

OEE Könyvtár
Áll. Ell. 2020

G E O D É Z I A

I. Rész

Országos Erdészeti Egyesület Wagner Károly Erdészeti Szakkönyvtár	
Leletési szám:	231/2011
Csoport szám:	J -
Értékelési szám:	SV III

Sébor János

egy. ny. r. tanár előadásai

Jegyzet

Sopron, 1949.

Kiadja a MEFESZ Soproni Technikus Köre, F.k.Sébor János

MEFESZ Sokszorosító, Bp.VIII., Üllői ut 8. F.v. Farkas Imre.



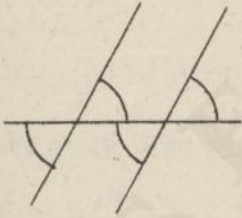
Bevezetés.

A földméréstan, más néven geodézia az a mérnöki tudomány, mely a Föld felszínén lévő természetes képződmények /hegyek, folyók, stb./ és mesterséges létesítmények /utak, építmények, birtokhatárok, stb./ vízszintes és magassági felmérésével, valamint azok térképezésével foglalkozik.

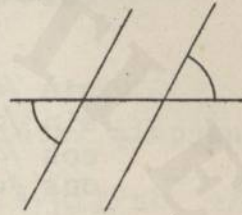
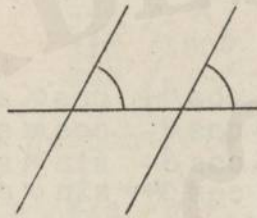
A mérőműszerek elmélete, a mérési eljárások és a mért adatok kidolgozása egyaránt a matematika szabályain alapszik, ezért bevezetőben a geodéziában alkalmazott matematikai tételeket fogom röviden összefoglalni.

Két szög egyenlő ha

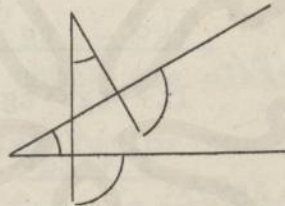
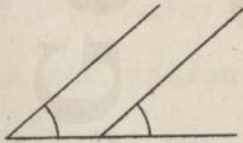
1./ Csúcsszögek,



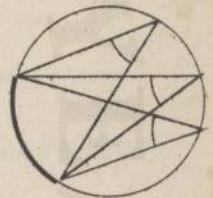
2./ Megfelelő szögek 3./ Váltószögek



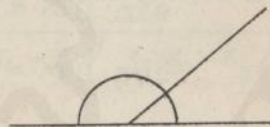
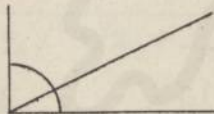
4./ Párhuzamosszáru szögek 5./ Merőlegesszáru szögek



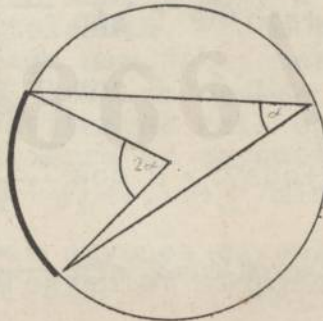
6./ Ugyanazon köríven nyugvó kerületi szögek



90° -ra ill. 180° -ra egészítik ki egymást a pót- ill. kiegészítő szögek.

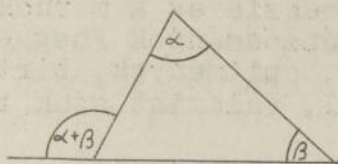


Bármely körívhez tartozó központi szög kétszerese az ugyanazon köríven nyugvó kerületi szögnek:



Sokszögek belső szögeinek összege: $(n - 2) \cdot 180^\circ$, külső szögeinek összege pedig $(n + 2) \cdot 180^\circ$, hol n a sokszög szögeinek a számát jelenti.

A háromszög bármely külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével:



A trigonometria alapképletei:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg} (\alpha + 45^\circ) = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Kiszámíthatjuk a háromszög többi alkotórészét, ha ismerünk:

- 1./ egy oldalt és a rajta fekvő két szöget;
- 2./ Két oldalt és az egyikkel szemben fekvő szöget, a sinus-tétel segítségével:

$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = a : b : c$$

Kiszámíthatjuk a háromszög harmadik oldalát, ha ismerjük két oldalát és a közbezárt szöget a cosinus-tétel alapján:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Bármely szög főfüggvénye egyenlő pótszögének pótfüggvényével:
 sin. pótfüggvénye cos. és viszont,
 tg - " - ctg - " -

A szögfüggvények előjeleinek változása a negyedek szerint

negyed =	I	II	III	IV
sinus	+	+	-	-
cosinus	+	-	-	+
tangens	+	-	+	-
cotangens	+	-	+	-

$$\begin{aligned} \sin /-\alpha/ &= -\sin \alpha \\ \sin /180^\circ - \alpha/ &= \sin \alpha \\ \cos /-\alpha/ &= \cos \alpha \end{aligned}$$

Kéttaguak hatványai a Newton-féle binomiális tétel alapján:

$$/a + b/^\sim = a^\sim + / \frac{n}{1} / a^{\sim-1} b + / \frac{n}{2} / a^{\sim-2} b^2 + \dots + / \frac{n}{n-2} / a^2 b^{\sim-2} + / \frac{n}{n-1} / a b^{\sim-1} + / \frac{n}{n} / b^\sim$$

hol pl. $/ \frac{n}{2} / = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$

$$\text{Pl. } \sqrt{a+b} = /a+b/^\frac{1}{2} = a^\frac{1}{2} + / \frac{1}{2} / a^{\frac{1}{2}-1} b + \dots = \sqrt{a} + \frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{a}} + \dots$$

* ha a sor erősen konvergál, a többi tag elhanyagolható.

Kétváltozós függvények hatványai Taylor-sor szerint sorbafejtve:

$$f /x+\Delta x, y+\Delta y/ = f /x, y/ + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \dots *$$

* ha x és y kis értékek, akkor a többi tag elhanyagolható.

$$\begin{aligned} \text{Pl. h } \sqrt{/y_0 + \Delta y - y_A/^\frac{1}{2} + /x_0 + \Delta x - x_A/^\frac{1}{2}} &= \sqrt{/y_0 - y_A/ + /x_0 - x_A/^\frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{2(y_0 - y_A)\Delta y}{2\sqrt{(y_0 - y_A)^2 + (x_0 - x_A)^2}} + \frac{2(x_0 - x_A)\Delta x}{2\sqrt{(y_0 - y_A)^2 + (x_0 - x_A)^2}} \end{aligned}$$

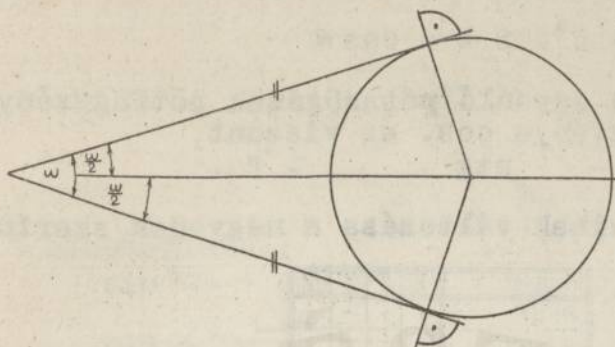
A Gauss: legkisebb négyzetek elve az, hogy a javítások négyzeteinek összege egy minimum kell legyen ahhoz, hogy a keresett függvény a legjobban megfeleljen a feltételeknek. Pl. n ponton át egyenes fektetendő. Az egyes pontok azonban nem fekszenek egy egyenesben, s így a megoldás az az egyenes lesz, mely az összes pontot legjobban megközelíti, vagyis a pontokat javítanunk kell egy-egy értékkel ahhoz, hogy egy egyenesbe kerüljenek. Erre az egyenesre nézve áll, hogy:

$$S_{\min.} = / \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \dots + \delta_n^2 / \min.$$

A értékek ebben az esetben az egyenes egyenletében szereplő m és n értékétől függ az y mx + n egyenlet alapján. A legmegfelelőbb egyenesre áll: $\frac{\partial S}{\partial m} = 0$ és $\frac{\partial S}{\partial n} = 0$

Ebből a két egyenletből m és n értéke kiszámítható.

A körön kívülfekvő pontból húzható két érintőre mérve fennáll, hogy a két érintő hossza egyenlő és az érintési pontba húzható sugár merőleges az érintőre. A kívülfekvő ponton és a kör középpontján átmenő egyenes felezi az érintők által bezárt ω szöget:

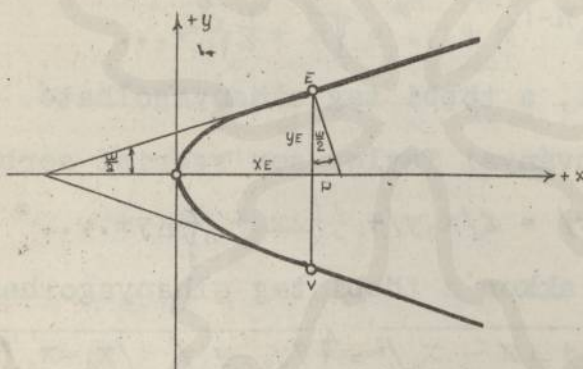


A parabola érintőjének hajlásszöge:

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{y_E}{2x_E}$$

Az érintési pontban állított normálisra pedig áll, hogy

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{p}{y_E}$$



Hibaszámitás.

A földmérésben szereplő hossz és szögméréseket az ember végzi műszer segítségével.

Az ember a műszer beállítását, leolvasását végzi: mindkettőt a szeme segítségével. Azonban a szem csalhat, miáltal hiba származik. De hibát adhat az ember figyelmetlensége, gondatlansága is. Maga a műszer sem méri a valódi hosszakat, szögeket. Minden műszer u.i. egy bizonyos pontoságig képes csak az értékeket megadni, azon túl legfeljebb becsülhetünk, kis értékeknél: /0.01 m/m, 1"/ pedig már azt sem tehetjük.

Rögzítsünk pl. egy hosszat két lepikirozott pont segítségével. A távolságot nóniuszos vonalzóval, vagy letoló-háromszögekkel. /1. felhordó műszerek. II.rész./ mérjük. Végezzük első méréstünket szabadszemmel: ekkor a két pontot közel matematikai pontnak látjuk. Ha a következő beállítást kézinagyító /lupe/ segítségével végееzzük, a pontok helyén már kis lyukat látunk, melynek látszólagos középpontjától mérjük a hosszúságot. Még pontosabb lesz a méréstünk, ha nagyító helyett mikroszkópot alkalmazunk.

Az eddig elmondottakból látszik, hogy méréseink pontosságát bizonyos határok között növelni tudjuk. Ha ezeket a határokat a végtelenig ki tudnánk tolni, vagyis végtelen pontosságú műszereket tudnánk készíteni, akkor abszolút pontosan tudnánk mérni. Ezt azonban sohasem fogjuk elérni, s így sohasem fogunk abszolút helyesen mérni tudni. Ha pedig nem az abszolút helyes értéket mérjük, akkor hibát követünk el, mérésünk hibás. Nagyon ritkán fordul elő, hogy két mérés alatt ugyanazt a hibát kövessük el, s ezáltal egyenlő - bár hibás - értéket mérünk. Rendszerint minden mérésre egymástól kis értékekben különböző eredményt kapunk. A mi feladatunk mármost az, hogy a mért hibás értékből egy olyan értéket számítsunk ki, amely legjobban megközelíti az abszolút helyes értéket, s ezt nevezzük valószínű helyes értéknek. A valószínű helyes értéket azonban csak úgy tudjuk számítani, ha ismerjük a hibák keletkezésének okait, vagy is magukat a hibákat.

Láttuk már, hogy minden mérés hibákkal van terhelve. Ezek a műszer hibáiból, a megfigyelő egyéni hibáiból és számos más, ki nem kerülhető körülményből származnak. A hibák lehetnek:

1./ Durva hibák: a megfigyelő hibájából származnak. Ezek elkerülhetők, sőt elkerülendőek: elfogadható mérés illet nem tartalmazhat. Durva hibát követünk el pl. szalag-méréseknél a szalaghosszak számának rossz bejegyzésével $/10^0$ vagy 20 m a hiba 1 szalaghossz tévedés esetén/, a szalaghossz tört részeinek hibás leolvasásával /kétoldalt osztott szalagnál könnyen előfordul, hogy a szalag közepén 4^0 helyett 6^0 -et olvasunk le és viszont./ Szögméréseknél durva hibát ad az osztott-körrel hibás irányban leolvasott szögérték, stb.

2./ Szabályszerű vagy szisztematikus hibákra jellemző, hogy állandóan vagy $/+ /$, vagy $/- /$ jellel lépnek fel. A szisztematikus hibák műszerhibákból származnak. Ilyen eset pl. az, amikor más a szalag névleges és tényleges hossza. Ez előállhat a szalag hűközta kitágulása folytán, vagy szakadt szalag rossz összekötéséből stb. A szisztematikus hibák előjele mindig megállapítható és így a belőlük származó hibák kiküszöbölhetők.

3./ Vannak végül szabálytalan hibák. Előjelük változó. Ezek ki nem küszöbölhetők, nagyságuk a műszer pontosságától, az egyén megfigyelőképességétől és számtalan, számításba be nem vonható mellékkörülménytől függenek. Értékük pontos műszerrel, gondos munkával csökkenthető.

Egyszeri mérés után a pontosság bizonytalan: durva hiba még lehetséges. Ennek elkerülésére minden mérést legalább kétszer kell végezni. A két mérés eredménye közti eltérés nem léphet túl egy bizonyos maximumot, melynek nagysága a mérés céljától, pontosságától függ. Ez a maximum rendszerint adva van /pl. hossz-méréseknél: $h/2000$./ Azt a számítási eljárást, amellyel ugyanazon mérésnek ismétléséből származó több hibás értékből kiszámítjuk a legvalószínűbb helyes értéket, ki-egyenlítő-számításnak hívjuk. Kiegyenlítő számításról csak akkor lehet szó, ha u.a. az értéket többször határoztuk meg.

Ha pl. egy távolságra "n" értéket határoztunk meg, mivel elméletileg a távolságnak csak egy érték felelhet meg, $/n-1 /$ fölös megfigyelésünk van. Az "n" megfigyelésből később tárgyalandó módon kiszámíthatjuk a valószínű helyes értéket. A megfigyelt értékek eltérése a valószínű helyes értéktől a megfigyelések hibája. Ha a megfigyeléseket a valószínű helyes érték szerint korrigálni akarjuk, javításokat kell azokon eszközölnünk. A javítások értéke megfigyelésenként változik, mindig a hibával egyenlő nagyságú, de ellentétes előjelű. Ennek megértésére szolgáljon a következő megfontolás: méter-rudunk névleges hossza 1 m., tényleges hossza azonban csak 98 cm. - hibája tehát - 2 cm. A javítás, mellyel 1 m-re egészítjük ki + 2 cm.

A javítás tehát az az érték, melyet a megfigyelt értékhez kell adni, hogy a valószínű helyes értéket kapjuk. Jelöljük "x"-el a valószínű helyes értéket,

"o"-val a megfigyelt értéket és
"v"-val a javítást /korrekciót/

akkor írhatjuk, hogy

$$x = o + v$$

"n" számú megfigyelés esetén pedig

$$x = o_1 + v_1 \quad \text{innen} \quad v_1 = x - o_1$$

$$x = o_2 + v_2 \quad - \quad v_2 = x - o_2$$

$$x = o_3 + v_3 \quad - \quad v_3 = x - o_3$$

$$\dots \dots \dots - \quad \dots \dots \dots$$

$$x = o_n + v_n \quad - \quad v_n = x - o_n$$

"v" értéke, ha "x"-et ismerem, könnyen meghatározható, és

lehet, tehát akár $+/-$, akár $-/-$ előjelű. A javítás egyébként mindig egy különbséggel egyenlő, melyben a kisebbítendő a valószínű helyes érték, a kivonandó pedig a megfigyelt érték.

A kiegyenlítő-számítás feladata tehát a valószínű helyes értéknek, a valószínű helyes érték középhibájának, végül az egyes megfigyelések középhibájának meghatározása.

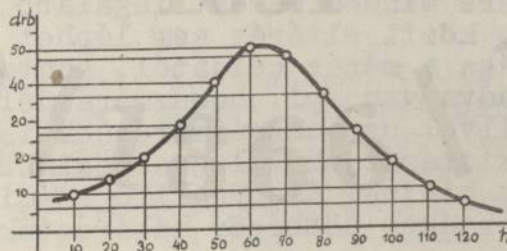
A valószínű helyes érték számítása a valószínűségi számításra alapszik és a Gauss: legkisebb négyzetek elvének alapján történik. Ennek előnye az, hogy a hibák /ill. javítások/ előjelben való különbözőségét kiküszöböljük. Egyenlete:

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2 = \sum v^2 = \min = [vv]$$

A fenti egyenletben "n" a megfigyelések számát jelenti. Minél nagyobb érték az "n", annál közelebb lesz a valószínű helyes érték az abszolút helyes értékhez. Ha most "n" megfigyelésünkből az egyenlő eredményeket összeszámoljuk és az adatok alapján grafikont készítenek, valószínűségi- vagy haranggörbét kapunk.

Pl. mért értékeink a következőképpen voltak csoportosíthatók:

h = 1.4271 m ... 10 db	1.4275 m ... 40 db	1.4279 m ... 26 db
= 1.4272 " ... 14 "	1.4276 " ... 50 "	1.4280 " ... 17 "
= 1.4273 " ... 19 "	1.4277 " ... 46 "	1.4281 " ... 10 "
= 1.4274 " ... 28 "	1.4278 " ... 36 "	1.4282 " ... 6 "



Ha ezt végtelen sok megfigyelés alapján szerkesztettük volna meg, akkor a haranggörbe kulminációs pontja az abszolút helyes értéket adná. Mivel azonban végtelen sok megfigyelést nem végezhetünk, azért görbénk sem adhatja az abszolút helyes értéket.

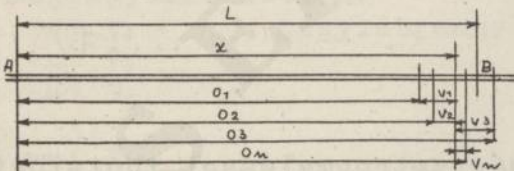
Magát a kiegyenlítő számítását feloszthatjuk aszerint, hogy a mért értékek milyen összefüggésben vannak egymással, ill. a keresett értékkel. Eszerint megkülönböztetünk: 1./ közvetlenül mért értékek kiegyenlítését /pl. szalaggal mért hossz.

- 2./ közvetve mért értékek - közvetett megfigyelések - kiegyenlítését /pl. optikai uton mért hossz./
- 3./ egymástól függő értékek kiegyenlítését /pl. háromszög, vagy sokszög belső szögei/.

Világos, hogy kedvezőbb körülmények között, gondosabb munkával pontosabb mérést tudunk végezni, mint ellenkező esetben. A kiegyenlítő számításban erre is figyelemmel kell lenni, mégpedig azért, hogy a pontosabb mérés eredményét értékesebbnek, nagyobb súlyúnak tekintjük, mint a kevésbé pontos mérését. A mérések súlyát viszonyyszámmal fejezzük ki, amikor is a legkisebb pontosságu mérés súlyát 1-nek vesszük. Az eredményeket pedig súlyaik arányában vesszük figyelembe.

Az előbb tárgyalt három kiegyenlítési mód szerint megoszlik, amint egyenlő vagy különböző súlyu megfigyelésekről van szó.

1./ Közvetlen, egyenlő súlyu megfigyelések kiegyenlítése.



AB távolságot "n"-szer mértük és kaptuk az $o_1, o_2, o_3, \dots, o_n$ megfigyeléseket. A távolság abszolút pontos hossza "L", valószínű helyes hossza pedig "x". Megfigyeléseink $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ javításokkal adják a valószínű helyes hossz értéket.

Az ábrából látható, hogy :

$$\begin{aligned} x &= o_1 + v_1 & \text{innen} & & v_1 &= x - o_1 \\ x &= o_2 + v_2 & & & v_2 &= x - o_2 \\ x &= o_3 + v_3 & & & v_3 &= x - o_3 \\ &\dots\dots\dots & & & \dots\dots\dots & \\ x &= o_n + v_n & & & v_n &= x - o_n \end{aligned} \quad \dots\dots 1./$$

Tudjuk, hogy a valószínű helyes értékre nézve fennáll a következő:

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2 = \mathcal{J}_{\min} \quad \dots\dots 2./$$

A képletben min summa minimum azt jelenti, hogy az összeg minimumát keressük. A minimumot úgy számítjuk, hogy az első differenciálhányadost nullával tesszük egyenlővé. Az 1./ alatti "v" értékeket a 2./-vel jelölt egyenletbe helyettesítve:

$$/x - o_1/ + /x - o_2/ + /x - o_3/ + \dots + /x - o_n/ = \mathcal{J}_{\min} \quad \dots\dots 3./$$

egyenletet kapjuk. Ezt "x" szerint differenciálva:

$$2/x - o_1/ + 2/x - o_2/ + 2/x - o_3/ + \dots + 2/x - o_n/ = 0 \quad \dots\dots 4./$$

Innen kifejezve "x"-et kapjuk, hogy

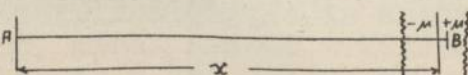
$$n x = o_1 + o_2 + o_3 + \dots + o_n = [o] \quad \text{továbbá}$$

$$x = \frac{[o]}{n} \quad \dots\dots I.$$

Látjuk tehát, hogy a valószínű helyes érték egyenlő a megfigyelések számtani közepével. Ha a 4./-es egyenletbe újra a "v"-k értékeit helyettesítjük, kapjuk az első ellenőrző-egyenletet:

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = 0$$

A valószínű helyes érték is hibával van terhelve, ez azonban nagyon kis érték. Meghatározni - éppen mert az abszolút helyes értéket nem ismerjük - nem tudjuk. Így a valószínű helyes érték hibájáról nem is beszélünk, hanem csak középhibájáról, melyen azt a két határt értjük,



amelyek között a hiba van. A két határ a valószínű helyes értéktől egyenlő távolságra van: abszolút értékük egyenlő, csak előjelben

különböznek egymástól. Ezekután, ha a valószínű helyes érték hibáját egyenlettel akarjuk kifejezni, a hiba helyett azokat a határokat kell fölírunk, amelyek között a hiba van. Vagyis:

A javítási egyenletekhez hasonlóan kifejezhetjük a megfigyelések eltérését az abszolút helyes értéktől is /w./

$$L - x = \pm \mu$$

.... 5./

$$L - o_1 = l_1$$

$$L - o_2 = l_2$$

$$L - o_3 = l_3$$

$$\dots\dots\dots$$

$$L - o_n = l_n$$

.... 6./

Összegezve: $n L - [o] = [l]$, innen $L = \frac{[o]}{n} = \frac{[l]}{n}$ de a I.-es egyenlet alapján $\frac{[o]}{n} = x$ értéket behelyettesítve:

$$L - x = \frac{[l]}{n}$$

Az 5.-ös egyenlet szerint viszont $L - x = \pm \mu$, vagyis végeredményben

$$\pm \mu = \frac{[l]}{n}$$

.... 7./

Kifejtve:
$$\mu = \frac{\pm l_1 \pm l_2 \pm l_3 \dots \pm l_n}{n}$$

Az előjelből származó bizonytalanságot négyzetreemeléssel tüntethetjük el:
$$\mu^2 = \frac{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + \dots + l_n^2}{n^2} = \frac{2/l_1 l_2 + l_1 l_3 + \dots + l_1 l_n + \dots + l_{n-1} l_n}{n^2}$$

Ha $n = \infty$ a megfigyelések száma, akkor - mivel a "l"-k a haranggörbe által adott értékek, a görbére nézve pedig jellemző, hogy az inflexiós ponttól jobbra és balra eső terület - és ezáltal a "l" értékek is - egyenlő, csak előjelben különbözik s ezért kell, hogy a kéttagu szorzatok $+/-$ előjelű része ugyanakkora legyen, mint a $-/-$ előjelű rész, s így összegük 0. Vagyis:

$$2/l_1 l_2 + l_1 l_3 + \dots + l_1 l_n + l_2 l_3 + l_2 l_4 + \dots + l_2 l_n + \dots + l_{n-2} l_{n-1} + l_{n-2} l_n + l_{n-1} l_n = 0$$

Eszerint a négyzetes egyenlet így alakul:

$$\mu^2 = \frac{[l \ l]}{n^2}$$

.... 8./

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[l \ l]}{n}}$$

.... 8/a.

A 8/a., képletben " μ "-t egy olyan értékkel $/[l \ l]/$ fejeztük ki, melyet nem ismerhetünk. Mindazonáltal ki tudjuk " μ "-t számítani, mert a $[l \ l]$ helyébe tehetünk egy olyan értéket, mely azt nagyon kis hibával megközelíti. Ezt az értéket a következő elgondolás alapján kapjuk: "x" a megfigyelt értékek számtani közepe, következésképp kell, hogy "x" középhibája is számtani középértéke legyen az egyes megfigyelések középhibáinak $/m_1 m_2 m_3 \dots m_n/$.

Az egyes megfigyelések középhibáján $/m/$ alatt értjük az egyes megfigyelések közepeltérését, a valódi L értéktől "m" nyerhető, tehát ha a $[l \ l]$ -t az összes n megfigyelésre, egyenlően elosztjuk. Lesz tehát: $n \cdot m^2 = [l \ l]$ tehát 8/b.,

$$m = \pm \sqrt{\frac{[l \ l]}{n}}$$

.... 9./

8./-ből
$$\mu^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{[l \ l]}{n}$$

8/b.-ből:

$$m^2 = \frac{[1 \ 1]}{n}$$

ezt behelyettesítve:

$$\mu^2 = \frac{1}{n} \cdot m^2 = \frac{m^2}{n}$$

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

.... 10./

Az " μ " és " m " meghatározásából csakugy, mint a 10./-es képletből világosan kitűnik, hogy szükségképen $\mu < m$. Az 5./-ös képlet így szól: $L - x - \mu$; az 1./-es alapján viszont $x = o + v$; Ha most ezt az x értéket behelyettesítjük, lesz:

$$L - /o+v/ = L - o - v = \mu$$

$$L - o = \mu + v$$

De a 6./-os képletből tudjuk, hogy $L - o = 1$, vagyis:

$$1 = \mu + v$$

.... 11./

"n" megfigyelés esetén:

$$\begin{aligned} l_1 &= \mu + v_1 \\ l_2 &= \mu + v_2 \\ l_3 &= \mu + v_3 \\ &\dots\dots\dots \\ l_n &= \mu + v_n \end{aligned}$$

négyzetreemelve:

$$\begin{aligned} l_1^2 &= \mu^2 + 2\mu v_1 + v_1^2 \\ l_2^2 &= \mu^2 + 2\mu v_2 + v_2^2 \\ l_3^2 &= \mu^2 + 2\mu v_3 + v_3^2 \\ &\dots\dots\dots \\ l_n^2 &= \mu^2 + 2\mu v_n + v_n^2 \end{aligned}$$

$$\text{összegezve pedig: } [1 \ 1] = n\mu^2 + 2\mu[v] + [v \ v] \dots\dots 12./$$

Tudjuk azonban az első ellenőrző képletből, hogy $[v] = 0$, vagyis a 12./ képlet valódi alakja:

$$[1 \ 1] = n\mu^2 + [v \ v]$$

.... 13./

Másrészt pedig a 9./ alapján:

$$m^2 = \frac{[1 \ 1]}{n} = n\mu^2$$

$$[1 \ 1] = m^2 n$$

13./-ből:

$$[1 \ 1] = \frac{[1 \ 1]}{n} + [v \ v]$$

$$n [1 \ 1] - [1 \ 1] = n [v \ v]$$

$$/n - 1/ [1 \ 1] = n [v \ v]$$

$$[1 \ 1] = \frac{n}{n - 1} [v \ v]$$

$$8./ \text{ szerint: } \mu^2 = \frac{[1 \ 1]}{n^2}$$

a $[1 \ 1]$ értékét ebbe

$$\text{behelyettesítve: } \mu^2 = \frac{1}{n^2} \frac{n}{n-1} [v \ v] = \frac{[v \ v]}{n(n-1)}$$

$$\text{Végül innen } \mu = \pm \sqrt{\frac{[v \ v]}{n(n-1)}}$$

.... II.

Ebben a képletben már minden tag ismert, tehát " μ " ennek alapján számítható. Ha pedig a 9./-es képletbe helyettesítjük a $[1 \ 1]$ értékét, akkor az egyes megfigyelések középhibáját kapjuk:

$$m^2 = \frac{[1 \ 1]}{n} = \frac{1}{n} \frac{n}{n-1} [v \ v] = \frac{[v \ v]}{n-1}$$

$$\text{Végül innen: } m = \pm \sqrt{\frac{[v \ v]}{n-1}}$$

.... III.

A középhibák μ és m alapján a mérések, ill. a valószínű helyes érték megbízhatóságát is meghatározhatjuk. A megbízhatóság annál nagyobb, minél kisebb a középhiba, más szóval minél közelebb van egymáshoz az a két határ, melyek között a hiba mozog.

A valószínű helyes érték megbízhatósága:

$$H = \frac{1}{\mu}$$

.... IV.

Az egyes megfigyelések megbízhatósága pedig:

$$h = \frac{1}{m}$$

.... V.

De a 10./-es képlet alapján.

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{n}}, \text{ más alakban } \frac{1}{\mu} = \sqrt{n} \frac{1}{m}$$

honnan:

$$H = \sqrt{n} h$$

.... VI.

A valószínű helyes érték megbízhatósága tehát egyenesen arányos a megfigyelések számából vont négyzetgyökkel.

A megfigyelések középhibájának változása a megfigyelések számának változása mellett.

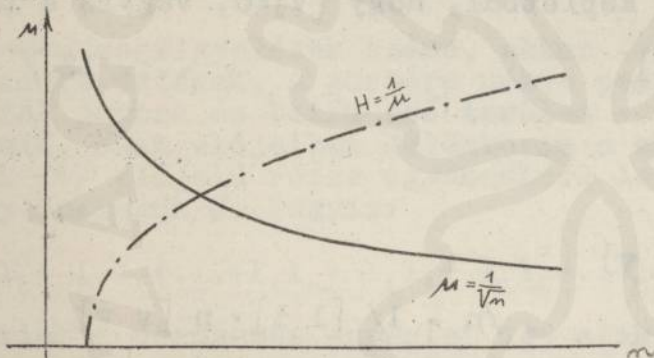
$$\mu = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

ha most $m = 1$ -et veszünk fel és az így kapott

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

képletben "n" helyébe értékeket helyettesítünk, akkor egy oly görbét szerkeszthetünk, a kapott " μ " értékek alapján, melyről az összefüggéseket le lehet olvasni.

n	1	2	3	4	5	6	8	10	12	20	24
$\mu = \frac{1}{\sqrt{n}}$	1.00	0.71	0.58	0.50	0.45	0.41	0.35	0.32	0.28	0.22	0.20



A fenti adatokból megszerkesztett görbéről látható, hogy a megbízhatóság a megfigyelések számával együtt nő, a középhiba pedig előbb rohamosan, utóbb mind lassabban csökken.

A gyakorlatban végzett megfigyelések száma:

közönséges mérésnél	n= 2
pontosabb "	n= 4
alsórendű háromszögelésnél	n= 6
középrendű "	n=12
felsőrendű "	n=24

24-nél több megfigyelést csak tudományos vizsgálatoknál végzünk.

A kiegyenlítő számítás műveleteit mindig táblázatokba foglaljuk, ugyanígy az eredményeket is táblázatokban tüntetjük fel.

Példa az egyenlő-súlyú, közvetlen megfigyelések kiegyenlítésére.

Egy távolságot $n = 5$ -ször mértünk meg. Kérdés, mi lesz a távolság valószínű helyes hosszértéke, a valószínű helyes érték és az egyes megfigyelések középhibája és megbízhatósága, végül mekkora a valószínű helyes érték egységreeső vagyis relatív hibája?

A számítás egyszerűsítése céljából a megfigyelt értékeket egy állandó/o. és egy változó/o./részre bontjuk

sz	$0m$	$0'$	$0''$	$x - 0'' = \Delta x - 0''$	vv	jegyzet.
1	493.673	0.003	3	+0.001	0.000.001	
2	493.676	0.006	6	-0.002	0.000.004	
3	493.671	0.001	1	+0.003	0.000.009	
4	493.674	0.004	4	0.000	0.000.000	
5	493.676	0.006	6	-0.002	0.000.004	
		$[0']$		$[v]$	$[vv]$	
		0.020		0.000	0.000.018	

$0 = 0_0 + 0'$; $0_0 = 493.670$ $0'' = 10^{-3} 0'$: a változó rész más

$$x = 0_0 + \Delta x; \Delta x = \frac{[0']}{n} = \frac{0.020}{5} = 0.004 \text{ jelölése.}$$

$$x = 493.670 + 0.004 = 493.674 \text{ m.}$$

A $[v] = 0$ értékben néha a $[0']$ osztás kikerekítései folytán 1-2 tizedesnyi hiba lehetséges. Ennek csökkentésére az osztást egy tizedessel pontosabban végezzük, mint amilyenre "v"-t számítjuk. A valószínű helyes érték középhibája:

$$\mu = \frac{\sqrt{[vv]}}{n/n-1} = \frac{\sqrt{0.000.018}}{5 \times 4} = \pm 0.00094 \text{ m} = \pm 0.94 \text{ m/m}$$

Ezek szerint a valószínű helyes érték:

$$x = 493.674 \pm 0.00094 \text{ m}$$

Az egyes megfigyelések középhibája:

$$m = \mu \sqrt{n} = 0.94 \cdot \sqrt{5} = 2.0 \text{ m/m}$$

A valószínű helyes érték megbízhatósága:

$$H = \frac{1}{\mu} = 1 \text{ m/m}$$

Az egyes megfigyelések megbízhatósága pedig:

$$h = \frac{1}{m} = 0.5 \text{ m/m}$$

A hosszegységre eső vagy relatív hibát kapjuk, ha az egész hibát az egész hosszára elosztjuk, vagyis:

$$\frac{\mu}{x} = \pm \frac{0.00094}{493.674} = \pm \frac{1}{493.674 \cdot 0.00094} = \frac{1}{500.000}$$

A relatív hibát mindig arányalakban írjuk fel.

b./ Különböző súlyu, közvetlen megfigyelések kiegyenlítése.

Egy távolságot megmértünk, mérőrudakkal, acélszalaggal, precíziós optikai távolságmérővel, stb. Eredményül $o_1, o_2, o_3, \dots o_n$ megfigyeléseket kaptuk. Ezek közül természetesen a mérőrudakkal végzett o_1 megfigyelés a legpontosabb, tehát o_1 súlya lesz a legnagyobb. A bevezetésből már tudjuk, hogy minél nagyobb egy mérés pontossága, ezzel együtt minél nagyobb a megbízhatósága - röviden minél kisebb a középhibája, annál nagyobb a mérés súlya.

A különböző súlyu megfigyeléseket visszavezetjük egyenlő súlyuakra, vagyis olyanokra, melyekre nézve a különböző súlyu megfigyelések valószínű helyes értéke egyenlő az egyenlősúlyu megfigyelések középértékével, vagyis az " μ " mindkét esetben ugyanaz - ekkor pedig kell, hogy a javítások és a megfelelő középhibák között egyenes arány álljon fent:

$$v_1 : v_2 : v_3 : \dots : v_n = m_1 : m_2 : m_3 : \dots m_n \quad \dots 1./$$

A javításokat ugyanugy írhatjuk fel, mint egyenlősúlyu megfigyelések esetén:

$$v_1 = x - o_1$$

$$v_2 = x - o_2$$

$$v_3 = x - o_3$$

$$\dots\dots\dots$$

$$v_n = x - o_n$$

.... 2./

Ha most különböző súlyu megfigyeléseinket egyenlő súlyuakká.

Átalakítottaknak tekintjük, más lesz azoknak javítása /jelöljük: v' / és más lesz az egyes megfigyelések középhibája: m_o . Éspedig

$$v'_1: v_1 = m_o: m_1$$

$$s \text{ innen } v'_1 = \frac{m_o}{m_1} v_1$$

$$v'_2: v_2 = m_o: m_2$$

$$v'_2 = \frac{m_o}{m_2} v_2$$

$$v'_3: v_3 = m_o: m_3$$

$$v'_3 = \frac{m_o}{m_3} v_3$$

.... 3./

$$\dots\dots\dots$$

$$v'_n: v_n = m_o: m_n$$

$$v'_n = \frac{m_o}{m_n} v_n$$

Az így kapott " v' " értékek most már egyenlősúlyu megfigyelésekre vonatkoznak, s mint ilyenekre áll, hogy

$$[v'v'] = J_{\min}$$

.... 4./

Kifejtve a 3./ alatti értékek alapján:

$$\left(\frac{m_o}{m_1}\right)^2 v_1^2 + \left(\frac{m_o}{m_2}\right)^2 v_2^2 + \left(\frac{m_o}{m_3}\right)^2 v_3^2 + \dots + \left(\frac{m_o}{m_n}\right)^2 v_n^2 = J_{\min}$$

A súlyok fogalmából következik, hogy

$$\frac{m_o^2}{m_1^2} = p_1; \frac{m_o^2}{m_2^2} = p_2; \frac{m_o^2}{m_3^2} = p_3; \dots \frac{m_o^2}{m_n^2} = p_n$$

.... 5./

A súly tehát egy törttel egyenlő, melynek számlálója az elképzelt egyenlősúlyu megfigyelések középhibájának négyzete, a nevező pedig ugyanezen mérésnek megfelelő különböző-súlyu megfigyelések középhibájának négyzete.

$$Vagyis \quad p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 + \dots + p_n v_n^2 = J_{\min}$$

$$[p v v] = J_{\min}$$

.... 6./

Az 5./ alatti képletekből:

$$m_1 = \frac{m_o}{\sqrt{p_1}}; m_2 = \frac{m_o}{\sqrt{p_2}}; m_3 = \frac{m_o}{\sqrt{p_3}}; \dots m_n = \frac{m_o}{\sqrt{p_n}}$$

.... 7./

A képletben szereplő " m_o " a súlyegység középhibája, ami azon képzelt egyenlősúlyu megfigyelések középhibája, melyekkel a különböző súlyu megfigyeléseket helyettesíthetjük. Vagyis

$$ha \quad p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_n, \text{ akkor } m_1 = m_2 = m_3 = \dots = m_n = m_o$$

.... 8./

Az 5./-ös egyenletek alapján:

$$m_o^2 = p_1 m_1^2 = p_2 m_2^2 = p_3 m_3^2 = \dots = p_n m_n^2$$

.... 9./

A fenti értékeket összegezve:

$$nm_o^2 = p_1 m_1^2 + p_2 m_2^2 + p_3 m_3^2 + \dots + p_n m_n^2 = [p m m]$$

.... 10./

Az 5./-ös egyenletek alapján:

$$p_1: p_2: p_3: \dots: p_n = \frac{m_o^2}{m_1^2}: \frac{m_o^2}{m_2^2}: \frac{m_o^2}{m_3^2}: \dots: \frac{m_o^2}{m_n^2}$$

Vagy mert " m_o "-val rövidíthetünk:

$$p_1: p_2: p_3: \dots: p_n = \frac{1}{m_1^2}: \frac{1}{m_2^2}: \frac{1}{m_3^2}: \dots: \frac{1}{m_n^2}$$

Látjuk, hogy " m_o " nem játszik szerepet a súlyok egymásközi viszonyában, ezért tetszőleges értéket adhatunk neki. Célszerű úgy megválasztani az értékét, hogy a súlyokra egész számokat kapjunk: rendszerint a legnagyobb " m " értékkel tesszük egyenlővé!

Az egyenlősúlyu megfigyelések kiegyenlítésénél V. jelzéssel levezettük a következő egyenleteket:

$$h_1 = \frac{1}{m_1}; h_2 = \frac{1}{m_2}; h_3 = \frac{1}{m_3} \dots h_n = \frac{1}{m_n}$$

Négyzetreemelve és arány-alakban fölírva:

$$h_1^2 : h_2^2 : h_3^2 : \dots : h_n^2 = \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2} : \frac{1}{m_3^2} : \dots : \frac{1}{m_n^2}$$

S így a fentebbiek alapján

$$p_1 : p_2 : p_3 : \dots : p_n = h_1^2 : h_2^2 : h_3^2 : \dots : h_n^2$$

Szavakban kifejezve: a súlyok úgy aránylanak, mint a megfelelő megbízhatóságok négyzetei.

Ezekután áttérhetünk a valószínű helyes érték számítására:

A 6./-os egyenletből:

$$p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 + \dots + p_n v_n^2 = f_{\min}$$

de tudjuk, hogy $v = x - o$; Ezt behelyettesítve:

$$p_1/x - o_1/2 + p_2/x - o_2/2 + p_3/x - o_3/2 + \dots + p_n/x - o_n/2 = f_{\min}$$

Az egyenletet "x" szerint differenciálva:

$$2p_1/x - o_1 + 2p_2/x - o_2 + 2p_3/x - o_3 + \dots + 2p_n/x - o_n = 0$$

2-vel egyszerűsítve és a szorzást elvégezve:

$$p_1 x + p_2 x + p_3 x + \dots + p_n x - p_1 o_1 - p_2 o_2 - p_3 o_3 - \dots - p_n o_n = 0$$

$$x [p] = [p o] \quad \dots \text{I.}$$

Innen:

$$x = \frac{[p o]}{[p]}$$

Más részről azonban:

$$p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 + \dots + p_n v_n = 0$$

$$\frac{[p v]}{[p v]} = 0 \quad \dots \text{II.}$$

Számítsuk most a valószínű helyes érték középhibáját. Ha "l"-vel jelölöm a valószínű helyes érték eltérését az abszolút helyes értéktől, akkor írhatom, hogy:

$$l_1 = v_1 + \mu \div m_1$$

$$l_2 = v_2 + \mu \div m_2$$

$$l_3 = v_3 + \mu \div m_3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$l_n = v_n + \mu \div m_n \quad \dots \text{12./}$$

hol $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ a különböző súlyu méréseknek megfelelő középhibák. Emeljük négyzetre, aztán szorozzuk meg az egyenletek mindkét oldalát $p_1, p_2, \dots, p_n$ -nek.

Lesz:

$$p_1 m_1^2 = p_1 v_1^2 + 2p_1 v_1 \mu + p_1 \mu^2$$

$$p_2 m_2^2 = p_2 v_2^2 + 2p_2 v_2 \mu + p_2 \mu^2$$

$$p_3 m_3^2 = p_3 v_3^2 + 2p_3 v_3 \mu + p_3 \mu^2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$p_n m_n^2 = p_n v_n^2 + 2p_n v_n \mu + p_n \mu^2$$

$$\text{Összegezve: } [p m^2] = [p v^2] + 2\mu [p v] + \mu^2 [p] \quad \dots \text{13./}$$

De mert $[p v] = 0$, azért a $2\mu [p v]$ tag kiesik. Egyenlősúlyu megfigyelések kiegyenlítésénél kaptuk, hogy

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{[p]}}$$

Ennek, a különböző súlyuakra vonatkozó megfelelőjét kapjuk, ha "m" és "n" helyébe a megfelelő értéket tesszük:

"m" az egyenlő súlyu megfigyelések középhibája volt, ennek a különböző súlyu megfigyeléseknél a súlyegység középhibája: "m₀" felel meg.

"n" viszont a megfigyelések számát jelentette. Mi felel meg ennek? Ha az eddigi levezetéseket figyelemmel követtük, akkor láthattuk azt, hogy a megfigyelt értékeket súlyaik arányában vontuk be számításainkba. Vagyis pl. a $p_1 = 3$ mellett végzett o_1 leolvasást úgy tekintettük, mintha háromszor ugyanazt az értéket figyeltük volna meg, tehát megfigyeléseink között 3 db " o_1 " érték volna. Ugyanigy " o_2 "-t p_2 -ször, " o_3 "-at p_3 -ször stb. megfigyelt értéknek tekintjük, összesen tehát van $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = [p]$ számú megfigyelésünk, vagyis

$$n = [p]$$

Ezekután írhatjuk,

hogy

$$\mu = \frac{m_0}{\sqrt{[p]}}$$

továbbá

$$m_0^2 = \mu^2 [p]$$

De 10./-es képletünk szerint $n m_o^2 = [p m m]$, a 13./-as képlet alapján pedig $[p m m] = [p v v] + \mu^2 [p]$. Ide a $[p m m]$ és a $\mu^2 [p]$ értékeit behelyettesítve:

$$\begin{aligned} n m_o^2 &= [p v v] + m_o^2 \\ m_o^2 / n - 1/ &= [p v v] \\ m_o &= \sqrt{\frac{[p v v]}{n - 1}} \end{aligned}$$

.... III.

Az $\mu = \frac{m_o}{\sqrt{[p]}}$ képlet alapján:

$$\mu = \frac{\sqrt{[p v v]}}{\sqrt{[p] / n - 1}}$$

.... IV.

Ellenőrzésül a 7./-es képlet alapján:

$$m_1 = \sqrt{\frac{[p v v]}{p_1 / n - 1}}; m_2 = \sqrt{\frac{[p v v]}{p_2 / n - 1}}; m_3 = \sqrt{\frac{[p v v]}{p_3 / n - 1}} \dots m_n = \sqrt{\frac{[p v v]}{p_n / n - 1}} \dots V.$$

Példa a különböző súlyu, közvetlen megfigyelések kiegyenlítésére.

Egy területet különböző gyártmányu planiméterekkel mértünk meg. Az eredmények voltak:

$$\begin{aligned} 1./ T &= 72.10 \text{ c/m}^2 \pm 0.10 \text{ c/m}^2 \\ 2./ T &= 72.30 \text{ c/m}^2 \pm 0.25 \text{ c/m}^2 \\ 3./ T &= 71.90 \text{ c/m}^2 \pm 0.15 \text{ c/m}^2 \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy a $p = \frac{m_o^2}{m^2}$, hogy " m_o " mértékét létszésszerint választhatom meg. Példánkban " m_o "-at 10²-nak vesszük:

$$p_1 = \frac{0.0001}{0.102} = \frac{1}{100}; p_2 = \frac{0.0001}{0.10^2} = \frac{1}{625}; p_3 = \frac{0.0001}{0.15^2} = \frac{1}{225}$$

A súlyok egymásközi aránya nem változik, ha mindhárom egyenlőség számlálóját megszorozzuk 25-el. Ekkor lesz:

$$p_1 = \frac{1}{4}; p_2 = \frac{1}{25}; p_3 = \frac{1}{9}$$

Közös nevezőre hozva a törteteket /4 x 25 x 9 = 900/

$$p_1 = \frac{225}{900}; p_2 = \frac{36}{900}; p_3 = \frac{100}{900}$$

Mindhárom törtet szorozva $\frac{900}{36}$ -tal lesz:

$$p_1 = 6; p_2 = 1; p_3 = 3$$

A súlyok értékét rendszerint egész számokra kerekítjük ki. Nagy pontosságú méréseknél is legfeljebb csak két /2/ tizedesig számolunk.

$$\begin{array}{lll} o_1 & 72.10 & o'_1 = + 0.10 \\ o_2 & 72.30 & o'_2 = + 0.30 \\ o_3 & 71.90 & o'_3 = - 0.10 \end{array}$$

*o. egy felvett közelítő érték, hogy ne kelljen nagy számmal dolgozni.

n	o'	p	p o	V Δx - o'	p V	p V V	jegyzet
1	+0.10	6	+0.60	-0.04	-0.24	0.0096	
2	+0.30	1	+0.30	-0.24	-0.24	0.0576	
3	-0.10	3	-0.30	+0.16	+0.48	0.0768	
		[p]	[p o']		[p v]	[p v v]	
			+0.90		+0.48		
			-0.30		-0.48		
		10	+0.60		0	0.1440	

$$\Delta x \frac{[p o']}{[p]} = \frac{0.60}{10} = + 0.06$$

$$x = o_o + \Delta x$$

$$x = 72.06 \text{ c/m}^2$$

$$v = x - o = \Delta x - o'$$

$$m_o = \sqrt{\frac{[p v v]}{n - 1}} = \sqrt{\frac{0.1440}{2}} = \pm 0.27 \text{ c/m}^2; \mu = \frac{m_o}{\sqrt{[p]}} = \frac{0.27}{\sqrt{10}} = \pm 0.08 \text{ c/m}^2$$

$$x = 72.06 \text{ c/m}^2 \pm 0.08 \text{ c/m}^2$$

$$\text{Ellenőrzésül: } m_1 = \sqrt{\frac{[p v v]}{p_1 / n - 1}} = \sqrt{\frac{0.1440}{12}} = \frac{m_o}{\sqrt{p_1}} = \frac{0.27}{\sqrt{6}} \div \pm 0.10$$

$$m_2 = \sqrt{\frac{[p v v]}{p_2 / n - 1}} = \sqrt{\frac{0.1440}{2}} = \frac{m_o}{\sqrt{p_2}} = \frac{0.27}{\sqrt{1}} \div \pm 0.25$$

$$m_3 = \sqrt{\frac{[p v v]}{p_3 / n - 1}} = \sqrt{\frac{0.1440}{6}} = \frac{m_o}{\sqrt{p_3}} = \frac{0.27}{\sqrt{3}} \div \pm 0.15$$

Egymástól független, közvetett megfigyelések kiegyenlítése.

Közvetett megfigyelésekről akkor beszélünk, amikor a keresett értéket adott egyenletből kell kiszámítanunk. Ez az eset fordul elő pl. a Reichenbach-féle távolságmérésnél, ahol $T = b + a$ egyenletből kell számítanunk a T távolságot. Ebben az egyenletben " a " a megfigyelt " T " az adott, míg " b " és " a " a keresett értékek. Előfordulhat azonban az az eset is, hogy egyenletünk több ismeretlentől függ. Az egyenleteket mindig oly alakban írjuk fel, hogy a megfigyelt érték legyen jobboldalt.

Jelöljük X, Y, Z -vel a keresett ismeretlenek abszolút helyes értékét, " L " pedig a megfigyelések abszolút helyes értékét jelentse.

A valószínű helyes értékek legyenek: x, y, z , ill. o . Az alapegyenletek lesznek:

$$\begin{aligned} a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + \dots &= O_1 \\ a_2 X + b_2 Y + c_2 Z + \dots &= O_2 \\ a_3 X + b_3 Y + c_3 Z + \dots &= O_3 \\ &\dots 1./ \\ a_n X + b_n Y + c_n Z + \dots &= O_n \end{aligned}$$

Van tehát " q " ismeretlentünk és ezek kiszámításához " n " egyenlet áll rendelkezésünkre, hol " $q < n$ ", mert csak így vannak fölös megfigyeléseink, melyeknek száma: $n - q$. Az abszolút helyes értékek helyett a valószínű helyes értékekkel számolunk, melyek egyenlet alakjában felírva:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots &= u_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots &= u_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + \dots &= u_3 \\ &\dots 2./ \\ a_n x + b_n y + c_n z + \dots &= u_n \end{aligned}$$

Megfigyelt értékeink $[O_1, O_2, O_3, \dots, O_n]$ azonban hibásak, tehát nem egyeznek a valószínű helyes " u " értékekkel, hanem azoktól eltérnek. Ha " O "-val jelöljük a megfigyelt értékeket, akkor írhatjuk, hogy:

$$\begin{aligned} u_1 &= O_1 + v_1 \\ u_2 &= O_2 + v_2 \\ u_3 &= O_3 + v_3 \\ &\dots \\ u_n &= O_n + v_n \end{aligned}$$

Az egyenleteket a javítások $[v]$ szerint megfejtve és az " u " értéket behelyettesítve kapjuk a hibaegyenleteket:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots - O_1 \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots - O_2 \\ v_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + \dots - O_3 \\ &\dots 3./ \\ v_n &= a_n x + b_n y + c_n z + \dots - O_n \end{aligned}$$

A javításokra vonatkozóan tudjuk, hogy négyzeteik összegének egy minimumnak kell legyen, vagyis egyenlő súlyok esetén:

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2 = [v \ v] = \int \min \quad \dots I.$$

különböző súlyok esetén pedig:

$$p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 + \dots + p_n v_n^2 = [p \ v \ v] = \int \min \quad \dots I/a$$

Mivel a különböző súlyu megfigyelések kiegyenlítéséből az egyenlő súlyukét közvetlenül kaphatjuk, ha " p " helyébe mindenütt 1-et teszünk, ezután csak a különböző súlyu megfigyelések esetét tárgyaljuk.

A 3./-as egyenletekből kiolvashatjuk, hogy a javítások függenek az ismeretlenektől, vagyis többváltozós függvényeknek tekintendők s a differenciálást is e szerint kell végrehajtani.

$$\begin{aligned} \text{Vagyis: } \frac{\partial [p \ v \ v]}{\partial x} &= 2p_1 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + 2p_2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + 2p_3 v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x} + \dots + 2p_n v_n \frac{\partial v_n}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial [p \ v \ v]}{\partial y} &= 2p_1 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} + 2p_2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + 2p_3 v_3 \frac{\partial v_3}{\partial y} + \dots + 2p_n v_n \frac{\partial v_n}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial [p \ v \ v]}{\partial z} &= 2p_1 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} + 2p_2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} + 2p_3 v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} + \dots + 2p_n v_n \frac{\partial v_n}{\partial z} = 0 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Kérdés, hogy mi lesz az egyes partialis differenciálok értéke?

Pl. $\frac{\partial v_1}{\partial x} = ?$ A 3./-as egyenlet alapján: $v_1 = a_1 x + b_1 y + \dots - o_1$.
Látjuk, hogy "x" csak az első tagban szerepel, ha tehát az egyenlet "x" szerint differenciáljuk, kapjuk, hogy

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = a_1 \frac{\partial x}{\partial x} + 0 + 0 + \dots - 0$$

de $\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{dx}{dx} = 1$, s így:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = a_1$$

ugyanígy:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = a_1; \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = a_2; \quad \frac{\partial v_3}{\partial x} = a_3 \quad \dots$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = b_1; \quad \frac{\partial v_2}{\partial y} = b_2; \quad \frac{\partial v_3}{\partial y} = b_3 \quad \dots$$

.... 6./

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} = c_1; \quad \frac{\partial v_2}{\partial z} = c_2; \quad \frac{\partial v_3}{\partial z} = c_3 \quad \dots$$

.....

A 6./ alatti értékeket az 5./-ös egyenletekbe helyettesítve:

$$p_1 a_1 v_1 + p_2 a_2 v_2 + p_3 a_3 v_3 + \dots + p_n a_n v_n = [p \ a \ v] = 0$$

$$p_1 b_1 v_1 + p_2 b_2 v_2 + p_3 b_3 v_3 + \dots + p_n b_n v_n = [p \ b \ v] = 0$$

.... II.

$$p_1 c_1 v_1 + p_2 c_2 v_2 + p_3 c_3 v_3 + \dots + p_n c_n v_n = [p \ c \ v] = 0$$

.....

Helyettesítsük a 3./ alatti egyenletekből a "v" értékeket a II-es egyenletekbe! Lesz:

$$p_1 a_1 v_1 = p_1 a_1 a_1 x + p_1 a_1 b_1 y + p_1 a_1 c_1 z + \dots - p_1 a_1 o_1$$

$$p_2 a_2 v_2 = p_2 a_2 a_2 x + p_2 a_2 b_2 y + p_2 a_2 c_2 z + \dots - p_2 a_2 o_2$$

$$p_3 a_3 v_3 = p_3 a_3 a_3 x + p_3 a_3 b_3 y + p_3 a_3 c_3 z + \dots - p_3 a_3 o_3$$

$$\dots\dots\dots$$

$$p_n a_n v_n = p_n a_n a_n x + p_n a_n b_n y + p_n a_n c_n z + \dots - p_n a_n o_n$$

összegezve:

$$[p \ a \ v] = [p \ a \ a] x + [p \ a \ b] y + [p \ a \ c] z + \dots - [p \ a \ o]$$

Mivel azonban tudjuk, hogy $[p \ a \ v] = 0$, írhatjuk:

$$[p \ a \ a] x + [p \ a \ b] y + [p \ a \ c] z + \dots - [p \ a \ o] = 0$$

ugyanígy írhatjuk a többi is.

$$[p \ a \ a] x + [p \ a \ b] y + [p \ a \ c] z - [p \ a \ o] = 0$$

$$[p \ a \ b] x + [p \ b \ b] y + [p \ b \ c] z - [p \ b \ o] = 0$$

$$[p \ a \ c] x + [p \ b \ c] y + [p \ c \ c] z - [p \ c \ o] = 0$$

Az "o"-s tagokat a jobboldalra vive kapjuk a normál-egyenletek-et:

$$[p \ a \ a] x + [p \ a \ b] y + [p \ a \ c] z + [p \ a \ d] t + \dots = [p \ a \ o]$$

$$[p \ a \ b] x + [p \ b \ b] y + [p \ b \ c] z + [p \ b \ d] t + \dots = [p \ b \ o]$$

$$[p \ a \ c] x + [p \ b \ c] y + [p \ c \ c] z + [p \ c \ d] t + \dots = [p \ c \ o]$$

.... III.

$$[p \ a \ d] x + [p \ b \ d] y + [p \ c \ d] z + [p \ d \ d] t + \dots = [p \ d \ o]$$

A normálegyenleteket könnyű felírni, mert az együtthatók a diagonális tagtól jobbra és alatta szabályszerűen követik egymást. A normálegyenletekből kiszámíthatjuk az x, y, z, t, stb. ismeretlenek értékeit, mert a normálegyenletek száma már megegyezik az ismeretlenek számával "q"-val.

A megoldás a később tárgyalandó "Gauss: kiküszöbölési eljárása" alapján mechanikusan történik.

Ismerjük mármost az ismeretlenek valószínű helyes értékét: $x, y, z, t \dots$ Ezeknek középhibái egyenlősúlyu megfigyelések esetén: ha $p_x = p_y = p_z = p_t = p = 1$, akkor $m_x = m_y = m_z = m_t = m$. Különböző súlyu megfigyelések esetén a súlyegység középhibáját: " m_0 "-t számítjuk.

Közvetlen megfigyeléseknél volt:

$$m_0 = \sqrt{\frac{[p \ v \ v]}{n-1}}$$

Itt volt 1 ismeretlen, tehát $[n-1]$ a fölös megfigyelések számát jelentette. Most " q " ismeretlenünk, eszerint $[n-q]$ fölös megfigyelésünk van.

A képlet tehát következőképpen alakul:

$$m_0 = \sqrt{\frac{[p \ v \ v]}{n-q}} \quad \dots \text{IV.}$$

Közvetlen megfigyeléseknél volt:

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{p_1}} = m_0 \frac{1}{\sqrt{p_1}}$$

Legyen most a közvetett megfigyeléseknél

$$\frac{1}{\sqrt{p_x}} = \sqrt{Q_{11}}; \quad \frac{1}{\sqrt{p_y}} = \sqrt{Q_{22}}; \quad \frac{1}{\sqrt{p_z}} = \sqrt{Q_{33}}$$

hol Q_{11} az " x "; Q_{22} az " y "; Q_{33} a " z " stb. súlykoefficiense. Lesz tehát:

$$m_x = m_0 \sqrt{Q_{11}}; \quad m_y = m_0 \sqrt{Q_{22}}; \quad m_z = m_0 \sqrt{Q_{33}} \quad \dots \text{stb.} \quad \dots \text{V.}$$

A Q értékeket másképpen is kifejezhetjük:

$$p_x = \frac{1}{Q_{11}}; \quad p_y = \frac{1}{Q_{22}}; \quad p_z = \frac{1}{Q_{33}} \quad \dots \text{stb.} \quad \dots \text{V/a.}$$

Vagyis a súlyok reciprocai a súlykoefficiensek.

Ha a normálegyenletekbe az ismeretlenek helyébe a megfelelő súlykoefficienseket helyettesítjük, akkor a súlyegyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} [p \ a \ a] Q_{11} + [p \ a \ b] Q_{12} + [p \ a \ c] Q_{13} + \dots &= 1 \\ [p \ a \ b] Q_{11} + [p \ b \ b] Q_{12} + [p \ b \ c] Q_{13} + \dots &= 0 \\ [p \ a \ c] Q_{11} + [p \ b \ c] Q_{12} + [p \ c \ c] Q_{13} + \dots &= 0 \end{aligned}$$

Ebből a három egyenletből kapjuk a három súlykoefficiens: Q_{11}, Q_{12}, Q_{13} értékét. Ezek közül Q_{11} az " x " súlykoefficiense, Q_{13} az " x " és " y " Q_{13} pedig az " x " és " z " közös súlykoefficiense.

A súly-egyenletek jobboldalának felírására az a szabály, hogy ahol a diagonális tag egy ismeretlen súlykoefficiense, ott a jobboldal: 1, ahol pedig a diagonális tag két ismeretlen közös súlykoefficiense, ott a jobboldal 0. Irhatjuk tehát, hogy

$$\begin{aligned} [p \ a \ a] Q_{21} + [p \ a \ b] Q_{22} + [p \ a \ c] Q_{23} + \dots &= 0 \\ [p \ a \ b] Q_{21} + [p \ b \ b] Q_{22} + [p \ b \ c] Q_{23} + \dots &= 1 \\ [p \ a \ c] Q_{21} + [p \ b \ c] Q_{22} + [p \ c \ c] Q_{23} + \dots &= 0 \\ [p \ a \ a] Q_{31} + [p \ a \ b] Q_{32} + [p \ a \ c] Q_{33} + \dots &= 0 \\ [p \ a \ b] Q_{31} + [p \ b \ b] Q_{32} + [p \ b \ c] Q_{33} + \dots &= 0 \\ [p \ a \ c] Q_{31} + [p \ b \ c] Q_{32} + [p \ c \ c] Q_{33} + \dots &= 1 \end{aligned}$$

A súlykoefficiensekre jellemző, hogy az egy ismeretlenre vonatkozók /pl. $Q_{11}, Q_{22}, \dots$ stb./ előjele mindig $+/$, a két ismeretlenre vonatkozó súlykoefficiensek /pl. $Q_{12}, Q_{23}, \dots$ stb./ előjele $+/$ egyaránt lehet. Ez utóbbiak ellenőrzésül szolgálnak, amennyiben

$Q_{12} = Q_{21}; \quad Q_{13} = Q_{31}; \quad Q_{23} = Q_{32} \quad \dots \text{stb.}$
Számítás közben eszközölt kikerekítések folytán 1-2 egységnyi eltérés lehetséges a két érték között.

Példa a közvetett megfigyelések kiegyenlítésére.

Megfigyeléseinket a következő egyenletekkel fejezhattük ki:

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 3 \\ 3x + 2y - 5z &= 5 \\ 4x + y + 4z &= 21 \\ -x + 3y + 3z &= 14 \end{aligned}$$

Kiszámítandó a x, y és z valószínű helyes értéke. A normálegyenletek felírását táblázat segítségével végezzük.

n	a	b	c	o	aa	ab	ac	ao	bb	bc	bo	cc	co
1	+1	-1	+2	+3	+1	-1	+2	+3	+1	-2	-3	+4	+6
2	+3	+2	-5	+5	+9	+6	-15	+15	+4	-10	+10	+25	-25
3	+4	+1	+4	+21	+16	+4	+16	+84	+1	+4	+21	+16	+84
4	-1	+3	+3	+14	+1	-3	-3	-14	+9	+9	+42	+9	+42
					[aa]	[ab]	[ac]	[ao]	[bb]	[bc]	[bo]	[cc]	[co]
						+10	+18	+102		+13	+73		+132
						-4	-18	-14		-12	-3		-25
					+27	+6	0	+88	+15	+1	+70	+54	+107

Ennek alapján a normálegyenletek:

$$\begin{aligned} 27x + 6y + 0z &= 88 \\ 6x + 15y + 1z &= 70 \\ 0x + 1y + 54z &= 107 \end{aligned}$$

Az egyenleteket megoldva kapjuk az ismeretlenek valószínű helyes értékét:

$$\begin{aligned} x &= 2.470 \\ y &= 3.551 \\ z &= 1.916 \end{aligned}$$

Most már számíthatjuk a megfigyelések hibáit:

ax	by	cz	u ax+by+cz	v o-l	vv	Ellenőrzésül:		
						av	bv	cv
+2.470	-3.551	+3.832	+2.751	-0.249	0.062001	-0.249	+0.249	-0.498
+7.410	+7.102	-9.580	+4.932	-0.068	0.004624	-0.204	-0.136	+0.340
+9.880	+3.551	+7.664	+21.095	+0.095	0.009025	+0.380	+0.095	+0.380
-2.470	+10.653	+5.748	+13.931	-0.069	0.004761	+0.069	-0.207	-0.207
					[vv]	[av]	[bv]	[cv]
						+0.449	+0.344	+0.720
						-0.453	-0.343	-0.705
					0.080411	≠ 0	≠ 0	≠ 0

$$m_s = \sqrt{\frac{[p \ v \ v]}{n-q}} = \sqrt{\frac{0.080411}{1}} = \pm 0.284$$

A súlyegyenletek lesznek:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} 27 Q_{11} + 6 Q_{12} + 0 Q_{13} &= 1 \\ 6 Q_{11} + 15 Q_{12} + 1 Q_{13} &= 0 \\ 0 Q_{11} + 1 Q_{12} + 54 Q_{13} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Q_{11} &= + 0.040656 \\ Q_{12} &= + 0.073270 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} 27 Q_{21} + 6 Q_{22} + 0 Q_{23} &= 0 \\ 6 Q_{21} + 15 Q_{22} + 1 Q_{23} &= 1 \\ 0 Q_{21} + 1 Q_{22} + 54 Q_{23} &= 0 \end{aligned} \right. \\ \\ \left. \begin{aligned} 27 Q_{31} + 6 Q_{32} + 0 Q_{33} &= 0 \\ 6 Q_{31} + 15 Q_{32} + 1 Q_{33} &= 0 \\ 0 Q_{31} + 1 Q_{32} + 54 Q_{33} &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Q_{33} &= + 0.018544 \end{aligned}$$

Innen a súlyok:

$$p_x = \frac{1}{Q_{11}} \div 25$$

$$p_y = \frac{1}{Q_{22}} \div 14$$

$$p_z = \frac{1}{Q_{33}} \div 54$$

A középhibák pedig:

$$m_x = m_0 \sqrt{Q_{11}} = \pm 0.057$$

$$m_y = m_0 \sqrt{Q_{22}} = \pm 0.077$$

$$m_z = m_0 \sqrt{Q_{33}} = \pm 0.039$$

Végeredményben tehát:

$$x = 2.470 \pm 0.057$$

$$y = 3.551 \pm 0.077$$

$$z = 1.916 \pm 0.039$$

A normálegyenleteket azonban lényegesen leegyszerűsítjük egy közelítő érték felvételével, ebben az esetben u.i. kisebb számértékekkel dolgozhatunk.

A különböző súlyú ismeretlenek valószínű helyes értékének jelölésére $x, y, z \dots$ stb.-t használtunk. De el lehet ezeket úgy is képzelni, hogy ezek egy felvett $x_0, y_0, z_0 \dots$ stb. közelítő értékből és egy $\Delta x, \Delta y, \Delta z \dots$ stb. korrekcióból állnak. Vagyis:

$$x = x_0 + \Delta x$$

$$y = y_0 + \Delta y$$

$$z = z_0 + \Delta z$$

.... 1./

Helyettesítsük ezeket az értékeket a hibaegyenletekbe:

$$a_1/x_0 + \Delta x/ + b_1/y_0 + \Delta y/ + c_1/z_0 + \Delta z/ + \dots = u_1$$

$$a_2/x_0 + \Delta x/ + b_2/y_0 + \Delta y/ + c_2/z_0 + \Delta z/ + \dots = u_2$$

$$a_3/x_0 + \Delta x/ + b_3/y_0 + \Delta y/ + c_3/z_0 + \Delta z/ + \dots = u_3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_n/x_0 + \Delta x/ + b_n/y_0 + \Delta y/ + c_n/z_0 + \Delta z/ + \dots = u_n$$

A zárójeleket felbontva és az $x_0, y_0, z_0 \dots$ -s tagokat a jobboldalra véve:

$$a_1 \Delta x + b_1 \Delta y + c_1 \Delta z + \dots = u_1 - /a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0 + \dots/$$

$$a_2 \Delta x + b_2 \Delta y + c_2 \Delta z + \dots = u_2 - /a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0 + \dots/$$

$$a_3 \Delta x + b_3 \Delta y + c_3 \Delta z + \dots = u_3 - /a_3 x_0 + b_3 y_0 + c_3 z_0 + \dots/$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_n \Delta x + b_n \Delta y + c_n \Delta z + \dots = u_n - /a_n x_0 + b_n y_0 + c_n z_0 + \dots/$$

Az x_0, y_0, z_0 értékeket tetszőlegesen kiválasztott 3 egyenletből számítjuk ki.

Mivel a jobboldalon lévő összes értéket ismerjük, annak értékét számíthatjuk. Jelöljük a jobboldalt $o_1, o_2 \dots o_n$ stb.-el, hol "o" a megfigyelt értékeknek $/u_1, u_2, u_3 \dots u_n/$ a javításokra $/\Delta x, \Delta y, \Delta z \dots/$ eső része, akkor írhatjuk, hogy:

$$a_1 \Delta x + b_1 \Delta y + c_1 \Delta z + \dots = o_1$$

$$a_2 \Delta x + b_2 \Delta y + c_2 \Delta z + \dots = o_2$$

$$a_3 \Delta x + b_3 \Delta y + c_3 \Delta z + \dots = o_3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_n \Delta x + b_n \Delta y + c_n \Delta z + \dots = o_n$$

Most már képezhetjük a normálegyenleteket:

$$[a \ a] \Delta x + [a \ b] \Delta y + [a \ c] \Delta z + \dots = [a \ o]$$

$$[a \ b] \Delta x + [b \ b] \Delta y + [b \ c] \Delta z + \dots = [b \ o]$$

$$[a \ c] \Delta x + [b \ c] \Delta y + [c \ c] \Delta z + \dots = [c \ o]$$

Ezekből kiszámíthatjuk $\Delta x, \Delta y, \Delta z \dots$ értékét. Ismerve az értékeket, képezhetjük a javításokat:

[illegible]

hol az "u"-k a megfigyelt értékeknek a javításokra eső részének a valószínű helyes értéke. A hibák, ill. a javítások nagysága:

$$\begin{aligned} V_1 &= u_1 - O_1 \\ V_2 &= u_2 - O_2 \\ V_3 &= u_3 - O_3 \\ &\dots\dots\dots \\ V_m &= u_m - O_m \end{aligned}$$

Most már - ugyanugy, mint az előbb - felírhatjuk a súlyegyenleteket, számíthatjuk a súlykoefficienseket, a súlyegység középhibáját, valamint az egyes ismeretlenek középhibáját, Végeredményként írhatjuk:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \Delta x \pm m_x \\ y &= y_0 + \Delta y \pm m_y \\ z &= z_0 + \Delta z \pm m_z \\ &\dots \end{aligned}$$

Példa a közvetett megfigyelések kiegyenlítésére közelítő értékek felvételével.

Megfigyelési egyenleteink:

```
1./ x + 3.5 y = 19998.2;          2./ x + 8.7 y = 19999.3;
3./ x + 15.2 y = 20001.9
4./ x + 19.8 y = 20002.9
5./ x + 26.2 y = 20004.0
```

Számítsuk ki x_0 és y_0 értékét az 2./ és 3./ egyenletekből.

Lesz:

$$y = 0.4$$

kikerekitve:

$$V_0 = 0.4$$

$$X_0 = 20,000.0$$

n	$a x_0$	$b y_0$	μ	σ $\mu - (\mu x_0 - \sigma y_0)$	a	b	aa	ab	ao	bb	bo
1	+20.000	+1.40	+19998.2	-3.20	+1	+3.5	+1	+3.5	-3.20	+12.25	-11.200
2	+20.000	+3.48	+19999.3	-4.18	+1	+8.7	+1	+8.7	-4.18	+75.69	-38.366
3	+20.000	+6.08	+20001.9	-4.18	+1	+15.2	+1	+15.2	-4.18	+231.04	-63.536
4	+20.000	+7.92	+20002.9	-5.02	+1	+19.8	+1	+19.8	-5.02	+292.04	-99.396
5	+20.000	+10.48	+20004.0	-6.48	+1	+26.2	+1	+26.2	-6.48	+686.44	-169.776
							[aa] +5	[ab] +73.4	[ao] -23.06	[bb] +1397.42	[bo] -380.274

$$\begin{aligned}\Delta x + 3.5 \Delta y &= -3.20 \\ \Delta x + 8.7 \Delta y &= -4.18 \\ \Delta x + 15.2 \Delta y &= -4.18 \\ \Delta x + 19.8 \Delta y &= -5.02 \\ \Delta x + 26.2 \Delta y &= -6.48\end{aligned}$$

A normálegyenletek:

$$\begin{aligned} + 5 \Delta x + 73.4 \Delta y &= -23.06 \\ + 73.4 \Delta x + 1397.42 \Delta y &= -380.274 \end{aligned}$$

Megoldva:

$$\Delta x = -2.704$$

$$\Delta y = -0.130$$

aΔx	bΔy	u aΔx+bΔy	v u-0	vv	Ellenőrzésül	
					av	bv
-2.704	-0.455	-3.159	+0.041	0.001681	+0.041	+0.1435
-2.704	-1.131	-3.835	+0.345	0.119025	+0.345	+3.0015
-2.704	-1.976	-4.680	-0.500	0.250000	-0.500	-7.6000
-2.704	-2.574	-5.278	-0.258	0.066564	-0.258	-5.1084
-2.704	-3.406	-6.110	+0.370	0.136900	+0.370	+9.5640
				[vv]	[av]	[bv]
					+0.756	+12.7090
					-0.758	-12.7084
				0.574170	÷0	÷0

$$m_0 = \sqrt{\frac{[v \ v]}{n-q}} = \sqrt{\frac{0.574170}{3}} = \pm 0.437$$

A súlyegyenletek:

$$\begin{aligned} 5 Q_{11} + 73.4 Q_{12} &= 1 \\ 73.4 Q_{11} + 1397.42 Q_{12} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 Q_{21} + 73.4 Q_{22} &= 0 \\ 73.4 Q_{21} + 1397.42 Q_{22} &= 1 \end{aligned}$$

A súlyegyenleteket megoldva kapjuk, hogy

$$Q_{11} = +0.873636$$

$$Q_{12} = -0.045888$$

$$Q_{21} = -0.045875$$

$$Q_{22} = +0.003125$$

A súlyok:

A középhibák:

$$p_x = \frac{1}{Q_{21}} = \frac{1}{0.873636} \div 1$$

$$m_x = m_0 \sqrt{Q_{11}} = \pm 0.408$$

$$p_y = \frac{1}{Q_{22}} = \frac{1}{0.003125} \div 320$$

$$m_y = m_0 \sqrt{Q_{22}} = \pm 0.024$$

Az ismeretlenek végleges értéke:

$$x = x_0 + \Delta x \pm m_x = 20.000 + \frac{-2.704}{-} = 19.997.296 \pm 0.408$$

$$y = y_0 + \Delta y \pm m_y = 0.4 + \frac{-0.13}{-} = 0.270 \pm 0.024$$

A normálegyenletek megoldása Gauss: kiküszöbölési módszerének alkalmazásával.

A számítás táblázat segítségével teljesen mechanikusan történik. Az egyes rovatokba kerülő értékeket számokkal helyettesítettük és ezen jelöltük a végrehajtandó műveleteket. A számok tehát csak a rovatok ill. az azokba kerülő értékek - sorszámai:

Normálegyenleteink:

$$\begin{aligned} [p \ a \ a]x + [p \ a \ b]y + [p \ a \ c]z + [p \ a \ d]t &= [p \ a \ l] \\ [p \ a \ b]x + [p \ b \ b]y + [p \ b \ c]z + [p \ b \ d]t &= [p \ b \ l] \\ [p \ a \ c]x + [p \ b \ c]y + [p \ c \ c]z + [p \ c \ d]t &= [p \ c \ l] \\ [p \ a \ d]x + [p \ b \ d]y + [p \ c \ d]z + [p \ d \ d]t &= [p \ d \ l] \end{aligned}$$

I. norm. e					II. norm. e				III. norm. e			IV. norm. e	
[paa]	[pab]	[pac]	[pad]	[pal]	[pbb]	[pbc]	[pbd]	[pbl]	[pcc]	[pcd]	[pcl]	[pdd]	[pdl]
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$		$\frac{2}{1} \cdot 2$	$\frac{2}{1} \cdot 3$	$\frac{2}{1} \cdot 4$	$\frac{2}{1} \cdot 5$	$\frac{3}{1} \cdot 3$	$\frac{3}{1} \cdot 4$	$\frac{3}{1} \cdot 5$	$\frac{4}{1} \cdot 4$	$\frac{4}{1} \cdot 5$
					15	16	17	18	19	20	21	22	23
						$\frac{16}{15}$	$\frac{17}{15}$		$\frac{16}{15} \cdot 15$	$\frac{16}{15} \cdot 17$	$\frac{16}{15} \cdot 18$	$\frac{17}{15} \cdot 17$	$\frac{17}{15} \cdot 18$
									24	25	26	27	28
										$\frac{25}{24}$		$\frac{25}{24} \cdot 25$	$\frac{25}{24} \cdot 26$
												29	30

Az előzőoldali táblázatban használt jelölés:

/-/: az előjeleket ellenkezőre kell változtatni, majd / { /: a tagokat algebrailag összegezni kell.

Az egyes ismeretlenek értékei:

$$t = -\frac{30}{29}; \quad z = -\frac{26-25t}{24}; \quad y = \frac{-18-17t-16z}{15}; \quad x = \frac{5-4t-3x-2y}{1}$$

3./ Egymástól függő ismeretlenekkel bíró közvetett megfigyelések kiegyenlítése.

Az ismeretlenek egymással való összefüggését itt is **egyenletbe** fejezzük ki. Erre az egyenletre - melyet feltételi egyenletnek nevezünk, jellemzők a következők: az egyenlet ismeretlenjei, melyek a baloldalt alkotják, a megfigyelt értékek. Ezeknek valódi helyes értékét keressük. Súlyuk a megfigyelések pontosságától függ. A jobboldalon egy abszolút helyes érték - a feltétel áll, melyet rendszerint valamely matematikai tétel alapján írhatunk fel /pl. a háromszög belső szögeinek összege: 180° /.

Ha a megfigyelt értékek helyett az abszolút helyes értékeket ismer-nénk, felírhatnánk az elméleti feltételi egyenletet, amelynek jobb- és baloldala egyenlő:

$$a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 + \dots + a_n L_n = A$$

írhatjuk, hogy:

$$a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 + \dots + a_n L_n - A = 0 \quad \dots \text{1./}$$

Ebben az esetben a feltételi egyenlet lineáris volt; evvel tudunk számolni.

De előfordulhat az is, hogy a feltételi egyenlet nem lineáris, hanem a $f/L_1 L_2 \dots L_n / 0$ általános összefüggés alakját viseli. Ebben az esetben előbb lineáris egyenletté kell alakítanunk. Tudjuk, hogy:

$$L_1 = O_1 + v_1$$

$$L_2 = O_2 + v_2$$

$$L_3 = O_3 + v_3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$L_n = O_n + v_n$$

Ezeket az értékeket a feltételi egyenletbe helyettesítve:

$$f/O_1 + v_1, O_2 + v_2, O_3 + v_3 \dots O_n + v_n / = 0$$

egyenletet kap-juk. Ha a méréseket reklifikált, tehát kiigazított műszerrel végeztük, akkor a "v" értékek csak kicsinyek lehetnek, mert sem durva-, sem pe-dig szisztematikus hibát nem tartalmaznak. Így ha a függvényt Taylor

sor szerint sorbafejtjük a magasabbfokú hatványokat elhanyagolhatjuk, miáltal a következő egyenletet nyerjük:

$$f/O_1, O_2, O_3 \dots O_n / + \frac{\partial f}{\partial I_1} v_1 + \frac{\partial f}{\partial I_2} v_2 + \frac{\partial f}{\partial I_3} v_3 + \dots + \frac{\partial f}{\partial I_n} v_n = 0$$

Innen a partialis differenciálokat - mivel értéküket számíthatjuk - koefфициenseknek tekinthetjük:

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = a_1; \frac{\partial f}{\partial I_2} = a_2; \frac{\partial f}{\partial I_3} = a_3 \dots \frac{\partial f}{\partial I_n} = a_n$$

Hátra van még a $f/O_1, O_2, O_3 \dots O_n /$ tag. Hogy ezt is lineáris alakra hozzassuk, térjünk kissé vissza a kiindulási egyenlethez! Volt:

$$a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 + \dots + a_n L_n A = 0$$

Ha most a "L"-ek helyébe a megfigyelt értékeket tesszük, akkor az egyenlet nem lesz 0-val egyenlő, hanem

$$a_1 O_1 + a_2 O_2 + a_3 O_3 + \dots + a_n O_n A = 1$$

egyenletet kapjuk, melyben "1" az ellenmondás értéke, ami azt mutatja, hogy a megfigyelt értékekből képezett feltételi egyenlet mennyire tér el az abszolút helyes elméleti feltételi egyenlettől.

A megfigyelések javításai: $v_1, v_2, v_3 \dots v_n$, vagyis

$$L_1 = O_1 + v_1$$

$$L_2 = O_2 + v_2$$

$$L_3 = O_3 + v_3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$L_n = O_n + v_n$$

Ezeket az értékeket az eredeti feltételi egyenletbe téve:

$$a_1/O_1 + v_1 / + a_2/O_2 + v_2 / + a_3/O_3 + v_3 / + \dots + a_n/O_n + v_n / - A \neq 0$$

kifejtve:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \dots + a_n v_n + /a_1 O_1 + a_2 O_2 + a_3 O_3 + \dots + a_n O_n A / - 0$$

A fentebbiek alapján tudjuk, hogy a zárójelben lévő tag nem más, mint "1", melyet beírva lesz:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \dots + a_n v_n + 1_n = 0$$

Ez a javítások egyenlete, melyet úgy nyerünk a feltételi egyenletből, hogy az ismeretlenek helyébe a javításokat, a feltétel helyébe pedig az ellenmondást /1/ tesszük. Mindezekből nyilvánvaló, hogy az ellenmondás értéke az $/a_1 O_1 + a_2 O_2 + a_3 O_3 + \dots + a_n O_n A /$ tagtól függ és ezt a függést a következő alakban is írhatjuk:

$$f/O_1, O_2, O_3 \dots O_n / - 1$$

Most visszatérhetünk az általános összefüggésnek Taylor-sor szerint sorbafejtett alakjára. Volt:

$$f/O_1, O_2, O_3 \dots O_n / + \frac{\partial f}{\partial I_1} v_1 + \frac{\partial f}{\partial I_2} v_2 + \frac{\partial f}{\partial I_3} v_3 + \dots + \frac{\partial f}{\partial I_n} v_n = 0$$

Ide behelyettesítve a már ismert értékeket, lesz

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \dots + a_n v_n + 1 = 0$$

Esáltal az általános összefüggést lineáris alakra hoztuk: ezzel pedig már tudunk számolni.

Most már rátérhetünk az egyenletek kiegyenlítésére. Mintán a különböző súlyú egyenletekre vonatkozó törvényeket és képleteket $p=1$ érték mellett az egyenlő súlyú egyenletekre is alkalmazhatjuk, azért csak a különböző súlyú, lineáris egyenletek kiegyenlítését fogjuk tárgyalni.

A feltételi egyenletek:

$$a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 + \dots + a_n L_n A = 0$$

$$b_1 L_1 + b_2 L_2 + b_3 L_3 + \dots + b_n L_n B = 0$$

$$c_1 L_1 + c_2 L_2 + c_3 L_3 + \dots + c_n L_n C = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$r_1 L_1 + r_2 L_2 + r_3 L_3 + \dots + r_n L_n R = 0$$

.... 1./

Van tehát "n" megfigyelésünk és ezekből "r" egymástól független feltételi egyenletet tudunk felállítani. Megfigyeléseink alapján felírhatjuk az ellenmondások egyenleteit, melyekből a "1"-ket számíthatjuk:

$$\begin{array}{l} a_1 O_1 + a_2 O_2 + a_3 O_3 + \dots + a_n O_n - A = 1 \\ b_1 O_1 + b_2 O_2 + b_3 O_3 + \dots + b_n O_n - B = 1 \\ c_1 O_1 + c_2 O_2 + c_3 O_3 + \dots + c_n O_n - C = 1 \\ \dots\dots\dots \\ r_1 O_1 + r_2 O_2 + r_3 O_3 + \dots + r_n O_n - R = 1 \end{array}$$

A kiigazítások egyenletei lesznek:

$$\begin{aligned} & \text{a}_1\text{v}_1 + \text{a}_2\text{v}_2 + \text{a}_3\text{v}_3 + \dots + \text{a}_n\text{v}_n + \text{l}_1 = 0 \\ & \text{b}_1\text{v}_1 + \text{b}_2\text{v}_2 + \text{b}_3\text{v}_3 + \dots + \text{b}_n\text{v}_n + \text{l}_2 = 0 \\ & \text{c}_1\text{v}_1 + \text{c}_2\text{v}_2 + \text{c}_3\text{v}_3 + \dots + \text{c}_n\text{v}_n + \text{l}_3 = 0 \\ & \dots\dots\dots \\ & \text{r}_1\text{v}_1 + \text{r}_2\text{v}_2 + \text{r}_3\text{v}_3 + \dots + \text{r}_n\text{v}_n + \text{l}_r = 0 \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy a javításokra nézve állnia kell a következőknek:

Vagyis: $p_1 v^2 + p_2 v^2 + p_3 v^2 + \dots + p_n v_n^2 = \mathcal{I}^{\min}$ 4./

$$2p_1 v_1 dv_1 + 2p_2 v_2 dv_2 + 2p_3 v_3 dv_3 + \dots + 2p_n v_n dv_n = 0$$

Egyszerűsítve:

$$/p_1 v_1 / d v_1 + /p_2 v_2 / d v_2 + /p_3 v_3 / d v_3 + \dots + /p_n v_n / d v_n = 0 \quad \dots 5./$$

Mi a "v" értékét keressük, tehát a zárójelben levő tagokat kell kifejeznünk. Ezt a következő fogással érjük el, differenciáljuk a kiigazítások egyenleteit.

Többváltozós összegek differenciálásáról van szó. Márpedig "összeg differenciálja egyenlő a tényezők differenciáinak összegével" és, "többváltozós függvények teljes differenciálja egyenlő a partiális differenciálok összegével." Tehát pl.

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \dots + a_m v_m + 1 = 0$$

$$a_1 \frac{\partial v_1}{\partial v_1} dv_1 + a_2 \frac{\partial v_2}{\partial v_2} dv_2 + a_3 \frac{\partial v_3}{\partial v_3} dv_3 + \dots + a_n \frac{\partial v_n}{\partial v_n} dv_n = 0$$

mert $\frac{\partial v_2}{\partial v_1}$; $\frac{\partial v_3}{\partial v_1}$; $\frac{\partial v_n}{\partial v_1}$ stb. tagok - mivel a számlálóban " v_1 " nem szerepel, v_1 szerint partiálisan differenciálva zérót adnak. Ugyanigy a " l_1 " állandó - differenciálja is zéró. Miután pedig

$$\frac{\partial V_1}{\partial V_1} = \frac{\partial V_2}{\partial V_2} = \frac{\partial V_3}{\partial V_3} \dots \frac{\partial V_n}{\partial V_n} = 1$$

az egyenlet ilyen alakú lesz:

$$a_1 dv_1 + a_2 dv_2 + a_3 dv_3 + \dots + a_n dv_n = 0$$

uqyanig

$$b_1 dv_1 + b_2 dv_2 + b_3 dv_3 + \dots + b_n dv_n = 0$$

$$c_1 dv_1 + c_2 dv_2 + c_3 dv_3 + \dots + c_m dv_m = 0$$

.....

$$r_1 dv_1 + r_2 dv_2 + r_3 dv_3 + \dots + r_n dv_n = 0$$

Szorozzuk meg egyenleteinket sorra egyenlőre még ismeretlen

$k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ értékekkel, melyeket korrelánsoknak vagy korrelátáknak nevezünk. Kapjuk:

$$k_1/a_1 dv_1 + a_1 dv_1 + a_2 dv_2 + \dots + a_n dv_n / = 0$$

$$k_1/b_1 dv_1 + b_2 dv_2 + b_3 dv_3 + \dots + b_n dv_n / = 0$$

$$k_3/c_1 dv_1 + c_2 dv_2 + c_3 dv_3 + \dots + c_n dv_n = 0$$

.....

$$\underline{k_r / r_1 dv_1 + r_2 dv_2 + r_3 dv_3 + \dots + r_n dv_n / = 0}$$

Összegezve:

$$+ \sqrt{k_1 a_1 + k_2 b_1 + k_3 c_1 + \dots + k_r r_1} / dv_1 + \sqrt{k_1 a_2 + k_2 b_2 + k_3 c_2 + \dots + k_r r_2} / dv_2 + \sqrt{k_1 a_3 + k_2 b_3 + k_3 c_3 + \dots + k_r r_3} / dv_3 + \dots + \sqrt{k_1 a_m + k_2 b_m + k_3 c_m + \dots + k_r r_m} / dv_m = 0 \quad \dots 7./$$

A 7./-es egyenletet összehasonlítva az 5./-tel jelzettel, látjuk, hogy

$$\begin{aligned} p_1 v_1 &= k_1 a_1 + k_2 b_1 + k_3 c_1 + \dots + k_r r_1 \\ p_2 v_2 &= k_1 a_2 + k_2 b_2 + k_3 c_2 + \dots + k_r r_2 \\ p_3 v_3 &= k_1 a_3 + k_2 b_3 + k_3 c_3 + \dots + k_r r_3 \\ &\dots \dots \dots \\ p_n v_n &= k_1 a_n + k_2 b_n + k_3 c_n + \dots + k_r r_n \end{aligned}$$

.... 7/a.

Innen a "v" értékeket kifejezve:

$$v_1 = \frac{a_1}{p_1} k_1 + \frac{b_1}{p_1} k_2 + \frac{c_1}{p_1} k_3 + \dots + \frac{r_1}{p_1} k_r$$

$$v_2 = \frac{a_2}{p_2} k_1 + \frac{b_2}{p_2} k_2 + \frac{c_2}{p_2} k_3 + \dots + \frac{r_2}{p_2} k_r$$

$$v_3 = \frac{a_3}{p_3} k_1 + \frac{b_3}{p_3} k_2 + \frac{c_3}{p_3} k_3 + \dots + \frac{r_3}{p_3} k_r$$

.... I./

$$v_n = \frac{a_n}{p_n} k_1 + \frac{b_n}{p_n} k_2 + \frac{c_n}{p_n} k_3 + \dots + \frac{r_n}{p_n} k_r$$

Van tehát "n" egyenletünk /I./ "n" ismeretlennel /v./. Ha tehát a "k" értékeket ki tudjuk fejezni ismert értékekkel, akkor számíthatjuk a "v"-kat. Helyettesítsük be az I./ alatti "v" értékeket a kiigazítások 3./-as számú egyenletébe:

$$\begin{aligned} & \left[a_1 \frac{a_1}{p_1} k_1 + a_1 \frac{b_1}{p_1} k_2 + a_1 \frac{c_1}{p_1} k_3 + \dots + a_1 \frac{r_1}{p_1} k_r \right] + \left[a_2 \frac{a_2}{p_2} k_1 + a_2 \frac{b_2}{p_2} k_2 + a_2 \frac{c_2}{p_2} k_3 + \dots + a_2 \frac{r_2}{p_2} k_r \right] + \\ & \left[a_3 \frac{a_3}{p_3} k_1 + a_3 \frac{b_3}{p_3} k_2 + a_3 \frac{c_3}{p_3} k_3 + \dots + a_3 \frac{r_3}{p_3} k_r \right] + \dots + \left[a_n \frac{a_n}{p_n} k_1 + a_n \frac{b_n}{p_n} k_2 + a_n \frac{c_n}{p_n} k_3 + \dots + a_n \frac{r_n}{p_n} k_r \right] + \\ & + 1_r = 0 \end{aligned}$$

Ugyanígy képezzük a többi egyenletet is. Az utolsó lesz:

$$\begin{aligned} & \left[r_1 \frac{a_1}{p_1} k_1 + r_1 \frac{b_1}{p_1} k_2 + r_1 \frac{c_1}{p_1} k_3 + \dots + r_1 \frac{r_1}{p_1} k_r \right] + \left[r_2 \frac{a_2}{p_2} k_1 + r_2 \frac{b_2}{p_2} k_2 + r_2 \frac{c_2}{p_2} k_3 + \dots + r_2 \frac{r_2}{p_2} k_r \right] + \dots \\ & + \left[r_3 \frac{a_3}{p_3} k_1 + r_3 \frac{b_3}{p_3} k_2 + \dots + r_3 \frac{r_3}{p_3} k_r \right] + \dots + \left[r_n \frac{a_n}{p_n} k_1 + r_n \frac{b_n}{p_n} k_2 + \dots + r_n \frac{r_n}{p_n} k_r \right] + 1_r = 0 \end{aligned}$$

Az egyes egyenleteket összevonva:

$$\frac{a_1 a_1}{p_1} k_1 + \frac{a_1 b_1}{p_1} k_2 + \frac{a_1 c_1}{p_1} k_3 + \dots + \frac{a_1 r_1}{p_1} k_r + 1_1 = 0$$

$$\frac{a_2 b_1}{p_1} k_1 + \frac{b_2 b_1}{p_1} k_2 + \frac{b_2 c_1}{p_1} k_3 + \dots + \frac{b_2 r_1}{p_1} k_r + 1_2 = 0$$

$$\frac{a_3 c_1}{p_1} k_1 + \frac{b_3 c_1}{p_1} k_2 + \frac{c_3 c_1}{p_1} k_3 + \dots + \frac{c_3 r_1}{p_1} k_r + 1_3 = 0$$

.... II./

$$\frac{a_r r_1}{p_1} k_1 + \frac{b_r r_1}{p_1} k_2 + \frac{c_r r_1}{p_1} k_3 + \dots + \frac{r_r r_1}{p_1} k_r + 1_r = 0$$

Van tehát "r" egyenletünk /II./ "r" ismeretlennel /k/. Ezek a korrelációegyenletek, melyeket a normálegyenletekhez hasonlóan írhatunk fel: az együtthatók szabályosan következnek egymás mellett és alatt.

Az egyenletrendszer ismeretlenei a "k" korrelánsok, melyeket a Gauss kiküszöbölési eljárás alapján számítunk ki. Az eredményeket a I./-es egyenletekbe helyettesítve kapjuk a "v" javításokat.

Itt is számíthatjuk a súlyegység középhibáját, melynek értéke ismert:

$$m_0 = \sqrt{\frac{[p \ v \ v]}{n-k}} = \sqrt{\frac{[p \ v \ v]}{r}} \quad \dots \dots \text{III}$$

Az egyes megfigyelések középpontjában pedig:

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{p_1}}; m_2 = \frac{m_0}{\sqrt{p_2}}; m_3 = \frac{m_0}{\sqrt{p_3}} \dots \frac{m_0}{\sqrt{p_n}} \dots \text{IV}$$

Az ellenőrző egyenletet a 7/a-val jelzett egyenletrendszerből vezethetjük le, ha az egyes egyenleteket sorra megszorozzuk $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ el majd összegezzük őket:

$$\begin{aligned} p_1 v_1 v_1 &= a_1 v_1 k_1 + b_1 v_1 k_2 + c_1 v_1 k_3 + \dots + r_1 v_1 k_r \\ p_2 v_2 v_2 &= a_2 v_2 k_1 + b_2 v_2 k_2 + c_2 v_2 k_3 + \dots + r_2 v_2 k_r \\ p_3 v_3 v_3 &= a_3 v_3 k_1 + b_3 v_3 k_2 + c_3 v_3 k_3 + \dots + r_3 v_3 k_r \\ &\vdots \\ p_n v_n v_n &= a_n v_n k_1 + b_n v_n k_2 + c_n v_n k_3 + \dots + r_n v_n k_r \end{aligned}$$

$$[p \ v \ v] = [a \ v]k_1 + [b \ v]k_2 + [c \ v]k_3 + \dots + [r \ v]k_r \quad \dots 8./$$

Szorozzuk a 3./ alatti egyenleteket sorra $k, k, k, \dots, k_r$ -rel! Lesz:

[illegible]

Az egyes egyenleteket ilyen alakban is írhatjuk:

$$\begin{aligned} [a \ v] k_1 + 1_1 k_1 &= 0 \\ [b \ v] k_2 + 1_2 k_2 &= 0 \\ [c \ v] k_3 + 1_3 k_3 &= 0 \\ &\dots 1 \dots \dots \dots \\ [r \ v] k_r + 1_r k_r &= 0 \end{aligned} \quad \dots 9./$$

Össze-
gezve:

$$\begin{aligned} & [\bar{a} \ v] k_1 + [\bar{b} \ v] k_2 + [\bar{c} \ v] k_3 + \dots + [\bar{r} \ v] k_r + [\bar{l} \ k] = 0 \quad \dots \text{lo./} \\ & [\bar{a} \ v] k_1 + [\bar{b} \ v] k_2 + [\bar{c} \ v] k_3 + \dots + [\bar{r} \ v] k_r = -[\bar{l} \ k] \end{aligned}$$

Összehasonlítva ezt a 8./-as egyenlettel látjuk, hogy:

$$[p \ v \ v] = -[1 \ k] \dots\dots V.$$

Kikerekítések miatt az utolsó tizedesekben 1-2 egység eltérés lehetséges.

Egyenlő súlyu megfigyeléseknél "p" mindenütt 1.

Példa az egymástól függő megfigyelések kiegyenlítésére.

