*14*	*0*	*0*	*0·0*	+	*0·2*	*0*	*0*	*0·2*	*235*	*3*	*26·2*	.	*3*	*26·0*	+ *3·3*
		Magas csúcs	*15*	*59*	*29*	*57·8*	—	*1·6*	*59*	*29*	*56·2*	*294*	*33*	*16·1*	.	*3*	*19·9*	— *2·8*
		Hajtó	*16*	*159*	*58*	*27·0*	—	*1·1*	*159*	*58*	*25·9*	*35*	*1*	*45·4*	.	*3*	*19·5*	— *3·2*
		Boldogtető	*17*	*232*	*59*	*35·0*	+	*0·9*	*232*	*59*	*35·9*	*108*	*2*	*53·9*	.	*3*	*18·0*	— *4·7*
		Vulkán	*18*	*260*	*14*	*8·5*	+	*2·8*	*260*	*14*	*11·3*	*135*	*17*	*33·2*	.	*3*	*21·9*	— *0·8*
														(z) =			*22·7*	
Hajtó	*Szilágyi*	*Vulkán*	—	*0*	*5*	*0*	+	*4·3*	*0*	*0*	*4·3*	*169*	*44*	*12·3*	*169*	*44*	*8·0*	—
		Boldogtető	—	*12*	*31*	*25·4*	+	*2·2*	*12*	*31*	*27·6*	*182*	*15*	*37·3*	*169*	*44*	*9·7*	—
		Bráza	*19*	*45*	*17*	*34·5*	+	*1·1*	*45*	*17*	*35·6*	*215*	*1*	*45·4*	.	*4*	*9·8*	+ *1·0*
		Magas csúcs	—	*81*	*50*	*25·5*	—	*0·8*	*81*	*50*	*24·7*	*251*	*34*	*33·5*	.	*4*	*8·8*	—
														(z) =	*169*	*44*	*8·8*	

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Végeredmények a kiegyenlítés után										
λ illetve v	λ	a sikban számított						oldal-logarithmusa	$\lambda\,\lambda$	Észrevétel
		tájékozási szög			déli irányszög					
		°	′	″	°	′	″			
+ 0·3	0·3	241	6	47·9	198	49	35·8	4·039 45629	0·09	
— 0·6	0·6	.	.	47·0	260	13	41·7	3.726 59173	0·36	Medvehegy
+ 0·6	0·6	.	.	48·2	341	6	46·9	3·736 08378	0·36	+ 50104·489
— 0·5	0·5	.	.	47·1	63	38	10·5	3·945 50436	0·25	+ 13663·992
			$z=$	47·6						
— 1·0	1·00	97	17	6·8	161	6	46·9	3·736 08378	1·00	
— 1·6	— 1·6	.	.	6·2	209	56	10·0	3·844 46207	2·56	
+ 0·2	+ 0·2	.	.	8·0	259	18	42·6	4·075 61347	0·04	
— 1·0	— 1·0	.	.	6·8	327	55	29·6	3·664 70438	1·00	Korábia
— 1·3	— 1·3	.	.	6·5	13	58	45·8	3·846 54955	1·69	+ 48341·581
+ 4·3	+ 4·3	.	.	12·1	51	10	53·3	3·922 51898	18·49	+ 18816·847
+ 0·3	+ 0·3	.	.	8·1	97	17	9·2	3·988 77736	0·09	
			$z=$	7·8						
+ 1·5	+ 1·5	235	3	22·4	193	58	45·8	3·846 54955	2·25	
+ 0·5	+ 0·5	.	.	21·4	235	3	21·6	3·704 42677	0·25	
— 0·8	— 0·8	.	.	20·1	294	33	16·3	3·896 24111	0·64	Bráza
+ 1·6	+ 1·6	.	.	22·5	35	1	48·4	3·954 99325	2·56	+ 50038·252
— 2·7	— 2·7	.	.	18·2	108	2	54·1	3·705 10341	7·29	+ 25632·267
—	0	.	.	20·9	135	17	32·2	4·054 17509	0·00	
			$z=$	20.9						
—	— 1·8	169	44	8·0	169	44	12·3	4·195 47441	3·24	
—	— 0·1	.	.	9·7	182	15	37·3	3·952 33258	0·01	
+ 4·0	+ 3·0	.	.	12·8	215	1	48·4	3·954 99325	9·00	
—	— 1·0	.	.	8·8	251	34	33·5	4·114 08459	1·00	
			$z=$	9·8					52·17	