Az AB hosszát öt különböző variációban mértük meg, egy részének - "a"-nak - hosszát pedig hibamentesen ismerjük. Kérdés: mi lesz AB hosszának valószínű helyes értéke, ha az egyes megfigyelések:

Diagram showing a horizontal beam AB with dimensions:

- Length from A to a: $O_2 = 124.578$ m
- Length from a to B: $O_3 = 108.577$ m
- Length from A to center: $O_4 = 132.590$ m
- Length from center to B: $O_5 = 100.548$ m
- Length from a to center: $a = 8.000$ m

Közvetlenül hosszakat mérve a megfigyelések súlya a mért távolságok reciproka lesz:

$$p_1 = \frac{1}{233} \div 0.0043 \div 1; \quad p_2 = \frac{1}{124} = 0.0080 \div 2; \quad p_3 = \frac{1}{108} = 0.0093 \div 2;$$

$$p_4 = \frac{1}{132} = 0.0076 \div 2; \quad p_5 = \frac{1}{100} = 0.0100 \div 3$$

Most felírjuk az összes lehetséges független feltételi egyenletet:

$$\begin{aligned} 1./ \quad & 0_1 - 0_2 - 0_5 - a = 0 \\ & 0_1 - 0_2 - a = 0 \\ & 0_3 - 0_5 - a = 0 \end{aligned}$$

Képezzük az ellenmondási értékeket:

$$\begin{aligned} 233.142 - 124.578 - 100.548 - 8 &= + 0.016 \\ 132.590 - 124.578 - 8 &= + 0.012 \\ 108.577 - 100.548 - 8 &= + 0.029 \end{aligned}$$

A javítási egyenletek lesznek:

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 - v_5 + 0.016 &= 0 \\ v_4 - v_2 + 0.012 &= 0 \\ v_3 - v_5 + 0.029 &= 0 \end{aligned}$$

n	a	b	c	p	$\frac{aa}{p}$	$\frac{ab}{p}$	$\frac{ac}{p}$	$\frac{bb}{p}$	$\frac{bc}{p}$	$\frac{cc}{p}$	$\frac{a}{p} k_1$	$\frac{b}{p} k_2$	$\frac{c}{p} k_3$	v.	vv
1	+1	0	0	1	+1.000	0	0	0	0	0	+0.00109	0	0	+0.00109	+0.000.00118810
2	-1	-1	0	2	+0.500	+0.500	0	+0.500	0	0	-0.00054	+0.00627	0	+0.00573	+0.0000656558
3	0	0	+1	2	0	0	0	0	0	+0.500	0	0	-0.01762	-0.01762	+0.0006209288
4	0	+1	0	2	0	0	0	+0.500	0	0	0	-0.00627	0	-0.00627	+0.0000786258
5	-1	0	-1	3	+0.333	0	+0.333	0	0	+0.333	-0.000365	0	+0.011375	+0.01101	+0.0003636603
					$[\frac{aa}{p}]$	$[\frac{ab}{p}]$	$[\frac{ac}{p}]$	$[\frac{bb}{p}]$	$[\frac{bc}{p}]$	$[\frac{cc}{p}]$					
					+1.833	+0.500	+0.333	+1.000	0	+0.833					

A korreláns-egyenletek lesznek:

$$\begin{aligned} 1.833 k_1 + 0.500 k_2 + 0.333 k_3 &= 0.016 \\ 0.500 k_1 + 1.000 k_2 + 0.000 k_3 &= 0.012 \\ 0.333 k_1 + 0.000 k_2 + 0.833 k_3 &= 0.029 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$\begin{aligned} k_1 &= + 0.00109 \\ k_2 &= - 0.012545 \\ k_3 &= - 0.03523 \end{aligned}$$

A súlyegység középhibája:

$$m_0 = \frac{\sqrt{\frac{1}{p} v v'}}{r} = \pm 0.019618$$

Az egyes megfigyelések középhibája pedig:

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{p_1}} = \pm 0.019618; \quad m_2 = \frac{m_0}{\sqrt{p_2}} = \pm 0.0138; \quad m_3 = \frac{m_0}{\sqrt{p_3}} = \pm 0.0138$$

$$m_4 = \frac{m_0}{\sqrt{p_4}} = \pm 0.0138; \quad m_5 = \frac{m_0}{\sqrt{p_5}} = \pm 0.0113$$

Számítás végén az eredményeket is táblázatba foglaljuk:

n	Mért értékek	Javítások	Kiagyanlított értékek	p	Középhibák	Jegyzet
1	233.142	+0.00109	233.14309	1	± 0.019618	$m_0 = \pm 0.019618$
2	124.578	+0.00573	124.58373	2	± 0.0138	
3	108.577	-0.01762	108.55938	2	± 0.0138	
4	132.590	-0.00627	132.58373	2	± 0.0138	
5	100.548	+0.011375	100.559375	3	± 0.0113	

A hibahalmazódás.

A valószínű helyes értéket hibával terhelt megfigyelésekből vezettük le, tehát szintén hibás lesz: nem adja az abszolút helyes értéket.

Sokszor előfordul, hogy ilyen hibával terhelt értéket kell számításunkba bevonnunk, tehát tudnunk kell, hogy ezáltal milyen hiba származik az eredményben.

Legyen a valószínű helyes érték először egy megfigyelt értéknek és egy hibamentes számnak a szorzata:

ha "x" középhibáját "m_x"-el, "0" középhibáját pedig "m₀"-el jelöljük, akkor kell, hogy

$$\pm m_x = \pm a m_0$$

.... I.

legyen, ugyanis

$$\begin{aligned} x \pm m_x &= a/0 \pm m_0/ \\ x \pm m_x &= a/0 \pm a m_0/ \end{aligned}$$

Az egyenlet értéke azonban nem változik, ha mindkét oldalból ugyanakkora számot levonunk. Márpedig /x = a0/-et levonva valóban

marad. Ugyanez az eset áll fenn akkor is, ha "a" nem szorzó, hanem osztó, mert ez esetben $\frac{1}{a} = b$ helyettesítéssel élve visszajuthatunk az első esetre.

Legyen másodszor a keresett érték két mért érték összegével egyenlő $x = 0 + 0'$. Ekkor már $m_x = m_0 + m_0'$, mert "m₀" és "m₀'" csak megbízhatósági tényező, "m_x" értékének pedig kisebbnek kell lennie, mint azok összege.

Miután az "0" és "0'" értékeket "n"-szer határoztuk meg, "x"-re is "n" értéket fogunk kapni.

Jelöljük az egyes megfigyelések eltérését az abszolút helyes értéktől "ε" ill. "ε'" -el, az "x" értékek eltérését pedig az abszolút helyes értéktől "δ" -val. Irhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} x_1 &= 0_1 + 0'_1 \\ x_2 &= 0_2 + 0'_2 \\ x_3 &= 0_3 + 0'_3 \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= 0_n + 0'_n \end{aligned}$$

.... 1./

Az abszolút helyes értékekkel kifejezve:

$$\begin{aligned} x_1 + \delta_1 &= X = L + L' = /0_1 + \varepsilon_1/ + /0'_1 + \varepsilon'_1/ \\ x_2 + \delta_2 &= X = L + L' = /0_2 + \varepsilon_2/ + /0'_2 + \varepsilon'_2/ \\ x_3 + \delta_3 &= X = L + L' = /0_3 + \varepsilon_3/ + /0'_3 + \varepsilon'_3/ \\ &\dots\dots\dots \\ x_n + \delta_n &= X = L + L' = /0_n + \varepsilon_n/ + /0'_n + \varepsilon'_n/ \end{aligned}$$

.... 2./

Ha az 1./-es egyenleteket sorra levonjuk a 2./-ekből

$$\begin{aligned} x_1 + \delta_1 &= 0_1 + \varepsilon_1 + 0'_1 + \varepsilon'_1 \\ -x_2 &= -0_1 \pm 0'_1 \\ \delta_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon'_1 \\ \delta_2 &= \varepsilon_2 + \varepsilon'_2 \\ \delta_3 &= \varepsilon_3 + \varepsilon'_3 \\ \delta_n &= \varepsilon_n + \varepsilon'_n \end{aligned}$$

Analógia alapján:

Négyzetreemelve és összegezve:

$$\begin{aligned} \delta_1^2 &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1'^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_1' & \delta_n^2 &= \varepsilon_n^2 + \varepsilon_n'^2 + 2\varepsilon_n \varepsilon_n' \\ \delta_2^2 &= \varepsilon_2^2 + \varepsilon_2'^2 + 2\varepsilon_2 \varepsilon_2' & [\delta^2] &= [\varepsilon^2] + [\varepsilon'^2] + 2[\varepsilon \varepsilon'] \\ \delta_3^2 &= \varepsilon_3^2 + \varepsilon_3'^2 + 2\varepsilon_3 \varepsilon_3' & \end{aligned}$$

Mivel abszolút helyes értékekről van szó, tudjuk, hogy $n = \infty$ -nek kell lennie, ebben az esetben pedig

$$[\varepsilon \varepsilon', \bar{t}] = 0$$

/lásd: Egyenlő súlyú közvetlen megfigyelések kiegyenlítése: a való-
szintű helyes érték középhibájának számításánál. Ott "1" néven szere-
pelt!/

Igy tehát

$$[\mathcal{S}^2] = [\mathcal{E}^2] + [\mathcal{E}'^2]$$

lesz

Ha most a hibák középértékét vesszük, vagyis az egyenlet mindkét oldalán osztunk "n"-el, akkor a hibák helyett középhibákat kapunk, vagyis:

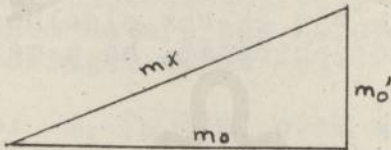
$$\frac{[\beta^2]}{n} = m_x^2; \quad \frac{[\varepsilon^2]}{n} = m_0^2; \quad \frac{[\varepsilon'^2]}{n} = m_0'^2$$

Innen

$$m_X = \frac{m_a^2}{\sqrt{m_a^2 + m_o^2}}$$

... II.

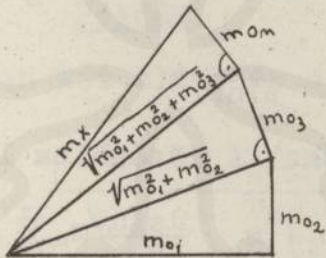
Ez a hibahalmazozás képlete, melyet grafikusán is ábrázolhatunk:



Ha a valószínű helyes érték középhibája több megfigyeléstől függ,
akkor a képlet kibővül:

$$m_x = \sqrt{m_{o_1}^2 + m_{o_2}^2 + m_{o_3}^2 + \dots + m_{o_n}^2}$$

Vagy ugyanez grafikus ábrázolással:



Előfordulhat az az eset, hogy a középhibák egyenlőek, vagyis

$$\frac{m_{o_1}}{m_x} = \frac{m_{o_2}}{\sqrt{n}} = \frac{m_{o_3}}{m_o} = \dots = \frac{m_{o_n}}{\sqrt{n}} = m_o$$

ekkor

Ha a mért értékek között lineáris összefüggések vannak, akkor a középhibát előre fel tudjuk írni az I./ és II./ hibahalmazozódási képletek alapján:

$$x = \frac{a_0 + a'_0 + a''_0 + \dots}{m_x \sqrt{a_0^2 + a'^0_0 + a''_0^2 + \dots}}$$

Ha ellenben a mért értékek és a valószínű helyes érték között általános az összefüggés, akkor a megoldás a következő:

jelöljük "x" -el a valószínű helyes értéket

" m_x "-el a " " érték középhibáját;

"É"-al a " " " abszolút hibáját;

"0" -el a megfigyelt értékeket.

"m."-el azok középhibáját

" ε_0 "-el "abszolút hibáját."

Akkor a megfigyelések és a keresett érték közti összefüggést függvényalakban írhatjuk fel:

$$x + \varepsilon = f \left[\frac{1}{O_1 + \varepsilon_{O_1}} , \frac{1}{O_2 + \varepsilon_{O_2}} , \frac{1}{O_3 + \varepsilon_{O_3}} \dots \frac{1}{O_m + \varepsilon_{O_m}} \right]$$

Mivel az " ε_0 " értékek oly kicsinyek, hogy ezeknek második és magasabb hatványait elhanyagolhatjuk, az " ε "-t számíthatjuk függvényünkkel azáltal, hogy a függvényt Taylor-sor szerint sorbafejtjük a négyzetes és magasabb hatványok elhagyásával.

$$\varepsilon = f / 0_1 + \varepsilon_{01}, 0_2 + \varepsilon_{02}, 0_3 + \varepsilon_{03} \dots 0_n + \varepsilon_{0n} / - f / 0_1, 0_2, 0_3 \dots 0_n$$

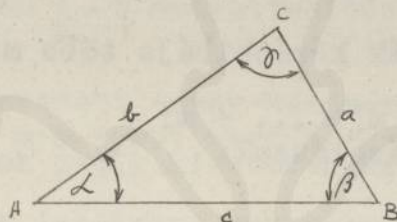
$$\varepsilon = \frac{\partial f}{\partial 0_1} \varepsilon_{01} + \frac{\partial f}{\partial 0_2} \varepsilon_{02} + \frac{\partial f}{\partial 0_3} \varepsilon_{03} + \dots \frac{\partial f}{\partial 0_n} \varepsilon_{0n}$$

Az abszolút hibák azonban ismeretlenek, ezek helyett jó közelítéssel a középhibákat vehetjük és mivel most már lineáris összefüggéseink vannak, az ismert módon írhatjuk:

$$\pm m_x = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial 0_1} \pm m_{01}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial 0_2} \pm m_{02}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial 0_3} \pm m_{03}\right)^2 + \dots}$$

Példa az általánosan összefüggő megfigyelések valószínű helyes értékének és ennek középhibájának meghatározásában.

Az ABC háromszögben mértük "a" és "b" oldalhosszakát és " α " szöget. Keressük " β " értékét és középhibáját, ha a mért értékek középhibáját ismerjük.



A sinus-tétel alapján:

$$\sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha$$

Innen számítható " β " értéke. A középhiba lesz:

$$\pm \frac{a \sin \beta}{a \beta} m_\beta = \sqrt{\left(\frac{\partial \sin \beta}{\partial \alpha} m_\alpha\right)^2 + \left(\frac{\partial \sin \beta}{\partial b} m_b\right)^2 + \left(\frac{\partial \sin \beta}{\partial a} m_a\right)^2}$$

A differenciálásokat végrehajtva:

$$\cos \beta \cdot m_\beta = \sqrt{\left(\frac{b}{a} \cos \alpha \cdot m_\alpha\right)^2 + \left(\frac{\sin \alpha}{a} \cdot 1 \cdot m_b\right)^2 + \left(b \sin \alpha \cdot \frac{-1}{a^2} \cdot m_a\right)^2}$$

De tudjuk, hogy

$$\frac{b}{a} \cos \alpha = \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \alpha} = \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha ; \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} ; b \sin \alpha = a \sin \beta$$

Ezeket az értékeket behelyettesítve:

$$\cos \beta \cdot m_\beta = \sqrt{\sin^2 \beta / \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot m_\alpha^2 + \sin^2 \beta \cdot \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \sin^2 \beta \cdot \left(-\frac{m_a}{a}\right)^2}$$

" $\sin \beta$ "-t kiemelve a gyökjel alól:

$$m_\beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot \sqrt{(\operatorname{ctg} \alpha \cdot m_\alpha)^2 + \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{m_a}{a}\right)^2} = \operatorname{tg} \beta \sqrt{\left(\frac{m_\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 + \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{m_a}{a}\right)^2}$$

Vagyis minél nagyobb a " β ", annál nagyobb a középhibája /tg függvényértéke az első ténnyedben nő! / és minél nagyobb az " α ", az " m_β " annál kisebb lesz.

A gyakorlatban megkülönböztetünk:

1./ középhibát, mely mindig egy adott értékre vonatkozik, és

2./ relatív hibát, amelyen azt a törtszámot értjük, amelynek a számlálója az egység, nevezője pedig az az érték, melyen a hiba az egységgel lehet egyenlő.

Pl. ad l./ $64.532 \text{ m} \pm 0.012 \text{ m}$: középhiba $\pm 0.012 \text{ m}$
hosszmérésnél $1/2000$ a megengedett hiba.

Ez azt jelenti, hogy 2000 méteren a hiba legfeljebb 1 m lehet, tehát pl. 500 m-en:

$$1: 2000 = x : 500$$

$$x = \frac{1 \cdot 500}{2000} = 0.25 \text{ m}$$

Hosszmérések pontosságának megjelölésére a megengedett maximális relatív hibát használják.

Szögméréseknél az elérendő pontosságot vagy a megengedett középhibával jellemzik /a leolvasási határérték háromszorosa/ vagy pedig az alkalmazandó műszer pontosságát adják meg.

A hibahalmazódás képlete: $m_x = \sqrt{m_o^2 + m_o'^2}$ csak akkor érvényes, ha a megfigyeléseket egymástól függetlenül végeztük. Ha azonban 0 és 0' értéket ugyanazon csoportbeli normálegyenletekből számítottuk és ezen a módon kaptuk m_o , m_o' , és m_o , értékeket, akkor a képlet megváltozik:

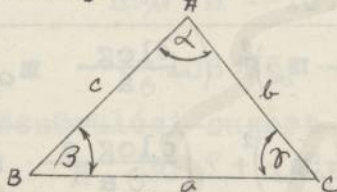
$$F = a_1 0 + a_2 0'$$

$$m_F^2 = a_1 a_1 m_o + a_2 a_2 m_o' + a_1 a_2 m_o'$$

$$m_F = \sqrt{a_1^2 m_o^2 + 2a_1 a_2 m_o m_o' + a_2^2 m_o'^2}$$

Példák.

1./ Adva van egy háromszögen két oldal és egy szög, számítandó a másik szög és középhibája!



$$a = 115.64 \pm 0.05 \text{ m}$$

$$b = 133.19 \pm 0.06 \text{ m}$$

$$\alpha = 52^\circ 36' 46'' \pm 10''$$

$$\beta = ? \quad m_\beta = ?$$

a./ megoldás számológéppel - segédkönyv: Brandenburg.

$$\sin \beta = \frac{b}{a} \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \sin 52^\circ 36' 46'' = 0.7945324$$

$$\frac{176}{0.7945500}$$

$$\sin \beta = \frac{133.19}{115.64} \cdot 0.7945500 = 0.9151342$$

$$\frac{1161}{181} \dots 63^\circ 13' 20''$$

$$\beta = 63^\circ 13' 29''$$

A középhiba lesz:

$$\cos \beta \pm m_\beta = \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha}{a} \pm m_a\right)^2 + \left(-\frac{b \sin \alpha}{a^2} \pm m_a\right)^2 + \left(\frac{b}{a} \cdot \cos \alpha \pm m_\alpha\right)^2}$$

$$\cos \beta \pm m_\beta = \sqrt{\left(\frac{\sin \beta}{b} \pm m_b\right)^2 + \left(-\frac{\sin \beta}{a} \pm m_a\right)^2 + \left(\frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \alpha} \pm m_\alpha\right)^2}$$

$$\cos \beta \cdot \pm m_{\beta} = \sin \beta \sqrt{\left(\frac{\pm m_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pm m_a}{a}\right)^2 + (\operatorname{ctg} \alpha \cdot \pm m_{\alpha})^2}$$

$$\pm m_{\beta} = \operatorname{tg} \beta \sqrt{\left(\frac{\pm m_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pm m_a}{a}\right)^2 + (\operatorname{ctg} \alpha \cdot \pm m_{\alpha})^2}$$

Most " m_{α} "-t átváltoztatjuk ivértékre:

$$m_{\alpha} = \frac{10}{206265} = 0.00004848$$

$$\pm m_{\beta} = \operatorname{tg} 66^{\circ}13'29'' \sqrt{\left(\frac{\pm 0.06}{133.19}\right)^2 + \left(\frac{\pm 0.05}{115.64}\right)^2 + \operatorname{ctg} 52^{\circ}36'46'' \pm 0.00004848}$$

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{tg} 66^{\circ}13'29'' & \dots & 2.2696873 \\ 9'' & \dots & \frac{2684}{2.2699557} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{ctg} 52^{\circ}36'46'' & \dots & 0.7642505 \\ 6'' & \dots & \frac{461}{0.7642044} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \pm m_{\beta} &= 2.2699557 \sqrt{0.000450^2 + 0.000432^2 + 0.000037^2} \\ &= 2.2699557 \sqrt{0.000,000,390,493} = 2.2699557 \cdot 0.0006249 \end{aligned}$$

$$\pm m_{\beta} = 0.0014185$$

$$\pm m_{\beta}'' = m_{\beta} \cdot 206265'' = 292'' = 4'52''$$

b./ megoldás logaritmussal - segédkönyv: Vega.

A számítás menete egyszerűbb lesz, ha logaritmusokkal dolgozunk. Ebben az esetben u.i. a partiális differenciálhányados az egységreeső változást adja, ez pedig a táblázatban /Vega/ a pp.-nél /partes proportionales/ adva van. Az előbbi példa logaritmusokkal kidolgozva:

$$\log \sin \beta = \log b + \log \sin \alpha - \log a$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log \sin \beta}{\partial \beta} \cdot m_{\beta} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \log b}{\partial b} \cdot m_b\right)^2 + \left(\frac{\partial \log \sin \alpha}{\partial \alpha} \cdot m_{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \log a}{\partial a} \cdot m_a\right)^2} \\ m_{\beta} &= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \log b}{\partial b} \cdot m_b\right)^2 + \left(\frac{\partial \log \sin \alpha}{\partial \alpha} \cdot m_{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \log a}{\partial a} \cdot m_a\right)^2}}{\frac{\partial \log \sin \beta}{\partial \beta}} \end{aligned}$$

Függvény	arg.	log.	Táblázati különbség pp	Az egység. melyre vonatkozik pp	Közép-hibó m	$\frac{\partial \log m}{\partial} = \text{pp.m}$	$\left(\frac{\partial \log m}{\partial}\right)^2$
$\sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha$	b	2.1244 716	326	0.01 *	0.06	1956	3825936
	$\sin \alpha$	+ 9.9001213 -10	16.1	1" **	10	161	25921
	b sin α	12.0245929 -10					
	a	- 2.0631081	375	0.01	0.05	1875	3515625
	$\sin \beta$	9.9614848 -10	9.3	1"			7367482

* 133.19 közvetlenül kereshető a Vega logaritmus-táblázatban. A keresett számban az utolsó egység értéke: 0.01. Ha 13.31-et kerestünk volna, akkor az egység 0.001 volna, végül ha 1331.93-at kerestünk volna, akkor a 3-at interpolálni kellett volna, tehát a táblázati különbség a 0.1-re vonatkoznék. Erre nagyon kell ügyelni!

** A táblázati különbség 10"-re 161, tehát 1"-re 16.1

Végül az ismeretlen értéke:

$$m = \frac{\sqrt{7367482} - 2714.3}{9.3} = 292''$$

Libella érzékenységeinek meghatározása.

A libella egy osztása /pars/ : p = 2 m/m. A mérés adatait táblázatba foglaljuk:

n	I. libella helyzet					II. libella helyzet					x ₂ - x ₁	$\frac{K_2 - K_1}{x_2 - x_1}$	ε - ε'	V	VV
	buborék előjele m	buborék vége n	n-m	$\frac{n-m}{2}$ x ₁	Korong leolvasása K ₁	buborék előjele m	buborék vége n	n-m	$\frac{n-m}{2}$ x ₂	Korong leolvasása K ₂					
1	38	04	-34	-17	162.5"	04	38	34	17	6'1698"	34	367.3"	108.03"	-128"	16384
2	30	13	-17	-0.85	84.1"	12	29	17	0.85	3'100.6"	17	196.5"	116.76"	-10.01"	100.2001
3	36	06	-30	-15	30"	14	28	14	0.7	3'60"	22	210.0"	95.45"	+11.30"	127.6900
													[ε']	[V]	[VV]
													320.24	0	229.5285

$$\varepsilon = \frac{[\varepsilon']}{n} = \frac{320.24}{3} = 106.75''$$

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[VV]}{n(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{229.5285}{6}} = \pm 6.18''$$

$$m \cdot \mu \sqrt{n} = \pm 10.69''$$

$$\varepsilon = 106.75'' \pm 6.18''$$

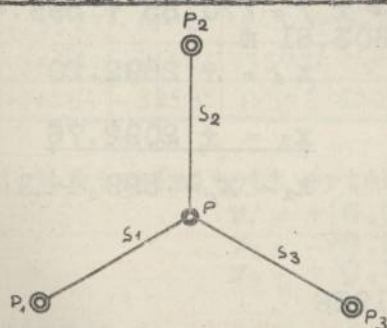
A libella köszörülési-sugara pedig:

$$R = \frac{p \cdot \rho}{\varepsilon} = \frac{2 \cdot 206264}{106.75} = 3864.41 \text{ m/m}$$

$$R = 3.86441 \text{ m}$$

/Az érzékenység meghatározásának elméletét lásd: a segédműszerek tárgyalásánál./

Pont összrendezőinek meghatározása tisztán hossz mérés alapján.



Adva van 3 pont összrendezői:

$$\begin{aligned} P_1 : x_1 &= + 2092.76 \text{ m} & y_1 &= + 5132.30 \text{ m} \\ P_2 : x_2 &= + 2692.20 \text{ m} & y_2 &= + 5203.15 \text{ m} \\ P_3 : x_3 &= + 2210.59 \text{ m} & y_3 &= + 5665.42 \text{ m} \end{aligned}$$

A "P" pontot hossz mérésekkel határoztuk meg. Megmértük:

$$s_1 = 306.00 \text{ m}; s_2 = 387.36 \text{ m}; s_3 = 354.86 \text{ m}.$$

Két hossz méréssel már meg van határozva a "P" pont, tehát van egy főlős mérésünk. A mérésünk hibával van terhelve, tehát különböző értékeket kapunk az új "P" pont összrendezőire aszerint, amint más-más két "s" értékből számítjuk. Javítanunk kell tehát "s₁"-et "v₁"-el, "s₂"-t "v₂"-vel, "s₃"-t "v₃"-al. Az egyenleteink lesznek:

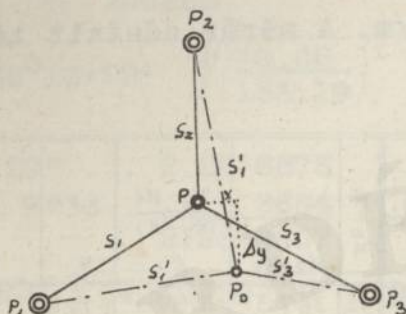
$$\begin{aligned} s_1 + v_1 &= \sqrt{x - x_1 / 2 + y - y_1 / 2} \\ s_2 + v_2 &= \sqrt{x - x_2 / 2 + y - y_2 / 2} \\ s_3 + v_3 &= \sqrt{x - x_3 / 2 + y - y_3 / 2} \end{aligned}$$

Ezek nem lineáris egyenletek. Először két tetszőszerinti "s" értékből egy közelítő "x₀" és "y₀"-t számítunk ki és ehhez számítjuk a Δx és Δy értékeket, úgy hogy x = x₀ + Δx és y = y₀ + Δy legyen.

Igy a fenti egyenletek átalakulnak9

$$\begin{aligned} s_1 + v_1 &= \sqrt{x_0 + \Delta x - x_1 / 2 + y_0 + \Delta y - y_1 / 2} \\ s_2 + v_2 &= \sqrt{x_0 + \Delta x - x_2 / 2 + y_0 + \Delta y - y_2 / 2} \\ s_3 + v_3 &= \sqrt{x_0 + \Delta x - x_3 / 2 + y_0 + \Delta y - y_3 / 2} \end{aligned}$$

Fejtsük sorba ezeket az egyenleteket a Taylor-tétel szerint a másod és magasabb rendű tagok elhanyagolásával:



$$s_1 + v_1 = \sqrt{x_0 - x_1 / 2 + y_0 - y_1 / 2} + \frac{x_0 - x_1}{\sqrt{x_0 - x_1 / 2 + y_0 - y_1 / 2}} \Delta x + \frac{y_0 - y_1}{\sqrt{x_0 - x_1 / 2 + y_0 - y_1 / 2}} \Delta y$$

stb.

Jelöljük $\sqrt{x_0 - x_1 / 2 + y_0 - y_1 / 2} = s'_1$ -tel stb. Behelyettesítve az előbbi egyenletbe, lesz:

$$s_1 + v_1 = s'_1 + \frac{x_0 - x_1}{s'_1} \Delta x + \frac{y_0 - y_1}{s'_1} \Delta y$$

Az egyenleteket rendezés után analógia alapján írhatjuk:

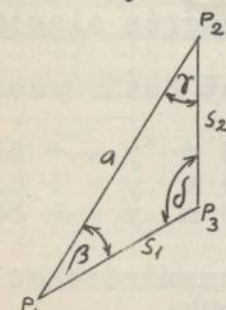
$$v_1 = \frac{x_0 - x_1}{s'_1} \Delta x + \frac{y_0 - y_1}{s'_1} \Delta y + s'_1 - s_1$$

$$v_2 = \frac{x_0 - x_2}{s'_2} \Delta x + \frac{y_0 - y_2}{s'_2} \Delta y + s'_2 - s_2$$

$$v_3 = \frac{x_0 - x_3}{s'_3} \Delta x + \frac{y_0 - y_3}{s'_3} \Delta y + s'_3 - s_3$$

Kaptuk a II. csoportba tartozó kiegyenlítést közvetett megfigyelések-nél a 3./ alatti hibaegyenleteket. A számítás menete most már teljesen az ott előadottak szerint megy.

Számítjuk az "x₀" és "y₀"-t a "P₁" és "P₂" pontokból.



$$P_1 P_2 = \sqrt{y_2 - y_1 / 2 + x_2 - x_1 / 2} = \sqrt{70.85^2 + 599.44^2}$$

$$P_1 P_2 = a = 603.61 \text{ m}$$

$$y_2 = + 5203.15$$

$$x_2 = + 2692.20$$

$$y_1 = \pm 5132.30$$

$$x_2 = \pm 2092.76$$

$$y_2 - y_1 = 70.85;$$

$$x_2 - x_1 = 599.44$$

$$\tan \alpha_{P_1 P_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{70.85}{599.44} = 0.1181936$$

$$\alpha_{P_1 P_2} = 6^\circ 44' 27''.$$

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{p}{s - s_2} = \frac{78.668}{261.125} = 0.3012657 ; \frac{\beta}{2} = 16^\circ 45' 57'' ; \beta = 33^\circ 31' 54''$$

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{p}{s-s_1} = \frac{78.668}{342.485} = 0.2296977 ; \frac{\gamma}{2} = 12^{\circ}56'11'' ; \gamma = 25^{\circ}52'22''$$

$$\text{ahol } p = \sqrt{\frac{(s-a)(s-s_1)(s-s_2)}{s}} \text{ és } s = \frac{s_1 + s_2 - a}{2} ; \delta = 120^{\circ}35'44''$$

$$\begin{aligned} a &= 603.61 \\ s_1 &= 306.00 \\ s_2 &= 387.36 \\ 2s &= 1298.97 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s &= 648.485 \\ s - a &= 44.875 \\ s - s_1 &= 342.485 \\ s - s_2 &= 261.125 \end{aligned}$$

Most következik a csapásszögek képzése. Általános képlete:
 $d_{\mu} = d_{\mu-1} + \omega_{\mu} \pm 180^{\circ} / -360^{\circ} /$, ahol az adott " ω " szögnek a csapásszögek képzésének irányában balkez felé kell esniök.

$$\begin{aligned} \alpha_{P_1 P_2} &= 186^{\circ}44'27'' \\ \beta &= 33^{\circ}31'54'' \\ \hline &220^{\circ}16'21'' \\ - 180^{\circ} \\ \hline \alpha_{P_0} &= 40^{\circ}16'21'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{P_1 P_0} &= 40^{\circ}16'21'' \\ \beta &= 120^{\circ}35'44'' \\ \hline &160^{\circ}52'05'' \\ + 180^{\circ} \\ \hline \alpha_{P_0 P_2} &= 340^{\circ}52'05'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{P_0 P_2} &= 340^{\circ}52'05'' \\ \gamma &= 25^{\circ}52'22'' \\ \hline &366^{\circ}44'27'' \\ - 180^{\circ} \\ \hline \alpha_{P_2 P_1} &= 186^{\circ}44'27'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1 + s_1 \cos \alpha_{1-0} = + 2092.76 + 306.00 \times 0.7629787 = 2326.23 \\ y_0 &= y_1 + s_1 \sin \alpha_{1-0} = + 5132.30 + 306.00 \times 0.6464237 = 5330.11 \end{aligned}$$

Ellenőrzésül:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_2 + s_2 \cos \alpha_{2-0} = + 2692.20 + 387.36 \times 0.9447663 = 2326.23 \\ y_0 &= y_2 + s_2 \sin \alpha_{2-0} = + 5203.15 + 387.36 \times 0.3277447 = 5330.11 \end{aligned}$$

$$\sin \alpha_{1-0} = \sin 40^{\circ}16'21'' = + 0.6464237$$

$$\cos \alpha_{1-0} = \cos 40^{\circ}16'21'' = + 0.7629787$$

$$\sin \alpha_{2-0} = \sin 160^{\circ}51'45'' = + 0.3277447$$

$$\cos \alpha_{2-0} = \cos 160^{\circ}51'45'' = + 0.9447663$$

" P_0 " közelítő értékeinek vesszük

$$x_0 = 2326.23$$

$$y_0 = 5330.11$$

Most már számíthatjuk a hibaegyenletekben lévő értékeket:

Sorsz.	$x_0 - x_i$	$y_0 - y_i$	$(x_0 - x_i)^2$	$(y_0 - y_i)^2$	S_i^2	S_i'	S_i	$\frac{x_0 - x_i}{S_i'}$	$\frac{y_0 - y_i}{S_i'}$	$S_i - S_i'$
1	+233.47	+197.81	54508.2409	39128.7961	93637.0370	306.00	306.00	+0.76	+0.65	0.00
2	-365.97	+126.96	133934.0409	16118.8416	150052.8825	387.37	387.36	-0.94	+0.33	+0.01
3	+115.64	-335.31	13372.6096	112432.7961	125805.4057	354.69	354.86	+0.33	-0.95	-0.17

Az így kiszámított értékeket a hibaegyenletekbe helyettesítve lesz:

$$\begin{aligned} v_1 &= + 0.76 \Delta x + 0.65 \Delta y + 0.00 \\ v_2 &= - 0.94 \Delta x + 0.33 \Delta y + 0.01 \\ v_3 &= + 0.33 \Delta x - 0.95 \Delta y + 0.17 \end{aligned}$$

Hosszmérési eredményeink vannak, tehát a súlyok fordítva arányosak a hosszakkal, vagyis:

$$p_1 = \frac{1}{306}$$

$$\frac{6000}{306}$$

$$20 = p_1$$

$$p_2 = \frac{1}{387}$$

szorozzuk meg

$$\frac{6000}{387}$$

végezzük el az osztást és vesszük a kikerekített egész számokat!

$$16 = p_2$$

$$p_3 = \frac{1}{355}$$

6000-el!

$$\frac{6000}{355}$$

$$17 = p_3$$

Számíthatjuk a normálegyenletek együtthatóit:

Sorsz.	a	b	O.	p	paa	pab	paO	pbb	pbo	aAx	bAy	O	v	vv
1	+0.76	+0.65	0.00	20	+11.55	+9.88	0.00	+8.45	0.00	+0.030	-0.072	0.00	-0.042	0.001764
2	-0.94	+0.33	-0.01	16	+14.14	-4.96	+0.15	+1.74	-0.05	-0.038	-0.036	+0.01	-0.064	0.004096
3	+0.33	-0.95	+0.17	17	+1.85	-5.33	+0.95	+15.34	-2.75	+0.013	+0.105	-0.17	-0.052	0.002704
					[paa]	[pab]	[paO]	[pbb]	[pbl]				*	[vv]
					+27.54	-0.41	+1.10	+25.53	-2.80					0.008564

*Az a tény, hogy valamennyi "v" /-/- előjeli, arra enged következtetni, hogy mérésünkben szisztematikus hiba van: a méréshez használt szalag tényleges hossza kisebb volt, mint a névleges hossza, s így a mért hosszak névleg hosszabbak, mint amínők a valóságban.

pvv	pav	pbv	Javított hosszak
0.035280	-0.638	-0.546	305.958
0.065536	+0.963	-0.338	387.296
0.045968	-0.292	+0.840	354.808
	+0.963	+0.840	
	-0.930	-0.884	
0.146784	± 0	± 0	

Normál-egyenleteink lesznek:

$$\begin{aligned} 27.54 \Delta x - 0.41 \Delta y &= +1.1 & /0.41 & \quad 11.2914 \Delta x - 0.1681 \Delta y = 0.4510 \\ -0.41 \Delta x + 25.53 \Delta y &= -2.8 & /27.54 & \quad -11.2914 \Delta x + 703.0962 \Delta y = -77.1120 \\ & & & \quad + 702.9281 \Delta y = -76.6610 \end{aligned}$$

$$\Delta y = -\frac{76.6610}{702.9281} = -0.11$$

"Δy" értékét az első egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned} 27.54 \Delta x - 0.41 /-0.11/ &= 1.1 \\ 27.54 \Delta x + 0.0451 &= 1.1 \end{aligned}$$

$$\Delta x = \frac{1.0549}{27.54} = +0.04$$

A valódi "x" és "y" értékek tehát lesznek:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \Delta x = 2326.23 + 0.04 = 2326.27 \text{ m} \\ y &= y_0 + \Delta y = 5330.11 - 0.11 = 5330.00 \text{ "} \end{aligned}$$

$$m_0 = \sqrt{\frac{[p \ v \ w]}{n-k}} = \sqrt{\frac{0.146784}{3-2}} = \sqrt{0.146784} = \pm 0.3831$$

A súlykoefficiensek számítása:

$$\begin{aligned} 27.54 Q_{11} - 0.41 Q_{12} &= 1 & /0.41 \\ -0.41 Q_{11} + 25.53 Q_{12} &= 0 & /27.54 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11.2914 Q_{11} - 0.1681 Q_{12} &= 0.41 \\ -11.2914 Q_{11} + 703.0962 Q_{12} &= 0 \\ + 702.9281 Q_{12} &= 0.41 \end{aligned}$$

$$Q_{12} = \frac{0.41}{702.9281} = 0.000583$$

$$-0.41 Q_{11} + 25.53 \times 0.000583 = 0$$

$$Q_{11} = \frac{25.53 \times 0.000583}{0.41} = 0.036302$$

$$\begin{aligned} 27.54 Q_{21} - 0.41 Q_{22} &= 0 & /0.41 \\ -0.41 Q_{21} + 25.53 Q_{22} &= 1 & /27.54 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11.2914 Q_{21} - 0.1681 Q_{22} &= 0 \\ -11.2914 Q_{21} + 703.0962 Q_{22} &= 27.54 \\ 702.9281 Q_{22} &= 27.54 \end{aligned}$$

$$Q_{22} = \frac{27.54}{702.9281} = 0.039179$$

$$27.54 Q_{21} - 0.41 \times 0.039179 = 0$$

$$Q_{21} = \frac{0.41 \times 0.039179}{27.54} = 0.000583$$

$$P_x = \frac{1}{Q_{11}} = \frac{1}{0.036302} \div 28 ;$$

$$P_y = \frac{1}{Q_{22}} = \frac{1}{0.039179} \div 26$$

$$m_x = m_p \sqrt{Q_{11}} = 0.3831 \sqrt{0.036302} = 0.0749 ; m_y = m_p \sqrt{Q_{22}} = 0.0758$$

Végeredményben:

$$x = 2326.27 \text{ m} \pm 0.0749 ; \text{ sulya: } 28$$

$$y = 5330.00 \text{ m} \pm 0.0758 ; \text{ " } 26$$

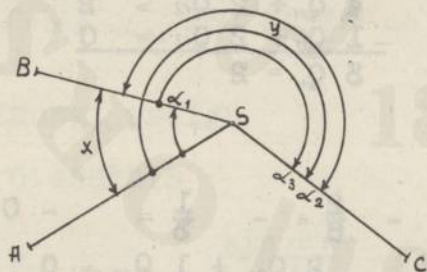
Az ábrán jelzett $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ szögeket "Schretter"-féle eljárás szerint megmértük, hogy meghatározzuk az "x" és "y" szög nagyságát.

A mérési adatok a következők:

$$\alpha_1 = 43^\circ 37' 15''$$

$$\alpha_2 = 258^\circ 12' 34''$$

$$\alpha_3 = 204^\circ 34' 55''$$



Az ábra alapján felírhatjuk a következő egyenleteket:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + v_1 &= x & \text{innen} \\ \alpha_2 + v_2 &= x + y & \text{---} \\ \alpha_3 + v_3 &= y & \text{---} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= x - \alpha_1 \\ v_2 &= x + y - \alpha_2 \\ v_3 &= y - \alpha_3 \end{aligned}$$

Hogy ne kelljen nagy számokkal dolgozni, közelítő értékeket veszünk fel.

$$x_0 = \alpha_1 = 43^\circ 37' 15''$$

$$\text{és} \quad y_0 = \alpha_3 = 204^\circ 34' 55''$$

$$x = x_0 + \Delta x$$

$$y = y_0 + \Delta y$$

A javítási egyenletek lesznek:

$$\begin{aligned} v_1 &= x_0 + \Delta x - \alpha_1 \\ v_2 &= x_0 + \Delta x + y_0 + \Delta y - \alpha_2 \\ v_3 &= y_0 + \Delta y - \alpha_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \Delta x \\ &= \Delta x + \Delta y - 24'' \\ &= \Delta y \end{aligned}$$

Most számítsuk a normál-egyenletek együtthatóit!

Sor- szám	a	b	o	aa	ab	ao	bb	bo
1	+1	0	0	+1	0	0	0	0
2	+1	+1	+24	+1	+1	+24	+1	+24
3	0	+1	0	0	0	0	+1	0
				[aa]	[ab]	[ao]	[bb]	[bo]
				+2	+1	+24	+2	+24

A normálegyenletek:

$$\begin{aligned} 2 \Delta x + 1 \Delta y &= 24 \\ \Delta x + 2 \Delta y &= 24 \quad / .2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2 \Delta x + 1 \Delta y &= 24 \\ 2 \Delta x + 4 \Delta y &= 48 \\ \hline 3 \Delta y &= 24 \end{aligned}$$

$$\Delta y = \frac{24}{3} = +8''$$

$$y = y_0 + \Delta y = 204^\circ 34' 55'' + 8'' = 204^\circ 35' 03''$$

$$\Delta x - 24 - 2 \Delta y = +8'' \quad x = x_0 + \Delta x = 43^\circ 37' 15'' + 8'' = 43^\circ 37' 23''$$

$a\Delta x$	$b\Delta y$	-o	v	av	bv	vv	Javított szögek
+8'	0	0	+8	+64	0	64	43°37'23"
+8"	+8'	-24	-8	-64	-64	64	248°12'26"
0	+8'	0	+8	0	+64	64	204°35'03"
				[av]	[bv]	[vv]	
				+64	+64		
				-64	-64		
				0	0	192	

$$m_0 = \sqrt{\frac{[vv]}{n-q}} = \sqrt{\frac{192}{3-2}} = \sqrt{192} = \pm 14''$$

A súlykoefficiensek egyenletei:

$$\begin{aligned} 2 Q_{11} + 1 Q_{12} &= 1 \\ 1 Q_{11} + 2 Q_{12} &= 0 \quad / .2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 Q_{11} + 2 Q_{12} &= 2 \\ -1 Q_{11} + 2 Q_{12} &= 0 \\ \hline 3 Q_{11} &= 2 \end{aligned}$$

$$Q_{11} = \frac{2}{3} = 0.667; \quad p_x = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\frac{2}{3} + 2 Q_{12} = 0$$

$$2 Q_{21} + 1 Q_{22} = 0$$

$$1 Q_{21} + 2 Q_{22} = 1 \quad / .2$$

$$Q_{12} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} = -0.333$$

$$\begin{aligned} -2 Q_{21} + 1 Q_{22} &= 0 \\ -2 Q_{21} + 4 Q_{22} &= 2 \\ \hline 3 Q_{22} &= 2 \end{aligned}$$

$$Q_{22} = \frac{2}{3} = 0.667; \quad p_y = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$2 Q_{21} + \frac{2}{3} = 0$$

$$Q_{21} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} = -0.333$$

$$m_y = m_0 \sqrt{Q_{11}} = 14 \sqrt{0.667} = \pm 11''$$

$$m_y = m_0 \sqrt{Q_{22}} = 14 \sqrt{0.667} = \pm 11''$$

Adva van három pont összkiosztása:

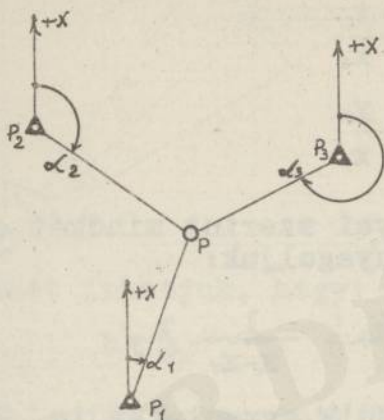
$$\begin{aligned} x_1 &= + 2092.76 \text{ m} \\ y_1 &= + 5132.30 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= + 2692.20 \text{ m} \\ y_2 &= + 5203.15 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= + 2210.59 \text{ m} \\ y_3 &= + 5665.42 \text{ m} \end{aligned}$$

Megmértük $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ csapásszögeket:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 40^\circ 16' 25'' \\ \alpha_2 &= 160^\circ 51' 42'' \\ \alpha_3 &= 289^\circ 01' 40''\end{aligned}$$



Keressük "P" pontnak a kiegyenlített
összrendezőit.

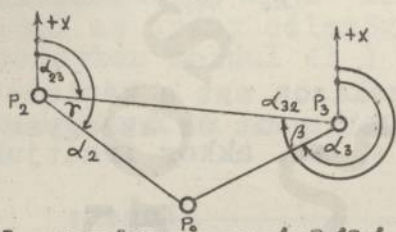
Hibaegyenleteink lesznek:

$$\operatorname{tg} / \alpha_1 + v_1 / = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\operatorname{tg} / \alpha_2 + v_2 / = \frac{y - y_2}{x - x_2}$$

$$\operatorname{tg} / \alpha_3 + v_3 / = \frac{y - y_3}{x - x_3}$$

Hogy számításainkat elvégezhessek, a "P" pontra " x_0 " és " y_0 " közelítő
értékeket számítottunk ki:



$$\overline{P_2 P_3} = \sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_3 - x_2)^2} = \sqrt{+462.27^2 + -481.61^2}$$

$$\overline{P_2 P_3} = 667.56$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{23} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{+462.27}{-481.61} = 0.9598430$$

Ennek megfelelő hegyesszög: $43^\circ 49' 34''$. Mi-
vel azonban a számláló /sin./ /+, a nevező /cos./ pedig -/- előjeltű,
azért a keresett " α_{23} " csapásszög a II. negyedben fekszik; értékét
tehát úgy kapjuk meg, hogy a hegyes-szöget levonjuk 180° -ból. Lesz:

$$\alpha_{23} = 180^\circ - 43^\circ 49' 34'' = 136^\circ 10' 26''$$

Innen pedig
Számíthatjuk a $P_1 P_2 P_3$ $\triangle$ " β " és " γ " szögét:

$$\begin{aligned}\beta &= \alpha_{32} - \alpha_3 = 316^\circ 10' 26'' - 289^\circ 01' 40'' = 27^\circ 08' 46'' \\ \gamma &= \alpha_2 - \alpha_{23} = 160^\circ 51' 42'' - 136^\circ 10' 26'' = 24^\circ 41' 16'' \\ \beta + \gamma &= 51^\circ 50' 02''\end{aligned}$$

A szögek sinusai pedig:

$$\sin \beta = 0.4561318 \quad ; \quad \sin / \beta + \gamma / = 0.7862225$$

$$P_1 P_0 = P_2 P_3 \quad \frac{\sin \beta}{\sin / \gamma + \beta /} = 667.56 \quad \frac{0.4561318}{0.7862225} = 387.29$$

A "P" pont közelítő összrendezői lesznek:

$$\begin{aligned}x_0 &= x_{P_2} + P_2 P \cos \alpha_2 = + 2692.20 - 365.89 = + 2326.31 \\ y_0 &= y_{P_2} + P_2 P \sin \alpha_2 = + 5203.15 + 126.97 = + 5330.12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \alpha_2 &= + 0.3278500 \\ \cos \alpha_2 &= - 0.9447318\end{aligned}$$

A közelítő összrendezőket javítanunk kell egy Δx és Δy értékkel.
Lesz

$$x = x_0 + \Delta x \quad \text{és} \quad y = y_0 + \Delta y$$

Az egyenleteink lesznek:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 + v_1 = \frac{y_0 + \Delta y - y_1}{x_0 + \Delta x - x_1}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 + v_2 = \frac{y_0 + \Delta y - y_2}{x_0 + \Delta x - x_2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 + v_3 = \frac{y_0 + \Delta y - y_3}{x_0 + \Delta x - x_3}$$

Fejtsük sorba a Taylor-féle sor szabályai szerint mindkét oldalt. A másod- és magasabbrendű tagokat elhanyagoljuk:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha_1} \cdot \frac{v_1}{\rho''} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} - \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{1}{x_0 - x_1} \Delta x + \frac{1}{x_0 - x_1} \Delta y \quad \text{stb.}$$

Ugyanígy felírhatjuk a második és harmadik egyenletet is. Ezekből az egyenletekből kifejezhetjük a "v" értékeket. Lesz:

$$v_1 = -\rho'' \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \cdot \cos^2 \alpha_1 \Delta x + \rho'' \frac{1}{x_0 - x_1} \cos^2 \alpha_1 \Delta y \rho'' \left(\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \operatorname{tg} \alpha_1 \right) / \cos^2 \alpha_1 \quad \text{stb.}$$

Most már számíthatók a javítási értékek, de szokásos ezt a képletet egyszerűbb alakra hozni. Jelöljük a közelítő "P₀" pont és az egyes adott pontok közötti távolságot sorra s₁, s₂, s₃-al, akkor írhatjuk:

$$x_0 - x_1 = s_1 \cos \alpha_{1-0} \quad ; \quad y_0 - y_1 = s_1 \sin \alpha_{1-0} \quad \text{Innen:}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{1-0} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{s_1 \sin \alpha_{1-0}}{s_1 \cos \alpha_{1-0}}$$

stb.

Helyettesítsük ezeket az értékeket az előbbi egyenletekbe!

$$v_1 = \rho \frac{s_1 \sin \alpha_{1-0}}{s_1 \cos^2 \alpha_{1-0}} \cdot \cos^2 \alpha_1 \Delta x + \rho \frac{1}{s_1 \cos \alpha_{1-0}} \cdot \cos^2 \alpha_1 \Delta y + \rho \operatorname{tg} \alpha_{1-0} \operatorname{tg} \alpha_1 / \cos^2 \alpha_1 \quad \text{stb.}$$

Mivel "α₁₋₀" és "α₁" szögek között az eltérés kicsi, azért jó közelítéssel írhatjuk, hogy

$$\sin |\alpha_{1-0} - \alpha_1| \div \operatorname{arc} |\alpha_{1-0} - \alpha_1| \quad \text{és} \quad \cos \alpha_1 \div \cos \alpha_{1-0}$$

Ezeket az értékeket behelyettesítve írható:

$$\operatorname{tg} \alpha_{1-0} - \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sin |\alpha_{1-0} - \alpha_1|}{\cos \alpha_{1-0} \cdot \cos \alpha_1} \div \frac{\alpha_{1-0} - \alpha_1}{\rho} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha_1}$$

Ha most az "α₁₋₀ - α₁" értéket Δα₁-el stb. jelöljük, akkor egyenleteink a következő alakot nyerik:

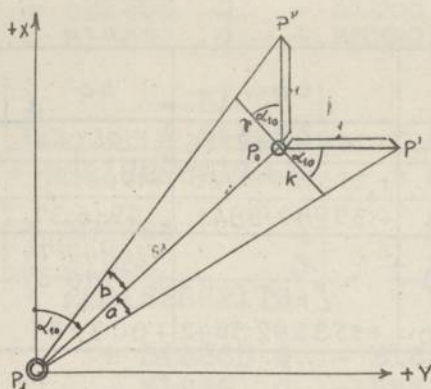
$$v_1 = \left(-\rho \frac{\sin \alpha_{1-0}}{s_1} \right) \Delta x + \left(\rho \frac{\cos \alpha_{1-0}}{s_1} \right) \Delta y + \Delta \alpha_1$$

$$v_2 = \left(-\rho \frac{\sin \alpha_{2-0}}{s_2} \right) \Delta x + \left(\rho \frac{\cos \alpha_{2-0}}{s_2} \right) \Delta y + \Delta \alpha_2$$

$$v_3 = \left(-\rho \frac{\sin \alpha_{3-0}}{s_3} \right) \Delta x + \left(\rho \frac{\cos \alpha_{3-0}}{s_3} \right) \Delta y + \Delta \alpha_3$$

A zárójelben lévő tagokat iránykoefficienseknek nevezzük. Vizsgáljuk meg közbevetőleg ezeknek a geometriai jelentőségét! *)

* Lásd részletesen Dr. Hazay: Kiegyenlítő számítás a geodézia gyakorlatban.



Mozgassuk el "P." pontot a + Y tengellyel párhuzamosan 1 hosszegységgel a "P'" helyzetbe. Mivel az "a" szög kicsi, írhatjuk, hogy:

$$a'' = \frac{k}{s_1} \rho'' - \rho'' \frac{1 \cdot \cos \alpha_{1-0}}{s_1}$$

Mozgassuk el ezután a "P." pontot a + X tengellyel párhuzamosan 1 hosszegységgel a "P'" helyzetbe. De "b" szög is kis érték,

s így ismét írhatjuk, hogy:

$$b'' = -\frac{f}{s_1} \rho'' = -\rho'' \frac{1 \cdot \sin \alpha_{1-0}}{s_1}$$

Az ábra alapján levezetett "a" és "b" értékek megegyeznek az iránykoefficiens értékeivel. Mondhatjuk tehát, hogy az "a" iránykoefficiens az a kis szögérték, amellyel az irány délszöge megváltozik, ha a kiegyenlítendő pont a + Y irányban 1 hosszegységgel elmozdul. Hasonlóképpen a "b" iránykoefficiens pedig az a kis szögérték, mellyel az irány célszöge megváltozik, ha a kiegyenlítendő pont a + X irányban mozdul el 1 hosszegységgel.

Számítsuk ki az egyenleteinkhez szükséges koefficienseket/

Sor. sz.	$y_0 - y_1$	$x_0 - x_1$	$\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$	hegyesszög	α_{10}	α_1	$\Delta \alpha_1$ $\alpha_{10} - \alpha_1$
1	+197.82	+233.55	0.8470135	40°15'54"	40°15'54"	40°16'25"	-31"
2	+126.97	-365.89	-0.3470169	19°08'16"	160°51'44"	160°51'42"	+2"
3	-335.30	+115.72	-2.8975112	70°57'33"	289°02'27"	289°01'40"	+47"

$\sin \alpha_{10}$	$\cos \alpha_{10}$	$(y_0 - y_1)^2$	$(x_0 - x_1)^2$	$\frac{s}{\sqrt{(y_0 - y_1)^2 + (x_0 - x_1)^2}}$	$\rho \frac{\sin \alpha_{10}}{s_1}$	$\rho \frac{\cos \alpha_{10}}{s_1}$
+0.6463238	+0.7630633	39132.7524	54545.6025	306.07	-435.57	+514.24
+0.3278409	-0.9447330	16121.3809	133875.4921	387.29	-174.60	-503.15
-0.9452863	+0.3262419	112426.0900	13391.1184	354.71	+549.69	+189.71

Felírhatjuk az egyenleteinket:

$$\begin{aligned} & -435.57 \Delta x + 514.24 \Delta y = +31 \\ & -174.60 \Delta x + 503.15 \Delta y = -2 \\ & +549.69 \Delta x + 189.71 \Delta y = -47 \end{aligned}$$

Számítjuk a normálegyenletek együtthatóit:

Sor. sz.	a	b	c
1	-435.57	+514.24	+31
2	-174.60	-503.15	-2
3	+549.69	+189.71	-47

aa	ab	ao	bb	bo
+189721.2249	-223987.5168	-13502.67	+264442.7776	+15941.44
+30485.1600	+87849.9900	+349.20	+253159.9225	+1006.30
+302159.0961	+104281.6899	-25835.43	+35989.8841	-8916.37
[aa]	-223987.5168 +192131.6799	+349.20 -39338.10	[bb]	+16947.74 -8916.37
+522365.4810	[ab] -31855.8369	[ao] -38988.90	+553592.5842	[bo] +8031.37

Ha a távolságok között lényeges eltérés van, akkor a súlyszámokat is be kell hozni és pedig a súly a távolsággal egyenes arányban van. Ebben a példában az "s" távolságok közel egyenlők, tehát a súly egyenlőnek van felvéve.

A normálegyenleteink lesznek:

$$\begin{aligned} + 522365.4810 \Delta x - 31855.8369 \Delta y &= -38988.90 \\ - 31855.8369 \Delta x + 553592.5842 \Delta y &= +8031.37 \end{aligned}$$

A normálegyenletek megoldását determinánsokkal eszközöljük:

$$\Delta x = \frac{\begin{vmatrix} -38988.90 & -31855.8369 \\ +8031.37 & +553592.5842 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} +522365.4810 & -31855.8369 \\ -31855.8369 & +553592.5842 \end{vmatrix}} = \frac{-21328119893}{+288162862179} = -0.074$$

$$\Delta y = \frac{\begin{vmatrix} +522365.4810 & -38988.90 \\ -31855.8369 & +8031.37 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} +522365.4810 & -31855.8369 \\ -31855.8369 & +553592.5842 \end{vmatrix}} = \frac{+2953286414}{+288162862179} = +0.010$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \Delta x = +2326.31 - 0.074 = +2326.24 \\ y &= y_0 + \Delta y = +5330.12 + 0.010 = +5330.13 \end{aligned}$$

A javítások számítása:

n	$-p \frac{\sin \alpha_{i0}}{s_i} \Delta x$	$+p \frac{\cos \alpha_{i0}}{s_i} \Delta y$	$+\Delta \alpha$	v	vv	av	bv	A javított szögek
1	+32.23	+5.14	-31	+6.37"	405769	-2774	+3276	40°16'31.4"
2	+12.92	-5.03	+2	+9.89"	978121	-1727	-4976	160°51'51.9"
3	-40.68	+1.90	+47	+8.22"	675648	+4518	+1559	289°01'48.2"
						+4518 -4501 +17±0	+4835 -4976 -141±0	
					205.9574 [vv]	[av] *	[bv] *	

A súlyegység középhibája:

$$m_0 = \sqrt{\frac{[vv]}{n-3}} = \sqrt{\frac{205.9574}{3-2}} = \sqrt{205.9574}$$

$$m_0 = 14.4$$

*A nagy ellenmondási értékek onnan származnak, hogy számításunk során nagyon nagy kikerekítéseket használtunk.

A súlykoefficiensek számítása:

$$\begin{aligned} + 522365 \quad Q_{11} &- 31856 \quad Q_{12} = 1 \\ - 31856 \quad Q_{11} &+ 553593 \quad Q_{12} = 0 \end{aligned}$$

$$Q_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & - 31856 \\ 0 & + 553593 \end{vmatrix}}{+ 288162862179} = \frac{+ 553593}{+ 288162862179} = + 0.000019$$

$$Q_{12} = \frac{\begin{vmatrix} + 522365 & 1 \\ - 31856 & 0 \end{vmatrix}}{+ 288162862179} = \frac{+ 31856}{+ 288162862179} = + 0.000.0001$$

$$\begin{aligned} + 522365 \quad Q_{21} &- 31856 \quad Q_{22} = 0 \\ - 31856 \quad Q_{21} &+ 553593 \quad Q_{22} = 1 \end{aligned}$$

$$Q_{22} = \frac{\begin{vmatrix} + 522365 & 0 \\ - 31856 & 1 \end{vmatrix}}{+ 288162862179} = \frac{+ 522365}{+ 288162862179} = + 0.000.002$$

$$Q_{21} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & - 31856 \\ 1 & + 553593 \end{vmatrix}}{+ 288162862179} = \frac{+ 31856}{+ 288162862179} = + 0.000.0001$$

$$Q_{12} = Q_{21}$$

$$p_x = \frac{1}{Q_{11}} = \frac{1}{0.000019} = 52632 \quad ; \quad m_x = m_0 \cdot \sqrt{Q_{11}} = 14.4 \cdot 0.04 = \pm 0.058$$

$$p_y = \frac{1}{Q_{22}} = \frac{1}{0.000002} = 500000 \quad ; \quad m_y = m_0 \cdot \sqrt{Q_{22}} = 14.4 \cdot 0.0003 = \pm 0.004$$

Geodézia.

A geodézia felosztása.

A Föld, melyen méréseinket végezzük és melyről térképeket készítettünk, megközelítően gömb alakú. Méréstünk pontossága szerint gömb, forgás-ellipsoid, sphaeroid vagy geoid alakot veszünk számításba. A legmegközelítőbb alak a geoid.

A geodéziai munkák feloszlanak alsó és felső geodéziai munkákra. Amíg a méréseket csak akkora területen végezzük, hogy a föld felületét síknak vehetjük, addig alsó geodéziai mérésekkel van dolgunk. Amint azonban a Föld gömb, illetve ellipsoid, illetve geoid alakjával is számolnunk kell, akkor már felső geodéziai műveleteket végzünk.

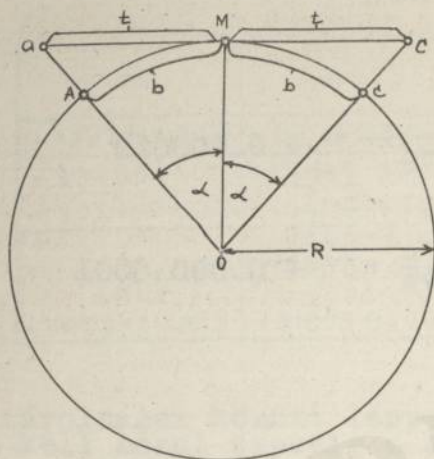
Síknak vehetjük a Föld felszínét mindaddig, amíg az ebből eredő hiba kisebb, mint amekkorát térképünkön érzékelni tudunk. Azontul már gömbnek kell a Földet tekintenünk.

Maga a mérés mindkét esetben azonos. Különbség csak a számításokban van:

alsó geodéziában a síkháromszögtan szabályai szerint számolunk.

felső geodéziában pedig a gömbháromszögtan tételeit alkalmazzuk.

Kérdés, hogy mekkora az a terület, amit még síknak tekinthetünk?



A felméréendő terület mindaddig síknak tekinthető, míg sz "ac" és "AC" közti különbség kisebb, mint amekkorát térképtünkön érzékelni tudunk.

$$\Delta \widehat{ac} - \widehat{AC} = 2 / t - b /$$

$$t = R \operatorname{tg} \alpha ; \quad b = R \widehat{\alpha}$$

$$\Delta = 2 R / \operatorname{tg} \alpha - \widehat{\alpha} /$$

Ha most "ε"-al jelölöm azt a legkisebb értéket, melyet még le lehet mérni a térképről, "n"-nel pedig a kisebbitési arány-

számot, akkor számíthatjuk azt a természetbeni hosszat, melynek térképi hossza: "ε". Ez pedig "n ε" lesz. A "Δ" hibásnak ennél kisebbnek kell lennie, vagy legfeljebb egyenlő lehet vele, vagyis

A képletben szereplő "tg α"-t azonban sorbafejtéssel ki tudjuk fejezni az iv segítségével is:

$$\operatorname{tg} \alpha = \widehat{\alpha} + \frac{\widehat{\alpha}^3}{3} + \frac{2 \widehat{\alpha}^5}{35} + \dots$$

Elégséges, ha két tagot veszünk figyelembe, a többi elhanyagolhatjuk. A tg α-nak ezt az értékét a "Δ" képletébe helyettesítve:

$$\Delta = 2 R / \widehat{\alpha} + \frac{\widehat{\alpha}^3}{3} - \widehat{\alpha} / = 2 R \frac{\widehat{\alpha}^3}{3} = \frac{2}{3} R \widehat{\alpha}^3$$

De a b = R α képletből α = b / R, továbbá α³ = b³ / R³ s innen:

$$\Delta = \frac{2}{3} R \frac{b^3}{R^3} = \frac{2}{3} \frac{b^3}{R^2} = n \varepsilon$$

Ebből kifejezve "b"-t

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 R^2}{2} n \varepsilon}$$

Ez tehát az a természetbeni távolság, mellyel, mint sugárral a felveendő terület középpontja, "m" körül rajzolható körön belül a méréseinket a síkháromszögtan szabályai szerint számíthatjuk.

Pl. R = 6,370.000 m ε = 0.02 m/m = 0.00002 m n = 2000
/ 1:2000 az állami földmérés méretarány száma./

$$b = 13452.7 \text{ m} \approx 13.5 \text{ km.}$$

Amíg tehát a terület egy 13.5 km sugaru körön belül fekszik, addig a gömbfelület síknak vehetjük.

A térképek.

Méréseink célja az, hogy a Föld felületéről térképet készítsünk. A térkép készülhet:

Az egész földgömbről, vagy egy-egy kontinensről /Földabrosz/.

egy országról, vagy annak egyes megyéiről /Nagyméretű térkép/.

községről, birtoktagokról, parcellákról, stb. /Közönséges térkép/.

A térkép nem egyéb, mint a Föld felületén lévő vonalaknak egy viszonyított vízszintes síkra való levetítése és ezeknek a vonalaknak egy kisebbitése arány szerint való megszerkesztése. Magyarországon ez a viszonyított sík az Adriai tenger szintje.

Topográfiai térképeknél szükség van a terepalakulatokra is. Ezeket szintén az Adriai tenger szintjétől számított tengerszint feletti magasságok alapján szerkesztjük úgy, hogy megrajzoljuk a tengerszinttel párhuzamos, egymástól adott távolságra /pl. 5 - 10 m/ levő szintsíkoknak a terepfelülettel való metszésgörbéit. A metszészonalakat rétegvonalaknak, vagy izohipszáknak nevezzük. Ilyen izohipszás térképek pl. a katonai térképek.

A rétegvonalas térképek tér- és helyszinrajzi térképek, tehát a Föld felületén lévő vonalakon /utak, folyók, birtok- határvonalak, művelési-ág határok/ kívül még a terepalakulatokat /völgyek, hegyek, gerincek, stb./ is ábrázolják.

Hogy a terepalakulatok jobban kidomborodjanak, a lejtő nagyságát is szokták érzékeltetni, éspedig sraffozással, ahol a sűrűbb sraffozás a meredekebb lejtőt jelzi. Ilyenek a régi katonai térképek. Hátránya, hogy a helyszinrajzi vonalakat és az írásokat elfedi. Ezért ujabban színezéssel ábrázolják a lejtők hajlását. Ilyenek az újabb katonai térképek, melyeken az erősebb lejtők sötétebb színnel vannak feltüntetve.

Mivel úgy a sraffozás, mint a színezés erősen fedi a térképet, azért sokszor csak a jellegzetes tereppontok magassága van megadva számokkal. /Kótált projectio./

Vannak olyan rajzok, amelyek a Föld felszínének adott irányban a metszetét adják, ezeknél függőleges síkbeli értékekkel dolgozunk. Ezek a metszetrajzok /hossz- és keresztmetszvények/.

Az eddigiekből látjuk, hogy maga a mérési eljárás két csoportba oszlik:

1./ vízszintes vetületbeli mérés: ennek alapján készülnek a helyszinrajzok, vízszintes vetületbeli térképek.

2./ függőleges síkbeli mérések, szintmérések, magasságmérések: ezek alapján készülnek a szelvényrajzok, hossz- és keresztmetszetek.

És végül a két mérési eljárás egyesítése a hely- és térszinrajzi felvételek, amikor egyidejűleg végezzük a mérést vízszintes vetületben és függőleges síkban, ez a tachimetria, amelynek alapján készülnek a topográfiai térképek /katonai térképek/. Tachimetria alapján készülnek az u.n. domborművi térképek, ezek azonban csak a szemléltetés célját szolgálják és így geodéziai szempontból jelentőséggel nem bírnak.

A térképezés célja szerint megkülönböztetünk:

1./ kataszteri vagy állami földmérést: célja az állami földadó igazságos kivetése, ezért a birtok-határvonalakat, művelési-ág határvonalait méri. Rendesen minden egyéb mérésnek az alapját képezi.

2./ városok felmérése: igen részletes mérések. A városokban előforduló minden műszaki munkálatok alapját képezik.

3./ katonai mérések: a katonaság számára fontos vonalak, pontok, terepalakulatok /utak, vasutak, folyók, gázlók, hegygerincek, kutak, stb/ térképezésére szolgálnak.

4./ mezőgazdasági mérések: dűlők, taghatárok, üzemágak szerint ábrázolják a terepet.

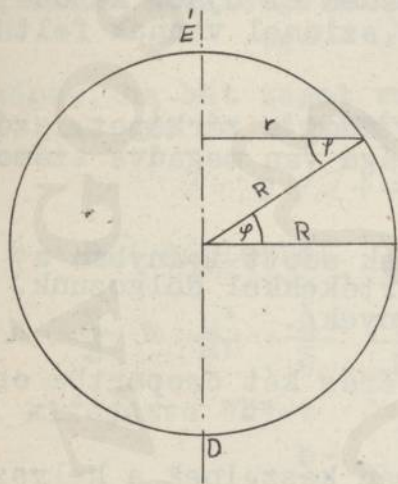
5./ bányászati mérések: a "kutatási jog" alapján álló területek földfeletti és földalatti pontjait /aknák, tárnák, stb./ rögzítik.

6./ erdőgazdasági mérések alapján készülnek az erdőgazdasági térképek, melyek az erdőbirtokhoz tartozó fontos vonalakat /utak, nyiladékok, gerincek, taghatárok, stb./ foglalják magukba, amelyek az erdőgazdasági üzemrendezés alapját képezik.

Bármilyen térképezést is végezzünk, azt az állami háromszöghálózat pontjaihoz kell bekapcsolnunk. Mielőtt azonban egy háromszögelési pontot elfogadnánk térképünk szerkesztéséhez, a pont jelét meg kell vizsgálnunk, hogy eredeti helyén van-e. Ezt szomszédos háromszögelési - pontok összemérésével állapítjuk meg.

Helymeghatározás a földgömbön.

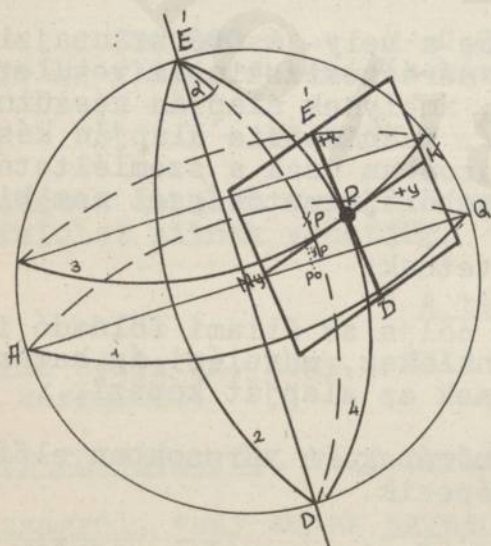
A földgömb tengelye az északi és déli sarkpontokban döfi a földgömböt. Erre a tengelyre merőleges, a földgömb középpontján áthaladó sík, a földgömböt az egyenlítőben /aequator/ metszi.



A vele párhuzamos síkok a szélességi - köröket metszik ki a földgömbből. Helyüket szélességi fokokkal mérjük, és pedig az egyenlítő az északi pólusig /+/ előjellel, a déli pólusig /-/ előjellel 0° -tól 90° -ig. A szélességi körök sugara a szélességi fokoktól függ, de mindig kisebb, mint a Föld sugara: $r = R \cos \varphi$

Az ED tengelyen áthaladó síkok a Föld palástját közelítőleg körökben /ellipszisekben/ metszik; ezek a hosszusági körök, melyeknek átlagos sugara azonos hosszúságu a Föld sugarával.

Egy ponton áthaladó hosszúsági kört az illető pont meridiánjának nevezzük. Ugyanazon meridiánon fekvő pontokba a Nap egyszerre kulminál. A meridiánokat egy meghatározott és rögzített ponthoz viszonyítják, így a magyar állami földmérés null-meridiánja /kezdőiránya/ a volt gellérthegy csillagvizsgálón halad át.



A meridiánok helyzetét a kezdőmeridiántól keletre és nyugatra a hossz- különbség értékével /R/ mérjük, mindkét irányban 0° - 180° -ig.

Nemzetközi méréseknél közös kiinduló pontot vesznek fel: szokták Páris, Ferrot, vagy Greenwichet.

A fenti ábrán jelzett körök:

- 1./ az egyenlítő vagy aequator /AQ/
- 2./ a kezdőmeridián,
- 3./ a felveendő terület középpontján, "P"-n áthaladó szélességi kör,
- 4./ a felveendő terület középpontjához tartozó meridián.

A Föld bármely pontjában állított függőleges közelítőleg átmegy a Föld középpontján, az égboltot pedig a zenit illetve nadir pontokban dőfi. Ezeket a függőlegeseket az alsó-geodéziában párhuzamos egyeneseknek vesszük.

A földgömb jellemző adatai:

"a" tengely: 6.377.397.154 m
"b" " : 6.356.078.962 "

A Föld sugarát az alsó-geodézia számításoknál kereken

$R = 6,370.000$ m-nek vesszük.

A Föld lapultsága:

$$\frac{a - b}{a} = \frac{1}{299} \div \frac{1}{300}$$

Mérés és mértékegység.

Mérés alatt ama viszony ill. viszonyszám megállapítását értjük, mely az ugyanazon minőségű két mennyiség között fennáll, melyek közül az egyik ismert. A viszony megállapításánál használt ismeretes értéket, nagyságot mértékegységnek nevezzük.

Hosszuságok mérésére használt mértékegység.

Ma a hossz mérés mértékegysége a méter /m/, mely a parisi tudományos akadémia 1793-ban, Peruban végzett mérései szerint a Föld negyed dél-körének 10 milliomed része. Hosszát platina-irridiumból készült normálméterre karcolva Parisban őrzik.

Dalamber és Méchain későbbi pontosabb mérései kiderítették, hogy a negyed délkör hossza nem 10 millió méter, hanem $10.000.856 \pm 498$ m.

A mértékegység hosszát mindazonáltal nem változtatták meg, s így ma is a normál-méter hossza a hossz mérés mértékegysége.

Erről a normál-méterről azok az országok, melyek a métert hossz mértékül elfogadták, másolatot készítettek. A méteres hossz ellenőrzése ma a kadmium-lámpa fényhullámhosszát használják adott hőmérséklet mellett.

A méter, mint mértékegység a tizedes rendszer szerint oszlik fel törtrészekre, többszörösei szintén ezen rendszer alapján állnak:

1 m = 10 dm	100 cm = 1000 mm	}	hosszmérésnél
100 m = 1 hm	/hektométer/		
1000 m = 1 km	/kilométer/		
10.000 m = 1 Mm	/miriaméter/		
mm ² , cm ² , dm ² , m ²		}	területmérésnél
10 x 10 m ² = 1 ár			
100 x 100 m ² = 1 ha	/hektár/		
1000 x 1000 m ² = 1 négyszögkilométer			

Magyarországon az 1874. évi VIII. t.c. rendeli el a méteres mértékegység használatát. Ez a törvény azonban az állami földmérés és így az erdőgazdaságokban is a földmérési munkáknál továbbra is megengedi a bécsi öl használatát.

Az állami földmérés 1928. évi május hó 1-től hossz mérésre kizárólag a méteres mértékegységet rendeli el. Terület mérésre a hektárt és négyzetmétert írja elő, de átmenetileg a területeket katasztrális holdban és négyszögölekben is ki kell mutatnia.

Mivel az erdőgazdaságokban a mérésekre még ma is az öles mértékegységet használják, ezért a régi mértékegységet is ismernünk kell.

Régi mértékegységül az emberi test egyik-másik részének hosszát vették. Nálunk használatos a "bécsi öl" /1°/, melynek nagysága megfelelt a jól kifejlett ember kiterjesztett karjai közti hosszúságnak a középső ujjak végéig számítva. Az ölek a tizenkettedes rendszer szerint lábakra /1' /, ezek hüvelykekre /1" /, a hüvelykek vonásokra /1''' /, végül a vonások pontokra /1'''' / oszlanak.

$$\begin{aligned} 1^{\circ} &= 6' = 72'' = 864''' = 10.368'''' \\ 1' &= 12'' = 144''' = 1.728'''' \\ 1'' &= 12''' = 144'''' \\ 1''' &= 12'''' \end{aligned}$$

Ujabban az öleket is a tizes rendszer szerint osztják be:

$$\begin{aligned} 1^{\circ} &= 10^{(o)} & / \text{mezei láb} / \\ 100^{(o)} & & / \text{mezei hüvelyk} / \\ 1000^{(o)} & & / \text{mezei vonal} / \end{aligned}$$

Nagyobb hosszúságok kifejezésére a geodéziában a 4000°-es osztrák vagy postai mérföldet /mf/ használják.

Terület mérésre használták az
 $1 \square^{\circ} =$ négyszöglet
 $40^{\circ} \times 40^{\circ} = 1600 \square^{\circ} =$ kataszteri holdat
 $1000 - 1400 \square^{\circ} =$ magyar holdat

A régi és új mértékrendszer viszonya

$$\begin{aligned} 1^{\circ} &= 1.89548 \text{ m} & 1 \text{ m} &= 0.52729^{\circ} \\ 1'' &= 2.634 \text{ cm} & 1 \text{ cm} &= 0.37965'' \\ 1 \text{ mf} &= 7.58592 \text{ km} & 1 \text{ km} &= 0.13182 \text{ mf} \\ 1 \square^{\circ} &= 3.5966 \text{ m}^2 & 1 \text{ m}^2 &= 0.27804 \square^{\circ} \\ 1 \text{ kat.hold} &= 0.5755 \text{ ha} & 1 \text{ ha} &= 1.738 \text{ kat.hold} \end{aligned}$$

A mértékegységek hosszváltozása.

Az alap, vagy normál mértékegység nagysága alapján készített hossz-mértékek különböző okoknál fogva hosszukat megváltoztathatják. Ezen okok közé tartozik a tulságos megfeszítés /szalagnál vagy sodronynál/ mely hibákat óvatos méréssel kiküszöbölhetjük.

Nagyobb hiba származik az anyagok hőmérséklet okozta változásából. Ez a változás azonban a mérték anyagától /kiterjedési együtthatójától: α / és a hőmérséklettől függő, s avval arányosan változó, szabályszerű hibát ad, melyet számításba tudunk venni.

Hogy ezt a hibát ki tudjuk számítani, tudnunk kell a következőket:

1./ a hosszegységeknek 1 C° -nyi hőmérsékletváltozással beálló változását kiterjedési együtthatónak, /e/ nevezzük, melynek értéke a különböző anyagokra nézve más és más, éspedig:

fenyőfa:	e=0.000.004
üveg, platina:	=0.000.009
lágycél és vas:	=0.000.011 - 12
edzett acél:	=0.000.013
réz:	=0.000.017
invar:	=0

/Az "invar" újabban alkalmazott acél-nikkel ötvözet, mely 67 % acélból és 33 % nikkelből áll, s kiterjedési együtthatója gyakorlatilag véve nulla, ha az ötvözet jól sikerül./

2./ Az egyes mértékek hossza bizonyos adott, u.n. normál hőmérsékletre /t/, mely rendszerint + 16 C°, van adva /h/. A hosszváltozást a mérésakor mért "T" hőmérsékletre beállt "h_T" hosszának az eredeti "h_t" hosszából való különbsége adja.

Mértékünk normál hossza: "h_t"; kiterjedési együtthatója: "e". Mértékünk egységnyi hossza, tehát minden egyes métere 1 C° hőmérsékletváltozásra "e" hosszal változik, az egész tehát /h_t . e/-vel fog megváltozni, ha a hőmérséklet 1 C°-kal változik. A hőmérsékletkülönbség azonban nem 1 C°, hanem /T-t/ C°, s így az egész hosszváltozás lesz:

$$h_t \cdot e / T - t /$$

Ha most ezt a változást hozzáadjuk a normál hosszhoz /h/, kapjuk a mértéknek a fennálló /T/ hőmérsékleten felvett hosszát /h_T/.

$$h_T = h_t + h_t e / T - t / = h_t / 1 + e / T - t /$$

Hosszuságok gyors, de kisebb pontossággal való megállapítására használható még:

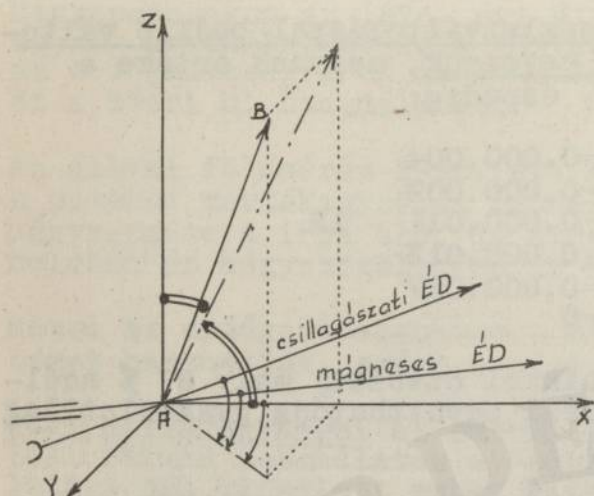
a szemmérték: a hosszakat megtekintés útján megbecsüljük és bizonyos mértékegységben kifejezzük. Megközelítő pontosságu becslésekhez is nagy gyakorlatra van szükség.

A lépésmérték alatt a lépés hosszát értjük. Ez rendszeren 75 cm hosszú. A lépések számát pedométerekkel mérjük. Főleg a katonaság használja ezt a mértékegységet.

Mind a szem-, mind a lépésmérték hosszmerések ellenőrzésére és durva hibák gyors feltalálására használható.

Szögek mérésére használt mértékegységek.

Legyen AB egy térbeli egyenes, egy vektor, tehát egyedül a hossza által nincs meghatározva, hanem ismernünk kell vízszintes síkbeli elhajlását és függőleges síkbeli dőlését is.



Az elhajlást vagy egy ismert kezdőiránytól /teodolit-mérések/, vagy a csillagászati ED iránytól, vagy pedig a mágneses ED iránytól, /busszola-mérések/ mérjük.

A dőlés nagyságát pedig vagy a függőleges által kijelölt függőleges iránytól, vagy pedig a libellák által kijelölt vízszintestől mérjük.

Az elhajlás és dőlés mérése megegyezik abban, hogy mindkettő szögmérésen alapul. A szögek mérése történhet: fokértékekkel, ívhosszakkal, szögfüggvényekkel és hurhosszakkal /korda/.

1./ Szögek mérése fokértékekkel.

A teljes kört vagy 360, vagy 400 részre osztják; a 360-as osztást régi, a 400-as osztást új osztásnak nevezik. Az osztás iránya rendszerint az óramutató járásával egyező. Egy osztásrész neve: fok /1°/. A régi osztásnál 1° feloszlik 60 percre /1'/, a perc ismét 60 másodpercre /1"/, Másodpercnél kisebb értékeket a másodperc tizedrészeivel fejezzük ki. Magyarországon még a régi osztást használják. A műszereket könnyű volna átosztani a 400 fokos beosztásra, de az új fokokra /17/ át kell előbb az összes táblázatot alakítani, ami pedig óriási munka. - Az új osztás mellett a teljes szög 400 részre lesz osztva, egy rész neve itt is fok; jelölése: /17/, vagy /1^(o)/. Minden új fok 100 új percre /1^(u)/ vagy /1^c/, minden új perc 100 új másodpercre /1^{cc}/ oszlik.

Az új fokokat átszámíthatjuk a régiekre és viszont, a felállítható arányok segítségével, melyeket pl. a derékszögek alapján írhatunk fel.

Régi osztással mért értékek átalakítása új osztásuvá.

$$90^{\circ} : 100^{\circ} = 1^{\circ} : x^{\circ}$$

$$x^{\circ} = \frac{100}{90} = \frac{10}{9}$$

$$\text{Pl. } 60^{\circ} = ? \quad 60^{\circ} = \frac{100^{\circ} \cdot 60^{\circ}}{90^{\circ}} = \frac{600}{9} = 66^{\circ} 66' 66'' \dots$$

$$36^{\circ} 46' 40'' = ?? = 36.77778^{\circ} \quad \text{Először átalakítjuk a másodperceket perceké, lesz } 40:60 = 0.66667, \text{ ezután a percek fokokká, lesz } 46.66667:60 = 0.77778^{\circ}$$

$$36^{\circ} 46' 40'' = 36.77778^{\circ} = \frac{100^{\circ} \cdot 36.77778^{\circ}}{90^{\circ}} = \frac{367.77778^{\circ}}{9}$$

$$36^{\circ} 46' 40'' = 40.86429 = 40^{\circ} 86' 42''$$

Új osztással mért értékek átalakítása régi osztásuvá.

$$100^{\circ} : 90^{\circ} = 1^{\circ} : x^{\circ}$$

$$x^{\circ} = \frac{90}{100} = \frac{9}{10} = 0.9^{\circ}$$

Pl. $72^{\circ} 43' 57'' = ?^{\circ}$

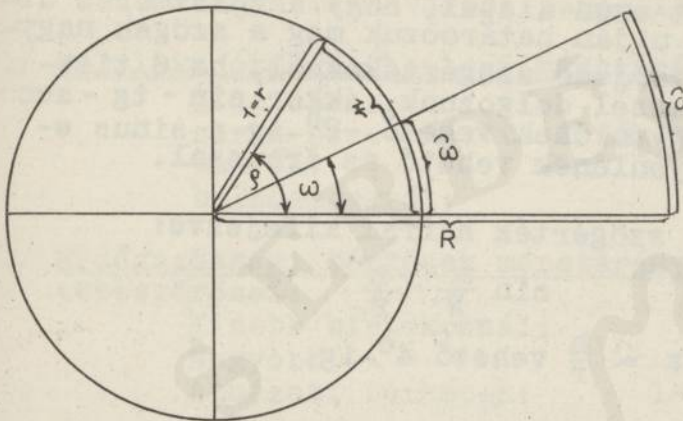
$72^{\circ} 43' 57'' = 72.4357.0.9 - 65.19213^{\circ}$

a tized fokokat átalakítjuk perceké, lesz: $0.19213 \cdot 60$

$4.5278''$ a tized percek átalakítjuk másodperceké, lesz
 $0.5278.60 = 31.668''$

$72^{\circ} 43' 57'' = 65^{\circ} 11' 31.668''$

2./ Szögek mérése ívértékekkel.



Ivmértékkel csak kis szögek mérésénél dolgozunk, ahol az ívet egyenessel lehet helyettesíteni. Az ívérték és fokérték közötti összefüggés megállapítása végett tetszőszerinti méretarányban /m.,öl/ egységsugaru kört veszünk fel. A központi szögek és az ívek közti arány a következő:

$$180^{\circ} : \rho^{\circ} = r : r$$

Mivel $r = 1$, írhatjuk:

$$180^{\circ} : \rho^{\circ} = \pi : 1$$

hol " ρ° " annak a szögnek a nagyságát jelenti, amelynek az ív hossza egyenlő a sugárral, tehát az egy-séggel. Ezt a szöget radiánnak nevezzük. Kérdés, hogy mekkora ez?

$$\rho^{\circ} = \frac{180^{\circ}}{\pi} = \frac{180^{\circ}}{3.1415} = 57.29578^{\circ}; \quad \rho' = \frac{180.60}{3.1415} = 3437.7468 ;$$

$$\rho' = \frac{180.60.60}{3.1415} = 206264.80'' \div 206265''$$

új osztásnál $\rho = \frac{200}{3.1416} = 63.6619772 \div 63.6620$

Nézzük ezután, hogy tetszőleges ív ω és a hozzá tartozó központi szög ω között mi az összefüggés? Vizsgáljuk a dolgot először az egységsugaru kör esetében! Felírhatjuk a következő arányokat:

alapján:	$180^{\circ} : \rho^{\circ} = \pi : 1$	másrésről: a két arány vagy a központi szögeket másodpercekben kifejezve:
	$180^{\circ} : \omega^{\circ} = \pi : \omega$	
	$\omega^{\circ} : \rho^{\circ} = \omega : 1$	

$$\omega = \frac{\omega^{\circ}}{\rho^{\circ}}$$

Ha most "R" sugaru körre térünk át, ahol tudjuk, hogy

$$\omega : R = \omega^{\circ} : 1 \quad \text{s innen}$$

$$\omega = R \omega^{\circ}$$

Behelyettesítve ω értékét lesz:

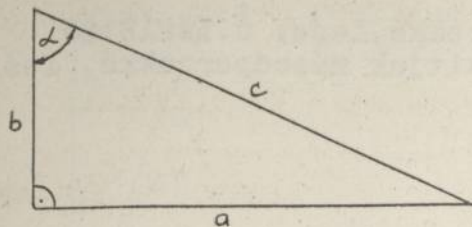
$$\omega = R \frac{\omega^{\circ}}{\rho^{\circ}}$$

Ha ω° csak nagyon kis érték, akkor " ω " helyett vehetjük az " a " húrhosszat is, tehát

$$a = R \frac{\omega^{\circ}}{\rho^{\circ}}$$

3./ Szögek mérése szögfüggvény-értékekkel.

Mérhetjük végül a szögeket trigonometriai /szögmértani/ függvények segítségével is azáltal, hogy a szöget derékszögű háromszög csuca-

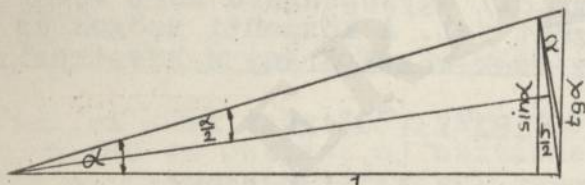


szögének tekintjük. Ismertek a szögek és oldalak között fennálló következő összefüggések:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a}; \quad \sec \alpha = \frac{c}{b}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

A trigonometriai szögmérés mármost azon alapul, hogy a hossz mérés után megismert értékekből számítás útján határoozzuk meg a szögek nagyságát. Kis szögek esetén: 30'-ig terjedő szögeértékeknél, ha 6 tizedessel dolgozunk, akkor $\sin$ - tg -acc egyenlőnek vehető. 2°-ig a sinus egyenlőnek vehető az arcussal.



A szögeérték hurral kifejezve:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{2r}$$

kis szögeknél 6 tizedesig számítva $2 \cdot \frac{h}{r}$ vehető 4°-ig.

A kisebbitési lépték.

A földmérés egyik célja az, hogy a fölmért területnek a térképét megszerkesszük. Ezeket a térképeket azután különböző műszaki feladatok megoldásánál használjuk fel. Így ezeken a térképeken tervezünk utakat, vasutakat, vízlevezető berendezéseket, stb. végezhetünk területosztásokat, stb.

Valódi nagyságban megrajzolni a felmért vonalakat nem lehet. A térkép a terepen lévő vonalak vízszintes vetületének hű kisebbitett képe kell hogy legyen. A szögeket tehát a vízszintes vetületbeli tényleges értéküknek megfelelően kell megszerkeszteni, a hosszakat pedig egy adott viszonyszám szerint, az ugynevezett méretarány-szám szerint kell kisebbiteni. A természetben lévő hossz vízszintes vetületének tehát a térképen ennek csak bizonyos hányada felel meg.

Azt a törtszámot, amely megadja, hogy a térképi hosszak hányadrészei a természetbeni távolságoknak, a térkép kisebbitési arányszámának, vagy méretarányszámának nevezzük. A méretarányszám mindig valódi tört: értéke 1/100 - 1/100 millió között változik.

A méretarányszám rendszerint egy általános viszonyszámmal van adva, ahol a számláló és a nevező mértékegysége ugyanaz. A számláló fejezi ki mindig a térképen lévő hosszat, a nevező az ennek megfelelő természetbeni távolságot. Pl. 1:2000-es méretaránynál 1 egységnek a térképen 2000 egység felel meg a természetben, tehát 1 m-nek 2000 m, vagy ugyanezen a térképen 1°-nek 2000°, vagy 1 m/m-nek 2000 m/m = 2 m, stb.

Régi öles térképeken nem általános méretarányszámot használtak, hanem mivel a térképeken hüvelyekkel dolgoztak, a természetben pedig öllal mérték a távolságot, tehát az arányszámot is így adták meg, pl. 1":40° annyit jelent, hogy a térképen lévő 1" hosszának a természetben 40° felel meg. Ha át akarom alakítani ezt általános méretarányra, akkor vagy a hüvelyket kell öllé alakítani, vagy az ölet hüvelyké. Egyszerűbb az öllé át alakítása hüvelyké, mert tudjuk, hogy

1°-72", tehát a fenti példánkban a 40° lesz 40 x 72 = 2880". Ebből következik, hogy az 1":40° méretarányszámot írhatom így is: 1:2880, vagyis 1"-nek 2880", 1°-nek 2880°, vagy 1 m-nek 2880 méter, vagy 1 m/m-nek 2880 m/m = 2.880 m felel meg.

A leghasználatosabb kisebbitési méretarányszámok a következők:

1./ Régi kataszteri méretarányok:

általában:	1:2880 ~ 1"-40°
sűrűn parcellázott részekről az u.n.	
melléklapok:	1":20° ~ 1:1440
nagyértékű városi parcellákról	1":10° ~ 1:720

2./ Uj /1928 óta/ kataszteri méretarányok:

általában:	1:2000
sűrűn parcellázott értékes területekről:	1:1000
belsőiségekről:	1:500

3./ Erdőgazdasági térképek méretarányai, a kataszteri méretarányok többszöröse:

Kisebb birtokoknál:	1":80°
Nagyobb "	1":100°; 1":120°
Átnézeti térképek:	1":160°; 200°; 240°; 320°

4./ A mezőgazdasági térképek méretaránya teljesen azonos a kataszteri méretaránnyal, illetve nagyobb birtokoknál ennek a többszöröse.

5./ A katonai térképek méretarányát úgy választották meg, hogy könnyen lehessen számítani a 75 cm-es lépésmérték alapján is a távolságokat. Részletes térképeknél

Nagyobb "	1:25.000
Átnézeti "	1:75.000
	1:200.000

6./ Városrendezési célokat szolgáló térképek méretaránya:
1:100 ; 1:200 ; 1:500.

A méretarány szerint megkülönböztetünk

1./ nagyméretarányú térképeket vagy helyszinrajzokat, amelyek 1:10.000-nél nagyobb méretarányban készülnek.

2./ kisméretarányú térképeket, amelyek 1:10.000-től 1:200.000-ig méretarányban készülnek.

3./ földrajzi térképeket, amelyek 1:200.000-nél kisebb méretarányban készülnek.

/Minél nagyobb a méretarányszámban a nevező, annál kisebb a térkép méretaránya és viszont.-/

Nézzük mármost a kisebbitési arány használatát! Az 1/k viszony azt jelenti, hogy 1 térképi egységnek "k" egység felel meg a természetben, általánosan "h" térképi hosszak "H" természetbeni távolság felel meg. Vagyis

$$1:k = h:H$$

$$h = \frac{H}{k}$$

Ennek alapján számítással meg tudjuk határozni a térképre felhordható hosszakat, vagy a térképi hosszaknak megfelelő természetbeni távolságokat.

P1. 264 m ábrázolandó 1:1000 méretarányú térképen!

$$1:1000 = x:264$$

$$x = \frac{264}{1000} = 0.264 \text{ m} = 264 \text{ m/m}$$

Mekkora természetbeni hossz felel meg az 1:2880 méretarányu térkép-
ről mért 10 m/m-nek?

$$1:2880 = 10:x$$

$$x = 28800 \text{ m/m} = 28.8 \text{ m}$$

48° ábrázolandó 1":80°-es térképen!

$$1":80^\circ = x":48^\circ$$

$$x" = \frac{1" \times 48^\circ}{80^\circ} = 0.6"$$

Mekkora természetbeni hossz felel meg az 1":10° méretarányu térkép-
ről mért 13.2 cm-nek? A cm-ket át kell alakítani művelékekké.

$$13.2:2.634 \div 5$$

$$13.2 \text{ cm} = 5"$$

$$1":10^\circ = 5":x^\circ$$

$$x^\circ = 5.10 = 50^\circ$$

Más megoldás az, amikor a méretarányt alakítjuk át:

$$1":10^\circ = 1:720$$

$$1:720 = 13.2:x$$

$$\text{de } 1^\circ = \frac{x - 720 \times 13.2}{1.89648 \text{ m}} = 95.04 \text{ cm} = 95.04 \text{ m}$$

A keresett hosszakat tehát számítás útján egyszerűen meghatározhatjuk.
Amikor azonban sok hosszat kell felhordanunk, ez az eljárás hosszadal-
mas lesz. Ezért szükség van az arányos távolságok grafikus meghatáro-
zására. A grafikus eljárást az is indokoltá teszi, hogy pontos szer-
kesztés esetén könnyen elérhetjük vele a szükséges pontosságot:

$$0.1 \sim 0.02 \text{ m/m-t}$$

A vonalas lépték.

Kisebb pontosságu /0.1 m/m/ térképeknél alkalmazzuk. A vonalas lép-
ték nem más, mint egy alapvonalon elhelyezett olyan beosztás, mely-
nek osztásrészei a térképi hosszakkal egyeznek, de értékük a termé-
szetbeni méretarányban van adva. Szerkesztésük a következő módon meg-
yégbe:

1./ Szerkesztési egységet választunk: ez egy olyan természetbeni ke-
rek távolság /mindig lo a többszöröse/ 10 m., 100°, stb./ melyet az
adott méretarányban felhordva még kényelmesen 10 részre lehet felosz-
tani.

2./ Meghatározzuk a szerkesztési egység térképi hosszát az előbb tár-
gyalt számítási eljárással.

3./ Az így kapott hossz számított 5-7-szeresét az alapvonalra mérjük
a lehető legnagyobb pontossággal, majd próbálgatás útján ösztökörző-
vel annyi részre osztjuk, ahányszorosát /5-7/ eredetileg felmértük.
Erre a kissé hosszadalmas eljárásra a hibahalmozódás kikerülése vé-
gett van szükség.

4./ A bal-szélen lévő szerkesztési egységet 10 alosztásra osztjuk és
a névleges értékeket felírjuk.

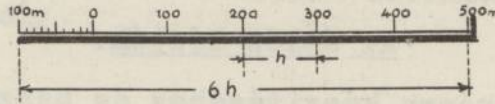
Lássuk mármint a léptékszerkesztést néhány példán bemutatva!

1./ Lépték szerksztendő 1:10.000 méretarányu térképünkhöz.

A szerkesztési egység: $H = 100$ m lesz. Ennek térképi hossza, $h:H = 1:k$ arány alapján:

$$h = \frac{H}{k} = \frac{100.000^{+1}}{10.000} = 10 \text{ m/m}$$

⁺¹ értéke m/m-ekre alakítva. A szerkesztési egységet mindig m/m-ekben fejezzük ki.

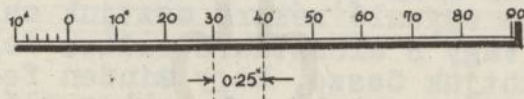


2./ Lépték szerkesztendő $1'' : 40''$ arányu térképünkhöz.

$$H = 10''$$

$$h = \frac{H}{k} = \frac{10''}{40''} = 0.25''$$

a./ eset: ha van hüvelykes beosztásunk, akkor arról közvetlenül készíthetjük:

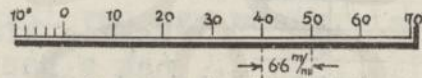


b./ eset: ha csak m/m-es beosztásunk van, akkor

a $h = 0.25''$ értéket átszámítjuk m/m-ekre:

$$1'' = 2.634 \text{ c/m}$$

$$h = 0.25'' = 0.6585 \text{ c/m} = 6.585 \text{ m/m}$$



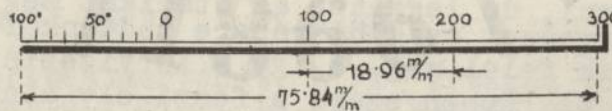
3./ Térképünk $1:10.000$ -es méretarányban készült. Hüvelyk - öles lépték szerkesztendő, hogy a térképről ölekben is mérhessünk hosszokat. Először is kiszámítjuk a megfelelő méretarányt:

$$1:10000 = 1'' : \left(\frac{10.000}{72} \right)''$$

$$1:10.000 = 1'' : 138.889''$$

$$H = 100''$$

$$h = \frac{100}{138.889} = 0.72'' = 18.96 \text{ m/m}$$

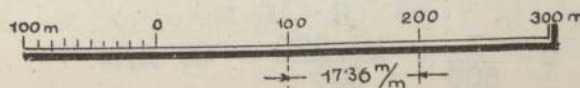


4./ $1'' : 80''$ -es térképünkre méteres lépték készitendő.

$$1'' : 80'' = 1:5760$$

$$H = 100 \text{ m}$$

$$h = \frac{100.000}{5760} = 17.36 \text{ m/m}$$



A kész léptéket használatbavétel előtt ellenőriznünk kell. Az ellenőrzést úgy végezzük, hogy az osztásrészeket 2,3,4-enként osztókörzőbe vesszük és végigmegyünk a léptéken, hogy mindenütt egyezik-e a beosztás.

Az ellenőrzött léptéket tussal ki kell húzni. Léptékrajzolásra mindig vékony vonalat használunk, vastag vonallal legfeljebb csak árnyékolhatunk.

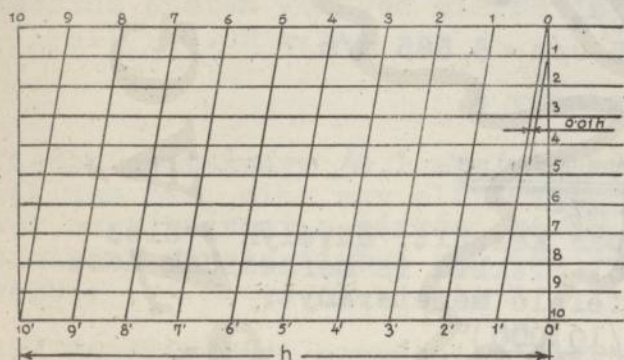
Az átlós lépték.

Nagyobb pontosságu térképek készítéséhez és használatához alkalmaz-
zák, mert velük a szerkesztési egységet ezrednyi pontossággal tudjuk
leolvasni, sőt ha a lépték magasságát növeljük, a főosztás ezred-
részét még becslhetjük.

Számítása ugyanugy történik, mint a vonalas léptéké. Szerkesztésnél
azonban nemcsak egy alapvonalra horduk fel a beosztást, hanem kettő-
re, melyek egymással párhuzamosak. A beosztást úgy kell elhelyezni,
hogy a megfelelő osztóvonalak összekötése mindkét alapvonalra merő-
leges legyen. Ezután az alapvonalak közti távolságot párhuzamos e-
gyenesekkel 10 vagy 20 egyenlő részre osztjuk aszerint, amint a szer-
kesztési egységet 10 vagy 5 alosztásra tudtuk felosztani. Ha mármost
az alosztásokat úgy kötjük össze, hogy minden felsőből kiindulva az
utánakövetkező alsóba egyenest húzunk, akkor elértük azt, hogy az egy-
mást metsző vízszintes és ferde osztóvonalak az alosztások tizedré-
szeit adják. Ábránk az átlós-lépték egy részének kinagyítása. Jól

látható az ábrán az első és u-
tolsó ferde vonal által a víz-
szintes egyenesekből kimetszett
növekvő ill. csökkenő irányu
hosszváltozás.

Ezek a kimetszett hosszak azok-
nak a hasonló háromszögeknek az
alapjai, melyeknek magasságait
a vízszintes egyenesek metsze-
nek ki a 00'-ból. A háromszögek
hasonlósága és a magasságok köz-
ti állandó viszony alapján könny-



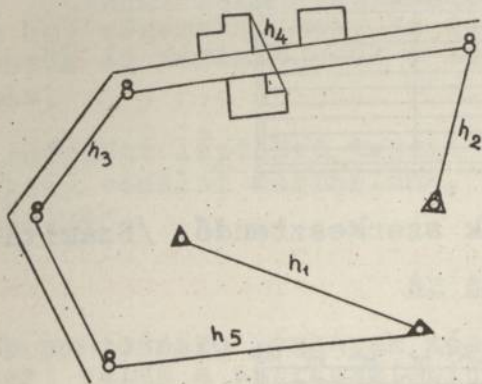
nyen belátható, hogy a hosszváltozás két vízszintes egyenes között
az alosztás egy tizede /grafikus osztás/.
Mivel azonban a vízszintesek egymásközi távolsága is elképzelhető
alosztásokra pontva, azért a fenti elv alapján becslés útján elérhet-
jük a szerkesztési egység /h/ 0.001-nyi pontosságu leolvasását. Az
átlós lépték könnyebb használhatósága miatt jó a vízszintes egyene-
sek számát is felírni, de legalább az ötödiket meg kell jelölni. Ha
egy szerkesztési egységet csak öt részre tudunk felosztani, akkor
egy alosztás 0.2-nek felel meg, s így a 10 vízszintessel csak 0.02-nyi
pontosságot érünk el. Éppen ezért a fenti elv alapján itt 20 vízszin-
test kell elhelyeznünk.

Az átlós léptékek alakját és használatát az alábbi példák mutatják:

1./ 1:500-as arányu térképet kell készítenünk. Megszerkesztendő az
átlós lépték!

$$1:500 = h:H$$
$$H = 10 \text{ m}$$

$$h = \frac{H}{500} = \frac{10.000}{500} = 20 \text{ m/m}$$



Tulajdonképpen azonban k 2882. A 2-es szám a mérési hibákból, a térkép összeszáradásából származik. /Ennek a figyelembevételét majd a második részben a régi térképek használatánál fogjuk látni./

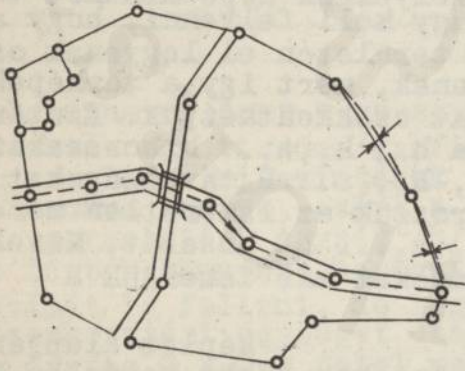
A vízszintes vetületsíkbeli mérések.

Mérési pontok.

A területidomok alakját és nagyságát úgy határozzuk meg, hogy az azokat körülzáró határvonalak végpontjainak kölcsönös fekvését állapítjuk meg.

A vízszintes vetületsíkbeli- vagy területmérés tehát a Föld felületén lévő pontok vízszintes vetületsíkbeli kölcsönös fekvésének megméréseire, meghatározására irányul. Hogy a méréseket elvégezhessük, ezeket a pontokat meg kell jelölnünk. A megjelölt pontok lehetnek:

1./ Részletpontok azok, amelyek a területidomok határvonalainak a töréseiben vannak. A részletpontokat - kivéve, ha épületek sarka jelöli meg, - mérési jellel kell ellátnunk. Részletpontokat kell felvennünk a határvonal töréseiben, utak és vízfolyások tengelyvonalában, vagy szélén, erdő- és mezőgazdasági területek határvonalán, épületek sarokpontjain, stb. Görbevonalak esetén a töréspontokat oly távolságokban kell felvennünk, hogy a töréspontokkal kijelölt sokszög a görbevonalhoz jól simuljon, tehát a 2-2 pontot összekötő hurhoz tartozó ívmagasság kisebb legyen, mint amit a térképen érzékelni lehet /0.1 m/m/.



Ennek megfelel 1:2000 méretarányú térképen 20 c/m, 1:2880-as méretarányú térképen 28.8 c/m.

2./ Segédpontokat akkor veszünk fel, ha területidomunk határvonalának egyik töréspontjából nem látható a szomszédos töréspont, vagy pedig a kettő között nem mérhető meg a távolság. A segédpontra tehát csak a mérés tartama

alatt van szükségünk, így csak ideiglenes jellel jelöljük meg /cövek, karó/, a térképbe nem rajzoljuk be.

3./ Vezér, vagy alappontok. Ezek legtöbbször nem esnek a területidomok határvonalába, az egész mérés alapjául szolgálnak, így a lehető legnagyobb pontossággal mérjük be. Vagy háromszögelési pontok, vagy sokszögpontok. Hogy a későbbi kiegészítő méréseknél felhasználhassuk, a térképbe pontosan berajzoljuk. Háromszögelési pontokul természetes /toronycsucs, gyárkémény villámhárítója, stb./ és mesterséges pontok használhatók.

Mérési jelek.

A pontos felmérés megkívánja, hogy az egész ország területe háromszögelési pontokkal legyen behálózva. Ezeket a pontokat a háromszögelési hivatal a legnagyobb pontossággal méri és számítja, mert ezekhez kapcsolódik az összes többi mérés. A háromszögelési pontok közé kapcsolják be a sokszögmeneteket, ezeknek a pontjai a sokszög-pontok. A részletpontokat pedig vagy a sokszögmenet oldalairól mériük derékszögű-, vagy a sokszögpontokból sarkponti összrendezőkkal.

Az eddigiekből már kitűnik, hogy vannak állandóan megjelölt pontok, és olyanok, amelyek csak a mérés tartamára vannak megjelölve. Az egyes pontokat fontosságuk szerint más és más módon jelöljük meg, illetve állandósítjuk. Megkülönböztetünk tehát állandó és ideiglenes pontokat.

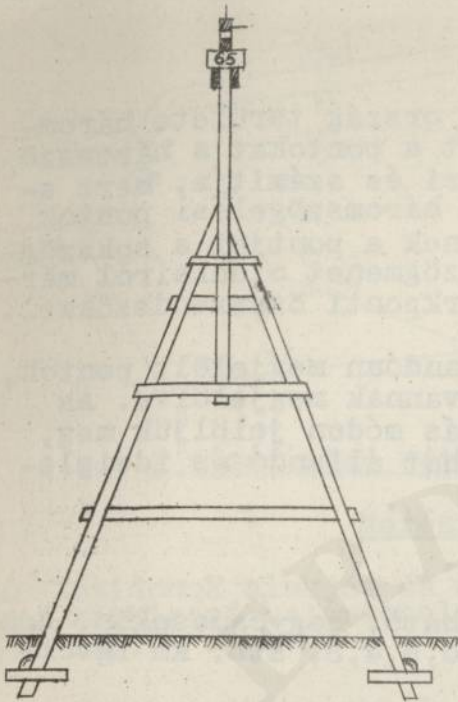
1./ Állandó pontok.

Vezér-, vagy háromszögelési pontok. Jól látható, hegycsúcson, dombon, elhelyezett pontok, amelyek 30, 20, 10, 6, 4, 3, stb. km távolságból jól láthatók.

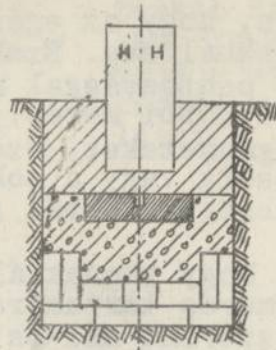
Állandósításuk és megjelölésük föld alatt és föld felett történik. A földalatti jel egy alapkőből, esetleg téglából áll, amelyen a pont egy bevésített kereszttel van megjelölve. Az alapkő felsőrendű pontoknál kifalazott aknában van elhelyezve, alatta salak vagy üvegcsarép van, fölötte döngölt föld-feltöltés van. Alsórendű háromszögelési pontoknál az üvegcsarépra egy 12-20 cm-es döngölt-föld-réteg jön, ebbe van beágyazva a kereszttel megjelölt tégl. Erre újból döngölt föld kerül, amelybe bele van ágyazva a földfeletti jel, faragott kő, vagy beton. A föld felszínén kőoszloppal jelöljük meg a pontot, e fölé pedig gulát építünk. A gulák építésére vonatkozólag minden országnak meg van a maga szabványa. Fontos, hogy a gula merev legyen, ne mozogjon és a Nap melegítő hatása következtében az elfordulása lehetőleg kicsi legyen. Németországban szögletvasból szétszedhető gulákat építenek, amelyeket a mérés befejezése után más helyre szállítanak el. Magyarországon a gulák fából készülnek. A Magyar Állami Földmérés szabványgulái nagyon szilárdak, jó szerkezetűek, minden tekintetben felveszik a versenyt a külföldi gulákkal. A felsőrendű háromszögelési pontokon kettős gulákat építenek. A két gula teljesen független egymástól. A külső gula irányzásra szolgál és arra, hogy azon járjunk, a belső pedig a műszer felállítására. Az irányzás ezekről rendszeren éjjel történik fényjelek segítségével. Alsórendű háromszögelési gulák már sokkal egyszerűbbek, mert itt már nincs meg az állvány-gula, műszerrel csak a gula alatt lehet felállni.

Alsó- /ötöd-/rendű háromszögelési pontok, megjelölésére a "tokos póznát" használják. Ez 4-5 m magas 10 cm vastag gömbölyegrud vagy pózna, amely alul a pont földalatti jele fölé állított tokba szorul, felül pedig a pont számának megjelölésére szolgáló deszkák vannak ráerősítve.

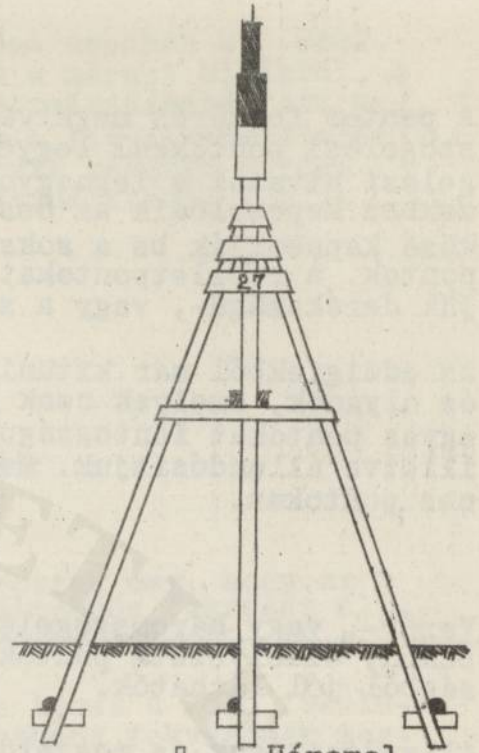
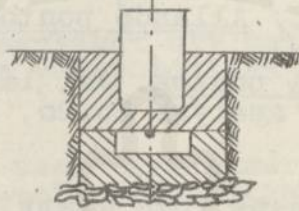
Háromszögelési pontok lehetnek még templomtornyok, gyárkémények villámhárítói, stb. is. Erdőben ötödrendű pontok megjelölésére használják a fajelet, amely egy, a pont melletti fára erősített csóva. Sokszögelt pontok jelölésére kőből vagy fából készült oszlopot /cöveket/ használnak. Ujabban két egymásfölé elhelyezett mintegy 25-25 cm hosszú 8-10 cm átmérőjű, közepén 1 cm átmérőjű lyukkal ellátott beton-cöveket alkalmaznak. A lyuk arra való, hogy a két cövet egy vasrud segítségével pontosan egymás fölé lehessen elhelyezni. Németországban ugyanilyen, üvegből, Ausztriában pedig schamotból készült cöveket használnak. A sokszögelési csomópontokat mindig kővel jelölik meg.



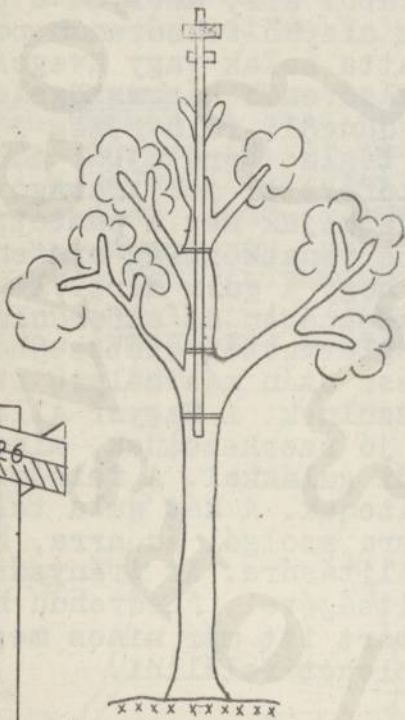
Négyoldalú árbóc



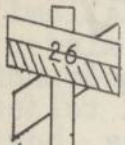
Felsőrendű pont



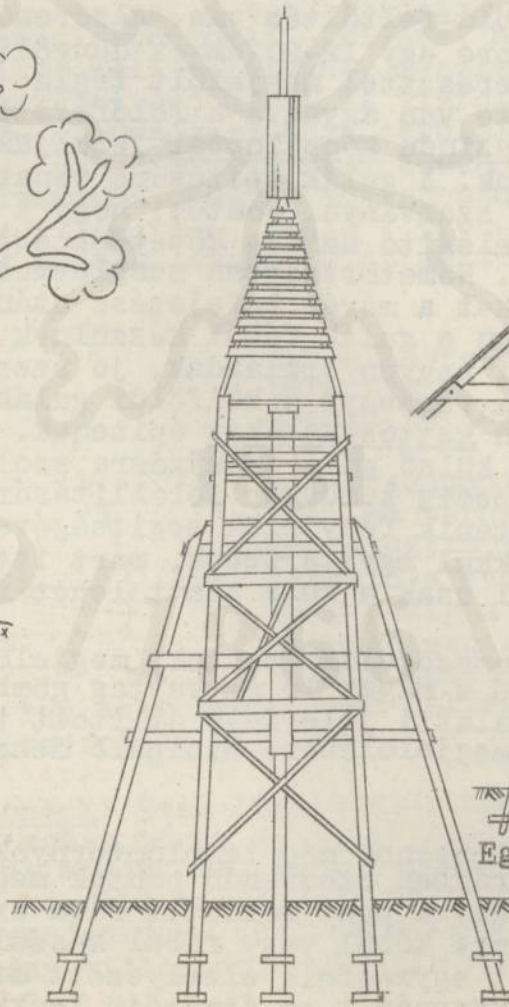
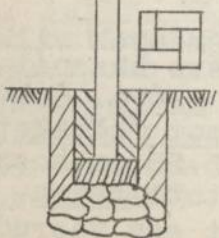
Háromoldalú gula



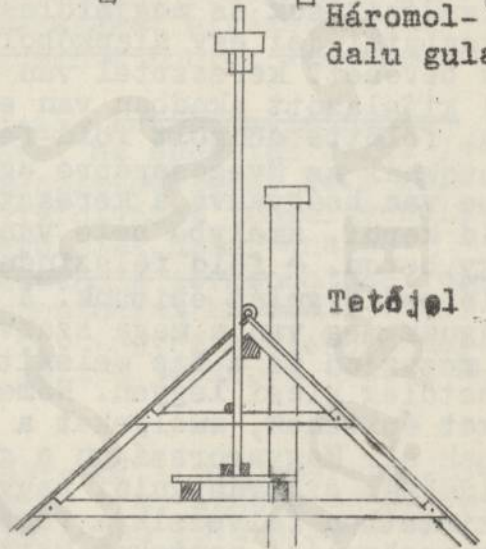
Fajel



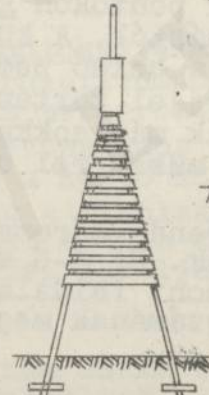
Tokes pózna



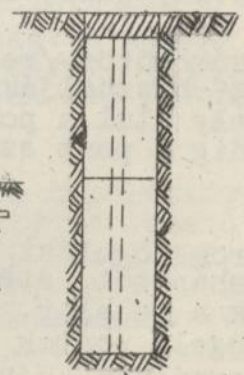
Álványos gula



Tetőjel



Egyszerű gula



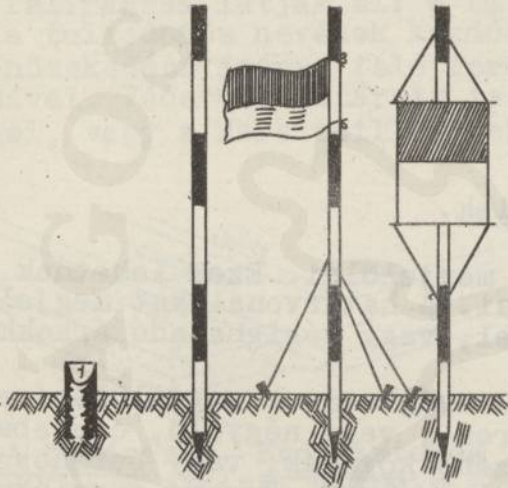
Betongyűrű sokszögelési pont

2./ Ideiglenes pontok.

Ezekre csak a mérés tartama alatt van szükség - és vagy a műszerálláspontokat, vagy a részletpontokat jelölik meg. Ezek a következők:

a cövek. Ez egy alsó végén kihegyezett 25-30 cm hosszú ág, vagy hulladékra darab, melynek egyik oldala simára van faragva, hogy a pont számát rá lehessen írni. Felső vége szintén sima: ide kisfejtű szegget verünk be, vagy keresztet rajzolunk a pont pontos helyének megjelölésére. Gazos, fedett terepen esetleg karót vagy zsindelyt verünk be a cövek mellé. Ez kizárólag a cövek könnyebb fellelhetőségét célozza és a haladási irányban a cövektől jobbra mintegy egy arasznyira van elhelyezve. A cövek jelzése a karóra is rá van írva. Méréskor a cövekre kitűzőrudat állítunk.

a kitűzőrud. 2.5-3 m hosszú, 2.5-3 cm átmérőjű kör vagy háromszögszelvényű olajban kifőzött fenyőfarud. Kívül olajfestéssel van el látva, hogy a rud elgörbülése és vetemedése meg legyen akadályozva. Alsó része vas saruban végződik. A rud 20-50 cm-nyi szakaszokban fehérre és vörösre, vagy pedig fehérre és feketére van festve. Ily-



módon kb. 500 m-re lehet a rudat látni. 500-1000 m közötti irányzásoknál a rudat zászlóval látják el, ennél is nagyobb távolságok esetén pedig lobogót erősítenek rá.

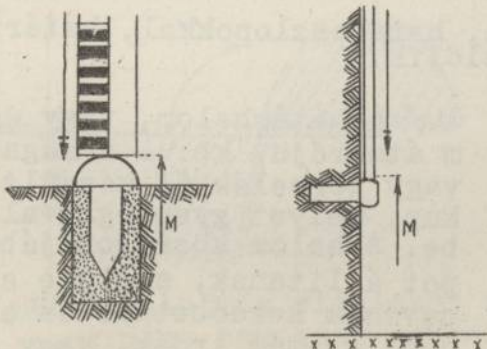
Annak végül olyan mérési pontok, amelyeket a mérés tartamára sem jelölnék meg. Ilyenek pl. a topográfiai célra szolgáló tachymetrikus felvételeknél egyes terepalakulatok /katlan, gerinc, stb./ jellegzetes pontjai, melyekre a léccel csak egyszer állunk fel. Ezek a rétegvonalak

szerkesztésére szolgálnak. A rétegvonalak elkészítése után a térképen sincsenek megjelölve.

Magassági jelek.

A tengerszintfeletti magasságokat is rögzíteni kell. Erre a célra a szintezési pontjeleket használjuk.

Alsórendű szintezési-pontok megjelölése.

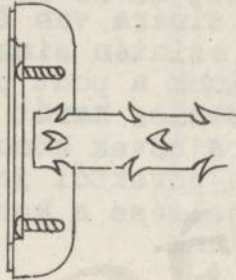


Vízszintes felületen betonba ágyazott szegecs teteje jelöli a pont magasságát.

Függőleges felületen falicsapot alkalmazunk. Itt a magasság a felső domboru felület vízszintes érintősíkjára vonatkozik. Épületek lábazati-falában, vagy külön kőben helyezik el és arra kell vigyázni, hogy a léccel függőlegesen rá lehessen állítani.

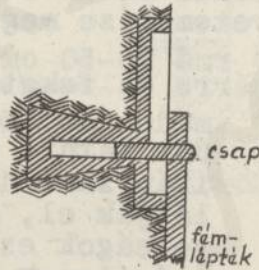
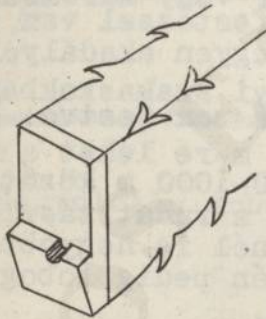
Kisebb pontosságú szintezési-pont-jelölés a függőleges falba vésett vízszintes vonás, vagy vízszintes felület/pl. kilométerköz tetejének/ lecsiszolása. A pont számát mindkét esetben mellé kell írni.

Felsőrendű szintezési-pontok megjelölése.



A fali tárcsa hasonló a falicsaphoz, csak nagyobb. Homloklapján a pont magassága is fel van tüntetve.

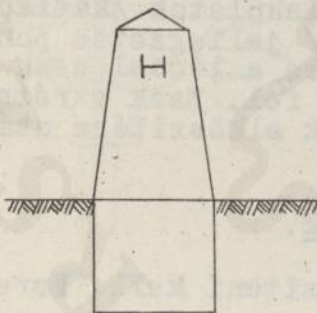
Konzolosan kiképezett furatos csap. Ennél a magasság a peremre vonatkozik, melyre a lécezt ráhelyezhetjük.



Pontosabb méréseknél egy külön fém-mércét használunk, amely egy csap segítségével a furatba felakasztható.

Határjelek.

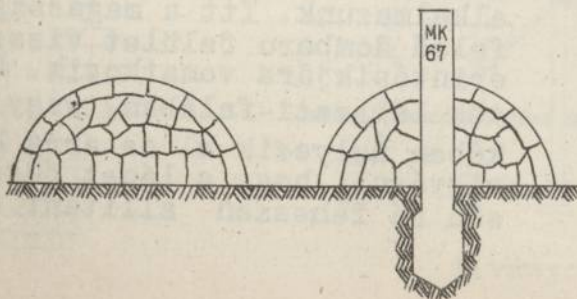
A határvonalakat állandó jellel kell megjelölni. Ezek lehetnek országok, megyék, városok, községek határai. A határvonalakat megjelölhetjük a töréspontokba helyezett jelekkel, vagy végighaladó árkokkal.



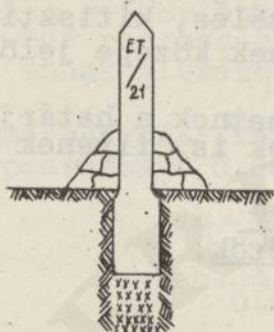
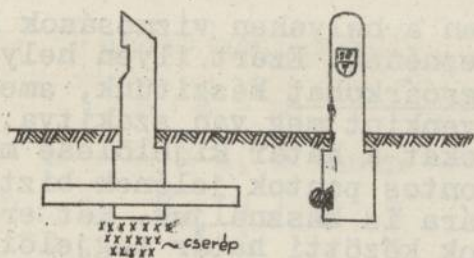
Országhatárok megjelölésére három-, vagy négyélű, csucsban végződő kőgúla, vagy betonoszlopok szolgálnak. Ezekre a gúlaakra rávésik a pont jelét, valamint a szomszédos ország felé fordított oldalra az ill. ország kezdőbetűjét. Magyarország a "H" betűvel van jelölve.

Megyék, járások, községek határainak a megjelölésére kő-, vagy betonoszlopokat használunk. Ezek azonban kisebb méretűek, mint az előbbiek. Gyakran használják még ma is ezeknek a határoknak a megjelölésére a határdombokat.

Erdőbirtokok határát határhalmokkal, határoszlopokkal, határfákkal, határárokokkal vagy nyiladékokkal jelölik.



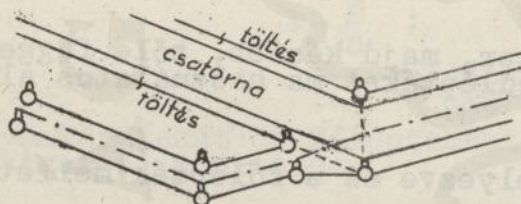
1./ A határhalom, vagy domb. 1.5 m átmérőjű, kb. 1 m magas földből vagy törmelékből készült csonkakúp, melyet gyepetglával fednek be. A halom középpontjába oszlopot állítanak, amelyre a birtokos nevének kezdőbetűit és a határdomb számát írják, vagy égetik be.



2./ A határoszlop. Gömbölyeg-alakban meghagyott vagy földfeletti részén négyszögszelvényűre megfaragott fából, ujabban kőből vagy betonból készül. A négyoldalú határoszlopok felső végét meghegyezik, a hengereseké ferdén levágják, hogy a csapadékvíz könnyebben lefolyhasson.

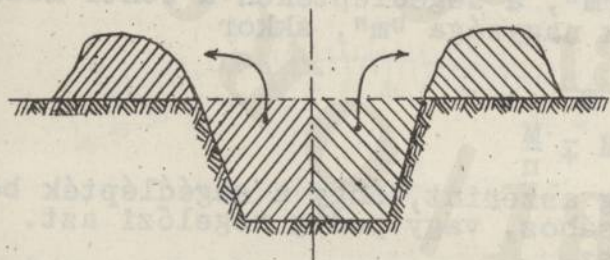
A határoszlop számára ásott gödör fenekére üveg, vagy más cserepdarabokat, esetleg a határpont közelében elő nem forduló anyagokat kell helyezni, hogy a határpont az oszlop eltávolítása esetén is jól fellelhető legyen. Az oszlopokat 0.6-0.8 m mélyen kell a gödörbe beásni, és alsó végükön a kiemelés ellen áttolt hevederrel kell biztosítani. A határoszlopokat

felírással látják el: a határolt birtoktest felé fordított oldalon a tulajdonos nevének kezdőbetűivel, a határpontokat jelölő szám-sor növekedési iránya felé fordított oldalukon pedig a határpont számával. Véderdők határait is oszlopokkal jelzik, ezeket "VE" betűkkel, vagy a Mars csillag jelével: ♂ látják el.

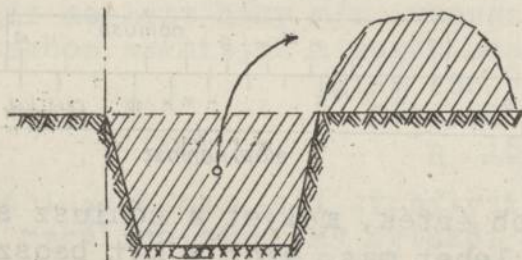


Ha a határ ut, vagy patak, akkor a dombot is, meg az oszlopot is kétoldalt helyezik el, a kétoldalt helyezik el, a két jel közötti távolság fele adja a határt. Utaknál, vízfolyásoknál, árkoknál a határdombokat, oszlopokat vagy köveket legtöbbször elhagyják.

3./ A határárok. Erdőbirtokok határának megjelölésére használják. Kb. 0.8-1 m széles, 0.5-0.9 m mély. Az árok alakja változik aszerint, amint sík-, vagy hegyvidéken van-e a határ, továbbá hogy mindkét szomszéd területén halad-e, vagy csak az egyik birtokon.



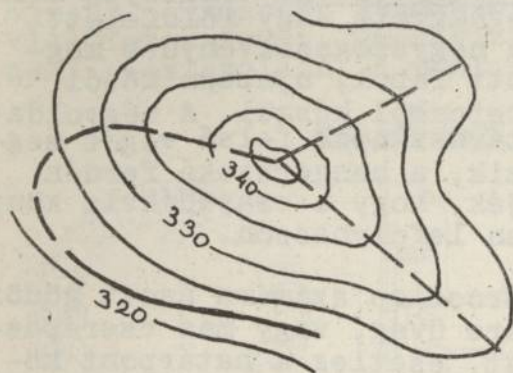
Mindkét birtokon halad a közös árok, melynek közepe jelöli a határt, a kihányt föld pedig fele-fele arányban kerül az árok két partjára.



Ha csak az egyik birtokon halad az árok, akkor magán-árok a neve. Ilyenkor az árok széle a birtokhatár és az egész kiásott föld az ároktulajdonos oldalára kerül.

Síkvidéki határárok kijelölésére folytatólagosan árkolunk: az árok megszakítás nélkül követi a birtok szélét.

Hegyvidéken a lejtős oldalakon nem lehet folytatólagosan vezetni az árkot, mert nagy csapadék esetén a lefolyó víz akadály nélkül rohanhatna le, mind jobban, mélyítendő és marná ki az árkot és idővel eze-



ken a helyeken vízmosások keletkeznenek. Ezért ilyen helyeken ugróárkokat készítünk, amely helyenkint meg van szakítva. Az árkokat a határ kijelölése mellett fontos pontok jelének biztosítására is használjuk. Két erdőbirtok közötti határ megjelölésére alkalmas még a nyiladék is, mely 8-12 m széles, kitisztított pásztá, melynek közepe jelöli ki a határt.

Végül lehetnek a határjelek természetesen is, ilyenek a folyó,

patak, hegygerinc, ut, szakadék, stb.

A mérőműszerekre szerelt segédeszközök.

1./ A paránylépték vagy nóniusz.

A hosszúságoknak vagy szögeknek kisebb határig való közvetlen méréséhez az alosztásokkal ellátott hossz, vagy szögmértékeket használjuk. Ezt az alrészekre osztást azonban csak bizonyos határig tudjuk elvégezni: a métert legfeljebb 0.5 m/m-ekre, a fokot pedig csak 10"-ig tudjuk közvetlenül felosztani. Ez a pontosság legtöbbször nem elegendő. Ezért, hogy kisebb értékeket is leolvashassunk, egy segédléptéket használunk: ez a nóniusz.

Ilyen segédléptéket először Nunnes Péter, majd később, tőle függetlenül Vernier szerkesztette meg a segédléptéket ma használatos alakjában.

A segédlépték egy kis lemezen van elhelyezve és a főlépték mellett eltolható.

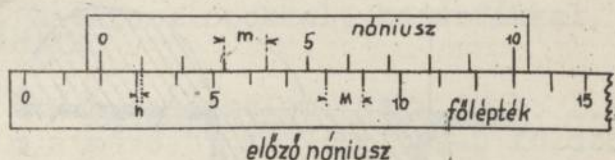
A nóniusz elmélete a következő: mértékünk legkisebb osztásrészeiből összefoglalunk $\frac{1}{n}$ -et, ennek nagyságát átvisszük a segédléptéktől szolgáló lemezkére s ott beosztjuk "n" részre. Vagyis, ha a főlépték legkisebb osztásrészének nagysága "M", a segédléptéken a fenti módon kapott beosztás egy osztásrészének nagysága "m", akkor

$$\frac{1}{n} \cdot M = m$$

s innen:

$$m = \frac{M}{n} \quad M = M + \frac{M}{n}$$

Kétféle nóniuszt különböztetünk meg aszerint, hogy a segédlépték beosztása elmarad a főlépték beosztásához, vagy pedig megelőzi azt. Eszerint van utózó- és előző-nóniusz.



Kérdés mármost, hogy mi az a legkisebb érték, melyet a nóniusz segítségével le tudunk olvasni. Ez nem lehet más, mint a két beosztás közötti különbség.

utózó nóniusznál;

$$h = M - m$$

$$\text{de } m = \frac{n-1}{n} M, \text{ s innen}$$

$$h = M - \frac{n-1}{n} M = \frac{M - M + M}{n} = \frac{M}{n}$$

előző nóniusznál:

$$h = m - M$$

$$\text{de } m = \frac{n+1}{n} M, \text{ s innen}$$

$$h = M \frac{n+1}{n} - M = \frac{M}{n}$$

Nóniusszal a gyakorlatban hosszmeréseknél 0,02 m/m, szögméréseknél pedig 20"-30" pontossáig szoktunk mérni. Kérdés, milyen beosztás szükséges ennek elérésére.

1./ hosszmeréseknél: főosztásunk legkisebb osztásrésze: 1 m/m. Az elérendő pontosság: 0.02 m/m. Akkor:

$$h = \frac{M}{n}; \quad n = \frac{M}{h}$$

$$n = \frac{1}{0.02} = 50$$

Mivel a gyakorlatban leginkább utózó nóniuszt használunk, azért a főosztás $1/n - 1/49$ osztásrészenek - jelen esetben 49 m/m-nek - a mellékosztáson 50 osztásrésznek kell megfelelnie.

2./ Szögméréseknél a főosztás rendszerint a műszer limbusa, vagy a transporteur beosztása - 30'-es. Az elérni kívánt pontosság: 30". Akkor

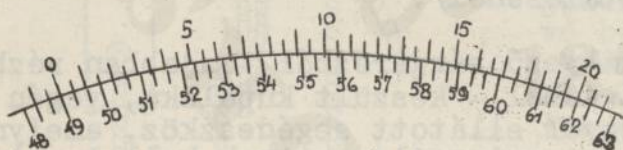
$$h = \frac{M}{n}; \quad n = \frac{M}{h}$$

$$n = \frac{1800''}{30''} = 60$$

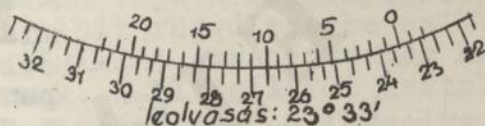
Ilyenkor tehát 59 főléptékbeli egységet - 29°30'-et kell 60 részre osztani a nóniuszon.

Teodolitoknál rendszerint $M = 20'$, a nóniusz osztásrészeinek száma: $n = 40$, vagy 20. Tehát

$$h = \frac{20'}{40} = 0.5', \quad 30''; \quad \text{vagy pedig} \quad h = \frac{20'}{20} = 1', \quad 30''$$



leolvasás: 49°00'00'



leolvasás: 23°33'

Fokives nóniusz szerkesztésénél először meghatározzuk, hogy adott sugár mellett hány m/m ivhossz felel meg egy foknak, vagy adott ivhosszhoz számítjuk a sugár hosszát. Pl. $M = 1 \text{ m/m} - 20'$. Mekkora lesz R?

$$2 R \pi : 360^\circ = 1 \text{ m/m} : 20'$$

$$R \pi : 180^\circ = 1 \text{ m/m} : 1/3^\circ$$

$$R = \frac{180 \times 3}{\pi} \text{ m/m}$$

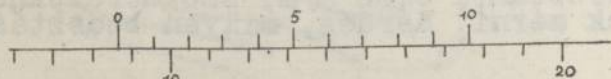
A nóniusz használati szabályai:

1./ Megállapítjuk "M" értékét és "n" számát, s ezek segítségével kiszámítjuk a "h" értékét.

2./ A nóniuszt a megmérendő nagyság /hossz, vagy szög/ határainak megfelelő állásba hozzuk és leolvassuk azokat az egész legkisebb osztásrészeket, melyeket a nóniusz "0" vonala meghaladott. /Fokbeosztásu nóniusz-ábránkon 23°20'./

3./ felkeressük azt a nóniusz-osztóvonalat, mely egy főosztásbeli osztóvonalal pontosan összevág. /Fokbeosztású nóniusz-ábránkon a 13-ik/. Ezt a műveletet a paralaxis-hiba /lásd: optika/ elkerülése végett az osztóvonalak irányában nézve kell elvégeznünk, és nem szabad oldalról.

Miután megszámloltuk, hogy hányadik nóniusz-osztóvonal vág össze, az így kapott számot szorozva a "h" értékkel /példánkban $13 \times 1 = 13$ /, kapjuk a nóniusz-leolvasást, melyet az előbbihez adva nyerjük a teljes leolvasást.



főléptékről: 8.00

nóniuszról: 0.65

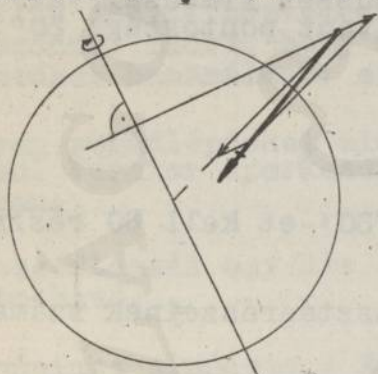
teljes leolvasás: 8.65

Előfordul, hogy a nóniusz egyik osztóvonala sem vág: ilyenkor feles leolvasást kell végeznünk.

A nóniusz első és utolsó beosztása előtt és után még 2-2 tulosztást is szoktak elhelyezni a szélső értékek biztosabb leolvasására.

A függőleges irányt kijelölő segédműszerek.

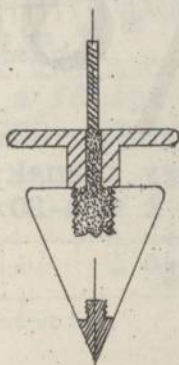
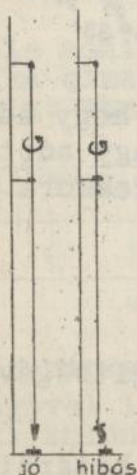
A geodéziában igen fontos a függőleges és vízszintes irány kijelölése, mert mérés előtt műszereink egyes részeit függőleges ill. vízszintes helyzetbe kell hozni. Műszerrel a terepen megjelölt pont



főlé kell állnunk. Ezt a célt szolgálja a függő vagy függélyező.

Ha egy igen-vékony fonalra egy súlyt függesztünk fel, akkor a fonal csak közelítőleg fogja a függőleges irányt kijelölni, mert a súlyra hatást gyakorol a Föld forgásából származó centrifugális erő és a Föld tömegének a vonzóereje. Az előbbi merőleges a forgástengelyre, az utóbbi pedig a Föld súlypontja felé mutat. Geodéziai méréseknél azonban az ebből származó eltérésre

nem kell figyelemmel lennünk, mindössze igen pontos méréseknél kell a tömegvonzás-okozta függőleges irányból való eltérést számításba vennünk /pl. hosszú alagutak kitűzésénél/.



A függélyező sárgarézből - újabban rézhiány miatt vasból - készült kupalakú, végén acélheggyel ellátott segédeszköz, amelynek pontosan esztergályozottnak kell lennie és a súlypont felett, a kup tengelyében kell felfüggesztteni. Hogy valóban így van-e felfüggesztve, arranézve a következőképpen vizsgáljuk meg: kiválasztunk egy függőleges falfelületet, abba felül egy kampós, alul pedig egy füles szeget verünk be. A füles szeg nyulása nem lehet nagyobb, mint a függélyező zsinórjának vastagsága. Ezután a függélyező zsinórját alulról átvezetjük a füles szögön, végét pedig a kampószöghöz erősítjük. A függélyező nyugalombahelyezkedése után a függélyező acélhegye alá pontosan elhelyezünk egy hegyével felfelé álló szeget /melyet deszkába verhetünk/ majd sodorjuk a zsinórt függőleges hossz tengelye

körül a két szög között. Ekkor a függélyezőnek a fúles-szeg alatti része csak a függőleges hossz tengely körül tud elfordulni s így megfigyelhetjük, hogy a függélyező hegye forgás közben egybeesik-e a szög hegyével. Ha igen, akkor a függélyező jó, ha nem, akkor a függélyező hegye kött ir le. Ha e körnek a sugara 0.1 m/m-nél nagyobb, akkor a függélyezőt teodolit-műszerek központosítására nem használhatjuk.

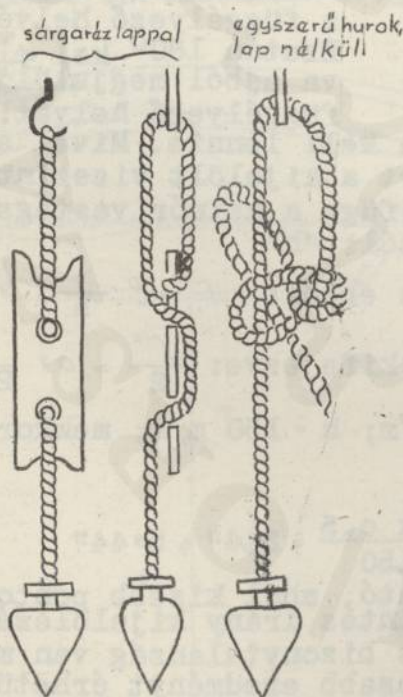
Műszerek központosítására 20-30 dkg-os függélyezőket használnak, aknafüggélyezés céljára azonban 5-10-20 kg-os függélyezők is vannak.

A függélyező hegyének közvetlenül a pont fölé kell esnie, ezért úgy akasztjuk fel, hogy zsinórjának hossza változtatható legyen.



Régebben ellensúlyos függélyezőket használtak, melyeknél két egyenlő nehézsúlyt találunk: az egyik maga a függélyező, a másik az ellensúly. Így a függélyezőzsinór tetszés szerint hosszabbítható. Ma már nem használjuk, mert ha az ellensúly hibásan van felfüggesztve, akkor a függélyező kitérése nagy lehet.

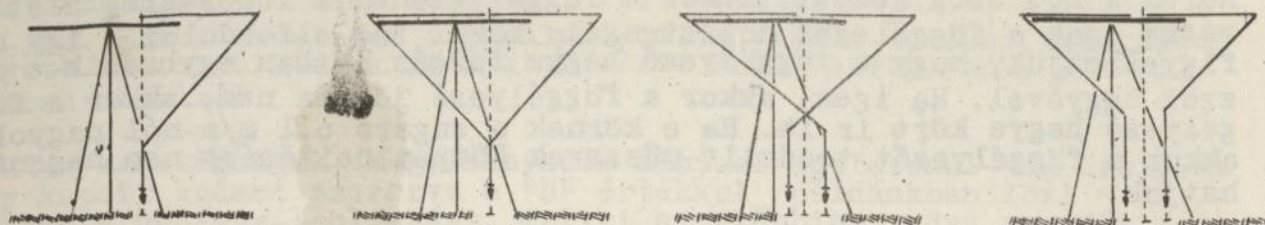
Ujabban inkább sárgarézből vagy celluloidból készült felfüggesztési-lapok segítségével hosszabbítják a felfüggélyezőzsinórt.



Legtöbbször azonban minden összekötő rész nélkül csak hurkot kötünk a zsinórra: így is beállíthatjuk a kívánt hosszra. A függélyező-villa tulajdonképpen egy derékszögű háromszög, melynek egyik befogója hiányzik. Mérésasztalok központosítására használjuk. Ennél a függélyező az átfogó szabad végéhez van erősítve, s így ha a meglévő befogó vízszintes helyzetbe kerül, akkor szabad vége a függélyezőzsinór által kijelölt függőlegesbe esik. A függélyezővillát errenézve meg kell vizsgálnunk. A vizsgálatot asztallapon kell elvégeznünk. A függélyező-villa meglévő befogóját az előzőleg már szintesített asztallapra fektetjük úgy, hogy vége egy megjelölt ponton legyen, átfogója pedig az asztallap alá nyuljon. Ekkor a befogó és az

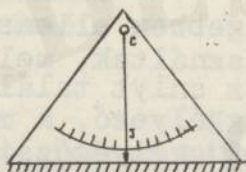
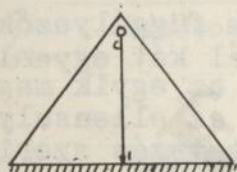
átfogó szabad végét összekötő egyenes meghosszabítása - a zsinóron lógó függélyező - a terep egy pontjára mutat. Ha jó a függélyezővilla, akkor a függőleges tengely - melyet a függélyezőzsinór jelöl ki - körül 180° -kal elforgatva, a függélyező ugyanarra a pontra vág. Ha hibás a függélyezővilla, akkor - mint az ábrából jó látható - az eltérés felét vagy a befogóból vagy az átfogóból kell levágnunk.

A függélyezővillának ma már gyakorlati jelentősége nincs.



A vízszintes irányt kijelölő segédműszerek.

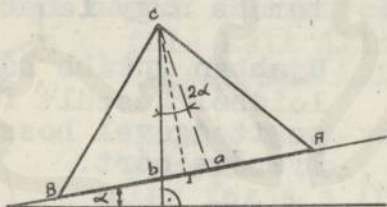
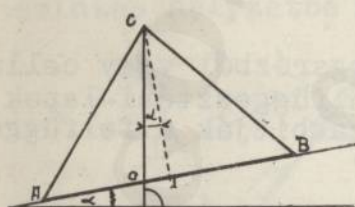
A kőműves-mérleg egy egyenszáru háromszögalaku deszkalap, amelyen a "C" pontban egy kis függélyező van felakasztva. A "C" pontból az alapra húzható merőleges egy "I" indexponttal van megjelölve. Ha "I"-nél CI sugárral egy körívet rajzolunk és azt fokbeosztással látjuk el, akkor hajlásszögek mérésére is használatos.



A CI egyenesnek merőlegesnek kell lennie az alapra. Erre nézve a

vizsgálat a következőképpen végezzük el:

A kőműves-mérleget közel vízszintes asztalra helyeztük és megjelöljük a függélyező helyét: "a"-t. Ezután 180°-kal elforgatva újból megjelöljük a függélyező helyét: "b".

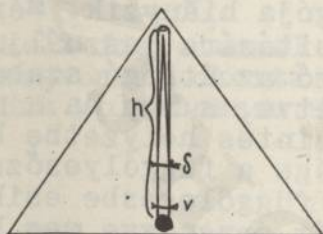


Az "I" indexvonásnak az "ab" felezésében kell lennie. Mivel a függélyező zsinórja fedi az indexvonást, azért a kijelölt vízszintes bizonytalansága függ a zsinór vastagságától "v" és hosszától: "h":

$$v = \frac{\sigma}{\rho} \cdot h \quad \text{és ebből: } \sigma' = \rho \frac{v}{h}, \text{ vagy}$$

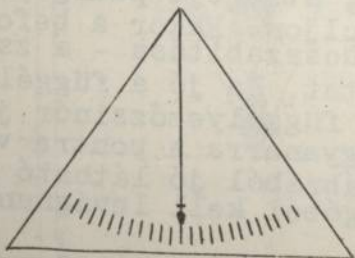
$$\text{a szög felére kifejezve: } \frac{\sigma'}{2} = \rho' \frac{v}{2h}.$$

Pl. $v = 0.5 \text{ m/m}$; $h = 150 \text{ m/m}$; mekkora lesz $\sigma/2$?



$$\frac{\sigma}{2} = \frac{206265 \times 0.5}{2 \times 150} \div 344'' \div 5.44''$$

Tehát a kőművesmérleg csak ott használható, ahol kisebb pontossággal megelégszünk, mert méréseinknél a vízszintes irány kijelölésében csak 5"-30"-es bizonytalanság van megengedve. Pontosabb eredményt érhetünk el ezzel a segédeszközzel is, ha hossztengegyén át félbevágott kup a függélyezők és annak a hegye mozdul el a fokíves beosztás előtt. A függélyező hegyét már 0.1 m/m pontossággal állíthatjuk be, s úgy pl. 100 m/m-es zsinórhossz esetén:



$$\frac{\sigma}{2} = \frac{206265 \times 0.1}{2 \times 100 \times 2} \div 103'' = 1.43''$$

Látjuk, hogy az eredmény jóval pontosabb, de még így sem megfelelő arra, hogy pontos műszereinknél alkalmazzuk.

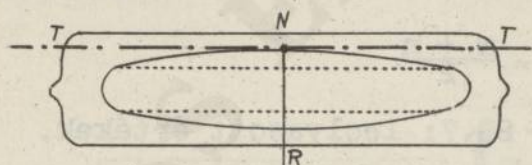
A libella.

A libella műszereink legfontosabb segédeszköze, mert ezzel hozzuk az egyes műszer-alkatrészeket vízszintes, illetve függőleges helyzetbe.

Ha egy zárt edényben annyi folyadék van, hogy csak egy kis levegőbuborék marad felette, akkor ez a buborék a mehézségi erő hatására a legmagasabb helyet foglalja el. Ha az edényt sík lappal zárnók le, akkor a buborék az edény legkisebb kimozdítására a síklap szélére ugrana, tehát mérésre nem volna alkalmas. Ezért a lezáró lap belső felületét gömbfelületre köszörülik ki: ezáltal a buborék a kimozdítás nagyságával arányos, a gömb sugarának megfelelő iven fog elmozdulni.

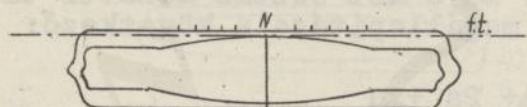
Kétféle libella van használatban: az érzékenyebb csőlibella és a kevésbé érzékeny dobozlibella.

1./ A csőlibella egy vastagfalú üvegcsőből áll, amely belül "R" sugárral gömbfelületre van köszörülve. Ugy készül, hogy az egyik végén



rad, mely mindig a legmagasabb pontot igyekszik elfoglalni.

Egyszerűbb csőlibellák üvegét nem köszörülik, hanem a csövet meggörbitik. Ezeknek a folyadékja víz. Az ilyen libella természetesen nem annyira pontos, mint a köszörült s éppen ezért műszerekhez nem is használható.

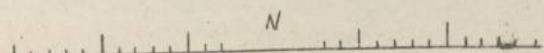
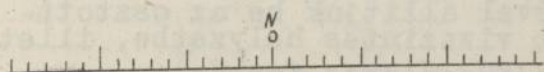
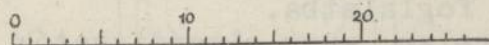


A libellával csak akkor érhetjük el a kívánt pontosságot, ha köszörülése pontos. Ábránkon "N" a libella osztásának főpontja, vagy főosztásrésze, a normál-pont. A normál-ponton át a kiköszörült gömbfelülethez húzott érintő /f.t./ a libella tengelye, vagy főérintője és e tengelyre merőleges a görbület "R" sugara.

A cső külső felületén osztást találunk. Ez az osztás kétféle lehet: átfutó vagy tört osztás.

Az átfutó osztás a libella egyik végén kezdődik 0 osztással és átfut a normál-ponton folytatódólagos számozással a libella másik végéig. Ilyen beosztást a csillagászati mérésekre használt műszerek libelláin szoktak alkalmazni.

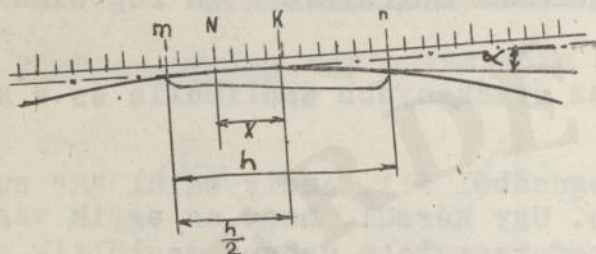
Geodéziai műszereknél a tört osztást használják. Ennél az osztást "0" pontja a normál-pontban van és ettől jobbra és balra külön van



számozva. A középső osztásokat és a számozást legtöbbször elhagyják. Egy kis osztásrész neve: pars. Hossza 2.256 m/m /egy parisi vonal/, 2.5 m/m, vagy 2 m/m.

Alibellák vizsgálatánál meg kell állapítanunk a buborék "K" közép-pontját. Ez másképpen történik aszerint, amint a libella osztása átfutó, vagy tört. A pars hosszát mindkét esetben ismernünk kell.

Átfutó osztásnál a normál-pont számértékkel van adva. A buborék kitérésének "x"-nek, a nagyságát a következőképpen határozzuk meg: az ábrából:



$$x = K - N$$

Keressük a "K" értéket. Leolvassuk a két buborékvégződést: "m" és "n"-et. A buborék hossza:

$$h = n - m$$

Innen a közepe:

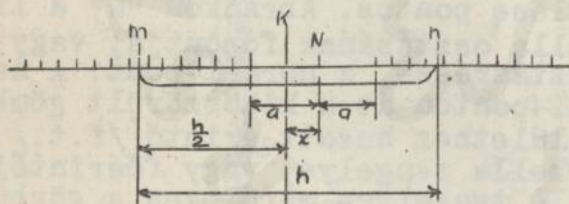
$$K = m + \frac{h}{2} = m + \frac{n - m}{2} = \frac{2m + n - m}{2} = \frac{m + n}{2}$$

Pl. $N = 17.0$: adott érték; $m = 14.2$; $n = 28.7$: leolvasott értékek.

$$K = \frac{14.2 + 28.7}{2} = 21.45$$

A kitérés nagysága pedig: $x = K - N = 21.45 - 17.0 = 4.45$ pars. Ha adott a libella érzékenysége / ϵ , számítását később tárgyaljuk/, akkor a főérintő és a "K" pontban húzható érintő közötti " α " szög számítható: $\alpha = x \epsilon$. Ha pl. a fenti libellánál $\epsilon = 5''$, akkor $\alpha = 4.45 \times 5$, vagyis a vízszintestől való eltérés szöge: $22.25''$

Tört osztásnál a normál-pont mindig a két osztás között középen fekszik, de megjelölve rendszeren nincs. Ha a két osztás közötti távolságot 2 a-val jelöljük, akkor a "K" megállapítása a következő:



$$h = m + 2a + n$$

$$\frac{h}{2} = m + a - x = n + a + x$$

$$2x = m + a - n - a$$

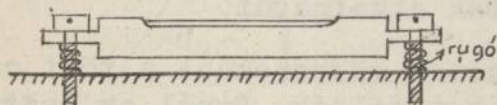
$$x = \frac{m - n}{2}$$

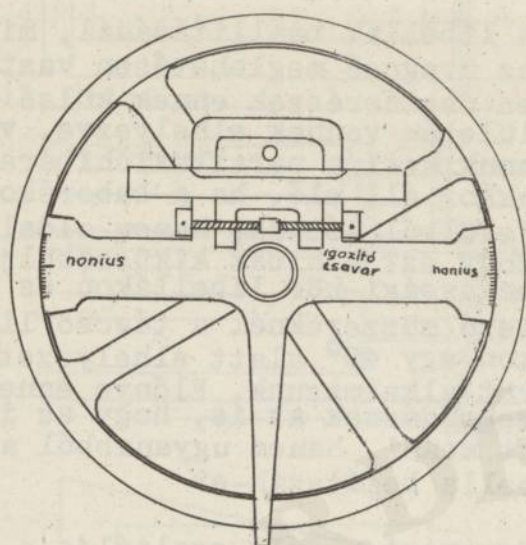
Pl. $m = 10.8$; $n = 4.3$, akkor $x = + 3.25$ pars. Ismerve a libella érzékenységet, az $\alpha = x \epsilon$ képlet alapján itt is számíthatjuk a kitérés szög nagyságát.

A libellák szerkezetét tekintve: a libella csöve fém- /réz/ foglalatba van elhelyezve és cementtel, gipsszel vagy más ragasztóanyaggal, esetleg parafával van rögzítve a foglalatba.

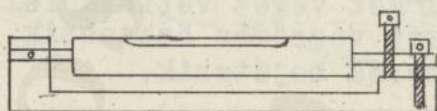
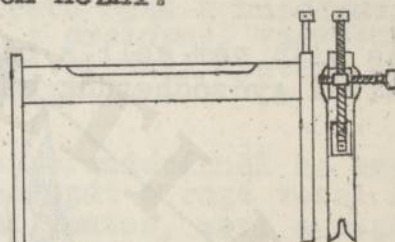
A libellák vagy műszerekre vannak szerelve, vagy elmozdithatók.

1./ műszerekre-szerelt libellák az alhidádé-libellák: ezek segítségével állítjuk be az osztott-kört vízszintes helyzetbe, illetve a függőleges forgás-tengelyt függőleges helyzetbe.

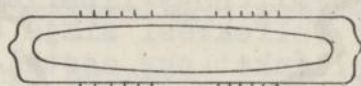




A magassági-kör ellenőrzőlibellája a magassági körre, vagy a magassági-kör leolvasó-készülékére van szerelve, aszerint amint a magassági-kör áll, és a leolvasó-készülék foroghat, vagy fordítva. Arra szolgál, hogy a magassági-kör 0-180° osztását összekötő egyenest, vagy a két leolvasókészülék 0-ás indexvonalait vízszintes helyzetbe lehessen hozni.



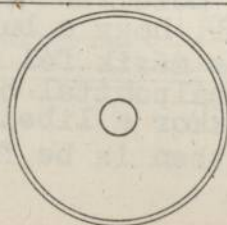
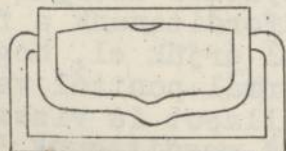
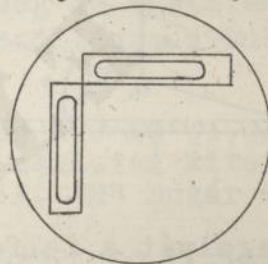
2./ A talpas-libella astallapok szintezésére szolgál.



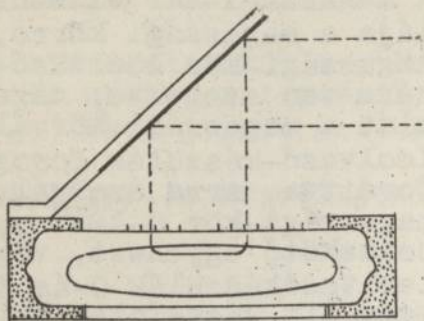
A távcsőlibella a távcsőre van szerelve s arra szolgál, hogy a távcső irányzótengelyét vízszintes helyzetbe lehessen hozni. Ez némely szintezőműszernél leemelhető. A tengely- vagy nereglibella /l. a fenti ábrát! a műszer pontos szintezésére, illetőleg a függőleges forgástengely pontos függőlegesre-hozatalára szolgál. Tengelyek szintezésére szolgálnak még a felfüggeszthető libellák.

A Ceverziós-libella a hossz tengelye körül átfordítva is használható, tehát belül mindkét oldalon pontosan van köszörülve és mindkét oldalon vannak osztásai. Teodolit és szintező-műszereken használják, mert a távcső áthajtása után is használható az irányzótengely szintezésére.

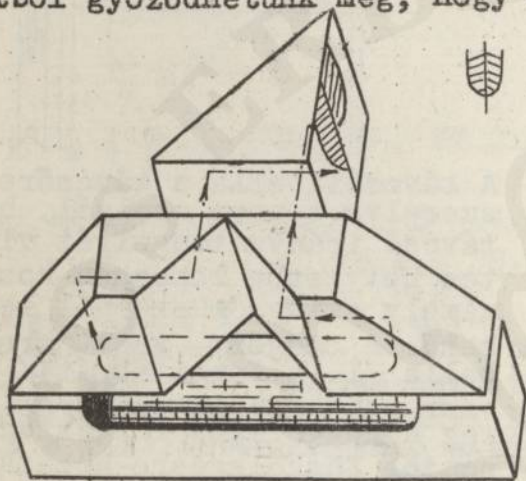
A szelencelibella kis üveggel bezárt fémdobozban, egymásra 90° alatt elhelyezett 2 csőlibella /nem tévesztendő össze a dobozlibellával! Kitűzőrudak függőleges helyzetbe való hozatalára használják.



2./ A dobozlibella doboz-alaku üvegtest. Felső lapja belülről gömbfelületre van csiszolva. Nem olyan pontos, mint a csőlibella s ezért inkább csak busszolákon használatos. Teodoliton is előfordulhat, de csőlibellával együtt. Felülről nézve nem látunk rajta parsokat, hanem középen egy kört, s abba kell behoznunk a szintén kör alakúnak látszó buboréket.



zás után nem kell a távcsőből oldalt menni, hanem ugyanabból a helyzetből győződhetünk meg, hogy a libella bejátszik-e?

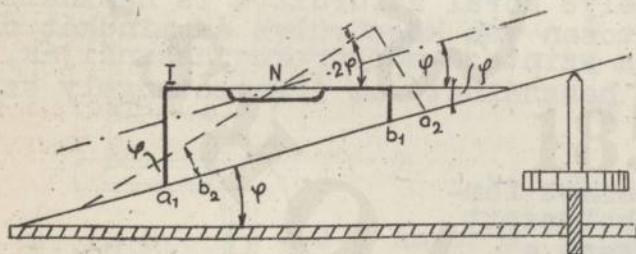


A libellák beállításánál, mivel az üvegcső meglehetősen vastag, s az osztásrészek ennek külső felületén vannak elhelyezve, vigyáznunk kell a parallaxishibára, mely akkor áll elő, ha a buborékot nem felülről nézzük, hanem oldalról. Hogy ezt a hibát kiküszöböljük, a magassági-kör libellákon és a szintező műszereknél a távcső libellákon egy 45° alatt elhelyezett tükröt alkalmazunk. Előnye ennek a megoldásnak az is, hogy az irány-

Ugyanezt a célt szoltálja a Zeiss és Wild féle műszereknél alkalmazott prizmás beállító-készülék. Ezeknél a libelláknál nincs osztás: a megfelelő prizma a buborék két végét vetítik fel és ha a két végződés összeesik, akkor a buborék bejátszik.

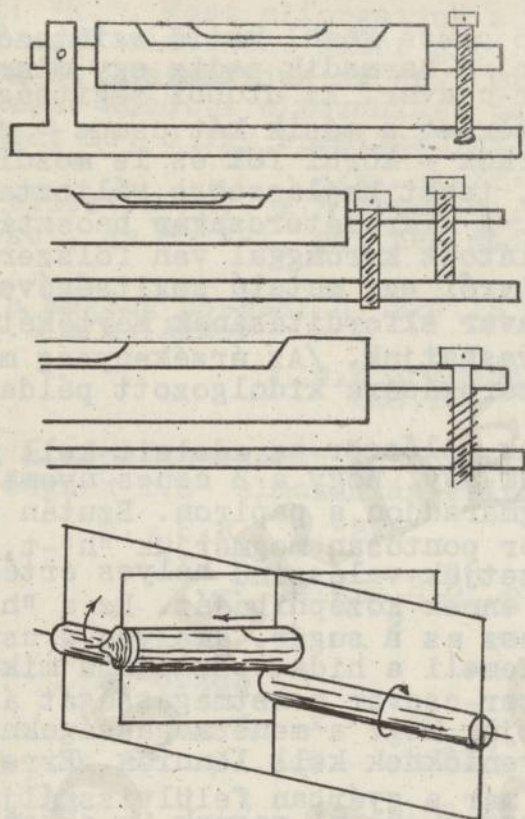
A libellák vizsgálata.

zitva, s ha buborékja bejátszik, akkor felfekvési síkja a vízszintes-től " φ " szögértékkel eltér. Hibás libellánkat egy asztal-lapra tesz-



Ahhoz, hogy a libellával pontos mérést végezhezzünk, a libella tengelyének párhuzamosnak kell lennie a felfekvési síkjával. Tegyük fel, hogy libellánk kiigazított, s ha buborékja bejátszik, akkor felfekvési síkja a vízszintes-től " φ " szögértékkel eltér. Hibás libellánkat egy asztal-lapra tesz-

tengelyét a felfekvésével párhuzamos helyzetbe akarjuk hozni, akkor a libella tengelyét " 1φ " szöggel kell elfordítanunk a függőleges igazítócsavarok segítségével. Ezt azáltal érjük el, hogy a buborékot - a libella II-es helyzetében - a normál-ponttól való kitérésnek felére hozzuk be. Ha azután az asztallapot is vízszintes helyzetbe akarjuk hozni, akkor ezt is el kell mozdítanunk " 1φ " értékkel a szintezőcsavar után. Ezt elérem azzal, hogy a buborékot most az asztallap szintezőcsavarjával a kitérés másik fél értékéig elmozdítjuk, vagyis a buborék közepét a normálponttal összevágatjuk. Ha jól becsültük a kitérés fél értékét, akkor a libellát újból átforgatva 180° -al a buborék ebben a helyzetben is be fog játszani.



A libella tengelyének párhuzamos-sá-tételéhez igazitócsavarok szolgálnak. Ezek többféle berendezésük lehetnek.

1./ egy diósan izuló csavarral, a mely csavar forgás közben is helyben marad, csak a libella egyik végét emeli, vagy süllyeszti, mert az csavaranyaként van kiképezve.

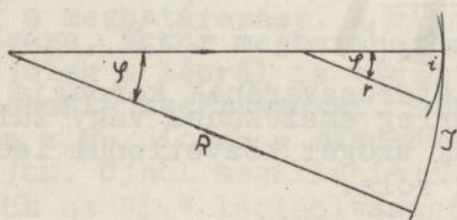
2./ két csavar esetén az egyik emelő, a másik húzó-csavar. A libella talpába csak a húzócsavar hatol be, s emelésnél vagy süllyesztésnél mindkét csavart használnunk kell.

3./ rugós berendezésnél az emelő-csavar szerepét a rugó veszi át. Nem valami pontos, mert a rugó idővel kifárad.

tengely-libellákat arra nézve is meg kell vizsgálnunk, hogy nincs-e keresztállásuk? Keresztbenállás-nak nevezzük azt az esetet, ami-

kor a tengely, melyen a libella fekszik és a libellatengely nem esnek egy függőleges síkba, hanem a két függőleges sík egymást metszi. Legegyszerűbb a vizsgálat, ha egy vízszintes tengelyre helyeztük a libellát és a tengely körül lassan előre és hátra döntjük. Ekkor a buborék - a fenti ábra alapján - előreforgatásnál balra, hátraforgatásnál jobbra fog kitérni /előre: $\curvearrowright$, hátra: $\curvearrowleft$ /. A hibát a vízszintes igazítócsavarokkal igazítjuk ki.

A műszerekhez használt libelláknak megfelelő érzékenységeknek kell lenniök. A libella érzékenysége az φ szögértéket értjük, mellyel a libellát ki kell mozdítanunk, hogy a buborék egy pars-szal kitérjen. Az érzékenység a kiköszörülés sugarától függ: a nagyobb "R" sugárral köszörült libella érzékenyebb, mint a kisebb "r" sugárral köszörült. Ha a köszörülés sugara végtelen, akkor az érzékenység is végtelen. s a libella nem is használható, mert a legkisebb kimozdításra a buborék a teljes cső hosszának megfelelő értékkel térne ki.

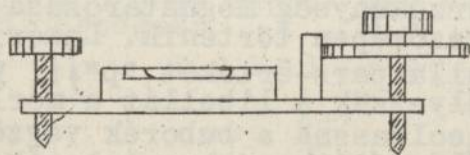


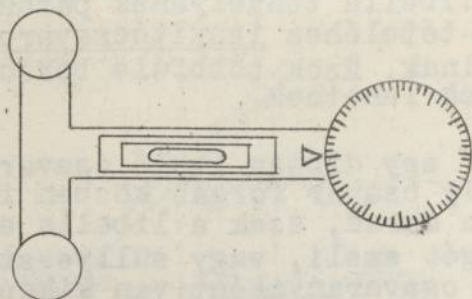
Ábránkon "i" és "I" az ugyanazon "φ" szög melletti kitérés értékei "r" ill. "R" sugár mellett.

$$i = \frac{\varphi''}{\rho''} \cdot r ; I = \frac{\varphi'}{\rho'} \cdot R$$

Ebből is látható, hogy ha $r < R$, akkor $i < I$, tehát kisebb köszörülési sugár mellett kisebb az érzékenység is.

Az érzékenység meghatározására legegyszerűbb eszköz a libella-vizsgáló mérleg vagy hid. Ez egy 3 csúcson nyugvó fém lap.

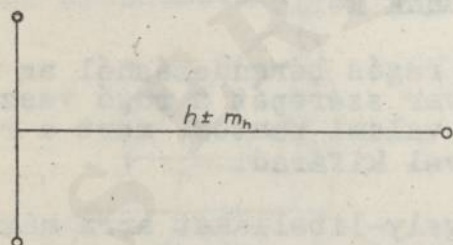




A 3 csucs közül kettő szintezőcsavar, a harmadik pedig egy mikrométer-csavar. Ez utóbbi segítségével a mérleg a másik két csucs - mint sarkok - körül föl és le mozdítható, tehát hajlásszöge változtatható. A mikrométercsavar beosztással ellátott koronggal van felszerelve melyről egy mutató segítségével a csavar elfordításának mértékét leolvashatjuk. /Az érzékenység meghatározására kidolgozott példa

van a hibaszámítási példák között./

Mielőtt a mérleget használatba vennénk, először az adatait kell meghatároznunk. A hidat papírra szorítjuk úgy, hogy a 3 csucs nyoma



megmaradjon a papíron. Ezután többször pontosan megmérjük "h"-t, levezetjük valószínű helyes értékét és ennek középhibáját. Ez a "h" hossz az a sugár, amelyen a csavar felemeli a hidat. Ezután a mikrométer-csavar menetmagasságát állapítjuk meg: a menetmagasságoknak egyenlőknek kell lenniük. Erre nézve már a gyárban felülvizsgálják a műszert, de mi magunk is ellenőrizhetjük. Az ellenőrzés úgy történik,

hogy a mikrométercsavart kiemeljük az anyából és papírra nyomjuk. Mivel a csavar gyengén olajos, a menet nyomot hagy. Ezután a menetekből pl. lo-et körzöbe véve, mint a léptékeket, ellenőrizhetjük, hogy a lo-lo menet mindenütt egyenlő magas-e. Ezután lo-lo menet magasságát több helyen megmérjük nóniuszos vonalzóval és ebből megállapíthatjuk 1 csavarmenet magasságát /g/ számítva ennek valószínű helyes értékét és középhibáját. Majd kiszámítjuk 1 csavarmenet-magasságnak megfelelő "φ" szöget, amellyel a hidat egyszeri körülfordítás esetén emelhetjük.

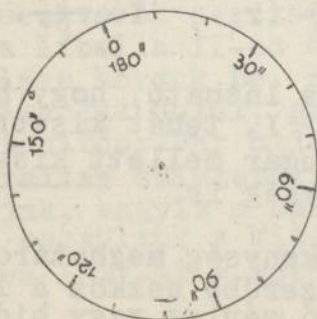
$$g = \frac{\varphi''}{\rho''} \cdot h \quad \text{s innen} \quad \varphi'' = \rho'' \cdot \frac{g}{h}, \text{ hol}$$

$\rho'' = 206265$. Mivel "g" és "h" középhibáját is ismerjük, számíthatjuk "φ" középhibáját, tehát megbízhatóságát is:

$$m_{\varphi} = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial g} \cdot \pm m_g\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial h} \cdot \pm m_h\right)^2}$$

$$m_{\varphi} = \sqrt{\left(\frac{\rho''}{h} \cdot \pm m_g\right)^2 + \left(-\frac{g \rho''}{h^2} \cdot \pm m_h\right)^2}$$

A legtöbb libellavizsgáló mérleg mikrométercsavarának korongja már úgy van beosztva és számozva, hogy a mérleg emelésének vagy süllyesztésének szögét közvetlenül leolvashatjuk róla.



Az érzékenység meghatározása a következőképpen történik. Lemérjük a libella pars-értékét "p"-t. Ezután ráhelyezzük a libellát a mérlegre és leolvassuk a buborék végződéseit. Ebből számíthatjuk a buborék közepének a kitérését: "x"-et és ugyanekkor a korongról is végzünk leolva-

sást: " k_1 ". Most elforgatjuk a mikrométercsavart, amíg a buborék 4-5 pars-szal elmozdul. Ekkor újból végzünk leolvasásokat, a buborék-végeken és kiszámítjuk az " x_2 " kitérést, " $x_1 - x_2$ " adja a libella két helyzete közötti elmozdulást parsokban. De leolvassuk a korong " k_2 " állását is, s így számíthatjuk a mérleg elmozdulási szögét, " α "-t:

Ezt elosztva $/x_2 - x_1/$ értékkel, kapjuk az 1 parsnak megfelelő szögértékét, az " ϵ "-t, ami nem más, mint a libella érzékenysége.

Pl. a mérleg hossza: $h = 229.18$ m/m; a csavarmenet magassága: $g = 0.2$ m/m. Akkor

$$\varphi = \frac{0.2 \times 206265}{229.18} \div 180'' = 3'$$

Ha a mikrométercsavar korongja 100 részre van beosztva, akkor 1 osztásrésznek $1.8''$ elmozdulás felel meg. A leolvasásokhoz nyert értékek:

$$m_1 = 8.2 ; n_1 = 2.3$$

$$m_2 = 4.5 ; n_2 = 6.1$$

$$x_1 = \frac{8.2 - 2.3}{2} = 2.95$$

$$x_2 = \frac{4.5 - 61.1}{2} = -0.8$$

$$k_1 = 0.283$$

$$k_2 = 1.007$$

$$x_1 - x_2 = 2.95 - (-0.8) = 3.75$$

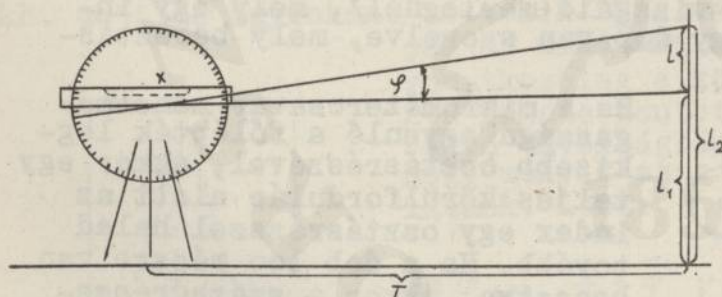
$$\alpha = /k_2 - k_1/ \varphi = /1.007 - 0.283/ \cdot 180 = 0.724, 180 = 130.32''$$

$$\epsilon = \frac{130.32}{3.75} = 34.7''$$

Kiszámítható a köszörülési sugár, ha a pars-érték ismeretes. Legyen $p = 2$ m/m, akkor

$$R = \frac{p \varphi''}{\epsilon''} = \frac{0.002 \cdot 206265''}{34.7''} = 11.9$$

Ha ugyanannál a libellánál más-más helyen egymástól nagyon különböző értékeket kapunk, akkor a köszörülés hibás és a köszörülési sugár nem mindenütt egyenlő.



Ha nincs libellavizsgáló mérlegünk, akkor is megvizsgálhatjuk a libellát egy műszer magasságiköre segítségével. Ennek pontossága azonban libellavizsgálathoz nem elég, úgy hogy inkább függőleges, osztott lécs alkalmazásával végezzük el a meghatározást.

A vizsgálandó libellát ráhelyezzük egy műszer távcsővére. Ekkor meghatározzuk a libella buborékjának a kitérését és egyidejűleg a lécről is végzünk leolvasást $/l_1/$ a távcső vízszintes irányzószála segítségével. Ezután a magassági-kör paránycsavarával annyira elmozdítjuk a távcsövet, hogy a buborék 3-4 parssal továbbmozduljon. Újból megállapítjuk a buborék közepének kitérését és elvégezzük az " l_2 " lécleolvasást. A két megfigyelésből egyrészt a buborék elmozdulását kapjuk meg parsokban, másrészt a két lécleolvasás közti különbséget:

$$l_2 - l_1 = l ; l = \frac{\varphi}{\varphi'} T$$

$$\varphi = \frac{l \varphi'}{T}$$

honnan

ez adja az $x_1 - x_2 = x$ számú pars kitérésnek megfelelő szögértéket. Az egy parsnak megfelelő szög, mivel

$$x : \varphi = 1 : \varepsilon$$

$$\varepsilon'' = \frac{\varphi'}{x}$$

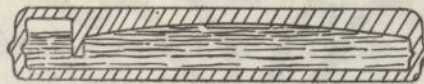
Tehát megkaptuk a libella érzékenységét. A köszörülési sugár számítása ugyanugy történik, mint az előbbi eljárásnál.

A köszörülési sugár a geodéziában használatos libelláknál 6-200 m szokott lenni.

Az érzékenység precíziós szintezőműszereknél:	5"
Nagy teodolit és nagy szintezőműszereknél	10"
Kisebb teodolitoknál és	20"
Busszolóknál és kis	30"
Léceknél használatos dobozlibelláknál	2'

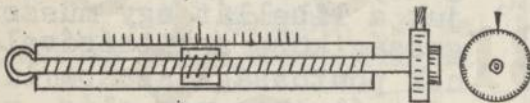
A libellák beállításánál $\pm 10\sqrt{\varepsilon''}$ leolvasásnál pedig $\pm 20\sqrt{\varepsilon''}$ közép-
hibával kell számolnunk Reinhart kísérleti mérései alapján.

A libella buborékjának hossza függ a hőmérséklettől. A hosszabb buborék pontosabb eredményt ad, s hogy a buborék megrövidüléséből eredő hibát kiküszöböljék, légkamrás libellákat is készítenek, amelyeknél a buborék hossza szabályozható.



A paránycsavar vagy mikrométer.

A főosztás legkisebb osztásrészeinek tört részeit tudjuk vele mérni. A mikrométer egy pontosan metszett csavarorsóból áll / a menet ellenőrzését lásd a libella-vizsgáló mérlegnél/, mely egy indexet mozdit el, végére pedig egy dob van szerelve, mely beosztással bír.

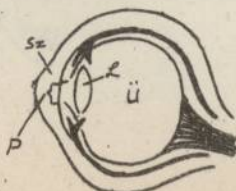


Ha a mikrométercsavar menetmagassága egyenlő a főlépték legkisebb osztásrészével, akkor egy teljes körülfordulás alatt az index egy osztásrésszel halad tovább. Ha a dob 100 részre van beosztva, akkor a századrészeket leolvashatjuk, az ezredrészeket pedig becsülhetjük.

ket pedig becsülhetjük.

Látó- és irányzó eszközök.

Két mérési pont közötti összekötő-egyenest iránynak, szemünktől valamely mérési ponthoz menő sugarat látósugárnak nevezzük. Két olyan ponton átmenő sugár, mely pontok kölcsönös helyzete adva van és amelyek mindig együtt mozgathatók el, szolgáltatja az irány- vagy irányzó-sugarat. Az irányzó-sugarat mi bármilyen segédeszköz közbeiktatásával is, de szemünkkel tűzzük ki, tehát először röviden ezt ismertetjük.



A szem egy gömb, melynek anyaga átlátszó, üvegszerű /üvegtest/. Ennek átmérője kb. 15 mm. A szegolyó külső felén foglal helyet a szemlencse, /L/, amely

izomkötegek útján változtathatja görbületi sugarát. A lencse előtt az u.n. iris /I/ foglal helyet, melynek közepén egy fekete, köralakú rés van: a pupilla. A rés átmérője a szemhez futó fény erőssége szerint változik szintén izomzat segítségével 1-5 mm között. Előtte van a szaruhártya /Sz/. Normális szemnél, ha a pupillára ill. a szemlencsére közepes erősségű fény esik, a pupilla átmérője 1.54 mm. Ezzel az átlagos értékkel szoktunk számolni.

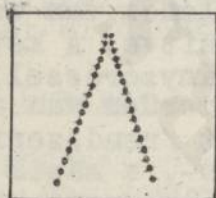
A szemem még különböző hártyákat is találunk: ezek kívülről befelé haladva az in-, perc-, ér- és ideghártya. Ezeknek feladata a szem védelése, vérrel, tehát táplálékkal való ellátása és főleg a fény által képzett ingernek - a látási ingernek - az idegközpontba való továbbítása s ezzel a tulajdonképeni látás előidézése.

Nézzük ezután azt, hogy hogyan képezi szemünk a tárgyak képét. A pupillán át a lencsére jutó fénysugarak - amint azt majd az optikai részben, a lencsék tárgyalásánál látni fogjuk - a lencsétől bizonyos távolságban képpé egyesülnek. A szemnél azt a helyet, ahol a kép keletkezik, sárgafoltnak nevezzük. A sárga folton vannak a tulajdonképeni látóidegek, jobban mondva a látópálcikák végződésai, amelyek szabályos hatszögalakúak, s átmérőjük mintegy $2-6 \mu$ /mikron/ között változik. Normális szemnél a tárgy képe mindig erre a sárga foltra esik. Mivel ennek a távolsága a szemlencsétől állandó, ezért szükséges, hogy a lencse görbületi sugarait az izomzat változtathassa, hogy

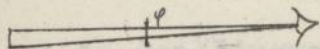


így a különböző távolságokból jövő sugarak képe a sárga foltra essék. Két igen közel fekvő pontot vagy tárgyat a szem csak akkor érzékel két-tőnek, ha a két pont képe két olyan pálcikára esik, amelyek között legalább egy pálcika van. Mig ha a két kép egy pálcikára, vagy két egymás mellett levő pálcikára esik, akkor a két

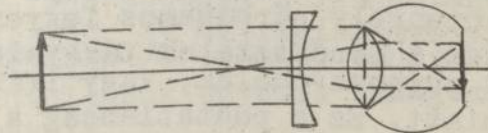
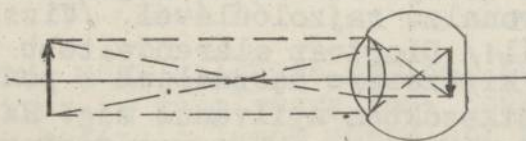
tárgy képe egybefolyik és csak egy képnek látjuk. A szemnek ezt a tulajdonságát szétválasztóképessegnek nevezzük. Ez függ a látószögtől, melyen azt a szöget értjük, amely alatt a tárgyról jövő sugarak a szemünkbe, ill. a szemlencsére érnek. A látószög normális szemnél kb. $40''$, de egyenként változik. Más néven éleslátási szögnek is mondják és mindenki meghatározhatja a saját szemére vonatkozólag a következőképen: egy fehér lapra 2-2 fekete pontot rajzolunk egymástól egyre növekvő távolságban. "T" távolságból megfigyeljük, hogy melyik az a két pont, amelyiket már külön látunk. Lesz:

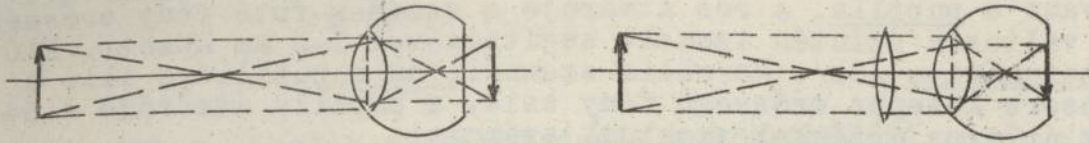


$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{T} = \bar{\varphi} ; \quad \varphi' = \rho'' \frac{1}{T}$$



Ha egészséges szemnél a tárgy képe a sárgafolt-ra esik, anélkül, hogy a szemet erősebben kellené igénybevenni, és az apró pontot huzamosabb ideig nézhetjük a szem kifáradása nélkül, akkor azt mondhatjuk, hogy a tárgy az éleslátás távolában van. Ez a távolság egyenként változik. Normális szemnél 25-30 cm szokott lenni.

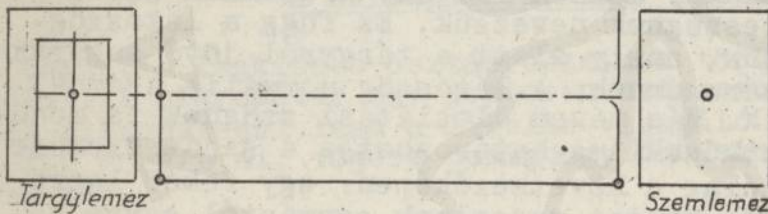




Előfordul azonban, hogy a tárgy képe nem esik a sárga foltra, hanem vagy eléje, vagy mögéje. Ilyenkor beszélünk közel ill. távol-látó szemről. Ezeket a hibákat úgy korrigálhatjuk, hogy a szem elé egy lencsét teszünk, mégpedig ha közellátó szemről van szó, úgy homorú lencsét alkalmazunk előtétlencsének /szemüveg/, amely a sugarakat szétszórja és ezen sugarakat azután a szem-lencse most már a sárgafolton fogja egyesíteni képpé. Távol-látó szemnél viszont domború, vagy gyűjtőlencsét kell alkalmaznunk, amely a szemlencse előtt összegyűjti a sugarakat és így az ismét a sárga folton fogja a képet létrehozni. A korrigáló-lencsék erősségét dioptriák szerint csoportosítják. Dioptrián a lencse méterekben kifejezett fókusz távolságának reciprokát értjük, $D = \frac{1}{f}$.

Az irányzó-eszközök.

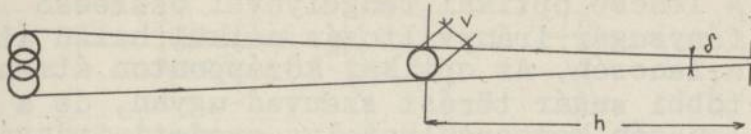
Ezek után térjünk át azokra az eszközökre, amelyeknek segítségével irányzást végezhetünk, illetve egyenes vonalakat tűzhetünk ki. Ezek az eszközök - amelyek műszereinken is alkalmazást nyernek - az irányzóeszközök, és pedig a nézőhasadék vagy dioptra és az irányzószálakkal felszerelt távcső.



1./ A nézőhasadék vagy dioptra áll egy 30-15 cm hosszú, 2-5 cm széles, 4-6 mm vastag fémvonalzóból, melynek egyik hosszanti oldala rajzolóélnak van kiképezve, két végén pedig a vonalzóra merőlegesen és egymással párhuzamosan 5-8 cm hosszú lemez van csuklósan megerősítve. A két le-

mez közül a szem felőli oldalon van a szemlemez az irányzóréssel, a tárgy felőli oldalon pedig a tárgylemez, amely ablakszerűen van áttörve és itt található az irányzásra szolgáló szálkereszt /rendszerint lószórból/. A lószórszálak közül az egyik a függőleges-, a másik a vízszintes irányzál. E kettő metszéspontja adja a szálkereszt középpontját.

Ha a vonalzó lapja vízszintes helyzetű, akkor a szemnyíláson és a függőleges irányszálon áthaladó sugarak és a függőleges irányzóeszközt, míg a szemnyíláson és a vízszintes irányszálon átmenő sugarak a vízszintes irányzóeszközt határozzák meg. A két sík metszésvonala, vagy másképpen a szemnyíláson és a szálkereszt középpontján áthaladó sugár az irányzó tengely. Hogy a dioptrás vonalzót használni tudjuk, szükséges, hogy a szálkereszt közepe és az irányzóeszköz által meghatározott irányzó tengely párhuzamos legyen a vonalzó rajzolóélével. /Vizsgálatát lásd a mérőasztalok tárgyalásánál!/. Dioptrát alárendeltebb jelentőségű egyenesvonalak, vagy irányok kitűzésére használjuk a pontatlansága miatt. Ez a pontatlanság a következőkben nyilvánul meg. Ha u.i. valamely irányzást felülnézetben képzelünk el, akkor azt fogjuk látni,



hogy a szemnyíláson át szemünkben kiinduló sugarak a tárgynyílásban alkalmazott lószórszál mellett kétoldalt érintőlegesen s egyuttal szétágazóan, haladnak el. Így egy meglehetősen nagy holtter képződik, me-

lyen belül a megirányzott mérési jel bárhol helyet foglalhat. A mérési pontot tehát megirányzotttnak tekinthetjük mindaddig, amíg az irányszál eltakarja a mérési pont jelét. Ez az eset áll fenn akkor is, amikor a jobboldali látósugár esik egybe a mérési pont jelével, meg akkor is, amikor a baloldali látósugár esik össze a jellel. Az irányzás tehát bizonytalan a két irányzósugár által bezárt " δ " szögérté-
kig. Ezt a " δ " bizonytalanságot kifejezhetjük, ha a lószórszál vas-
tagságát " v "-vel jelöljük és egyenlővé tesszük annak az ívnek a hosz-
zával, amely a szemnyílás és a lószórszál közötti " h " távolsággal,
mint sugárral leírt körben a " δ " központi szögnek megfelel. Így lesz
a lószórszál vastagsága:

$$v = \frac{\delta''}{\rho''} h \quad \text{ahonnan} \quad \delta'' = \rho'' \frac{v}{h}$$

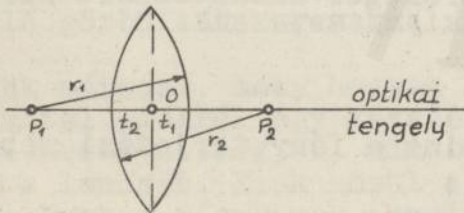
A gyakorlatban a dioptrás-vonalzó pontosságát 2'-nek szokták venni, de növelhetjük azáltal, hogy a lószórszál vékonyabbra a vonalzót pe-
dig hosszabbra készítjük. Mindazonáltal pontos irányzásra még így
sem használható: alárendeltebb vázrajzok készítésénél juthat szerep-
hez.

Pontos irányzást csak távcsővel végezhetünk márcsak azért is, mert
egyrészt a dioptrás vonalzóval nagy távolságra már nem is látnánk,
másképp a szemre nézve is igen fárasztó, ha a közeli szálkeresztet
és a távoli pontjelet egyidejűleg kell néznie. Ezen okok miatt mo-
dern műszereink mind távcsővel vannak felszerelve.

2. A távcső a legélesebb irányzó-eszköz, melynek főcélja az, hogy a
nagy távolságban lévő mérési pont jelét megnagyitva, jól láthatóvá
megfigyelhetővé tegye. A távcső legfontosabb alkatrészei a lencsék,
tehát elsősorban ezeket kell megismernünk.

a./ Lencsék.

A lencsék lehetőleg egyenletes-szövetű üvegöntvényből csiszolt tes-
tek, amelyeknek határlapjai valamely adott sugárral képezhető gömb-
felület egy részének felelnek meg. Anyaguk lehet ólommentes korona-
üveg, vagy ólomtartalmu flint-üveg.

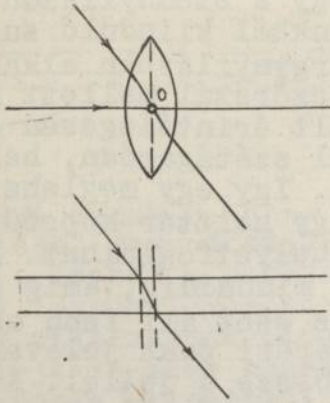


A lencsét alkotó gömbfelület suga-
rát a lencse gömbületi sugarának
/ r_1, r_2 / a gömbfelületek gömbületi
középpontját pedig a lencse gömbü-
leti középpontjának / p_1, p_2 / neve-
zük. A két gömbületi középponton
áthaladó egyenes a lencse optikai
tengelye. Az optikai-tengely ke-

resztül megy a lencse optikai középpontján / o /, amely a határlapok-
tól t_1 és t_2 távolságra van. Ezek a távolságok egyenes arányban áll-
nak a határoló-lapok gömbületi sugarával:

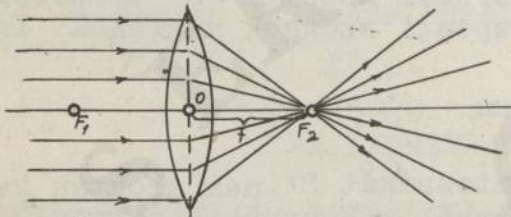
$$t_1 : t_2 = r_1 : r_2 \quad \text{s innen} \quad t_1 = t_2 \frac{r_1}{r_2}$$

A lencséken áthaladó fénysugarakra a következő szabályok állanak:



A lencse optikai tengelyével összeeső fénysugár irányváltozás nélkül halad át a lencsén. Az optikai középponton átmenő többi sugár törést szenved ugyan, de a lencsén keresztülhatolva eredeti irányával párhuzamosan halad tovább. Ezeket a sugarakat nevezzük fősugaraknak. A fősugarakra nézve a lencse úgy viselkedik, mint egy planparalel lap. A planparalel lap a fénysugár irányát nem változtatja meg, csupán eltolja önmagával párhuzamosan.

Az optikai tengellyel párhuzamos sugarakat, amelyeket a végtelenből



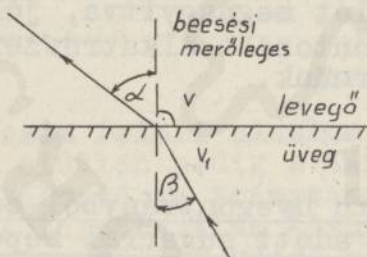
jövő sugaraknak tekintünk, a lencse megtöri: ezek a lencse optikai tengelyébe eső gyújtó- vagy gyújtópontban /fókuszt/ egyesülnek.

A lencse fókuszanak az optikai középponttól való távolsága kifejezhető:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2}$$

melyben " r_1 " és " r_2 " a határlapok görbületi sugara, " n " pedig a lencse törési együtthatója. képlettel,

Amikor a fénysugár egy más sűrűségű közeg határához ér, eredeti irányát meg fogja változtatni az új közegben. Azt mondjuk, hogy a sugár törést szenved. Hogy milyen lesz a sugár új iránya, ill. hogyan törik meg, az attól függ, hogy a sugár sűrűbb közegből ment-e ritkábbba, vagy fordítva. Ha a fénysugár sűrűbb közegből megy ritkábbba /pl. üvegből levegőbe/ akkor a beesési merőlegestől, míg ritkább anyagból sűrűbbe haladva /pl. levegőből üvegbe/ a beesési merőlegeshez törik, hogy beesési merőlegesen a sugár belépési helyén, a törőfelületre merőleges egyenest értjük.