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Álláspont	Észlelő 1911-ik évben	Az irányzott pont neve	Irány	A látkörben előlegesen kiegyenlitett irányok			Átvezetés a sikra		A sikra átvezetett irányok			Előlegesen kiszámitott						w
												déli irányszög			tájékozási szög			
				°	′	″	±	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″	
Boldogtető	*Munteán*	*Hajtó*	—	*100*	*41*	*9·7*	—	*2·2*	*100*	*41*	*7·5*	*2*	*15*	*37·3*	*261*	*34*	*29·8*	—
		Magas csúcs	—	*30*	*25*	*59·4*	—	*2·5*	*30*	*25*	*56·9*	*292*	*0*	*24·1*	.	*34*	*27·2*	—
		Bráza	*20*	*26*	*28*	*23·5*	—	*0·9*	*26*	*28*	*22·6*	*288*	*2*	*53·9*	.	*34*	*31·3*	+ *2·9*
		Dimbó	—	*0*	*0*	*0·0*	—	*0·7*	*359*	*59*	*59·3*	*261*	*34*	*27·9*	.	*34*	*28·6*	—
		Korábia	*21*	*329*	*36*	*21·4*	+	*0·6*	*329*	*36*	*22·0*	*231*	*10*	*56·7*	.	*34*	*34·7*	+ *6·3*
		Vulkán	—	*252*	*30*	*55·0*	+	*2·0*	*252*	*30*	*57·0*	*154*	*5*	*24·8*	.	*34*	*27·8*	—
														(z) =			*28·4*	
Vulkán	*Szilágyi*	*Boldogtető*	—	*27*	*16*	*51·7*	—	*2·0*	*27*	*16*	*49·7*	*334*	*5*	*24·8*	.	*48*	*35·1*	—
		Bráza	*23*	*8*	*29*	*1·5*	—	*2·8*	*8*	*28*	*58·7*	*315*	*17*	*33·2*	.	*48*	*34·5*	+ *2·1*
		Magas csúcs	—	*0*	*0*	*0·5*	—	*4·2*	*359*	*59*	*56·3*	*306*	*48*	*29·5*	.	*48*	*33·2*	—
		Dimbó	—	*346*	*13*	*4·4*	—	*2·3*	*346*	*13*	*2·1*	*293*	*1*	*34·8*	.	*48*	*32·7*	—
		Korábia	*24*	*330*	*28*	*38·0*	—	*1·1*	*330*	*28*	*36·9*	*277*	*17*	*10·0*	.	*48*	*33·1*	+ *0·7*
		Csáklyai kő	—	*320*	*35*	*16·7*	—	*1·5*	*320*	*35*	*15·2*	*267*	*23*	*45·7*	.	*48*	*30·5*	—
		Tisztás	—	*303*	*3*	*42·4*	+	*0·2*	*303*	*3*	*42·6*	*249*	*52*	*15·6*	.	*48*	*33·0*	—
		Medvehegy	*25*	*296*	*49*	*35·0*	+	*0·4*	*296*	*49*	*35·4*	*243*	*38*	*11·8*	.	*48*	*36·4*	+ *4·0*
		Nagy hegy	—	*271*	*52*	*43·8*	+	*2·9*	*271*	*52*	*46·7*	*218*	*41*	*16·8*	.	*48*	*30·1*	—
														(z) =			*32·4*	
Tisztás	*Szilágyi*	*Nagy hegy*	—	*234*	*34*	*56·6*	+	*2·0*	*234*	*34*	*58·6*	*169*	*42*	*47·7*	*295*	*7*	*49·1*	—
		Medvehegy	*26*	*145*	*5*	*50·1*	+	*0·1*	*145*	*5*	*50·2*	*80*	*13*	*40·1*	.	*7*	*49·9*	+ *0·4*
		Vulkán	—	*134*	*44*	*28·0*	—	*0·2*	*134*	*44*	*27·8*	*69*	*52*	*15·6*	.	*7*	*47·8*	—
		Korábia	*27*	*94*	*48*	*15·9*	—	*1·0*	*94*	*48*	*14·9*	*29*	*56*	*5·3*	.	*7*	*50·4*	+ *0·9*
		Dimbó	—	*70*	*47*	*29·3*	—	*2·0*	*70*	*47*	*27·3*	*5*	*55*	*18·8*	.	*7*	*51·5*	—
														(z) =			*49·5*	