A be- és kilépő sugarak és a beesési merőleges által bezárt szögek sinusának viszonyát törési együtthatónak / n / nevezzük:

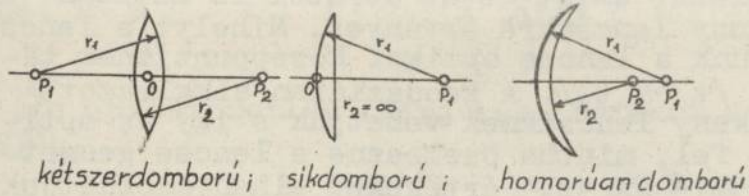
$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

Kifejezhető még a törésmutató úgy is, mint a fény terjedési sebességének viszonya a két anyagban / v és v_1 /:

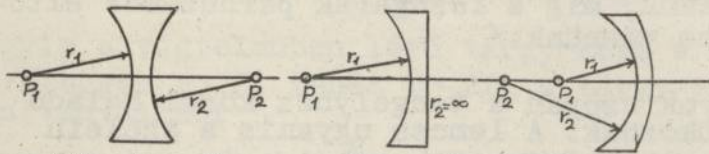
$$n = \frac{v}{v_1}$$

A törési együttható tehát függ az üveg szövetének sűrűségétől, sűrűbb szövetű üvegben a fény sebessége csökken, így a törési együttható értéke nő.

A törésmutató koronaiüvegnél: 1.54, flintüvegnél: 1.65. Ma már gyártanak olyan üveget is, amelyre nézve $n \approx 2$.



kétserdomború; síkdomború; domborúan domború



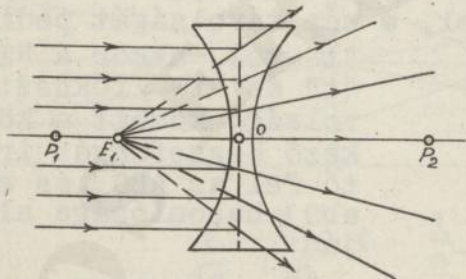
kétserhomorú; síkhomorú; domborúan homorú

A lencsék lehetnek domború- vagy gyűjtőlencsék, és homorú- vagy szórólencsék.

A gyűjtőlencsék lehetnek kétserdomborúak, síkdomborúak és homorúan domborúak.

A szórólencsék lehetnek: kétserhomorúak, síkhomorúak és domborúan homorúak.

A homorú lencsék az előbbiekkal szemben a fénysugarakat nem gyűjtik egy pontba, hanem szétszórják. Ha azonban ezeket a szétszórta sugarakat visszafelé meg hosszabbítjuk, szintén egy az optikai tengelyen lévő pontban gyűlnek össze; ezt a pontot itt is fókuszának nevezzük és mindössze abban különbözik a domború lencsék fókuszától, hogy $-f$ előjellel. A homorú lencsékre is vonatkoznak az összes eddigi megállapításaink és



képleteink, azonban itt a fókusz mindig negatívnak kell vennünk. Ezt szemelőtt tartva nem is fogunk külön foglalkozni velük, hanem megállapításainkat a domború lencsékre vonatkoztatjuk, mivel ezek számunkra a legfontosabbak.

A domború lencsék. Láttuk már, hogy a domború lencse a fénysugarakat egy pontba, a fókuszba gyűjti össze. A fókuszhoz az optikai középponttól való távolságát - a fókusz-távolságot: f - a következő képlettel fejezhetjük ki:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{n} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

ben $r_1 = r_2$, akkor:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{n} - \frac{2}{r_1}; \quad f_1 = \frac{r_1}{2/n - 1}$$

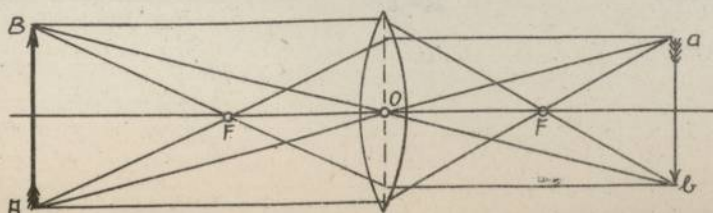
Ha ebben a képlet-

Ha pedig $r_2 = \infty$ /síkdomború lencsénél/, akkor

$$\frac{1}{f_2} = \frac{n - 1}{r_1} \quad \text{vagyis} \quad f_2 = \frac{r_1}{n - 1}$$

Ezt a képletet összehasonlítva a fentivel azt látjuk, hogy a síkdomború lencse fókusz-távolsága kétszer akkora, mint az ugyanolyan, egyenlő görbületű-sugarakkal bíró kétserdomború lencséé.

Nézzük mármint, hogy hogyan képezi a lencse a tárgynak a képét. Vegyünk fel ecélből egy kétserdomború lencsét és egy AB nagyságú tárgyat. Erről a tárgyról minden irányban indulnak ki sugarak, amelyek érik a lencsét. Ezek közül a sugarak közül a jellemző sugarakat vegyük. Ezek a fősugarak, amelyek irányváltás nélkül haladnak át a lencsén és az optikai tengellyel párhuzamos sugarak, amelyek a fókuszon mennek keresztül. Ez a szabály visszafelé /fordítva/ is érvényes. Így tehát ha meg akarjuk szerkeszteni egy tárgynak a lencse által képezett képét, akkor nem kell mást tennünk, mint ezt a jellemző sugarakat meghúzni a tárgy megfelelő pontjaiból s megkapjuk a lencse által alkotott képet.



Az ilyen módon kapott kép, ha a tárgy az egyszeres fókusz távolságon kívül van, fordított állású lesz, amint az az ábrából is kitűnik. Ez a képképzés azonban csak vékony lencsékre érvényes. Mihelyt a lencse vastag, számításba kell vennünk a lencse optikai középpontjának távolságát a határoló-lapoktól t_1 és t_2 . A geodéziában alkalmazott lencsákat jó közelítéssel vékony lencséknek vehetjük s így az optikai középpontot úgy vehetjük fel, mintha összeesne a lencse geometriai tengelyével, miáltal a " t_1 " és " t_2 " értékeket elhanyagolhatjuk. /Vékony lencséről addig beszélünk, míg a fősugarak párhuzamos eltolási értékét nem kell figyelembe vennünk./

A sugarakra felállított szabályok csupán a tengelyhez közel haladó u.n. paraxiális sugarakra vonatkoznak. A lencse ugyanis a szélein átmenő sugarakat nem a gyújtópontban egyesíti, amint azt majd a lencsék hibáinál látni fogjuk.

A lencsék egyenlete. Helyezzünk el egy kétszerdomboru lencse előtt egy AB tárgyat és szerkesszük meg ennek a képét. Jelöljük a tárgy távolságát az optikai középponttól "T"-vel, a kép távolságát pedig

"t"-vel, akkor a "T", "t" és "f" /fókusz távolság/ között a következő összefüggés írható fel az ABO Δ és az abO Δ hasonlósága alapján:

$$\frac{AB}{T} = \frac{ab}{t}; \text{ innen}$$

$$\frac{AB}{ab} = \frac{T}{t}$$

Másrészről az A'B'F Δ és az a b F Δ hasonlósága alapján:

$$\frac{A'B'}{f} = \frac{ab}{t-f}; \text{ de } A'B' = AB, \text{ így } \frac{AB}{ab} = \frac{f}{t-f}$$

Összehasonlítva ezt az előbbivel, látjuk, hogy :

$$\frac{T}{t} = \frac{f}{t-f}$$

$$T \cdot t - T \cdot f = t \cdot f$$

Szorozzuk meg egyenletünket $\frac{1}{T \cdot t \cdot f}$ -fel és végezzük el a rövidítéseket. Lesz:

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{t} = \frac{1}{T}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{T} + \frac{1}{t}$$

Ez a lencsék alapegyenlete, amely szavakban így hangzik: a fókusz távolság reciproka egyenlő a tárgy- és képtávolság reciprokának összegével. Egyenletünk domboru és homoru lencsére egyaránt vonatkozik, csak az utóbbi esetben "f"/-/-/ előjelű lesz. Ha a tárgy a lencse jobb oldalán van, akkor ez a tárgy /+/ oldala, a bal oldal pedig a kép /+/ oldala. Fejezzük ki a "T" tárgytávolságot a fókusz távolsággal: legyen $T = n \cdot f$. Behelyettesítve:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{nf}$$

ahonnan:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{f} - \frac{1}{nf} = \frac{n-1}{nf}$$

s innen

$$t = \frac{nf}{n-1}$$

Ebben az esetben a tárgy képét úgy kapjuk meg, hogy a széttartó sugarakat visszafelé meghosszabbítjuk, míg egymást metszik és ezáltal a tárgy egyenesállású, nagyított képét adják.

Összefoglalás. Az eddigiekben láttuk, hogy minél inkább közeledik a tárgy a végtelenből a lencséhez, annál inkább távolodik a kép a lencsétől; míg a kétszeres fókusz távolságban lévő tárgy képe a kétszeres fókusz távolságban jelenik meg, addig az egyszeres fókusz távolságban lévő tárgy képe már a végtelenben van. Az egyszeres fókusz távolságon belül lévő tárgy képe pedig a lencsének a tárggyal egyező oldalán jelenik meg.

Megállapíthatjuk tehát azt, hogy az egyszeres fókusz távolságon kívül levő tárgy képe a reális kép /amíg a tárgy a kétszeres fókusz távolságon kívül van, a kép kisebb, ha a tárgy az egyszeres és kétszeres fókusz távolság között van, akkor a kép nagyított, de fordított/ az egyszeres fókusz távolságon belül lévő tárgy képe virtuális, mely a lencsének ugyanazon oldalán jelenik meg, mint ahol a tárgy van, s mindaddig egyenesállású és nagyított.

Lencsék nagyítása. Lencsék nagyításán a kép és a tárgy viszonyát értjük. Ha a kép nagyobb, mint a tárgy, akkor a lencse nagyít. Tehát:

$$N = \frac{\widehat{ab}}{AB} = \frac{t}{T}$$

ha $T = n f$ és $t = \frac{n}{n-1} \cdot f$, amint azt az előző fejezetben láttuk volt, akkor

$$N = \frac{\frac{n}{n-1} \cdot f}{n \cdot f} = \frac{1}{n-1}$$

lesz a nagyítás, kifejezve a tárgynak a lencse optikai középpontjától, a fókusz táv "n"-szeres távolságával. Ezen egyenlet alapján mindaddig, amíg $n > 2$, vagyis a tárgy a kétszeres fókusz távolságon kívül van, nincs nagyítás, hanem kisebbités. Ha $n = 2$, akkor a kép egyenlő nagy a tárggyal. Ha $n < 2$, vagyis ha a tárgy az egyszeres és kétszeres fókusz távolság között van, akkor az $N = \frac{1}{n-1}$ egyenletben $1/n-1 < 1$,

márpedig az egységet egynél kisebb értékkel osztva az egységnél nagyobb értéket nyerünk, vagyis a lencse nagyít. Ekkor a kép a lencse tulsó oldalán jelenik megfordított állásban. Végül, ha $n < 1$, vagyis valódi tört, ami azt jelenti, hogy a tárgy az egyszeres fókusz távolságon belül van. Legyen $n = \frac{1}{m}$, akkor

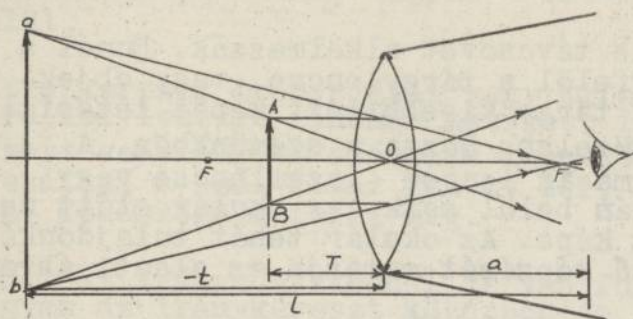
$$N = \frac{1}{n-1} = \frac{1}{\frac{1}{m}-1} = \frac{m}{1-m} = -\frac{m}{n-1} = \frac{\widehat{ab}}{AB}$$

tehát $\widehat{ab} = -AB \frac{m}{m-1}$ s mivel $m > 1/m - 1$,

következésképpen: $\frac{m}{m-1} > 1$ tehát az $\widehat{AB}$ tárgynagyságot az egységnél nagyobb értékkel kell megszorozni, hogy " $\widehat{ab}$ " képnagyságot nyerjük. Ebből viszont az következik, hogy " $\widehat{ab} > AB$ ", azaz a kép nagyobb a tárgynál, tehát a lencse nagyít.

A lencsék alkalmazása.

1./ A kézinagyító vagy lupe. A domboru lencsének azt a tulajdonságát, hogy az egyszeres fókusz távolságon belül elhelyezett tárgy egyenes-



állásu nagyított képét adja, felhasználhatjuk arra, hogy kis tárgyak képét nagyítva, jobban megfigyelhetővé tegyük. A könnyebb kezelhetőség végett a lencsét foglalattal látják el, sőt néha fogantyút is alkalmaznak rá. A lupe nagyítását az

$$N = \frac{ab}{AB} = \frac{t}{T}$$

egyenlettel fejezhetjük ki. Az $\frac{1}{f} = \frac{1}{T} - \frac{1}{t}$ egyenlet szerint azonban a tárgy és képtávolság a fókuszta-
volságtól is

függ. A kép- és tárgytávolság még szemünk éleslátási távolságától is függ, vagyis attól a távolságtól, amelyben a képet a legtisztábban, legélesebben látjuk. Ez az ábrán "l"-el van jelölve. Ha tehát szemünk a lencsétől "a" távolságra van, akkor amikor a képet legtisztábban látjuk, akkor a képtávolság kifejezhető: "t = l - a" egyenlettel. A tárgytávolság recipro-
k értéke pedig az $\frac{1}{f} = \frac{1}{T} - \frac{1}{t}$ egyenletből "t"

értékét behelyettesítve, lesz: $\frac{1}{f} = \frac{1}{T} - \frac{1}{l-a}$; ahonnan

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{f} + \frac{1}{l-a} = \frac{l-a+f}{f(l-a)}$$

s ebből a nagyítás:

$$N = \frac{t}{T} = \frac{l-a}{f} \cdot \frac{l-a+f}{f(l-a)} = \frac{l-a+f}{f}$$

vagy másképpen írva:

$$N = \frac{1}{f} - \frac{a}{f} + 1$$

Az egyenlet értelme szavakban: a nagyítás egyenes arányban van az éleslátás távolával és fordítottan arányos a fókuszta-
volsággal valamint a szemnek a lencsétől való távolságával. Minthogy az "a" távolság a lencse foglalata által rendszerint meg van határozva és "a" $\frac{1}{2}$ szokott lenni, a nagyítás képlete így módosul:

$$N = \frac{1}{f} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{f} + 0.5$$

Ennek a képletnek a segítségével mindenki könnyen meghatározhatja valamely lupe nagyítását, ha a saját éleslátási távolságát, melyet meghatározott /lásd a szemnél/, valamint a lencse fókuszta-
volságát, melyet lemért, behelyettesíti a fenti képletbe.

Vizsgáljuk még azt is, hogy milyen messze kell tartanunk a lupét a tárgytól, hogy élesen lássuk. Tudjuk, hogy

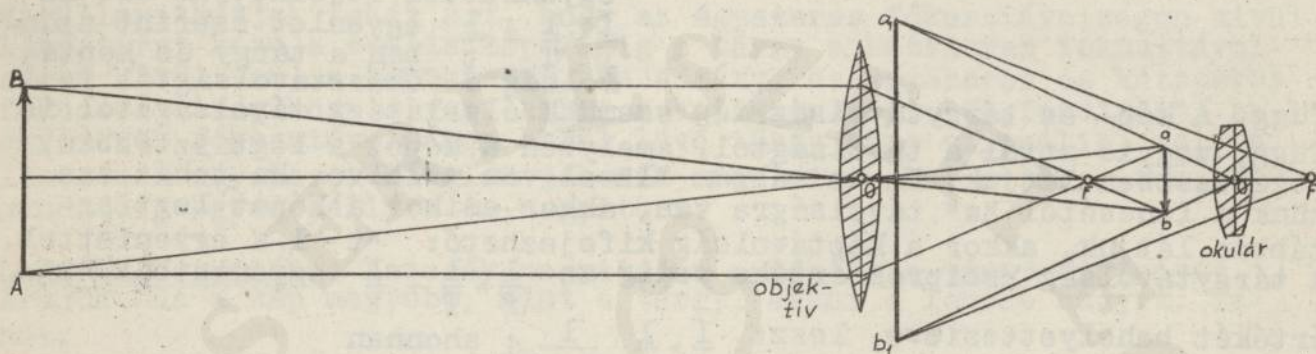
$$\frac{1}{T} = \frac{l-a+f}{f(l-a)} \quad \text{s innen} \quad T = \frac{f(l-a)}{l-a+f} = \frac{1}{\frac{1}{f} + \frac{1}{l-a}}$$

Eszerint a képlet szerint tehát minél kisebb az éleslátás távolsága, annál kisebbnek kell a tárgytávolságnak is lennie, hogy a képet élesen lássuk, továbbá a kisebb fókuszta-
volságú lupét a tárgyhoz közelebb kell tartanunk. A rövidlátónak tehát a nagyított közelebb kell tartania a tárgyhoz. Ha azonban a szem és lencse közötti távolság kisebbedik, a lencsét távolabb kell a tárgytól tartani, tehát a tárgytávolságot növelni kell. Tehát a tárgytávolság egyenes arányban van az éleslátás távolával és a fókuszta-
volsággal és fordítva arányos a szemtávolsággal.

2./ A távcsövek. A lencséknek másik, számunkra fontosabb alkalmazása a távcsöveknél van. A következőkben foglalkozni fogunk a távcsövek

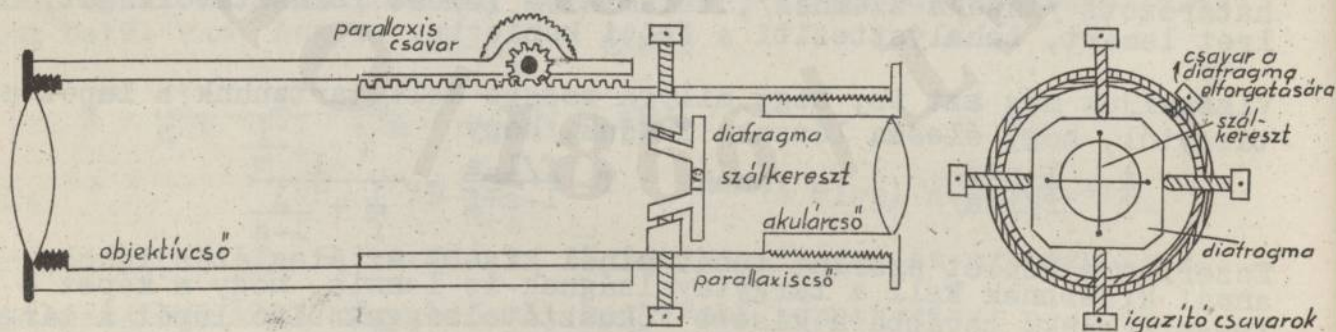
szerkezetével valamint azokkal a kellékekkel, amelyek a távcsövet irányzásra alkalmassá teszik.

Geodéziai műszereken a Kepler-féle távcsövet alkalmazzák. Ennél a tácsónél két lencse van: a tárgy felől a tárgylencse, vagy objektív, mely a nagy távolságban lévő tárgy kisebbitett képét létesíti a lencse mögött, vagyis a képet közelebb hozza a szemünkhöz. A tárgylencse által alkotott kép a másik lencse - szemlencse vagy okulár - egyszeres fókusz távolságán belül esik: az okulár előtt megjelenik annak virtuális nagyított képe. Az okulár tehát tulajdonképpen egy lupe. A Kepler-féle távcső képzését mutatja az alanti ábra:



Látjuk, hogy a távcső fordított képet ad.

Alaki kiképzés tekintetében a két lencse két hengeres csőbe van foglalva. Miután a különböző távolságokban lévő tárgyak képe a tárgylencse mögött is különböző távolságokban jelenik meg, viszont a képet a szemlencse egyszeres gyújtótávolságán belül kell elhelyezni, hogy nagyítva és tisztán lássuk, ezért a szemlencse egy kisebb belvilágú csőbe, az okulár-csőbe van elhelyezve. Az okulárcső a parallaxiscsőbe van becsavarva. A parallaxiscsövet a szerint, amint a tárgy messzebb, vagy közelebb esik az objektív lencséhez, kihúzhatjuk illetve betolhatjuk az objektív-csőbe, amely az objektív lencsét foglalja magában. Ezt a hosszváltoztatást fogaskerék által mozgott fogazott sín segítségével végezzük. Azt a csavart, amely a fogaskereket mozgatja s így a távcső hosszát megváltoztatja, parallaxis csavarnak nevezzük. A távcső szerkezetét mutatja az alábbi ábra:



Ahhoz, hogy a távcsővel irányozni is tudjunk, szükséges, hogy a távcső irányozószerkezettel is el legyen látva. Ez a szerkezet a parallaxiscsőben elhelyezett szálkereszttel ellátott diafragma.

A diafragma arra szolgál, hogy az objektív lencse szélein átjövő sugarakat a képképzésből kizárja is így a kép torzulását csökkentse.

A diafragma a parallaxis-csőben oda van elhelyezve, ahová a tárgylencse a képet veti, vagyis a szemlencse egyszeres fókusz távolságán belül.

A szátkereszt irányszálai vagy kifeszített pókszálak, vagy plan-parallel lemezre finoman metszett illetve mikrofotográfiai úton beedezett vonalak; ez utóbbiak igen jók, mivel nagyon vékonyak $/2-6\mu/$ s ezáltal a szál által fedett tér, a holtter nagyon kicsi: kb. $15''-4.5''$ fedőszögnek felel meg.

Ennél az irányzóeszköznél is van függőleges és vízszintes irányszál, megvan az iránykereszt középpontja is, amint azt a dioptrás vonalzónál már láttuk. A szátkereszt középpontja és a tárgylencse optikai középpontját összekötő egyenest irányzótengelynek nevezzük. A távcsöveknél emellett még megemlíthetjük a geometriai tengelyt, mely a cső geometriai középvonala és az optikai tengelyt, amely a tárgy és szemlencse optikai középpontján megy át. Hogy az irányzótengelyt a távcső optikai tengelyével összevágathassuk, a diafragma a parallaxiscsőben föl-le és jobbra-balra elmozdithatóan van megerősítve. Ebből a célból a diafragma 2-2 egymással szembenálló és a parallaxiscsővön áthaladó csavar, az u.n. igazítócsavarok közé van szorítva.



Az irányzásra használatos szátkeresztek az egyes távcsöveknél különbözőképen lehetnek kiképezve. A legegyszerűbb elrendezés a két, egymásra merőleges irányszál. Ez a típus rendszeren a kis távolságra való irányzásra berendezett távcsöveknél található.

Nagy távolságban lévő tárgyak megirányozására szolgálnak a kettős függőleges szállal bíró keresztek, amelyek az irányzótengelytől jobbra és balra egyenlő távolságban vannak elhelyezve.

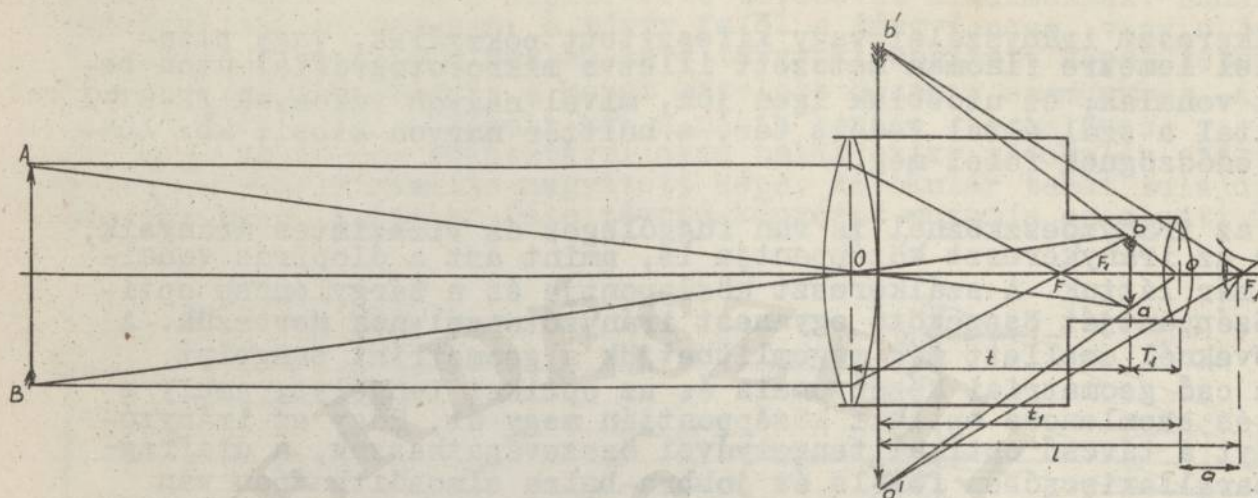
Sok távcsőnél a vízszintes irányszál felett és alatt, a vízszintes száltól egyenlő távolságban még egy-egy vízszintes szál van. Ezek a szálak azonban nem az irányzás, hanem az optikai távolságmérés céljait szolgálják. Irányzáskor az egyszerű szátkeresztnél a függőleges irányszálat vágatjuk a mérési jelre, két függőleges irányszál esetén pedig a mérési jel képét a két irányszál közé vesszük be.

A távcső használhatósági feltételei.

Ahhoz, hogy a távcsövet irányzásra használhassuk, a következő feltételeknek kell megfelelnie:

- 1./ A távcső hossza megfelelő legyen,
- 2./ az irányzótengely és az optikai tengely egybeessen,
- 3./ a tárgy képe, valamint az irányszálak képe az éleslátás távolába legyen hozható,
- 4./ a távcső nagyítása megfelelő legyen,
- 5./ " látóhatára " "
- 6./ " fényereje " "

Vegyük sorba ezeket a feltételeket és vizsgáljuk meg őket!
1./ A távcső hosszán értjük a szem- és tárgylencse optikai közép-
pontjának egymástól való távolságát akkor, amikor a képet a legéle-
sebben látjuk.



Ezt a hosszat kifejezhetjük az objektív által alkotott képnek egy-
részt az objektívtól, másrészt az okulártól mért távolságával. Te-
hát:

$$H = t + T_1$$

Tudjuk azonban, hogy $\frac{1}{f} = \frac{1}{T} + \frac{1}{t}$

s ebből kifejezve a "t"-t:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{f} - \frac{1}{T} = \frac{T - f}{T f} ; \quad t = \frac{T f}{T - f}$$

Fejezzük ki ugyanígy T_1 értékét is: itt azonban "t" = /-/, mivel az
okulár mint lupe szerepel, tehát a "tárgy" - jelen esetben az objek-
tív által alkotott kép - a fókusz távolságon belül esik. Tehát:
mivel $t_1 = l - a$ az ábra alapján, lesz:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{t_1} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{l-a} ; \quad \frac{1}{T_1} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{l-a} = \frac{l-a+f}{f_1(l-a)}$$

$$T_1 = \frac{f_1(l-a)}{l-a+f_1}$$

Helyettesítsük be a kiszámított értékeket "H" egyenletébe:

$$H = \frac{T f}{T-f} + \frac{f_1(l-a)}{l-a+f_1} = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{T}} + \frac{1}{\frac{1}{f_1} - \frac{1}{l-a}} = \frac{f}{1 - \frac{f}{T}} + \frac{f_1}{1 - \frac{f_1}{l-a}}$$

Ebből a képletből látjuk a következőket: a távcső hossza egyenes
arányban van a fókusz távolságokkal /f és f_1 / és az éleslátás távolá-
val. Viszont fordítva arányos a tárgytávolságokkal. Tehát minél na-
gyobb az objektív és okulár-lencse fókusz távolsága, annál hosszabb
lesz a távcső és viszont minél nagyobb távolságban van az irányzott
pont, annál rövidebb lesz a távcső hossza. Közelre-irányzásnál vi-
szont a távcsövet meg kell hosszabbítanunk.

Ha a távcső okulárcsővének elmozdítási értékét akarjuk számítani,
akkor t egyenletét írjuk a következő alakban:

$$t = \frac{T f}{T-f} = \frac{f}{1 - \frac{f}{T}} = f / 1 - \frac{f}{T}^{-1}$$

A zárójelben lévő kifejezést fejtsük sorba, a sor erősen konvergál,
mert f-hez viszonyítva a T igen nagy, így a harmadik tag már elhanya-
golható.

$$t = f \left[1 + \frac{f}{T} - \left(\frac{f}{T} \right)^2 + \dots \right] \approx f + \frac{f^2}{T}$$

az elmozdulási érték, tehát a távcső hosszának a változása lesz
 $\Delta t = t - f$ behelyettesítve f -nek a fenti értékét $\Delta t = f + \frac{f^2}{T} - f = \frac{f^2}{T}$

példánk egy olyan távcsőnél amely tárgylencséjének a fókusz távolsága 30 cm lm-es tárgytávolságnál kiszámítva Δt -nek az értékét lesz
 $= \frac{30^2}{100} = 9$ cm; 2 m-nél 4.5 cm; 5 m-nél 0.018 cm, ∞ -nél lesz 0.000 cm.

Ha a tárgy tehát nagy távolságra van, úgy $t = f$ vehető és az $\frac{f_1}{1-a}$ oly kis érték, hogy elhanyagolható és ekkor a távcső hossza $H = f + f_1$. Ebben az esetben a legrövidebb a távcső és ezt mondjuk, hogy végtelenre van állítva.

2./ Az irányzótengely és az optikai tengely egybeessen. Minthogy az irányzótengely egyik pontja az az objektív lencse optikai középpontjába esik a feltételt kielégítjük, ha az irányzótengely másik pontját: a szálkereszt középpontját is az optikai tengelybe hozzuk, más-
különb a két tengely egymással szöget zár be. Erre nézve a távcsövet a következőképpen vizsgáljuk meg: a távcsövet leszereljük a műszerről s egy olyan tartóra fektetjük, amely két olyan átmérőjű gyűrűvel rendelkezik, mint amilyen a távcső külső átmérője. Ezután a távcsőtől 30-40 m-re egy fehér falon egy irón hegyét intjük be, úgy hogy a szálkereszt közepe az irón hegyét fedje. Ezt a pontot megjelöljük. Most a távcsövet hossz tengelye körül 180° -al elfordítjuk.



Az irón hegyét újból beintjük, s ezt a pontot is megjelöljük. Ha a két pont összeesik egymással, akkor a távcső jó, ha nem esik egymásba, akkor a két egymástól való távolságát megmértük és erre a pontra állítjuk rá a szálkeresztet a függőleges és vízszintes igazítócsavarokkal. Ezután az előbbi vizsgálatot újból kezdjük s

mindaddig kell folytatnunk, míg az ismételt elforgatás után is az iránykereszt középpontja a megjelölt pont képével egybeesik.

3./ A tárgy képe és az irányszálak egy síkba és az éleslátás távolságba legyen hozható. Először beállítjuk a szemlencsét úgy, hogy a szálkeresztet élesen lássuk. A távcsövet egy szürke felület felé fordítjuk /szürke fal, felhő/, azután addig csavarjuk az okulárcsövet be, vagy kifelé, amíg a szálak élesek. Rövidlátónak befelé, messzelátónak kifelé kell csavarni az okulár-csövet.

Ezután megirányozzuk a mérési pontot, és hogy ezt élesen lássuk, a parallaxis-csövet csavarjuk be, vagy kifelé, amíg az irányzott pontot élesen látjuk. Ha jól van beállítva a távcső, akkor a tárgylencse által előidézett kép és a szálkereszt egy síkba esik. Hogy helyesen állítottuk-e be a távcsövet, arról úgy győződhetünk meg, hogy a szemünket a szemlencse előtt jobbra-balra mozgatjuk. Ha a szálkereszt és az irányzott pont egymáshoz viszonyítva nem mozdul el, akkor egy síkba esik a kép és a szálkereszt. Ha a kép és az irányszálak egymáshoz viszonyítva ellentétes irányban mozdulnak el, mint szemünk mozgásának az iránya, akkor a parallaxis-csavart befelé, míg ha egyező irányban mozdulnak el, úgy kifelé kell csavarni mindaddig, míg a két képnek egymáshoz viszonyított helyzete változatlan nem marad.

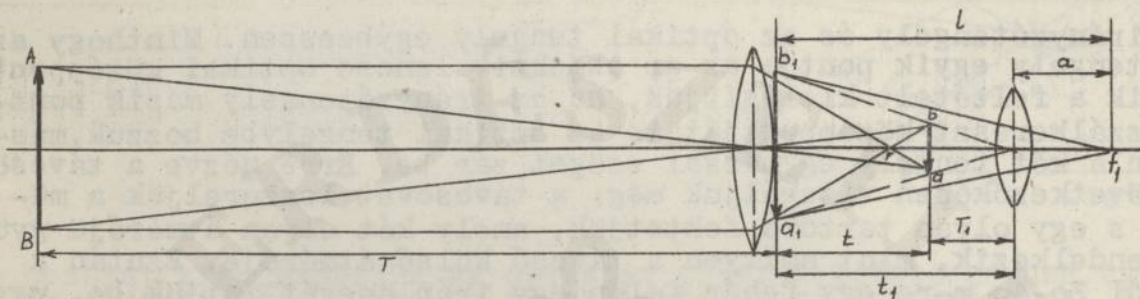
Parallaxis-hibával elfogadható mérés nem lehet terhelve. Így hibás irányértékeket kapunk, vagy optikai távolságmérésnél, ha pl. lécről végzünk leolvasásokat, a tizedek becslésénél szemünk helyzete szerint más-más értéket olvasunk le.

A távcső nagyítása.

A geodéziában használatos távcsöveknél kétféle nagyítást különböztetünk meg éspedig abszolút és relatív nagyítást.

Abszolút nagyításon értjük a távcsőben látott kép és a tárgy valódi nagysága között lévő viszont, tehát:

$$N = \frac{a_1 b_1}{A B}$$



Az ábra szerint: $\frac{a_1 b_1}{a b} = \frac{t_1}{T_1} = \frac{l-a}{T_1}$

De tudjuk azt,

hogy: $\frac{1}{f_1} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{t_1}$ ahonnan $\frac{1}{T_1} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{t_1} = \frac{t_1 + f_1}{t_1 f_1}$

Behelyettesítve, majd " t_1 "-et az éleslátás távolságával kifejezve lesz:

$$\frac{a_1 b_1}{a b} = \frac{t_1 / (t_1 + f_1)}{t_1 f_1} = \frac{t_1 + f_1}{f_1} = \frac{l - a + f_1}{f_1} \quad \dots 1./$$

Írjuk fel most a nagyítást az objektív lencsére is. Tehát:

$$\frac{a b}{A B} = \frac{t}{T}$$

De az

$\frac{1}{f} = \frac{1}{T} + \frac{1}{t}$ egyenletből kifejezhetjük $\frac{1}{t}$, ill. " t "-t:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{f} - \frac{1}{T} \quad \text{s innen} \quad t = \frac{f T}{T - f}$$

Behelyettesítve ezt az értéket a fenti egyenletbe:

$$\frac{a b}{A B} = \frac{f T}{T / (T - f)} = \frac{f}{T - f}$$

$\dots 2./$

Az 1./-es és 2./-es egyenletet összeszorozva lesz:

$$\frac{a_1 b_1}{A B} = N = \frac{l - a + f_1}{f_1} \cdot \frac{f}{T - f}$$

Vagy más alakban felírva az egyenletet:

$$N = \frac{f}{f_1} \cdot \frac{l - a + f_1}{T - f}$$

Ez a távcső abszolút nagyításának képlete, melyből a következőket olvashatjuk ki: A nagyítás fokozódik, vagyis egyenesen arányos a tárgylencse fókusz távolságának $/f/$ növekedésével és az éleslátás távolságának növekedésével. Csökken a nagyítás a szemlencse fókusz távolságának $/f_1/$ a növekedésével valamint a tárgytávolság $/T/$ növekedésével. Ez utóbbi kettővel tehát a nagyítás fordítottan arányos.

Vizsgáljuk meg, hogy mikor lesz a nagyítás egyenlő 1-el, vagyis milyen "T" távolság mellett látjuk ugyanakkorának a képet, mint amekkorá a tárgy valódi nagysága? A fenti képletből:

$$N = \frac{a_1 b_1}{A B} = 1 = \frac{f}{f_1} \cdot \frac{1 - a + f_1}{T - f}$$

Ebből "T"-t kifejezve:

$$T - f = \frac{f}{f_1} \cdot \frac{1 - a + f_1}{1}$$

Továbbá:

$$T = \frac{f}{f_1} \cdot \frac{1 - a + f_1}{1} + f = \frac{f}{f_1} \cdot \frac{2 f_1 + 1 - a}{1}$$

Ezen a távolságon belül a tárgy képe nagyobb lesz a tárgynál: a távcső nagyít. Ennél nagyobb távolságban lévő tárgy képe viszont kisebb lesz, mint a tárgy

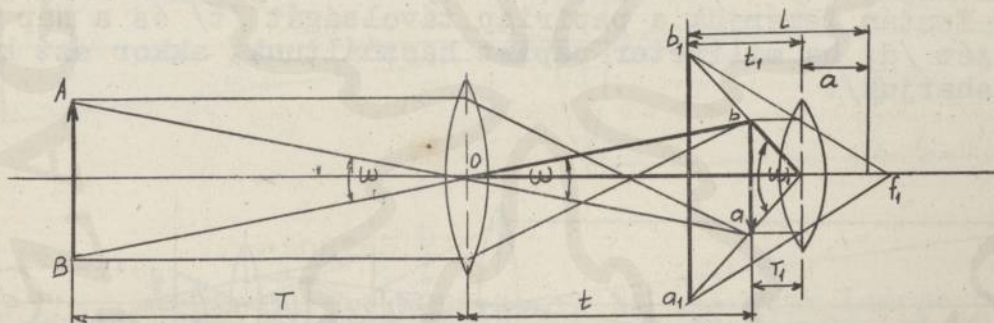
Számítsuk ki az alábbi adatokkal bíró távcsőnél azt a távolságot, melynél a nagyítás: 1.

Legyen $f = 250$ m/m ; $f_1 = 20$ m/m ; $l = 250$ m/m ; $a = 10$ m/m

Akkor: $T = \frac{250}{20} \cdot \frac{250 - 10 + 40}{1} = 3500$ m/m = 3.5 m.

Geodéziai szempontból azonban nagyobb jelentősége van a relatív nagyításnak. Ezen a távcsővön át szemlélt kép látószöge és szabadszögmel szemlélt tárgy látószöge közötti viszont értjük. A relatív nagyítást többféleképpen lehet meghatározni.

Az első módszer szerint a kép és a tárgy látószögének, illetve ezzel kapcsolatban a tárgy és szemlencse fókusz-távolságának viszonyából:



Az ábra szerint: $N = \frac{\omega_1}{\omega}$. A látószögek, mivel rendszerint nagy távolságban lévő tárgyról jönnek a látósugarak, igen kis értékek. Mivel az egyenlet ilyen alakban is áll.

$$N = \frac{\frac{\omega_1}{2}}{\frac{\omega}{2}}$$

azért a szögeértékek helyett végtelenre, vagyis nagy távolságra állított távcsőnél vehetjük azok tangenseit, mivel kis szögekről van csak szó. Lesz:

$$N = \frac{\frac{\omega_1}{2}}{\frac{\omega}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}$$

De $\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$ kifejezhető az ábrán vastagon rajzolt háromszögből:

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{a}{2 t}$$

Ugyanígy a másik háromszögből:

$$\operatorname{tg} \frac{\omega_1}{2} = \frac{a}{2 T_1}$$

Azonban tudjuk, hogy a nagy távolságban lévő tárgyak képe a fókuszban jelenik meg s ezért a fenti kifejezésekben "t" illetve "T₁" he-

Ilyett írhatjuk közelítőleg "f" illetve "f₁" értékeket. Lesz tehát:

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{a}{2f} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \frac{\omega_1}{2} = \frac{a}{2f_1}$$

ebből a nagyítás:

$$N = \frac{\frac{ab}{2f_1}}{\frac{ab}{2f}} = \frac{f}{f_1}$$

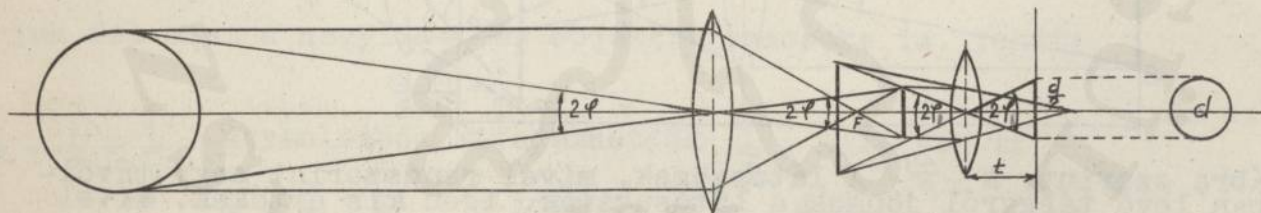
ha "f"-el jelöljük a tárgylencse és "f₁"-el a szemlencse fókusz-távolságát.

Ezzel a képlettel igen könnyen meg tudjuk határozni a távcső nagyítását. Ha a tárgy és szemlencse fókusz-távolságát nem ismerjük, akkor azt a legegyszerűbben úgy határozhatjuk meg, hogy kivéve a lencsét a távcsőből a Nap felé fordítjuk, mögéje pedig papírlapot helyezünk. A lencsét ezután addig közelítjük a papirhoz, míg a sugarakat egy pontba nem gyűjti. Ha ekkor lemérjük a lencse távolságát a papirtól, jó közelítéssel megkapjuk a fókusz-távolságot. Az így meghatározott értékeket behelyettesítve az egyenletbe, gyakorlatilag teljesen megfelelő értéket kapunk.

A relatív nagyítás meghatározásának másik módszere az, amikor a Nap látószögét vesszük igénybe. Ez a szög ugyanis közel állandó, értéke:

$$2\varphi = 32'10''$$

A meghatározás mármost úgy történik, hogy a távcsövet végtelenre állítva megirányozzuk a Napot. Ezután a szemlencse mögött elhelyezünk egy papírlapot oly távolságban, amelyben a Nap képe a legélesebben látszik. Ezután lemérjük a papírlap távolságát /t/ és a Nap képének átmérőjét /d; ha milliméter-papírt használtunk, akkor ezt közvetlenül leolvashatjuk/.



Az első módszerhez hasonlóan írhatjuk:

$$N = \frac{2\varphi_1}{2\varphi} = \frac{\varphi_1}{\varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi}$$

De "φ" értékét ismerjük /16'05"/, "φ₁"-t pedig az ábrán kivastagított háromszögből fejezhetjük ki:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{d}{2t}$$

Miután pedig $\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{ctg} \varphi$, lesz a nagyítás:

$$N = \frac{d}{2t} \cdot \operatorname{ctg} 16'05''$$

Ezt az értéket kiszámítva kapjuk a nagyítás végleges értékét:

$$N = 106.9 \frac{d}{t}$$

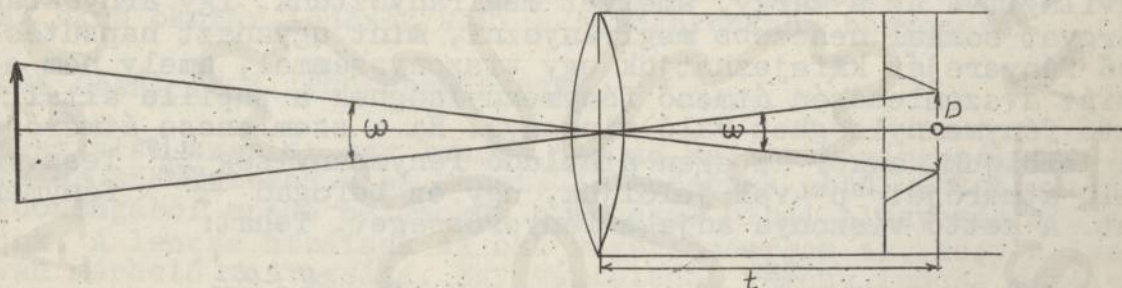
Harmadik esetben a kép és a tárgy viszonyából is megállapíthatjuk a relatív nagyítás mértékét. Eljárásunk az, hogy távcsövünk elé 10-15 m-es távolságban centiméteres beosztású léce-t állítunk fel, s egy-

szerre nézzük szabad-szemmel és távcsövön keresztül. Ezután a távcsövön át látott képet szabad szemünkkel átvisszük a lécre és megjegyezzük azt a helyet, ahova szemünk a mérőszálakat vetíti. A relatív nagyítást a szabad-szemmel látott és a távcsövön keresztül megfigyelt léchossz közötti viszony adja.

A geodéziai távcsövek nagyítása általában 10-40 között mozog. 40-szeresnél nagyobb nagyítási távcsövet mérési célokra nem alkalmazunk, mivel a nagyítás növelése a fényerő rovására megy.

5./ A távcső látóhatára megfelelő legyen.

A távcső látóhatárán a távcsövön keresztül egyszerre látott területet értjük. A lencsén áthaladó sugarak közül azok, amelyek a lencse szélein haladnak keresztül, egyrészt színszórást okoznak, másrészt pedig gömbi eltérést, s így a képet torzítják. Ezeknek a torzító sugaraknak kizárására alkalmazzuk a távcsőben az irányszálakat is magába foglaló diafragmát. Így a távcsövön keresztül csak azok a sugarak jutnak, amelyek semmiféle zavaró hatást nem gyakorolnak a keletkező képre. Így tehát a látóhatárt a diafragma "D" átmérője szabja meg és kifejezhető azzal a szöggel ω , amelyet a diafragma-nyílás átmérőjének két végpontjából a tárgylencse optikai középpontján át a megfigyelt terület felé haladó fősugarak bezárnak. Ez a szög kifejezhető a következőképpen:



$$\omega = 206265 \frac{D}{t}$$

hol "t" a diafragma nyílásának távolsága az objektív lencse optikai középpontjától. A diafragma nyílásának átmérője geodéziai műszereknél $D = \frac{2}{3} f$ szokott lenni, hol "f" az okulár fókusz távolsága. Nagy távolságba való irányzás esetén a "t" az objektív fókusz távolságával f egyenlő. Ezeket az értékeket behelyettesítve az egyenletbe:

$$\omega = 206265 \cdot \frac{2/3 f_1}{f} = \frac{2}{3} \cdot 206265 \cdot \frac{f_1}{f}$$

De a relatív nagyítás tárgyalásánál láttuk, hogy

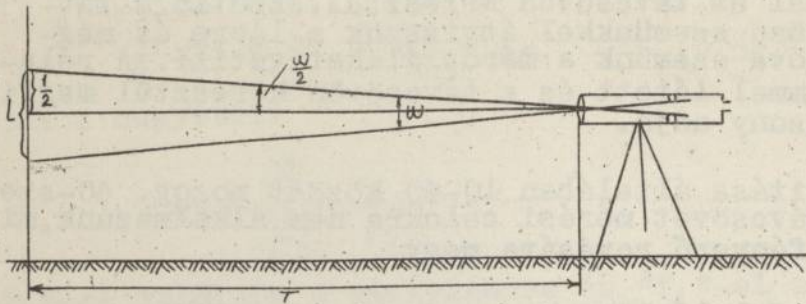
$$\frac{f}{f_1} = N \quad \text{s innen} \quad \frac{f_1}{f} = \frac{1}{N}$$

Vagyis

$$\omega = \frac{2}{3} \cdot \frac{206265}{N}$$

Ebből látszik, hogy a távcső látóhatárának szöge a relatív nagyítással fordítottan arányos. Ez azt jelenti, hogy nagyobb nagyítású távcsővel egyszerre kisebb területet látunk, de erősebben nagyítva és viszont.

A távcső látóhatár-szögét a következőképpen határozhatjuk meg: A távcsőtől bizonyos "T" /20-40 m/ távolságban centiméteres beosztású léceket helyezünk el és leolvassuk a látóhatáron belül eső léchosszat l . Amint az ábrából is látszik:



$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2 T}$$

mivel " ω " kis szög, írható:

$$\frac{\omega}{2} = 206265 \cdot \frac{1}{2 T}$$

s innen

$$\omega = 206265 \cdot \frac{1}{T}$$

" ω " értéke a geodéziában használatos távcsöveknél $3^{\circ}10' - 3^{\circ}50'$ szokott lenni.

A fenti vizsgálattal a távcső nagyítása is számítható:

Ugyanis:

$$206265 \cdot \frac{1}{T} = \frac{2}{3} \cdot \frac{206265}{N}$$

s az egyenletet rendezve:

$$N = \frac{2}{3} \cdot \frac{T}{1}$$

6./ A távcső fényereje.

A távcsőhöz jutó fényerősség elsősorban függ attól, hogy mennyire van megvilágítva az a tárgy, amelyet megirányoztunk. Így árnyékban levő tárgyat sokkal nehezebb megirányozni, mint ugyanazt napsütésben. A távcső fényerejét kifejezhetjük egy viszonysszámmal, amely nem egyéb, mint a szemlencsén átmenő fény mennyiségnek a pupilla által befogadható fény mennyiséghez való viszonya. Ha a szemlencse átmérőjét " d_1 "-el jelöljük, akkor az ezen áthaladó fény mennyiség $\frac{d_1^2}{4}$ lesz. Ha a pupilla átmérőjét " p "-vel jelöljük, úgy ez befogad $\frac{p^2}{4}$ fény mennyiséget. A kettő viszonya adja a fényerősséget. Tehát:

$$\mathcal{F} = \frac{\frac{d_1^2}{4}}{\frac{p^2}{4}} \quad \text{vagy egyszerűsítve} \quad \mathcal{F} = \frac{d_1^2}{p^2}$$

A pupilla átmérője átlagosan 2 m/m-nek vehető. Tehát akkor:

$$\mathcal{F} = \frac{d_1^2}{2^2} = 0.25 d_1^2$$

Ha a tárgylencse átmérőjét " D "-vel és a nagytávolságban lévő tárgy képtávolságát " f_1 "-el, a képnek a szemlencsétől való távolságát " f_2 "-el jelöljük, akkor felírhatjuk a következő arányt:

$$d_1 : D = f_1 : f_2$$

Ebből:

$$d_1 = D \cdot \frac{f_1}{f_2}$$

De amint már

láttuk: $\frac{f_1}{f_2} = \frac{1}{N}$, tehát

$$d_1 = \frac{D}{N};$$

Ebből viszont

$$\mathcal{F} = 0.25 \cdot \frac{D^2}{N^2}$$

hol " N " a relativ nagyítás.

A képletből kitűnik, hogy a fényerő a tárgylencse átmérőjének négyzetével arányosan nő és a nagyítás négyzetével arányosan csökken. Ezért van az, hogy 40-szeresnél jobban nagyító távcsövet nem használunk, mert bár nagyított képet kapnánk, de az elmosódott, fényszegény lenne s így rosszul volna megfigyelhető.

Vizsgáljuk meg, hogy fényerősség szempontjából melyik a legkedvezőbb eset? Ez kétségtelenül akkor van, amikor $\gamma = 1$, de ez viszont azt jelenti, hogy a szemlencsén ugyanannyi fény mennyiség megy át, mint amennyit a pupilla befogad. Tehát:

$$1 - \frac{d_1^2}{p^2} = 0.25 \frac{D^2}{N^2}$$

Tegyük fel, hogy olyan távcsövünk van, amelynél $d_1 = p$; akkor

$$D = \frac{N}{\sqrt{0.25}} = 2N$$

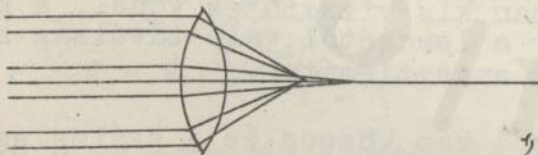
hol "D" a tárgylencse átmérője m/m-ekben. Ez a képlet azt mondja ki, hogy ha $d = p$, akkor a tárgylencse átmérője a relatív nagyítás kétszeresével egyenlő. A távcsővel szerkesztésénél tehát a szemlencse átmérőjét közel egyenlőnek vesszük fel a pupilla-nyílás átmérőjével, a tárgylencse átmérőjét lehetőleg nagyra vesszük.

Összefoglalás.

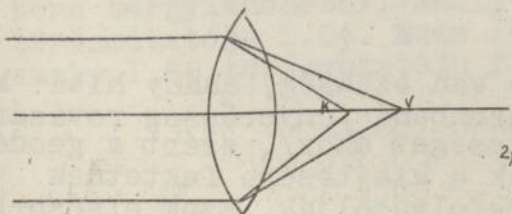
Minél erősebb a távcső nagyítása, annál kisebb a látóhatára valamint a kép fényerőssége. A nagyítás viszont csökken a tárgylencse fókusz-távolságának csökkenésével és a szemlencse fókusz-távolságának növekedésével. Ha tehát olyan távcsőre van szükségünk, amellyel nagy távolságban levő tárgyakat akarunk megirányozni, akkor a nagyítás és fényerősség fokozása céljából nagy fókusz-távolsággal és nagy nyílással bíró objektív-lencsét és kis fókusz-távolsággal, valamint kis nyílással bíró okulár-lencsét kell a távcsövünkhöz beszerezni.

Lencsék hibái és a lencserendszerek.

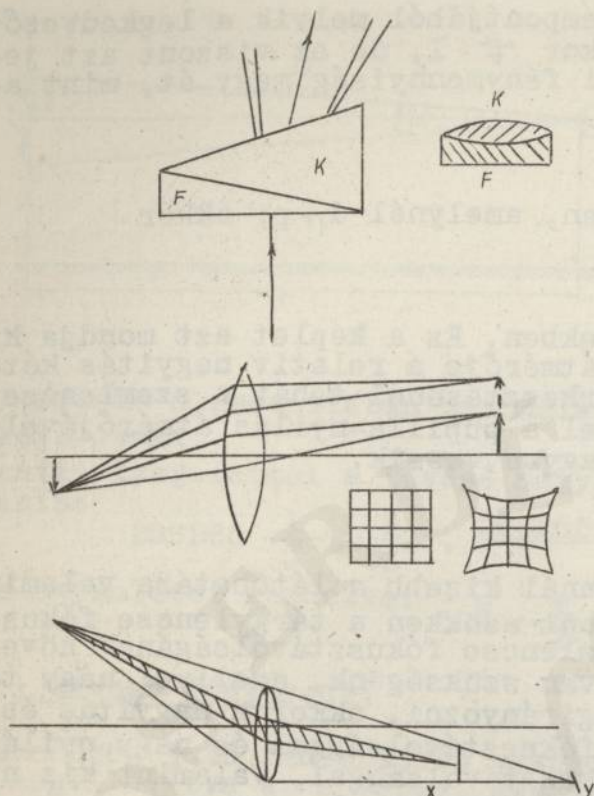
A tapasztalat szerint egy lencse nem ad valamely tárgyról teljesen tiszta és tökéletesen éles képet. A lencsének ebből a kellemetlen tulajdonságából eredő hatásokat a lencsék hibái elnevezés alatt tárgyaljuk. A lencse hibáinak az oka végeredményben az, hogy a lencsének van mérhető vastagsága. Egy végtelentül vékony lencse elméletileg teljesen hibamentes lenne. A lencsék hibáinak a korrigálása végett egy lencse helyett több lencséből álló lencserendszert alkalmazunk, mert ebben az esetben a rendszer egyes lencséinek a tulajdonságait tudjuk úgy variálni, hogy a rendszer maga végeredményben hibamentes lesz. Általában minden hibának a kiküszöbölésére legalább egy új törőfelületet kell a rendszerben alkalmaznunk. A lencsék hibái a következők:



1. A gömbi eltérés, vagy szférikus aberráció. A kép életlenségében nyilvánul, oka pedig az, hogy a lencse szélén érkező párhuzamos sugarak, egy. a lencséhez közelebb fekvő fókuszban egyesülnek, mint az optikai tengely közelében érkező sugarak. Korrigálása, részben, diafragma alkalmazásával történik, mely a lencse szélein érkező sugarakat a képképzéstől kizárja.



2. A színszórás, vagy diszperzió. Abban nyilvánul, hogy a tárgy határai a képen bizonytalanok, és többé-kevésbé a szivárvány színeiben játszanak. Oka az, hogy a különböző színekre nézve más a lencsének a törésmutatója, ennél fogva a fehér fényt, prizma-hoz hasonlóan felbontja.



A párhuzamos sugarakban érkező fehér fény ibolya része egy a lencséhez közelebb fekvő gyújtópontban egyesül, mint a vörös. Korrigálása akromát alkalmazásával történik. Áll egy kétszer domboru koronaüveg lencséből, és egy síkhomoru flintüveg lencséből. Az akromát működésének a megértése céljából lássuk egy u.n. akromatikus prizma működését. A lencsét u.i. végtelen sok differenciális prizmából összetettnek foghatjuk fel. A korona üvegnek és a flint üvegnek a törésmutatója közel egyező, a korona üvegé 1.54, a flintüvegé 1.65. Tapasztalati tény továbbá, hogy a flintüvegprizma kb. kétszer olyan hosszú szinképet ad, mint az u. olyan törésszögű koronaüveg-prizma. Az akromatikus prizma egy koronaüveg prizmából és egy feleakkora törésszögű flintüveg-prizmából áll. Amennyire a koronaüveg prizma a beérkező fehér fény színeit eltéríti jobbra, u. annyival téríti el ezeket a flintüveg prizma balra, a

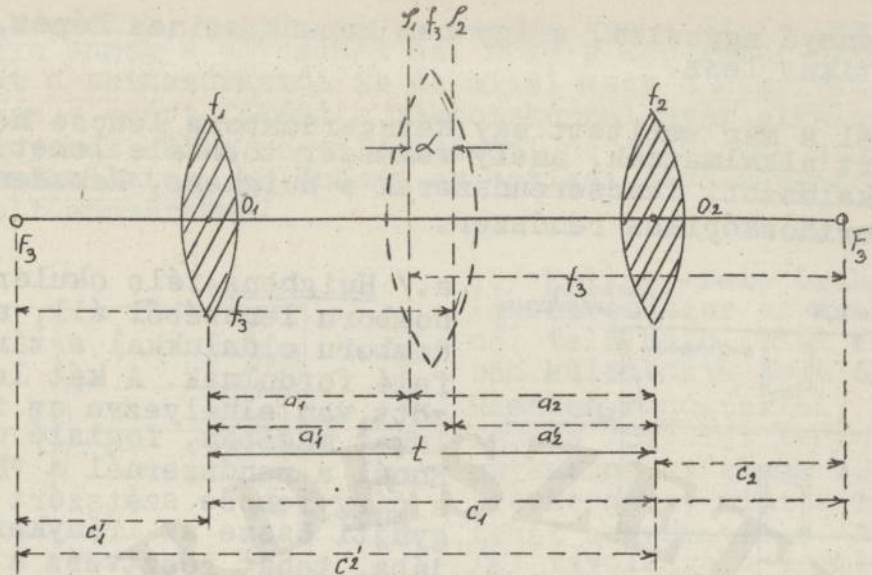
prizmán áthaladó fénysugár tehát fehér marad, bár eredeti irányát nem tartja meg.

3. A kép torzitása vagy ditorzió. Abban nyilvánul, hogy a lencse pl. a függőleges és egyenes kitűzőrudról hajlott, torz képet ad. Oka az, hogy a lencse különböző zónái különbözőképpen nagyítanak.

4. A asztigmatizmus. Képzeljünk el pl. a lencsétől bizonyos távolságra egy világító pontot. Az asztigmatizmus abban nyilvánul, hogy a világító pont képe nem pont lesz, hanem kis vonal, ill. kör vagy ellipszis. A pontból a lencse felé haladó sugárnyaláb a lencse optikai tengelyével szöget zár be, és egy olyan ferdetengelyű kupot alkot, melynek a lencse az alapja. Vizsgáljuk két egymásra merőleges síkban lévő sugaraknak a viselkedését. Az OAB síkban érkező sugarak a lencse mögött X-ben egyesülnek, míg a rá merőleges OCD síkban érkező sugarak Y-ban, mivel rájuk nézve a lencse helyezete más. X-ben a világító pont képe kis függőleges vonal, míg Y-ban kis vízszintes vonal, a közbenső helyeken pedig ellipszis vagy kör a lencsétől való távolság szerint. Ettől a hibától mentes lencsék az anasztigmatok.

5. A képöblösség. Abban nyilvánul, hogy a kép közepe és a széles egyidejűleg nem élesek. Oka az, hogy a lencse a képet nem síkban, hanem egy gömbfelületen hozza létre. A hiba javítása történik részben diafragmával, mely a széleken jövő sugarakat kizárja, ill. külön szerkesztett lencsével, az aplanáttal.

Mint már említettük, annyi törőfelületre van szükség, ahány hibát ki akarunk ejteni. Sok lencse alkalmazása azonban fényerősség rovására megy /minden lencse átlag 20 % fényvesztést okoz/, ezért a geodéziai távcsöveknél csak azoknak a hibáknak a kiejtésére fektetnek súlyt, amelyek az irányzás pontosságát befolyásolják. Ezek elsősorban a diszperzió, a disztorzió és a képöblösség. Ezeket a hibákat lencsrendszer alkalmazásával ejtik ki.



Egy lencserendszer tulajdonképpen egy lencsét helyettesít és a hatása ugyanaz, mintha ez az egy lencse volna /természetesen a közbeiktatott törőfelületekkel kiejtett lencse hibák nélkül/. Ezt az elképzett lencsét nevezzük ekvivalens-lencsének. Az ekvivalens lencse úgy működik, mint egy vastag lencse, amelynek két törési síkja S_1 és S_2 van és a vastagsága d . Jelöljük a rendszer két lencséjének fókusz távolságát f_1 és f_2 -vel, akkor az ekvivalens lencse fókusz távolsága lesz:

$$f_3 = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - t}$$

ahol t a két lencse optikai középpontjának egymástól való távolsága a_1, a_2, a_1', a_2' , legyenek az ábra szerint az ekvivalens lencse törési síkjának, tehát az első és hátsó optikai közép-pontoknak a távolsága a tényleges lencsék optikai középpontjától /Vas-tag lencsének két optikai középpontja van.

c_1, c_2, c_1', c_2' , legyen a tényleges lencsék optikai középpontjának a távolsága az ekvivalens lencse fókusz távolságától az ábra szerint lesz:

$$a_2 = \frac{t f_2}{f_1 + f_2 - t} \quad \text{és} \quad a_1 = t - a_2 = \frac{t / f_1 - t}{f_1 + f_2 - t}$$

$$a_1' = \frac{t f_1}{f_1 + f_2 - t} \quad a_2' = t - a_1' = \frac{t / f_2 - t}{f_1 + f_2 - t}$$

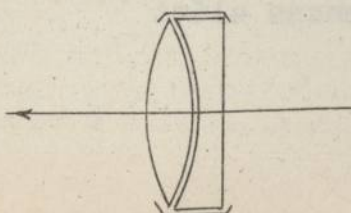
$$d = a_1' - a_1 - a_2 - a_2' = \frac{t^2}{f_1 + f_2 - t}$$

$$c_1 = f_3 + a_1 = \frac{f_1 / f_2 + t / - t^2}{f_1 + f_2 - t} \quad c_2 = f_3 - a_2 = \frac{f_2 / f_1 - t /}{f_1 + f_2 - t}$$

$$c_1' = f_3 - a_1' = \frac{f_1 / f_2 - t /}{f_1 + f_2 - t} \quad c_2' = f_3 + a_2' = \frac{f_2 / f_1 + t / - t^2}{f_1 + f_2 - t}$$

Lássuk ezután a geodéziában használatos lencserendszereket!

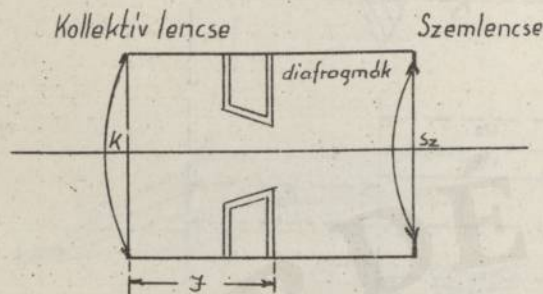
A színszórás megakadályozása céljából a távcsöveknél összetett tárgylencsét alkalmaznak. Ez az összetett tárgylencse áll egy kétszerdomború tárgylencséből, amely koronaüvegből készül, s a lencse anyagának törésmutatója 1.54. Ezen lencse mögött van egy síkhomorú szórólencse, amely 1.65 törésmutatójú flintüvegből készül. A két lencsét kanada-



balzsammal ragasztatják össze, amely anyaguk igen csekély a törésmutatója, így tehát számításán kívül esik. Egy ilyen tárgylencse képét mutatja a mellékelt ábra. Ennek a lencsének mármost az az előnye, hogy a domború lencse által felbontott sugarakat a szórólencse

ismét fehér fénné egyesíti, s így nem kapunk színes képet, tehát a lencse akromatikus lesz.

A szemlencsénél a már említett egy kétszerdomboru lencse helyett is lencserendszert alkalmaznak, amely rendszer többféle lehet. A leggyakrabban alkalmazott lencserendszerek a Huighens, Ramsden és a Kellmer féle orthoskópikus rendszer.



a./ Huighens-féle okulár két síkdomboru lencséből áll, amelyek domboru oldalukkal a tárgylencse felé fordulnak. A két lencse között van elhelyezve az irányzószálakat magában foglaló diafragma. Ennél a rendszernél a "K" lencse a tárgylencse szétszórt sugarait gyűjti össze az iránykereszt síkjába, tehát résztvesz a képalkotásban, miért is ezzel a rendszerrel ellátott távcsőnek nagyobb a

fényereje, de viszont a fényerő növekedésével a nagyítás csökken, az ilyen okulárral felszerelt távcső nagyítása kisebb lesz. A rendszer a következő arány szerint van szerkesztve: $f_1 : f_2 = 3 : 2 : 1$. Ebből az ekvivalens-lencse fókusztávolsága

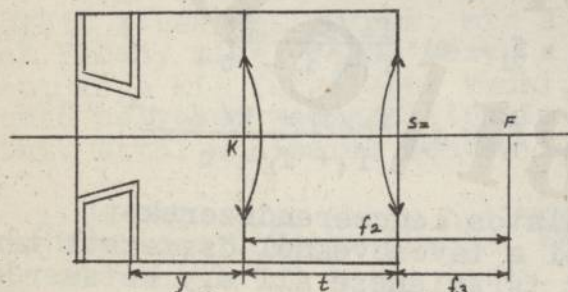
$$f_3 = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - t} = \frac{3 f_2 f_2}{3 f_2 + f_2 - 2 f_2} = \frac{3}{2} f_2 = \frac{1}{2} f_1 = \frac{3}{4} t$$

A keletkező képre vonatkozólag meg kell jegyeznünk, hogy az a "K" kollektív lencse közbeiktatása folytán a torziótól mentes ugyan, de a szemlencsén át nézve a képet, valamint az irányzószálak képét, azokat színezetteknek fogjuk látni a szemlencse /"Sz"/ dispergáló hatása folytán. Hátrány az is, hogy ha a szemlencsét különböző éleslátási távolsággal bíró szemhez állítjuk be, akkor a szálkeresztet is elkellene tolni. Ez különösen az optikai távolságmérőknél okoz zavart. A két lencsének egymástól való távolságát meg tudjuk határozni az ekvivalens-lencsénél, levezetett képlet alapján. Az iránykereszt távolát a kollektív /K/ lencsétől az

$$y = \frac{f_1}{3} = \frac{t}{2} = f_2$$

egyenletből kapjuk.

Az újabb műszereken nem igen használják.



b./ Ramsden-féle rendszerénél is két síkdomboru lencse van alkalmazva, amelyek domboru oldalukkal egymás felé fordulnak s rajtuk kívül az objektív lencse felől van a diafragma az irányzószálakkal. Ennél a rendszerénél a "K" kollektív lencse a nagyítást növeli a fényerő és a látótér rovasára. A lencse szerkesztési szabálya: $f_1 : t : f_2 = 9 : 4 : 5$.

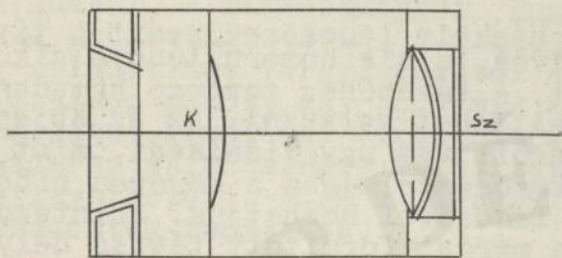
Az ekvivalens lencse fókusztávolsága:

$$f_3 = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - t} = \frac{5/9 f_2 f_2}{5/9 f_2 + f_2 - 4/9 f_2} = \frac{5}{10} f_2 = \frac{1}{2} f_1 = \frac{9}{8} t$$

A tárgylencse által alkotott kép a két lencse előtt

$$y = 0.18 f_2 = 0.1 f_1 = 0.225 t$$

távolságban képződik, vagyis ilyen messze van a diafragma a két lencsétől. Előnye ennek a távcsőnek az, hogy a kép gömbi eltéréstől mentes, valamint a színszórástól is és mivel nagy a nagyítása, a kép tiszta és éles s ezért főként a mikroszkópnál nyer alkalmazást, ahol a hiányzó fényerőt külön megvilágítással pótolhatjuk, azonban távcsöveknél is használatos, különösen az optikai távolságmérő berendezéssel felszerelt műszereknél.



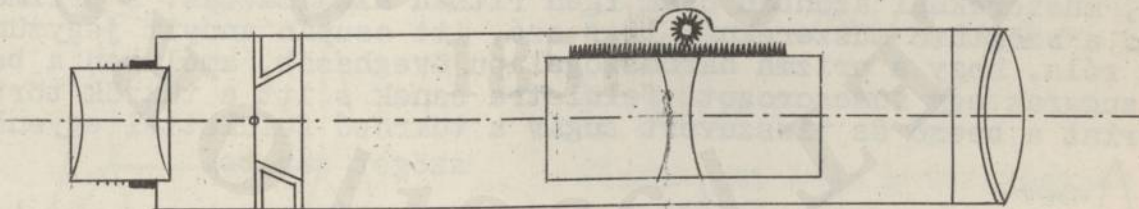
c./ Kellner-féle orthoszkópikus lencserendszer az újabb műszereknél található, mint okulár. Annnyiban különbözik az előbb tárgyalt Ramsden-rendszerétől, hogy szemlencse /Sz/ két lencséből áll, ugyanazok az elvek szerint van szerkesztve, mint a tárgylencse, tehát achromatikus. A kollektív /K/ távolsága a szemlencse rendszertől egyenlő ennek a szemlencserendszernek megfelelő ekviva-

lens-lencse fókusztávolságával. Ez a lencserendszer teljesen tiszta képet az, egyedüli hibája, hogy a nagyítás javára erősen csökken a fényerő és a látótér.

Ujabban még jobb okulár-rendszert szerkesztettek, amelynél a kollektív lencse is két lencséből áll, ezáltal a szférikus aberrációt még jobban lecsökkentik.

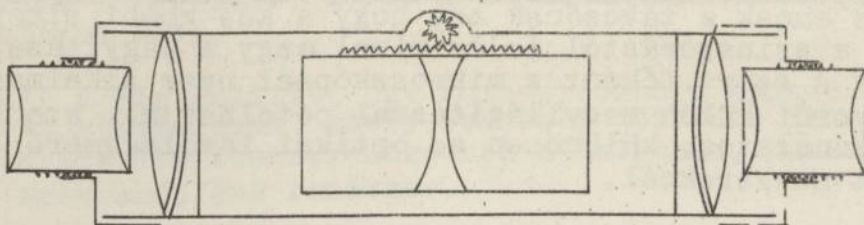
Távcsőtípusok.

A geodéziai műszereken legújabbban igen elterjedt a Wild-Zeiss rendszerű távcső. Ez a távcső ugyanazon elvek alapján működik, mint a Kepler-féle távcső. Áll egy Ramsden féle okulárból, valamint egy achromatikus objektívból. Lényeges, hogy a szálkereszt állandó helyzetű, tehát a parallaxis-csavarral nem mozdítható el, továbbá hogy az okulár és objektív között egy kétszer-hemoru lencse van, amely a parallaxis kiküszöbölésére szolgál.



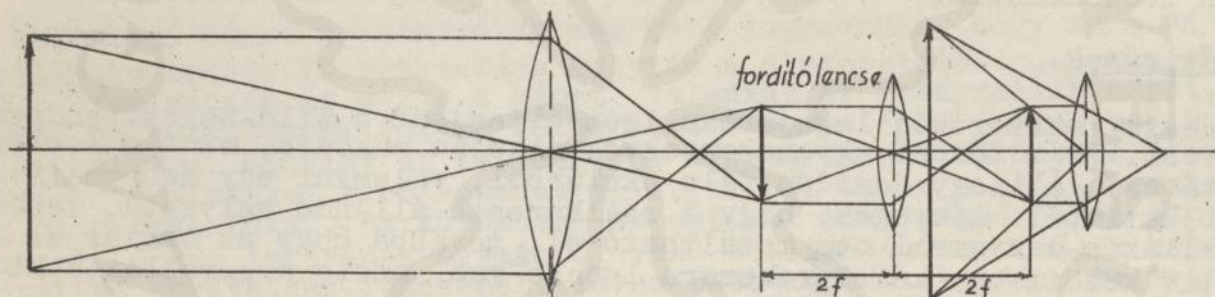
A szórólencsét a távcsőben egy fogazott sín segítségével elmozgathatjuk a távcső hossz tengelye irányában s ezáltal az objektív lencse által alkotott képet az irányszálak síkjába tudjuk hozni anélkül, hogy a távcső hosszát meg kellene változtatnunk. Ezáltal a távcsövet teljesen zártan lehet elkészíteni s így por nem hatolhat bele.

Másik, nem olyan gyakran használt típus a Wild-Zeiss féle biaxiális távcső.

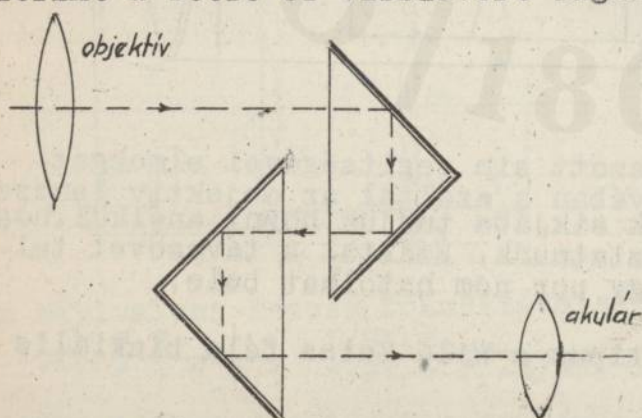


Ennél a távcsőnél is megtaláljuk az objektív lencserendszert a távcső mindkét végén. Mind a két objektívén, a sík homorú lencse sík oldalára van rákarcolva a szálkereszt. A távcsőhöz tartozó Ramsden féle okulárt a távcső mindkét végén el lehet helyezni. Az az objektív, amely pillanatnyilag az okulár előtt van úgy viselkedik, mint egy planparallel lap. A képet a szálkereszt síkjába a középén elhelyezett és állítható kettősen homorú lencsével hozhatjuk. Szintező műszereknél alkalmazták célja, hogy a mérést fordított távcső helyzet mellett is meg lehessen ismételni, de nem terjedt el, mert erősen megdrágítja a műszert.

Alkalmaznak olyan távcsöveket is, amelyek nem fordított, hanem egyenes-állású képet mutatnak. Ezt azért érik el, hogy közbe még egy kétszer-domború lencsét helyeznek, amely a képet megfordítja. Ezeknek a távcsöveknek azonban a hossza nagy, a fényvesztesség is nagyobb, ezért újabb műszereken nem igen alkalmazzák.



A gyakorlatban is használt, egyenesállású képet szolgáltató távcsövek a prizmás távcsövek. Ilyenek a köznapiban használt triéderek, műszereknél azonban csak igen ritkán alkalmazzák. A prizmáról majd a szögtüző műszereknél lesz szó, itt csupán annyit jegyzünk meg róla, hogy a prizma háromszög alapú üveghasáb, amelyben a belépő sugarak egy fonsorozott felületre esnek s itt a tükrök törvényei szerint a beeső és visszavert sugár a tükröző felülettel egyenlő szöget zár be.



A távcsőben két prizma van elhelyezve; a tükrözés folytán az első prizma a jobb és baloldalt fordítja át, a második prizma pedig, amely 90° -kal el van forgatva, az alsó és felső oldalt fordítja vissza. A képet természetesen itt is az objektív lencse képezi, a prizmák csupán egyenesállásúvá teszik azt. Az ily módon

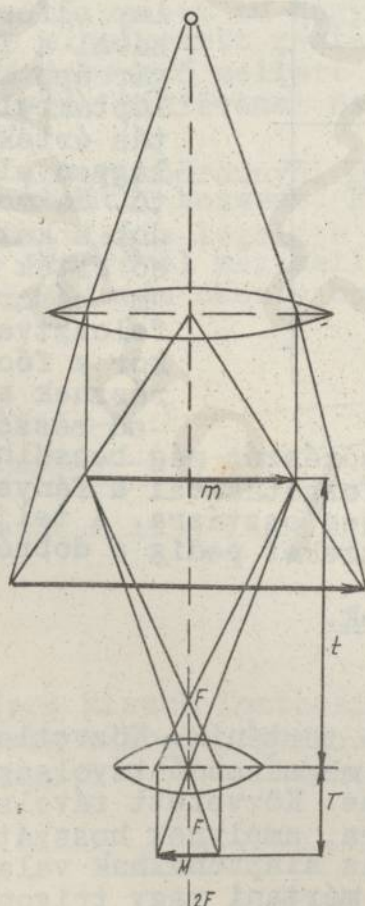
egyenesállásúvá lett képet azután az okulár-lencsén át szemléljük. Itt említhetjük még meg az u.n. anallatikus távcsövet is, melynél az objektív és okulár-lencse között egy kétszerdomború lencse van, tehát a tárgylencse egy lencserendszer. Ezt a rendszert alkotó két

lencse olyan távolságban van elhelyezve egymástól, hogy az ekvivalens lencse fókuszsa a műszer függőleges forgástengelyébe essék, tehát az ilyen távcsővel felszerelt műszereknél, ha Reichenbach-féle távolságmérővel vannak felszerelve, az összeadóállandó nulla. A Wild-Zeiss féle távcsövek is anallatikus távcsövek.

A mikroszkóp.

Ezen a helyen kell megemlékeznünk még egy igen fontos leolvasó-műszerünkről, a mikroszkópról. Ennek alakja megegyezik a távcső alakjával és szerkezetével. A mikroszkóp egy Ramsden-féle okulárból és egy aplanatikus tárgylencséből áll. Lényeges különbség a távcső és mikroszkóp között az, hogy míg az elsővel mindig a kétszeres fókusz-távolságon kívül eső tárgyakat figyelünk meg, addig az utóbbival az egyszeres és kétszeres fókusz-távolság között lévő tárgyakat tesszük megfigyelhetővé. Ezek a tárgyak geodéziai műszereknél a szög-, vagy hosszsmérték beosztása.

A mikroszkóp működési-elve a következő: Láttuk a lencsék törvényeinek tárgyalásánál, hogy ha a tárgy az egyszeres és kétszeres fókusz-távolság között foglal helyet, úgy nagyított, fordított állású képet kapunk, amely a tárgylencse mögött a kétszeres fókusz-távolságon túl jelenik meg. Így tehát a mikroszkóp tárgylencséje is az egyszeres és kétszeres fókusz-távolságon belül elhelyezett apró beosztásnak a lencse mögött nagyított képét szolgáltatja. A Ramsden féle okulár csak arra szolgál, hogy a tárgylencse által alkotott képet még jobban megnagyítva jól megfigyelhetővé tegye. Az ábra szerint:



$$\text{ha } T = f + \frac{f}{n} = \frac{n f + f}{n} = \frac{n + 1}{n} f$$

akkor az

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{T} + \frac{1}{t}$$

egyenlet alapján kifejezve "t" értékét, lesz:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{f} - \frac{1}{T} = \frac{1}{f} - \frac{n}{n+1/f} = \frac{n+1-n}{n+1/f}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{n+1/f}; \quad f = \frac{n+1}{f}$$

Nézzük, mi lesz a tárgylencse nagyítása?

$$\frac{m}{M} = \frac{t}{T} = \frac{n+1/f}{\frac{n+1}{f}} = \frac{n/n+1/f}{n+1/f} = n$$

vagyis a kép nagysága:

$$m = n M$$

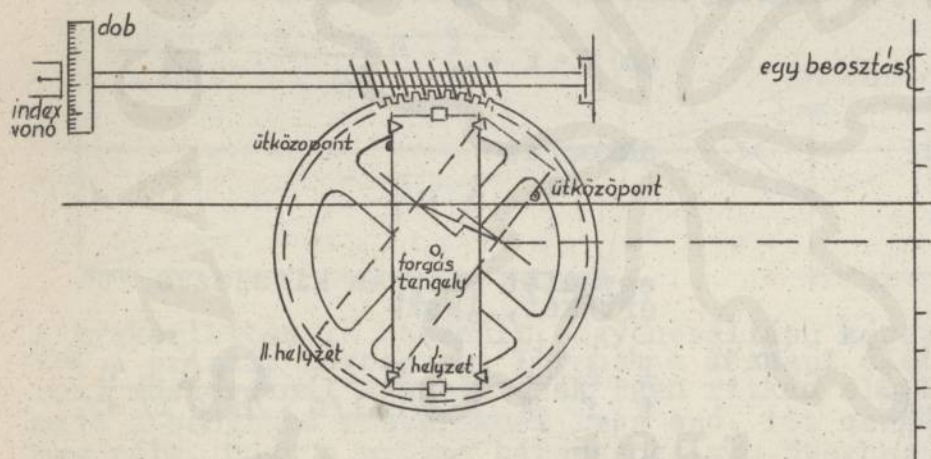
Mivel azonban ugyanannál a műszernél a tárgy távolság nagysága állandó, ugyszintén a tárgylencse fókusz-távolsága is, a kép mindig ugyanazon a helyen, tehát "t" távolságban jelenik meg az

objektív mögött, Ha viszont a "M" osztásrész nagysága is változatlan, úgy annak képe, "m" is változatlan nagyságú lesz. Így ha egy planparallel üveglapot helyezünk abba a síkba, ahol "M" képe állandóan képződik, úgy ezen a lapon megjelölhetjük a "M" osztásrészt határoló osztóvonalak képének a helyét. Ezáltal azonban "M" értéknek megfelelő nagyobb osztásrészt kapunk, amelyet most könnyen tudunk még apróbb részekre osztani, s ezen részeket az üveglapba bekarcoljuk. Ezáltal a "M" legkisebb osztásrész nagyított képét ismét alrészekre osztottuk, s ha az üveglemezen a beosztásnak megfelelően osztóvonalakat alkalmazunk, akkor eze, a mérték legkisebb osztásrészei között látszanak megjelenni, s ezáltal az "M"-et még kisebb részekre osztani és a kisebb részeket megmérni vagyunk képesek. Ezen leolvasó-mikroszkópnak három faja van használatban, amelyek lényegében a fenti elv alapján működnek. Ezek a becselő-mikroszkóp, a mikrométer-csavaros mikroszkóp és a nóniuszos mikroszkóp. Az utóbbi csak a nóniuszt nagyítja meg, s így könnyebbé teszi a leolvasást.

Használatukkal a leolvasó-berendezések tárgyalásánál, a műszertanban fogunk részletesen foglalkozni.

Az üveg-mikrométer.

Az üveg-mikrométer egy vastag, planparallel üveglap, amely egy tengely körül dob segítségével két ütközőpont között forgatható el.



Az ütközőpontok úgy vannak elhelyezve, hogy a planparallel lap elforgatásával a fémsugár épp egy főléptékbeli osztás értékével legyen eltolható. Ha most a dob a két szélső érték között "m" részre van felosztva, akkor a főosztásrésznek az "n"-ed részét még

leolvashatjuk, ill. az "n"-ed résznek a tizedrészét még becsülhetjük az indexvonásnál. A mérésnél tehát a dob elforgatásával a fénysugarat a főléptékben mindig ráállítjuk egy teljes osztásra. A teljes értékeket leolvassuk a főléptékről, a tört részeket pedig a dobról.

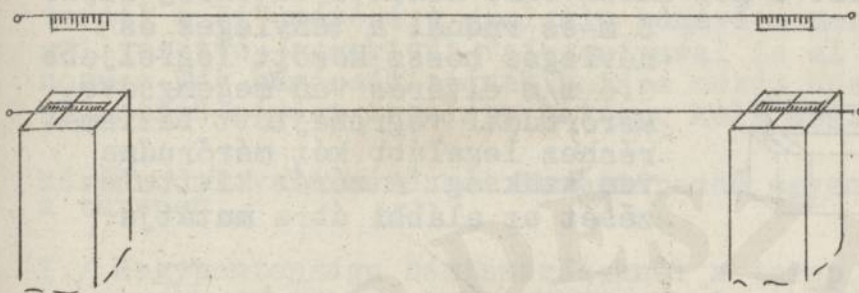
A szorosan vett mérőműszerek.

I. Hosszuságmérők.

A hossz-mérés vagy közvetlenül, vagy közvetve történik. Közvetlen távolságmérésnél a mértékegységet ráhordjuk a megméréndő távolságra és megszámloljuk, hogy hány-szor foglaltatik benne. Közvetett távolságmérésnél viszont szükségünk van egy alapvonalra, amelynek hosszát meg kell mérnünk, vagy ismernünk kell, s ennek az alapvonalnak valamint a megmért vagy adott szögeknek segítségével mértani vagy trigonometriai úton számíthatjuk a keresett hosszat.

A./ Közvetlen távolságmérők.

A közvetlen távolságmérés eszközei: az "invar" mérősodrony, a mérőrud, a libellás-léc, az acél- és a vászon- mérőszalag, a mérőlánc, az acél mérő sodrony, a mérőzsínór, a mezei körző és a mérőkerék.

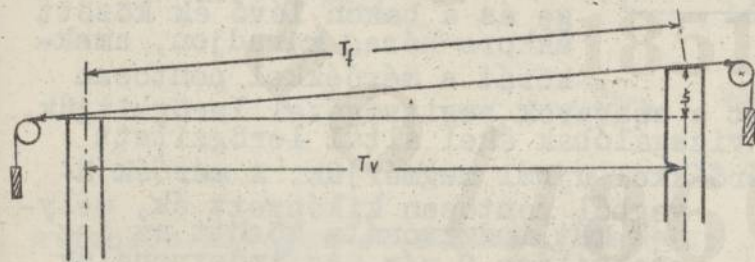


1./ Az "invar" mérősodrony 2-3 m/m vastag, rendszerint 24 m hosszú huzal, amelynek anyaga az ugynevezett invar ötvözet, amely áll 33 % nikkel és 67 % acélból. A huzal két vége közelében egymástól 24 m-nyi távolságban, kis lap van kidolgozva, melyeken

m/m-beosztás található. A veosztás "0" pontja a lapok közepén van elhelyezve: a beosztás ettől jobbra és balra halad. A sodrony két végén egy-egy karika van megerősítve, ezeknél fogva eszközöljük a mérősodrony megfeszítését úgy, hogy csigán átvetett sodronyszálat erősítünk mindkét karikához s ezeknek másik végén 5 kg-os súly lóg. Az invar-sodronyt kizárólag bázismérésre használjuk. A bázis- vagy alapvonal két végpontját 4 m mélyre beásott betonoszloppal rögzítjük, s ezeknek tetejébe 1-1 indexvonással ellátott sárgaréz-lap van beeresztve.

A bázisvonal végpontjai a beton-oszlopban is rögzítve vannak (bronz-hüvelyben elhelyezett tű hegyével s ez a pont lesz felvetítve az oszlop tetején elhelyezett rézlapra. A magyarországi állami ellenőrző alapvonal Máriabesnyő mellett egy felhagyott vasutvonalon van elhelyezve. Az országos bázisvonal össze van egyeztetve a német bázisvonallal.

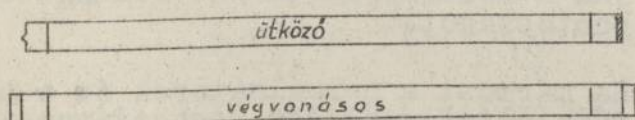
Mielőtt az invar-sodronnyal mérnénk, meg kell határoznunk a két "0" indexvonás közötti hosszát. Ezt az ellenőrző-alapvonalon végezzük el. A mérést oda-vissza legalább 4-4-szer kell végrehajtanunk s közben elektromos hőmérővel meg kell mérnünk a sodrony hőmérsékletét, hogy a hőmérsékletváltozás okozta hosszváltozást számítani tudjuk.



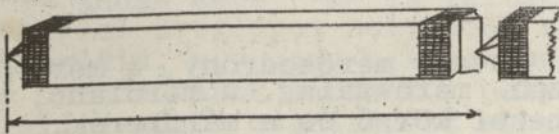
A bázis pillérei vagy egy-szintben vannak elhelyezve, vagy pedig szintkülönbség van közöttük. Ez utóbbi esetben ferde hosszat /F_f/ mérünk, tehát azt redukálnunk kell, hogy a vízszintes hosszat /F_v/ kapjuk:

$$T_v = \sqrt{T_f^2 - s^2}$$

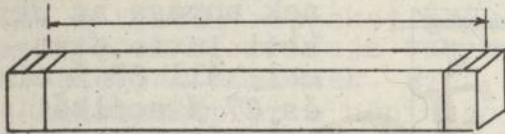
2./ A mérőrud kisebb fontosságú bázisvonalak mérésére szolgál. Legalább 4-5 évig száradt, görcsmentes, olajban kifőzött fenyőfából készült 2,4 vagy 5 m hosszúságban. Hogy át nem hajolják, téglalap, ellipszis vagy T keresztmetszetűre képezik ki. A mérőrudak két végét acélsaruval látják el a kopás kikerülése céljából. A saruk kiképzése szerint megkülönböztetünk ütkő-



szint vagy T keresztmetszetűre képezik ki. A mérőrudak két végét acélsaruval látják el a kopás kikerülése céljából. A saruk kiképzése szerint megkülönböztetünk ütkő-

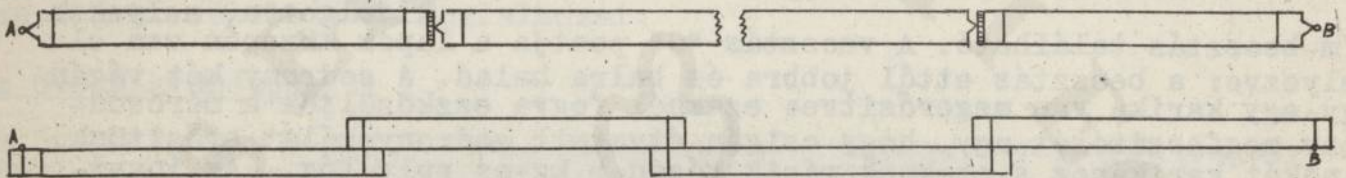


való távolsága adja. Végvonásos mérőrudnál a saruba van két indexvonás bekarcolva: a rud hosszát a két indexvonás közötti távolság adja.



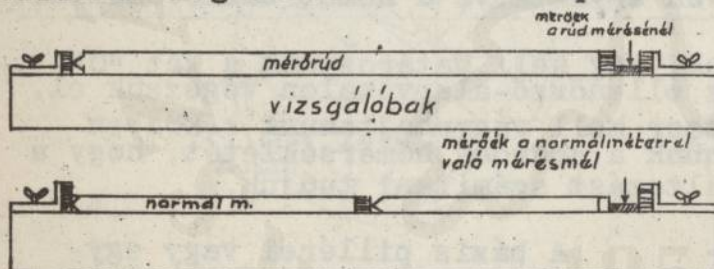
zõ és végvonásos mérőrudat. Az ütközõ mérőrudnál a lécek mindkét vassarujába 1-1 acélék van erősitve úgy, hogy ugyanazon a rudon levõ két ék egymásra merõlegesen áll. A lécek hosszát a két ék külsõ élének egymástól

5 m-es rudnál a tényleges és névleges hossz között legfeljebb 0.4 m/m eltérés van megengedve. Mérőruddal végrehajtott bázisméréshez legalább két mérőrudra van szükség. A mérés kivitelezését az alábbi ábra mutatja.



Ütközõ mérőrud használata esetén nem szabad a két rudat erősen összeütni, mert ezáltal megsérül az ék és a mérőrud is elmozdulhat, de viszont vigyázni kell arra, hogy a két szomszédos ék érintkezzen egymással.

Bázismérés előtt a mérőrud hosszát is ellenőriznünk kell. A mérőrud hosszának meghatározására - komparálására - a vizsgálóbakot használjuk.

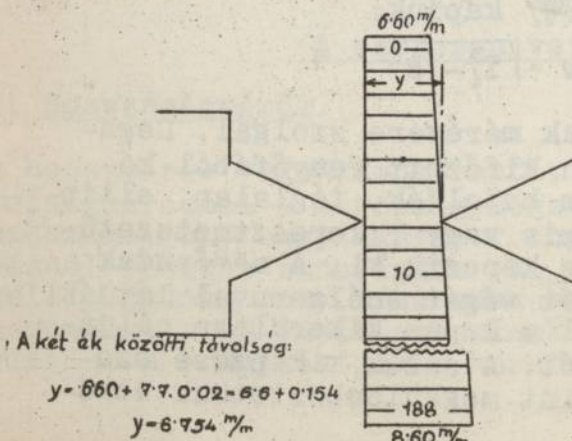


Ez egy áthajlásmentes gerenda, melynek két végén egy-egy szárnyas csavarokkal leszorítható ék van.

A megvizsgálandó rudat a bakra helyezzük a szorítóékek közé úgy, hogy a rud vége és a bakon lévõ ék között akkora hézag maradjon, amekkorát a mérőékek pontosan

le tudunk mérni. Ezután az ékeket a csavarok segítségével lerögzítjük. Most kivesszük a mérőrudat és a vizsgálóbak ékei által lerögzített hosszát normálméterekkel és a mérőékekkel újból megmérjük. A mérőékek

üvegébõl pontosan kiképzett ék, melynek két indexvonála között az összehajlása 2 m/m. Az indexvonalak közötti távolság 100 részre van osztva: egy-egy részre esõ hosszváltozás 0.02 m/m. Mivel azonban az osztásrészek tizedeit is tudjuk becsülni, azért a mérőékekkel elérhetjük a hossz-mérésben a 0.002 m/m-es pontosságot.



Ha mármost a normálméterek és a mérőékek által pontosan meghatározott két ékvégződés közötti hosszából levonjuk a mérőrud behelyezésekor le-

mért mérőék-hosszat, akkor kapjuk a rud tényleges hosszát annál a hőmérsékletnél, amelynél a vizsgálatot végeztük. Ezt még át kell számítani 0°C -ra, vagy 20°C -ra normál-hőmérsékletre. Minden normálméternek meg van adva az egyenlete, amelyből a hosszváltozását kiszámíthatjuk. A tanszéken lévő normál méter egyenlete pl.

$$H_t = 1 \text{ m} - [0.20 + 0.01 - 0.011 / t^\circ - 20^\circ]$$

ahol " t° " a vizsgálatkor megmért hőmérsékletet jelenti Celsius-fokokban. A képlet a normálméter hosszát adja 20°C mellett. Jó normálméternél a " t " mérésre szolgáló hőmérő a normálméter anyagába van beágyazva, azonkívül fafogantyúval is el van látva a normálméter hogy a kéz hőmérsékletének hatása mérés közben kiküszöbölhessék. Az ellenőrző-mérést legalább hatszor kell megismételni.

Mérőruddal való mérésnél a megmérendő egyenest mindig ki kell tűzni a terepen.

1./ Nagypontosságú bázisméréseknél a terep egyenlőtlenségeit palló- vagy gerendahidlással kiküszöböljük ki, az egyenest, pedig műszerfel tűzzük ki.

2./ Kisebb pontosságú méréseknél az egyenes két végpontja között zsinórt feszítenek ki és ehhez fogják hozzá a rudat. Hogy feszítés közben a zsinór ki ne térjen az egyenesből, 20 m-enként cöveket kell levérni és erre rá kell hurkolni a zsinórt.

Minden mérőrudat két-két munkáa kezel: egy a rud elejét, egy pedig a végét fogja.

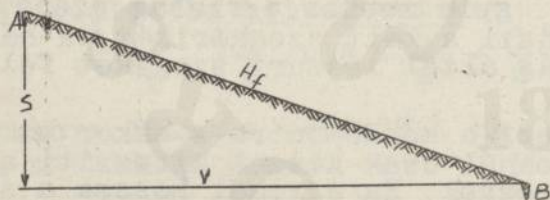
Az ellenőrzőméréskor a rud hosszát 20°C hőmérsékletre határoztuk meg $/t/$. Ha a bázismérést más hőmérsékleten $/T/$ végezzük, akkor erre a hőmérsékletre nézve kell korrigálnunk a mérőrud ill. a bázis hosszát. A korrekció értéke:

$$k = /t - T/ \cdot e \cdot h_t$$

vagyis a helyes hossz:

$$H_v = h_t / 1 + /t - T/e/$$

Ha vízszintes terepen mértünk, minden további nélkül megkaptuk a bázis hosszát. A gyakorlatban azonban leginkább ferde hosszakat mérünk.



Ilyenkor át kell számítani a vízszintes hosszra. Mint már láttuk:

$$H_v = \sqrt{H_f^2 - s^2}$$

vagy más alakban írva:

$$H_v = H_f \sqrt{1 - \left(\frac{s}{H_f}\right)^2}$$

A gyökös kifejezést sorbafejthetjük:

$$\left[1 - \left(\frac{s}{H_f}\right)^2\right]^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s}{H_f}\right)^2 + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{s}{H_f}\right)^4 - \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{s}{H_f}\right)^6 + \dots$$

a binomiális tétel alapján:

Mivel a sor erősen konvergál $/s$ igen kicsi a H_f -hez képest/, a magasabbrendű tagokat elhanyagolhatjuk. E szerint lesz:

$$H_v = H_f \left[1 - \frac{1}{2} \frac{s^2}{H_f^2}\right] = H_f - \frac{s^2}{2 H_f}$$

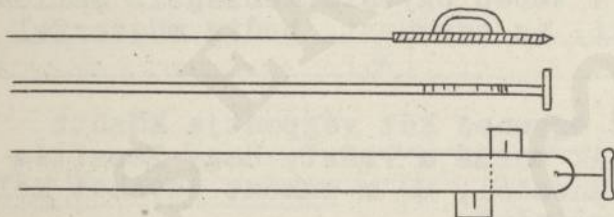
Ez a képlet jó közeliéssel adja a vízszintes hosszt. Ha zsinór mellett végezzük a mérést, az elérhető pontosság, vagyis a középhiba:

$$\pm \Delta H = \frac{1}{30,000}$$

gondos mérésnél, ha azt vasuti sinen vagy országuton végeztük.

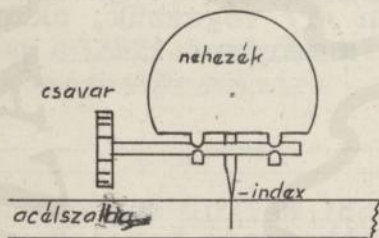
3. Az acél mérőszalag, vagy az erősebb kivitelű kataszteri-szalag 10, 20, 30, 50 m-es vagy 10, 20 öles hosszban készül. Az egész métereket vagy öleket nagyobb, a fél métereket vagy öleket kisebb sárgaréz lapok jelölik. A deciméterek vagy tized-ölek helyén a szalag át van lyukasztva.

A szalag szállítás közben egy mintegy 25 cm átmérőjű keretre van felcsavarva. Készülnek könnyebb kivitelű szalagok is 20 m-es hosszban. Ezek egy fogantyún lévő hengerre csavarhatók fel és börtokban vannak elhelyezve. Az ilyen szalagokon mindkét oldalon van centiméteres osztás; az első dm rendszerint még m/m-ekre is be van osztva. A méterek beedezett számokkal vannak megjelölve. Mivel nálunk még az öles mértékegységet is használják, azért legtöbbször ezeknél a könnyebb szalagoknál az egyik oldal méteres, a másik öles osztású. A szalaghoz 10 db jelzőszeg is tartozik.



Az acél-mérőszalag lehet ütköző, vagy végvonásos. Az ütköző-szalag egyik alakja az ábrán látható "Bodola"-féle szalag. Vannak precíziós végvonásos szalagok is: ezeket azonban csak pontos méréseknél használják.

Méréskor a szalaghossz végét meg kell jelölni. Közöséges méréseknél ez a jelzőszeg segítségével történik. Pontosabb, precíziós mérések-

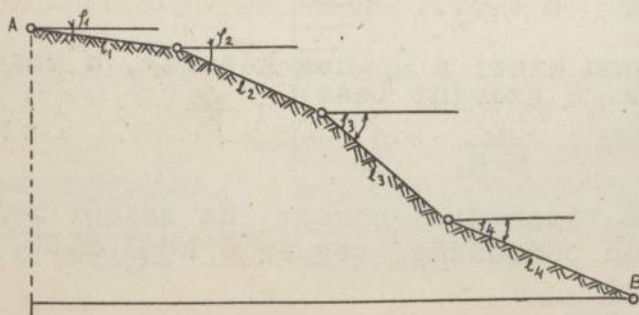


nél a "Löschner"-féle sarut használják erre a célra. Ez egy nagy súlyu nehezék, rajta csavarral elmozditható index, mely a mérőszalag indexvonalához állítható.

A szalagokat is használhatjuk vízszintes és ferde vonalak mérésére egyaránt. Méréskor az egyik munkás a szalag elejét fogja, a másik a végét. Az első munkás viszi a telt szegkarikát, a hátsó pedig az üreset, amelyre az első munkás által leszurt szegeket felfűzi.

A hátsó munkás a szalag elejét ráhelyezi a kezdőpontra s ekkor az első munkás rugóval, vagy egyszerűbb méréseknél csak kézzel kifeszíti a szalagot, végét pedig megjelöli egy szeggel. Ha a vonal hossza a szalag tízszeres hosszánál nagyobb, akkor a hátsó munkás a tizedik szeg leszurása után 9 szeget átad az első munkásnak, de ezenkívül a tizenegyedik szeg leszurása után még a tizediket is átadja s csak az ezután következőket gyűjti össze, míg újra 9 szeg nem lesz a karikáján.

A hosszmerést igen pontosan és gondosan kell elvégezni, mert ebből sokat a legtöbb hiba származni.

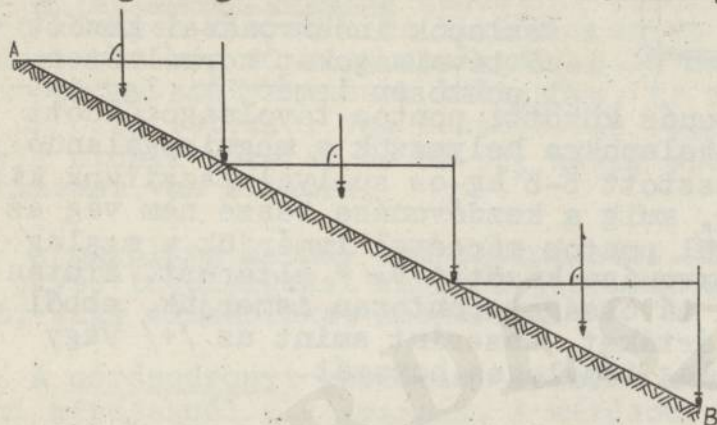


Lejtős vonalak mérésénél mindezekelőtt a két pont között a lejt-törési pontokat kell kijelölnünk. Ezután megmérjük a 2-2 pont közötti ferde távolságot valamint az egyenes lejtyszögét. A lejtyszögét φ mérhetjük bányászkompasszal, fokives dioptr-

rával, fokives libellával vagy műszerrel. Ez utóbbi esetben 10'-nyi pontossággal kell leolvasnunk. A ferde hosszakat a

$$H_v = H \cos \varphi$$

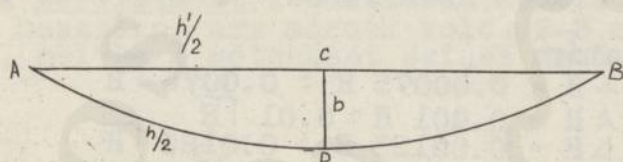
képlet segítségével vízszintesre redukáljuk.



Lejtős vonalak mérésének másik módja az, hogy a kifeszített és vízszintesen tartott szalaggal közvetlenül a vízszintes hosszakat mérjük, a szalagvégeket pedig az ábra szerint függélyezzük.

Nagyobb hajlású vonalak mérésére a libellás léceket használjuk.

Vizsgáljuk meg, hogy mennyire kell megfeszítenünk a szalagot, hogy a behajlás-okozta hiba ne legyen nagyobb a megengedettnél.



Jelöljük "h"-val a szalag hosszát, "h'" -el a hibás hosszát és "delta" -val a hibát. Vagyis $\delta = h - h'$ s innen $h' = h - \delta$

Invar-szalagnál az ADB vonalat láncgörbének kell vennünk, közönséges acélszalagnál azonban az ábrabeli ACD idomot háromszögnek vehetjük és felírhatjuk a behajlás értékére:

$$b = \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{h'^2}{4}} = \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{(h - \delta)^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 - h^2 + 2h\delta - \delta^2}$$

$$b = \frac{1}{2} \sqrt{2h\delta - \delta^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\delta/2 h - \delta^2/4}$$

A megengedett hibát a hosszak bizonyos hányadával adjuk meg, $\delta = \frac{h}{n}$. Ezt "b" képletébe helyettesítve:

$$b = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{h}{n} / 2 h - \frac{h}{n} / 4} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2h^2}{n} - \frac{h^2}{n^2}} = \frac{h}{2n} \cdot \sqrt{2n - 1}$$

Pl. mekkora lehet a behajlás, ha a megengedett hiba: $\delta = h/1000$; vagyis $n = 1000$. Akkor

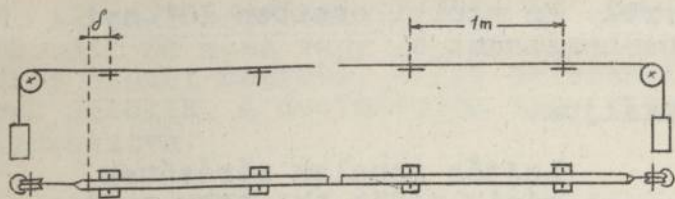
$$b = \frac{h}{2000} \cdot \sqrt{2000 - 1} \approx 0.02 h$$

A megengedett behajlás tehát 20 m-es szalaghossz esetén h/1000-es pontosságnál 40 cm; h/2000-es pontosságnál pedig 30 cm.

A mért távolságok helyes hosszát csak akkor nyerjük, ha a szalag tényleges hossza egyezik a névleges hosszal, illetve ha ismerjük a kettő közötti különbséget. Ez 20 m-es mérőszalagnál legfőljebb 6 m/m, lehet.

A szalag tényleges hosszának ellenőrzésére minden nagyobb mérésnél egy alap-mértéket kell elhelyezni: legcélszerűbben egy épület lábazati falán. Ezzel az alapmértékkel minden nap össze kell hasonlítani a mérőknek a szalagját.

A szalag pontos komparálására egy északi fekvésű lábazati falba 1 m-enként kiálló vaslapokat erősítenek, amely vaslapok felső lapján 1-1



indexvonás van. Ezenkívül két csigát is erősítünk a falba, a mellékelt ábra szerint.

A vaslapok indexvonásai között lévő távolságokat normálméterrel pontosan lemérjük. Így is-

merjük az első és utolsó indexvonás közötti pontos távolságot adott hőmérséklet mellett. Ezután a vaslapokra helyezzük a megvizsgálandó szalagot, melyet két végére akasztott 5-5 kg-os sullyal feszítünk ki. Most addig tuljuk el a szalagot, amíg a kezdővonása össze nem vág az első vaslap indexvonásával. Végül pontos mércével lemérjük a szalag végvonása és az utolsó lap indexvonása közötti "d" eltérést. Miután a két szélső indexvonás közötti távolságot pontosan ismerjük, ebből levonva, vagy hozzáadva a "d" értéket, aszerint amint az +/- vagy /-/- előjelű volt, nyerjük a szalag tényleges hosszát.

Pontos méréseknél figyelembe kell venni a hőmérséklet ingadozás okozta szalaghosszváltozást is. Részletméréseknél, mivel itt csak rövidebb hosszakat mérünk, a hőmérsékletváltozásra nem vagyunk tekintettel.

A szalagmérésnél megengedett hibahatár:

síkvidéken:	$\pm \Delta H = 0.00075 H \pm 0.0075 \sqrt{H}$
dombvidéken:	$\pm \Delta H = 0.001 H \pm 0.01 \sqrt{H}$
hegyvidéken:	$\pm \Delta H = 0.00125 H \pm 0.0125 \sqrt{H}$

Az állami földmérés által megengedett hiba:

belsőiségekben:	$\pm \Delta H = \sqrt{0.000222 H + 0.36 H}$
külsőiségekben:	$\pm \Delta H = \sqrt{0.000625 H + 0.00 H}$

A hossz kétszeri megmérésénél általában $h/2000$ az elérendő pontosság.

A szalagmérésnél különböző hibaforrások állanak fenn, amelyek a mérést hibássá tehetik. Ezek a hibaforrások a következők:

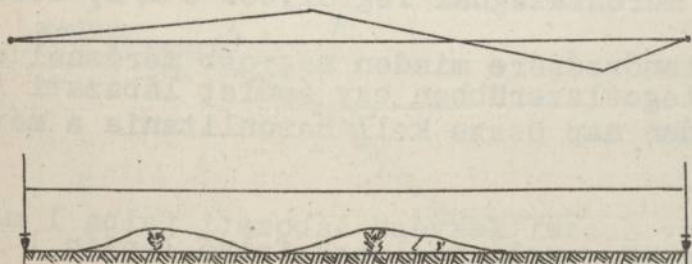
a szalag maga hibás. A hibaszámításba vonható a szalag valódi hosszának megállapításával.

hiba származik a hőmérsékletingadozások okozta hosszváltozásból is. Ezért nagy melegben vagy nagy hidegben nem végzünk méréseket, vagy pedig átszámítjuk a szalag hosszát az adott hőmérsékletre.

hibát követünk el azáltal is, ha lejtős terepen rossz hajlásszöget mérünk. Ha 0.01 m pontossággal mérünk, akkor 2° -ig elhanyagolhatjuk a hajlásszöget.

hibát ad a mérőszalag behajlása és megcsavarodása is. Továbbá ha a szalag végeit nem intjük be az egyenesbe, hanem kigyóvonalat mérünk,

vagy ha nem feszítjük ki a szalagot kellően, illetőleg ha túlfeszítjük azt. Ezért az egyenesünket bokroktól, fűcsomoktól meg kell tisztítani, vagy az egész szalagot fel kell emelni és a végeit le kell függélyezni.



hiba származik abból is, ha a szegeket nem szurjuk le pontosan. Ez különösen na-

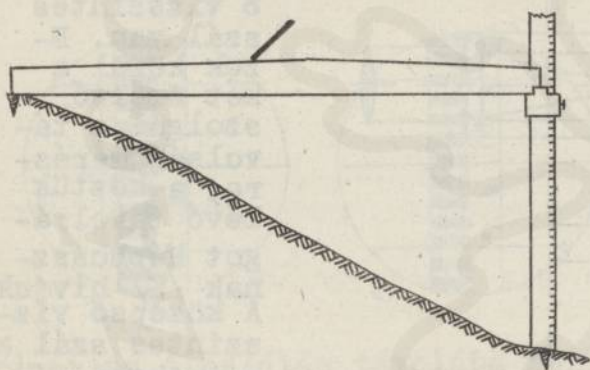
gyon lágy vagy kemény talajoknál, főleg pedig kavicsos talajoknál fordul elő, miért is ilyen helyeken sarut kell használnunk, különben a szalag feszítésekor a szegeket elmozdítjuk.

4./ A vászón-mérőszalag geodéziai célokra alárendelt jelentőségű, mert könnyen kinyúlik és ilyenkor dm-es eltérést is adhat. A megengedett eltérés 20 m-es szalagnál 9-10 mm lehet. A vászonszalagba rézsodrony-szálak vannak beleszőve, az egész lenolajjal van átitatva és olajfestékekkel van bekenve. 10 vagy 20 m hosszúságban készül, egyik oldala méteres és cm-es, másik oldala öles és századöles beosztással van ellátva.

5./ A mérőlánc ma már nem használatos. Hátránya, hogy igen súlyos. Az egyes távolságokat karikák jelölik: az öleket nagyobbak, a lábakat, vagy tizedölöket kisebbek.

6./ A mérősodronyt geodéziai célokra nem használják, rendszerint csak vízi méréseknél alkalmazzák. A mérősodrony 2-3 mm vastag, legtöbbször 50 m-es hosszban készül. A méteres távolságokat fémgombok jelzik.

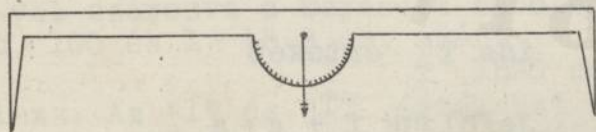
7./ A mérőzsinórt geodéziában csakis egyenesek kijelölésére használják: hosszakat nem mérnek vele. 2-3 mm vastag kender-zsinórból készül, melybe 1 méterként színes szalagot fonnak bele.



8./ A libellás-léc két rudból áll: méréskor az egyik vízszintes, a másik függőleges helyzetű. Az előbbi rendszerint 4 m hosszú, melynek közepén felül egy libella van elhelyezve úgy, hogy a libella tengelye párhuzamos a rud alsó lapjával. A libella fölé 45° alatt egy tükör hajlik, ennek segítségével a libella állása a rud végéből ellenőrizhető.

A függőleges rúdon föl- és le-tolható hüvely van, ezenkívül cm-es beosztással van ellátva.

A libellás léceket vízszintes távolságok és szintkülönbségek mérésére egyaránt használhatjuk. Az előbbieket a vízszintes, az utóbbiakat a függőleges lécről végzett leolvasások összegezése útján kapjuk. Mérésnél vigyázni kell arra, hogy a libella állandóan bejártsszék.



9./ A mezei körző. 4-5 m hosszú, olajban kifőzött fenyőfarud, melyen függélyező és fokbeosztás is szokott lenni. Kertészetekben használatos, geodéziában jelentősége nincs.

10./ A Wittmann-féle mérőkerék egy 1 m kerületű kerékből, a fordulatszám-láló- és a tolószervezetből áll. Használatkor a kereket végigtoljuk a megméréendő vonalon; a hosszat közvetlenül a számlálószerkezetről olvashatjuk le. Geodéziai célokra pontatlansága miatt nem alkalmas: vasutak és országutak hektométeres jelzésénél használják a sinen ill. az út tengelyében tolva. Pontossága vasuti sinen tolva 1 %, új utaknál 2 %, régi utaknál 5-8 %.

11./ A mérővessző fából készül 2 m-es hosszban, csuklósan összehajtogatható. Kisebb távolságok mérésére használják. Ma már inkább 2 m hosszú, kis tokba csavarható acélszalagot használnak helyette.

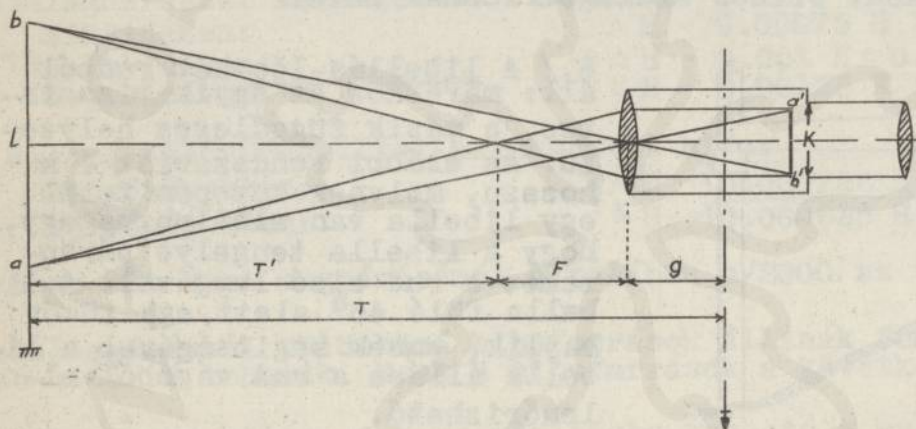
B./ Közvetett távolságmérés.

Közvetett távolságmérésnél mindig mértani uton mérjük a hosszakat. Az eljárás alapja az, hogy hasonló háromszögeket létesítünk és ezek segítségével fejezzük ki a keresett távolságokat.

Az optikai távolságmérésnél a műszer szerkezete adja a háromszögeket. A modern prizmás optikai távolságmérő műszerek igen pontosak, ezáltal a távolságmérés pontossága éri, sőt felülmúlhatja az acélszalaggal végzett mérés pontosságát.

Az optikai távolságmérőket két csoportra osztjuk: a régi és az új /precíziós/ optikai távolságmérők csoportjára. Az előbbiek közül a legelterjedtebb a Reichenbach-féle távolságmérő, az utóbbiak közül a Szepessy-féle tangenses és a prizmás távolságmérők.

A Reichenbach féle távolságmérő. Vízszintes irányzás mellett./



A távcsőben 3 vízszintes szál van. Ezek közül a két szélső szolgál a távolság mérésre, a közöttük lévő távolságot képhossznak /K/ hívjuk. A középső vízszintes szál a szintmérés és magasságmérés

céljait szolgálja, míg a függőleges szállal az irányzást végezzük.

Az ábra alapján felírhatjuk:

$$\frac{a}{T'} = \frac{a' b'}{f} \quad \text{de} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b' = K} \quad \text{így} \quad \frac{1}{T'} = \frac{K}{f}$$

Innen:

$$T' = 1 \frac{f}{K}$$

Mivel pedig

$$T = T' + f + g$$

ide T' értékét

$$T = 1 \frac{f}{K} + f + g$$

Jelöljük $f + g = a$

$\frac{f}{K} = b$ -vel, akkor

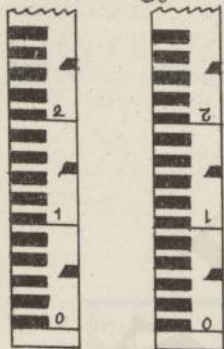
$$T = B 1 + a$$

Ez a Reichenbach-féle távolságmérő képlete. Ebben a képletben "a" az összeadóállandó, "b" pedig a szorzóállandó. Mivel f , K és g egy műszerre nézve állandó, azért ezeket ismernünk kell ahhoz, hogy a műszerrel mérhessünk. A K értékét rendszerint úgy választjuk meg, hogy "b" értéke 100 legyen. Mivel a tárgylencse-rendszer ekvivalens lencséjének fókusz-távolsága $/f/$ adott, azért

$$K = \frac{f}{100}$$

A $T = bl + a$ képlet csak akkor érvényes, ha a távolságméréshez szükséges lécszerű merőleges az irányzótengelyre. /Megjegyzendő, hogy a Zeiss Wild féle távcsőnél, mivel a tárgylencse-rendszerben a homorú lencse távolságát változtatni kell a kétszerdomború lencsétől, hogy a kép a szálkereszt síkjába essék, változni fog a tárgylencse-rendszer fókusz-távolsága is. Ez a változás azonban a szorzóállandó értékére olyan kis hatással van, hogy gyakorlatilag nem kell számításba-vennünk./

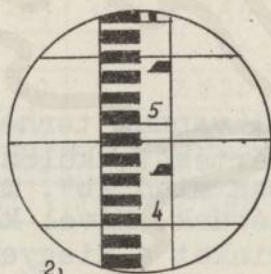
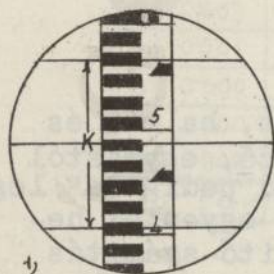
A távolságméréshez szükségünk van távolságmérő lécre is. Ez száraz, olajban kifőzött és olajfestékkel befestett fenyőfából készül. A lécs méteres vagy öles beosztással van ellátva. Méteres osztás esetén a



deciméterek meg vannak számozva és a legkisebb beosztás centiméteres: a millimétereket tehát becsüljük. Ezeknél a léceknél az 5 cm-ek is külön meg vannak jelölve. Egyes lécekre a számok fordítva vannak felírva, mert a távcső a képet visszafordítja.

Öles-osztású lécnél a tized-ölek vannak megszámozva és a század-ölek vannak felváltva fekete és fehér színnel jelölve. Az osztást pontos léceknél osztógéppel végzik, közönséges léceket kézzel osztanak, az egészen egyszerű lécek-

re pedig sablonnal viszik rá az osztást.



A Reichenbach-féle távolságmérő használata. A műszerrel központosan és szintesen felállunk a megméréndő távolság egyik végpontjában, a lécs pedig a másik végpontba állítjuk. Ezután közel vízszintes helyzetű távcsővel megirányozzuk a függőleges állású lécs úgy, hogy a lécs közepére ráállítjuk a függőleges irányszálat majd a lécs

képét az éleslátás távolába hozva leolvassuk azt a két lécosztást, amellyel a két távolságmérőszál összeesik. Pl. a fenti 1./-es ábrán:

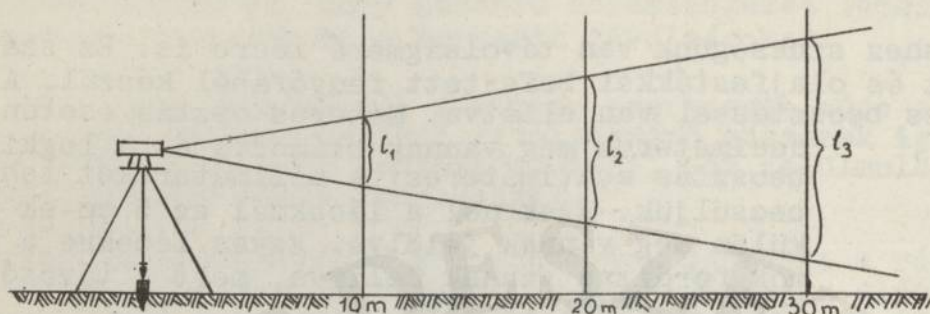
$$\begin{aligned} l_a &= 40.7 \\ l_f &= 56.6 \\ l_a + l_f &= 97.3 \\ l_f - l_a &= 15.9 = l \end{aligned}$$

A két leolvasás számtani közepének $\left(\frac{l_a + l_f}{2} = 48.65\right)$ 1-2 tized eltéréssel a középső vízszintes szál által kimetszett értékkel $l_k = 48.7$ kell egyenlőnek lenni. A két leolvasás különbségét $l_f - l_a = L$ "b"-vel szorozva a keresett távolságot kapjuk. Példánkban, mivel $b = 100$ és $l = 15.9$ cm, azért

$$T = 1590 \text{ cm} = 15.9 \text{ m}$$

lesz. Az "l" és "T" értékeket összehasonlítva látjuk, hogy a leolvasott "l" érték mindjárt a méterekben kifejezett távolságokat adja. Láthatjuk tehát hogy ezzel az eljárással a távolságot deciméter-pontossággal kapjuk meg. Minthogy a fent leírt esetben mindkét távolságmérő szálnál becsülni kell ezek képének helyzetét a lécs képén, ami hibabővelést jelent, célszerű a távcső föl-, vagy lebillentésével az egyik távolságmérőszál képét a hozzá legközelebb álló főosztásrész képével összevágatni /2./ ábrán az alsó szálat a 4.-es osztással./ és így ezt le tudjuk olvasni, tehát csak a másik szálnál kell becsülnünk.

A távolságmérés pontossága függ az "a" és "b" értékek pontosságától. Ezt a következőképen határozzuk meg: Közel vízszintes terepen pontosan kimérünk annyiszor 10 vízszintes egységet, amekkora távolságig a távolságmérőt használhatjuk /tehát 80-100 m/. Ezután a távolság végpontjában fölállunk a vizsgálandó műszerrel, az egyes kimért pontokba fölállított lécről pedig leolvasást végzünk:



Lesz:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= b l_1 + a \\ T_2 &= b l_2 + a \\ T_3 &= b l_3 + a \end{aligned} \right\} \begin{aligned} T_2 - T_1 &= b / l_2 - l_1 / \\ T_3 - T_2 &= b / l_3 - l_2 / \end{aligned}$$

s innen:

$$b = \frac{T_2 - T_1}{l_2 - l_1} = \frac{T_3 - T_2}{l_3 - l_2} \dots$$

és

$$a = T_1 - b l_1 = T_2 - b l_2 \dots$$

Mivel azonban megfigyeléseink hibákkal vannak terhelve, ha más és más egyenletpárokból számítjuk a "b" értéket, különböző, egymástól eltérő értékeket kapunk. Nekünk azonban mind "b", mind pedig "a" legvalószínűbb helyes értékre van szükségünk. Mivel két egyenlet helyett "n" egyenletünk van, számításainkat a kiegyenlítő-számítás II. csoportja szerint normál-egyenletekkel végezzük.

Példa. Wild T.O busszola-theodolit Reichenbach féle optikai távolságmérőjének szorzó- és összeadóállandójának meghatározása:

Szalaggal mért hossz	Lécleolvasás			$\frac{l_o + l_f}{2} = l_x$	$l_f - l_o$	Súly.
	also (l _o)	középső (l _k)	felső (l _f)			
10	1116	1166	1217	1167	101	$\frac{1}{10} \times 420 = \frac{42}{1} = 42$
20	0765	0865	0965	0865	200	$\frac{1}{20} \times 420 = \frac{42}{2} = 21$
30	1112	1261	1411	1262	299	$\frac{1}{30} \times 420 = \frac{42}{3} = 14$
40	1000	1202	1403	1202	403	$\frac{1}{40} \times 420 = \frac{42}{4} = 11$
50	0900	1151	1401	1151	501	$\frac{1}{50} \times 420 = \frac{42}{5} = 8$
60	1110	1410	1710	1410	600	$\frac{1}{60} \times 420 = \frac{42}{6} = 7$
70	1141	1492	1841	1491	700	$\frac{1}{70} \times 420 = \frac{42}{7} = 6$
80	1510	1911	2311	1911	802	$\frac{1}{80} \times 420 = \frac{42}{8} = 5$

$$T = b l + a$$

$$b = b_0 + x \quad a = a_0 + y$$

$$T = /b_0 + x/l + /a_0 + y/$$

$$l x + y = T - l b - a$$

$$b_0 = 100$$

$$a_0 = 0$$

Feltételi egyenletek:

$$\begin{aligned} 0.101 x + y &= - 0.1 \\ 0.200 x + y &= 0.0 \\ 0.299 x + y &= + 0.1 \\ 0.403 x + y &= - 0.13 \\ 0.501 x + y &= - 0.1 \\ 0.600 x + y &= 0.0 \\ 0.700 x + y &= 0.0 \\ 0.802 x + y &= - 0.2 \end{aligned}$$

n	a	b	l	p	paa	pab	pal	pbb	pbl
1	0.101	1	-0.1	42	0.428	4.242	-0.4242	42	-4.2
2	0.200	1	0.0	21	0.840	4.200	0.0000	21	0.0
3	0.299	1	+0.1	14	1.252	4.186	0.4186	14	1.4
4	0.403	1	-0.3	11	1.786	4.433	-1.3299	11	-3.3
5	0.501	1	-0.1	8	2.008	4.008	-0.4008	8	-0.8
6	0.600	1	0.0	7	2.520	4.200	0.0000	7	0.0
7	0.700	1	0.0	6	2.940	4.200	0.0000	6	0.0
8	0.802	1	-0.2	5	3.216	4.010	-0.8020	5	-1.0
Σ				114	14.990	33.479	-2.5383	114	-7.9

A normálegyenletek:

$$[p a a] x + [p a b] y = [p a l] \quad ; \quad 14.990 x + 33.479 y = - 2.5383$$

$$[p a b] x + [p b b] y = [p b l] \quad ; \quad 33.479 x + 114 y = - 7.9$$

[paa]	[pab]	-[pal]	[pbb]	[pbl]
+14.990	+33.479	+2.5383	+ 114	+ 7.9
	+ 2.2334		+ 74.772	+ 5.669
			+ 39.228	+ 2.231

$$y = \frac{-2.231}{+39.228} = - 0.0569 \quad ; \quad x = \frac{-2.5383 - 33.497 \cdot (-0.0569)}{+ 14.990}$$

$$y = - 0.0569 \quad ; \quad x = - 0.0422$$

A normálegyenleteket a Gauss-féle kiküszöbölési shéma szerint oldottuk meg. /1. hibaszámítás/.

Ellenőrzésül:

n	a	b	P	ax	by	$\frac{u}{ax+by}$	$\frac{v}{u-l}$	pav	pbv	pvv
1	0.101	1	42	-0.0043	-0.0569	-0.0612	+0.0388	+0.1646	+1.6296	0.06322848
2	0.200	1	21	-0.0084	-0.0569	-0.0653	-0.0653	-0.2743	-1.3713	0.08954589
3	0.299	1	14	-0.0126	-0.0569	-0.0695	-0.1695	-0.7095	-2.3730	0.40222350
4	0.403	1	11	-0.0170	-0.0569	-0.0739	+0.2261	+1.0023	+2.4871	0.56233331
5	0.501	1	8	-0.0211	-0.0569	-0.0780	+0.0220	+0.0882	+0.1760	0.00387200
6	0.600	1	7	-0.0253	-0.0569	-0.0822	-0.0822	-0.3452	-0.5754	0.04729788
7	0.700	1	6	-0.0295	-0.0569	-0.0864	-0.0864	-0.3629	-0.5184	0.04478976
8	0.802	1	5	-0.0338	-0.0569	-0.0907	+0.1093	+0.4383	+0.5465	0.05973245
								+0.0015 ÷ 0 [pav]	+0.0011 ÷ 0 [pbv]	1.27302327 [pvv]

$$b = b_0 + x = 99.9577$$

$$a = a_0 + y = 0.0569$$

$$m_0 = \sqrt{\frac{[p v v]}{[p] - r}} = \sqrt{\frac{1.27302327}{114 - 2}} = \sqrt{0.011366279196} = \pm 0.1066658847$$

A súlykoefficiensek számítása:

$$\begin{aligned} [p a a] Q_{11} + [p a b] Q_{12} &= 1 \\ [p a b] Q_{11} + [p b b] Q_{12} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.990 Q_{11} + 33.479 Q_{12} &= 1 \\ 33.479 Q_{11} + 114 Q_{12} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [p a a] Q_{21} + [p a b] Q_{22} &= 0 \\ [p a b] Q_{21} + [p b b] Q_{22} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14.990 Q_{21} + 33.479 Q_{22} &= 0 \\ 33.479 Q_{21} + 114 Q_{22} &= 1 \end{aligned}$$

[paa]	[pab]	-l	[pbb]	-l
14.990	33.479	-1	114	0
			-74.772	+2.2334
			+39.228	+2.2334

[paa]	[pab]	-l	[pbb]	-l
14.990	33.479	0	114	-1
			-74.772	0
			+39.228	-1

$$Q_{12} = \frac{-2.2334}{+39.228} = -0.05693$$

$$Q_{22} = \frac{+1}{+39.228} = +0.02549$$

$$Q_{11} = \frac{+1 - 33.479 \cdot (-0.05693)}{+14.990} = +0.19386$$

$$Q_{21} = \frac{0 - 33.479 \cdot 0.02549}{+14.990} = -0.05693$$

$$m_x = m_0 \sqrt{Q_{11}} = 0.1067 \sqrt{0.19386} = \pm 0.0470$$

$$p_x = \frac{1}{Q_{11}} = \frac{1}{0.19386} \div 5$$

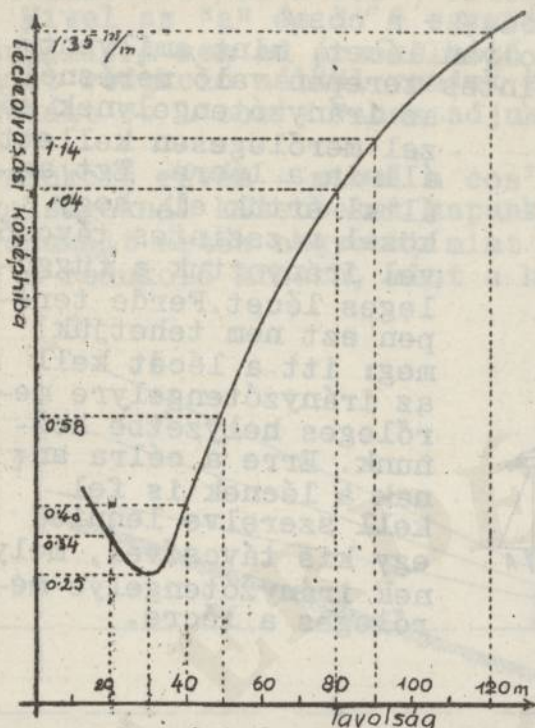
$$m_y = m_0 \sqrt{Q_{22}} = 0.1067 \sqrt{0.02549} = \pm 0.0170$$

$$p_y = \frac{1}{Q_{22}} = \frac{1}{0.02549} \div 39$$

Végeredményben tehát:

a szorzóállandó: $b = 99.9577 \pm 0.0470$; súlya: 5
az összeadóállandó: $a = -0.0569 \pm 0.0170$; " 39

A műszerállandók hibáján kívül hiba származik a távolságban a lécek leolvasásánál elkövetett hibából is. Ez a hiba függ a szál látászólagos



vastagságától, vagyis a szál mögötti holtterétől. Nagy távolságban lévő lécnél a távolságmérő szál teljesen elfedhet egy centiméteres osztást a lécen, így a tizedcentiméterek becslése bizonytalan. Kis távolság esetén pedig a léccentiméteres osztásához viszonyítva a szál túl vékony és ebből származik a leolvasási bizonytalanság. Az ábra különböző távolságokban meghatározott léccleolvasási középhibákat tüntet fel. Eszerint a léccleolvasás hibája a legkisebb 20-30 m távolság között ezentul erősen nő. Ezért a Peichenbach féle távolságmérőt csak legföljebb 100 m-ig /50-60 ölig/ szabad használni, mert itt a bizonytalanság már igen nagy.

Keressük, hogy az eddig tárgyal hibákból milyen hiba ered a távolságban ΔT . Mért értékek a következők: l , a , b , ezek középhibája: Δl , Δa , Δb . Lesz:

$$\Delta T = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial b} \cdot \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial l} \cdot \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial a} \cdot \Delta a\right)^2} = \sqrt{(1 \Delta b)^2 + (b \Delta l)^2 + (\Delta a)^2}$$

A Δa a² elhanyagolható, mert igen kicsi, pontosan meg tudjuk határozni az "a" értékét. Így tehát a távolságmérésben elkövetett hiba lesz:

$$\Delta T = \sqrt{(1 \Delta b)^2 + (b \Delta l)^2}$$

Látjuk tehát, hogy minél kisebb a szorzóállandó, annál kisebb az elkövetett ΔT hiba is.

A Porro és Wild féle műszereknél, az u.n. anallatikus távcsöveknél nincs összeadóállandó, mert a tárgylencse-rendszer ekvivalens-lencséjének fókuszusa a műszer függőleges tengelyébe esik. Ebben az esetben:

$$\Delta T = \sqrt{\left(T \frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(T \frac{\Delta l}{l}\right)^2}$$

A relatív hiba pedig:

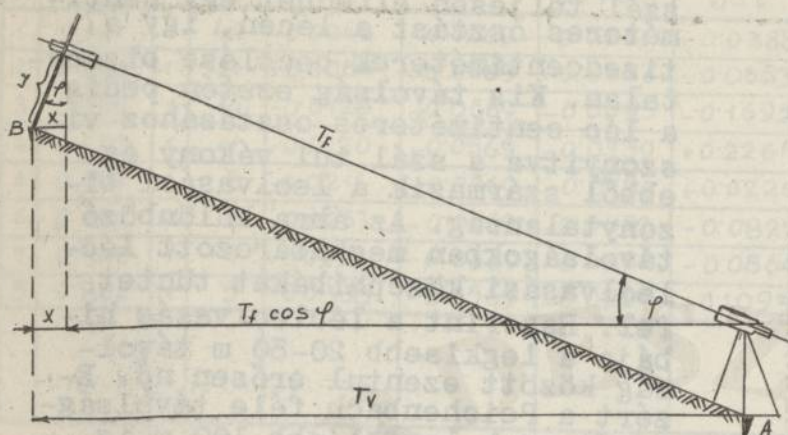
$$\frac{\Delta T}{T} = \sqrt{\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2}$$

Átlagosan 0.5 % pontossággal szoktak számolni. Távolságmérésnél vigyázni kell arra, hogy a távolságmérőszál a léccet túl mélyen ne érje, mert ebben az esetben a két mérőszálhoz érkező sugarak refractiója igen különböző lesz és így a léccleolvasás erős hibával lesz terhelve. Általában 50 cm alatt nem szabad leolvasást végezni.

A Reichenbach féle távolságmérő használata ferde terepen.

Ha a méréshez vízszintes mérőlécet használunk, a ferde távolságot T_c közvetlenül kapjuk. Ehhez azonban függőleges mérőszálakra van szükségünk és egy kis távcsőre, amely a lécre úgy van szerelve, hogy irányzó tengelye merőleges a lécre. Ha mármint ezt a távcsövek össze-irányzom a műszer távcsövével, akkor ezáltal a léccet a műszer irányzó tengelyére merőleges helyzetbe hoztam. A ferde távolságból és a hajlásszögből azután a már ismert módon számíthatjuk a vízszintes hosszát:

$T_v = T_f \cdot \cos \varphi = b l + a / \cos \varphi = b l \cos \varphi + a \cos \varphi$
De ferde terepen is használhatunk ugyanolyan lécezt, mint amilyent vízszintes terepen használtunk. A vízszintes terepen való mérésnél az irányzótengelynek közel merőlegesen kellett állnia a lécre. Ezt az által értük el, hogy közel vízszintes távcsővel irányoztuk a függőleges lécezt. Ferde terepen ezt nem tehetjük meg: itt a lécezt kell az irányzótengelyre merőleges helyzetbe hoznunk. Erre a célra annak a lécnak is fel kell szerelve lennie egy kis távcsővel, melynek irányzótengelye merőleges a lécre.



Az ábra alapján írhatjuk, hogy

$$T_v = T_f \cos \varphi + x$$

de ugyancsak az ábrából írhatjuk, hogy

$$\sin \varphi = \frac{x}{I}, \text{ s innen } x = I \sin \varphi$$

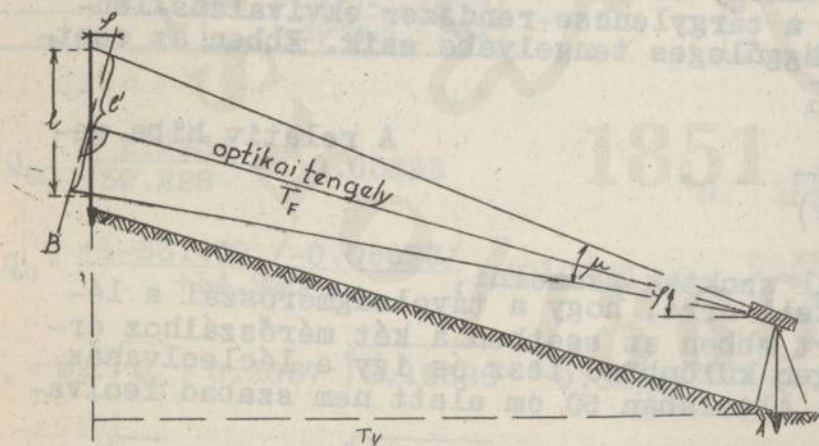
x-nek ezt az értékét behelyettesítve az előbbi egyenletbe lesz:

$$T_v = T_f \cos \varphi + I \sin \varphi = b l \cos \varphi + a \cos \varphi + I \sin \varphi$$

hol "l" a két távolságmérő-szál közé eső léchosszat, "I" pedig a vízszintes irányzószálra terjedő léchosszat irányzás magasságát jelenti.

Hogy az egyenlet utolsó tagját kiejtsük eljárhatunk úgy, hogy a lécen lévő távcsőhöz egy függélyezőt erősítünk és a lécezt visszatojzuk addig, amíg a függélyező kerül a "B" pont fölé.

Minthogy azonban a lécen rendesen nincs távcső, azért ezt az eljárást a gyakorlatban nem szokták alkalmazni, hanem ferde terepen is függőleges léccel dolgoznak.



Ebben az esetben - mivel a levezetett tétel csak arra az esetre vonatkozik, ha a lécezt merőleges az irányzótengelyre, azért a függőleges léccről leolvasott léchosszat át kell számítani arra a léchosszra, amelyet akkor nyernénk, ha a lécezt merőleges volna az irányzótengelyre.

Jó közelítéssel, mivel a "mu" képképző szög kicsike, felvehetjük, hogy a távolságmérő szálaktól menő sugarak is merőlegesen érik a lécezt /l'-et/ s ezért írhatjuk, hogy:

$$\frac{l'}{2} = \frac{l}{2} \cos \varphi$$

Innen "l'" értékét kifejezve és T_f képletébe helyettesítve:

$$T_f = b l \cos \varphi + a$$

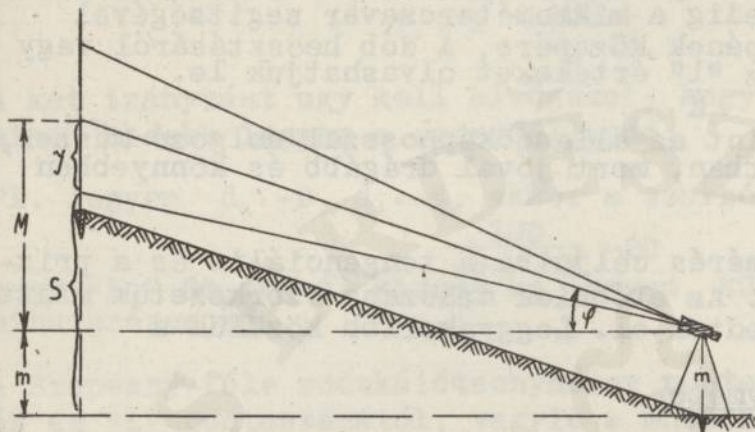
kálva:

$$T_v = T \cos \varphi = b l \cos^2 \varphi + a \cos \varphi$$

vagy vízszintesre redukálva:

A redukálásra /az $1 \cos^2 \varphi$ értékekre/ táblázatok állnak rendelkezésre. Mivel az "a" és " φ " egyaránt kis érték szokott lenni, az "a" redukálásra nem ad érzékelhető hosszváltozást, ezért az összeadóállandót redukció nélkül vonjuk be számításainkba és rendszeren a már redukált " $b 1 \cos^2 \varphi$ "-hez adjuk.

A redukció révén - mivel a $\cos^2 \varphi$ mindig kisebb az egységnél - a mért távolságoknál kisebbeket kapunk. Kis φ esetén mégis előfordul, hogy a redukált érték nagyobb, mint a ferde érték. Ez akkor áll elő, amikor a redukció kisebb, mint a hozzáadóállandó.



A távolságméréssel együtt meghatározhatjuk a szintkülönbségeket is. Ehhez le kell olvasnunk a vízszintes irányszál által elvágott irányzási-magasságot /I/ és le kell mérnünk az "m" műszer-magasságot.

Az ábra alapján:

$$s + I = M + m$$

$$s = M + m - I$$

vagy $\operatorname{tg} \varphi$ -vel beszoroz-

De: $M = T \cdot \operatorname{tg} \varphi = b 1 \cos^2 \varphi + a \cos \varphi / \operatorname{tg} \varphi$

$$M = b 1 \cos^2 \varphi \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} + a \cos \varphi \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$M = b 1 \sin \varphi \cos \varphi + a \cdot \sin \varphi$$

de: $\sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sin 2 \varphi$, tehát

$$M = \frac{1}{2} \cdot b 1 \sin 2 \varphi + a \sin \varphi$$

M-nek ezt az értékét

"s" képletébe helyettesítve:

$$s = \frac{1}{2} \cdot b 1 \sin 2 \varphi + a \sin \varphi + m - I$$

Az $a \sin \varphi$ értéket rendszeren elhanyagoljuk, helyesebben az "a"-t behozzuk a "b.1" mellé összeadóul $b 1 + a$. Az $\frac{1}{2} \sin 2 \varphi$ értékek táblázatból olvashatók ki.

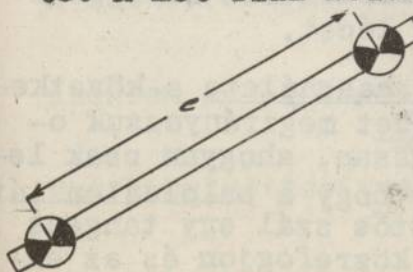
A Reichenbach-féle távolságmérő birtokhatárvonalak mérésére kis pontossága miatt nem alkalmas, ellenben jól használható erdőgazdasági belső vonalak mérésére, továbbá topográfiai felvételekhez.

Változó képhosszal mérő távolságmérők.

Ezeknél a távolságmérőknél két vízszintes szál van a távcső látómezőjében. Az egyik, a vízszintes irányszál fix, a másik ez alatt van és egy mikrométercsavar segítségével önmagával párhuzamosan eltolható. A két szál közötti távolság a mikrométercsavaron lévő dobbról le-

olvasható, tehát a "K" érték mérhető. A lécszála állandó hosszúságú, az állandó-hossz két tárcsával van megjelölve /tárcsás-léc/.

A távolság képletének levezetése ugyanaz, mint a Reichenbach-féle távolságmérőnél, csak itt az "l" állandó és a "K" változik. Tehát:



$$T = \frac{f}{K} \cdot l + a = f \cdot l \frac{1}{K} + a$$

Mivel "f.l" állandó érték, "b"-t írhatunk helyette, vagyis lesz:

$$T = \frac{b}{K} + a$$

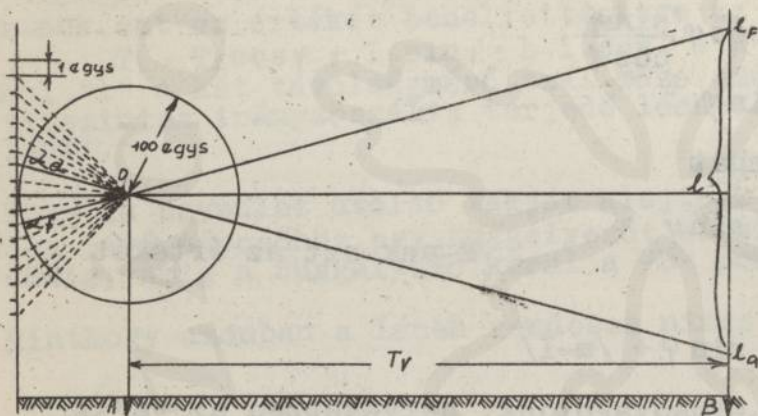
A műszer használata a következő: a függőlegesen felállított léceket a távcsővel úgy irányozzuk meg, hogy a fix távolságmérő-szál képe a léce felső végén lévő tárcsa képének középpontjával vágjon össze. Az elmozditható szál képét pedig a mikrométercsavar segítségével ráállítjuk az alsó tárcsa képének közepére. A dob beosztásáról vagy a "K", vagy pedig mindjárt az "l" értékeket olvashatjuk le.

Pontosabb eredményeket ad, mint az állandóképhosszal dolgozó műszer, mégsem terjedt el a gyakorlatban, mert jóval drágább és könnyebben sérül meg, mint az előbbi.

A precíziós optikai távolságmérés céljaira a tengenciális és a prizmás távolságmérők szolgálnak. Az előbbieket nehézkes szerkezetük miatt a gyakorlatban nem igen terjedtek el. Leggyakoribb közülük a

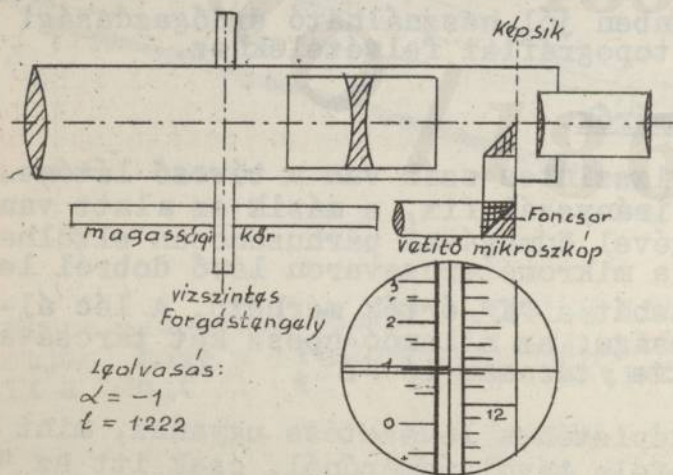
Szepessy-féle redukáló- tachyméter.

A tangenciális távolságmérők elmélete a következő: a műszer magassági körének sugara adott érték: 100 egység /tetszőleges méretarányban/.



A magassági-körnek a vízszintes optikai tengelyre merőleges, képzett érintője is osztással van ellátva: az osztásrészek nagysága: 1 egység ugyanabban a méretarányban, mint amiben a 100 egységet mértük. Ezeket az osztásokat azután sugárirányban a magassági-körre vetítik, s így azon tangens-osztást kapnak. Tehát a magassági-kör beosztásainak egymástól való távolságai nem egyenlők, hanem az érintési pontok távolsága a "0"-tól állandóan rövidül. Éppen ezért az osztást nem lehet mechanikusan osztógéppel elővégezni, hanem mindenegybes értéket a műszer résznek kell beállítania.

volsága a "0"-tól állandóan rövidül. Éppen ezért az osztást nem lehet mechanikusan osztógéppel elővégezni, hanem mindenegybes értéket a műszer



Olvasás:
 $\alpha = -1$
 $l = 1222$

A magassági-kör osztásai egy mikroszkóp és prizma segítségével be van vetítve a távcsőbe, úgy hogy a távcső látómezőjének bal felében a magassági-kör látszik és csak a jobb fele használható frányzásra, illetve itt kell beállítani a léceket.

A műszer használata a következő: a léceket megirányozzuk olyan magasan, ahogyan csak lehet, úgy hogy a baloldalon látható kettős szál egy tangens osztást közrefogjon és az ennek megfelelő "l" léccelolva-

sást végezzük ott, ahol a távcső jobb felében az egyes vízszintes szál a lécezt éri. Ugyanígy végezzük az alsó leolvasást is.

A távcső két helyzete két hasonló háromszöget határoz meg: $O l_f l_a$ - $O d_f d_a$. A hasonlóság alapján írhatjuk:

$$\frac{T_v}{l_f - l_a} = \frac{100}{d_f - d_a}$$

$$T_v = 1 \frac{100}{d_f - d_a}$$

A két irányzást úgy kell elvégezni, hogy a $|d_f - d_a| > 1$ legyen, hogy minél kisebb legyen a szorzóállandó.

Pl. legyen $d_a = -9$, $d_f = -4$, akkor a szorzóállandó:

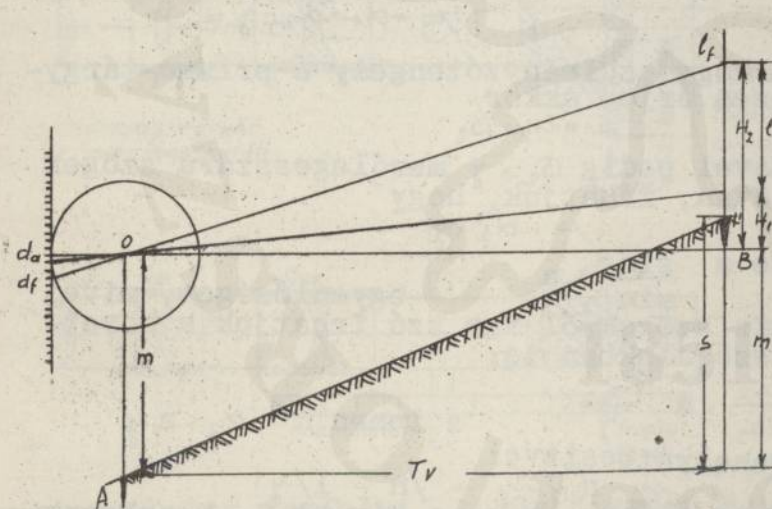
$$\frac{100}{-9 - (-4)} = 20$$

hogy " l_a " 60 cm-nél kisebb ne legyen, különben a refrakció okozta hiba erősen nő. Arra is ügyelni kell,

A Szepessy-féle redukálótachyméter pontossága függ az osztásrészek és az " l " pontosságától, vagyis a műszer-hibáktól és a megfigyelés hibáitól.

Megfigyelés alatt a léznek nem szabad mozognia, ezért ki van támasztva és függőlegesnek kell lennie, ami a lécen lévő libellával ellenőrizhető. A kataszternél használnak felfüggesztett lécezt is.

Távolságmérés ferde terepen.



Az ábra szerint itt is két hasonló háromszögünk van, amelyekben az alapok és a magasságok között egyenes arány van. Tehát:

$$\frac{T_v}{l} = \frac{100}{d_f - d_a}$$

innen

$$T_v = 1 \frac{100}{d_f - d_a}$$

Vagyis ugyanazt a képletet kaptuk, mint vízszintes terepnél, tehát ezzel a műszerrel közvetlenül a vízszintes hosszat kapjuk, bár-

milyen terepen is mérünk: ezért hívják ezt a műszert "redukáló - tachyméternek".

A műszerrel szintkülönbségeket is mérhetünk:

$$s + l_a = M_1 + m$$

$$s = M_1 + \frac{m}{m - l_a}$$

Azonban az l_a CD és a CO d_a hasonló háromszögekből:

$$\frac{M_1}{T_v} = \frac{d_a}{100} \quad s \text{ innen}$$

$$M_1 = 0.0 T_v \cdot d_a$$

Ezt behelyettesítve "s" képletébe:

$$s = 0.0 T_v \cdot d_a + \frac{m}{m - l_a}$$

Az így kiszámított szintkülönbséget ellenőrizhetjük az 1 CD-COD háromszögek segítségével:

$$s + l_f = M_2 + m$$

$$s = M_2 + m - l_f /$$

De mert $\frac{M_2}{T_v} = \frac{d_f}{100}$

továbbá

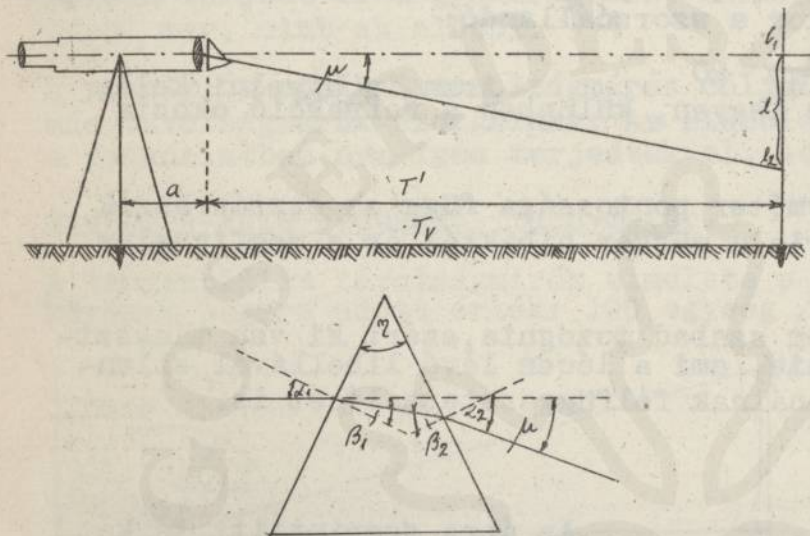
$$M_2 = 0.0 T_v d_f$$

lesz

$$s = 0.0 T_v d_f + m - l_f /$$

Méréskor különösen arra kell figyelni, hogy az ellenőrzőlibella mindig bejuttassék. Ha a magassági-kör nóniuszának indexe a magassági-kör "0"-án áll, akkor a távcső libellájának be kell játszanania és az optikai tengelynek vízszintesnek kell lennie. A távolságmérésnél elérhető pontosság gondos mérésnél 0.1 %.

Prizmás távolságmérők.



Ezeknél a műszeréknél a távcső tárgylencséje elé egy prizma helyezhető, amely az irányzósugarat eltéríti irányától. Az eltérítés szöge függ a prizma nyílásszögétől γ és törési együtthatójától n . Az optikai részben tárgyaltak alapján:

$$\sin \alpha_1 = n \sin \beta_1$$

$$\sin \alpha_2 = n \sin \beta_2$$

$$\mu = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2$$

De mert $\beta_1 + \beta_2 = \gamma$, lesz a "μ" értéke:

$$\mu = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma$$

Ha a prizmat úgy helyezzük el, hogy az irányzótengely a prizma tárgylencse felőli oldalát merőlegesen érje, akkor

$$\mu = \alpha_2 - \beta_2$$

Mivel pedig $\beta_2 = \gamma$ merőlegesszárú szögek lévén, írhatjuk, hogy

$$\mu = \alpha_2 - \gamma$$

De a $\frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2} = n$

egyenlőséget, mivel

kis szögekről van szó írhatjuk a következő alakban is:

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} = n = \frac{\alpha_2}{\gamma}$$

s innen

$$\alpha_2 = n \gamma$$

Behelyettesítve:

$$\mu = n \gamma - \gamma = (n - 1) \gamma$$

Ennek a prizmaelhelyezésnek az az előnye, hogy a kívánt "μ" szögnek megfelelő "γ" nyílású prizmat csiszoltathatunk.

Mérésnél a lécezt először prizma nélkül irányozzuk meg és leolvassuk az "l₁" értéket. Ezután a prizmat a távcső elé hajtjuk és leolvassuk az "l₂" értéket. Most már képezhetjük az $l_1 - l_2 = l$ -et. Mivel a prizma nyílásszöge állandó és mindig ugyanolyan helyzetben kerül a távcső elé, azért az optikai /és irányzó/ tengely irányváltozása is állandóan a "μ" szögnek megfelelő lesz. A mért vízszintes távolság lesz:

de: $\text{tg } \mu = \frac{l}{T}$, s innen

$$T = T' + a$$

$$T' \cdot \frac{1}{\text{tg } \mu} = l \cdot \text{ctg } \mu$$

ugyananpál a műszernél konstans szorzóállandó, tehát a mért hossz lesz:

$$T = b l + a$$

hol "a" a prizma távolsága a műszer függőleges tengelyétől. A "μ"-t rendszerint úgy választják meg, hogy $\text{ctg } \mu = 100$ legyen $\mu = 0^\circ 35' 37''$

A prizmás műszerek hátránya az, hogy kétszer kell velük leolvasni, miért is a lécezt ki kell támasztani és ügyelni kell arra, hogy a távcső el ne mozduljon, amikor a prizmat a tárgylencse elé fordítjuk.

A lécnak merőlegesnek kell lennie az irányzótengelyre. Ezért ferde terepen, ha vízszintes léccel dolgozunk, akkor azon egy a merőleges irányt kijelölő távcsőnek kell lennie, ha pedig függőleges lécezt használunk, akkor először az "l"-et át kell számítanunk "l"-re:

$$l_1 = l \cos \varphi$$

A ferde távolság pedig lesz:

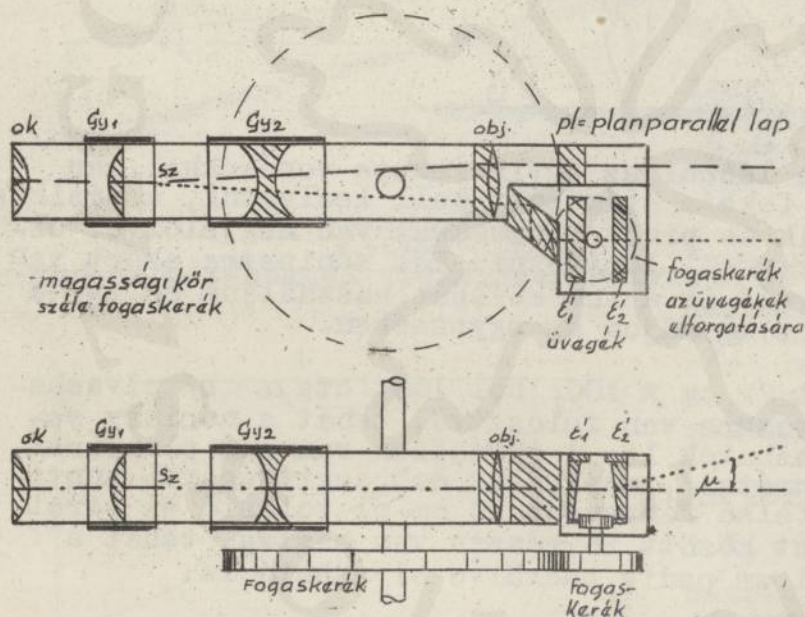
$$F_1 = b l_1 + a = b l \cos \varphi + a$$

A ferde távolságból számíthatjuk a vízszintes hosszat:

$$T_v = T_f \cos \varphi = b l \cos^2 \varphi + a \cos \varphi$$

A prizmás távolságmérők pontossága jóval nagyobb, mint a Reichenbach féle távolságmérőké. Gondos munka mellett 0.08 %-nak vehetjük a pontosságukat.

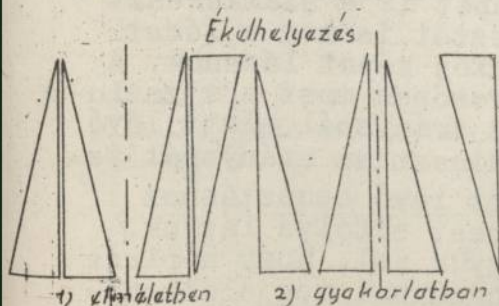
Bosshardt-Zeiss-féle kettős képes távolságmérő.



A Bosshardt schweitzzi kataszteri mérnök által szerkesztett és a Zeiss cég által gyártott távolságmérő távcsővében egyidejűleg látjuk a rendes és a prizma által eltolt képet: és pedig a távcső felső felében a fénysugár változatlanul halad keresztül, az alsó felében pedig az ékek által eltolt fénysugár. Hogy szögmérésekhöz az eltolt sugár ne zavarjon, azért a "Gy1" gyűrű elfordításával az eltolt képet el lehet zárni, így csak a rendes fénysugarat lehet észlelni.

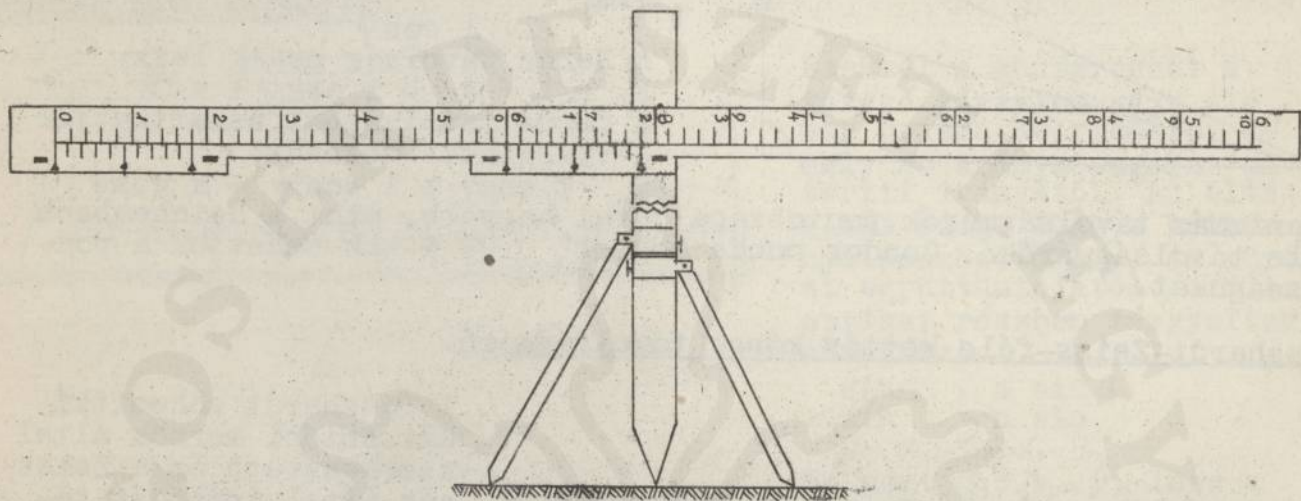
A "Gy2" gyűrű a parallax megszüntetésére szolgál: forgatása által a homorú lencsét toljuk el addig, amíg az irányzott pontot élesen nem látjuk. A kép eltolására az E1 és E2 üvegékek szolgálnak. Ezek együttes nyílásszöge egy olyan szög, amely mellett a $\text{ctg } \mu = 100$.

A két prizma egy vízszintes tengely körül elforgatható egy fogaskerék segítségével. A fogaskereket a magasságikör forgatja, melynek kerülete van fogazással ellátva. A két prizma forgásiránya ellentétes: így forgatva őket megváltozik az együttes nyílásszögük és ezáltal a "μ" is. Ha 180°-al forgatjuk el a prizákat, akkor a kettő együtt mint egy planparallel lap működik, tehát a képet



nem tolja el mivel a távcsőben a prizmak fordítva vannak és a fény-sugár merőlegesen éri őket. Mivel a $\text{ctg } \mu$ az elforgatás szögeinek $\cos$ -a arányában változik, azért ferde irányzásnál is közvetlenül a vízszintes távolságot kapjuk.

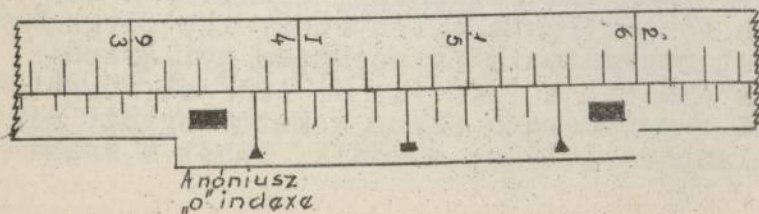
A távolságmérés mindig vízszintes léccel történik. Hogy a lécet az irányzó tengelyre merőleges helyzetbe lehessen hozni, azért a lécre egy kis távcső van szerelve és mellette egy kis kollimátor van, amely a párhuzamos sugarakat egy keskeny téglalap alakú nyíláson bocsátja át. A műszertől ellenőrizhető, hogy a lécc merőleges-e az irányzó tengelyre, mert ebben az esetben a kollimátor világít, tehát egy éles fehér vonás látható. A lécc egy kitámasztott függőleges rúdon van elhelyezve. Osztása 2 cm-es.



Két nóniuszt is találunk a lécen: az egyik fekete vonásokkal van megjelölve, ezzel a felső fekete számozást kell leolvasni, a másik a 60 cm-es osztásnál kezdődik és piros vonásokkal van megjelölve, ezzel az alsó piros számozást kell leolvasni. Két nóniuszra azért van szükség, hogy kis távolságnál is a lécc közepét használjuk és így a függőleges irányzók benne maradjon az egyenesben.

A lécről közvetlenül 2 m-t /2 cm x 100; hol $100 = \text{ctg } \mu = b/$ olvashatunk le. A nóniusz 10 = n részre van felosztva, tehát a nóniusz segítségével a 20 cm-ek olvashatók le. A távcsőben van egy planparalel lap / P_e / is /üveg mikrométer/, amely egy dob segítségével annyira fordítható el, hogy a felső fénysugár 20 cm-el tolható el paralel. A dob a két ütközőpont között 20 részre van osztva, tehát a dobról 1 cm közvetlenül, 1 mm pedig becsülve olvasható le.

A mérés menete a következő: megirányozzuk egyszerű képpel a léccet úgy, hogy a függőleges irányzók a rud, a vízszintes szál pedig a vízszintes /távolságmérő-/ lécc közepén fekszen. Előzőleg az okulár csavar segítségével a szálkeresztet szemünk éleslátási távolába hoztuk, most pedig a parallaxis-csavarral a lécc képét is a szálkereszt síkjába hozzuk: tehát élesen látjuk a szálkeresztet is meg a léccet is. Ezután elfordítjuk a "Gy," gyűrűt, hogy kettős képet lássunk. A távcsőben most a vízszintes irányzók alatt lévő nóniuszt az irányzók felett lévő beosztáshoz képest elfolva látjuk. Tegyük fel, hogy a piros vonásokkal megjelölt nóniusz látszik a távcsőben.

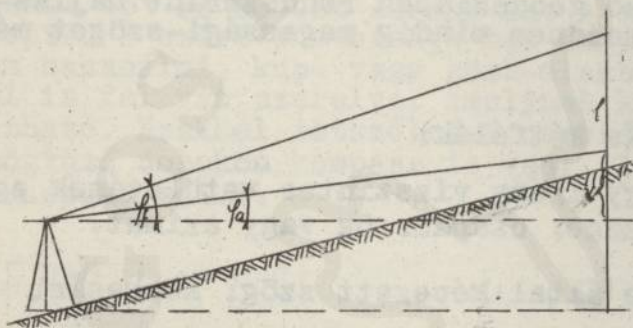


Ekkor leolvasást végzünk a nóniusz "0"-áig: ennek ábránkon 36 m felel meg. A nóniuszon sem a 6-os, sem pedig a 7-es nem vág: tehát vágatjuk a 6-os vonást azáltal, hogy az optikai mikrométerrel a vízszintes-szál feletti lécs képét eltoljuk. Ekkor a nóniuszról 1.2 m-et olvasunk le, míg a doból a centimétereket olvashatjuk le: legyen ez pl. 17 cm. Az egész leolvasás tehát lesz: $36 + 1.2 + 0.17 = 37.37$ m.

A Bosshardt-Zeiss féle távolságmérő egyike a legpontosabb optikai távolságmérőknek. Középhibája 100 m-en ± 3 mm, kedvezőtlen körülmények között is legfeljebb 1-2 cm. Ez annyit jelent, hogy a mérés pontossága gondos szalagmérés pontosságának felel meg, s így sokszögmenetek oldalhosszainak mérésére is használható.

Távolságmérés alapvonallal és szögméréssel.

Ezt a mérési módot különösen a katonai méréseknél alkalmazzák: alapvonallal és szögeértékkel történik. Az alapvonal vagy bázis vízszintes, vagy függőleges helyzetű lehet.



A mérést függőleges léchelyzet mellett a mellékelt ábra mutatja, melynek alapján írhatjuk, hogy:

$$\operatorname{tg} \varphi_a = \frac{x}{T_v}, \text{ innen } x = T_v \operatorname{tg} \varphi_a$$

$$\operatorname{tg} \varphi_f = \frac{l+x}{T_v}, \text{ innen } l+x = T_v \operatorname{tg} \varphi_f$$

Avagy "X" értékét behelyettesítve:

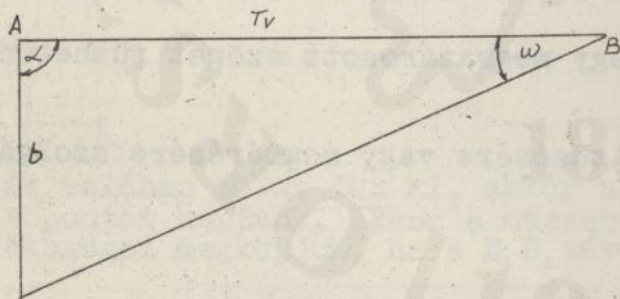
$$T_v \operatorname{tg} \varphi_f = l + T_v \operatorname{tg} \varphi_a$$

$$T_v / \operatorname{tg} \varphi_f - \operatorname{tg} \varphi_a = l$$

l

$$T_v \operatorname{tg} \varphi_f - \operatorname{tg} \varphi_a$$

Pontosabb méréseknél vízszintes helyzetű lécs, vagy bázisvonalat használunk. Ez utóbbit igen pontosan kell megmérnünk. A mérést bázis léccel szokták végezni, amelyen egy beosztásos inver szalag van kifeszítve.



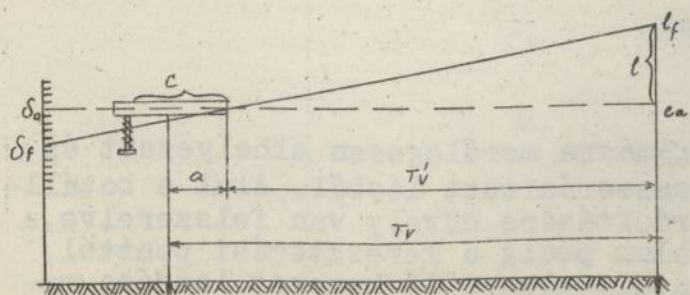
Az ábra alapján:

$$T_v = b \cdot \frac{\sin / \alpha + \omega /}{\sin \omega}$$

Hátránya ennek a hossz mérési eljárásnak, hogy sok munkával jár.

A Stampfer-féle távolságmérő.

Itt a stampfer-féle szintező műszereken lévő mikrométercsavart használhatjuk fel távolságmérésre. A mérés függőleges síkbeli háromszögek képzésén alapszik.



Az ábra alapján:

$$T_v = T_v' + a$$

$$\frac{T_v'}{l} = \frac{C}{\sigma_a - \sigma_f} \text{ s innen } T_v' = l \frac{C}{\sigma_a - \sigma_f}$$

$$T_v = l \frac{C}{\sigma_a - \sigma_f} + a$$

A gyakorlatban nem használják, mert hosszadalmas a kiértékelése, s így igen drága eljárás.

Méréskor az " α " és a " δ " értékeket vízszintes tővcsőhelyzet mellett olvassuk le. Erre a célra a távcsövet - és ezzel együtt az irányzó-vonalat is - az okulár közelében elhelyezett szintezőcsavarral emeljük vagy süllyesztjük az elől excentrikusan elhelyezett forgástengely körül. A szintezőcsavar egy indexet mozgat egy mm skála előtt a " δ " és " δ " értékeket erről a skáláról és a szintezőcsavar dobjáról olvassuk le.

Szögmérő műszerek.

A pontok kölcsönös fekvésének meghatározásához szükségünk van a pontokat összekötő egyenesek hosszán kívül, azok irányának, ill az egyenesek egymással bezárt szögeinek ismeretére is. Mindig függőleges és vízszintes síkbeli szögeket mérünk, ferde síkbelieket sohasem, mert térképeink vízszintes betületben készülnek.

A függőleges síkbeli szögeket mérhetjük vagy a vízszintestől: " ψ " /lejtőszög, hajlás vagy dőlésszög/, vagy a függőleges főiránytól: { /magassági- vagy zenit-szög/. Alsó geodéziában rendszerint hajlásszöget, felső geodéziában pedig majdnem mindig magassági-szöget mérünk.

A vízszintes vetületbeli szögek is kétfélék:

1./ egy vagy több mezei vonal vagy irány vízszintes vetületének egy állandó kezdőiránnyal képezett szöge: csapásszög vagy azimut.

2./ két irány vízszintes vetülete által képezett szög: közbezárt szög.

A vízszintes vetületbeli szögeket mindig az óramutató járásával egyező irányban mérjük.

A vízszintes vetületbeli szögek mérésére szolgáló műszerek két csoportba oszthatók.

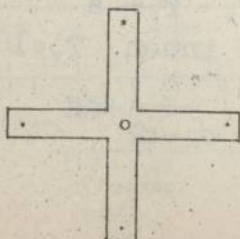
1./ amelyekkel közvetlenül csak egy meghatározott szöget tűzhetünk ki, vagy mérhetünk meg.

2./ amelyek tetszőleges szögek kitűzésére vagy megmérésére szolgálnak.

Az első csoportba tartoznak:

- 1./ a szögtűző léckereszt
- 2./ " hasáb
- 3./ " dob
- 4./ a tükrös szögtűző
- 5./ a szögtűző tükrör
- 6./ " prizma
- 7./ a tükröskereszt
- 8./ a kettős szögtűző prizma.

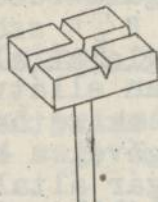
1./ A szögtűző léckereszt.



Áll két egymásra merőlegesen elhelyezett és középen összeerősített lécből. Alul a botállvány megerősítésére hüvely van felszerelve, a felső oldalon pedig a keresztezési ponttól egyenlő távolságban a léckereszt lapjára merőlegesen 4 tű vagy szeg van a lécekbe verve. Ezek segítségével történik az irányzás.

A léckereszt derékszögek kitűzésére szolgál, de kis pontossága miatt geodéziai célokra nem használható. /A pontosság vizsgálatát lásd a dioptránál/.

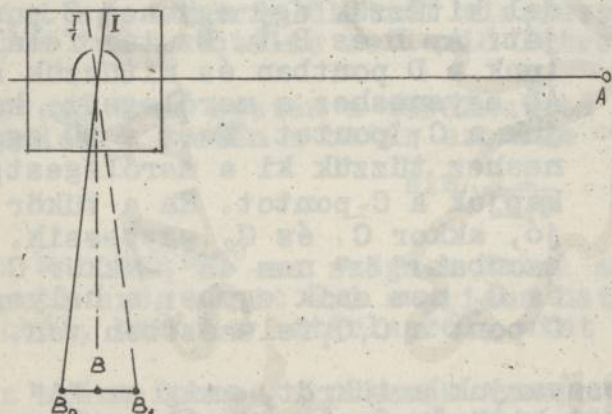
2./ A szögtűző hasáb.



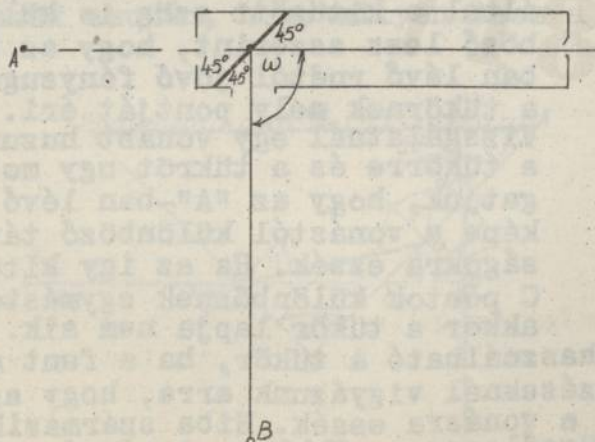
Négyzetes-alapu fahasáb, melynek felső lapjába két egymásra merőleges rés van fűrészelve. Ez is 90° -os szögek kitűzésére szolgál, de csekély pontossága miatt geodéziai célokra nem használható. Pontatlansága annál nagyobb, minél bővebb a két rés.

3./ A szögtűző dob.

Belül üres fémhasáb, vagy henger, alsó részén botállványra húzható hüvelylyel, oldalán több szemnyílással vagy szemhasadékkal és ezeknek megfelelően a szemben lévő oldalon tárgynyílásokkal, melyekben lószórszál van kifeszítve. Az irányzás a szemnyíláson és a tárgynyílásban kifeszített lószórszálon keresztül történik. Az irányvonalak egymással 45° és 90° -ot zárnak be. A szögtűző dob tulajdonképpen rövid dioptra s ezért pontossága nem nagy. Hogy ferde terepen is jól lehessen használni, kup- vagy gömb-alakban is készítik. Néha osztott körrel is fel van szerelve, amelynek középpontja körül a dioptra elforgatható. Ezekkel tetszőleges nagyságú szöget ki lehet tűzni. Egyes szögtűző dobokon kompasz is van: ilyenkor delejes csapásszögeket is mérhetünk velük.



jó és valóban 90° -ot tűz ki, akkor a "B" irány ugyanaz marad. Ha egy "B₂" pontot kaptunk, akkor a műszer hibás. Ebben az esetben a helyes derékszöget megkapjuk, ha a B₁ B₂ távolságot megfeleleztük.



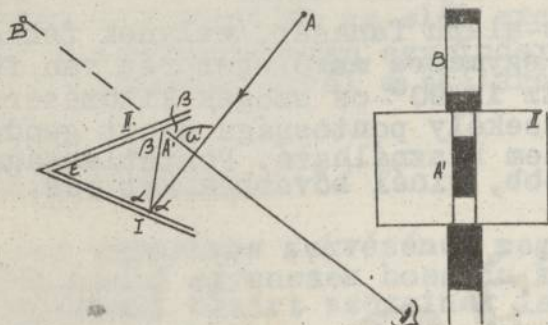
4./ A tükros szögtűző.

Ez egy hengeres cső, melynek egyik végén egy 0.1 mm átmérőjű szemnyílás van. A cső másik végén függőleges lószórszál van és a cső fél látómezejében egy fél-ellipszis alakú siktükör van 45° alatt elhelyezve. A tükör előtt a cső falában ablak van vágva. A kitűzött szög nagysága:

$$\omega = 180^\circ - /45^\circ + 45^\circ/ = 90^\circ$$

A gyakorlatban nem terjedt el.

5./ A szögtűző tükör.



Két egymáshoz "0" szög alatt hajló siktükörből áll. A tükrök egy igazító csavarokkal állítható fémfoglalatra vannak ráerősítve. Az igazítócsavarok segítségével az "ε" szög változtatható. A foglalat alsó odalán fogantyúval van ellátva, amelyre függélyező akasztható, hogy annak segítségével a beeső és visszavert sugár által bezárt szög csúcspontja levetíthető legyen a terepre. Szögtűzőtükörrel való kitűzésnél a tükröt úgy tartjuk, hogy az "A" kitűzőrud képe a II. tükrőben látható

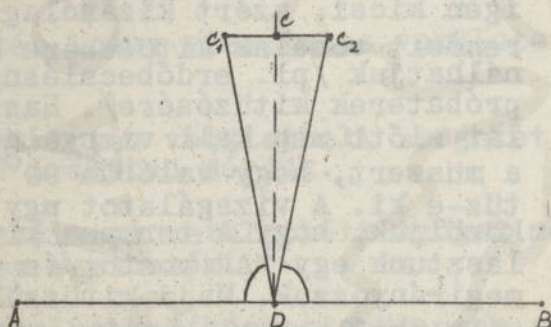
legyen. Ekkor a tükör fölötti ablakon át beintünk egy "B" kitűzőrudat a tükrőben látható kitűzőrud függőlegesébe. A kitűzőt szög nagysága:

$$\omega = 180^\circ - 2\beta + 180^\circ - 2\alpha = 2[180^\circ - (\alpha + \beta)]$$

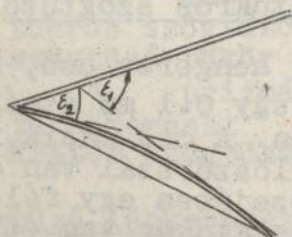
de $\epsilon = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, és így $\omega = 2\epsilon$

A tükörrel kitűzőt szög középpontja Jordán adatai szerint $\pm 2'$. Használatbavétel előtt a tükröket is meg kell vizsgálnunk. 90°-os szögtűzőnél először megvizsgáljuk, hogy az "ε" valóban 45°-e? Ezt

úgy végezzük el, hogy nagy gondal kitűzzük egy egyenes 3 pontját: A, D és B-t. Ezután felállunk a D pontban és kitűzzük az AD egyeneshez a merőlegest; kapjuk a C₁ pontot. Most a BD egyeneshez tűzzük ki a merőlegest; kapjuk a C₂ pontot. Ha a tükör jó, akkor C₁ és C₂ egybeesik. Ha azonban "ε" nem 45°, akkor C₁ és C₂ nem esik egybe: a helyes C pont a C₁C₂ felezésében van.



Ezután az igazítócsavarral addig csavarjuk a tükröt, amíg az "A" pont képe és a C pontban elhelyezett kitűzőrud egy függőlegesbe nem esik. Másik hibája lehet a szögtűző-tükörnek az, hogy nem sik a tükrőfelület. Ebben az esetben a tükrőfelület különböző pontjainak nézve az "ε" szög nem azonos, ezáltal a kitűzőt szög is különböző lesz aszerint, hogy az "A"-ban lévő rudtól jövő fénysugár a tükrőnek mely pontját éri.



Vizsgálatnál egy vonást húzunk a tükrőre és a tükröt úgy mozgathatjuk, hogy az "A"-ban lévő rud képe a vonástól különböző távolságokra essék. Ha az így kitűzőt C pontok különböznek egymástól, akkor a tükör lapja nem sik.

A hiba házilag nem javítható, de használható a tükör, ha a fent megjelölt vonásra igazítjuk ki és kitűzéseknél vigyázunk arra, hogy az "A"-ban lévő rud képe mindig erre a vonásra essék. Hiba származik abból is, ha a tükröt nem tartjuk függőlegesen. Ekkor u.i. ferde síkbeli derékszöget tűzünk ki, amelynek vízszintes vetülete már nem derékszög.

A tüköröket szokás fokivvel is ellátni, amelynek középpontja körül az egyik tükör elforgatható. A fokiv mindjárt kétszeres fokértékekkel van számozva, ezáltal nem a tükrök egymáshoz való hajlását, hanem a kitűzött szög nagyságát lehet róla közvetlenül leolvasni. Az ilyen tükörrel tetszőleges szöget lehet kitűzni vagy mérni.

A gyakorlatban nem terjedt el.

6./ A szögtűző prizma.

A szögtűző prizmák egyenletes-szövető, korona- vagy flintüvegből csiszolt 3, 4 vagy 5 oldalú hasábok. 90° vagy 180° kitűzésére szolgálnak.

A prizma belsejébe belépő fénysugár a törőfelület határán irányváltozást szenved, amint azt az optikai részben már láttuk. Tudjuk, hogy a fénysugárnak a beesési merőlegessel bezárt szögeire nézve fennáll:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n = \frac{v_1}{v_2}$$

hol v_1, v_2 a fény sebessége a két közegben. Pl. az üvegre általánosságban az "n" értéke - mivel a fény sebessége a levegőben átlagosan 300.000 km/sec az üvegben pedig 200.000 km/sec - lesz:

$$n = \frac{300.000}{200.000} = 1.5$$

hol "n" a prizma törésmutatója.

Pótlólag még egy fogalmat kell letárgyalnunk, amely a szögtűző prizma használatánál fontos szerepet játszik és ez a teljes visszaverődés vagy totális reflexió. A fénysugárnak u.i. az a tulajdonsága, hogy ha egy törőfelületre egy bizonyosnál nagyobb szög alatt esik, akkor ha az új közeg ritkább, mint a régi, nem hatol az új közegbe, hanem mint egy tükörfelületről visszaverődik. Keressük azt a szöget, amelyen túl a totális reflexió létrejön!

Levegő-üveg esetén a törésmutató átlagosan $n = 1.5$. De mert totális reflexió esetén a határ azonban $\alpha = 90^\circ$, tehát $\sin \alpha = 1$ azért

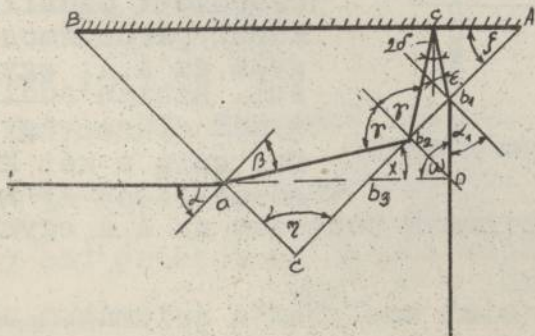
$$\sin \beta = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3} = 0.666667$$

Ez kerekén 42° -os szögnek felel meg. Ha tehát a fénysugár ennél nagyobb szög alatt éri a prizma határlapját, akkor nem fog kilépni abból, hanem a határlapról, mint egy tükörfelületről visszaverődik.

Ez azért fontos a prizma szempontjából, mert ha azt akarjuk, hogy 42° -nál kisebb szög alatt haladó sugár se hagyja el a prizmat, akkor a prizma belsejébe a fény útjába eső oldalát foncsoroznunk kell, vagyis tükrözővé kell tennünk.

Nézzük ezután, hogy milyen lesz a fénysugár útja az egyes prizmákban!

1./ a háromoldalu prizma.



Az ábrából kitűnik, hogy a fénysugár az "AB" oldallal szembe fordított szög alatt esik, ha tehát azt akarjuk, hogy onnan visszaverődjék, úgy ezt az oldalt foncsoroznunk kell. Vizsgáljuk meg ezután, hogy mekkora lesz a be- és kilépő fénysugár által bezárt "ω" szög. Az ab_2C háromszögből felírhatjuk, hogy:

$$90^\circ - \beta + 90^\circ - \gamma + \gamma = 180^\circ; \text{ innen } \gamma = \gamma - \beta$$

Az $A b_2 C$ háromszög alapján viszont:

$$/90^\circ + \delta / + /90^\circ - \gamma / + \beta = 180^\circ ; \text{innen } \delta = \gamma - \beta$$

Avagy a " γ " értéket behelyettesítve:

$$\delta = \gamma - \beta - \beta$$

Végül az $A c b_1$ háromszögből:

$$/90^\circ - \epsilon / + /90^\circ - \delta / + \beta = 180^\circ ; \text{innen } \epsilon = \beta - \delta$$

vagy a " δ " értéket behelyettesítve:

$$\epsilon = \beta - / \gamma - \beta - \beta / = 2\beta + \beta - \gamma$$

Az $O b_1 b_3$ háromszögben: $\omega + /90^\circ - \alpha / + x = 180^\circ$

De a $C b_3 a$ háromszögből kifejezhetjük az " x "-et:

$$x + y + [180^\circ - /90^\circ + \alpha /] = 180^\circ$$

$$x + y + 90^\circ - \alpha = 180^\circ$$

$$x = 90^\circ - y + \alpha$$

Ezt az előbbi egyenletbe helyettesítve:

$$\omega + /90^\circ - \alpha / + /90^\circ + \alpha / - y = 180^\circ$$

$$\omega = \alpha_1 - \alpha + y$$

Ha $\alpha_1 = \alpha$, akkor $\omega = y$

Ez azonban csak abban az esetben áll fenn, ha a prizma az előző ábra szerint kétszeres fényvisszaverődés volt. Erről úgy győződhetünk meg, hogy a prizmat egy függőleges tengely körül kis értékkel elforgatjuk. Ha a két nem mozdul el, akkor a helyes képet látjuk, ha azonban a kép mozog, akkor csak egyszeres fényvisszaverődés volt a

prizmában /1. az ábrát! / és ebben az esetben a prizma úgy működik, mintha egy siktükör volna.

Az előbbiekből láttuk, hogy

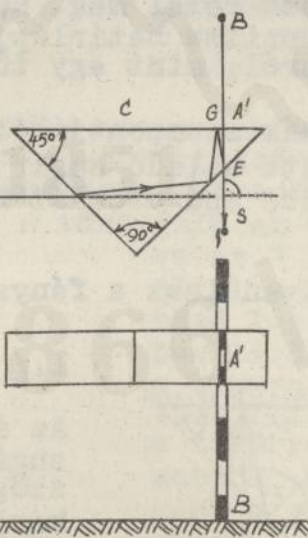
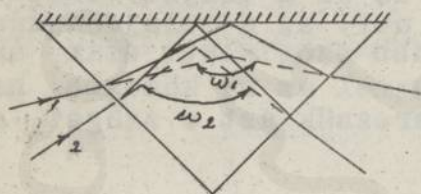
$$\epsilon = 2\beta + \beta - \gamma$$

ha azonban $\alpha = \alpha_1$, akkor kell, hogy legyen s így

$$\beta = \frac{\gamma}{2}$$

Ha tehát $y = 90^\circ$, akkor $\beta = 45^\circ$ és vagyis

ebben az esetben $\omega = 90^\circ$
prizmánk derékszöget tüz ki.

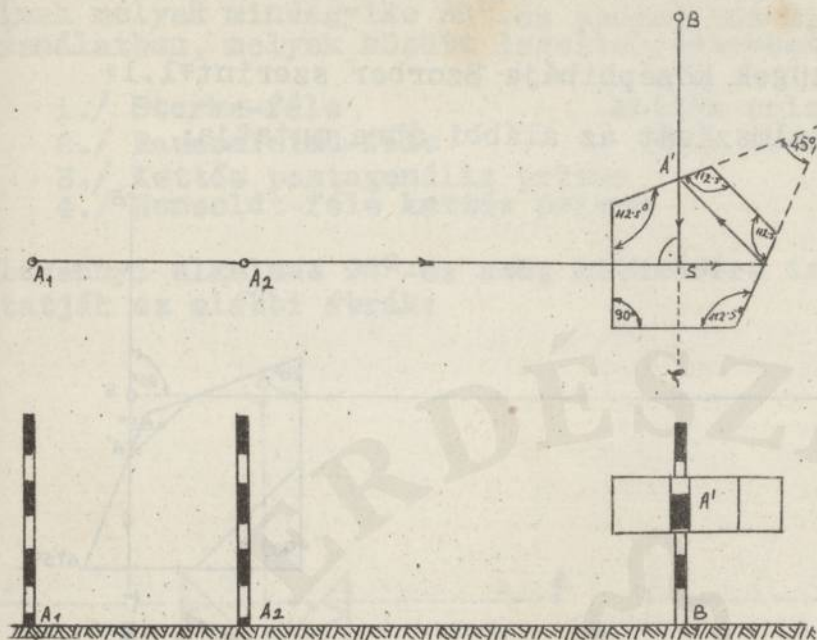


A háromoldalú prizma-val való kitűzés végrehajtását mutatja a mellékelt ábra. Ha pl. az ábrabeli $A_1 A_2$ kitűzőrudakkal adott egyenesre kell merőlegest állítanunk, "S" pontban, akkor felállunk "S" pontban függőlegesen tartott prizmánkkal úgy, hogy annak fonsorozott oldallapja közel párhuzamos legyen az $A_1 A_2$ egyenessel. Ezután addig megyünk előre vagy hátra, amíg a két kitűzőrud A_1 és A_2 képe

nem fedi egymást a prizma-ban. Ekkor prizma-unk pontosan az $A_1 A_2$ egyenes "S" pontja fölött van.

Ha tehát most ugyanabban az irányban, mint amelyben a prizma-ban néztünk, elnézünk a prizma felett be tudjuk inteni a "B" kitűzőrudat.

Amikor az A, és A₂ kitűzőrudak közös képe /az ábrán: A / és a B kitűzőrud egy függőlegesbe esik, akkor az ASB szög valóban derékszög lesz.



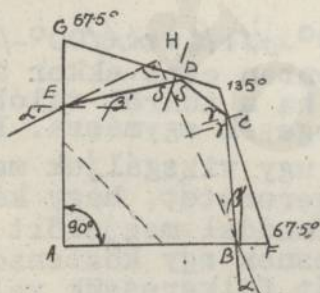
A szög tüző-prizmának másik, legelterjedtebb alakja a pentagonális prizma. Sugármenetét a mellékelt ábra mutatja. Ennek a prizmának két oldala van foncsorozva, s ezek 45° alatt hajólnak egymáshoz. Mivel azonban ezeknek az oldalaknak teljes hossza nem szerepel a szög tüzésben, azért le szokták csiszolni: ezáltal kapja ötszögletes alakját. A prizma másik két lapja 90°-ra áll egymáshoz. A prizma az ábrából kiolvasható tulajdonságai a következők:

1./ a prizma elmélete ugyanaz, mint a szög tüző-tükröké: a be- és kilépő sugár ugyanazt a szöget járja be a beesési merőlegessel.

2./ a kitűzött szög /ω/ a prizma benn van, vagyis a prizma ebben a tekintetben is úgy viselkedik, mint egy szög tükrök: a kitűzendő szöget nem fénytöréssel, hanem kizárólag visszaveréssel képezi.

Előnye ennek a prizmának, hogy a kép fényerős, a látómező nagy és benne zavaró képek nem keletkeznek. Használata teljesen azonos az előbbiével.