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Végeredmények a kiegyenlítés után										Észrevétel
λ illetve v	λ	a sikban számított						oldal-logarithmusa	$\lambda\,\lambda$	
		tájékozási szög			déli irányszög					
		°	′	″	°	′	″			
—	+ 0·4	261	34	29·8	2	15	37·3	3·952 33258	0·16	
—	— 2·2	.	.	27·2	292	0	24·1	4·111 46625	4·84	
+ 3·1	+ 2·1	.	.	31·5	288	2	54·1	3·705 10341	4·41	
—	— 0·8	.	.	28·6	261	34	27·9	3·957 60092	0·64	
+ 2·9	+ 1·9	.	.	31·3	231	10	53·3	3·922 51898	3·61	
—	— 1·6	.	.	27·8	154	5	24·8	3·857 59112	2·56	
—	+ 2·1	306	48	35·1	334	5	24·8	3·857 59112	4·41	
+ 1·1	+ 0·5	.	.	33·5	315	17	32·2	4·054 17509	0·25	
—	+ 0·2	.	.	33·2	306	48	29·5	4·276 46236	0·04	
—	— 0·3	.	.	32·7	293	1	34·8	4·119 55872	0·09	
— 0·1	— 0·7	.	.	32·3	277	17	9·2	3·988 77736	0·49	
—	— 2·5	.	.	30·5	267	23	45·7	4·330 08152	6·25	
—	— 0·0	.	.	33·0	249	52	15·6	4·146 44031	0·00	
+ 2·7	+ 2·1	.	.	35·1	243	38	10·5	3·945 50436	4·41	
—	— 0·9	.	.	32·1	218	41	16·8	4·262 38754	0·81	
			$z=$	33·0						
—	— 1·9	295	7	49·1	169	42	47·7	3·982 96663	3·61	
+ 2·0	+ 0·5	.	.	51·5	80	13	41·7	3·726 59173	0·25	
—	— 2·2	.	.	47·8	69	52	15·6	4·146 44031	10·24	
+ 5·6	+ 4·5	.	.	55·1	29	56	10·0	3·844 46207	20·25	
—	+ 0·5	.	.	51·5	5	55	18·8	4·001 12928	0·25	
			$z=$	51·0					67·57	