A foncsorozott prizma közös hibája az, hogy a tükröző felület idővel elhomályosul: a tükrök megvakul. Ennek a hibának kiküszöbölésére olyan prizmakat szerkesztettek, amelyekben a fénysugár totális reflexiót szenved, tehát a foncsorozást kikerülték. Ilyen a négyszögletes



Wollaston-féle prizma, amelynek alakját csiszolási szögeit és fénytörését az ábra mutatja. Derékszögek kitűzésére használják.

Elmélete a következő:

Az ABCDE sokszög belső szögeinek összege: $540^\circ = 90^\circ + \beta' + 2\delta + 2\gamma + 90^\circ - \beta + 90^\circ$. Összevonva:
 $270^\circ = \beta' + 2\delta + 2\gamma - \beta$

A BFC háromszögből: $180^\circ = 67.5^\circ + 90^\circ + \beta + 90^\circ - \gamma$, innen

$$\gamma = 67.5^\circ + \beta$$

A GDE háromszögből: $180^\circ = 67.5^\circ + 90^\circ - \beta' + 90^\circ - \delta$, innen

$$\delta = 67.5^\circ - \beta'$$

Vagy γ és δ értékét az előbbi képletbe helyettesítve:

$$270^\circ = \beta' + 135^\circ - 2\beta' + 135^\circ + 2(\beta - \beta)$$

Összevonva lesz: $\beta = \beta'$ és ebből következik, hogy $\alpha = \alpha'$

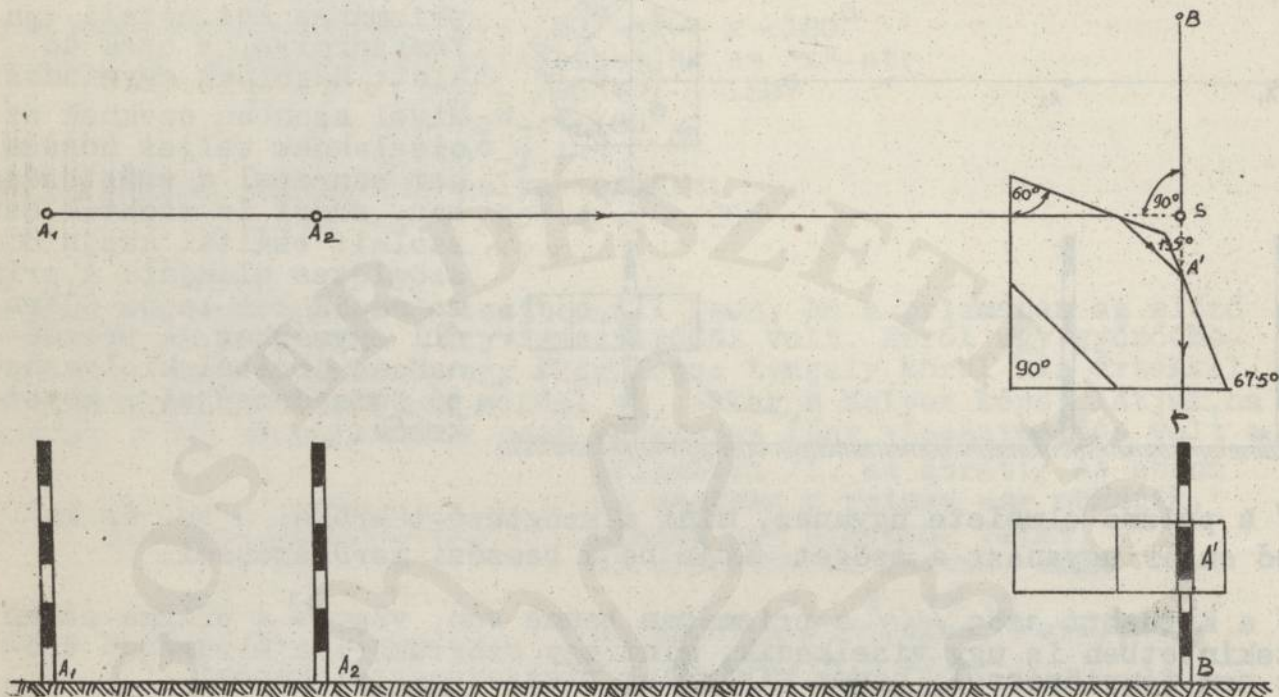
Az ABHE négyszög belső szögeinek összege:

$$\omega + 90^\circ + \alpha' + 90^\circ - \alpha + 90^\circ = 360^\circ$$

Mivel azonban $\alpha = \alpha'$ ebből következik, hogy $\omega = 90^\circ$
A 90° -nál lévő része a prizma rendszerint le van csiszolva a szaggatott vonal szerint.

A prizma által kitűzött szögek középhibája Szorber szerint ± 1.1 ,

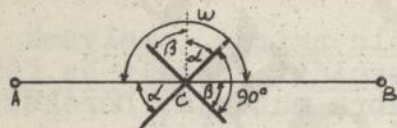
A Wollaston-féle prizma alkalmazását az alábbi ábra mutatja:



7./ A tükörkereszt.

180° -os szögek kitűzésére, vagyis egyenesek közbelső pontjainak felkeresésére szolgálnak. A tükörkereszt két egymás fölött merőlegesen elhelyezett tükörből áll: ha az egyenesben állunk vele, akkor az egyenest kijelölő két kitűzőrud képe a két tükörben egymás fölött lát-

szik és egy függőlegesbe esik. A kitűzött szög nagysága az ábra szerint lesz:



kor "C" helyett "C'" -et tűzzük ki. Ezután függőleges tengelye körül 180° -kal megfordítjuk a tükörkeresztet és az ellenkező oldalról tűzzük ki a szintén hibás "C" pontot. A helyes "C" pont a C'C' felezésében lesz. Ezt megjelöljük, majd a tükörkeresztet föléje állva az elmozdítható tükröt az igazítócsavarokkal addig mozgatjuk, amíg az A és B kitűzőrudak képe egy függőlegesbe nem esik. Ekkor a két tükör merőlegesen áll egymásra.

$$\omega = /90^\circ - \alpha + \beta + \alpha + /90^\circ - \beta = 180^\circ$$

Ez azonban csak akkor áll fenn, ha a tükrök valóban merőlegesen egymásra. Erre nézve úgy vizsgáljuk meg a tükörkeresztet, hogy két kitűzőrúddal megjelölt AB egyenesnek egy közbelső "C" pontját fölkeressük vele.

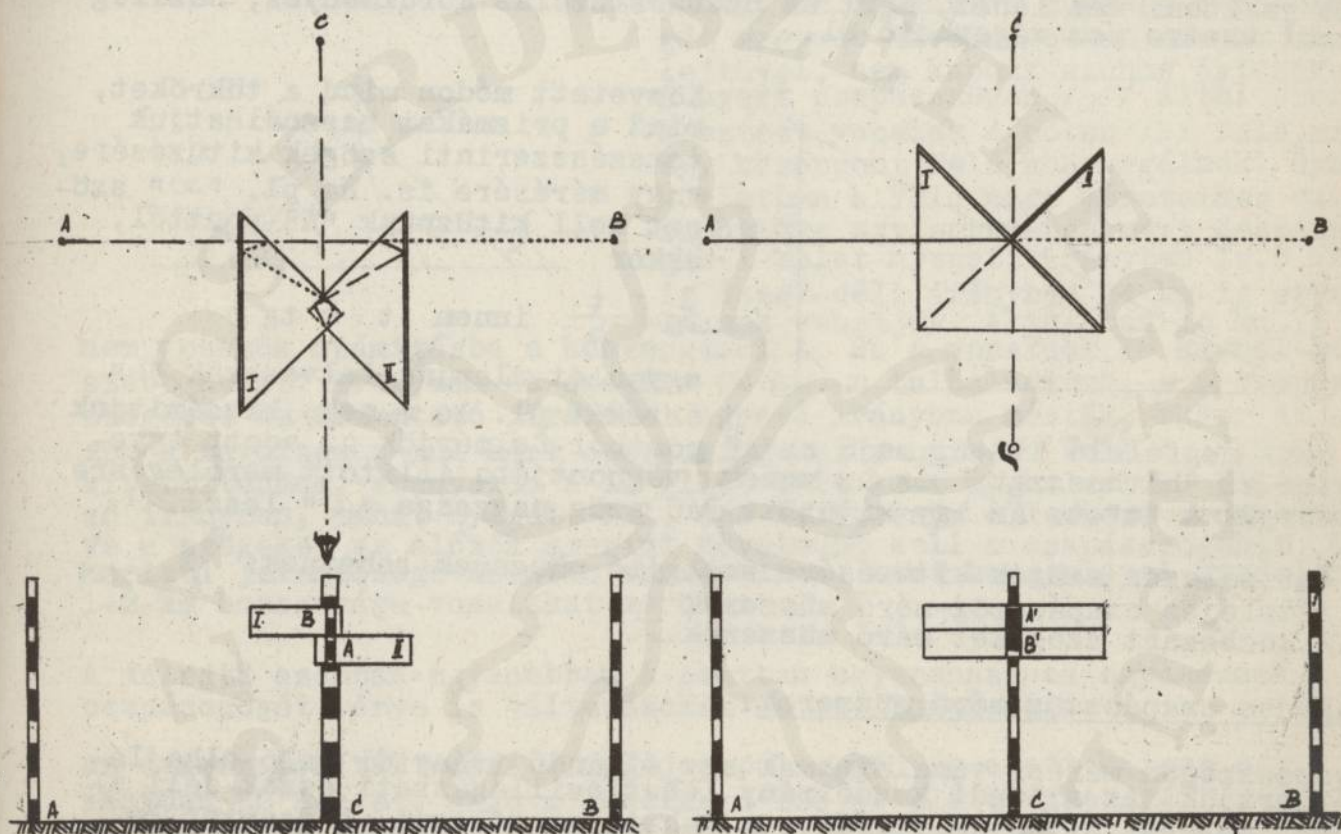
Ha hibás a tükörkereszt, akkor "C" helyett "C'" -et tűzzük ki. Ezután függőleges tengelye körül 180° -kal megfordítjuk a tükörkeresztet és az ellenkező oldalról tűzzük ki a szintén hibás "C" pontot. A helyes "C" pont a C'C' felezésében lesz. Ezt megjelöljük, majd a tükörkeresztet föléje állva az elmozdítható tükröt az igazítócsavarokkal addig mozgatjuk, amíg az A és B kitűzőrudak képe egy függőlegesbe nem esik. Ekkor a két tükör merőlegesen áll egymásra.

8./ A kettős prizma.

180°-os szögek kitűzésére készülnek prizmák is. Ezek két prizmából állnak melyek mindegyike 90°-os szöget tűz ki. Több megoldásuk van használatban, melyek között legelterjedtebbek a

- 1./ Starke-féle kettős prizma
- 2./ Bauernfeind-féle " "
- 3./ Kettős pentagonális prizma
- 4./ Hensoldt-féle kettős prizma

Valamennyi alkalmas 90°-os szög kitűzésére is. Az egyes prizmákat mutatják az alábbi ábrák:

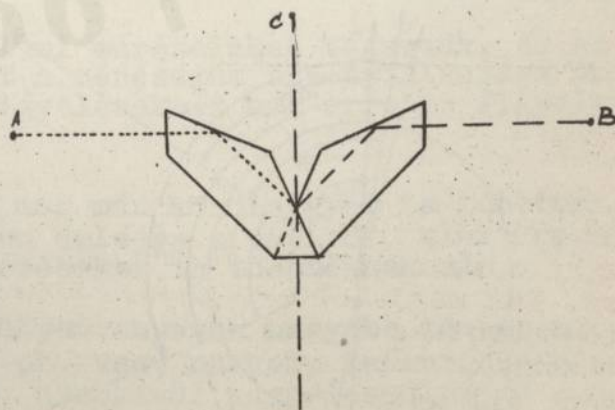
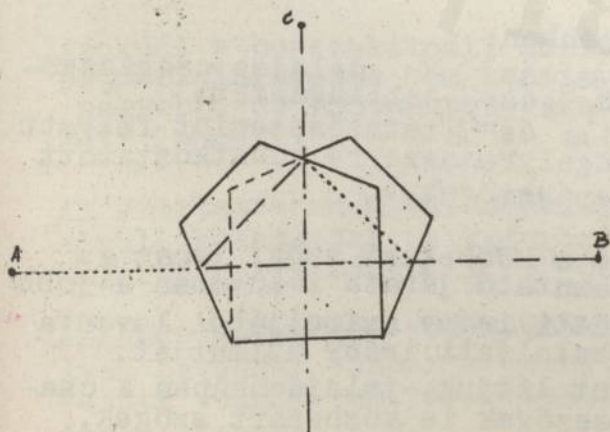


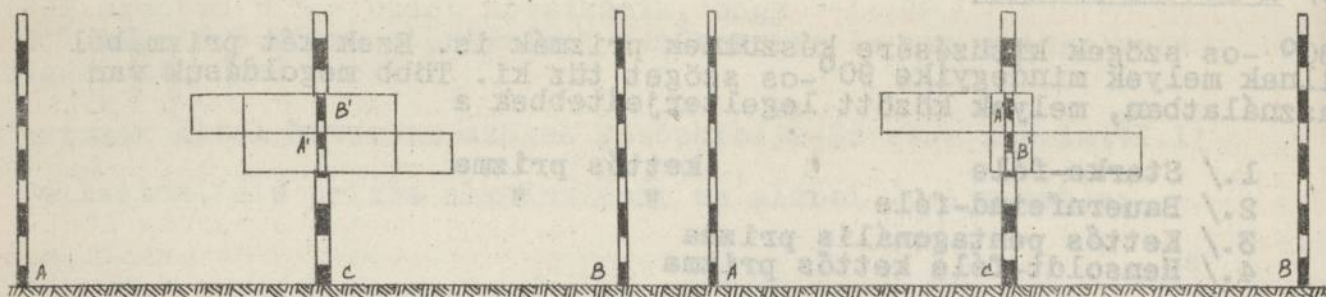
Starke-féle

kettős prizma

Bauernfeind-féle

(tulajdonképpen tükörkereszt)

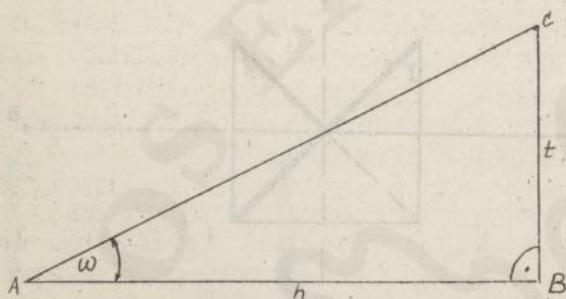




Kettős pentagonális prizma

Hansoldt-féle kettős prizma két falakon prizmából áll.

A prizma vizsgálatát ugyanúgy történik, mint a tükröké. Hibás prizmat javítani nem lehet, mert az után-csiszolás körülményes, házilag semmi esetre sem végezhető el.



Közvetett módon mind a tükröket, mind a prizmákat használhatjuk tetszésszerűen szögek kitűzésére, vagy mérésére is. Ha pl. " ω " szöget kell kitűznünk "A" ponttól, akkor

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{t}{h} \quad \text{innen} \quad t = h \operatorname{tg} \omega$$

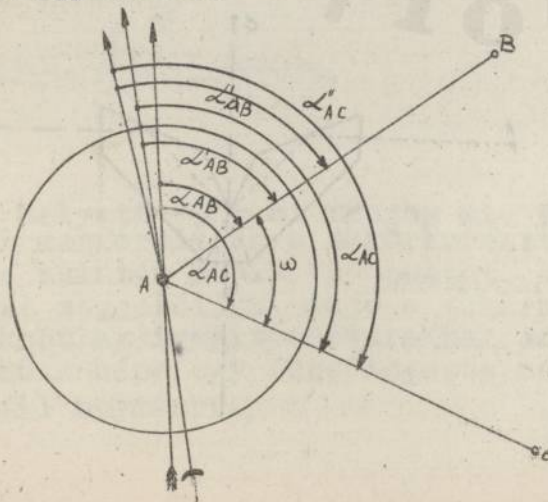
a neki megfelelő " t "-t, majd az "A" pontból felmérjük az adott egyenesre az " h " hosszat, és az ennek végpontjába állított merőlegesre rámérjük a " t "-t. Az így kitűzött BAC szög nagysága " ω " lesz.

A tetszőleges szögek kitűzésére szolgáló műszerek lehetnek:

- 1./ delejes csapásszög-mérő műszerek
- 2./ közbezárt szögeket mérő műszerek.

Delejes csapásszög-mérő műszerek.

Csapásszögön mérési vonalainknak egy állandó iránytól való elhajlását értjük. Az állandó kezdőirány lehet csillagászati észak-déli irány, delejes észak-déli irány, s lehet tetszőleges. E szerint beszélhetünk csillagászati azimutról, vagy ha a déli irány a kezdő szög, délszögről, ha az északi, akkor északi szögről, delejes azimutról, mindig a delejes északi iránytól számítjuk, vagy egy adott iránytól mért azimutról. A delejes és csillagászati észak-déli irány nem egyezik egymással.



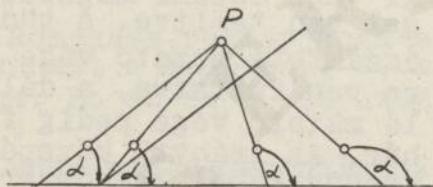
Ábránkon:

α_{AB} és α_{AC} delejes csapásszögek
 α'_{AB} és α'_{AC} csillagászati "
 α_{AB} és α_{AC} tetszésszerűen felvett
 tengelyrendszerre vonatkoztatott
 csapásszögek.

ω a közbezárt szög, tehát az óramutató járása irányában a jobb-oldali irány azimutjából levonva a baloldali irány azimutját. Mint látjuk, tulajdonképpen a csapásszögek is közbezárt szögek, vagyis a kezdőiránnyal - a "0" i-

ránnyal képezett közbezárt szögek. Ha osztott körünk, limbuskörünk van, akkor arról irányértékeket, vagyis az osztott kör "0" irányától számított azimutokat olvashatunk le.

Ha delejes azimutot akarunk mérni, akkor olyan műszerre van szükségünk, amely a delejes észak-déli irányt állandéan kijelöli. Ez a műszer a delejtű: az általa kijelölt delejes csapásszögek bizonyos értékekkel eltérnek a csillagászati csapásszögektől, mert a delejes északi pólus és a Föld északi pólusa nem esik össze. Duperrey 1825-ben végzett mérései szerint a delejes északi sarok $70^{\circ}5'$ északi szélesség és Párisból a $100^{\circ}45'$ nyugati hosszúság, a delejes déli sarok pedig 76° déli szélesség és 135° keleti hosszúság alatt fekszik szintén Párisból számítva. A pólusok helye változik.



Ha egy és ugyanazon egyenes csapásszögét nagyobb távolságokban mérjük delejtűvel, nem kapunk azonos értékeket. A nyert csapásszögek α által szerkesztett vonalak a pólus P felé, mint egy középpont felé konvergálnak. Gyakorlatban a Föld nagy méreteihez viszonyítva egy egyenesen mért csapásszögeket kelet-nyugati irányban 10.5 km-ig észak-déli irányban 24 km-ig egyenlőknek vehetjük. Általában 10 km-ig

nem vesszük számításba a konvergenciát. Ha a vonalunk 10 km-nél hosszabb keleti irányban és északra 24 km-en túlhaladtunk, s a csapásszögeket az óramutató járásával egyező irányban mértük, akkor az ezen a távolságon túl mért csapásszögeket annyiszor kell 0.1° -kal kisebbitenünk, ahányszor a 10 illetve 24 km-t meghaladtuk. Ellenkező irányban, tehát nyugat, ill. dél felé, vagy ellenkező irányban mérve a szögeket az előzők szerint növelnünk kell a csapásszögeket. Gyakorlati jelentősége azonban ennek nincs, mert busszólával legfeljebb 1-2 km hosszúságú vonalakat mérünk.

A delejtű azonban ugyanabban a pontban ugyanannak az egyenesnek a csapásszögét mérve is változásokat mutat. Ennek okai:

Az évszázados változás: a delejes pólus 150 év alatt kileng egyik irányban $22^{\circ}34'$ -et, majd a következő 150 év alatt visszatér és újabb 150 év alatt a másik irányban leng ki $22^{\circ}34'$ -et. A teljes kilengés 300 év alatt tehát $45^{\circ}08'$. Az átlagos évi kilengés pedig $9'$. Mindennapos változás, mely legkisebb dec. hónapban: $2'-3'$, legnagyobb jun. és jul. hónapokban: $9'-10'$; átlagosan tehát $6'$ -nek vehetjük. A kilengés legkisebb reggel 8 órakor és éjjélkor, legnagyobb délután 1 órakor.

Azoknál a busszóláknál, amelyekkel mi méréseinket végezzük, ez az évi és napi ingadozás nem számít, mert a méréseink bizonytalansága ennél nagyobb, de tudományos célú megfigyeléseknél már erre is figyelemmel kell lennünk.

Az említetteken kívül a delejtűre még más körülmények is lehetnek rendkívüli behatással: zivataros időben delejes zivatarok, elektromos kisugárzások: mindezek 1° - 2° -os kitéréseket is idézhetnek elő.

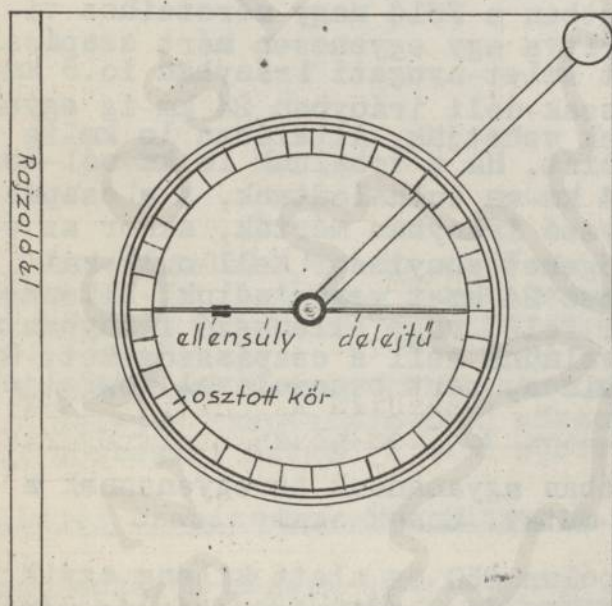
Állandó zavarokat idézhetnek elő olyan anyagok nagyobb tömegben, amelyek hatással vannak a delejtűre, pl. vas, nikkel, tellur, földfémek, vasúti vonal, vasgyár, vaskerítés, azonkívül magasfeszültségű egyenáramu vezeték, stb.

Nem bír azonban hatással a réz, ezüst, arany és ezért a delejes csapáásszög mérésére szolgáló műszereket rézből, osztott-körtűket pedig jobb műszereknél ezüsből készítik. A felhasznált anyagoknak teljesen tisztáknak kell lenniök.

A delejtű egymagában mérésekre nem alkalmas, ezért megfelelően fel kell szerelni. Az így kapott műszer a:

Kompassz vagy tájoló.

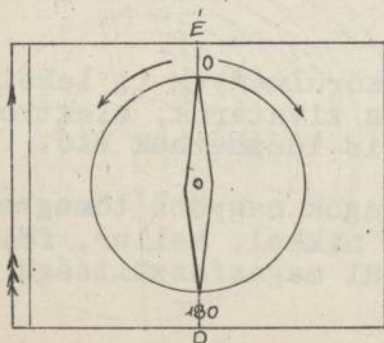
A delejtű fémházban van elhelyezve, amely fémház anyagának nem szabad a delejtűre hatással lennie. A fémház rézlapra van szerelve. A fémház területén van az osztott kör, mely finomabb műszereknél ezüsből készül. Középen van egy acéltű, ezen helyezkedik el a delejtű, amelynek északi vé-



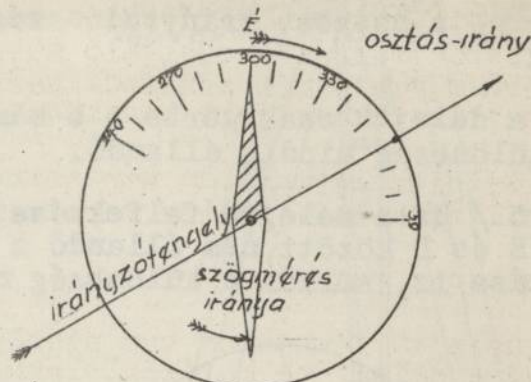
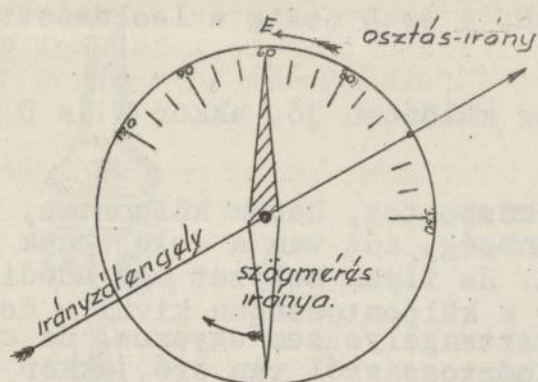
ge délu mágnességgel, déli vége északi mágnességgel van telítve. A tűnek északfelé mutató vége kékre van futtatva, a dél felé mutató vége pedig fehér. Az iránytű közepén kemény kőből /rendszerint gránát vagy achát/készült csapágy van: ebbe nyulik a csap, egy hegyes acéltű. A csapágy és csap között a surlódásnak nem szabad nagynek lennie. Minden kompasszon találunk egy kétkaru emelőt, amellyel az iránytűt fel-emeljük és a fémház üveg-tetejéhez szorítjuk, ha nem mérünk a kompasszal. Így akadályozzuk meg, egyrészt a finom acéltű hegyének, másrészt a csapágnak a kopását, amely az érzékenység rovására történnék. Az emelő egy

csavarral rögzíthető, ez a delejtű kötőcsavarja. Mérésnél a csavart fel kell engedni, használaton kívül pedig mindig meg kell kötni.

Mint említettük, a kompassz fémháza üveglappal van fedve, amelyet rézgyűrű szorít le. Ez arra szolgál, hogy szél, csapadék, stb. ellen védje a delejtűt és hogy megkötésnél az emelő a delejtűt hozzá szorítsa.



A kompassz osztott körének beosztása kétféle lehet: óramutató járásával egyező vagy ellenkező irányu. Ha a kompassz osztott-köre az óramutató járásával ellenkező irányu, akkor a szöget az óramutató járásával egyező irányban mérjük. Ha az osztottkör iránya egyező az óramutató járásával, akkor a szöget mérjük ellenkező irányban, amint azt az alábbi ábrák szemléltetik:



Az osztottkör irányát a mérési jegyzőkönyvben fel kell tüntetni, mert téves felhordásnál a valódi rajz tükörképét kapjuk. /Lásd még a felhordó műszereknél!/
A kompassz rézlapjának egyik éle le van ferdén csiszolva, hogy ugyanazt a kompasszt ne csak mérésre, hanem felhordásra is használhassuk. Ez az él a kompassz rajzolóéle.

A műszereken használatos kompasszoknak megfelelő pontosságuknak kell lenniük. A kompasszok pontossági kellékei, amelyekre nézve használat előtt ellenőriztünk kell a kompasszt, a következők:

- 1./ Az osztott kör osztásának pontosnak kell lennie.
- 2./ A delejtűnek érzékenynek kell lennie.
- 3./ A kompassz ne tartalmazzon a delejtűre zavarólag ható anyagot.
- 4./ A delejtű egyenes legyen.
- 5./ - " - központos "

Vizsgálat: Ad 1./ Hogy az osztott kör beosztásának pontosságáról meggyőződjünk, az osztott kör különböző részeivel ismert szögértékeket mérünk és megnézzük, hogy a kompassz ugyanazokat az értékeket adta-e.

Ad 2./ Hogy a delejtű érzékeny-e, arra nézve a következő a vizsgálat: a kompasszhoz közeledünk egy pillanatra olyan anyaggal, amely hat a delejtűre. Ennek hatására a delejtű kimozdul. Ha 30 másodperc alatt nyugalmi helyzetbe jön és a leolvasott szögérték nem tér el 2'-3'-nél nagyobb értékkel az előzőtől, akkor delejtűnk elég érzékeny. Ellenkező esetben a hiba vagy az, hogy a csapágy, vagy a csap elkopott - ekkor ezeket ki kell cserélni -, vagy a delejtű már nem eléggé mágneses: ekkor ezt újra kell mágnesezni.

Ad 3./ Parafa-lemezbe szurt tűre ráhelyezzük a delejtűt és a kompassz minden részével közeledünk feléje. Ha a delejtű nem mozdul ki, akkor a kompasszban nincs olyan anyag, amely zavarólag hatna a tűre.

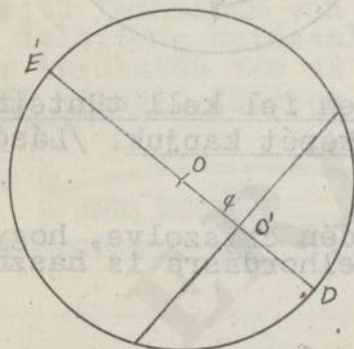
Ad 4./ Ha a delejtű nem egyenes, akkor a két végén nyert leolvasás különbsége nem lesz 180°-kal egyenlő. Ha ellenben jó a delejtű, ekkor E-D vagy E+D 180°-kal egyenlő. Az értékeket az osztott-körrel az északi /É/ és a déli /D/ tüvégnél kell leolvasnunk. Eltérés csak bizonyos értékig engedhető meg. Kisértékű eltérés esetén használható a kompassz, ilyenkor a földhordásnál iránytadó szögérték E és D középértéke:

$$\bar{E}_h = \frac{E + D \pm 180^\circ}{2}$$

Mol E_h a helyes, irányadó szögérték. E és D pedig a leolvasott értékek.

Ha a delejtű csak görbe s a kompassz különben jó, akkor E és D között a különbség mindig állandó.

Ad 5./ Ha a delejtű felfekvése nem központos, hanem külponos, akkor az E és D között nem állandó a különbség, sőt van a delejtűnek olyan állása is, amikor a különbség nulla. Ha ilyen helyzet nem adódik, akkor a külponosságon kívül a delejtű



hossztengelye sem egyenes. Ha csak külponosságról van szó, akkor a két түvégen nyert leolvasások közti különbség tekintetében egy teljes körülforrotás alatt 2 periódust különböztetünk meg. Ábránkon a "0" jelenti a helyes középpontot, "0'" a külponos középpont, "e" pedig a külponosság /excentricitás/ értéke. Ha a delejtű az 00° irányban áll, akkor $E - D = 180^\circ$

Ha viszont merőleges az 00° irányra, akkor a külponosságból a maximális különbséget kapjuk az E és D között.

Ezek a hibák kiesnek, ha az E és D leolvasások számtani közepét vesszük:

$$E = \frac{E + D \cdot 180^\circ}{2}$$

Előfordul, hogy vízszintes osztott-kör mellett a delejtű nem vízszintes. Ez az inklinációból származik, melynek kiküszöbölésére a delejtű könnyebb oldalán lévő tologatható ellensúlyt használjuk, amely már rajta elehet a delejtűn, de ha nincs, akkor magunk is elképezithetjük vékony rézdrótból.

Busszola-műszerek.

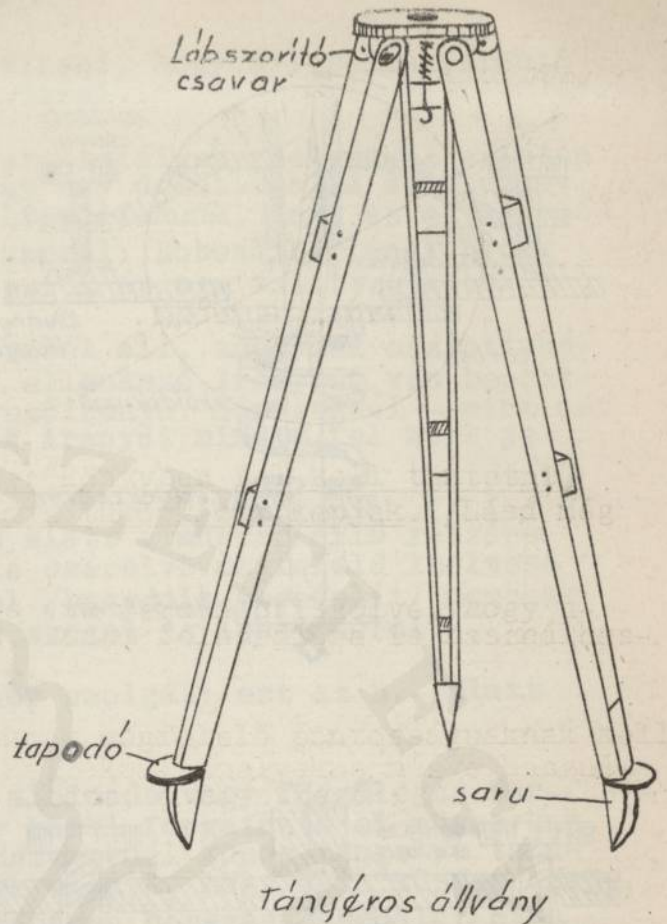
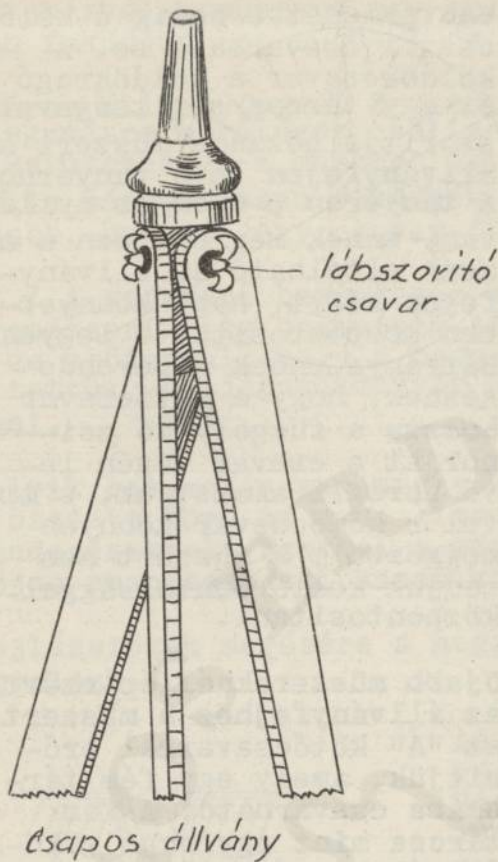
A busszola-műszerek olyan vízszintes szöget mérő műszerek, amelyek a delejes csapásszög mérésére kompasszal vannak felszerelve. Két részből állnak: állványból és magából a műszerből.

Az állvány kétféle lehet: csapos, vagy tányéros-fejű; mindig három lábú. Könnyű műszereknél a lábak gyengébbek, téglalap, vagy félgömbölyű keresztmetszetűek, míg nehezebb műszereknél merevebbek.

A lábak alján saru van esetleg tapodóval. A 3 láb csavarokkal van hozzáerősítve az állványfejhez: ezek a lábszorító csavarok. Csapos állványfejnél a lábszorító-csavar orsója 3 águ és bele van eresztve az állványfejbe.

Ha az állványfej csapos, akkor a műszer hüvelye kerül a csapra. Néhány állványnál a csapra egy csavarorsó van erősítve: ebben az esetben a műszeren van a csavaranya. Hátránya ennek a megoldásnak, hogy a nagynyári melegben a fa összeszárad és a csavaranya kotyog az állvány fején.

Tányéros állványfejnél a lábak szilárdabbak. Ezeknél a műszert a tányérra helyezzük és a szorítócsavarral rögzítjük. A műszer a tányéron 5-6 cm-es értékkel eltolható, hogy könnyebben lehessen központosítani. A műszert az állványhoz a kötőcsavar köti és a kötőcsavaron



lévő csavaranya segítségével – amely a köldökrugót feszíti – az állvány tányérjához szorítható a műszer az állványhoz, hogy mérés közben el ne mozduljon.

A műszer állványának a feje készülhet fából, vagy fémből.

Magának a műszernek legrégebbi alakja, a delejtüvel felszerelt diópt-ra ma már nem használatos.

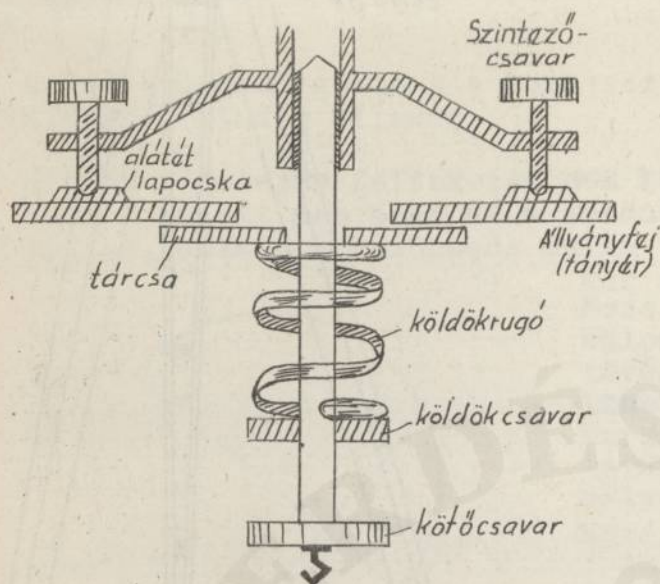
A mai busszola-műszerek a következő részekből állnak:

- 1./ összekötő rész
- 2./ szintező berendezés
- 3./ szögmérő "
- 4./ alhidade és függőleges tengely
- 5./ irányzó berendezés
- 6./ kötő- és paránycsavarok
- 7./ vízszintes tengely

Ad 1./ Az összekötő rész kapcsolja össze a műszert az állvánnyal. Kétféle lehet aszerint, hogy csapos, vagy tányéros-e az állványfej.

Csapos állványfejnél a műszer alul egy felhasított hüvelyben végződik. Ez a hüvely a hüvelyszorító-csavar segítségével erősíthető rá az állványfej csapjára.

Tányéros állványfejnél a műszer-talp egy háromágú állványból áll, melynek végéből nyulnak ki a szintező csavarok, a középen lévő csa-



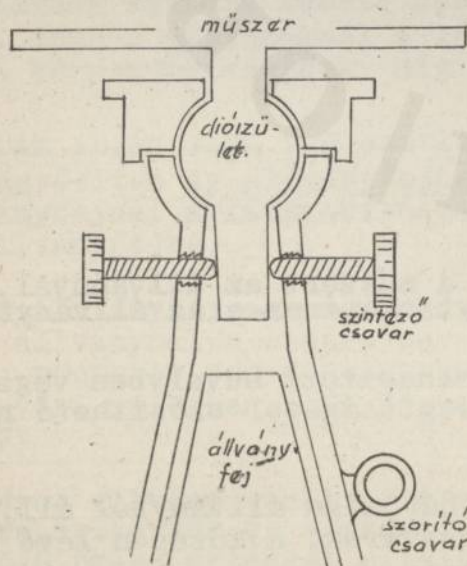
csavarmenetbe pedig a kötőcsavar csavarható be. A köldökcavar a köldökrugó és egy tárcsa segítségével szorítja hozzá a műszert az állványfejen levő tányérhez. A tányéron 5-6 cm-es nyílás van, ennek megfelelően a műszer eltolható az állványfejen azért, hogy könnyebben központosítható legyen. Hátránya ennek a berendezésnek, hogy a kötőcsavar hosszú a függélyező zsinórját a csavar végén lévő horogra akasztjuk, s mivel a kötőcsavar könnyen meggörbül, a műszert nem tudjuk kellő pontossággal központosítani.

Ujabb műszereknél ép ezért az állványfejhez a műszert az "A" kötőcsavarral erősítjük, amely egy fém tárcsába csavarható. A fém tárcsa mint egy rugó működik és hozzászorítja a gömbalaku végződéssel kiképzett szintezőcsavarokat és így a műszert is az állványfejhez.

Ad 2./ A szintező-berendezés arra szolgál, hogy a műszert a libellák segítségével vízszintes helyzetbe hozzuk.

A műszer szintezését a szintezőcsavarok forgatásával végezzük.

Csapos állványfejű műszereknél a szintezőcsavarok elhelyezése kétféle:



az első típusnál a szintezőcsavarok vízszintes helyzetűek. A műszer alul dióizületben van kiképezve, amelyből egy kis négyszögletes csap nyúlik ki: ezt fogja körül a négy szintezőcsavar. Szintezésnél a libellát mindig párhuzamos helyzetbe kell hozni két szintezőcsavarral.

A második berendezésnél két rugó és két szintezőcsavar van a műszer alhidádjára alatt elhelyezve, melyek segítségével két libella hozható szintes helyzetbe.

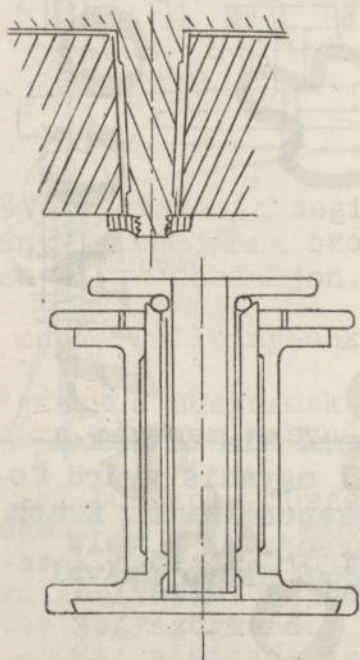
Szintezésnél a műszert úgy kell elfordítani, hogy a libella párhuzamosan fektüdjön egy rugóval és egy csavarral.

Tányéros állványfejnél 3 szintezőcsavart találunk, melyekkel szintén két egymásra merőleges csőlibella, vagy egy dobozlibella szintezhető. Szintezésnél a műszert úgy kell elfordítani, hogy az egyik csőlibella párhuzamosan fektüdjék két csavarral. Dobozlibellánál pedig legjobb, ha azt egy csavar fölé helyezzük és úgy szintezzük be.

Ad 3./ A szögmérő berendezés a kompasszból áll, amelynek osztott-körre rendszerint az óramutató járásával ellenkező irányban van beosztva, de előfordul, hogy a beosztás egyezőirányú. Méréseknél - mint már említettük - a jegyzőkönyvbe az osztás irányát mindig fel kell jegyezni.

Némelyik busszolásán van még a kompassz alatt a műszer álló részére egy osztott kör, az u.n. limbus-kör is szerelve megfelelő leolvasó berendezésekkel. Ezekkel a műszerekkel /busszola-theodolit/ nemcsak delejes csapásszöget, hanem közbezárt szöget is lehet mérni.

A hajlásszögek mérésére a magassági-kör szolgál: ezt az 5.- alatt tárgyaljuk.



Ad 4./ Az alhidade vagy függőleges forgástengely körül forgatható el műszerünk. Régebbi műszereknél kupos tengelyt találunk: ennek előnye, hogy ha a műszer csapja vagy csapágya hosszas használat után kopni kezdett, utána lehetett állítani.

Ma már hengeres tengelyt használnak, mivel a csapokat olyan kemény anyagból tudják készíteni, hogy a kopás lenyészően kicsi.

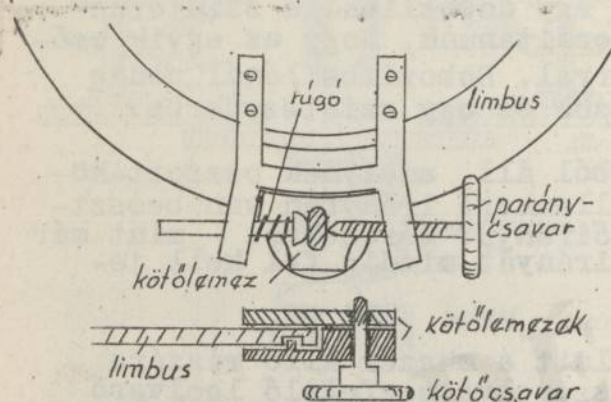
A Wild és a Zeiss féle műszereken is hengeres tengelyeket találunk, golyós csapággyakkal.

Ad 5./ A műszerek irányzóberendezése a távcső. Ez egy vízszintes forgástengely körül forgatható, amely a távcsőtartókarra van szerelve, a távcsőtartó pedig az alhidadéra. Régebbi műszereknél kettős távcsőtartókar volt. Ez a forgás-

tengely vízszintes helyzetét jobban biztosította, azonban a kompasszról való leolvasást, mivel az a két távcsőtartókar között volt elhelyezve, nehézkessé tette. Ezen a hátrányon először úgy igyekeztek segíteni, hogy a kompasszt a vízszintes tengely fölé helyezték el, ez megint kényelmetlenné tette a leolvasást. Az újabb műszereken csak egy távcsőtartókart alkalmaznak, melyet, hogy torzulások ne állhassanak elő, megfelelő merevre készítenek: vagy csőalakú, vagy bordázott.

A magassági-kör /függőleges limbus/ a távcsőre /mozgó mag.kör/ vagy a karra /álló mag.kör/ van szerelve. Első esetben a nóniusz álló, a másodikban pedig a távcsővel együtt forog a vízszintes tengely körül. A magassági-körről olvashatjuk le a hajlásszögeket, vagy a tetszőszögeket.

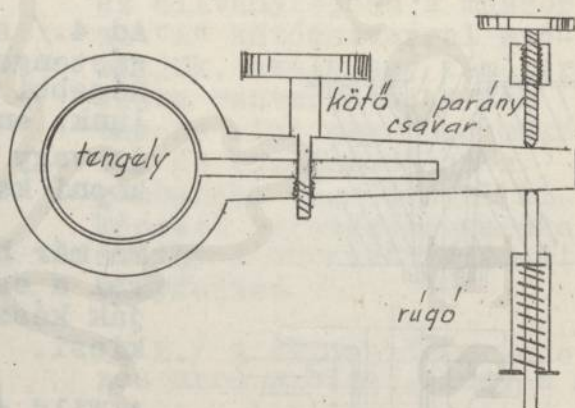
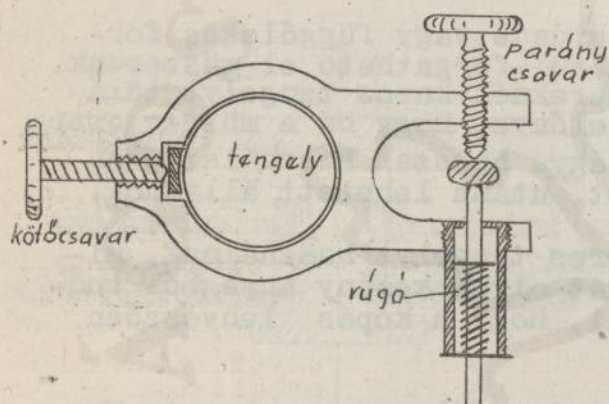
A busszola-műszerek távcsővén lehet távcsőlibella is szintezési célokat szolgáló műszereknél.



Ad 6./ Az alhidade és a vízszintes forgástengely megkötésére szolgálnak a kötőcsavarok; kis értékkel való elforgatásra pedig a paránycsavarokat használjuk.

A kötőcsavarok vagy a limbuskörök területén vannak elhelyezve, amikor is a limbuskörök két lemezzel körre vannak fogva. A lemezeket egy csavar segítségével össze lehet szorítani: ez a kötőcsavar. Vagy pedig a tengely van egy gyűrűvel

körülvéve és ezt a gyűrűt lehet hozzácsorítani a tengelyhez egy kötőcsavarral.



A paránycsavar a tengely ill. ezzel együtt a távcső kis értékkel való elmozgatását teszi lehetővé. A tengely körül ugyanis gyűrű forog, amely a kötőcsavar útján a tengellyel összekapcsolható. Ennek a gyűrűnek nyulványa van, amely a paránycsavar orsója és a vele szemben elhelyezett rugó közé nyulik és a csavarorsó csavarásával mozgatható kis értékig.

Ad 6./ A vízszintes tengely a távcsőtartókarba van szerelve. Régebben ez is kupos volt, ma azonban igen kemény anyagból ezt is hengerre készítik.

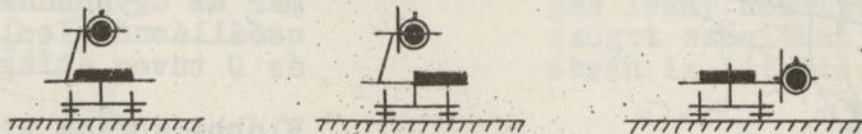
A busszola-műszerek a kompassz és távcső helyzete szerint háromfélék lehetnek:

1./ teljesen központos műszerek: mind a távcső, mind a kompassz központos.

2./ a kompassz külpontos, de az irányzótengely és az alhidade egy függőleges síkba esik. E műszereket a kompassz külpontossága ellenére központos műszereknek tekintjük és így is dolgozunk velük, mert a kompassz külpontosságából származó szöghiba csak 10 km-es távolságon felül lenne érzékelhető.

3./ a kompassz központos, a távcső pedig külpontos. Ezek a tulajdonképeni külpontos műszerek. A gyakorlatban nem igen terjedtek el. A külpontos műszerekkel való szögmérést a későbbiekben fogjuk tárgyalni.

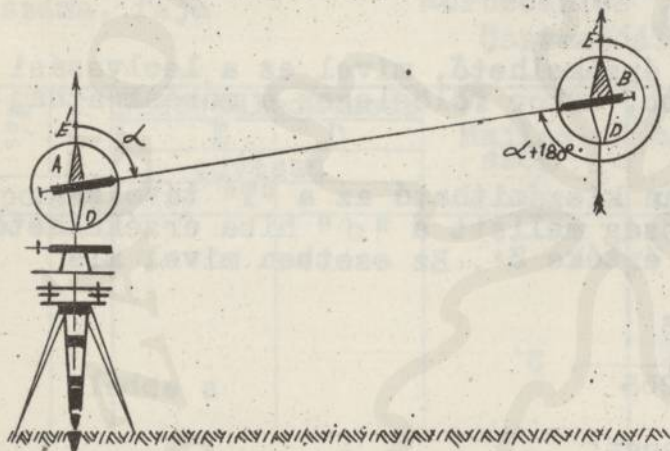
A busszolás 3 rendszerét az ábrák mutatják:



Ha a kompasszunk fokos beosztású, akkor a tizedeket becsüljük $/0.1^\circ = 6'$. Ha viszont a foknak megfelelő távolság még 3 részre van osztva, akkor a negyedeket becsüljük s. így a leolvasási határ $5'$ ($\frac{1}{3} = 20'$; $\frac{20'}{4} = 5'$) Régi műszerek kompassza leszerelhető és felhordáshoz is használható.

A busszolás 3 célra használhatjuk:

- 1./ csapásszögek
- 2./ közbezárt-szögek
- 3./ magassági szögek mérésére.



Ad 1./ A műszert a pont fölé állítjuk, a központosítást 1-2 cm pontossáig végezzük. Ezután a műszert beszintezzük. A busszolat tehát központos és szintes helyzetbe hozzuk, majd távcsővel megirányozzuk a mérési jelet úgy, hogy a függőleges irányszálat a paránycsavar segítségével ráállítjuk a kitűzőrudra vagy a távolságmérő lécz közepére. Ha a delejtű mozgása megszűnt, elvégezzük a leolvasást, először az északi, aztán a déli

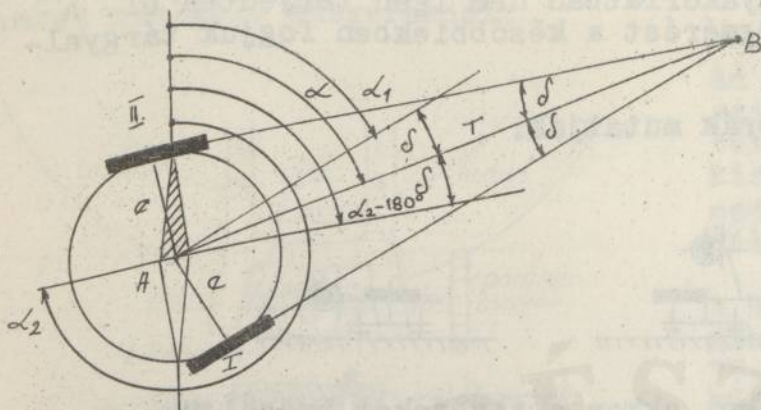
tüvégen. Az északi tüvégen nyert leolvasás az iránytadó, a déli tüvégen csak azért kell leolvasnunk, hogy egyrészt ellenőrizzük: nincs-e durva leolvasási hibánk, másrészt azért, hogy a kompassz hibáit /külpontos vagy görbe tű/ kiejtsük.

Pontosabb mérésnél nemcsak "A", hanem "B" pontban is felállunk, mikor is "A" pontból előre-irányzást, "B" pontból, hátrairányzást végzünk. A két mérés szögeredményénél 180° -os különbséget ezért kapunk, ha durva hibát nem követtünk el.

Ha külpontos a műszerünk, tehát az irányzó tengely nem központos, akkor a mérést rendes és áthajtott távcsővel végezzük. Tulajdonképpen az " α " szöget keressük. Az első, rendes távcsőhelyzet mellett végzett mérésnél az " α_1 " szöget kapjuk, míg áthajtott távcsővel az " α_2 " szöget. Mint az ábrából is látszik:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + \delta \\ \alpha &= \alpha_2 + 180^\circ - \delta \\ 2\alpha &= \alpha_1 + (\alpha_2 + 180^\circ) \\ \alpha &= \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + 180^\circ}{2} \end{aligned}$$

összeadva:
s ebből



Tehát az eredményt megkapjuk, ha a rendes távcső-helyzet mellett kapott északi és az áthajtott távcsőhelyzet mellett déli leolvasásnak középértékét vesszük. Az említett két leolvasás természetesen már az ugyanannál a távcsőállásnál leolvasott E és D tűvég átlaga.

Előbbi ábránk alapján számítható az a szöghiba δ , amely akkor terheli méré-

sünk, ha azt nem ismételjük meg áthajtott távcsőnél

$$\delta = \alpha - \alpha_1$$

$$\sin \delta = \frac{e}{T}$$

honnan δ

számítható, s mint látjuk, egyenesen arányos a külpontossággal és fordítva aránylik az irányzott pont távolságához. Az α -ra felírt fentebbi két egyenletet egymásból kivonva lesz:

$$0 = \alpha_1 - [\alpha_2 + 180^\circ] + 2\delta$$

$$2\delta = [\alpha_2 + 180^\circ] - \alpha_1$$

$$\delta = \frac{[\alpha_2 + 180^\circ] - \alpha_1}{2}$$

De δ csak 0.1° -os eltérés esetén érzékelhető, mivel ez a leolvasási határérték; ha δ ennél kisebb, akkor főleg az a mérést áthajtott távcsővel megismételjük.

Az először említett képlet alapján kiszámítható az a "T" távolság, amelyen belül adott "e" külpontosság mellett a δ hiba érzékelhető. Tegyük fel, hogy δ legnagyobb értéke $3'$. Ez esetben mivel kis szögről van szó:

$$\sin 3' = \frac{e}{T} \quad \text{arc } 3'$$

$$e = T \cdot \text{arc } 3' = \frac{T}{206265} \cdot 3'$$

s ebből

$$T = \frac{e \cdot 206265}{3'} = \frac{e \cdot 206265}{180''} = 1146 e$$

Pl. ha $e = 10$ cm, akkor $T = 1146 \cdot 10 = 11460$ cm $T = 114.6$ m.

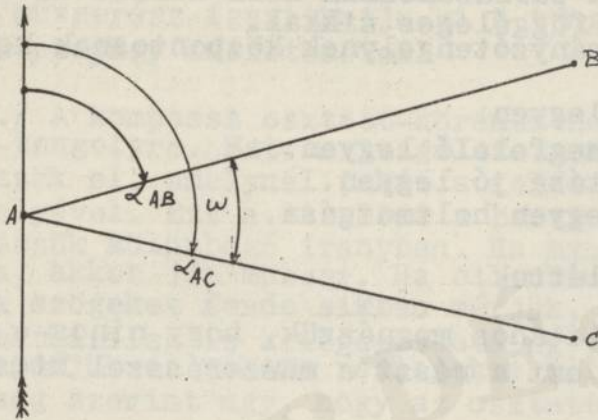
Tehát ennél a műszernél kb. 115 m távolságon belül a szögeket rendes és áthajtott távcsővel kell mérnünk, ha azonban a távolság ennél nagyobb, akkor elég egy távcsőfekvésben mérnünk, hogy a megengedett hibát ne lépjük túl.

A gyakorlatban azonban külpontos műszerrel is csak egy mérést végeznek egy fogás alkalmazásával: vágunk egy akkora fapálcikát, amekkora a külpontosság értéke s a figuráns ennyivel eltolja a mérési jelet abban az irányban, amely irányban a távcső fekszik a műszer alhidade-tengelyétől.

Minden műszernél meg kell nézni és fel kell jegyezni a kompassz esztött körének az irányát, mert a mért csapáásszögek iránya ellenkező, mint amilyen irányu volt az osztott-kör számozása.

Ad 3./ A busszola-műszerek távcsöve fel van szerelve magassági-körrel is, amely némelyik műszernél csonka is lehet. A körön hajlásszögeket mérünk, amelyekre azért van szükségünk, hogy a ferde irányban

mért távolságokat redukálhassuk, vagy a szintkülönbségeket számíthatjuk. Jegyzőkönyvünkben mindig meg kell jelölnünk, hogy a hajlásszög $/+/-/$ -e.



Ad 2./ Ha ismerjük a csapásszögeket, akkor két tetszőleges irány közötti közbezárt szöget számíthatjuk. Mint az ábrán is látható:

$$\omega = \alpha_{AC} - \alpha_{AB}$$

Tehát a közbezárt szöget megkapjuk, ha a jobboldali irány csapásszögéből kivonjuk a baloldali irány csapásszögét.

A nyert mérési adatokat jegyzőkönyvbe vezetjük. Ennek alakját az alábbi minta mutatja:

Busszola-mérési jegyzőkönyv.

Mérőműszer neve,
száma, faja

Időjárás
Körbeosztás iránya
Összeadóállandó

Kelt
Felvevő mérnök

Mérés	Helyszín	Delejtűleolvasás		Hajlásszög (φ)	h_f	h_v	Jegyzet	Vázrajz
		E	D					
pont		tűvégen						
		o	i	o				

A jegyzőkönyv másik oldalára nem táblázat kerül, hanem a mérésakor készített vázrajz. A vázrajz esetleg a "Jegyzet"- rovatba is készíthető, de mindig nagy gondot kell rá fordítanunk.

A busszola-műszerek pontossági feltételei, melyekre nézve a műszert használat előtt meg kell vizsgálnunk, a következők:

- 1./ A kompassznak pontosnak kell lennie.
- 2./ A műszer nem tartalmazhat a delejtűre zavarólag ható anyagot.
- 3./ A libelláknak megfelelőeknek kell lenniük.
- 4./ Ha a távcső levehető, a távcsőtartó gyűrűknek egyenlőknek kell lenniük.
- 5./ Az alhidade-tengely egyenes legyen.
- 6./ A kompasskör vízszintes legyen.
- 7./ A delejtű vízszintes legyen.
- 8./ Ha a műszer távcsőlibellával fel van szerelve, akkor az irányzótengely és a távcsőlibella tengelye párhuzamos legyen.
- 9./ Az irányzótengely és a vízszintes forgástengely egymásra merőlegesen álljon.
- 10./ A vízszintes- és az alhidade-tengely egymásra merőleges legyen.

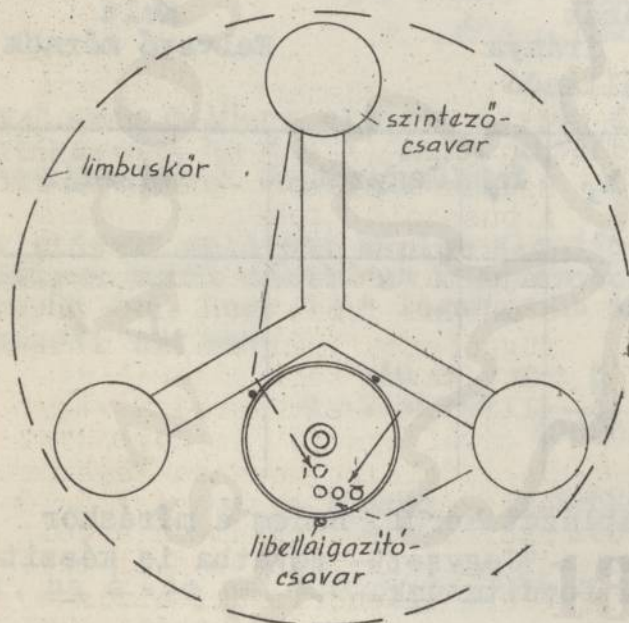
- 11./ Az irányzótengelynek és a kompassz indexvonasának központos műszernél egy függőleges síkba kell esnie. Ha a kompassz vagy a távcső külpontos, akkor az irányzótengelyen át fektethető függőleges síknak párhuzamosnak kell lennie az indexvonáson át fektethető függőleges síkkal.
- 12./ Központos műszernél az irányzótengelynek központosnak kell lennie.
- 13./ A szátkereszt megfelelő legyen.
- 14./ A magasságikör nóniusza megfelelő legyen.
- 15./ A távolságmérő lécs beosztása jó legyen.
- 16./ A paránycsavaroknak ne legyen holtmozgása.

Ad 1./ A kompassz vizsgálatát már láttuk.

Ad 2./ Hasonlóan a kompassz vizsgálatához megnézzük, hogy nincs-e a műszerben vas-anyag. Ha volna, úgy ezt a részt a műszerésszel kicseréltetjük.

Ad 3./ Az alhidade-libelláknál meg kell vizsgálnunk, hogy tengelyük merőleges-e az alhidade-tengelyre. Ecélből a műszer egyik alhidade-libelláját párhuzamos helyzetbe hozzuk két szintezőcsavarral, s beazintezzük. Ezután függőleges tengelye körül 180° -kal elfordítjuk a

műszert, s ha bejátszik a libella, akkor jó, ha azonban nem, abban az esetben a hibát fél értékig a libellaigazítócsavarokkal, s a másik fél értékig a szintezőcsavarokkal igazítjuk ki. Az alhidadésikon lévő másik libellával hasonló módon járunk el.



Ha dobozlibella van a műszeren, akkor azt két szintezőcsavar közé kell hoznunk s beszinteznünk. 180° -os elforgatás után az esetleges eltérést egyik fél értékig a libellaigazítócsavarokkal, másik fél értékig a szintezőcsavarokkal korrigáljuk.

Ad 4./ A távcsőtartó gyűrűk egyenlőségének vizsgálata úgy

történik, hogy a magasságikört "0"-ra vágatjuk be és egy függőleges lécről leolvassuk azt az értéket, amelyet a vízszintes irányszál fed. Ezután a távcsövet kiemeljük a távcsőtartó gyűrűkből, egy függőleges tengely körül elfordítjuk 180° -kal és így helyezzük vissza a gyűrűkbe. Ekkor a műszert is elfordítjuk függőleges tengelye körül 180° -mal és újból leolvasást végzünk a lécről. Ha a két leolvasás egyezik, akkor egyenlőek a gyűrűk. Ellenkező esetben a gyűrűk igazítócsavarjaival végezzük a korrigálást, vagy pedig a műszert csak egy távcsőhelyzetben használjuk.

Nyereglibellával sokkal egyszerűbben is elvégezhető az egész vizsgálat, melynek tulajdonképpen csak akkor van értelme, ha átfordított távcsővel is végzünk méréseket /elsősorban szintezésnél fontos!/.

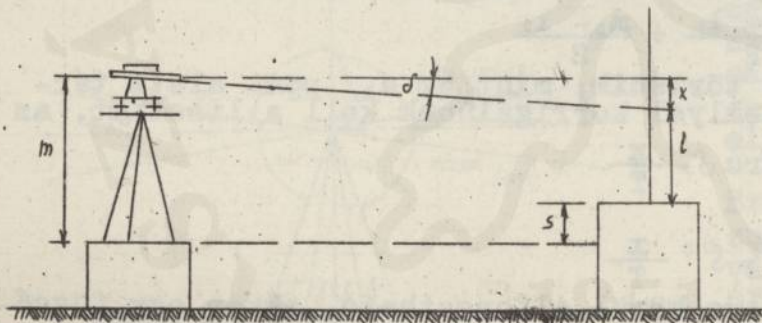
Ad 5./ Az alhidade- tengely egyenességének vizsgálatát a távcsőlibellával végezzük. Vizsgálat alatt a műszernek vízszintesnek kell lennie.

Az előzőleg megvizsgált távcsőlibellát bejátszatjuk, s lassan forgatjuk a műszert az alhidade-tengely körül. Közben figyeljük, hogy a buborék nem tér-e ki. Ha kitér, akkor az alhidade-tengely ferde. Ez a hiba régi műszereknél fordul elő, amikor a tengely kikopott. Csak műszerész igazíthatja ki a tengely leesztergályozásával, illetve új csapágy készítésével.

Ad 6./ A kompassz osztott-körének merőlegesnek kell lennie az alhidade-tengelyre. Ezt a vizsgálatot már kiigazított talpas-libellával végezzük el, amelynél tehát a felfekvés síkja párhuzamos a libella tengelyével. Ezt a libellát a beszintezett műszer kompassz-körére helyezzük különböző irányban. Ha minden helyzetben bejátszik a libella, akkor jó a műszer. Ha ellenben nem játszik be mindenütt, akkor a szögeket ferde síkban mérjük, s így helytelen eredményt kapunk. A hiba házilag is kiigazítható úgy, hogy az osztott-kör csavarjait felengedjük és vékony rézlapokat helyezünk el az osztott kör alá szükség szerint úgy, hogy az osztott kör minden irányban vízszintes legyen.

Ad 7./ A delejtű vízszintességére a vizsgálatot az előzők után a következőképen végezzük: felengedjük a delejtűt és megnézzük, hogy az osztott-kört egyenlő magasságban éri-e mind a két tűvég. Ha nem, akkor a hibát az ellensúllyal javítjuk.

Ad 8./ Az irányzótengety és távcsőlibella-tengely párhuzamossága akkor fontos, ha szintkülönbségek mérésére is használjuk a műszert. A vizsgálatot kétféleképen végezhetjük el aszerint, hogy van-e két olyan pontunk, amelyek szintkülönbségét pontosan ismerjük /ilyen pontjaink rendszerint a műszerteremben vannak/, vagy pedig nincs s ilyenkor a szabadban végezzük el a vizsgálatot.



a./ Műszerteremben van két konzolunk, melyeknek szintkülönbségét ismerjük. A műszert ráhelyezzük az egyik állványra és beszintezzük, ezután a másik állványra helyezett függőleges mérőlécről leolvassuk azt az értéket, melyet a vízszintes irányszál fed.

Az ábrán látható adatok: "m" műszermagasság /szalaggal mérjük meg/, "s" a két pillér közötti szintkülönbség, "l" lécleolvasás, "x" a hiba, melyek segítségével felírhatjuk a következő összefüggést:

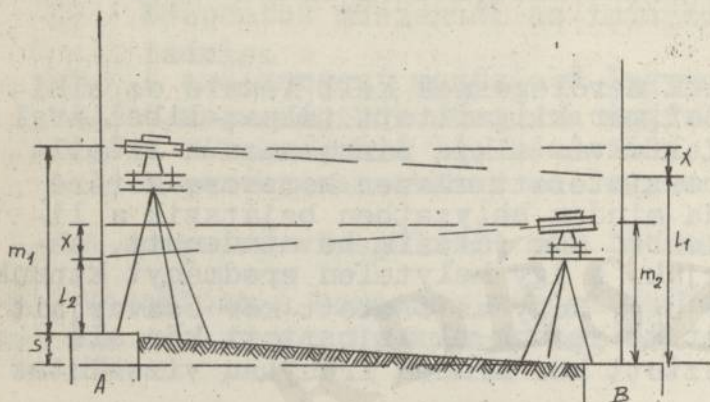
$$m = s + l + x$$

ebből a hiba:

$$x = m - s - l$$

Ha tehát $m - s - l = 0$, akkor jó a műszerünk. Ha nem jó, akkor a távcső vízszintes szálát a helyes "l" & "x" leolvasásra állítjuk be és az így kitért libellát egész értékig az igazítócsavarjaival játszátjuk be. Ha a libella nem igazítható, akkor a vízszintes irányszálát állítjuk be az "l + x" értékre a szálkereszt függőleges igazítócsavarjaival. Vannak műszerek, amelyeknél sem a libellának, sem a szálkeresztnek nincsenek igazító-csavarjai: ezeknél a távcső tárgylencséje emelhető ill. süllyeszthető igazítócsavarok segítségével. Itt tehát a tárgylencse középpontját toljuk el addig, amíg a vízszintes szál az "l + x" értékét fedi.

b./ Ha nincs két olyan pontunk, amelynek a pontos szintkülönbségét ismerjük, akkor egy közel vízszintes, egyenlőhalású terepen két pontot jelölünk meg, egymástól kb 20-30 m-re, mert ilyen távolságból a mm-eket még jól tudjuk érzékelni. Ezután az "A" pontban felállítjuk



a műszert, melynek távcsövén - miután a távcsőlibellát bejátszatuk - először visszafelé nézünk át és a közvetlenül a szemlencse elé helyezett lécen egy írón hegyét helyezzük a kis körnek látott távcső látómezejének középsébe. Ezt az értéket, melyet az írón hegye jelöl, leolvassuk a lécről, miáltal az "m₁" műszermagasságot kaptuk. Most megirányozzuk a

"B"-ben jelállított léce, s erről a vízszintes irányzál által ki-metszett l₁ lécleolvasást végezzük. Ezután "B"-ben állunk fel műszerünkkel és az előzőkhöz hasonlóan meghatározzuk "m₂"-t és "l₂"-t. Ekkor az ábra alapján felírhatjuk:

és
az elsőből kivonva:

$$\begin{aligned} s + l_2 + x &= m_1 \\ -m_1 \pm s - l_1 \pm x & \\ \hline -m_1 + l_2 + x &= m_2 - l_1 - x \\ 2x &= m_1 + m_2 - l_1 - l_2 \\ x &= \frac{m_1 + m_2}{2} - \frac{l_1 + l_2}{2} \end{aligned}$$

a másodikat

E képlet adja a hibát. Vagy más alakban ugyanez a képlet:

$$x = \frac{m_1 - l_1}{2} + \frac{m_2 - l_2}{2}$$

A kiigazítás itt is ugyanugy történik, mint az a./ pont alatt tárgyalt esetben. Az a szög, amellyel korrigálnunk kell a libellát, az

$$\text{arc } \delta = \frac{x}{T}$$

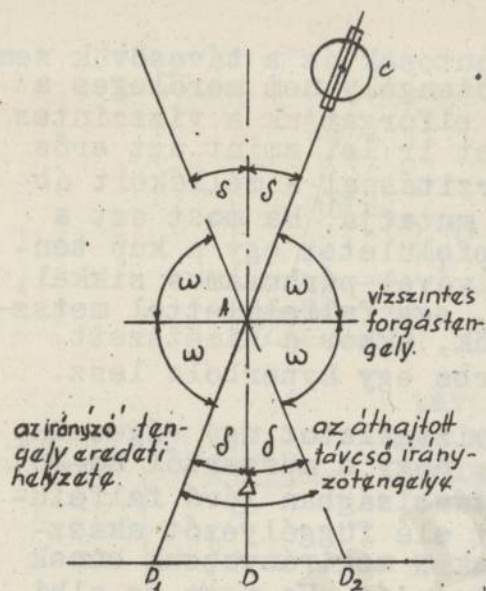
képletből ki is számítható:

$$\delta', \delta'' = \frac{x}{T}$$

c./ Ha távcsövünk hossz tengelye körül elforgatható, akkor egy függőleges lécről beszinteszített libella mellett leolvasást végezzük, ezután a távcsövet hossz tengelye körül 180°-kal elfordítjuk, s ha az ekkor végzett leolvasás az előbbiétől eltér, akkor megfelezzük a különbséget és erre az értékre igazítjuk ki a műszert az a./ alatt tárgyaltak szerint.

Ad 9./ Az irányzó tengely és a vízszintes tengely merőlegességéről a következő módokon győződhetünk meg:

a./ Ha a távcső a műszerről leemelhető és hossz tengelye körül elforgatható, akkor felállunk egy fal előtt 20-30 m-es távolságban. Ekkor a távcső első helyzetében beintünk a falon egy írón hegyét, azután a távcsövet hossz tengelye körül 180°-kal elforgatjuk és ismét beintjük az írón hegyét a falon. Ha az így megjelölt két pont nem esik egybe, akkor a szálkeresztet igazítócsavarai segítségével a felezési pontra kell bevágnatni.

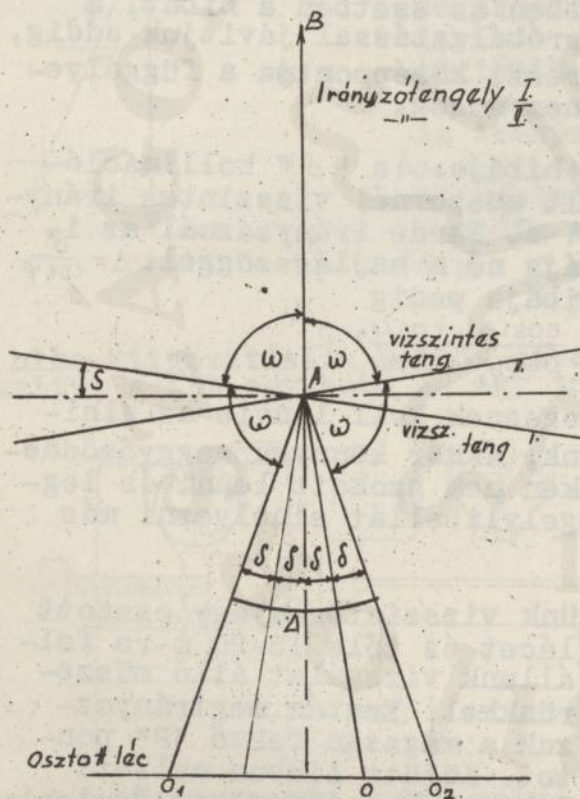


b./ Ha a távcső nem fordítható el a szálkereszt középpontja hossz tengelye körül, de áthajtható és a műszer központosságáról még nem győződhetünk meg, akkor a vizsgálatot segédműszerrel végezhetjük el. "A" pontban felállunk a megvizsgálandó műszerrel, tőle 10-15 m-re "C" pontban a segédműszerrel. A megvizsgálandó műszer elé 15-20 m távolságban egy vízszintes léce helyezünk el, amelyen cm-es beosztás van. Most összeirányozzuk a két műszert és a segédműszerrel leolvassuk a lécről /D₁/ Ezután a vizsgálat alatt lévő műszer távcsőjét áthajtjuk és újra leolvassuk a lécről /D₂/ Ha D₁ = D₂ akkor a műszer jó. Ha nem egyenlő, akkor az ábra szerint:

$$90^\circ - \omega + \delta ; \quad \delta = 90^\circ - \omega \quad \text{Továbbá}$$

$$180^\circ - 2\omega = \Delta, \text{ kettővel osztva: } 90^\circ - \omega = \frac{\Delta}{2} = \delta$$

Tehát a D₁, D₂ távolságot megfigyezzük, s az így kapott "D"-re toljuk az irányzóköröket annak vízszintes igazítócsavarjaival.



c./ Ha az irányzó tengely központosságáról meggyőződünk, akkor nincs szükségünk segédműszerre. "A"-t olyan helyen választjuk ki, hogy tőle nagy távolságra magas, kiálló csúcsot /pl. törőncsúcs/ találjunk; a másik irányban az AB egyenesre merőlegesen a műszertől mintegy 15-20 m távolságban egy vízszintes, cm-ekre osztott léce helyezünk el.

Ezután "A" pontból megirányozzuk "B"-t és a távcsővet áthajtván leolvassuk a lécről az "O₁" értéket. Most az alhidatengely körül elfordítva az áthajtott távcső műszert ismét megirányozzuk "B"-t s visszahajtván a távcsővet a lécről leolvassuk "O₂"-t. Itt

$\omega + \delta = 90^\circ$ ahonnan $\delta = 90^\circ - \omega$
Az ábra szerint: $360^\circ - 4\omega = \Delta$
vagy négyvel osztva:

$$90^\circ - \omega = \frac{\Delta}{4} = \delta, \text{ tehát}$$

$$\Delta = 4\delta$$

Vagyis itt a négyszeres hibát kapjuk. A helyes lécleolvasás lesz:

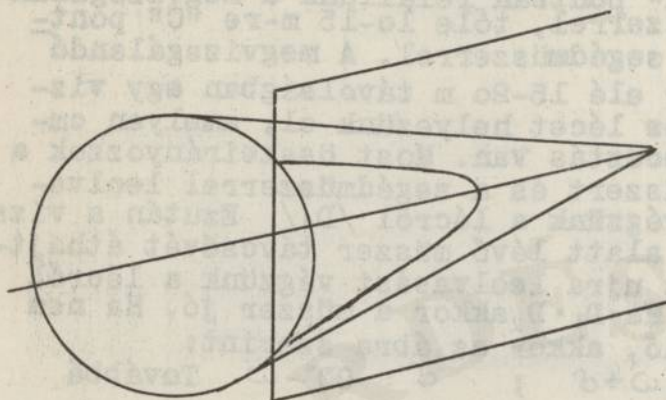
$$O = O_2 - \frac{O_2 - O_1}{4}$$

Erre a pontra kell állítanunk az irányzó tengelyt, s ekkor a helyes leolvasás értéke:

$$O = \frac{4 O_2 - O_2 + O_1}{4} = \frac{3 O_2 + O_1}{4}$$

d./ Vannak olyan műszerek amelyek nem központosak és a távcsővük sem áthajtható. Tudnunk kell, hogyha az irányzótengely nem merőleges a vízszintes tengelyre, akkor ha a távcsövet elforgatjuk a vízszintes tengely körül, az irányzótengely kupfelületet ír le, amint azt erős

torzitással a mellékelt ábra mutatja. Ha most ezt a kupfelületet egy a kup tengelyével párhuzamos sikkal, pl. egy falfelülettel metszjük, akkor a kimetszett görbe egy hyperbola lesz.



A vizsgálatot úgy végezzük el, hogy a műszertől 20-30 m távolságban lévő falfelület elé függélyezőt akasztunk s megirányozzuk ennek zsinórját. Ha most az alhidadét lekötve a vízszintes

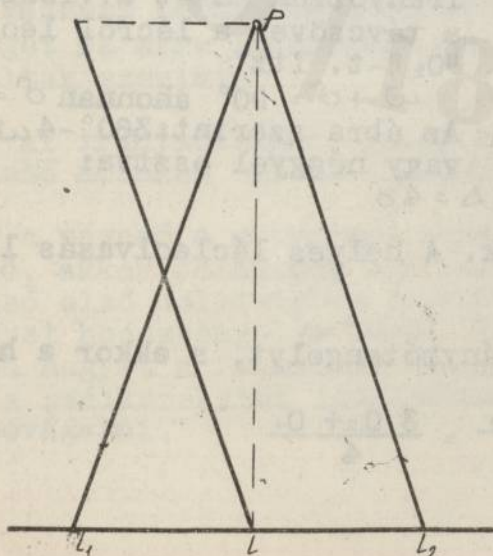
tengely körül mozgatjuk a távcsövet, akkor ha irányzásunkat vízszintes távcsőhelyzet mellett végeztük, a szálkereszt közepe egy a függélyező zsinórját érintő hyperbolát fog leírni. Ebben az esetben a hibát, a kollimációt, próbálgatással javítjuk addig, amíg a szálkereszt középpontja a függélyező zsinórján nem mozog.

Az iránymérés hibája: Aa " δ " kollimáció-hibával terhelt műszernél vízszintes irányzás mellett $\Delta = \delta$. Ferde irányzásnál az irányérték hibája nő a hajlásszöggel: $\Delta = \frac{\delta}{\cos \varphi}$

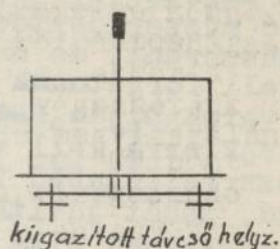
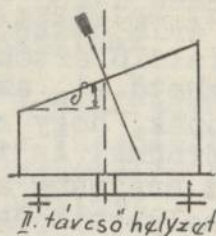
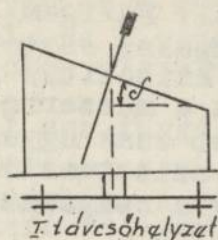
$$\Delta = \frac{\delta}{\cos \varphi_2} - \frac{\delta}{\cos \varphi_1} = \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2} \delta$$

Ad 10./ A vízszintes tengelynek merőlegesnek kell lennie az alhidade-tengelyre. Ha van tengelylibellánk, akkor könnyen meggyőződhetünk erről. De mivel busszola-műszereken nem szokott lenni és legtöbbször nem is lehet a műszerre tengelylibellát elhelyezni más módszerhez kell folyamodnunk.

Egy magasan fekvő pont alatt elhelyezünk vízszintesen egy osztott



lécet és tőle 15-20 m-re felállunk vizsgálat álló műszerünkkel. Ezután megirányozzuk a magasan fekvő "P" pontot. Kötött limbus mellett lehajtjuk a távcsövet és leolvasást végzünk a lécről: l_1 . Most háthajtjuk a távcsövet, felfedjük a limbust és áthajtott távcsővel irányozzuk meg a "P" pontot. Kötött limbus mellett újra lehajtjuk a távcsövet és újból leolvasást végzünk a lécről: l_2 . Ha $l_1 = l_2$, akkor a műszer helyes. Ha nem, akkor a műszert a limbus paránycsavarával beállítjuk az $l = \frac{l_1 + l_2}{2}$ lécleolvasásra, a



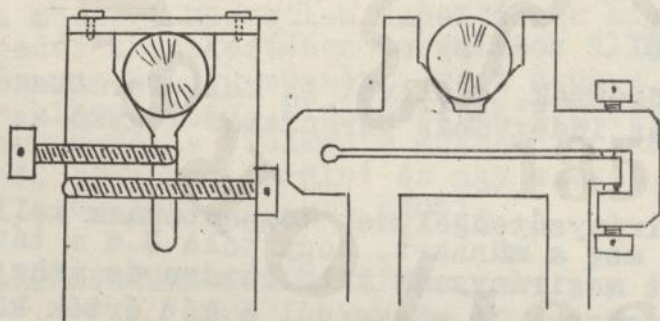
távcsövet felhajtjuk a "P" pont magasságába és addig emeljük, vagy süllyesztjük a vízszintes tengelyt az igazítócsavarokkal, amíg az irányszál közepe a "P" ponton nem fekszik.

Ha a műszer nem hajtható át, akkor a becsin-
tezett műszertől 20-25 m távolságra felakasz-
tott függőleges zsinórjára állítjuk a szál-
kereszt közepét. Ha a műszerünk jó, akkor a
távcsövet föl-le hajtva a szálkereszt állan-
dóan rajta marad a függőleges zsinórján. Ha
ellenben hibás, akkor az ábrán látható fer-
de egyenest írja le a szálkereszt közepe. A
javítás ebben az esetben is próbálgatással
történik.

Az iránymérés hibája: $\Delta = \delta \operatorname{tg} \varphi$, ahol δ az
a szög, amellyel a vízszintes tengely és al-
hidatengely közötti szög a 90° -tól eltér,
 φ pedig a hajlásszög. A szögmérés hibája pe-
dig:

$$\Delta \omega = \delta \operatorname{tg} \varphi_2 - \delta \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2} \cdot \delta$$

A hiba kiigazítására kettős távcsőtartókarnál az egyik kar fel van
hasítva s itt egy húzó és egy tolócsavart találunk. Ha a húzócsa-

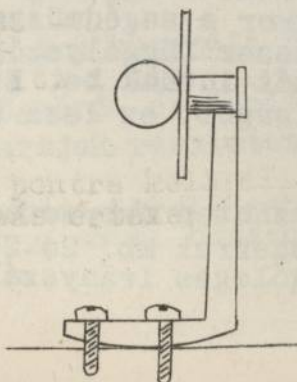


varral összebb húzzuk
a kar felhasított két
részét, akkor a víz-
szintes tengelynek ez
a vége emelkedik, el-
lenkező esetben súly-
lyed s ezáltal hozha-
tó a vízszintes tengely
az alhidadera merőleges
helyzetbe. A szerkezet
másik megoldását az
ábra mutatja.

Egy tartókar esetén annak talpa ívelt, és csavarok illetve alátétle-
mekkék segítségével változtathajtuk meg az állását. Itt tehát a táv-
csőtartókart hajlitjuk el és ezzel együtt
a vízszintes tengelyt is, amíg az alhidade
tengelyre merőleges helyzetbe nem kerül.

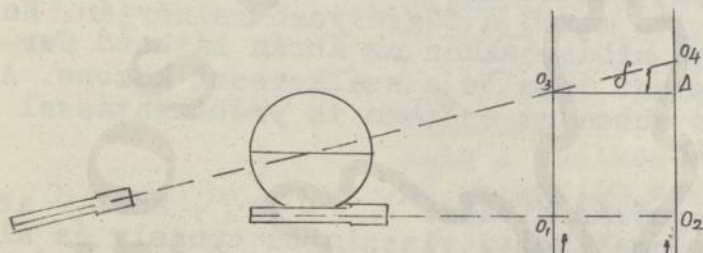
Ad 11./ A függőleges irányzósíknak és a
kompassz indexvonásának egybe kell esnie.

a./ Ha műszerünk központos, akkor segédmü-
szerrel végezzük a vizsgálatot. A két mű-
szert csak olyan messzire helyeztük egymás-
tól, hogy a segédműszerrel meg tudjuk irá-
nyozni a vizsgálat alatt álló műszert



/1.6-2 m/. Ezután összeirányozzuk a két műszert és megnézzük, hogy a segédműszer függőleges irányzála összevág-e a vizsgálat alatt álló műszer osztott körének 0-180°-os osztásával. Ha igen, akkor jó a műszerünk, de ha nem, esik össze, akkor a kompassz osztott körét el kell forgatnunk a megfelelő értékig. Ha ez a kiigazítás igazítócsavarok híján nem végezhető el, akkor is lehet a műszerrel dolgozni, csak arra kell vigyáznunk, hogy zárt sokszöget csak ugyanazzal a műszerrel szabad végigmérnünk. Az ilyen műszer szisztematikus hibát ad, tehát javítható az eredmény azáltal, hogy a csapásszögeket az indexvonás hibájával helyesbítjük.

b./ Ha műszerünk nem központos, akkor is segédműszerre van szükségünk, mellyel 2-2.5 m távolságból megirányozzuk a vizsgálandó műszer 0-180°-os indexvonását, s ekkor megkötjük mindkét műszer limbását. Ilyenkor két függőleges síkunk van: az egyik a segédműszer függőleges irányzósíkja, mely a vizsgált műszer kompasszájának 0-180°-os indexén megy át, a másik pedig a vizsgált műszer függőleges irányzósíkja. Ha e két sík egymással párhuzamos, akkor műszerünk jó, ha azonban összehajlók, akkor műszerünket javítanunk kell.



A síkok kölcsönös helyzetét úgy határozzuk meg, hogy két különböző pontban megmérjük a két sík egymástól való távolságát. Ezért a vizsgálat alatt álló műszertől 15-20 m távolságban elhelyezünk két egymástól 5-10 m-re lévő vízszintes léce egymástól párhuzamosan, majd mindkét lécről mindkét műszerrel leol-

vasást végzünk. Ha a két sík parallel, akkor

Ha azonban nem párhuzamosak, akkor

$$\Delta = \frac{O_4 - O_2}{\sin \sigma} - \frac{O_3 - O_1}{\sin \sigma}$$

és

$$\tan \sigma = \frac{\Delta}{t}$$

Ebből számítható az a "σ" szögérték, amellyel el kell fordítanunk a kompassz osztott-körét, hogy az indexvonás párhuzamos legyen az irányzótengellyel.

Ad12./ Központos műszernél az irányzótengelynek központosnak kell lennie. Erre nézve úgy vizsgáljuk meg a műszert, hogy tőle 3-4 m távolságban lévő pontos mérési jelet megirányozunk vele rendes és áthajtott távcsővel és leolvassuk a két szöget. Jó műszernél a két érték között éppen 180° eltérés lesz.

Külponstos műszernél a külponstossági értéket a következőképpen határozzuk meg: Két műszert összeirányozunk, miáltal a két függőleges irányzósík egy közös függőleges síkot fog adni. Ekkor a segédműszer távcsővét lehajjtjuk és a vizsgálat alatt álló műszer függélyezője mellé a függőleges irányzósíkba egy másik függélyezőt intünk be. Ezután megmérjük a két függélyező-zsinór közti távolságot, ez lesz a műszer külponstossági értéke.

Ad 13./ Az irányzósíalak függőleges ill. vízszintes helyzetéről úgy győződünk meg, hogy pontosan beszintezett műszerrel kb. 20-25 m-ről megirányozunk egy függélyezőzzsinórt és a függőleges irányzálnak ezen

rajta kell feküdnie. A vízszintes irányszálat pedig úgy vizsgáljuk meg, hogy a szintes műszerrel megirányozzuk egy villámhárító, vagy kerítésléc hegyét és a műszert elforgatjuk az alhidade paránycsavarja segítségével. Ha a csucs végig a vízszintes irányszálon mozdul el, akkor valóban vízszintes az irányszálunk.

Ha az irányszál nem függőleges, akkor a diafragmát és ezzel együtt a szálkeresztet elforgatjuk addig, amíg a függőleges szál nem fedí a függélyező zsinórját. A diafragma elforgatására egy kis csavart találunk a szálkereszt igazítócsavarjai mellett.

Ad 14./ A magassági-kör "0" osztásának vágnia kell a nónius θ -ával, ha az irányszótengely vízszintes. Vizsgálatnál beszintezzük a műszert és a távcsövet és leolvassunk a magassági körről. Ha a két 0 osztás nem vág, akkor a nóniust csavarjainak felengedése után a megfelelő értékig eltoljuk.

Ad 15./ A távolságmérő-berendezés vizsgálatát már ismerjük a távolságmérő-berendezéseknél tárgyaltakból.

Ad 16./ A műszeren lévő paránycsavaroknak nem lehetnek holt mozguktaik. E hiba régi műszereknél szokott előfordulni. Erre nézve úgy vizsgáljuk meg a műszert, hogy a leolvasó-készülék lupéján keresztül figyeljük az osztott-kört, miközben a paránycsavart csavarjuk. Ha egy darabig nem mozdul el a leolvasó-készülék, majd hirtelen ugrik egyet, akkor hibás a paránycsavar. Még szembeötlőbb a hiba, ha egy osztott lécet irányzunk meg és azon figyeljük az ugrást. Ilyenkor vagy a rugó, vagy a csavar rossz; ezeket ki kell cserélni.

A műszerek vizsgálatát és igazítását munka közben hetenként vagy kéthetenként el kell végeznünk, mert a csavarok munkaközben meglazulnak. Kocsin vagy vasuton való szállítás után minden esetben el kell végezni a vizsgálatokat még új műszereknél is.

A műszereket egyebekben gondosan és kiméletesen kell használnunk, óvnunk kell a nedvességtől, a hirtelen hűváltozásoktól, tehát pl. hideg helyiségből fűtött helyiségbe csak fokozatosan vihetjük be. Nem szabad a műszert közvetlen napsütésnek kitenni, mert az egyenlőtlen felmelegedés következtében torzulások állnak elő. Portól, homoktól szintén óvnunk kell a műszert, mert azok a tengelyeknél az olajjal elkeverve kikoptatják, kicsiszolják a műszert, ezért szeles idő után - különösen homokos vidéken a műszer forgáscsapjait gondosan le kell tisztítani, szárazra törülni és úgy ezeket, mint a csavarokat savmentesen vaselin-olajjal be kell kenni.

Különleges busszola-műszerek.

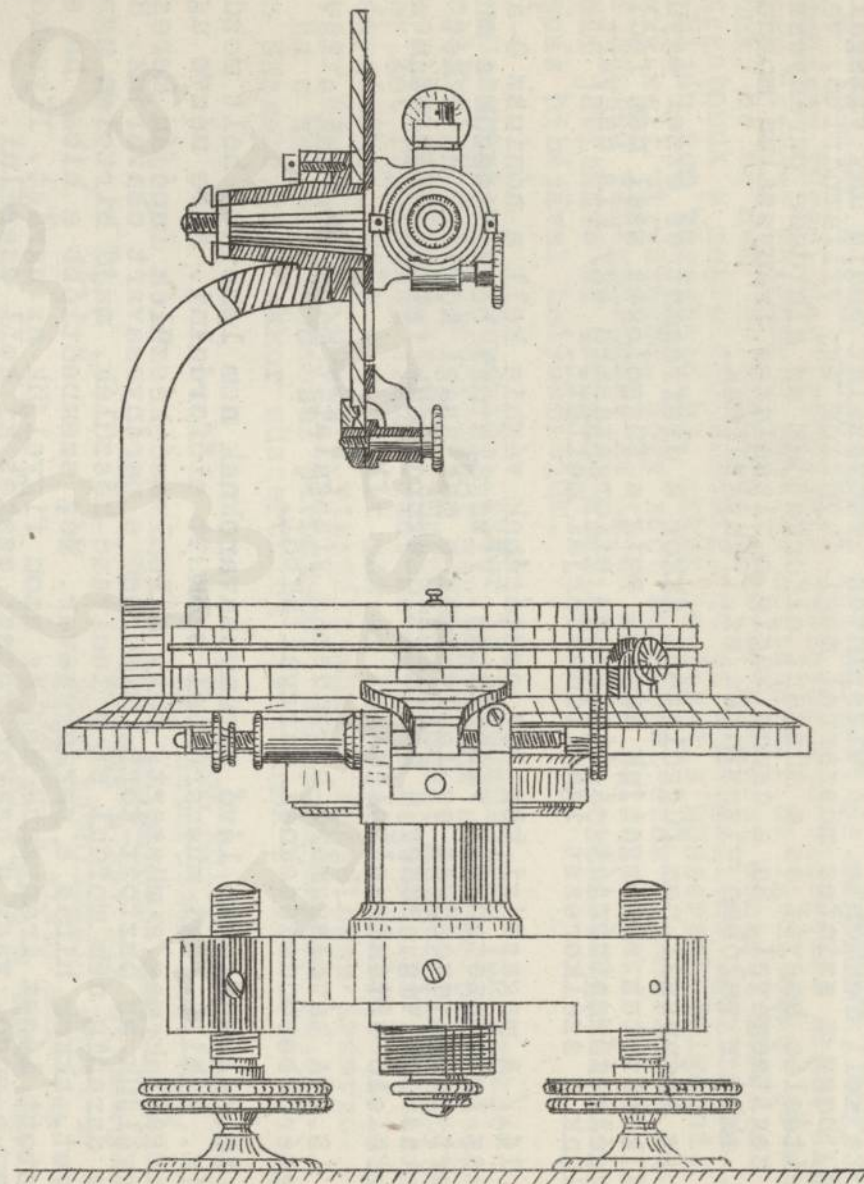
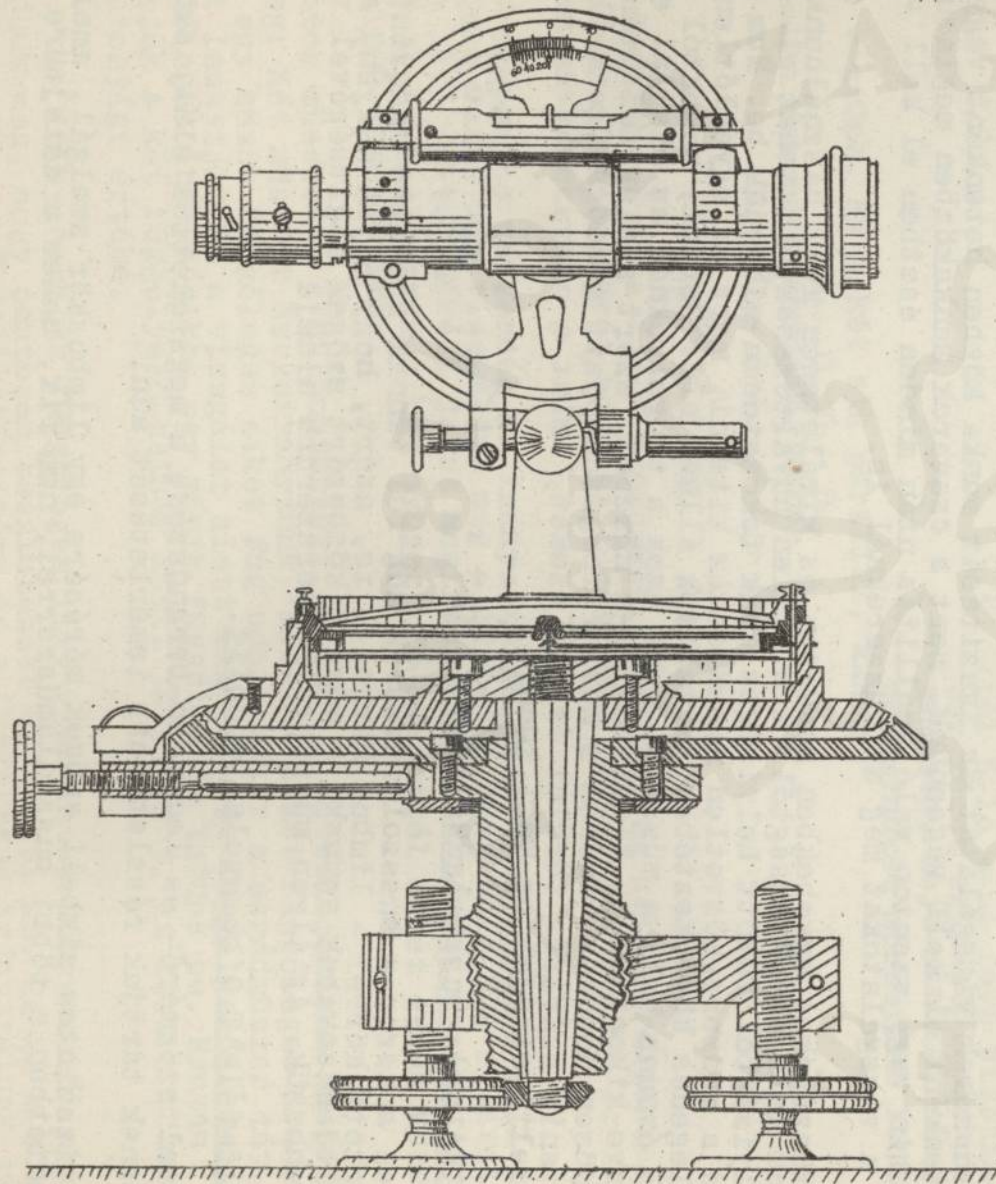
Igen sokszor a busszola-műszerek még fel vannak szerelve vízszintes osztott körrel - limbus körrel - is, azért, hogy olyan helyen, ahol delejes zavarok vannak, a mérést közbezárt szögek segítségével végzhessük. Az ilyen műszerek legkorszerűbb alakja a

Wild-féle T Q busszola-teodolit.