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Álláspont	Észlelő 1911-ik évben	Az irányzott pont neve	Irány	A látkörben előlegesen kiegyenlitett irányok			Átvezetés a sikra		A sikra átvezetett irányok			Előlegesen kiszámitott						w
												déli irányszög			tájékozási szög			
				°	′	″	±	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″	
Csáklyai kő	*Szilágyi*	*Nagy hegy*	—	*86*	*49*	*2·3*	+	*3·0*	*86*	*49*	*5·3*	*143*	*17*	*32·0*	*56*	*28*	*26·7*	—
		Tisztás	—	*58*	*39*	*20·9*	+	*1·3*	*58*	*39*	*22·2*	*115*	*7*	*49·3*	.	*28*	*27·1*	—
		Korábia	*28*	*22*	*50*	*8·8*	+	*0·5*	*22*	*50*	*9·3*	*79*	*18*	*41·2*	.	*28*	*31·9*	+ *3·1*
		Dimbó	—	*0*	*0*	*0·0*	—	*0·3*	*359*	*59*	*59·7*	*56*	*28*	*30·2*	.	*28*	*30·5*	—
		Magas csúcs	—	*330*	*23*	*38·5*	—	*1·6*	*330*	*23*	*36·9*	*26*	*52*	*7·9*	.	*28*	*31·0*	—
														(z) =			*28·8*	
Dimbó	*Szilágyi*	*Vulkán*	—	*139*	*2*	*21·2*	+	*2·3*	*139*	*2*	*23·5*	*113*	*1*	*34·8*	*333*	*59*	*11·3*	—
		Csáklyai kő	—	*262*	*29*	*19·2*	+	*0·3*	*262*	*29*	*19·5*	*236*	*28*	*30·2*	.	*59*	*10·7*	—
		Tisztás	—	*211*	*56*	*5·4*	+	*2·0*	*211*	*56*	*7·4*	*185*	*55*	*18·8*	.	*59*	*11·4*	—
		Korábia	*29*	*173*	*56*	*15·9*	+	*1·1*	*173*	*56*	*17·0*	*347*	*55*	*34·1*	.	*59*	*17·1*	+ *5·5*
		Boldogtető	—	*107*	*35*	*14·2*	+	*0·7*	*107*	*35*	*14·9*	*81*	*34*	*27·9*	.	*59*	*13·0*	—
		Bráza	*30*	*81*	*4*	*7·1*	—	*0·2*	*81*	*4*	*6·9*	*55*	*3*	*26·2*	.	*59*	*19·3*	+ *7·7*
		Magas csúcs	—	*0*	*0*	*2·8*	—	*1·6*	*0*	*0*	*1·2*	*333*	*59*	*12·9*	.	*59*	*11·7*	—
														(z) =			*11·6*	
Magas csúcs	*Szilágyi*	*Hajtó*	—	*359*	*59*	*59·0*	+	*0·8*	*359*	*59*	*59·8*	*71*	*34*	*33·5*	*71*	*34*	*33·7*	—
		Boldogtető	—	*40*	*25*	*48·5*	+	*2·5*	*40*	*25*	*51·0*	*112*	*0*	*24·1*	.	*34*	*33·1*	—
		Bráza	*31*	*42*	*58*	*42·0*	+	*1·6*	*42*	*58*	*43·6*	*114*	*33*	*16·1*	.	*34*	*32·5*	— *0·4*
		Vulkán	—	*55*	*13*	*54·4*	+	*4·2*	*55*	*13*	*58·6*	*126*	*48*	*29·5*	.	*34*	*30·9*	—
		Dimbó	—	*82*	*24*	*37·5*	+	*1·6*	*82*	*24*	*39·1*	*153*	*59*	*12·9*	.	*34*	*33·8*	—
														(z) =			*32·9*	

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Végeredmények a kiegyenlítés után										Észrevétel
λ illetve v	λ	a sikban számított						oldal-logarithmusa	$\lambda\,\lambda$	
		tájékozási szög			déli irányszög					
		°	′	″	°	′	″			
—	— 3·0	56	28	26·7	143	17	32·0	4·220 19109	9·00	
—	— 2·6	.		27·1	115	7	49·3	3·957 38213	6·76	
+ 4·5	+ 3·6	.	.	33·3	79	18	42·6	4·075 61347	12·96	
—	+ 0·8	.	.	30·5	56	28	30·2	4·044 76711	0·64	
—	+ 1·3	.	.	36·0	26	52	7·9	4·139 35092	1·69	
			$z =$	30·7						
—	— 0·9	333	59	11·3	113	1	34·8	4·119 55872	0·81	
—	— 1·5	.	.	10·7	236	28	30·2	4·044 76711	2·25	
—	— 0·8	.	.	11·4	185	55	18·8	4·001 12928	0·64	
+ 1·0	+ 0·4	.	.	12·6	147	55	29·6	3.664 70438	0·16	
—	+ 0·8	.	.	13·0	81	34	27·9	3·957 60092	0·64	
+ 3·1	+ 2·5	.	.	14·7	55	3	21·6	3·704 42677	6·25	
—	— 0·5	.	.	11·7	333	59	12·9	3·836 85243	0·25	
			$z =$	12·2						
—	+ 0·9	71	34	33·7	71	34	33·5	4·114 08459	0·81	
—	+ 0·3	.	.	33·1	112	0	24·1	4·111 46625	0·09	
— 0·2	— 0·1	.	.	32·7	114	33	16·3	3·896 24111	0·01	
—	— 1·9	.	.	31·9	126	48	29·5	4·276 46236	3·61	
—	+ 1·0	.	.	3·38	153	59	12·9	3·836 85243	1·00	
			$z =$	32·8					47·57	
								$[\lambda\,\lambda] =$	167·31	

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

eltételi

		+ 0·7	— 0·3	+ 1·5	— 0·5	— 1·3	+ 0·5
	g	*I.*	*II.*	*III.*	*IV.*	*V.*	*VI.*
1	1	+ 1·8	— 0·6				
2	1	+ 0·7	— 3·8				
3	1	— 3·6	— 1·2	+ 3·6	+ 1·2		
5	1	— 1·0	+ 2·1				
	$-\frac{1}{4}$	+ 2·5 — 4·6 — 2·1	+ 2·1 — 5·6 — 3·5	+ 3·6	+ 1·2		
6	1	— 3·6	— 1·2	+ 3·6	+ 1·2		
7	1			+ 2·6	— 1·5		
8	1			+ 0·3	— 1·7		
9	1			— 3·8	— 2·4		
10	1			— 2·9	+ 0·7	+ 2·9	— 0·7
11	1			— 1·6	+ 1·9		
12	1			+ 0·3	+ 2·1		
— 1/7	$-\frac{1}{7}$	— 3·6	— 1·2	+ 6·8 — 8·3 — 1·5	+ 5·9 — 5·6 + 0·3	+ 2·9	— 0·7
13	1			— 2·9	+ 0·7	+ 2·9	— 0·7
14	1					+ 2·3	— 3·3
15	1					— 1·1	— 2·4
16	1					— 1·9	+ 1·3
17	1					+ 1·3	+ 3·9
18	1					+ 1·3	+ 1·3
— 1/6	$-\frac{1}{6}$			— 2·9	+ 0·7	+ 4·8	+ 0·1
19	1					— 1·9	+ 1·3
20	1					+ 1·3	+ 3·9
21	1			— 1·6	+ 1·9		
23	1					+ 1·3	+ 1·3
24	1			+ 0·3	+ 2·1		
25	1	— 1·0	+ 2·1				
26	1	+ 0·7	— 3·8				
27	1			+ 2·6	— 1·5		
28	1			+ 0·3	— 1·7		
29	1			— 3·8	— 2·4		
30	1					+ 2·3	— 3·3
31	1					— 1·1	— 2·4

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

egyenletek.