Mivel szögmérő- és leolvasó-berendezése a megszokottól elüt, szükségesnek tartjuk részletesebb ismertetését adni.

A vízszintes síkbeli szögek mérésére egy limbuskör szolgál, amely el-lentétben a többi busszola-műszerrel, nem fix, hanem a delejtüre van

Breithaupt-féle busszola



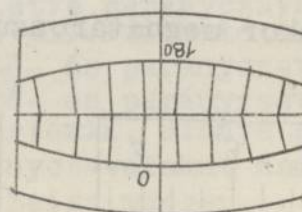
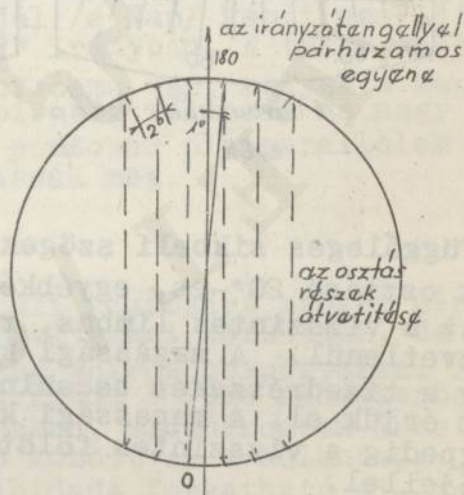
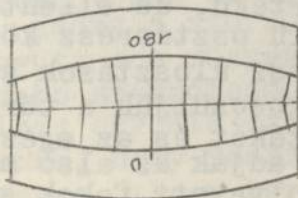
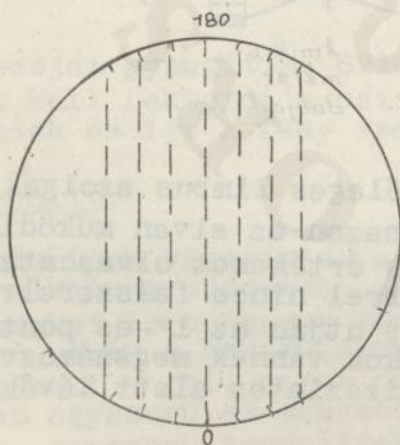
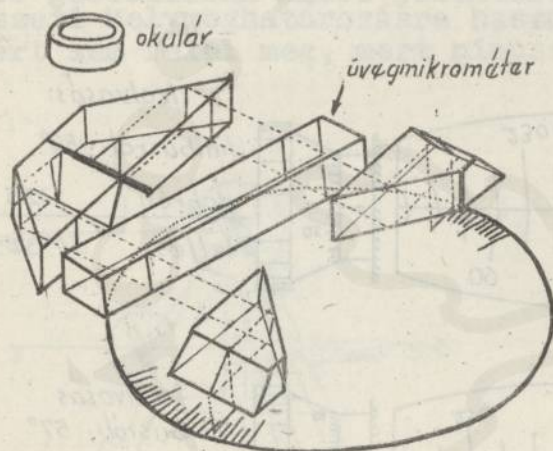
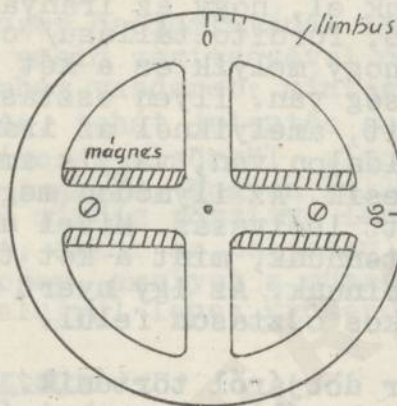
erősítve és ezzel együtt forog. A limbuskör "0" osztása a delejtű északi, "180°" osztása pedig a delejtű déli irányába esik.

Ha a műszert mint teodolitot akarjuk használni, akkor egy emelő segítségével a delejtűt a limbuskörrel együtt nekifeszíthetjük a műszer vázának és a továbbiakban kötött limbussal dolgozunk.

A leolvasóberendezés elve a következő: a műszer belsejében egy prizmarendszer van elhelyezve, mely a limbuskörnek egymáshoz 180° alatt álló beosztásait egy képbe, egymás mellé vetíti az irányzótengellyel párhuzamos egyenesekkel.

A limbuskör beosztása két fokos, a tizes fokok meg vannak számozva.

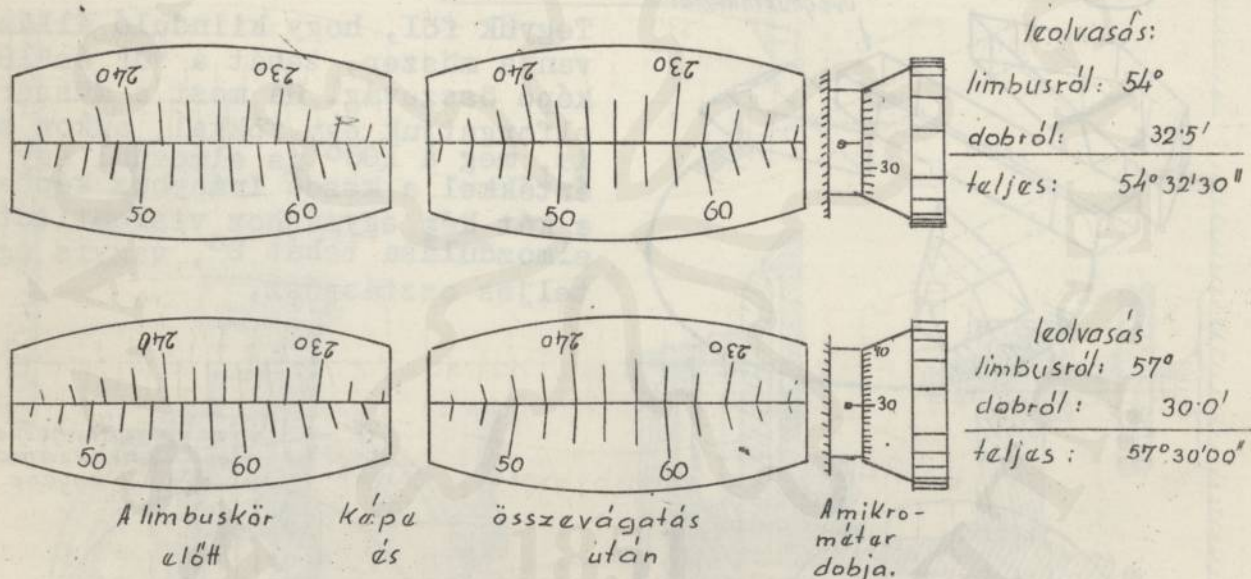
Tegyük föl, hogy kiinduló állásban van a műszer, tehát a "0" és "180°" képe összevág. Ha most a műszert elforgatjuk egy fokkal, akkor a "0" is, meg a 180° is elmozdul egy fok értékkel a kezdő irányhoz képest, a két kép egymáshoz viszontított elmozdulása tehát 2°, vagyis egy teljes osztásrész,



A vetítőberendezéssel tehát közvetlenül 1° -érték olvasható le. Ha nem teljes foknyi elfordulásról van is szó, a két kép egymáshoz viszonyított elmozdulása minden esetben kétszeres lesz. A fokérték törtrészeit egy az ábrán látható üveg mikrométerrel mérjük, mely e két kép egymáshoz való helyzetét ép egy fokkal tolhatja el.

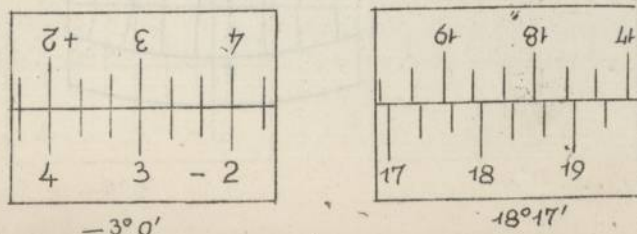
Leolvasáskor tehát csak azt kell megállapítanunk, hogy melyik az a két osztásrész, amelyik 180° -ra áll egymáshoz. Erre a célra a műszer üveg mikrométerével a limbusosztást úgy toljuk el, hogy az irányadó /alsó, egyenesállásu/ és az átvetített /felső, fordítottállásu/ osztások képei összevágjanak. Ekkor megnézzük, hogy melyik az a két tízfokos osztásrész, amelyik között 180° különbség van. Ilyen osztásrészt esetleg többet is látunk: ezek közül az azámit, amelyiknél az irányadó osztás baloldalán, az átvetített pedig jobboldalon van, vagyis amelyiknél az átvetített osztás a haladás irányába esik. Az ilyen módon megállapított két osztás felezőpontja lesz a keresett leolvasás. Mivel azonban a limbusosztás két fokos, nem kell mást tennünk, mint a két tízesosztás között lévő alásztásokat kell megszámolnunk. Az így nyert szám a teljes fokok számát adja az irányadó tízfokos osztáson felül.

A fokok törtrészeinek leolvasása a mikrométer dobjáról történik. Ez a dob 60 részre van beosztva, tehát leolvashatjuk róla a percek és becsülhetjük a tizedperceket.



A függőleges síkbeli szögek mérésére a függőleges limbus szolgál. Ennek osztása $20'$ -es, egyébként teljesen ugyanazon az elven működik, mint a vízszintes limbus, tehát erről $10'$ -es értékeket olvashatunk le közvetlenül. A magassági kör üveg mikrométerrel nincs felszerelve, így a tizedrészeket becsülnünk kell. Becslés útján az $1'$ -es pontosságot érjük el. A magassági körön az egyes fokok vannak megszámozva, mégpedig a vízszintes fölött lévők $+/$, a vízszintes alatt lévők $-/$ előjellel.

Leolvasáskor meghatározzuk a két azonos számértékű, de ellentétes előjelű osztásrész közé eső



egész alosztások számát, megbecsüljük a tört-osztás értékét és az egészet hozzáadjuk az alsó mezőben leolvasott fokok számához.

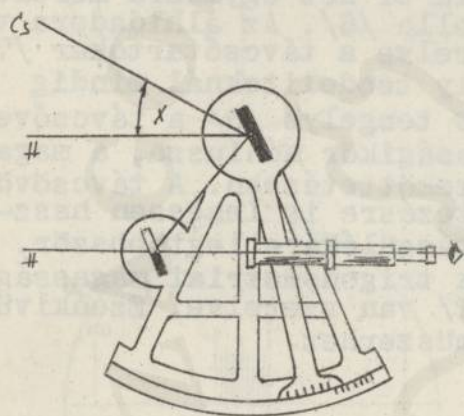
A leolvasás kis gyakorlat-tal könnyen, gyorsan végez-

hető és nem olyan fárasztó és szemrontó, mint a nómusz leolvasása, emellett az eddig használt busszola-műszerek leolvasási határértékénél sokkal pontosabb leolvasást ad. Nagy előnye még az is, hogy a műszer szintezése, irányzása és leolvasása egy helyből végezhető, éppen mert a vetített képes megoldás kiküszöböli a kétoldali leolvasást. Ezáltal a leolvasásból eredő hibák száma is le van csökkentve.

A műszer használatánál igen ügyelni kell arra, hogy a delejtűt a megkötő emelő segítségével óvatosan engedjük rá a forgó-csapra. A delejtű nehéz vasdarab: mintegy 80 mm hosszú, 10-12 mm széles, 2-3 mm vastag, tehát jelentős súlya van. Ha hirtelen engedjük le, akkor a forgáscsap elgörbül, eltompul, s így lekopva nem állhat be az észak- déli irányba. Nagyon kell ügyelni arra, hogy szállítás közben a delejtű mindig rögzítve legyen, mert ha felengedett tüvel visszük a műszert, akkor az teljesen tönkremehet. Minden műszerhez adva van egy pót csap, amelyet a műszer készletéhez tartozó csavarhúzó segítségével alulról lehet kicserélni.

A sextans.

Alsó geodéziában nincs jelentősége, felső geodéziában is csak tengerészeti helymeghatározásra használják. Geodéziai célokra már csak azért sem felel meg, mert nincsenek rajta libellák, nincs állványa

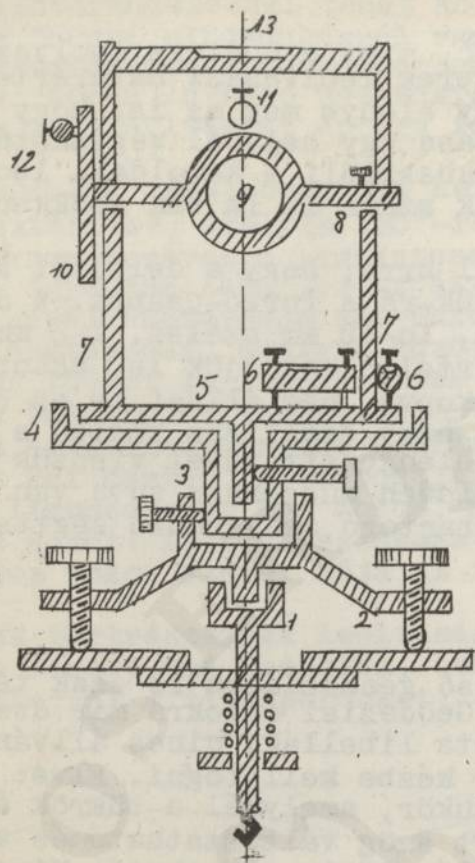


s így kézbe kell fogni. Elve: szögtüztükör, amelynél a tükrök által bezárt szög változtatható és az elmozdulás le is olvasható. Mivel szögtüztükörről van szó, a fokiv beosztása kétszeres. A fokiv egyébként 15-20 cm-es. Az egyik tükrök fix, ennek alsó fele foncsorozott felső fele átlátzó, közepén indexvonással. Ezt az indexvonást állítjuk a megmértendő jelre /pl. a Nap képe a vízben/ s a mozgó tükröt addig csavarjuk, míg a másik mérési jel /a Nap/ képét nem látjuk a "H" irányban. A tükrök előtt

4 db diafragma van, melyek a Nap fényerejét gyengítik. Színük sötétkéktől pirosig változik és nagy súlyt kell fektetni a csiszolásukra, hogy pontosan planparallelek legyenek és így a fény irányát ne változtassák meg.

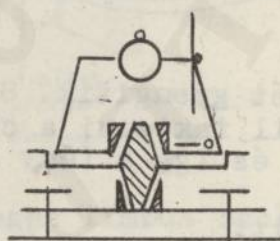
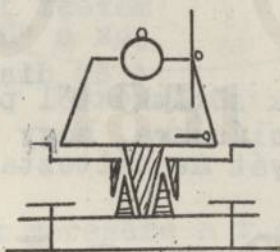
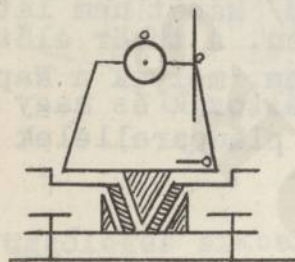
A teodolit.

A teodolitok vízszintes és függőleges síkbeli közbezárt szögek mérésére alkalmas műszerek. Régebben kupos tengelyekkel készültek, de ma már ezeket is hengeres tengelyekkel, esetleg golyós csapágyakkal látják el, akár a busszola-műszereket. A teodolitok 3-féle rendszerben készülnek: angol, német és francia rendszerben, mindháromban lehet a műszer egyszerű és szorzóteodolit. A kettő között az a különbség, hogy míg az egyszerű teodolitoknál csakis az alhidade forgatható el, tehát e műszereken csak az erre szolgáló kötő- illetve paránycsavart találjuk meg, addig a szorzóteodolitok limbosa is elfordítható az alhidadeval együtt s e műszereken 2 vízszintes kötő- és paránycsavart találunk. Újabb szorzóteodolitoknál csak egy kötő- és paránycsavar van: az átváltás egy kis emelőkar segítségével történik. Előnye ennek a megoldásnak, hogy szorzó-szögmérésnél a paránycsavarokat nem cserélhetjük össze. Ilyen berendezésű a Bosshardt-Zeiss műszer.



Ábránk a szorzóteodolit vázlatos rajzát mutatja. A teodolitoknál is megkülönböztetjük magát a műszert és az állványt, amely mindig tányéros állványfejjel van felszerelve, mert ez szilárdabb s csak így felel meg a teodolitoknál megkívánt stabilitás feltételének, s csak ezzel lehet pontos központosítást ill. pont-főlé-állást szabatosan elvégezni. A tányér rendszerint elmozdítható, hogy a központosításhoz a műszert nagyobb körön belül lehessen eltolni és így a műszer felállítását gyorsabban végezhesük el. Alul a műszeren találjuk az összekötő-részt /1/. Az adátét-részt /2/ háromlábú és ezzel van összeépítve a műszer tengelye vagy csapágya /3/. A csapágyhoz van erősítve a műszer limbusköre /4/; a csapágyban tengely van, ezen az alhidade /5/ s az alhidade-síkon helyezkedik el két egymásra merőleges libella /6/. Az alhidadera van még szerelve a távcsőtartókar /7/ is, amely teodolitoknál mindig

kettős. Ezeken nyugszik a műszer vízszintes tengelye /8/ a távcsővel /9/. A távcsőtartókarok egyikén van a magasságikör nóniusza, a magassági limbus pedig /10/ a távcsővel van összeköttetésben. A távcsővön rendszeren távcsőlibella /11/ van, hogy szintezésre is lehessen használni a műszert. A magassági-kör leolvasó készülékére legtöbbször, de különösen azoknál a műszereknél, amelyek trigonometriai magasságmérésre is szolgálnak, ellenőrzőlibella /12/ van szerelve. Ezenkívül még egy tengelylibella is /13/ tartozik a műszerhez.



1./ A német rendszerű szorzóteodolitnál a kupos csapágyba nyulik a limbuskör tengelye, amely belül szintén csapágnak van kiképezve, mert ebbe nyulik az alhidade csapja.

2./ A francia rendszerű szorzóteodolitnál a limbuskör csaphüvelye közrefogja az alátétrész csapját, amely viszont hüvelye az alhidade tengelynek.

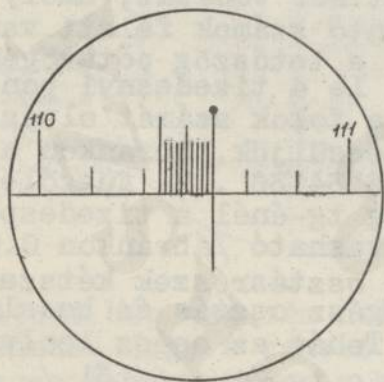
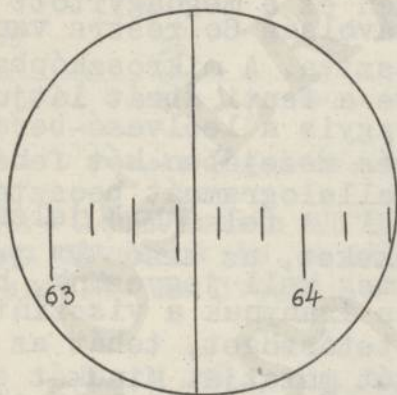
3./ Az angol rendszerű szorzóteodolitoknál csak egy csap van: mégpedig a limbuson s így az alátét-részen és az alhidáden csak csaphüvelyt találunk. Ábráinkon kupos csapokat és csapágákat látunk, de a mai modern műszereknél hengeres csapokkal és csaphüvelyekkel ugyanezeket a rendszereket találjuk meg.

A teodolitműszerektől nagy pontosságot kívánunk meg. A műszerek pontossága különböző aszerint, hogy milyen pontosságú mérés céljaira szolgálnak. Legegyszerűbb teodolitoknál a leolvasás mőniusszal történik, leolvasási határérték $1'$, $30''$, $20''$ szokott lenni. Sokszögelésre használják. Ha szorzó-rendszerű, akkor használható negyed-, ötörendű háromszögelésre is. A mőniust a műszerre szerelt lupéval olvassuk le, a leolvasás mikéntjét már ismerjük. A teodolitokon mindig két leolvasóberendezés van áttellenes oldalon s kiigazított teodolitnál az egyik oldalon leolvasott szögérték a másik oldalon leolvasott szögértéktől 180° -kal különbözik. Ettől az eltérés csak igen kis érték lehet: a leolvasási határértéknek legfeljebb a háromszorosa.

Nagyobb pontosságot ad a leolvasásnál a becslő mikroszkópos leolvasás. A limbuson az egy foknak megfelelő távolság 6 részre van osztva; a limbuskörnek ezt az osztásrészét, amely $10'$ -nek felel meg, a

mikroszkóp tárgylencséje megnagyítja felvetíti a mikroszkóp képsíkjába. Itt egy planparallel üveglap van, amelyen a kisebb műszereknél egy indexvonás van, amelynek segítségével az ábra szerint a $10'$ tizedrészét becsülhetjük, tehát a leolvasás $63^\circ 30'$, hozzáadva a $10'$ megbecsült 0.4 értékét, lesz:

$$63^\circ 34'$$



Nagyobb műszereknél a planparallel lapon a limbuskör felvetített, megnagyított képének megfelelő távolság két vonással meg van jelölve, a két vonás közötti rész pedig $10'$ részre van felosztva. Tehát ezek a kis osztásrészek $1'$ -nek felelnek meg. Ha a főosztás a lemezen levő egy alosztással sem vág pontosan, akkor becsüljük a tizedeket, s így e leolvasóberendezéssel - ha a limbus legkisebb osztásának értékét " M "-mel, a planparallel lemezen lévő osztásrészek számát " n "-nel jelöljük, akkor $\frac{10'}{10 \cdot n}$ értéket olvashatunk le. Ábránk szerint ez az érték:

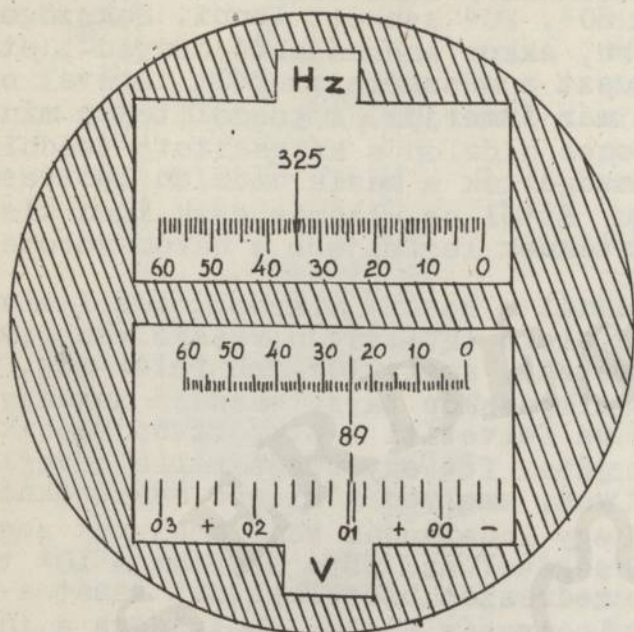
$$\frac{10'}{10 \cdot 10} = \frac{10'}{100} = 0.1' = 6''$$

A leolvasásnál először a limbuson lévő osztások értékét határozzuk meg az üveglapon lévő osztás indexvonásáig. Ez egy ponttal van megjelölve. Innen visszafelé az üveglapon lévő osztásrészeket olvassuk le, a tizedeket becsüljük. Ábránk a főosztásról közvetlenül leolvashatunk $110^\circ 30'$ -et, itt vág ugyanis a sűrű osztás kezdővonala, amelytől balra 3.8 osztásrészt olvashatunk le, s így a végleges leolvasás:

$$110^\circ 33.8' = 110^\circ 33' 48''$$

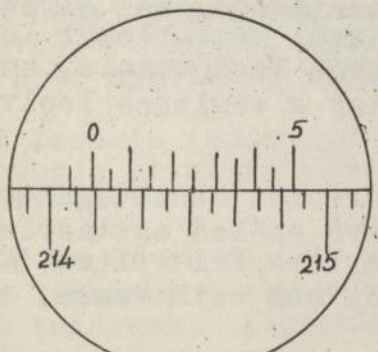
Igen fontos, hogy ha a limbus valamely osztásrészét összevágattuk az üveglap indexvonásával, akkor az üveglapon lévő szélső osztásrész pontosan vágjon az előző limbusosztással, vagyis a felvetített kép és az üveglapon lévő két osztás összeessen. Ha nem esik össze, akkor

a mikroszkópot az igazítócsavarjaival az osztott körköz közelebb vagy távolabb kell vinni, amíg a megfelelő osztásrészek nem váganak.



Ugyanezen az elven alap-
szik és ugyanilyen pontos-
ságot ad a Bosshardt-Zeiss
tachiméter leolvasása is
mind a vízszintes /Hz/,
mind a magassági körön. E-
zek az osztásrészek meg-
felelően elhelyezett priz-
mák segítségével egy a táv-
cső mellett lévő mikrosz-
kópba vannak felvetítve. Az
osztott kör beosztása 1° -os.
A képsíkban lévő tüveglemen-
zen ez a megnagyított 1° -os
távolság 60 részre van fel-
osztva. A mikroszkópba néz-
ve a fenti ábrát látjuk,
vagyis a leolvasó-berende-
zés mezejében két fehér pa-
rallelogrammát beosztások-
kal. A felső "Hz" jelzésű

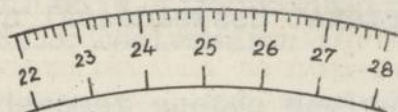
mutatja a horizontális, vízszintes irányértékeket, az alsó "V" jelű
a függőleges, vertikális síkbeli szöget, de meg kell jegyeznünk, hogy
e műszer nem a hajlásszöget, tehát a kérdéses iránynak a vízszintes-
sel bezárt szögét, hanem ennek pótszögét, a tetőszöget, tehát az i-
rányzótengelynek a függőlegessel ezárt szögét mutatja. Mindkét ská-
lán sűrű, álló beosztást találunk, amelyen az 1° -nak megfelelő távol-
ság van 60 részre beosztva, tehát 1 kis beosztás $1'$ -nek felel meg.
Ebben a beosztásban látjuk valahol az osztott kör vonását, amely meg
van számozva. Az alsó mezőben a fokokat jelentő számok felett van a
sűrű osztás, alatta pedig egy másik, amelyről a tetőszög pótszögének,
tehát a dőlésszögnek a tangensét olvashatjuk le 4 tizedesnyi pontos-
sággal. A szögértékek leolvasásánál először a fokok számát olvassuk
le, majd a percekét és a perc tizedrészeit becsüljük. Ábránkon a víz-
szintes síkbeli szög eszerint: $325^\circ 34.6' = 325^\circ 34' 36''$. A függőleges
síkban pedig $89^\circ 24.2' = 89^\circ 24' 12''$. A dőlésszög tg-énél a tizedespont
után álló két első számjegy közvetlenül leolvasható /ábránkon 0.00/
s mivel a beosztás csak 5-ös, azért az egyes osztásrészek kétszere-
sen számítanak. Ábránkon leolvasható még 4 egész osztás és becslés-
sel 8 tized, tehát 48, ennek kétszerese 96; Tehát az egész leolvasás,
a dőlésszög tangense: $+ 0.0096$. Tudjuk, hogy $c \text{ tg } + \infty / - \text{től } - \infty / -$
ig terjed. Az előjelek a mikroszkópban /ábra!/ is jelezve vannak. Ha
a tg-érték nagyobb az egységnél, akkor azt a mikroszkópon kívül, a
távcső mellett a magassági kör burkolatán
lévő beosztáson észlelhetjük.



Leolvasás: $214^\circ 8' 30''$.

A nóniuszos mikroszkópnál a mikroszkóp
képsíkjában egy nóniusz van egy tüveglemen-
ze bekarcolva. Az osztott körön a legki-
sebb osztásrész értéke $5'$, a nóniusznak
pedig 10 osztásrésze van, tehát a leolva-
sási határérték $30''$. A használata ugyan-
az, mint az egyszerű nóniuszé.

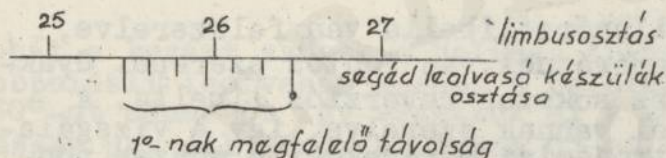
Paránycsavaros mikroszkóppal csak a felső-
rendű háromszögelésnél használatos műsze-
rek vannak felszerelve.



Ezeknél a műszereknél az osztott kör legkisebb osztásrészének értéke $10''$. Mivel az erős nagyítású mikroszkópban a fokok számozása nem látható, ezért a mikroszkóp mellett egy segéd-leolvasókészülék van, amelyről a leolvasást $10''$ -ig végezzük. A körön egymás

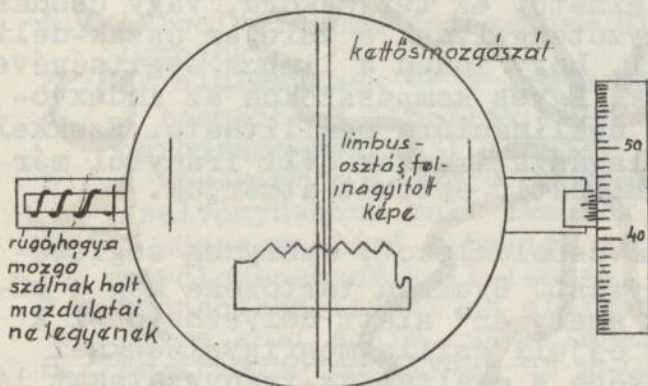
mellett két osztás van, a külsőt nagyítja meg a mikroszkóp: ez $10''$ -es beosztás, melyen nincs számozás, a belső fokos beosztás, ezen vannak a számok. Erről a belső beosztásról végzünk leolvasást a se-

géd-leolvasó-készülék segítségével, amely egy közönséges lupéval van felszerelve. A segéd-leolvasó-készüléken ponttal megjelöl indexvonásig olvasuk le a fokokat és ezután a segédléptéken /nem nőniusz/ olvassuk visszafelé a $10''$ -es értékeket. Te-



az ábra leolvasása: $26^{\circ}20''$. A $10''$ -nél kisebb értékeket a mikroszkópban olvassuk le. A mikroszkóp képsíkjában egy üveg lap van kettős szálla. Az üveglap s így a kettős szál is egy mikrométercsavar

segítségével eltolható. A csavar menetmagassága a limbus felvetített osztástávolságának az "n"-ed része, tehát ha közrefogunk egy limbus-osztást a kettős szállal és ezután a csavart "n"-szer körülfor-
gatjuk, akkor a kettős szál a következő osztást fogja közrefogni. Ha eltérés volna, akkor a mikroszkóp igazítócsavarjaival közelebb, vagy távolabb visszük a lim-



nagyított kép meg nem felel a mikrométercsavar "n"-szeres körülfordításának. Hogy a csavar teljes körülfordításainak a számát ne kelljen számolnunk, azért a képsíkba egy fogazás van elhelyezve, amely fogazás két fogának az egymástól való távolsága egyenlő egy csavarmenetmagassággal. Ha az "n" érték 5-tel egyenlő, akkor a csavarmenetmagasságának, tehát 2 fogközti távolságnak az értéke $2''$. A $2''$ -nek a törtrészeit pedig a mikrométercsavar dobjáról olvashatjuk le. Ha a dob 60 részre van beosztva, akkor róla $2''$, ill, ha a tizedeket még becsüljük, $0.2''$ olvasható le. A leolvasásnál tehát a fogazásnál látható limbusosztást közrefogjuk a mozgó kettős szállal a mikrométercsavar segítségével. Ezután leolvassuk a fésünk látható indexvonástól, amely rendszeren egy behasítással van megjelölve, visszafelé a teljes fogak számát, ezt megszorozva kettővel kapjuk a percek számát. Ezután a dobról végzünk leolvasást, ezt szintén megszorozzuk 2-vel, s kapjuk a másodperceket. A tuloldali ábrában az indextől két fog van: ez $4''$ -nek felel meg. A dobról leolvassunk 43.6 -et, ez 2-vel szorozva $87.2''$. Az egész leolvasás tehát

$$26^{\circ}20' + 4'' + 87.2'' = 26^{\circ}25'27.2''$$

A kettős leolvasási határértéket azért használják, mert a műszerek két, diametrálisan elhelyezett leolvasókészülékkel vannak felszerelve és a két leolvasás számtani közepét kell venni, így a 2-vel való szorzást és osztást kiejthetjük s a középértéket összeadással nyerjük. Pl. a fenti leolvasásunk volt

I. mikroszkópon: $26^{\circ} 2' 48.6''$

II. mikroszkópon: $26^{\circ} 2' 48.3''$

A középérték lesz: $26^{\circ} 25' 31.9''$

A teodolitokon mindig 2 leolvasóberendezés van /okát az alábbiakban látni fogjuk/, sőt régen 4 leolvasóberendezést is használtak.

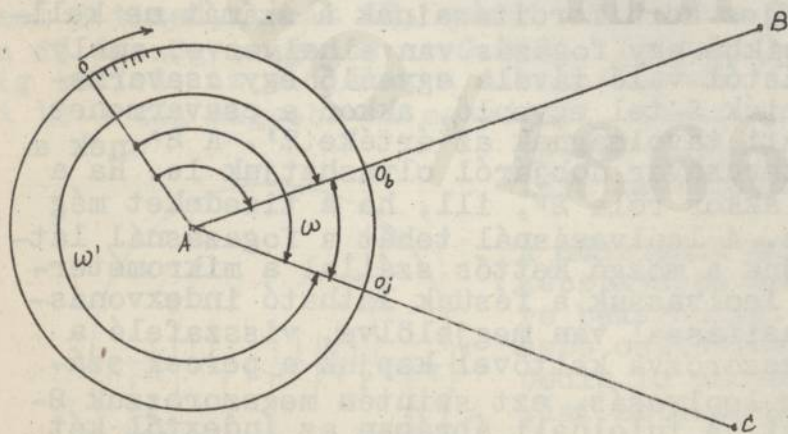
Hogy a helyes vetületbeli szöget kapjuk, szintesenünk kell a műszert: ezt a célt 2 alhidade-libella szolgálja.

A távcső szilárdságát minden esetben kettős távcsőtartókar biztosítja.

A magassági körre rendszeren egy ellenőrzőlibella van felszerelve, melynek a trigonometriai magasságmérésnél van fontos szerepe. Gyakran van a távcsővön is libella, ez sokszor reverziós libella. A teodolitok nyereglibellával is fel vannak szerelve, így a vizsgálatok könnyebben végezhetők és asztronómiai méréseknél a műszer pontosabban színtezhető be. Ha a teodolit mindezekkel fel van szerelve, akkor egyetemes vagy univerzális műszernek nevezzük, mert mindenféle mérési munkára használható.

Némely műszerre kompassz is szerelhető, ez teljeskörű, vagy csonka lehet. Az utóbbi esetben az irányzótengelynek a delejes észak-déli irányba való beállítására szolgál, hogy innen a limbus segítségével delejes csapásszögeket mérhessünk. Egyes kompasszokon az indexvona elforgatható, ill. a delejes deklinációra beállítható. Ezekkel a műszerekkel közvetlenül a csillagászati észak-déli iránytól mérhetjük a csapásszögeket, ha a deklináció értékét átmérjük.

A távcsöveken gyakran találunk távcsőoldalékot, amelynek segítségével Nap ellen végezhetünk irányzást. Gyakran tartozéka még a műszernek egy ezüstözött gyűrű is, amely 45° alatt helyezhető el a távcső elé és arra szolgál, hogy éjjeli csillagmegfigyeléseknél gyenge fényt vetíthessünk a távcsőbe s ezáltal az irányszálakat láthassuk.



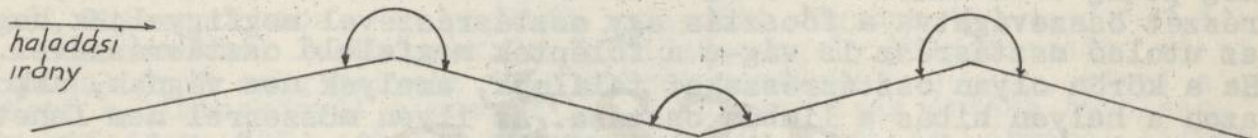
A teodolitok limbusköre mindig az óramutató járásával egyenlő irányban van osztva, mégpedig 360° -ra, vagy 400^g -re. A teodolittal mért irányértékek kezdőirányát a limbuskör "0" osztásrésze jelöli ki, ez tehát tetszőszerinti, s csak attól függ, hogy a műszert hogyan állítottuk fel. Ha tehát csak egy irányértéket mérünk,

akkor az határozatlan. Teodolittal rendszerint közbezárt szöget mérünk, ez a két szögcsár irányértékének a különbsége. Egy pontból kiinduló két irány két közbezárt szöget jelöl ki, amelyek összege

360°-kal egyenlő. Ábránkon $\omega + \omega' = 360^\circ$. Teodolittal a megmérendő szöget úgy határozzuk meg, hogy arccal a szög felé fordulunk, a közbezárt szöget megkapjuk, ha először megirányozzuk a baloldali szög-szárát, majd a jobboldalit és a jobboldali leolvasásból levonjuk a baloldali leolvasást:

$$\omega = 0_j - 0_b$$

Sokszögmenet esetén megirányozzuk az elmaradó szög-szárát, majd az előremenő szög-szárát és az előremenő szög-szár megirányzásánál nyert irányértékből kivonjuk az elmaradó szög-szárnál nyert leolvasást.



Tehát a bezárt szögek a haladás irányában balkéz felé esnek. Ha a jobboldali leolvasás kisebb a baloldalinál, akkor a jobboldalihoz 360°-ot adunk és így végezzük el a levonást. Ebben az esetben a műszer úgy áll, hogy a limbus 0°-os osztása a két szög-szár között van.

A teodolit-műszerek pontossági kellei.

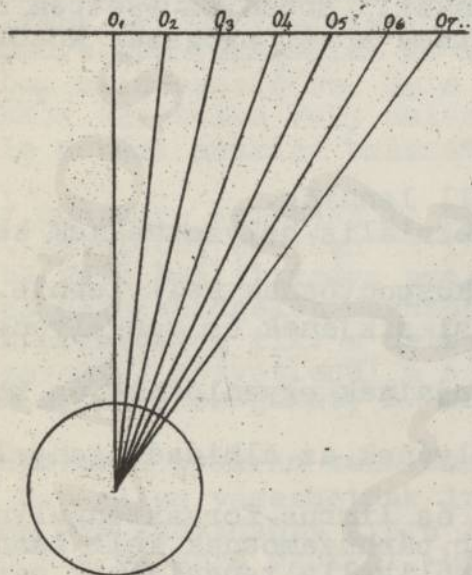
- 1./ A beosztásoknak pontosnak kell lenniök.
- 2./ A leolvasóberendezéseknek diametriális helyzetűeknek kell lenniök.
- 3./ Az alhidadenak és a limbusnak központosnak kell lennie.
- 4./ A leemelhető libellák felfekvési síkjának és tengelyének párhuzamosnak kell lennie.
- 5./ A vízszintes tengely forgáscsapjainak egyenlőknek és kör-szelvényűeknek kell lenniök.
- 6./ A műszeren lévő libellák tengelyének az alhidade-tengelyre merőlegeseknek kell lennie.
- 7./ Szorzóteodolitnál az alhidade- és limbus-forgástengelynek egybe kell esnie, vagy legalább párhuzamosnak kell lennie.
- 8./ Az irányzótengelynek és a távcsőlibella tengelyének párhuzamosnak kell lennie.
- 9./ Az irányzótengelynek és a vízszintes forgástengelynek egymásra kölcsönösen merőlegesnek kell lennie.
- 10./ A vízszintes - és az alhidade-tengelynek egymásra kölcsönösen merőlegesnek kell lennie.
- 11./ Az irányzótengelynek központosnak kell lennie.
- 12./ Az irányzószálaknak megfelelőeknek kell lenniök.
- 13./ Igazított műszereknél vízszintes távcsőhelyzet mellett a magasságikör "0" osztásának egybe kell vágnia a magasságikör nóniuszának "0" osztásával.
- 14./ A távolságmérő berendezésnek helyesnek kell lennie.
- 15./ A paránycsavaroknak nem szabad holt mozgásokat végezniök.

Ad 1./ Vizsgálat a beosztásokra nézve: Mindezekelőtt megnézzük, hogy a nóniusz két végső osztása pontosan egybevág-e a főosztás megfelelő két osztásával. Ha nem egyezik, akkor két eset lehetséges: vagy hibás a nóniusz, vagy pedig túlságosan közel vagy messze fekszik az osztott körtől. Utóbbi esetben a nóniuszt kilyebb vagy beljebb kell tolni, ami könnyen eszközölhető, mert a nóniusz lemezén a száritó-csavarok részére hosszukás, szélesebb nyílás van, amelyet a csavarfej



eltakar. A csavarok felengedése után a nóniusz-lapocska kis értékig eltolható, és így a hiba korrigálását lehetővé teszi. Kisebb hibát tudunk kijavítani akkor, ha a nóniusz az osztott kör mellett fekszik, mintha az osztott kör felett helyezkedik el.

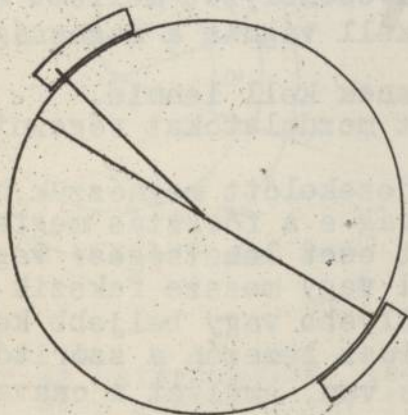
A nóniusz vizsgálata után az osztott körök osztásait ellenőrizzük, még pedig $5-10^\circ$ -onként elforgatva a műszert és a nóniusz "0" osztásrészét összevágatva a főosztás egy osztásrészével megfigyeljük, hogy az utolsó osztásrész is vág-e a főlépték megfelelő osztásrészével. Ha a körön olyan osztásrészeket találunk, amelyek nem vágnak, akkor azon a helyen hibás a limbus osztása. Az ilyen műszerrel nem lehet dolgozni, hanem le kell csiszolni a hibás osztásrészeket és az egész kört újra kell osztani. Ez a hiba ritkán fordul elő, mert a műszerek köreit igen pontos osztógépekkel osztják, az ilyen hibával terhelt műszert nem szabad átvennünk.



Hogy magának, a nóniusznak osztásrészei helyesek-e, arra nézve úgy vizsgáljuk a műszert, hogy a vízszintes kör nóniuszának vizsgálata esetén egy vízszintes, a függőleges kör nóniuszának vizsgálatánál pedig egy függőleges osztott lécről végezünk leolvasásokat úgy, hogy a nóniusznak mindig az egymásután következő osztásrészeit vágatjuk egybe a főosztás osztásrészeivel. Tehát a műszert egymásután elforgatjuk a parányicsavarral, a leolvasási határértéknek megfelelő szögértékkel. A leolvasás értékeinek a tg.-függvény szerint kell nőniük. Gyakorlatilag, mivel a szögértékek igen kicsik, egymással egyenlők lesznek az értékek, mert növekedésüket nem tudjuk érzékelni. Ha valamelyik osztásnál kisebb, vagy nagyobb változást találunk, úgy a nóniusz hibás, és azt ujjal kell

kicseréltetni. Fontos a vizsgálatnál az, hogy a léce pontosan legyen elhelyezve.

Ad 2. A leolvasóberendezéseknek diametrális helyzetűeknek kell lenniük. A vizsgálatot a kompasszra nézve már láttuk a busszolásnál. A két

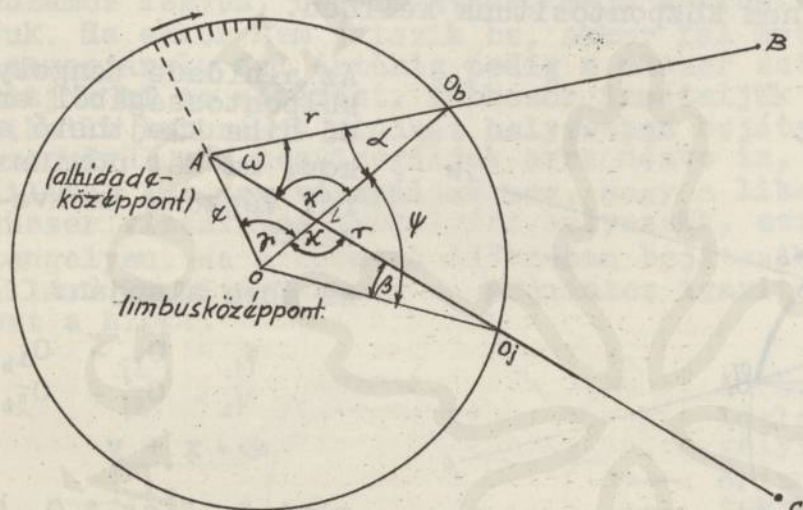


leolvasás közti különbségnek 180° -nak kell lennie. Ha a 180° -tól való eltérés minden leolvasásnál állandó érték, akkor az említett feltétel nincs ki-elégítve. E hibát úgy igazítjuk ki, hogy az egyik nóniuszt megfelelő értékkel eltoljuk. A kiigazítást a főosztásnak azon a részén végezzük, ahol az osztógép a kör osztását megkezdte. Ezen a helyen jobb műszereknél a kezdőosztás felett egy pontot találunk. Ha a műszeren végzett leolvasásoknál azt látjuk, hogy a 180° -tól való eltérés nagysága változó és a max. eltérés után 0-ig csökken, majd ismét nő, akkor

nem központos a műszerünk, de a diametrális leolvasóberendezések feltétele ki van elégítve. Ha azonban a különbség változó ugyan, de 0-ra sohasem csökken, akkor a műszer alhidadetengelye külpontos és a leolvasókészülékek sem diametrálisak.

Az ilyen műszer iránymérési hibáját ki tudjuk ejteni azáltal, hogy két leolvasókészüléken végzünk leolvasást s ezeknek számtani közepét vesszük, amint ezt a következő pontnál látni fogjuk.

Ad 3./ Vizsgálat az alhidadetengely központosságára nézve: ill. az ebből származó hiba. "A" pontból irányzást végzünk "B" majd "C" felé s a nóniuszokról leolvasunk. Az alhidadetengely külpontossága miatt a kívánt " ω " szög helyett " ψ " szöget mértünk: $\psi = O_j - O_b$, mivel a szöget a limbuskörről olvassuk le. A külpontosság értéke távolságban kifejezve "e", szögben kifejezve pedig " γ ". Az ábrából látható:



$$\kappa = 180^\circ - / \omega + \alpha /$$

$$\kappa = 180^\circ - / \psi + \beta /$$

A baloldalnak egyenlősége miatt a jobb oldalnak is egyenlőnek kell lenniük, tehát

$$\omega + \alpha = \psi + \beta$$

$$\omega = \psi + / \beta - \alpha /$$

De $/ \beta - \alpha / = \Delta \omega$, ezzel az értékkel tér el ω a ψ -től.

O_b AD háromszögből:

$$\frac{e}{r} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

O_j AD háromszögből:

$$\frac{e}{r} = \frac{\sin \beta}{\sin / \gamma + \psi /}$$

$$\sin \alpha = \frac{e}{r} \sin \gamma = \frac{e \sin \gamma}{r} \doteq \alpha \quad ; \quad \sin \beta = \frac{e}{r} \sin / \gamma + \psi / = \frac{e \sin / \gamma + \psi /}{r} \doteq \beta$$

Az arcusra való áttérés az " α " és " β " szögek kicsisége miatt engedhető meg.

$$\alpha' = \rho'' \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin \gamma$$

$$\beta = \rho'' \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin / \gamma + \psi /$$

$$\Delta \omega = \beta' - \alpha' = \rho'' \cdot \frac{e}{r} \cdot / \sin / \gamma + \psi / - \sin \gamma /$$

Mivel $\sin / \gamma + \psi / - \sin \gamma = 2 \cos \frac{\gamma + \psi + \gamma}{2} \cdot \sin \frac{\gamma + \psi - \gamma}{2}$, lesz:

$$\Delta \omega = 2 \rho'' \cdot \frac{e}{r} \cos \frac{2\gamma + \psi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2}$$

Amint látjuk, a külpontosságból eredő szög hiba egyenesen arányos az "e" excentricitással, függ a " γ " és " ψ " szögektől és fordítva arányos, "r"-el.

Mikor lesz $\Delta \omega = 0$?

Ha: 1./ $e = 0$

2./ $r = \infty$

3./ $\sin \frac{\psi}{2} = 0$, vagyis $\frac{\psi}{2} = 0^\circ$ vagy 180°

4./ $\cos / \gamma + \frac{\psi}{2} / = 0$, vagyis $\gamma + \frac{\psi}{2} = 90^\circ$ vagy 270°

Amint a 2./-ből látszik, nagyobb sugaru lombuskörrel pontosabban mérhetünk. Régebben ezért használtak nagy limbusköröket.

Levezetett képletünkéből megállapítható az is, hogy $\Delta\omega$ mikor éri el maximális értékét: akkor, ha "e" nagy, "r" kicsi, továbbá ha a sin és cos. egyidejűleg maximum. Ebben az esetben

$$\cos \frac{2\theta + \psi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} = 1$$

és

$$\Delta\omega_{\max} = 2\varphi \frac{e}{r}$$

Pl. $r = 80 \text{ mm}$; $e = 0.01 \text{ mm}$

$$\Delta\omega_{\max} = 2.206265'' \cdot \frac{0.01}{80} = 51''$$

Tehát elég nagy hibát ad a kis központossági érték is, s ugyanezt a hibát kapjuk közbezárt szögünkben is, ha nem pontosan állunk fel a pontunk fölé, vagyis ha nem központosítunk kellően.

Az alhidade-tengely központosságából eredő hiba kiejthető akkor, ha két nóniuszról végzünk leolvasást?

Az ábra alapján:

$$\psi_1 = O_{Ij} - O_{Ib}$$

$$\psi_2 = O_{Ij} - O_{Ib}$$

$$\omega = x + y$$

mert " ω " az $A O_{Ij} O_{Ib}$ háromszög külső szöge. Mivel pedig a kerületi szög a fele az ugyanazon köríven nyugvó középponti szögnek:

$$x = \frac{\psi_1}{2} ; y = \frac{\psi_2}{2}$$

Vagy az értékeket behelyettesítve " ω " egyenletébe:

$$\omega = \frac{\psi_1}{2} + \frac{\psi_2}{2} = \frac{O_{Ij} - O_{Ib}}{2} + \frac{O_{Ij} - O_{Ib}}{2}$$

Közös törtvonalon:

$$\omega = \frac{O_{Ij} - O_{Ib} + O_{Ij} - O_{Ib}}{2}$$

A jobboldalhoz hozzáadva és kivonva 90° -ot:

$$\omega = \frac{O_{Ij} - O_{Ib} + O_{Ij} - O_{Ib}}{2} + 90^\circ - 90^\circ$$

Közös nevezőre hozva a jobboldalt és elvégezve a műveleteket:

$$\omega = \frac{O_{Ij} + /O_{Ij} \pm 180^\circ/}{2} - \frac{O_{Ib} + /O_{Ib} \pm 180^\circ/}{2}$$

Tehát a helyes közbezárt szöget kapjuk, ha két nóniusszal dolgozunk. Általános szabályként jegyezzük meg: minden irányzás után először az I., majd a II. nóniuszon kell leolvasást végeznünk. Irányadónak az I-es nóniuszról leolvasott szögértéket vesszük és ehhez hozzáadjuk a II-es nóniuszról leolvasott szög 180° -kal megváltoztatott /+ vagy -/ értékét és az összeget osztjuk 2-vel. Így kapjuk a helyes értéket a másik szögszárnál is.

Pl: $O_{I_1} = 36^\circ 42' 20''$

$O_{II_1} = 216^\circ 42' 30''$

Ebből a helyes $O_j = 36^\circ 42' 25''$

A két nóniuszleolvasás közötti eltérés igazított műszernél legfeljebb a leolvasási határérték 3-szorosa lehet.

Pl. 10"-es leolvasási határértékkel bíró műszernél:

$O_{I_b} = 359^\circ 36' 10''$

$O_{II_b} = 179^\circ 35' 40''$

$O_b = 359^\circ 35' 55''$

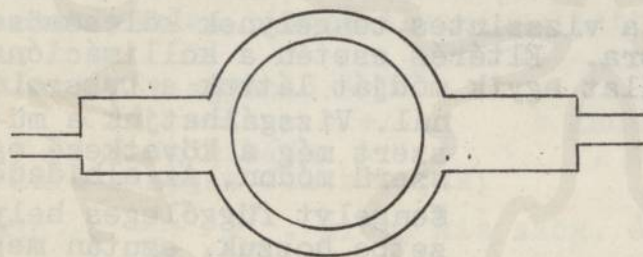
Ezt kivonva a fenti O_j -ből:

$\omega = O_j - O_b; \quad 396^\circ 42' 25'' - 359^\circ 35' 55''$

$\omega = 37^\circ 06' 30''$

/Láttuk, hogy 360° -ot kellett O_j -hoz adnunk, hogy a kivonást elvégezhessük, mivel túlhaadtunk egyszer a limbus "0" osztásán./

Ad 4./ A leemelhető libellák tengelyének párhuzamosnak kell lennie a felfekvési síkjukkal. E feltételre nézve a műszert szintesítenünk kell előbb, azután hajthatjuk végre a vizsgálatot. A libellát a műszerre helyezve, úgy, hogy a libella két szintezőcsavarral párhuzamos legyen, bejátszatjuk, majd a libellát 180° -kal elfordítjuk. Ha ekkor nem játszik be, akkor fél értékig a libella igazító csavarjával, fél értékig pedig a műszer szintezőcsavarjával igazítjuk ki az eltérést. Többször ismételjük ezt mindaddig, amíg a libella buborékja mindkét helyzetben bejátszik. A tengelylibellát ezenkívül még megvizsgáljuk arra nézve is, hogy nincs-e keresztbenállása. Ezt úgy vizsgáljuk meg, hogy a libellát egy beszintezett műszer vízszintes tengelyére helyezzük, ezután lassan forgatjuk a tengelyen. Ha a buborék állandóan bejátszik, akkor nincs keresztbenállás. Ha kitér, akkor a vízszintes igazítócsavarokkal igazítjuk ki ezt a hibát.

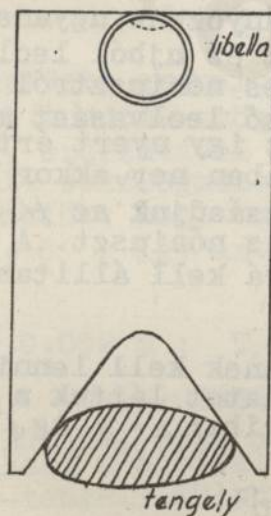


Ad 5./ A tengelycsapok egyenlőtlenségét kiigazított tengelylibellával tudjuk ellenőrizni. A távcső vízszintes tengelyére helyezzünk egy tengelylibellát. Ha az bejátszik, akkor a távcsövet kiemeljük a távcsőtartókar csapjaiból és 180° -kal elfordítva egy függőleges tengely körül víz-

szahelyezzük. A libellát ráhelyezve, ha a buborék kitér, akkor a két csap nem egyenlő. Házilag kiigazítani nem lehet. A műszer azonban használható eredeti távcsőállás mel-

lett, de átfektetett távcsővel ilyen műszerrel nem mérhetünk. Arra nézve, hogy a vízszintes tengely csapjai körkereszt-szelvényűek-e, a vizsgálatot úgy végezzük el, hogy a tengelyre egy igazított tengelylibellát helyezzünk, a műszert beszintezzük, ezután lassan elforgatjuk a távcsövet és figyeljük a libellát. Ha a libella buborékja nem tér ki, akkor a tengelycsap körkereszt-szelvényű. Ha kitér, akkor elliptikus; műszerésszel le kell esztergályoztatni.

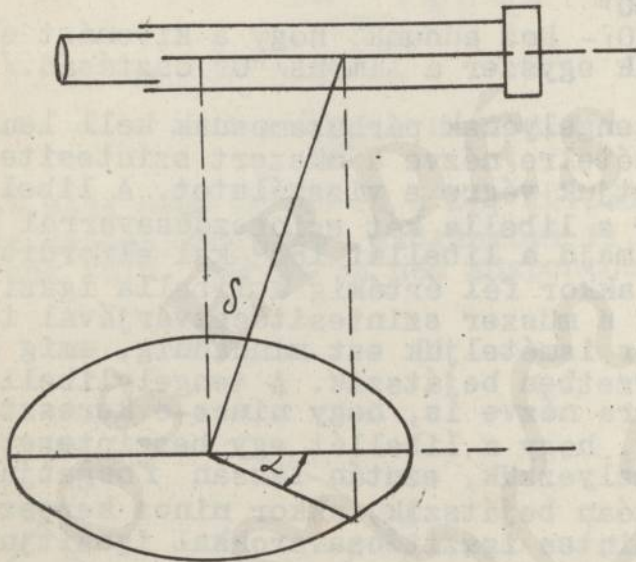
Ad 6./ Az összes libellák vizsgálatát láttuk már a busszola-műszereknél.



Ad 7./ Szorzóteodolitoknál az alhidade-tengelynek és a limbus-tengelynek egybe kell esnie, vagy legalábbis párhuzamosnak kell lenniük.



A műszert mindig az alhidadeval szintesítjük, mert azon vannak a libellák. Ha szintesítés után megkötjük az alhidadet és a limbus-t kiengedve forgatjuk a műszert, akkor hiba esetén a libellák kitérnek. Az ebből származó iránymérési hiba: $\Delta = \delta \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi$,

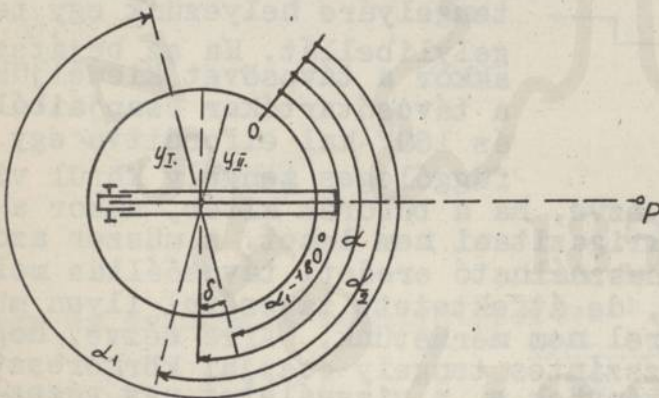


hol " φ " a hajlásszög, az " α " az ábra szerint a mért irányunktól az elhajlás vízszintes vetületének a szöge, " δ " pedig a tengelynek a függőlegestől való elhajlása; számítható a tengelylibella buborékjának maximális kitéréséből, ha a libella érzékenységet ismerjük. A szögmérés hibája:

$$\Delta \omega = \delta / \cos \alpha_2 \operatorname{tg} \varphi_2 - \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \varphi_1 /$$

Ad 8./ Az irányzótengely és libellatengely párhuzamosságára nézve a vizsgálatot láttuk a busszola-műszereknél.

Ad 9./ Az irányzótengelynek és a vízszintes tengelynek kölcsönösen merőlegesnek kell lennie egymásra. Eltérés esetén a kollimációnak nevezett hibát kapjuk. A vizsgálat egyik módját láttuk a busszola-

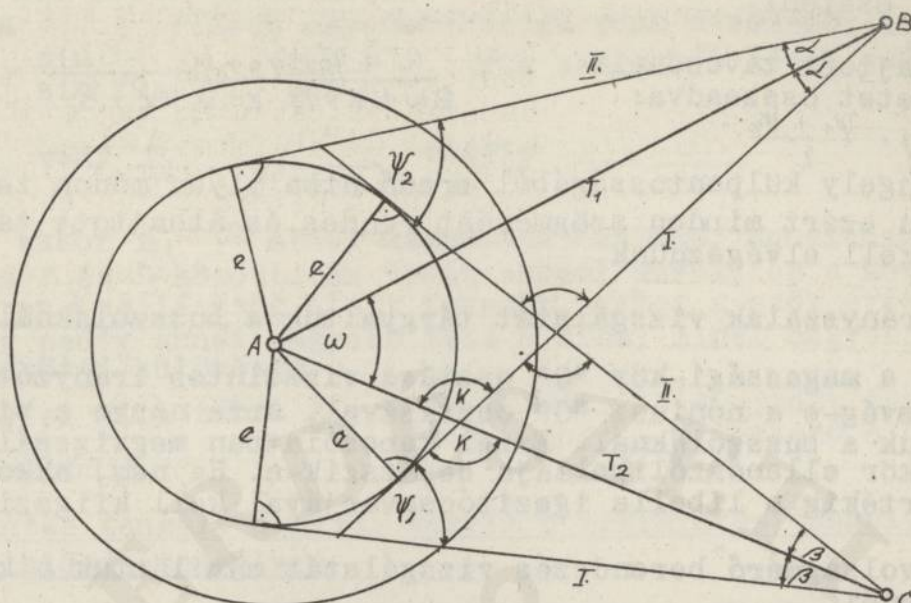


nál. Vizsgálhatjuk a műszert még a következő egyszerű módon. Az alhidade-tengelyt függőleges helyzetbe hozzuk, ezután megirányozunk egy nagy távolságban lévő pontot és leolvasást végzünk az I. nóniuszról α_1 . Ezután áthajtjuk a távcsövet, újból megirányozzuk ugyanazt a pontot és újból leolvasunk az I-es nóniusztról α_2 . Az első leolvasást megvál-

toztatjuk most 180° -kal, lesz $\alpha_2 \pm 180^\circ$. Ha az így nyert érték egyezik az " α_1 "-al, akkor jó a műszer, ha ellenben nem, akkor $\alpha_2 - \alpha_1 \pm 180^\circ$ értéknek a felét véve, ezt hozzáadjuk az $\alpha_1 \pm 180^\circ$ hoz, miáltal nyerjük " α "-t erre állítjuk be az nóniuszt. A szátkereszt ekkor el fog térni a "P" ponttól, tehát rá kell állítani a szátkereszt igazítócsavarjaival.

Ad 10./ A vízszintes forgástengelynek merőlegesnek kell lennie a függőleges tengelyre. Az erre vonatkozó vizsgálatot láttuk a busszola-műszernél. Ebből a hibából származó iránymérési hiba: $\Delta = \delta \operatorname{tg} \varphi$, hol " φ " a hajlásszög. A szögmérés hibája pedig

$$\Delta \omega = \delta \operatorname{tg} \varphi_2 - \delta \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1}{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2} \cdot \delta$$



Ad 11./ Az irányzótengelynek központosnak kell lennie. Vizsgáljuk meg az irányzótengely külpontosságából származó hibát! Legyen a műszer alhidade-tengelye "A"-ban "e" pedig jelentse az irányzótengely külpontosságát. Meg akarjuk mérni a BAC szöget. Irányzást végzünk rendes távcsőhelyzet mellett a "B" felé aztán a "C" felé. Az " ω " szög helyett a két irány a ψ_1 szöget zárja be. Ezután áthajtjuk a távcsövet és újra megirányozzuk a B és C pontokat. Az áthajtott távcsőnél a két irányzótengely az " ω " helyett a " ψ_2 " szöget zárja be. Ha csak rendes távcsőhelyzet mellett mérjük a szöget, akkor

$$\kappa = 180^\circ - \omega - \alpha \quad \text{és} \quad \kappa = 180^\circ - \psi_1 - \beta$$

A fenti két egyenlőségéből:

$$\omega + \alpha = \psi_1 + \beta \quad \text{s innen:} \quad \omega = \psi_1 + \beta - \alpha$$

Az " ω " szög hibája: $\Delta\omega = \beta - \alpha$, mert " ω " helyett ψ_1 -et mértünk. Az ábra alapján felírhatjuk:

$$\sin \alpha = \frac{e}{T_1} \approx \alpha'' \quad , \text{ mivel kis szög, és így } \alpha'' = \rho'' \cdot \frac{e}{T_1}$$

$$\sin \beta = \frac{e}{T_2} \approx \beta'' \quad \text{és} \quad \beta'' = \rho'' \cdot \frac{e}{T_2}$$

ezeket behelyettesítve a $\Delta\omega$ képletébe:

$$\Delta\omega = \rho'' \cdot e \cdot \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) = \rho'' \cdot e \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2}$$

A levezetett egyenletből kiolvasható, hogy az irányzásnál külpontosságából eredő $\Delta\omega$ szöghiba "e"-vel, T_1 és T_2 különbségével egyenesen, T_1 és T_2 szorzatával fordítottan arányos. A jegyzet második részében tárgyalt sokszögmeneteknél az oldalaknak azért kell közel egyenlőknek lenniök, hogy ez a hiba kiessék. Ebben az esetben ugyanis $T_1 - T_2 \approx 0$ s így az egész szorzat 0-vá válik, tehát $\Delta\omega$ szöghiba kiesik.

Pl. $e = 0.002 \text{ m}$; $T_1 = 220 \text{ m}$; $T_2 = 20 \text{ m}$. A szöghiba

$$\Delta\omega = 206265 \cdot 0.002 \cdot \frac{200}{220 \cdot 20} = 19''$$

Ebből látjuk, hogy a hiba $T_1 = T_2$ esetén kiesnék de látjuk azt is, hogy ezzel a hibával szemben nem olyan érzékeny a mérés, mint az alhidade-tengely külpontosságával szemben. A hibát kiejthetjük úgy is, hogy a mérést áthajtott távcsővel is elvégezzük és a két mérési eredmény számtani közepét vesszük. Ugyanis: az előzők szerint t rendes

távcsőállás esetén:

ugyanígy áthajtott távcsőnél:

A két egyenletet összeadva:

és ebből: $\omega = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$

$$\begin{aligned}\omega + \alpha &= \psi_1 + \beta \\ \omega + \beta &= \psi_2 + \alpha \\ \hline 2\omega + \alpha + \beta &= \psi_1 + \psi_2 + \alpha + \beta\end{aligned}$$

Az irányzótengely kulponatosságából eredő hiba ilyen módon teljesen kiesik, éppen ezért minden szögmérést rendes és áthajtott távcsőhelyzet mellett kell elvégeznünk.

Ad 12./ Az irányszálak vizsgálatát tárgyaljuk a busszoláknál.

Ad 13./ Hogy a magassági-kör "0" osztása vízszintes irányzótengely mellett egybevág-e a nóniusz "0" osztásával, arra nézve a vizsgálatot már láttuk a busszoláknál. Ezzel kapcsolatban megvizsgáljuk, hogy a magassági-kör ellenőrzőlibellája bejátszik-e. Ha nem, akkor a hibát teljes értékig a libella igazítócsavarjával kell kiigazítanunk.

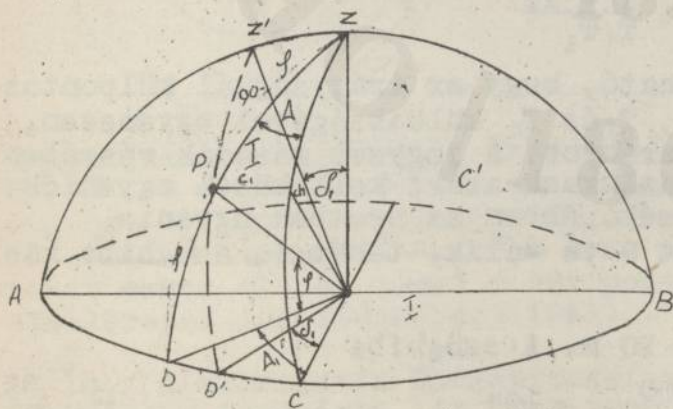
Ad 14./ A távolságmérő berendezés vizsgálatát már láttuk a közvetett távolságmérésnél.

Ad 15./ A paránycsavarok vizsgálatát ismerjük a busszolánál tárgyal-
takból.

A teodolítok tengelyhibáinak a befolyása a limbus-leolvasás értékére.

Ha egy nem igazított, tehát hibákkal terhelt műszerrel végzünk irány-
zást egy P pont felé, akkor a limbus leolvasási értékünk más lesz,
mintha egy teljesen igazított műszerrel végeztük volna a leolvasáso-
kat. Ezért a mszereket ki kell igazítanunk. A leggondosabb igazítás
mellett is maradnak a műszerben hibák, ezért vagy meg kell határoz-
nunk ezeknek a hibáknak a nagyságát és az utóbbiak szerint korrigál-
nunk kell a leolvasási értékeket, ez különösen olyan méréseknél szük-
séges, ahol nagyon meredek irányzásokot kell végeznünk, mint az astro-
nómiai méréseknél, vagy a bányaméréseknél, vagy olyan mérési eljárást
kell alkalmaznunk amely mellett a hiba kiesik. Vagyis a méréseket ren-
des és áthajtott távcsővel kell végezni.

A vízszintes és irányzótengely nem merőlegességéből származó limbus
leolvasási eltérés.



Az irányzó tengely I.C.
az ábra szerint a 90 fok-
tól "σ" érték különbség-
gel hajlik el a vízszintes
AB tengelytől

Képzeljünk el a limbus kör
fölött egy gömb szöveget,
ekkor az irányzótengely,
ha hibamentes volna, ha
tehát az AB sz IC-hez vi-
szonyítva 90 fok alatt ha-
jólna el, a CZB nagy kört
írná le a gömbszövegen. Mi-

vel azonban "σ" hibával van terhelve a D'Z' a C Z körhöz viszonyítva
parallel kört fogja leírni. Ha most egy p pontot irányzok meg, akkor
az irányzótengely a P pontban dőli a gömbszöveget, holott helyes I
tengely mellett a ch pontban kellene dőlnie. A magassági kör fekvése

D P Z lesz, tehát a magassági szög φ . A P ch az egy nagy kör része, tehát ch-nál merőlegesen metszi a C Z kört. A limbus leolvasásánál a szög hiba Δ_1 . A P Z ch egy derékszögű gömb háromszög, írható tehát:

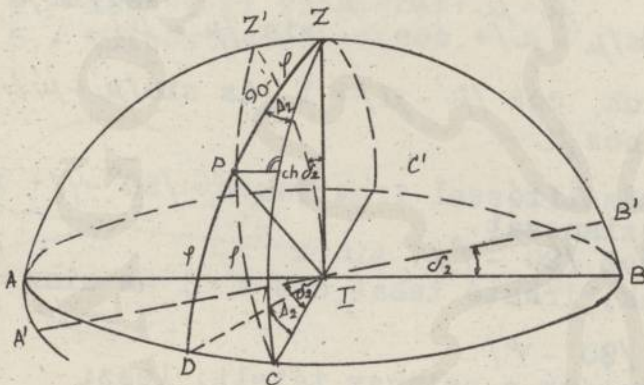
$$\sin \Delta_1 = \frac{\sin \delta_1}{\sin /90-\varphi/} = \frac{\sin \delta_1}{\cos \varphi} \quad \text{kis szögekről lévén szá írhatjuk}$$

$$\Delta_1 = \frac{\delta_1}{\cos \varphi} \quad \text{vagy} \quad \frac{\Delta_1''}{\rho''} = \frac{\delta_1''}{\rho'' \cos \varphi} \quad \text{vagyis} \quad \Delta_1' = \frac{\delta_1'}{\cos \varphi}$$

ha $\varphi = 0$ akkor $\Delta_1 = \delta_1$ minél nagyobb a φ értéke, annál nagyobb lesz az eltérés a Δ_1 és δ_1 között. Ha tehát szöget mérek, és a két irány nem ugyan olyan φ hajlásszög alatt fekszik, akkor a szög értéke hibás lesz, még pedig annál nagyobb lesz a hiba, minél nagyobb a hajlásszögek közötti különbség.

a szögmérési hiba tehát $\Delta \omega_1 = \frac{\delta_1}{\cos \varphi_2} - \frac{\delta_1}{\cos \varphi_1}$ Áthajtott távcsőnél a Δ ellenkező előjelű lesz, tehát kivonódik.

A vízszintes tengely hibája, vagyis a vízszintes tengely nem merőleges az alhidade-tengelyre.



AB volna a helyes fekvése a vízszintes tengelynek, a tényleges fekvése a vízszintestől eltér egy δ_1 szöggel, tehát a tényleges vízszintes tengely legyen A B'. Irányzásnál az irányzótengely aképzelt gömbsívegen a CP Z' körön mozog. Ha helyes volna, akkor a C Z kört írná le.

Ha egy P pontot megírányozunk, akkor a Z PC síknak megfelelően a C-

ben végzünk leolvasást, pedig helyesen a Z PD síknak megfelelően a D pontban kellene leolvasást végeznünk, tehát a leolvasási hibánk a DC-nek megfelelő Δ_1 lesz. A Z CZ szög egyenlő a B' I B szöggel, vagyis δ_2 -vel.

PD a hajlásszög egyenlőnek vehetjük PC-vel. PZ az egyenlő $90-\varphi$ -vel. A PZ ch derékszögű gömb háromszögből írható

$$\sin \Delta_2 = \frac{\sin P \text{ ch}}{\sin /90-\varphi/}$$

a C P ch derékszögű háromszögből írható

$\sin \delta_2 = \frac{\sin P \text{ ch}}{\sin \varphi}$ ebből kiszámítva $\sin P$ ch és behelyettesítve az előbbi egyenletbe lesz

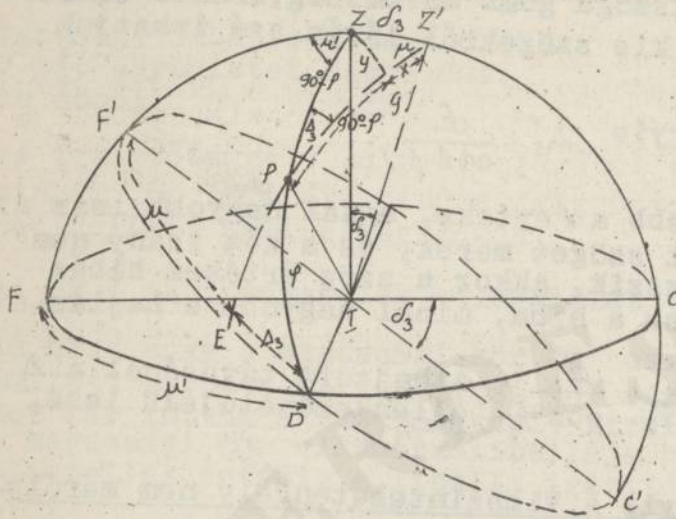
$$\sin \Delta_2 = \frac{\sin \delta_2 \sin \varphi}{\cos \varphi} \quad \text{vagyis} \quad \sin \Delta_2 = \sin \delta_2 \operatorname{tg} \varphi$$

Δ_2 és δ_2 kis szög lévén írható $\Delta_2' = \delta_2' \operatorname{tg} \varphi$ vagy $\frac{\Delta_2''}{\rho''} = \frac{\delta_2''}{\rho''} \operatorname{tg} \varphi$ vagy $\Delta_2' = \delta_2' \operatorname{tg} \varphi$

Áthajtott távcsővel megismételve a mérést a Δ_2 ellenkező előjelű lesz, tehát a két mérés számtani közepét véve a hiba kiesik.

$$\text{a szög hiba} \quad \Delta \text{ ch} = \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 - \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_1 = \delta_2 / \operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1 /$$

A függőleges tengely hibája, vagyis ha a műszert rosszul színtezzük be.



Tegyük fel, hogy a műszert rosszul színtesítettük, akkor az alhidade tengely nem I Z helyzetű, tehát nem függőleges lesz, hanem ferde I Z a függőlegestől való elhajlása δ_3 . Természetesen a limbus kör síkja nem lesz vízszintes, hanem a vízszintestől szintén δ_3 szögértéssel tér el. Ha egy P pontot megirányozunk, akkor a P pont felé menő irány a képzett gömbsüveget az ábrán P pontban dőli. P D = φ lesz a hajlásszög. A vízszintes limbusról az μ' szög értéket kellene leolvasni, ehelyett

a ferde limbus körön az μ szögértéket olvassuk le. A két szögérték közötti különbség adja a Δ_3 hibát. Tehát

$$\Delta_3 = \mu' - \mu$$

$$\text{írható } \mu' - \mu = \mu' - \mu$$

és ebből

nuszát, lesz: $\sin \mu' = \sin \mu \cdot \cos / \mu' - \mu / + \cos \mu \cdot \sin / \mu' - \mu /$, vegyük μ' szög szinuszát,

$\mu' - \mu = \Delta_3$ kis érték azért írhatjuk $\cos / \mu' - \mu / = 1$ és $\sin / \mu' - \mu / = / \mu' - \mu /$ lesz: $\sin \mu' = \sin \mu + / \mu' - \mu / \cdot \cos \mu$

A P Z' ívet jelöljük b-vel; jó közelítéssel írhatjuk $b = / 90^\circ - \varphi / + x$ az ábra szerint. Ennek vesszük a szinuszát.

$$\sin b = \sin / 90^\circ - \varphi / \cdot \cos x + \cos / 90^\circ - \varphi / \cdot \sin x$$

Az x érték megint csak kis érték, írható tehát $\cos x = 1$ és $\sin x = x$ lesz:

$$\sin b = \sin / 90^\circ - \varphi / + x \cdot \cos / 90^\circ - \varphi /$$

A P Z Z' gömbháromszögben felírhatjuk a szinusz tételt, lesz:

$$\frac{\sin \mu'}{\sin \mu} = \frac{\sin b}{\sin / 90^\circ - \varphi /}$$

$\sin \mu'$ és $\sin b$ fenti értékeit behelyettesítve lesz:

$$\frac{\sin \mu + / \mu' - \mu / \cdot \cos \mu}{\sin \mu} = \frac{\sin / 90^\circ - \varphi / + x \cdot \cos / 90^\circ - \varphi /}{\sin / 90^\circ - \varphi /}$$

ebből

$$1 + / \mu' - \mu / \cdot \operatorname{ctg} \mu = 1 + x \cdot \operatorname{ctg} / 90^\circ - \varphi /$$

$$/ \mu' - \mu / = x \cdot \operatorname{ctg} / 90^\circ - \varphi / \cdot \operatorname{tg} \mu = x \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \mu$$

A ZZG derékszögű gömbháromszögből írható

$$\sin \mu = \frac{\sin y}{\sin \delta_3} \quad y \text{ és } \delta_3 \text{ kisérték ezért írható:}$$

$$\sin \mu = \frac{y}{\delta_3} \quad \text{ebből} \quad y = \delta_3 \sin \mu$$

ugyaneből a derékszögű gömbháromszögből írható:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\sin y}{\sin x} \quad y \text{ és } x \text{ értékek, tehát írható:}$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{y}{x} \quad \text{és ebből} \quad y = x \cdot \operatorname{tg} \mu, \text{ de előbb láttuk, hogy}$$

$$\text{tehát } x \cdot \operatorname{tg} \mu = \delta_3 \sin \mu \quad y = \delta_3 \sin \mu$$

$x \cdot \operatorname{tg} \mu$ -nek ezt az értékét behelyettesítjük a $/ \mu' - \mu /$ fenti képletébe

$$\text{lesz: } / \mu' - \mu / = \Delta_3 = \delta_3 \sin \mu \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

Tehát az iránymérés hibája egyenesen arányos a δ_3 tengelyhibával egyenesen arányos a $\sin \mu$ -vel, tehát az μ növekedésével nő, egyenesen arányos $\operatorname{tg} \varphi$ -vel, tehát a hajlásszög növekedésével szintén nő. A szögmérés hibája pedig lesz $\Delta \omega_3 = \delta_3 / \sin \mu \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 - \sin \mu_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 /$

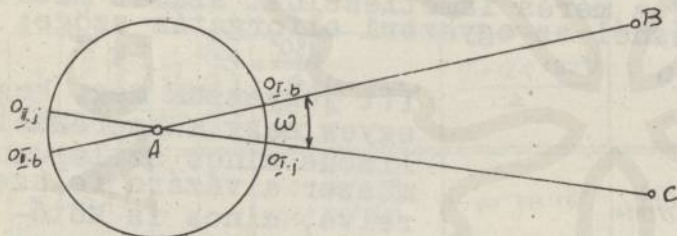
A teodolitműszerek használata.

Teodolitméréseknél a mérési pontok pontosan meg vannak jelölve a cövekbe vert kisfejú szeggel, vagy a cövekre rajzolt kereszttel.

A műszer felállításánál az állványfej tányérja lehetőleg vízszintes helyzetű kell legyen és a függőleges hegyének pontosan a mérési jelre kell mutatnia. A lábszorítócsavarok meghúzása után szintesítjük a műszert. Szintezésnél a műszer kitér központos helyzetéből, különösen, ha hosszú a műszer kötőcsavarja. Tehát újból kell központosítani azáltal, hogy a műszert az állvány tányérján a szükségeshez mértén eltöljük. Ezalatt a műszer köldökrugója természetesen csak egész lazán van meghúzva, hogy a műszert könnyen eltolhassuk. A már egyszer szintesített műszer utólagos központosításánál arra kell vigyáznunk, hogy a műszert csak húzzuk ill. toljuk a megfelelő helyre: forgatnunk nem szabad, mert akkor igen nagy értékkel kimozdul a szántes helyzetből, különösen akkor, ha az állvány tányérja erősen eltér a vízszintestől. Teodolitméréseknél a központosításban csak 0.1-0.2 mm eltérés van megengedve.

A teodolitműszereket több célra alkalmazhatjuk:

- 1./ Iránymérés,
- 2./ Egyszerű szögmérés,
- 3./ Szorzó szögmérés,
- 4./ Magassági szögmérés.
- 5./ Külponos szögmérés.



Ad 1./ Iránymérésnél a rendes távcsőhelyzet mellett a két nóniuszról leolvasott értékek számtani közepét vesszük, áthajtott távcsőhelyzet mellett hasonlóan s a végleges irányérték most már a két számtani középnek a számtani közepe lesz.

Pl.

Állás	Irányzó	M. kör. Fekv.	Limbus leolvasás.	Középpárték $\frac{I + (II \pm 180^\circ)}{2}$	Irányérték végleges közép $\frac{b + j}{2}$	Férgyzet.
			$\frac{I}{II}$			
	pont		o i "	o i "	o i "	
F	E	b	265 00 00 85 00 20	265 00 10	265 00 25	
F	E	j	85 00 30 265 00 50	85 00 40		

Irányértékünk csak akkor válik határozottá, ha ismerjük a kezdőirányt.

A közbezárt szögeket a jobboldali és baloldali irányérték különbsége adja: $\omega = O_j - O_b$. Rendes távcsőhelyzet mellett a magassági kör a távcső baloldalán van, áthajtottnál a jobboldalon.

Napsütésben végzett mérésnél hiba származik abból, hogy a műszer fa-állványa az egyoldalú felmelegedés következtében elfordul. Különösen érzékelhető hiba származik ebből, ha a műszer gulán, magas állványon áll. Hogy ezt a hibát csökkentjük és a csapsurlódásból származó hibát kiejtsük, a mérést rendes távcsőhelyzet mellett mindig balról jobbra végezzük; áthajtott távcsővel pedig jobbról balra. Így ezek a hibák két távcsőhelyzet mellett végzett mérésnél kompenzálódnak.

Ha két irányérték különbségét képezzük a fentiek szerint, akkor ez a 2./ alatti egyszerű szögmérés.

Az irány- és szögmérés pontossága.

Legyen " m_α " az iránymérés középhibája, " m_β " a szögmérés középhibája, " m_i " az irányzás középhibája és " m_o " a leolvasás középhibája. Akkor, ha két leolvasókészüléken végeztünk leolvasást, lesz:

$$m_\alpha^2 = m_i^2 + \frac{1}{2} m_o^2$$

és
$$m_\beta^2 = 2m_\alpha^2 = 2m_i^2 + m_o^2$$

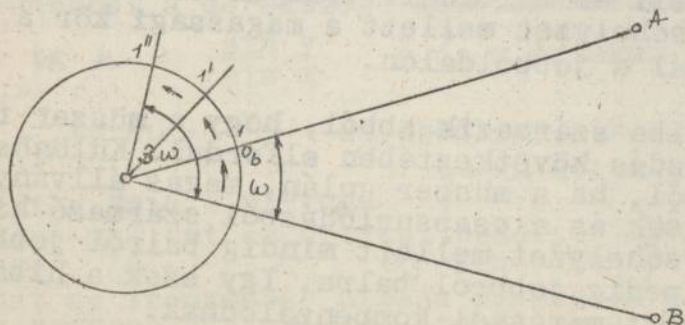
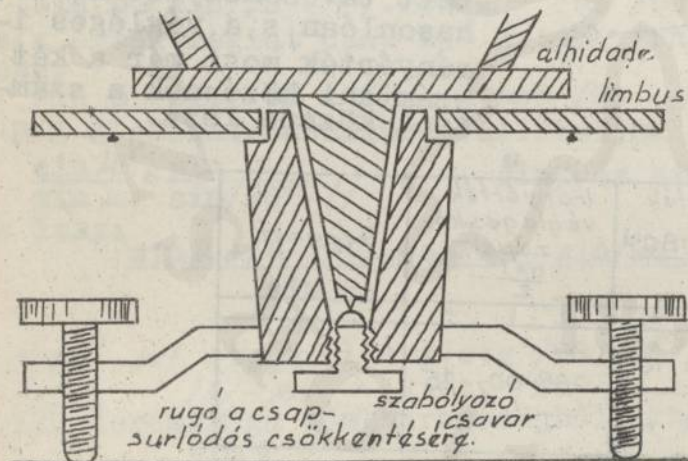
Az irányzás középhibája jobb teodolitoknál 1-2 km-nél nagyobb távolságban lévő pontok irányzásánál $\pm 1'' \sim \pm 2''$. Ha az irányzott pont távolsága kisebb, akkor ennek a 2-4-szerese. A leolvasás középhibája a leolvasási határérték $1/4 \sim 1/5$ értékével vehető egyenlőnek.

Pontosabb méréseknél a mérést meg kell ismételni. Hogy a körosztás hibáiból származó eltérést csökkentjük, az osztott-kör különböző részein végezzük a mérést. Ezt azért érjük el, hogy az osztott-kört a mérés megismétlésénél elforgatjuk. Szorzóteodolitnál a limbuskör elforgatása igen egyszerű. Egyszerű teodolitoknál ismétlés esetén szintén elforgatjuk a limbust, de ezt csak úgy tehetjük, ha a köldök-rugót fölengedjük és az egész műszert elforgatjuk. Ebben az esetben természetesen újra kell központosítani és szintezni. Mind szorzó, mind egyszerű teodolit használata alkalmával az elforgatás értéke kb. $\frac{180^\circ}{n}$ legyen, mely képletben " n " a mérés ismétléseinek számát mutatja. Tehát 3-szoros ismétlésnél az egyszerű elforgatás szöge:

$$\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

Itt jegyezzük meg, hogy egyes nagy műszereknél a limbus nincs szilárdan a műszer alvázára felszerelve, nincs is kötő- és paránycsavarja, hanem csak rá van huzva, és alulról a rajta lévő gombok vagy küllők segítségével elforgatható.

Ad 3./ Szorzó szögmérés csakis szorzó- teodolit-tal végezhető. Elve: a közbezárt szöget " n "-szer /ahányszor szorzunk/ visszük föl a limbuskörre, s a helyes érték az így kapott leolvasáskülönbség n -ed része lesz. A mérést úgy végezzük el, hogy megirányozzuk "A" pontot kötött limbus és felengedett alhidade mellett és leolvassuk mindkét nóniusztól; kapjuk O_b -t. Ugyanígy megirányozzuk "B"-t is, de csak az I-es nóniusztól olvassuk le és



ezt a "jegyzet"-rovatba írjuk, majd kivonjuk belőle az "A" megírá-
zásánál nyert szögértéket. Ezt ellenőrzésül végezzük, mert most már
tudjuk, hogy "n"-szeres szorzás után kb. mekkora lesz a szögünk.
Ezután kötött alhidade és felengedett limbus mellett irányozzuk meg
"A"-t. Ekkor az ábrabeli "l" pont már az "l'" helyre került s ha
most felengedett alhidade és kötött limbus mellett újra megírányoz-
zuk "B"-t, akkor a szöget kétszer hordtuk fel a limbusra. Így ismé-
teljük az eljárást addig, amíg elérjük a kívánt szorzások számát.
Legvégül ismét "B" felé irányzunk s leolvasást végzünk mindkét nő-
niusról: O_j . A most leolvasott érték és a legelőször leolvasott
érték különbsége adja $n\omega$ - t , s így $\omega = \frac{O_j - O_b}{n}$

Mérés közben figyelniünk kell, hogy a limbus "0" osztását hányszor
haladtuk túl. Ennek feljegyzésére jegyzőkönyvünkben külön rovat van.
Valahányszor a "0" osztásrészen túlhaladtunk, 360° -kal növelniük
kell az O_j értékét. Ha tehát "m"-szer haladtuk túl a "0" osztást,
akkor

$$\omega = \frac{O_j + m \cdot 360^\circ - O_b}{n}$$

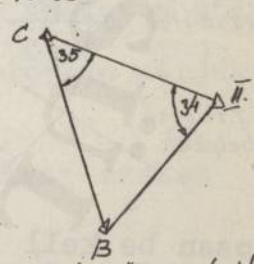
"m" lehet 0 is, ha kis szöget mértünk, vagy "n" kicsi.

Áthajtott távcövet fordított irányban kell megismételniük a mérést
szorzó szögmérés esetén is.

Szögmérési jegyzőkönyv

Kelt: _____
Műszer neve és száma: _____

Időjárás: _____
Mérnök: _____

Állás pont	Irányzat	Magas sági köz. fék kezse	Szorzások száma	Indító a 360°- t meghaladva	Limbus leolvasás $\frac{I + (II \pm 180^\circ)}{2}$	$O_j - O_b$	$\frac{b+j}{2}$	Jegyzet (Vázrajz, tájékoztató szög)
II	B	b	III	I	$10^\circ 58' 30''$ $190^\circ 58' 00''$	$10^\circ 58' 15''$	$\frac{467^\circ 14' 00''}{4} =$	C első irányzása után az I leol- vasó berendezéstől leolvasni: $127^\circ 46' 30''$  344 $116^\circ 48' 356''$ 344 hozzávettől azes érté- ke $116^\circ 48' 00''$
II	C	b			$118^\circ 12' 30''$ $298^\circ 12' 00''$	$478^\circ 12' 15''$	$116^\circ 48' 30''$	
II	C	j	III	I	$335^\circ 53' 00''$ $155^\circ 52' 30''$	$695^\circ 52' 45''$	$\frac{467^\circ 14' 45''}{4} =$	
II	B	j			$228^\circ 38' 30''$ $48^\circ 37' 30''$	$228^\circ 38' 00''$	$116^\circ 48' 412''$	

Az elmondottakból látszik a szorzó szögmérés előnyös volta. Három-
szor mérve például a szöget, csak 2 leolvasást kell végeznünk, s
ugy kiesik /n-1/ leolvasási hiba, miáltal méréstünk pontossága na-
gyobb lesz.

Hasonlítsuk össze az egyszerű szögmérés középphibáját a szorzó szög-
méréssel. Végezzük el ugyanannak a szögnek a mérését egyszerű szög-
méréssel n-szer és aztán n-szeri szögsszorzással. Ha az irányzás kö-
zépphibáját m_1 -vel, a leolvasás középphibáját pedig m_0 -val jelöljük,
az egyszerűen mért szög középphibáját μ -vel, a szorzással mért szög-
gét pedig μ_s -sel jelöljük, akkor lesz:

$$\mu = \sqrt{\frac{2}{n} / m_1^2 + m_0^2 /}$$

$$\mu_s = \sqrt{\frac{2}{n} / m_1^2 + \frac{m_0^2}{n} /}$$

és

Például legyen egy műszerünk, amelynél az irányzás középhibája: $m + 1''$ a leolvasási határérték $20''$; Mivel két noniuszról végzünk leolvasást, az $m_0 + 10''$. Behelyettesítve ezeket az értékeket, $n = 10$ -szeri ismétlést ill. szorzást véve kapjuk, hogy $\mu = + 4.5''$ és $\mu_0 = + 1.5''$; tehát a szorzás jelentékenyen kisebb középhibát ad, mert az m_0 az m -hez viszonyítva nagy.

Vegyünk fel egy másik példát: olyan műszerrel, amelynél a leolvasókészülék sokkal pontosabb. Legyen $m = + 1''$ és $m_0 = + 2''$, a szorzások és ismétlések száma ugyancsak $n = 10$. Behelyettesítve az értékeket és a számítást elvégezve lesz:

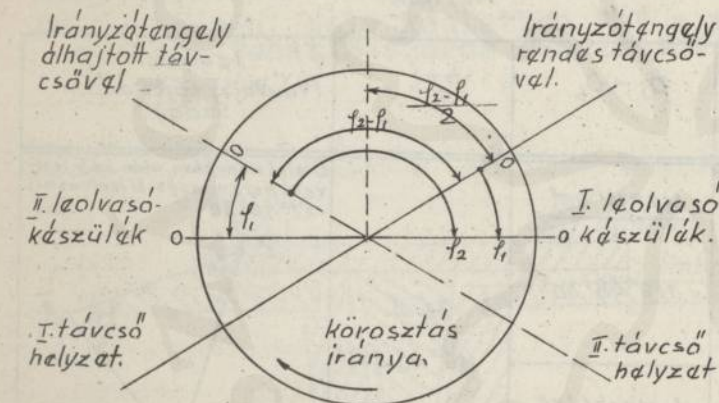
$$\mu = + 10'' \quad \text{és} \quad \mu_0 = + 0.5''$$

tehát már nincs olyan nagy különbség a kettő között.

A fenti példákából látszik, hogy szorzó szögmérésnek csak addig van értelme, amíg a leolvasásból eredő hibánk nagyobb az irányzásnál elkövetett hibánál. Ha az irányzásból eredő hiba nagyobb, akkor szorzó szögmérést nem végzünk, mert az irányzással halmoznánk csak a hibát. Eppen ezért kis leolvasási határértékkel bíró műszerek nem is készülnek szorzó rendszerben.

Ad 4./ A teodolittal való magassági-szögmérés. Ha a hajlásszögre csak a vízszintes távolság kiszámításához van szükségünk, akkor úgy mérünk,

mint a busszola műszerekkel: a leolvasást elégséges az egyik leolvasókészülékkel elvégezni. Ha azonban a trigonometriai magasságmérés céljából mérjük a magassági szöget, akkor a leolvasást mindig, mind a két leolvasókészüléken el kell végeznünk és a szögmérést áthajtott távcsővel is meg kell ismételni. A leolvasások végzése előtt a magassági-kör ellenőrző libelláját mindig gondosan be kell játszani. A rendes és áthajtott távcsőhelyzet mellett mért két szög összegének fele egyenlő kell legyen 90° -kal: $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = 90^\circ$



Ha eltér ettől az értéktől, akkor ez az eltérés adja a műszer indexhibáját. Az áthajtott távcsővel mért szögértékből levonva a rendes távcsőhelyzet mellett mért szögértéket kapjuk a kétszeres zenit távolságot, tehát:

$$s = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$$

Példa:

rendes távcsőhelyzet melletti leolvasás:

I. noniuszon:	$34^\circ 46' 20''$
II. " "	$214^\circ 46' 40''$
$\varphi_1 = \frac{I + II + 180^\circ}{2}$	$= 34^\circ 46' 30''$

áthajtott távcsőhelyzet melletti leolvasás:

I. noniuszon:	$145^\circ 13' 40''$
II. " "	$325^\circ 14' 00''$
$\varphi_2 = \frac{I + II + 180^\circ}{2}$	$= 145^\circ 13' 50''$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 180^\circ 00' 20''$$

az indexhiba 10".

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 110^\circ 27' 20''$$

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = 90^\circ 00' 10'' \quad , \text{ tehát}$$

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = 55^\circ 13' 40'' \quad \text{tetőszög}$$

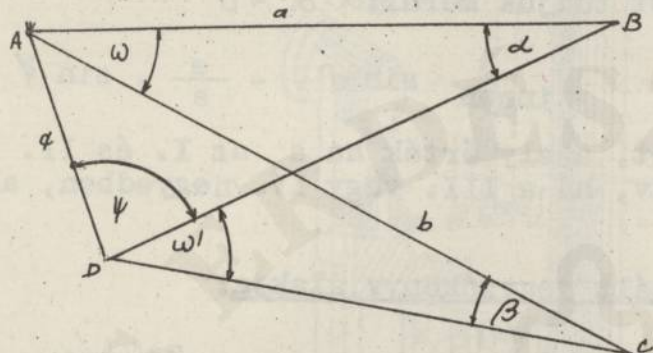
A hajlásszög pedig:

$$\varphi = 90^\circ - \{ = 34^\circ 46' 20''$$

Ad 5./ Külponthoz szögmérésnél két lehetőséggel állhatunk szemben:

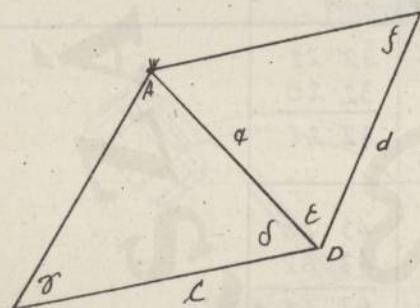
a./ szögpontunk külponthoz

b./ iránypontunk külponthoz.



a./ Külponthoz szögpontról beszélünk akkor, ha megmérendő szögünk csúcsában nem tudunk felállni. Tegyük fel, hogy "A" pont, amelyből a "B" és "C" irány közötti "ω" szöget kellene mérnünk, villámhárító, vagy toronycsúcs és így ott nem tudunk műszerünkkel felállni.

ni. "A" ponttól "e" távolságra /legfeljebb 10-15-20 m-re/ "D" pontból mérjük az "ω" szöget. Az "e" érték néha közvetlenül mérhető, vagy leggyakrabban két segédháromszögből számítjuk, amikor is mérjük a "c" és "d" oldalakat, valamint a γ, δ, ε és ζ szögeket. Ezeknek az adatoknak a segítségével számíthatjuk először az egyik, aztán a másik háromszögből az "e" értékét. A két értéknek közel egyeznie kell.