ω	s	$a\Delta y + b\Delta x = \Delta\delta$	$\Delta\delta + \omega$ $\lambda + \Delta z$	Δz	λ *) és $\lambda + \Delta z$	λ^2 és $(\lambda + \Delta z)^2$
—	— 1·2	+ 1·44	+ 1·44		+ 0·3	0·09
— 1·1	+ 4·2	+ 1·6	+ 0·5	— 1·1	— 0·6	0·36
— 0·9	+ 0·9	+ 2·6	+ 1·7		+ 0·6	0·36
+ 1·9	— 3·0	— 1·33	+ 0·6		— 0·5	0·25
— 4·8	+ 4·8	+ 2·6	— 2·2		— 1·0	1·00
— 7·5	+ 6·4	+ 4·7	— 2·8		— 1·6	2·56
— 2·4	+ 3·8	+ 1·2	— 1·2		—	—
+ 2·3	+ 3·9	— 4·5	— 2·2	+ 1·2	— 1·0	1·00
+ 6·1	— 6·1	— 8·8	— 2·7		— 1·5	2·25
+ 6·5	— 6·8	— 3·4	+ 3·1		+ 4·3	18·49
— 0·1	— 2·3	— 0·6	— 0·7		+ 0·5	0·25
+ 8·3	— 8·3	— 8·8	— 0·5		+ 1·3	1·69
+ 3·3	— 2·3	— 4·6	— 1·3		+ 0·5	0·25
— 2·8	+ 6·3	+ 0·2	— 2·6	+ 1·8	— 0·8	0·64
— 3·2	+ 3·8	+ 3·1	— 0·1		+ 1·7	2·89
— 4·7	— 0·5	+ 0·3	— 4·4		— 2·6	6·76
— 0·8	1·8	— 1·0	— 1·8		—	—
+ 1·0	— 0·4	+ 3·1	+ 4·1		+ 4·1	16·81
+ 2·9	— 8·1	+ 0·3	+ 3·2		+ 3·2	10·24
+ 6·3	— 6·6	— 3·4	+ 2·9		+ 2·9	8·41
+ 2·1	— 4·7	— 1·0	+ 1·1		+ 1·1	1·21
+ 0·7	— 3·1	— 0·6	+ 0·1		+ 0·1	0·01
+ 4·0	— 5·1	— 1·3	+ 2·7		+ 2·7	7·29
+ 0·4	+ 2·7	+ 1·6	+ 2·0		+ 2·0	4·00
+ 0·9	— 2·0	+ 4·7	+ 5·6		+ 5·6	31·36
+ 3·1	— 1·7	+ 1·2	+ 4·3		+ 4·3	18·49
+ 5·5	+ 0·7	— 4·5	+ 1·0		+ 1·0	1·00
+ 7·7	— 6·7	— 4·6	+ 3·1		+ 3·1	9·61
— 0·4	+ 3·9	+ 0·2	— 0·2		— 0·2	0·04
						147·31

*) A tájékozási állandó javitásától mentes λ javítások számitására lásd a 394—395. oldalon mondottakat.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

Normál egyenlet.

	I.	*II.*	*III.*	*IV.*	*V.*	*VI.*	ω	*s*	
		+ 9·178 0698	*+ 9·929 0688*	*+ 9·432 2442*	*— 8·710 7084*	*+ 8·136 6771*	*— 9·683 8362*	*+ 9·397 9400*	
	+ 1·465 3829	— 0·643 4527	— 1·394 4517	— 0·897 6271	+ 0·176 0913	— 9·602 0600	+ 1·149 2191	— 0·863 3229	*I.* = + 0·69
I.	+ 29·2	— 4·4	— 24·8	— 7·9	+ 1·5	— 0·4	+ 14·1	— 7·3	
2		+ 37·7	— 5·8	— 1·8	+ 0·5	— 0·1	+ 21·9	— 48·0	
1		— 0·7	— 3·7	— 1·2	+ 0·2	— 0·1	+ 2·1	— 1·0	
			+ 9·409 5219	*+ 8·908 9196*	*— 8·276 8963*	*+ 7·732 8283*	*— 9·811 9095*		*II.* = — 0·28
		+ 1·568 2017	— 0·977 7236	— 0·477 1213	+ 9·845 0980	— 9·301 0300	+ 1·380 2112	— 1·690 1961	
II.		+ 37·0	— 9·5	— 3·0	+ 0·7	— 0·2	+ 24·0	— 49·0	
3			+ 85·7	+ 8·5	— 13·9	+ 4·0	— 129·2	+ 75·5	
1			— 21·1	— 6·7	+ 1·3	— 0·3	+ 12·0	— 6·3	
2			— 2·4	— 0·8	+ 0·2	— 0·1	+ 6·2	— 12·6	
				— 8·206 2096	*+ 9·299 6313*	*— 8·762 5121*	*+ 0·251 5326*		*III.* = + 1·51
			+ 1·793 7904	+ 0·000 0000	— 1·093 4117	+ 0·556 3025	— 2·045 3230	+ 1·752 8164	
III.			+ 62·2	+ 1·0	— 12·4	+ 3·6	— 111·0	+ 56·6	
4				+ 41·3	+ 3·4	— 1·0	+ 18·8	— 61·3	
1				— 2·1	+ 0·4	— 0·1	+ 3·8	— 2·0	
2				— 0·2	+ 0·1	—	+ 1·9	— 4·0	
3				—	+ 0·2	— 0·1	+ 1·8	— 0·9	*IV.* = — 0·53
					— 9·021 7193	*+ 8·488 1166*	*— 9·828 8911*		
				+ 1·591 0646	+ 0·612 7839	— 0·079 1812	+ 1·419 9557	— 1·833 7844	
IV.				+ 39·0	+ 4·1	— 1·2	+ 26·3	— 68·2	
5					+ 38·8	— 5·2	+ 74·1	— 99·2	
1					— 0·1	—	— 0·7	+ 0·4	
2					—	—	— 0·5	+ 0·9	
3					— 2·5	+ 0·7	— 22·1	+ 11·3	
4					— 0·4	+ 0·1	— 2·8	+ 7·2	*V.* = — 1·28
						+ 9·089 5697	*— 0·127 3582*	*+ 0·345 8375*	
					+ 1·553 8830	— 0·643 4527	+ 1·681 2412	— 1·899 8205	
V.					+ 35·8	— 4·4	+ 48·0	— 79·4	
6						+ 71·4	— 46·9	— 21·8	
1						—	+ 0·2	— 0·1	
2						—	+ 0·1	— 0·2	
3						— 0·2	+ 6·4	— 3·2	
4						—	+ 0·8	— 2·1	*VI.* = + 0·47
5						— 0·5	+ 5·9	— 9·8	
							+ 9·675 6254		
						+ 1·849 4194	— 1·525 0448	— 1·570 5429	
VI.						+ 70·7	— 33·5	— 37·2	
ω							+ 466·3	— 419·1	
1							— 6·8	+ 3·5	
2							— 15·6	+ 31·9	
3							— 198·1	+ 101·0	
4							— 17·7	+ 46·0	
5							— 64·4	+ 106·5	
6							— 15·9	— 17·6	
				$\mu_o = \sqrt{\frac{147·8}{20}} = \pm 2.''7$			+ 147·8	— 147·8	

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

A Földméréstan kézikönyve II. kötetében helyesbítendő hibák.

4. oldal. Felülről a 6. sorban *„liniár“* helyébe *lineár* irandó.
A II. c. alatti utolsó képlet jobb oldalán a harmadik tag számlálója nem $\delta\xi$ hanem $\delta\varsigma$.

28. oldal. Az [1]) alatti lábjegyzetben .... *„az összrendezőben.“* helyett .... *„bármely, 3—4 irányból számított IV. rendü pont végleges összrendezőiben.“* irandó.

39. oldal. A 2. §. címében az *„Egységes“* szó után a *„háromszög-“* szó irandó.

41. oldal. Felülről a 3. sorban *„bevezetett“* helyett *„levezetett“* irandó.

49. oldal. Felülről a 6. sorban a *„feltüntetett“* szó után kinyomot *negativ* szó törlendő.

67. oldal. A lábjegyzet az előző (66.) oldal *) alatti lábjegyzetének folytatása.

99. oldal. Felülről a 12. sorban (5. ábrán ...) helyett (38. ábrán ....) irandó.
Ugyanez a javitás eszközlendő a 102. oldalon alulról a 7. sorban.

109. és 110. oldal. Az $r\varphi$ kifejezésben a φ mindig *indexet* jelent.

112. oldal. 11. egyenletrendszer után az *„amint a“* kifejezés törlendő.

114 - 120. oldalokon a számpéldákban az összes előjelek ugy értelmezendők és alkalmazandók, mintha a számértékek nem logaritmusokat, hanem numerusokat jelentenének.

123. oldal. Felülről a 18 sorban *„végén levő“* helyett *„232. oldalán levő“* irandó.

125. oldal. A III. fokozat 2. sorában *„függelékében“* helyett *„233. oldalán“* irandó.

131. oldal. Felülről a 3. sorban *„d' jelenti“* helyett irandó: *„d' (a gömbi központi szög) jelenti“*.
Alulról a 9. sorban *„180 km“* kijavitandó *„190 km“*-re.

134. oldal. Felülről a 15. sorban *„fohhálózati“* helyett *„fokhálózati“* irandó.

145. oldal. Felülről a 6. sorban *„(5. ábra)“* helyett *„(50. ábra)“* irandó.
A 49. ábrán a C pontból induló ς_0 méret végpontjához K betü irandó.

176. oldal. Felülről a 20. sorban törlendő ez a három szó: ... *akár valódi időt“* ...

177. oldal. Felülről a 7. sorban *„középnek“* helyett *„közép-napnak“* irandó.

179. oldal. A 2. alatti számpéldánál *„időtartam csillagidőben“* helyett *„időtartam középidőben“* irandó.

188. oldalon az utolsó és a **189. oldalon** a harmadik sorban az $S = \ldots$ képlet nevezőjébe z helyett 2 irandó.

205. oldal. Felülről a 15. sorban *„összrendezője“* helyett *„szélessége“* irandó.

208. oldal. Felülről az 5. sorban a *„helyett“* szó helyére *„esetében“* irandó.

209. oldal. Alulról a 6. sorban *„levonásával“* javitandó a *„bevonásával“*-ra.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

221. oldal. Felülről a 20. sorban a d A = . . képletben *sin α* helyett *sin A* írandó.

Felülről a 21. sorban pedig beírandó:

. . . szög, ahol $\cos q = \cos A \cos t + \sin A \sin t \sin \varphi$

$$\text{és } \sin q = \frac{\cos \varphi}{\cos \delta} \sin A.$$

224. oldal. A 8. sor utolsó tagjában $^1/_2 p^3$ . . . helyett $^1/_3 p^3$ . . . irandó.

225. oldal. Felülről a 18—19. sorban (. . .) közt tett megjegyzéshez lábjegyzetként írandó: *) Minden egyes irányzásnál a tengely libellát leolvassuk mindkét állásában.

230. oldal. Felülről a 4. sorban *chromograph* helyett *chronograph* írandó.

Felülről a 9. sor után lábjegyzetnek írandó: *) *Ez a módszer akkor előnyös, ha több állomáson történik egyszerre a hosszúságmérés.*

231. oldal. Felülről a 7. sorban ez a két szó *„tetszőleges közelítéssel"* zárjelekbe teendő.

250. oldal. A 20. és 21. alatti képletcsoportok *utolsó* oszlopának tagjai elé mindenütt a + helyébe — előjel írandó.

281. oldal. Felülről a 4. sorban *33. oldal* helyett 276. oldal írandó. Ugyanez a javítás eszközlendő a 290. oldalon felülről a 9. sorban.

M. kir. állami nyomda. Budapest.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

ORSZÁGOS ERDÉSZETI EGYESÜLET
1851
/1866/

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

MAGYAR ERDÉSZETI EGYESÜLET
1851
1866/1931

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.

ORSZÁGOS ERDÉSZETI EGYESÜLET
1851
1866/1981

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2022. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/127/2022.