Az előbbi ábrán jelzett ψ szöget a külponthoz tartozó vonaltól mindig az óramutató járásával egyező irányban mérjük. Felírhatjuk, hogy:

$\omega + \alpha = \omega' + \beta$ s ebből $\omega = \omega' + \beta - \alpha$
E képletben β és α ismeretlen: ezeket kell meghatároznunk:

$$\sin \alpha = \frac{e}{a} \sin \psi = \tilde{L}$$

$$\sin \beta = \frac{e}{b} \sin (\omega' + \psi) = \tilde{\beta}$$

Mivel az "a" és "b" oldalakhoz viszonyítva az "e" kis érték, s így α és β is kis szög, melynek sin-a helyett az arcust vehetjük. Avagy $\tilde{L} = \frac{\alpha''}{\rho''}$ és $\tilde{\beta} = \frac{\beta''}{\rho''}$ egyenletekbe az arcus-értékeket behelyettesítve:

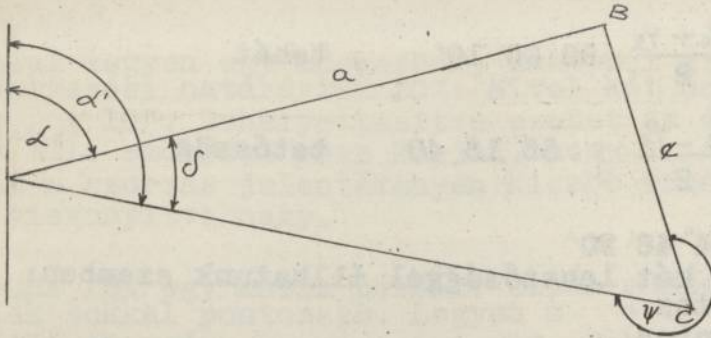
$$\alpha'' = \rho'' \cdot \frac{e \cdot \sin \psi}{a} \quad \text{és} \quad \beta'' = \rho'' \cdot \frac{e \cdot \sin (\omega' + \psi)}{b}$$

értékeket kapjuk; ezeket "ω" képletébe téve:

$$\omega = \omega' + \rho'' \cdot e \left(\frac{\sin (\omega' + \psi)}{b} - \frac{\sin \psi}{a} \right)$$

E képletből ω, e és ψ mérhető, ρ'' adott /206264/ meg kell tehát még határoznunk "a"-t és "b"-t.

Mint tudjuk, "e" értéke kicsi, "a" és "b" viszont, mivel háromszögelésről van szó, 3-40 km. Eppen ezért a-t és b-t elégséges 100 m pontossággal megállapítani: vagy katonai térképről, vagy mérőasztallal bemetszett vázrajzról mérjük le. Ha így nem lehet, akkor közelítéssel dolgozunk, esetleg valamely háromszögből számítjuk "a"-t és "b"-t.



b./ Külponyos irányérték redukálásáról akkor beszélünk, ha irányozandó pontunk /B/ nem láthat, de közel hozzá megirányozhatunk egy pontot /C/. Az "e"-t és ψ-t itt is mérnünk kell: ψ-t ismét az óramutató járásával egyező irányban a CB iránytól. Az ábra szerint a keresett "α"

irányérték helyett csak az α'-et tudjuk mérni: α = α' - δ

A sin tételből:

$$\frac{e}{a} = \frac{\sin \delta}{\sin /300 - \psi/} = \frac{\sin \delta}{-\sin \psi} \quad \text{innen} \quad \sin \delta = - \frac{e}{a} \cdot \sin \psi$$

pozitív és negatív előjelű lehet, amely érték ha a az I. és II. negyedben fekszik, akkor pozitív, ha a III. vagy IV. negyedben, akkor negatív.

A teodolitméréseknél használt jegyzőkönyv alakja:

Dátum:
Műszer neve és száma

Tudóíórás:
Mérnök:

Állás	Írányzó#	Magasságikör fekvése	Limbus leolvasás $\frac{I.}{II.}$	$\frac{I + (II \pm 180^\circ)}{2}$	$O_i - O_b$	$\frac{b + j}{2}$	h _v	jegyzet
Pont			o i "	o i "	o i "	o i "	m	
a	I	b	67 06 30 247 06 00	67 06 15			32 22 32 20	
a	XIII	b	130 08 00 310 08 30	130 08 15		63 02 15	32 21	
a	XIII	j	310 07 00 130 07 30	310 07 15			43 60 43 62	
a	I	j	247 04 30 67 05 00	247 04 45	63 02 30		43 61	

A jegyzőkönyv másik oldalára kerül a vázrajz.

Teodolitméréseknél a távolságot rendszerint külön, szalaggal mérjük.

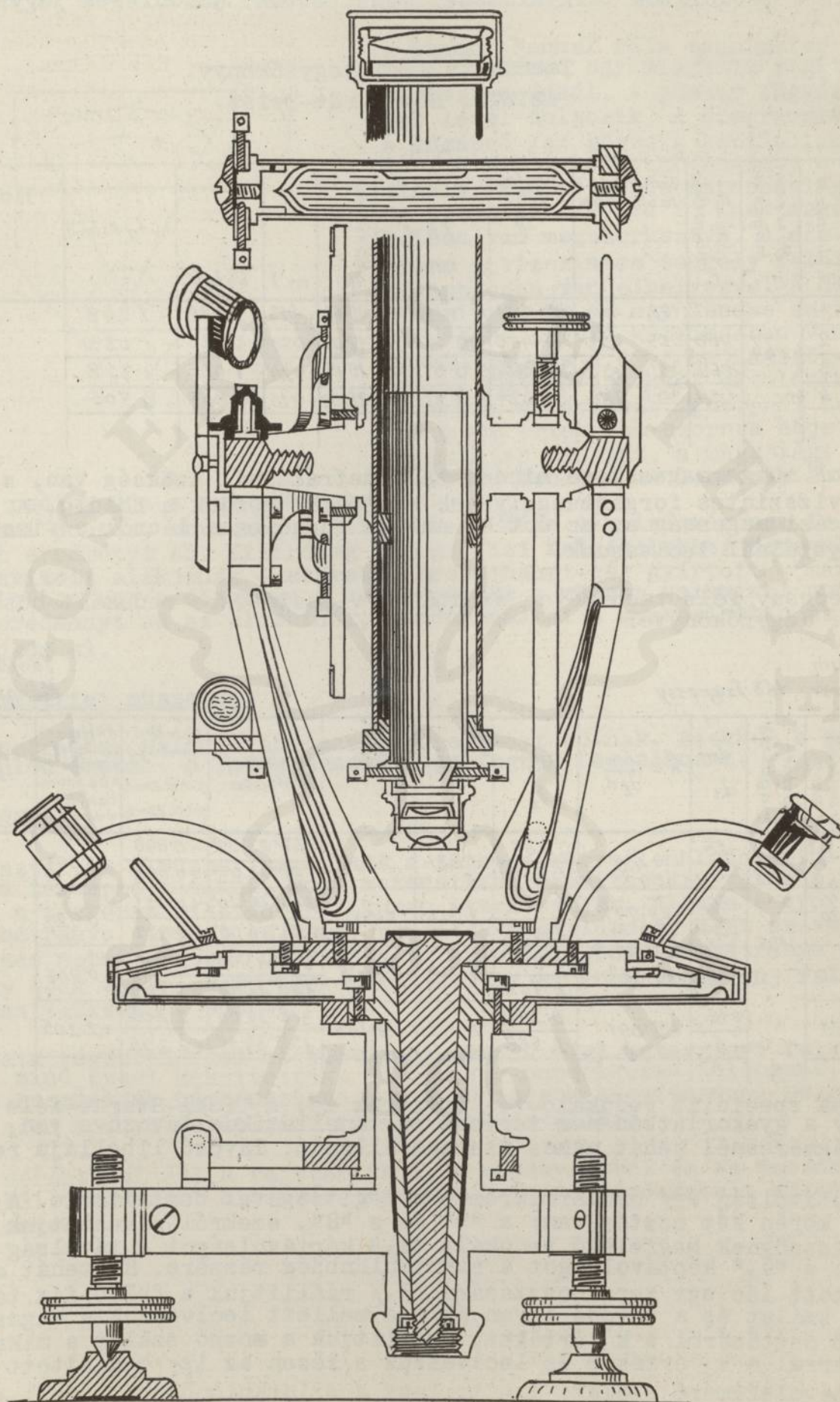
Tachiméterek.

Általában tachimétereknek nevezzük azokat a műszereket, amelyek szög-
mérésre és optikai távolságmérésre alkalmasak. A topográfiai célokra
készített különleges tachiméterek rendszerint könnyű műszerek, hogy
nehéz terepen is gyorsan lehessen velük dolgozni. A tachimétereket
két csoportra osztjuk:

- 1./ egyszerű tachiméterek
- 2./ redukáló - " -

1./ Az egyszerű tachiméterek alkotórészei: távcső optikai távolság-
mérővel; Limbuskör egy nóniusszal; teljes, vagy csonka magasságikör;
egyéb részei ugyanolyanok, mint a teodolitoknál. Az egyszerű tachi-
méterek tehát kis univerzális műszerek, s a ferde távolságot mérik.

Teodolit.



2./ A redukáló tachiméterek már a vízszintesre redukált hosszat adják meg. Ilyen a Bosshardt-Zeiss redukáló tachiméter, amelynek a távolságmérőberendezését a távolságmérőknél, szögleolvasását /tg!/
pedig a teodolitok tárgyalásánál ismertettük. Különleges jegyzőköny-
ve!

Tachimetralási jegyzőkönyv.
42.375. Bosshardt-Zeiss.

Állás	Irányított pont	Műszer- magasság m	Irán- yási magasság I	Limbus leolvasás	Hajlás szög φ	$tg \varphi$	Vízszintes hossz hv	m.l	hv tg φ	hv tg φ (m.l)	jegyzet.
64	1	144	167	188 400	97 201	- 0.1286	1569	- 0.23	- 2.018	- 2.248	
	2		166	209 020	92 460	- 0.0484	1700	- 0.20	- 0.823	- 1.023	
	3		168	311 455	94 064	- 0.0718	1515	- 0.24	- 1.088	- 1.328	
	4		159	325 236	80 324	- 0.1734	2800	- 0.15	+ 4.855	+ 4.705	

Az "m" műszermagasságra minden tachimetralásnál szükség van, s a távcső vízszintes forgástengelyének közepétől mérjük a földig. A "I" irányzási magasság az az érték, amit a függőleges lécről a vízszintes irányzásnál leolvasunk.

A Szepešsy féle tachiméter szintén a vízszintesre redukált hosszakat adja. Jegyzőkönyve:

Dátum

Műszer: 163 Szepešsy

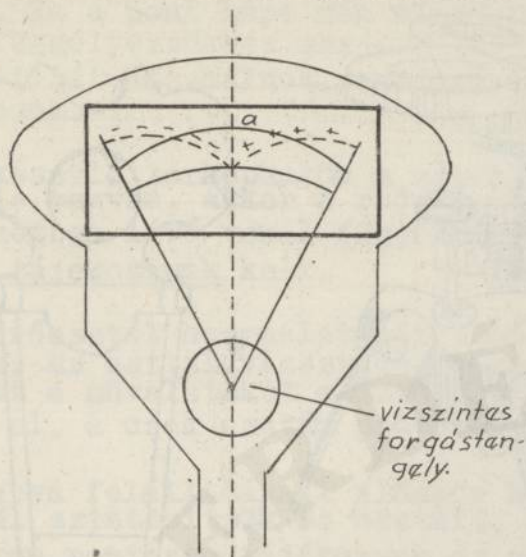
Tűdőjárás
Mérnök.

Álláspont	Irányzó# pont	Műszer- magasság	d_1 d_2	$k = \frac{100}{d_2 - d_1}$	l_1 l_2	$L = l_2 - l_1$	$t = KL$	Limbus, leolvasás	Szintkülönbség $F = 0.001 d_1 m l_1$ $s = 0.001 d_2 m l_2$	Akát-szár- számított szintkülönbség szám- tani kö- zép	Jegyzet
I-I	18	135	-25	+4.0	0.407	1.831	7.324	247°03'00"	- 0.898	- 0.893	
			0		2.238			67°03'00"	- 0.888		
	19		-32	+2.777	0.167	2.368	6.576	254°16'20"	- 0.921	- 0.922	
			+4		2.535			74°16'00"	- 0.922		
	20		-25	+3.333	0.364	2.342	7.805	310°43'00"	- 0.965	- 0.966	
			+5		2.706			130°42'40"	- 0.966		
	21		+16	+9.091	0.396	2.172	19.746	318°33'00"	+ 2.205	+ 2.205	
			-5		2.568			138°33'00"	+ 2.205		

Vannak speciális redukáló-tachiméterek is. A Tichi-Starke-féle tachiméter a gyakorlatban nem terjedt el. Anallatikus távcsőve van, a távolságmérésnél tehát nincs összeadóállandó. Távcső libellája revíziós.

A képtávolság egy okulármikrométer segítségével beállítható. A magassági körén két osztás van: a "D" és a "H", ezekről elvashatjuk le a hajlásszögnek megfelelő redukált " k_1 " képtávolságot a távolság részére és a " k_2 " képtávolságot a szintkülönbség részére. Ha tehát a felállított lécről egy kerek osztására /10/ ráállítjuk a felső fix távolságmérő szálát és a távcső ilyen állása mellett leolvassuk a magassági-kör D osztásáról a k_1 értéket, beállítjuk a mozgó szálát a mikrométer-csavarral a k_2 értékre és leolvassuk a lécen az így beállított második távolságmérő szálát: $l_1 - t$, lesz a szintkülönbség: $s = m - l_1 + 100 / l_1 - l_0 /$, hol "m" a műszermagasság.

A kollimáció-hibát a tárgylencse elmozdításával javítjuk. A műszerhez van logaritmikus beosztású távolságmérő lécs is: ebben az esetben a távolság logaritmusát 4 tizedesig lehet róla leolvasni.



A Hammer-Fennel féle tachiméter tulajdonképpen egy diagram segítségével redukál. A műszer függőleges lécel dolgozik. A diagrammban a középső $/a/$ görbe a képtávolság, a $\cos \varphi$ -nek megfelelően; a két oldalt látható görbe magassági-görbe pedig az $1/2 \sin 2\varphi$ -nek megfelelően van megszerkesztve. A diagram a vízszintes tengely felett külpontosan van elhelyezve. A diagramm prizmák és egy lencse segítségével a távcső képsíkjában van bevetítve, és a " φ " hajlásszögnek megfelelő értékkel eltolódik. A lécről a távolsági görbénél leolvasott érték 100-szorosa adja a vízszintes hosszat, a magassági görbénél leolvasott léchossz 20-

szorosa pedig adja a szintkülönbséget.

Nem valami pontos, mert még a Reichenbach féle távolságmérőnél is rosszabb eredményt ad. Kizárólag topográfiai felvételekhez használható. Javított alakjának - melyet a Breuphaupt-cég gyártott - már a tengelyében van a diagram elhelyezve. Ez a műszer valamivel pontosabb eredményt ad az előbbinél, mindazonáltal a gyakorlatban ez sem terjedt el.

Fotogrammetriai műszerek.

A tachimetriához hasonló pontosságu eredményt adanak. Ezekkel a geodézia külön ágában, a fotogrammetriában fogunk foglalkozni.

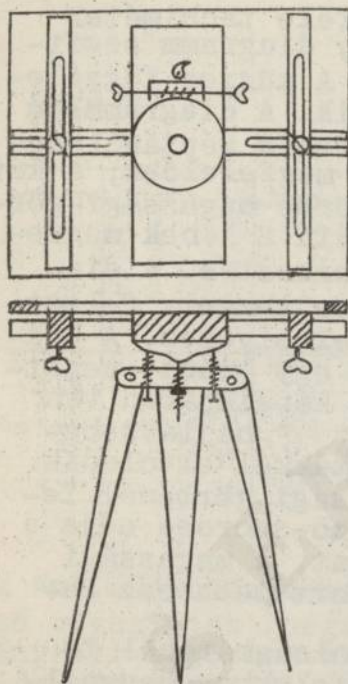
A mérőasztal.

A mérőasztal az a műszer, amellyel a terepen közvetlenül készíthetjük el a térképet anélkül, hogy matematikai számításokra volna szükségünk: a térképet tisztán grafikusan szerkesztjük. Előnye a gyors munka, hátránya viszont az, hogy pontossága korlátozott, mert az egész berendezés nehéz és csak nehezen állítható fel, továbbá hátránya az is, hogy csak egy eredeti térkép készül, ha ez tönkremegy, új felvételre van szükség.

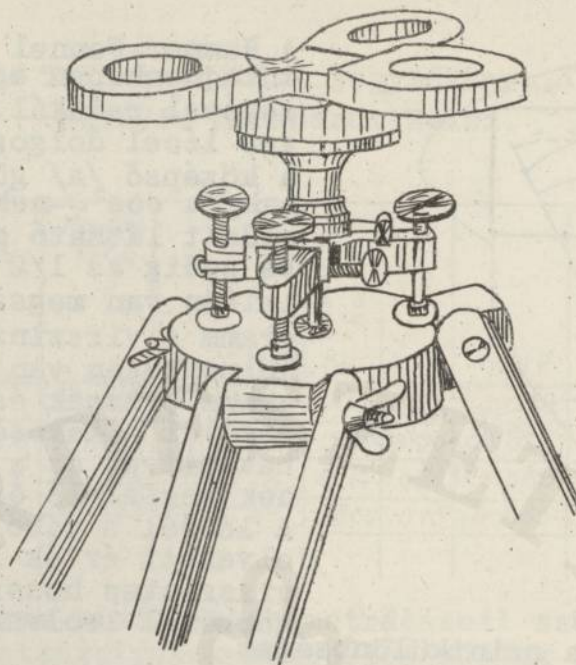
Használata régebben igen el volt terjedve: a régi kataszteri felvételeket mind ezzel készítették. Ma, amikor numerikusan dolgozunk, már nem használják térképezésre, csak vázrajzok készítésénél használnak egészen könnyű felépítésű részletező-asztalokat.

Maga a mérőasztal áll a rajztáblából, a műszerlábból és az összekötő-részből. Ez utóbbi kiképzése szerint 3 fajta mérőasztalt különböztetünk meg:

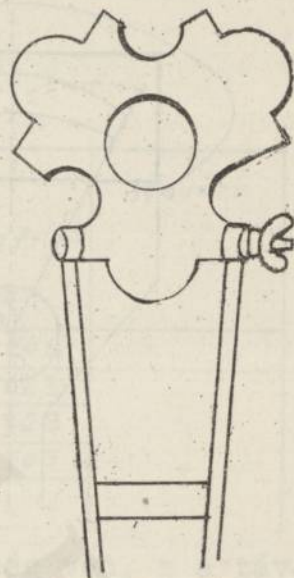
KRAFT-féle



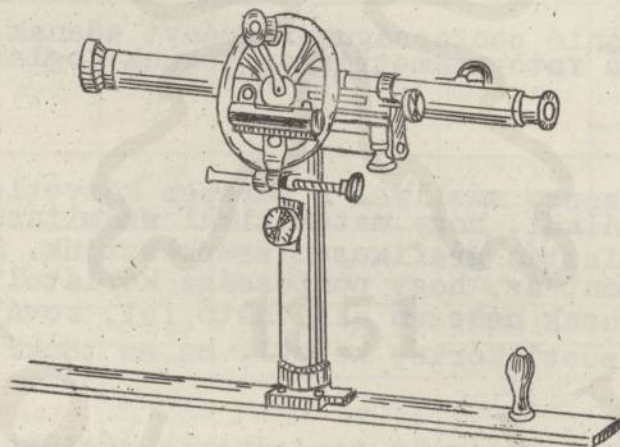
STARKE-féle



CSÉTI-féle



Az asztal fel van még szerelve libellával, tájékozó kompasszal, függélyezővillával és valamilyen irányzóeszközzel. Ez utóbbi lehet dioptrás-vonalzó, vagy távcsöves vonalzó.



A dioptrás vonalzóról már volt szó. A távcsöves vonalzó pedig nem más, mint egy vízszintes tengely körül forgatható távcső, amelynek a tartókarja egy sárgaréz vonalzóra van szerelve. A távcső irányzótengeleje egy függőleges síkba esik a vonalzó rajzolóélével.

A mérőasztal használata ugyanazon az elven alapszik, mint a többi vízszintes-síkbeli szöget mérő műszere azzal a különbséggel, hogy itt a szögek nagyságát nem számokban fejezzük ki, hanem azokat a rajzlapon mindjárt ábrázoljuk is. Ez azonban csak akkor lehetséges, ha az asztalunkkal az ábrázolandó szög csúcspontjában állunk fel és ott a rajztábla lapját vízszintesre állítjuk, vagyis csak úgy mérhetünk vele helyesen, ha a kiinduló pontban központosan és szintesen állunk fel. A központos fölállásra vonatkozóan megjegyezzük azt, hogy sohasem a mérőasztal közepét állítjuk a kiinduló pont fölé, hanem mindig

annak a térbeli pontnak a képét, amelyből az irányzást végezni fogjuk. Ha a pont képe még nincs rajta a rajzlapunkon, akkor a pontot felfüggélyezzük és megjelöljük a rajzlapon. Mindkét esetben függélyező villát használunk, amelyet azonban használat előtt meg kell vizsgálnunk.

Ha készülő térképünkön a megrajzolandó szög egyik szára és csúcspontja is megvan, akkor a rajzlapunkon lévő irány a neki megfelelő természetben lévő vonal függőleges síkjába hozandó, vagyis az asztalunkat tájékozzunk kell.

A mérőasztal használatánál tehát 3 mozzanatot kell megkülönböztetnünk: az asztal vízszintesítését, központosítását és tájékozását. Ezeket a műveleteket először csak durván, tisztán szemmértékre végezzük el, s csak azután pontosan.

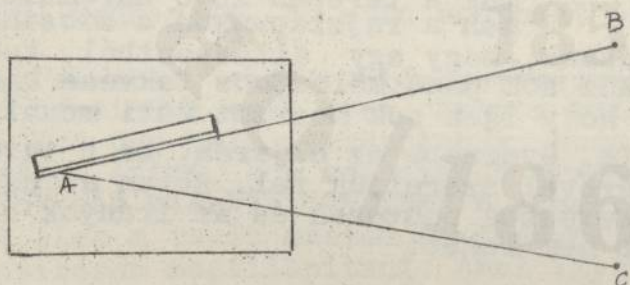
A durva felállításnál először központosítjuk, azután tájékozunk és végül szintesítjük az osztályt, míg a pontosnál először szintesítjük, azután pontosan tájékozunk és végül pontosan központosítjuk a műszert. Tehát az asztalnak, ha pont fölé állítottuk, teljesen központosnak, tájékozottnak és szintesnek kell lennie.

Hogyha a mérőasztalon még fölvétel nem történt, tehát sem szög csúcspont, sem irány nincs még rajta, akkor az asztal tájékozását és központosítását úgy kell elvégeznünk, hogy az asztal az első álláspont fölött olyan helyzetben legyen, mely mellett a fölmérendő terület idom az asztalra ráér s ezután csak szintesítünk és az álláspontot felfüggélyezzük.

A mérőasztal szintes, központos és tájékozott felállítása után ugyanabban az álláspontban az asztaltábla helyzetét változtatnunk már nem szabad, úgy hogy a mérés alatt az összes szorító-, rögzítő- és kötőcsavaroknak meg kell húzva lennie, s ezeket addig, míg más álláspontba át nem megyünk, fölengedni nem szabad.

Egyszerű szögfelvétel.

Az egyszerű szögfelvételnél az asztal felállítása után irányzókészülékünk vonalzóját rajzoló élével az álláspontunknak megfelelő rajzlapon lévő pont mellé fektetjük úgy, hogy a vonalzó mellett "laposhegyű kemény" ceruzával meghúzandó vonal a ponton haladjon át.

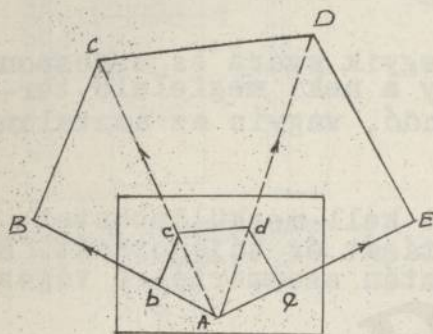


Ezután az irányzókészüléket elforgatjuk a másik irányába, de mindig ügyelünk arra, hogy a rajzolóél a rajzlapon lévő ponton menjen keresztül.

Ezen eljárással egy pontból akárhány irányt is felvehetünk. Az egyes tereppontokat, határvonalakat viszont úgy vesszük fel, hogy törési pontjaikat mérési jellel megjelöljük, majd álláspontunkból a mérési jeleket megirányozzuk és az irányokat megrajzoljuk. A mérési jeleknek álláspontunktól való távolságát szalaggal megmérjük, s mérve a terep hajlásszögét a távolságokat vízszintesre redukáljuk. Most már a megfelelő irányokra felhordjuk a távolságokat a kisebbítési lépték szerint és így a pontok helyét és azok összességéből a határvonal képét megkaptuk.

Területidomok felvétele.

A területidomok felvételénél azt a módszert követjük, hogy a területidomot, vagy annak egyes részeit az irányzósugarak által legegyszerűbb területidomokra, háromszögekre bontjuk s az így nyert háromszögekhez teljesen hasonló háromszögeket szerkesztünk a rajzlapra is. Azonban ahhoz, hogy hasonló háromszögeket szerkeszthessünk, a terepen lévő háromszögeknek annyi alkotórészét kell megmérnünk, amennyi a háromszögeket is meghatározza.



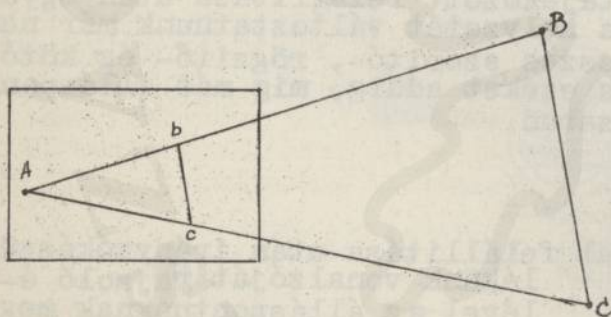
Egy háromszög meg van határozva, ha
1./ ismerjük két oldalát és a közbezárt szöget,
2./ egy oldalát és a rajta fekvő két szöget,

3./ egy oldalát és két szöget, amelyek közül az egyik rajta, a másik szemközt fekszik.

Ezen 3 eset szerint megkülönböztetünk az első esetben oldalmetszést; másodikban előremetszést s a harmadik esetben hátrametszést.

1./ Oldalmetszés.

Ennél az eljárásnál a mérőasztal használata ugyanaz, mint az egyszerű szögmérésnél volt. "A" pontban, amely mind a terepen, mind a térképen meg van /ha nincs, úgy felfüggélyezzük a már ismertetett módon/, felállunk és irányozzuk a háromszög szárait adó irányokat,

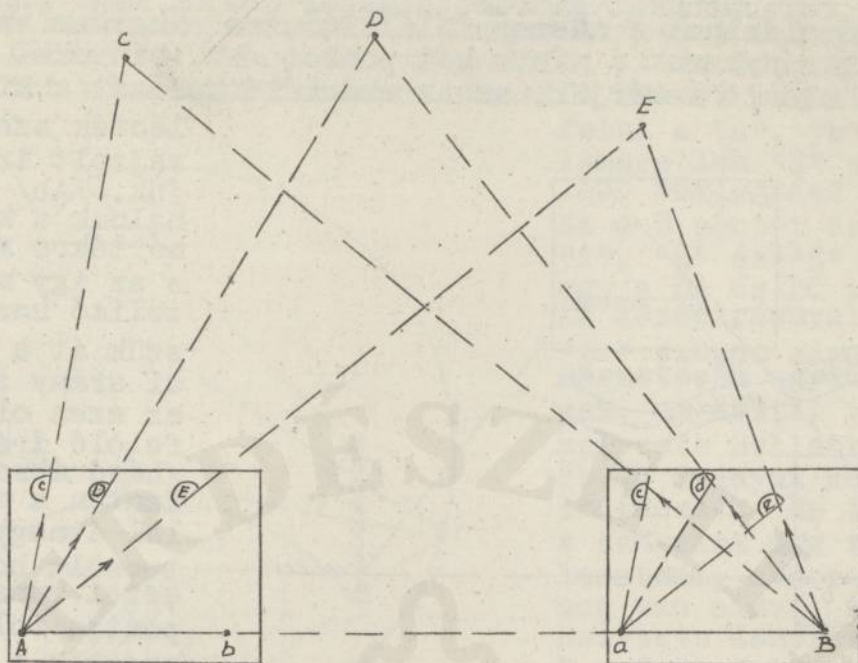


majd a már megrajzolt irányokra a kisebbitési arány szerint rámérjük az irányoknak megfelelő távolságok vízszintesre redukált hosszát. Így megkaptuk a terepen lévő háromszögnek a rajzlapunkon a kicsinyített képét. Előnye ennek az eljárásnak, hogy egy álláspontból, tehát a műszer nehézkes felállítása nélkül sok pont kölcsönös fekvése határozható meg. Hátránya viszont az, hogy igen sok hosszat kell mérni, s így a felvétel hosszadalmassá válik. Gyorsabb az eljárás, ha a távcsöves vonalzónkat optikai távolságmérővel szereljük fel. Ebben az esetben azonban a hossz mérési adatok kevésbé pontosak és az irányok hossza 50°-nál vagy 100 m-nél nagyobb nem lehet.

tett képét. Előnye ennek az eljárásnak, hogy egy álláspontból, tehát a műszer nehézkes felállítása nélkül sok pont kölcsönös fekvése határozható meg. Hátránya viszont az, hogy igen sok hosszat kell mérni, s így a felvétel hosszadalmassá válik. Gyorsabb az eljárás, ha a távcsöves vonalzónkat optikai távolságmérővel szereljük fel. Ebben az esetben azonban a hossz mérési adatok kevésbé pontosak és az irányok hossza 50°-nál vagy 100 m-nél nagyobb nem lehet.

Előremetszés. 2./

Kiválasztunk két pontot, amelypontok mindegyikéből a többi fölveendő pont jól látható. A két pontot összekötő egyenes lesz az alapvonalunk. Ennek az alapvonalnak a két végéből metsszük előre az összes pontokat. Fölállítjuk az asztalt az alapvonal egyik végpontjában megirányozzuk a másik végpontot, megrajzoljuk ezt az irányt és rávisszük a választott méretarányban, az alapvonal vízszintes hosszát. Tehát az alapvonalat mérnünk kell, vagy adva lehet két háromszögelő ponttal.



Ezután megirányozzuk a háromszög harmadik csúcsául szolgáló mérési jelet s ezt az irányt is megrajzoljuk, azonban távolságot már nem mérünk. Ha most több háromszögünk is van, amelynek alapja a térkép-pümpkőn is rajtalévő AB egyenes, úgy most sorban megirányozzuk azoknak is a harmadik csúcsát, s megrajzoljuk az irányokat és mellé írjuk egy fél körbe az irányzott pont jelét, de távolságokat itt sem mérünk. /Lásd ábra I. helyzet/. Miután "A"-ból minden irány képét megrajzoltuk, átmegyünk az asztallal a "B" pontba. Itt az asztalt fölállítjuk "B" szerint központosítjuk, "A" szerint tájékozunk, majd sorba megirányozzuk "C", "D", "E" stb. pontokat és az irányokat meg is rajzoljuk. Ahol a "B"-ből menő irányok képei metszik az "A"-ból rajzolt irányok megfelelő képeit, ott lesznek a keresett "C, D, E" pontok képei /Lásd: ábra II. helyzet/.

Ha a megirányzott és a már megszerkesztett pontok valamely terület-idom határpontjai, úgy a területidom határvonalát minden nehézség nélkül megkapjuk, ha ezen pontokat egymással összekötjük.

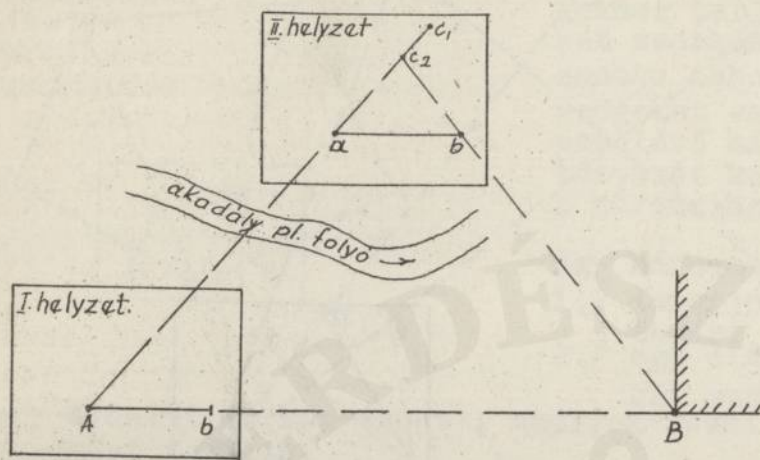
Ilyen esetben, amikor előremetszéssel több háromszöget veszünk fel, igen ügyelnünk kell arra, hogy a kiinduló-pontokat jól válasszuk meg. Ezt úgy kell eszközölnünk, hogy egy pontból minél több pontot lehessen látni, s a meghuzandó irányok, amelyek egymást metszik $25-30^\circ$ -nál kisebb $150^\circ-155^\circ$ -nál nagyobb szög alatt ne találkozzanak, mert éles m. tszés esetén az irányok metszéspontjának fekvését nehéz a papirosra megállapítani. Ahol ilyen eset előfordul, ott oldalmet-szést alkalmazunk. Ellenőrzésül célszerű a pontokat még egy harma-dik pontból is bemetszeni. Az előremetszésnek igen nagy előnye, hogy csak egy oldalhosszat kell mérni, és hogy az álláspontok és a meg-irányzott pontok között bármilyen, a látást nem akadályozó terepaka-dály, /folyó, tó, vízmosás, stb./ lehet.

3./ Hátrametszés.

Hogyan oldalmet-szést nem alkalmazhatunk, mert csak az egyik oldal mérhető jól meg, de ennek a mérhető oldalnak másik végpontjában nem lehet, vagy nem akarunk felállni, tehát előremetszést sem alkalmazha-

tunk, akkor feladatunkat hátrametszéssel oldjuk meg. Ebből a célból a megmérhető oldalnak a műszer felállítására alkalmas végpontja fölé állva megirányozzuk a másik két pontot, az irányokat meghúzzuk s a mérhető oldalt lemérjük, annak redukált hosszát a kisebbitési

léoték szerint a meg-
rajzolt irányra mér-
jük. /Ab/ A másik vo-
nalnak a hosszát szem-
mértékre megbecsüljük
s az így nyert megkö-
zelítő hosszát visz-
szük át a kisebbité-
si arány segítségével
az ezen oldalnak meg-
felelő irányra (C₁)
/Lásd ábra I. helyzet/.
Ezután a mérőasztal-
lal átmegyünk a csak
becsült hosszúságu
mezei vonal másik vég-
pontja fölé, sített az
asztalt a közelítően



felvett "C₁" pont szerint a "C" terepponttal központosítjuk s tájé-
kozunk C₁A szerint. Ezután a már pontosan meghatározott "b" pont
képe mellé fektetjük irányzókészülékünket s megirányozzuk az ennek
megfelelő "B" tereppontot. Az így kapott irányt "b" pont képétől
hátrafelé meghúzzuk mindaddig, amíg metszi az AC₁ irányt. Ha az így
nyert metszéspont egyezik a csak közelítőleg felvett "c₁" ponttal,
ugy ez azt jelenti, hogy AC₁ hosszát helyesen becsültük meg, s így
a valódi pontot határoztuk meg első felállításunkban is.

Hogyha azonban bB irány nem a "c₁" pontban metszi az AC₁ irányt,
hanem c₂-ben, akkor nem volt helyes a becslésünk és így a "c₁" sem
a "c" tereppont valódi képe. Hogy a helyes "c" pontot a rajzlapun-
kon megkapjuk, most úgy járunk el, hogy a Bb irány és a Ac₁ irány
metszéspontját, "c₂"-t az eltoló készülék szorítócsavarjának a fel-
engedésével állítjuk a terepen lévő "C" pont fölé s ismét a c₁A i-
rány szerint tájékozunk a táblánkat. Pontos tájékozás, központosítás
és szintezés után irányzókészülékünket ismét a "b" asztalpont mellé
helyezzük, megirányozzuk "B"-t, majd az irányt "b"-ből visszafelé
meghosszabbítjuk addig, amíg nem metszi az Ac₁ irányt. Az így nyert
metszéspontot lefüggélyezzük, s ha most is eltér a "C" tereppont
helyzetétől, ugy az eddigi eljárásunkat addig ismételjük, amíg a va-
lódi helyzetnek megfelelő pontot nem kapjuk.

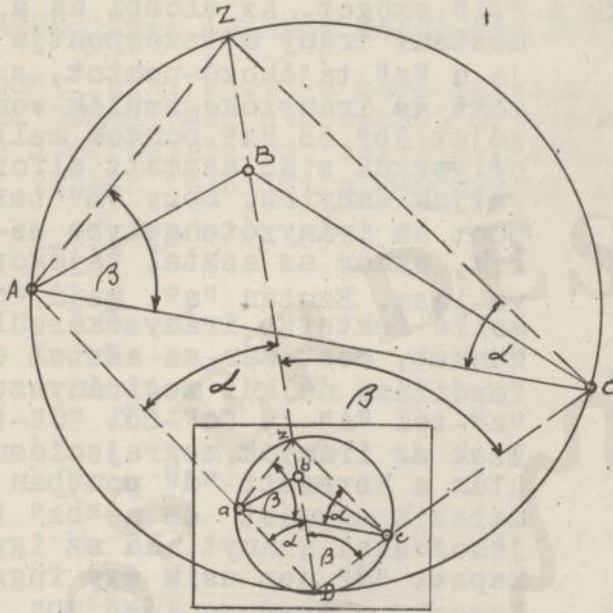
Ez az eljárás azonban igen hosszadalmas és ha csak egy mód is van
rá, ugy használatát minden körülmények között kerüljük, s inkább az
előbbi két módszer valamelyikét alkalmazzuk.

Pothenot-féle feladat.

Előfordul az az eset, hogy rajzlapunkon 3 térbeli pont képe van adva,
s ezen 3 pont segítségével kellene egy negyedik pont képét meghatá-
rozni. Ezt többféle eljárással végezhetjük, mi azonban csak kettőt:
a Bessel-féle és a gyakorlati megoldást fogjuk tárgyalni. Netto, Leh-
mann és még mások is dolgoztak ki eljárásokat a Pathenot-feladat meg-
oldására, ezek a grafikus megoldások azonban ma már csak elméleti je-
lentőséggel bírnak.

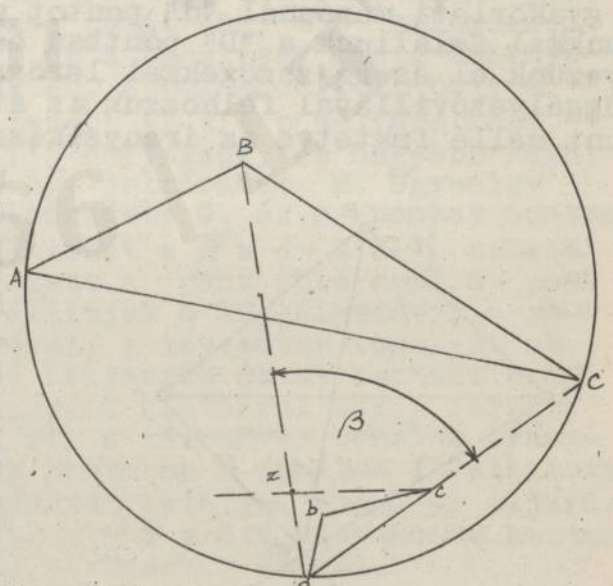
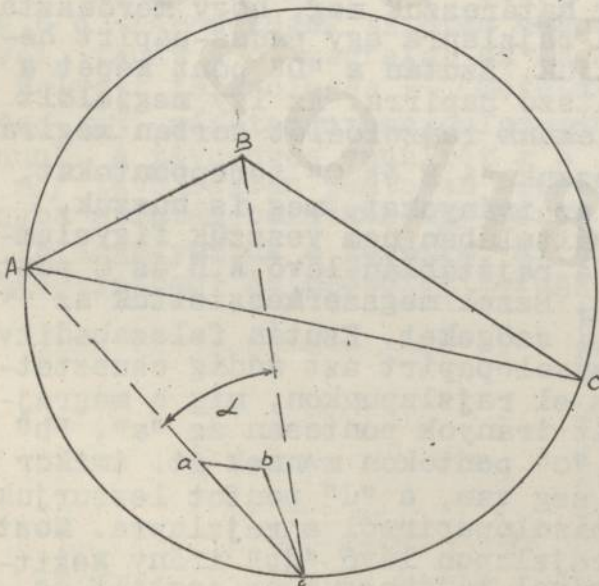
1./ A Bessel-féle eljárás.

Ennél az eljárásnál a tájékozódási irány megállapítása céljából a terepen lévő háromszögnek /ABC/ a negyedik /bekapcsolandó/ térbeli pont /D/ felé eső oldalának két végpontján /A és C/, valamint a "D" ponton át kört képzelünk fektetve. Ennek a körnek asztalunkon meg-



felel a "a", "b" és a még ismeretlen "d" ponton áthaladó kör. /Lásd az ábrát!/ Ha a D pontot összekötjük "A", "B" és "C" pontokkal, úgy a DA és DC irányok a DB középiránnyal " α " és " β " szöget zárnak be. Természetesen ugyanezek a szögek, az asztal tájékozott helyzete mellett da-db és db-dc irányok között is jelentkeznek. Ha tehát ezeket a szögeket meg tudjuk szerkeszteni, akkor a feladat meg van oldva. Azonban "d" helyzete ismeretlen és így " α " és " β " csúcspontjának rajzlapai helyét sem tudjuk megállapítani. Hogyha a tájékozó- vagy középirány /DB/ meghosszabbításának a körívvel alkotott

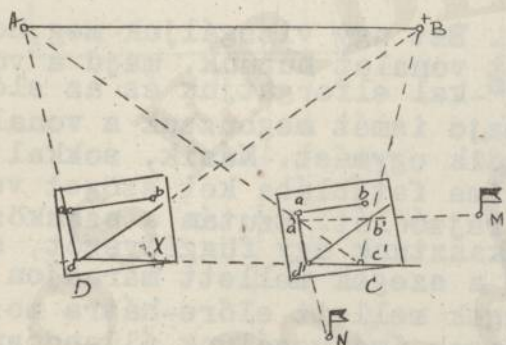
"Z" metszéspontját, mint a tájékozó iránynak egy pontját összekötjük "A" és "C" pontokkal, úgy ezen irányoknak a mérőasztalon "za" és "zc" irányok felelnek meg. A "ACZ" szög szintén α , a "ZAC" szög pedig szintén β lesz, mivel ugyanazon iven nyugvó kerületi szögek. Minthogy α -nak "C" ill. "c" csúcspontja és "Ca" szarának fekvése, azonkívül β -nak "A" ill. "a" csúcspontja és "ac" szarának fekvése a mérőasztalon ismeretes, ezeket a szögeket megszerkeszthetjük a következőképen: mérőasztalunkkal felállunk a "D" tereppontban, "c" szerint központosítjuk azt és ezután a "ca" oldalt "DA" szerint tájékozzuk, majd ebben a helyzetben a "c" pont mellé fektetjük az irányzó-



akkor "a" és "cb"-ből a "Aa" és a "Cc" irányok segítségével hátrametszük és a "d" pontot. Ha ez összeesik az átszúrt "d" ponttal, akkor feladatunk meg van oldva. Ha azonban nem esik össze, akkor az eljárásunk rossz volt, valahol hiba csuszott bele, meg kell ismételni az egészet.

A Handen, féle feladat megoldása mérőasztallal.

Két pont, a, b, adott a mérőasztalon, és megfelel a természetben A, B, pontoknak, Meghatározandó a természetben adott C és D pontnak a helye a mérőasztalon, azzal a kikötéssel, hogy csak az AB egyenesen kívül tudunk felállni a mérőasztallal.



Szemmérték szerint felvesszük D pontot a mérőasztalon/d' és ezt D pont fölé központosítjuk. A D pont fölött lévő d' pontból irányzást végzünk A, B és C felé.

Megbecsüljük DC távolságot és felhordjuk a d' x egyenesen és berajzoljuk.. /c' /

A mérőasztallal átmegyünk C fölé c' szerint központosítunk, és a mérőasztalt D szerint tájékoztatjuk. Irányzást végzünk A és B

felé is, és ezeket az irányokat metszésre hozzuk az előző álláspontban A és B felé menő irányokkal. Nyerjük az a' és b' pontokat, ADC és a' d' c' háromszögek hasonlóak, mert d, c' szerint tájékoztuk az asztalt, tehát AD párhuzamos a d'-el. Irható:

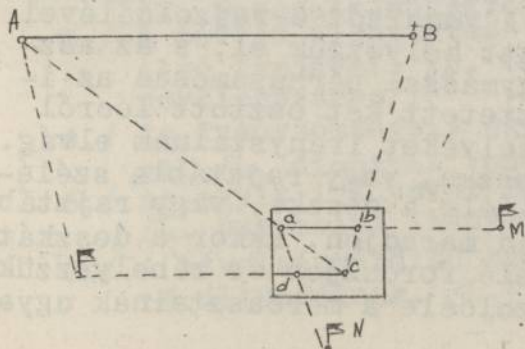
$$DC : dc' = AC : ac'$$

A DCB és d' c' b háromszögek szintén hasonlóan, mert DB párhuzamos d' b'-el. Irható:

$$DC : d' c' = BC : b' c'$$

/Két arány baloldaluk egymással egyenlő, a jobb oldal is egyenlő kell, hogy legyen, fentáll tehát az arány:

$AC : a' c' = BC : b' c'$ ebből az arányból következik, hogy ABC és a' b' c' háromszögek szintén hasonlóak, tehát hogy a' b' párhuzamos AB-vel, tehát a' b' megfelel az AB-nek, de a becslések miatt önkényesen felvett tetszőleges $\frac{a' b'}{AB}$ méretarányban. Abból a célból, hogy a helyes $\frac{a' b'}{AB}$ méretarányban dolgozzunk tovább ab-t a b' helyére kell hoznunk. A távcsöves vonalzót a b' mellé helyezzük, és nagyobb /min. 200 m./ távolságban pontosan beintünk egy jelzőrudat: M. Ugyanigy irányba szintén beintünk egy másik jelzőrudat: N, és a pontot pontosan lefüggyéyezzük a terepre. Kitűztük tehát a N a d = M a' b' szöget a természetben. Az előzőleg lefüggyéyezett a' pont fölé most a c' pontot állítjuk a függélyezővilla segítségével, a távcsöves vonalzót ab mellé helyezzük és az asztalt a finommozgatás csavarral addig forgatjuk, míg a távcsöves vonalzó irány-szála pontosan M pontban felállított jelzőrudat találja. Ezzel az eljárással ab-t a b' előző helyzetébe hoztuk, és ab párhuzamos AB-vel.



a-bél A felé és b-ből B felé menő irányok metszése adja c pontot, mely megfelel a természetbeni C pontnak.

$abc \Delta \sim ABC \Delta$ c-ből irányzást végzünk még D felé és a-ból N felé, az irányok metszéspontja megadja a D pontnak megfelelő d pontot, és $abcd \sim ABCD$.

A mérőasztal pontossági kellékei:

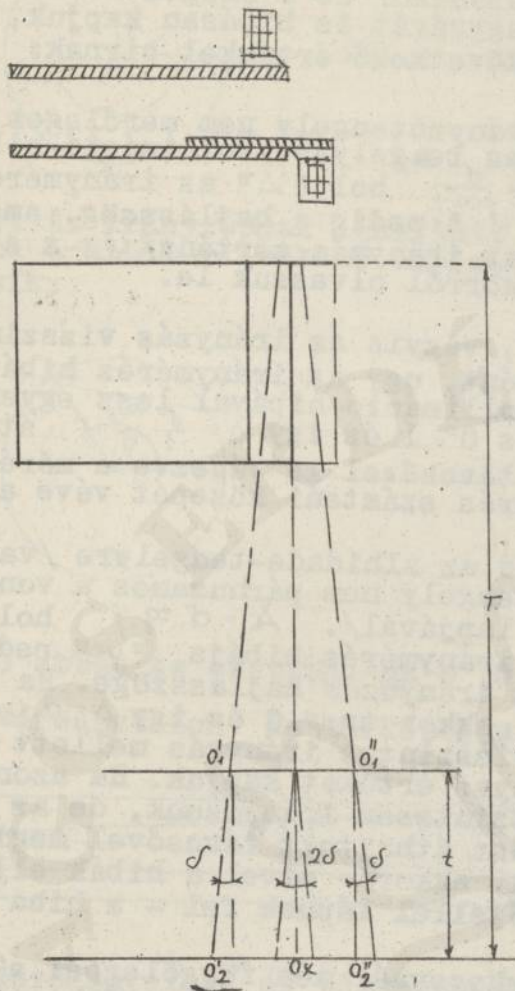
Hogy a mérést kellő pontossággal végezhessük, szükséges, hogy a rajztábla sima, egyenes, síkfelületű és repedésmentes legyen. Fontos az is, hogy a tábla szorító-, kötő- és paránycsavarjai jól működjenek. Igen nagy súlyt kell helyezünk az irányzókészülék pontosságára, megbízhatóságára, mert ettől függ tulajdonképpen az, hogy a mérés milyen pontos, megbízható lesz.

Ha a műszerünk dioptrás vonalzóval van felszerelve /csak vázrajzok készítésére használható/, úgy a következő vizsgálatok végezendők el:

1./ A vonalzó rajzolóéle egyenes legyen. Ezt úgy vizsgáljuk meg, hogy egy papíron a vonalzó rajzolóéle mellett vonalat húzunk, majd a vonalzó egy függőleges tengely körül 180° -kal elforgatjuk és az előbb húzott vonal mellé fektetjük pontosan majd ismét meghúzzuk a vonalat. Ha a rajzolóél jó, akkor a két vonal fedik egymást. Másik, sokkal pontosabb vizsgálati mód az, hogy egy sima fatáblába két szöget vésünk és ezek mellé fektetjük a vonalzó rajzolóélét. Ezután a szemközti falon megjelölünk egy pontot, vagy felakasztunk egy függélyezőt, s azt megirányozzuk úgy, hogy a rajzolóél a szegek mellett maradjon. Most a dioptrás vonalzó szorosan a szegek mellett előre-hátra mozgathatjuk és közben figyeljük, hogy függőleges irányszálunk állandóan fedi-e a megirányzott jelet. Ha fedi, akkor vonalzónk rajzolóéle jó, de ha nem fedi, akkor a rajzolóélet műszerésszel le kell csiszoltatnunk.

2./ Az irányzósík merőleges legyen a vonalzó alsó lapjára. Ezt úgy vizsgáljuk meg, hogy beszintezett mérőasztalunktól kb. 20 m-re egy függélyezőt akasztunk fel. Ha a szemlemezen egy kör alakú nyílás van, úgy ezen át, ha hosszukás szemnyílás van, akkor azt papírral lera-
gasztjuk és egy tüvel lyukat szurunk rajta és ezen át nézzük, hogy a tárgynyílás függőleges irányszála összevág-e a függélyező zsinórjával. Ha igen, akkor a függőleges irányzósík valóban függőleges s így merőleges a vízszintes asztallapra. Ha azonban a függőleges irányszál nem fedi végig a függélyező szálát, akkor az irányzósíz, valamint az irányzósík nem lehet függőleges, tehát a vonalzó vízszintes alsó lapjára sem lehet merőleges. A hibát a tárgylemez egyoldalú megemelésével, vagy a függőleges irányszál egyik végének áthelyezésével javítjuk. A vizsgálatot mindaddig kell ismételnünk, míg a tárgylemez függőleges irányszálának helyzete teljesen pontos nem lesz.

3./ Az irányzósíknak össze kell esnie, vagy párhuzamosnak kell lennie a vonalzó élével. Ezt a vizsgálatot ugyancsak vízszintesre állított mérőasztal mellett végezzük el. A vonalzó a rajzolóélével pontosan az asztallap egyik széle mellett helyeztük el, s az asztaltól bizonyos távolságra /10-15 m/ egymással párhuzamosan az irányzó tengelyre pedig merőlegesen lefektetett két osztott lécről leolvassuk azokat az osztásrészeket, amelyeket irányszálunk elvág. Ezután a dioptrás vonalzó egy másik deszka, vagy rajztábla szélére erősítjük úgy, hogy a vonalzó rajzolóéle a deszka, vagy rajztábla hosszabb éle felé forduljon és szabad maradjon. Ekkor a deszkát úgy fordítjuk meg, hogy a dioptra lefelé forduljon és ráhelyezzük az asztallapra úgy, hogy a vonalzó rajzolóéle a mérőasztalnak ugyan-



azon éle mellé essék, mint az előbb, /Lásd az ábrát!/. Most újra leolvassuk a két lécről levágott értékeket. Ha a leolvasás mindkét helyzetben azonos, ezt azt jelenti, hogy az irányzósik mindkét esetben ugyanabba a függőleges síkba esett, amely függőleges sík egyuttal a vonalzó élén is áthaladt, tehát az irányzósik a vonalzó élével összeesik.

Ha azonban mindkét lécen más és más leolvasásokat nyerünk, akkor ez azt jelenti, hogy az irányzósik is két külön síkba esett a vonalzó két helyzete mellett amelyek sem egymással, sem pedig a vonalzó élén át fektetett síkkal nem eshetnek össze. A párhuzamostól való eltérést a két léchosszság fele és a két lécközötti távolsághoz való viszonyával fejezhetjük ki.

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{O_1 O_2 - O_1' O_2'}{2t}$$

A kiigazítást pedig a szem-, vagy tárgylemeznek forgáscsapját alkotó csavarok segítségével végezzük azáltal, hogy az egyik csavart ki-, a másikat becsavarva, a lemezt oldalt eltoljuk. Az eltolás nagyságát, mivel az irányzósik a vonalzó éle mellett is

elhaladhat, az

$$/O_1' - O_X/ : T = /O_1' - O_2' / - / O_1' - O_1' / : t$$

arányból kapjuk, ha innen O_X -et kifejezzük.

$$O_X = O_2' - \frac{T}{t} \cdot \frac{/O_1' - O_2' / - / O_1' - O_1' /}{2}$$

értékkel kisebbítve /vagy nagyobbítva/ az utolsó lécleolvasást, kapjuk azt a lécosztást, melyre a távolabbi lécen az irányszálat be kell vágatni.

A távcsöves vonalzó pontossági kellékei:

- 1./ A vonalzó éle egyenes legyen /L. dioptrás vonalzó/
- 2./ Az irányzótengely merőleges legyen a vízszintes tengelyre /L. Busszola-műszerek/
- 3./ A távcső vízszintes tengelye párhuzamos legyen a vonalzó alsó lapjával. /L. busszola: vízszintes- és alhidadetengely merőlegessége/.
- 4./ Az irányzótengely egy függőleges síkba essék a vonalzó élével /L. dioptrás vonalzó/.
- 5./ Az egyik irányszál függőleges, a másik vízszintes legyen. /L. busszola: irányszálak/.
- 6./ A távolságmérőlécs beosztása megfeleljen az opt. távolságmérő állandóinak. /L. Reichenbach-féle távmérő/.

A szögmérési hibák összefoglalása.

A vízszintes síkbeli szögeket mérő műszerekkel egyrészt a műszer hibái, másrészt a mérési jelek megirányozásakor és a szögek leolvasásakor elkövetett hibák miatt a szögek nagyságát is hibásan kapjuk. Ezek a hibák a hibaforrások szerint a következő értékkel bírnak:

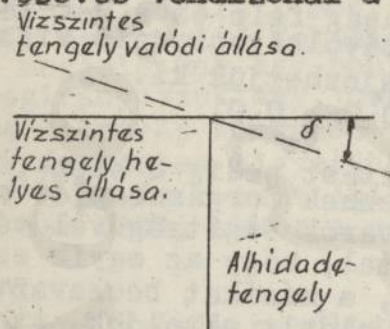


1./ Az irányzótengely nem merőleges a vízszintes tengelyre /kollimáció-hiba:
 δ : $\Delta = \frac{\delta}{\cos \varphi}$ hol " Δ " az iránymérés hibája, " φ " pedig a hajlásszög, amely mellett az irányzás történt/ φ -t a mágassági-körrel olvassuk le.

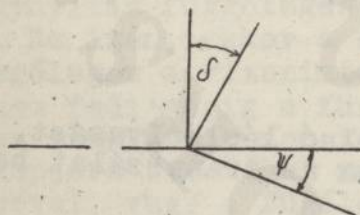
Ha $\varphi = 0^\circ$, vagyis az irányzás vízszintesen történt, úgy az iránymérés hibája Δ a kollimáció-hibával lesz egyenlő, mivel $\cos 0^\circ = 1$ és így $\Delta = \frac{\delta}{1} = \delta$ átszajtott távcsővel is végezve a mérést, a két mérés számtani közepét véve a hiba kiesik.

ba kiesik.

2./ A vízszintes tengely nem merőleges az alhidade-tengelyre /vagy a távcsőves vonalzónál a vízszintes tengely nem párhuzamos a vonalzó alsó lapjával/. $\Delta = \delta \tan \varphi$ hol " Δ " az iránymérés hibája " φ " pedig ismét az irányzás hajlásszöge. Ha $\varphi = 0^\circ$, akkor $\tan \varphi = 0$ és így $\Delta = \delta \cdot 0 = 0$ Vagyis vízszintes irányzás mellett a szög helyes értékét kapjuk. Ha azonban nem vízszintesen irányozunk, de az irányozást áthajtott távcsővel megismétljük, akkor - mivel a hibák ellenkező előjellel lépnek fel - a hiba kiesik.



3./ Az alhidadetengely beszintezett műszernél nem függőleges: a függőlegestől való eltérése: δ , a ferde alhidadetengelyen átfektetett függőleges síknak a függőleges iránystól való elhajlása ψ . Az iránymérés hibája lesz: $\Delta = \delta \sin \psi \tan \varphi$, hol φ az irányozás hajlásszöge. Ha $\varphi = 0^\circ$, akkor $\tan \varphi = 0$ és így $\Delta = 0$; valamint $\sin \psi = 0$, amikor is $\Delta = 0$. Vagyis vízszintes irányozás esetén, valamint akkor, amikor a ferde alhidade-tengely függőleges síkja egybeesik a függőleges irányzósíkkal, akkor az iránymérés és ezzel együtt a szögmérés hibája is "0" lesz.



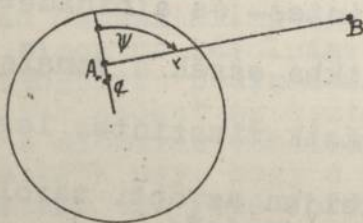
leges irányzósíkkal, akkor az iránymérés és ezzel együtt a szögmérés hibája is "0" lesz.

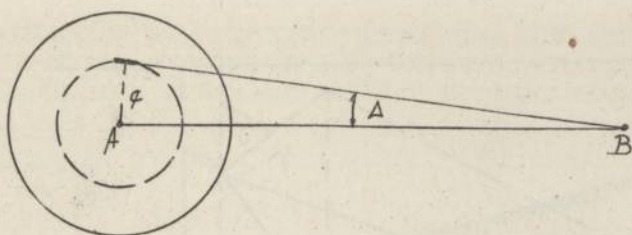
4./ Az alhidade-tengely és a limbuskör nem központos, akkor az iránymérés hibája:

$$\Delta = 206265 \cdot \frac{\sin \psi}{r \cos \varphi}$$

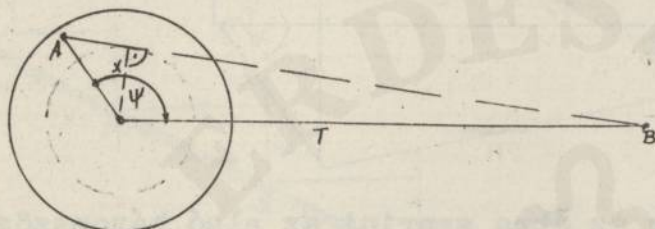
hol

"r" a nóniuszk sugara, ψ pedig a külpon-tossági irányérték. A hiba "0" lesz, ha $\psi = 0^\circ$ vagy 180° és ha "e" = 0.





nagy. Az irányzósnak áthajtott távcsővel való megismétlése esetén, mivel a hibák ellenkező előjellel lépnek fel, az iránymérés hibája kiesik.



5./ Külponthos távcső esetén az iránymérés hibája:

$$\Delta = 206265 \frac{e}{T}$$

$\Delta = 0$, ha $e = 0$, tehát ha a távcső nem külponthos, vagy ha $T = \infty$, tehát ha az irányzás távolsága a külponthossági értékhez képest

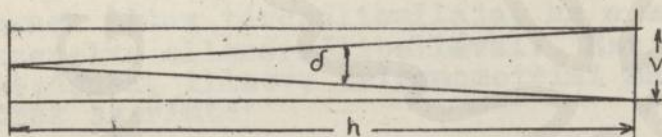
6./ Az iránymérés hibája, ha a műszer /busszola, teodolit, mérőasztal/nincs megfelelően központosítva:

$$\Delta = 206265 \frac{x}{T} = 206265 \frac{e}{T} \sin \psi$$

hol "e" a műszer külponthossága, ψ pedig a külponthossági irányérték.

$\Delta = 0$ abban az esetben, ha $e = 0$, $T = \infty$, $\psi = 0^\circ$ vagy 180°

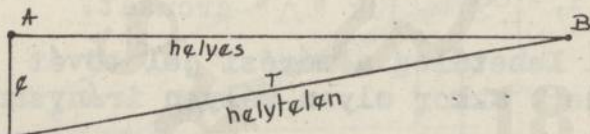
7./ Mérőasztalon és térképeken, ha az irányokat vastag vonallal



huzzuk meg, akkor az irányhiba a vonal átlója és széle között jelentkezik:

$\Delta = 206265 \frac{v}{h}$ $\Delta = 0$, ha $v = 0$, vagy $h = \infty$, vagyis hosszú, vékony vonalaknál a hiba elenyészik.

8./ Mérőasztalnál és térképeknél a vonalat nem a megfelelő ponton át, hanem attól "e" távolságra huzzuk, akkor az irány hibája:

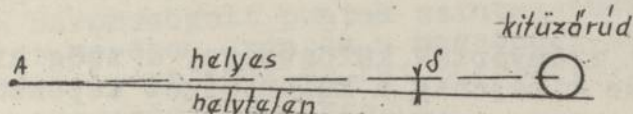


$$\Delta = 206265 \frac{e}{T} \quad \Delta = 0$$

ha $e = 0$, vagyis a vonal a megfelelő ponton megy át, vagy ha $T = \infty$, tehát a távolság nagy a külponthossághoz viszonyítva.

9./ A megírányzott pont mérési jelét nem a közepén, hanem ettől vastagságának n-ed részében irányoztuk meg:

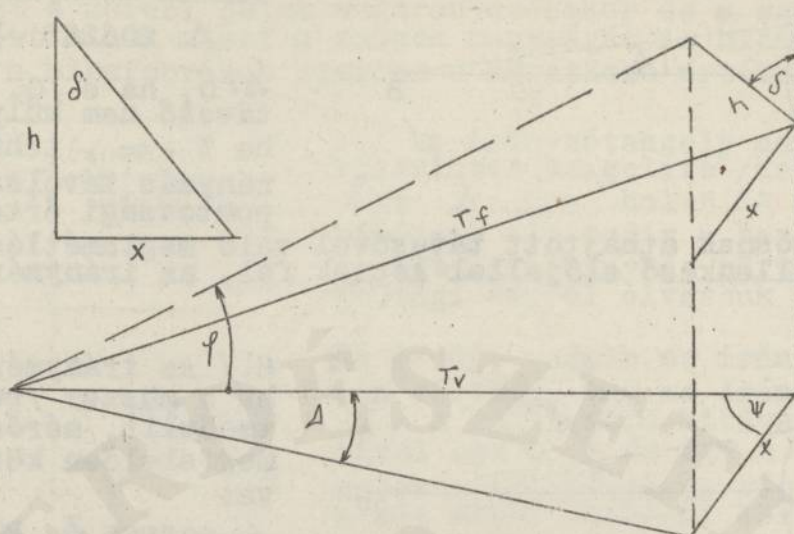
$$\Delta = 206265 \frac{\frac{v}{2} - \frac{v_n}{2}}{T} = 206265 \frac{v - v_n}{2T}$$



hol "v" a mérési jel vastagsága, "T" pedig a pont távolsága. $\Delta = 0$, ha $v_n = 0$, vagy $T = \infty$, ami azt jelenti, hogy a mérési jel közepén kell megírni.

nyozni, különben csak nagy távolságon enyészik el a hiba.

10./ A mérési jel /mérőléc, kitűzőrúd/ ferde. Ha a mérési jel a függőlegestől "φ" szöggel tér el, akkor a mérési jelen át vett függőleges sík a térbeli vonalon át képzelt függőleges siktól ψ szög alatt hajlik el. Ha a mérési jelet talpától "h" távolságban "φ" magassági



szög alatt irányoztuk meg, akkor az ábra szerint az alsó háromszögből:

$$\frac{x}{T_v} = \frac{\sin \Delta}{\sin \Delta + \psi} = \frac{\sin \Delta}{\sin \Delta \cos \psi + \cos \Delta \sin \psi} \cdot \frac{1}{\cos \psi + \operatorname{ctg} \Delta \sin \psi}$$

És innen:

$$T_v = x \cos \psi + x \operatorname{ctg} \Delta \sin \psi$$

Ebből

$$\operatorname{ctg} \Delta = \frac{T_v - x \cos \psi}{x \sin \psi}$$

Viszont

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{x \sin \psi}{T_v - x \cos \psi}$$

de a felső /külön is kirajzolt/ háromszögből $x = h \sin \delta$, ezt behelyettesítve: +

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{h \sin \delta \sin \psi}{T_v - h \sin \delta \cos \psi}$$

$\Delta = 0$, ha $h = 0$, $\psi = 0$, $\delta = 0$, vagy ha $T_v = \infty$

Kis szögek esetén vehetjük " Δ " arcusát.

A hiba kiejtése céljából méréseknél lehetőleg a mérési jel tövét kell megirányoznunk, ha ezt nem lehet, akkor olyan mélyen irányzunk, ahogyan csak lehet.

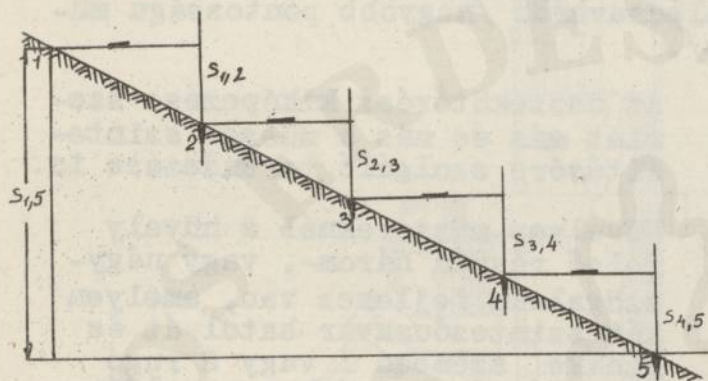
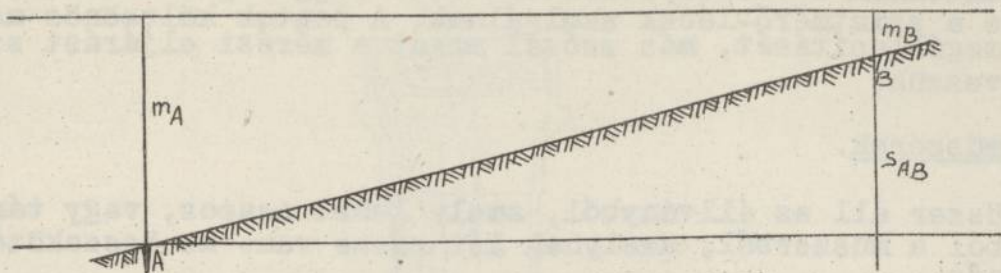
A kitűzőrud függőlegesre-állítását a gyakorlatban függélyezővel végezzük, a mérőléceknél pedig dobozlibellát is szoktak használni.

Mindezeket figyelembe véve a műszert úgy kell használnunk, hogy az iránymérési hibák lehetőleg kiessenek, vagy legalább is a legkisebb értékkel szerepeljenek méréseinkben.

Miután a szög nem egyéb, mint két irányérték különbsége, a szög hibáját megkapjuk, ha a két iránymérés hibájának a különbségét képezzük.

Pontok kölcsönös magassági fekvésének megméréseire szolgáló műszerek.
/Szintmérő műszerek./

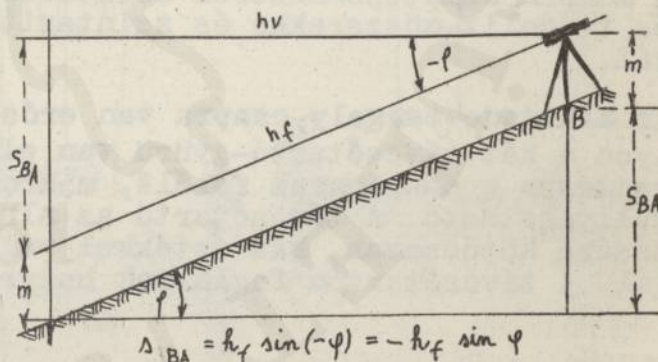
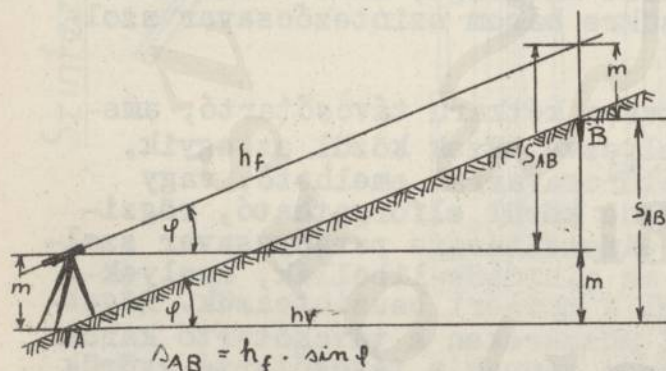
Ha "A" és "B" pontok magasságkülönbségét keressük, úgy a legegyszerűbb eljárás az, hogy valamilyen eljárással kijelölünk egy vízszintes síkot és megmérjük az "A" illetve "B" pontoknak ettől számított " m_A " és " m_B " távolságait. Ezen adatokból a két pont magasságkülönbsége, vagyis a szintkülönbség lesz: $s = m_B - m_A$. Ezt az eljárást közönséges szintezésnek, vagy geometriai szintezésnek nevezzük.



Elvégezhetjük ezt a mérést az u.n. lépcsős méréssel /stafilizás/ is, amelyre a 4 m hosszú libellás léc szolgál. A mérés kivitelét a mellékelt ábra mutatja.

Két-pont kölcsönös magasságának a meghatározására alkalmazhatunk busszola- és teodolit-műszert is, ha van távcsőlibellája és jól van igazítva. De mérhetünk magasságokat az olyan busszola- és teodolit-műszerekkel is, az

melyeknek nincs távcsőlibellája, ha a műszerek magassági-köre fel van szerelve ellenőrzőlibellával. Ezt az eljárást trigonometriai szintezésnek, illetve trigonometriai magasságmérésnek nevezzük. Az ábrák szerint:



Ez az eljárás kevésbé pontos, azért a tachimetrikus felvételeknél használjuk, vagy ha egymástól nagy távolságban lévő pontok szintkülönbségét akarjuk meghatározni, tekintet nélkül a közbenso pontokra /pl. a háromszögelt pontok szintmagasságának a meghatározásánál./ Ebben az esetben azonban a magassági-kör két leolvasókészülékén kell leolvasást végeznünk és két távcsőfékvésben kell mérnünk, hogy a kellő pontosságot elérhessük.

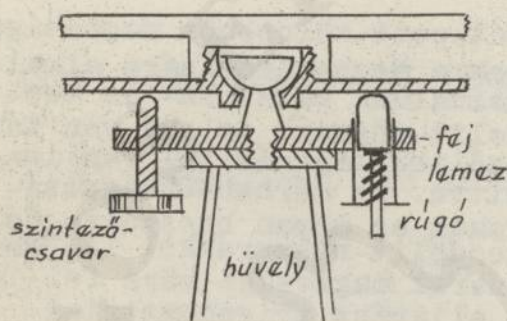
A közvetlen szintmérés, amint láttuk, abban áll, hogy a terepen lévő pontok fölött felvesszünk egy vízszintes sítot, s a pontoknak ettől a siktól való távolságát mérve a mérési adatok különbségéből nyerjük a pontok kölcsönös magassági fekvését. A vízszintes irány kijelölésére több eszköz alkalmas, így a már tárgyalt libellás léc, távcsőlibellás busszola, vagy teodolit, de ezek mellett vannak kizáró

rólág a szintvétel célját szolgáló műszerek is, ezek a szintező-műszerek. A pontoknak a viszonyítósíktól való függőleges siktávolságának mérésére a szintmérő-lécet szolgálják. A pontok kölcsönös magasságának megállapítását, más szóval magát a mérési eljárást szintezésnek nevezzük.

A szintező műszerek.

A szintezőműszer áll az állványból, amely lehet csapos, vagy tányéros és magából a műszerből, amelynek két része van: az összekötőrész és az alhidade.

Az összekötő-rész lehet hüvelyes /kisebb pontosságú műszereknél, csapos állványfejhez/ és három talpcsavaros /nagyobb pontosságú műszereknél, tányéros állványfejhez/.

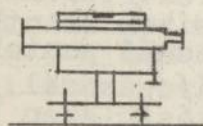


Az összekötőrész kiképezése szerint más és más a műszer szintezésére szolgáló berendezése is.

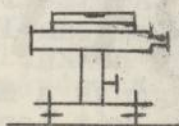
Hüvelyes műszereknél a hüvely felső részén három-, vagy négy-szög alakú fejlemez van, amelyen két szintezőcsavar hatol át és ezekkel szemben 1 vagy 2 rugó van. Hátránya ennek a megoldásnak, hogy az állótengely, vagy alhidade gömbcsuklószertűen van kiképezve s ezáltal igen rövid, amiért könnyen kikopik és lötyögés áll elő. Azonkívül a rugók működése is megbízhatatlan.

A modern szintezőműszerek összekötőrése háromágú, mint a busszola- és teodolit-műszerekké és szintezésükre három szintezőcsavar szolgál.

Az alhidade-tengely-csapra van erősítve a kétkarú távcsőtartó, amelyen a két távcsőtartó-gyűrű van elhelyezve. Ezek közül az egyik, rendszeren a szemlencse felőli, mikrométercsavarral emelhető, vagy süllyeszthető. A távcsőtartó az alhidade körül elforgatható, rögzítésére kötőcsavar, kis értékkel való elmozdítására parányicsavar szolgál. A távcsőtartón foglalnak helyet az alhidade-libellák, amelyekkel a műszert beszintezzük. Régebbi műszereken a távcsőtartó karok végén vannak a távcsőtartó gyűrűk /L. 1. ábra/, míg újabb műszereknél a távcső közvetlenül a távcsőtartóra van erősítve. /L.2. ábra/.



L.1)

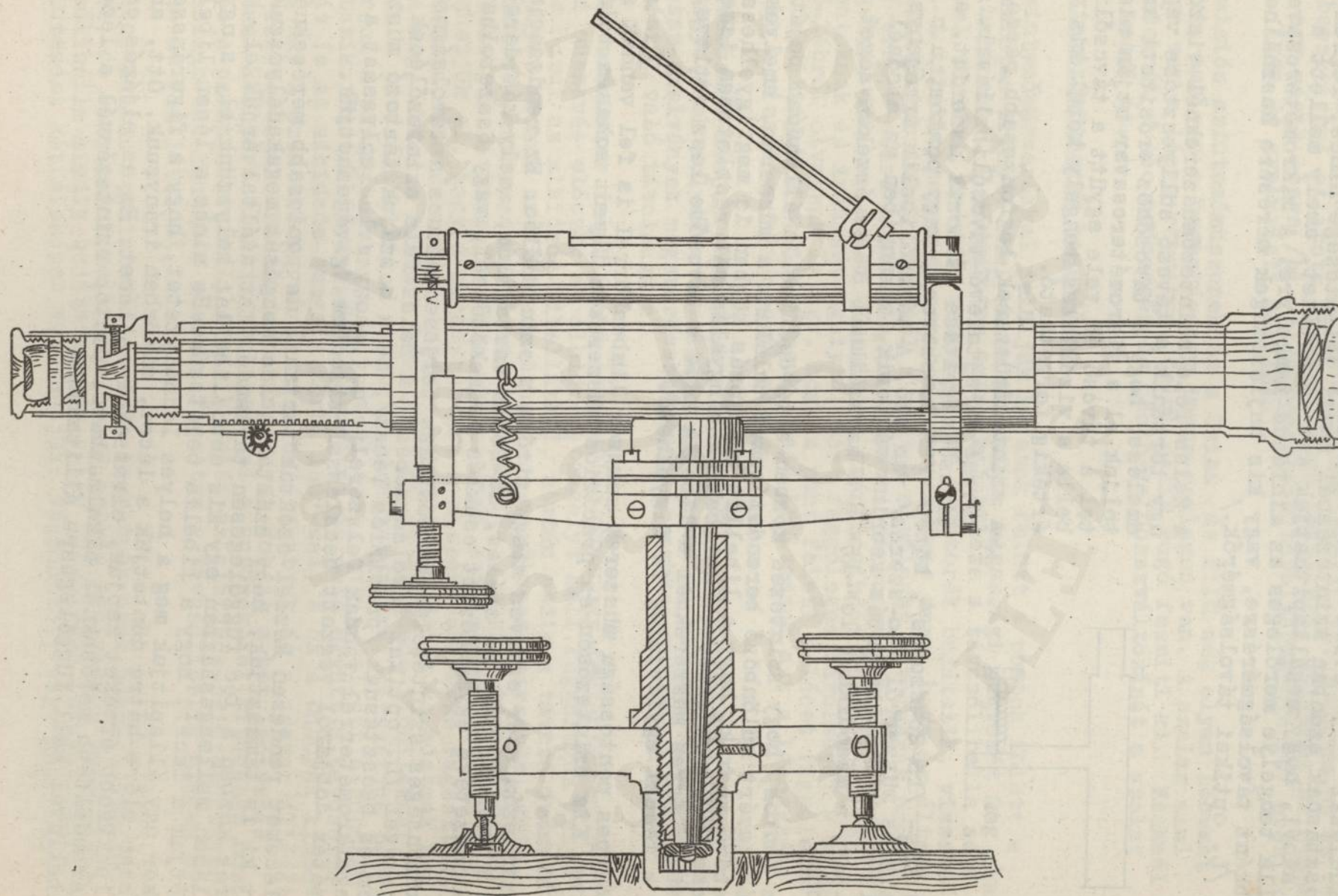


L.2)

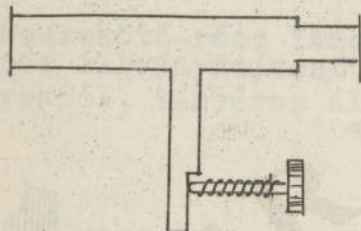
Az előbbi a Stampfer-féle műszereken fordul elő, míg a második a modern Zeiss és Wild-féle műszereknél. Mindkét típusnál megtaláljuk a szintező-parányicsavart, amely a

Stampfer-féle műszereknél az okuláré-felőli oldalon a távcsőtartó gyűrűvel van összeköttetésben, míg a Zeiss-féléknél magával a távcsőtartó oszloppal. A csavar rendeltetése mindkét esetben az, hogy a távcsövet a távcsőlibellával együtt kis értékig föl-le lehessen billenteni. A lécről való leolvasás előtt ezzel állítjuk be pontosan a libellát.

Szintező műszer



A Stampfer-féle szintezőműszerek mikrométercsavarjának menetmagassága 0.5 mm, s miután a csavar dobja 100 részre van beosztva, a távcső elmozdulását $\frac{0.5}{100} = 0.005$ mm pontossággal olvashatjuk le róla. Ennek a beosztásnak azonban szintezésénél semmi jelentősége nincs, legfeljebb annyi, hogy megállapíthatjuk azt az értéket, amely mellett a libella tengelye merőleges az alhidade-tengelyre. A mikrométercsavart egyébként távolságmérésre, vagy kis hajlásszögek mérésére használhatjuk. /L. optikai távolságmérők./



A Zeiss-féle szintezőműszereknél viszont úgy történik a távcső süllyesztése vagy emelése, hogy a távcsőhöz erősített kart toljuk el a mikrométercsavar útján miáltal a távcső és vele együtt a távcsőlibella a vízszintes tengely körül kis értékig forgatható.

A szintezőműszerek legfontosabb része a távcső a rajtalévő távcsőlibellával. A távcső nagyítása változik aszerint, a-

mint kis- /15-20-szoros/, közép- /25-30-szoros/, vagy pontos, u.n. precíziós műszerről /40-szeres/ van szó. A távcsőlibella érzékenysége is a fenti osztályozás szerint változik, amennyiben az elsőnél 20"-30", a másodiknál 10"-15" s a harmadiknál 5"-es érzékenységet találunk.

Igen fontos, hogy szintezés közben a távcsőlibella állandóan bejárt-szék, ezért különböző berendezéseket találunk a műszeren, amelyek lehetővé teszik, hogy a libellát irányozás közben is megfigyelhessük. /Ezeket a berendezéseket a libellák tárgyalásánál részletesen ismertettük/. Egyes műszereknél a libella képe a távcsőbe lesz vetítve, s így a léccel egyidejűleg is figyelhető.

A közepes pontosságú műszerek sokszor limbuskörrel is fel vannak szerelve. Kis szintezőkön és precíziós műszereken ilyenent sohasem találunk.

A szintezőműszer szerves kiegészítője a szintezőléc. Ez rendszerint 3-4 m hosszú, 8-12 cm széles, 15-20 mm vastag lécz, amely két darabból van összetéve egymásközött csuklós összekötéssel, vagy összehajtható.

A közönséges szintezőléc beosztása teljesen azonos a távolságmérő lécekével /L. optikai távolságmérés/. A Zeiss-féle szintezőléc 2 cm-es beosztásúak /precíziós lécek/, de a hozzájuk tartozó műszerek üveg-mikrométerrel vannak felszerelve úgy, hogy a lécleolvasást a mikrométer dobjáról végzett becsléssel tized mm-ig végezhetjük.

A léceket rendszeren kézzel szoktuk tartani, de pontosabb méréseknél azt ki is támasztjuk, hogy ezáltal a lécz mozgását megakadályozzuk. Mérés közben a lécz függőlegesen tartandó. Ezt azáltal érjük el, hogy a lécen mellmagasságban egy kis dobozlibellát helyezünk el, s úgy tartjuk a léczet, hogy a libella bejárt-szék. Ha nincs a lécen libella, akkor úgy állapítjuk meg a helyes léczhelyzetet, hogy a figuránssal lassan előre-hátra döntetjük a léczet, miközben irányzunk. Ott, ahol a legkisebb értéket kapjuk, olvassuk le a léczet. Ez az eljárás csak alárendeltebb méréseknél alkalmazható, pontos szintezésnél a léczet libellával kell függőlegesen állítanunk.

Az eddig tárgyalt léceken kívül a gyakorlatban még nagyon sokfélét használnak. Van olyan léce is, amelyen az osztóvonalak vastagsága nem nagyobb, mint a távcsőben látott szálkereszt. Ezeket a léceket csak ott lehet használni, ahol állandó távolságok mellett szintezünk. Használnak még u.n. szintező szalagokat is: ezek dm-es és cm-es beosztással ellátott viaszosvászon tekercsek, melyeket szintezés-kor egy másik lécre /pl. öles beosztású távolságmérőlécre/ erősítenek. Igen jó gyakorlati megoldás.

Precíziós szintezőműszerekhez a Zeiss és Wild cég olyan léceket gyárt, amelyen a beosztás egy invar-szalagon van. A szalag alul fixen van a lécre rögzítve, felül pedig rugó feszíti ki. Ezeknél a léceknél a léce nedvesség és hőközta hosszváltozását a szalag nem veszi át.

A szintezőműszerek használata.

A szintezőműszerekkel jelöljük ki azok fölött a pontok fölött a vízszintes irányt, amelyeknek kölcsönös magassági fekvését meg akarjuk határozni. A vízszintes irány kijelölése a távcsőlibella segítségével történik, melynek tengelye, ha a buborék bejátszik, vízszintes. A libella tengelye azonban nem alkalmas arra, hogy az általa kijelölt vízszintes iránytól a pontok merőleges távolságát megmérjük: erre a célra a libella tengelyével párhuzamossá tett irányzó-tengelyt, ill. a távcső vízszintes irányzósíkját használjuk fel. A pontoknak az irányzó-tengelytől mért függőleges távolságát a szintező-lécről olvassuk le úgy, hogy a pont felett a léce függőlegesen felállítjuk s megirányozzuk, majd leolvassuk azt a léceosztást, melyet a vízszintes irányszál elvág.

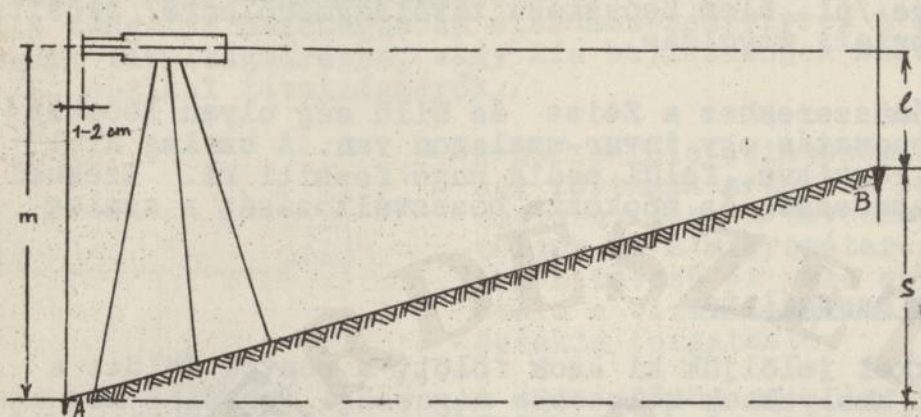
Szintezésnél mérjük a pontnak a műszertől való távolságát, mert a megfigyelések súlyát a távolságok reciprokaival vesszük egyenlőknek. A hossz-szelvények megszerkesztésénél is szükségünk van a pontok egymástól való távolságára.

A szintezőműszer felállítása lényegileg ugyanugy történik, mint a többi műszeré: először az alhidade-tengelyt kell függőleges helyzetbe hozni az alhidade-libellákkal, azután pedig a távcső irányzó-tengelyét hozzuk az alhidade-tengelyre merőleges helyzetbe, amit a szintező-paránycsavarral végezzük azáltal, hogy a távcsőlibellát bejátszatjuk. A Stampfer-féle műszereknél ezt legegyszerűbben úgy végezhetjük el, hogy a paránycsavart a műszerszekrénybe ragasztott adatkimutatásbantalálható értékre bevágatjuk. Ha ez az adatunk nem volna meg, akkor a műszert beszintezzük az alhidade-libellákkal, ezután a távcsőlibellát a szintező paránycsavarral játszátjuk be és felírjuk a paránycsavarnak azt az állását, amely mellett a buborék bejátszik. Most elforgatjuk a távcsövet és vele együtt a távcsőlibellát is az alhidade-tengely körül 180° -kal, s ha a buborék kimozdult, úgy a szintezőcsavarral újra bejátszatjuk és a csavar állását újra feljegyezzük. Ezután a paránycsavar dobját a két leolvasás számtani közepére állítjuk be, ezáltal a buborék fél kitérését hozzuk be a paránycsavarral. A másik felét az alhidade-szintezőcsavarral hozzuk be. Ezután a műszert forgatva a távcsőlibella minden helyzetben be fog játszani.

A műszer pontos beszintesítése után foghatunk csak hozzá a szintezéshez, de vigyáznunk kell arra, hogy amikor leolvasást végzünk, a távcsőlibella mindig bejåtsszék és a léce függőleges legyen. Magát a szintezést kétféleképpen végezhetjük: végpontból, vagy középpontból.

1./ Végpontból való szintezés.

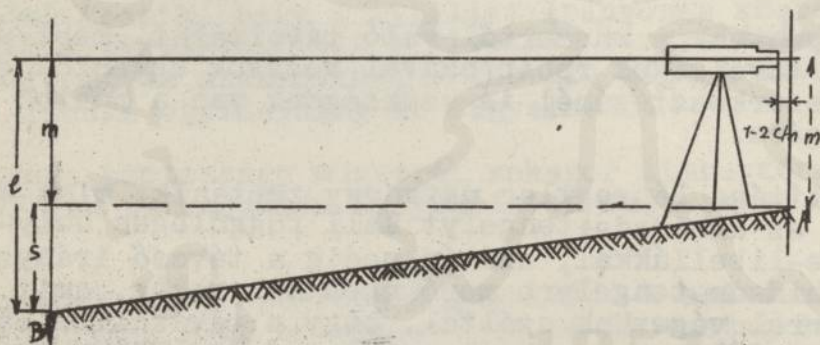
Ennél a módszernél úgy járunk el, hogy a pont, amelyikre vonatkozólag a másik pont magassági fekvését meg akarjuk határozni, elé felállítjuk a műszert, majd a már ismert módon beszintezzük azt. Ekkor



a műszert irányzó tengelyének magasságát $/m/$ mérjük meg úgy, hogy a pontra állított lécen közvetlenül a pont elé állított műszerbe fordított irányba benézve a látómező kis körének közepét egy irón hegyével megjelöljük és ezt az értéket olvassuk le a lécről. Vagy le-

mérjük az okulár alsó és az okulár felső részét, a két érték közepe adja a műszer magasságát. Ezután a másik mérési jel fölött függőlegesen elhelyezett lécet megirányozzuk és a távcsőlibella buborékját újból bejátszátva leolvassuk azt a lécosztást, amelyet a vízszintes

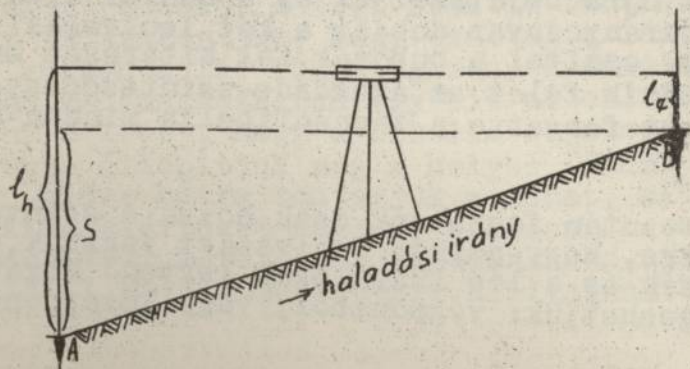
irányszál elvág. A műszermagasság és a lécleolvasás különbsége adja azt a magasságot, amennyivel "B" az "A" fölött van, mert $m = s + l$, ahonnan a szintkülönbség: $s = m - l$. Ha a "B" pont mélyebben fekszik, mint az "A", akkor "s" negatív



értékű lesz, mert az $/m - l/$ különbségben $m < l$.

2./ Középpontból való szintezés.

Ennél az eljárásnál a két pont által adott egyenesben, vagy azon kívül /a távcsőlibella által kijelölt vízszintes vonal a távcsövet forgatva egy vízszintes síkot határoz meg s ettől a síktól bárhol mérhető a pontok függőleges



távola/, a pontokból közel egyforma távolságra állítjuk fel a műszert. A lécet előbb az egyik, majd a másik pontba állíttatjuk, megirányozzuk és leolvassuk a vízszintes irányszál által levágott értékeket: l_h és l_e -t. A két pont közötti szintkülönbség: s .

Az ábrából látszik, hogy

$$s + l_e = l_h \quad \text{ahonnan } s = l_h - l_e$$

Vagyis a szintkülönbséget nyerjük, hogyha abban a pontban nyert lécleolvasásból, amelyre vonatkozólag a másik pont magassági fekvését meg akarjuk határozni, levonjuk a másik pontnál nyert lécleolvasást. Mivel pedig szintezési meneteknél minden pont magasságát az előttelelvőre vonatkoztatjuk, úgy is mondhatjuk, hogy a szintkülönbséget nyerjük, ha az elmaradó pontnál végzett lécleolvasásból $/l_h/$ levonjuk az előremenő pontnál végzett lécleolvasást $/l_e/$.

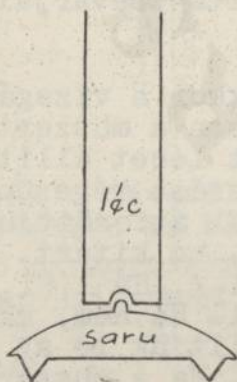
Természetesen, ha az elmaradó pont magasabban van, mint az előremenő pont, akkor a szintkülönbség előjele $/-/$ lesz.

A gyakorlatban csaknem kivétel nélkül a középpontból való szintezést alkalmazzuk. A végpontból való szintezéssel szemben az az előnye, hogy kevesebb műszerfelállásra van szükség, s így a mérés gyorsabb, azonkívül kétszer akkora távolságban lévő pontok szintkülönbségét tudjuk meghatározni, mint végponton felállva. Előnye még az is, hogy nem kell műszermagasságot mérnünk, ami végpontból való mérésnél elkerülhetetlen és nem teljesen pontos.

Néha előfordul, hogy valamely sokszögmenetnél egyszerre akarunk szintezni és közbezárt szöget mérni. Ezt a feladatot limbuskörrel felszerelt szintezőműszerrel és távcsőlibellával bíró busszolóval ill. teodolittal egyaránt elvégezhetjük. Az ilyen összetett esetben azonban mindig a végpontban /és nem előttelel/ kell a műszert felállítanunk. Bármilyen műszerrel végezzük is a mérést, célszerű azt áthajtott távcsővel megismételni /mindkét esetben pontosan beszintezett távcsőlibellával/ és a két leolvasás számtani közepét venni. Busszokánál és teodolitnál ez csak akkor lehetséges, ha revíziós távcsőlibellával van a műszer felszerelve, a szintezőműszereknél pedig a távcső rendszeren a hossz tengelye körül elfordítható. Nagy gondot kell még fordítanunk a műszermagasság mérésére is.

Ha olyan pont, vagy pontok magasságkülönbségét keressük álláspontunkra vonatkozólag, amelyek nincsenek mérési jellel megjelölve /közben-ső pontok/, akkor ezeknél sohasem tesszük a

szintező lécet a földre, hanem az u.n. szintezősarut használjuk, amelyet a mellékelt ábra mutat. A szintezősarú egy gömbszelet-alaku vas; talp; alul három tövissel, amelyet a földbe szurunk be. A sarú felső részén egy gomb van, amely a lécnél egy mélyedésébe illik, s így a lécnél nem csúszhat le a saruról. A sarúnak az a célja, hogy mérés közben, különösen laza talajon a lécnél ne süllyedjen, mert ez nagy hibát okozhat. A süllyedés különösen akkor szokott előfordulni, amikor a lécnél átfordítjuk a másik műszerállás felé /folytonos szintezésnél/. A sarukat a földbe jól bele kell taposni, vagy fakalapáccsal beverni.



Szintezőműszerek pontossági kellékei.

Hogy a szintezőműszerekkel a megfelelő pontosságot elérhessük, szükséges, hogy:

1./ a libellák tengelye merőleges legyen az alhidade-tengelyre.

Erre nézve ugyanúgy végezzük el a vizsgálatot, amint azt a busszoló tárgyalásánál már láttuk. A leemelhető távcsőlibellával felszerelt műszereknél először a szintező-paránycsavart állítjuk be az adott

leolvasásra, vagy ha az nincs adva, úgy meghatározzuk, amint azt a 6./ alatt látni fogjuk, s a további vizsgálat azonos a busszoláknál elmondottakkal.

2./ az irányzótengely összeessék az optikai tengellyel.

Vizsgálatot lásd a busszoláknál.

3./ a távcsőtartó gyűrűk egyenlő átmérőjűek legyenek.

A műszert nagyjából beszintezzük, majd a szintező-paránycsavarral bejátszatjuk a távcsőlibellát. Ezután, ha a libella a távcső fölött van elhelyezve, úgy a gyűrűbők a távcsövet a libellával együtt kiemeljük és 180° -kal megfordítva tesszük vissza a gyűrűbe s megfigyeljük, hogy a buborék most is bejátszik-e. Ha igen, akkor a gyűrűk pontosan egyenlő átmérőjűek, de ha a buborék nem játszik be, akkor a gyűrű igazítócsavarával játszátjuk be és a vizsgálatot megismételjük.

Ha a távcsőlibella a távcső alatt van elhelyezve, akkor a buborék bejátszatása után a műszertől 25-30 m-re fűzött függőleges léccről leolvassuk azt az osztásrészt, amelyet a vízszintes iránysszal elvág. Ezután a távcsövet a libellával együtt kiemeljük, 180° -kal elforgatjuk és visszahelyezve a tartógyűrűbe újból megirányozzuk a lécezt és leolvasást végzünk róla. Ha a két leolvasás egyezik, akkor egyenlőek a távcsőtartó gyűrűk. Ha azonban nem egyezik, akkor a távcsövet addig emeljük, vagy süllyesztjük a gyűrű igazítócsavarjaival, amíg a léccről az első leolvasást nyerjük.

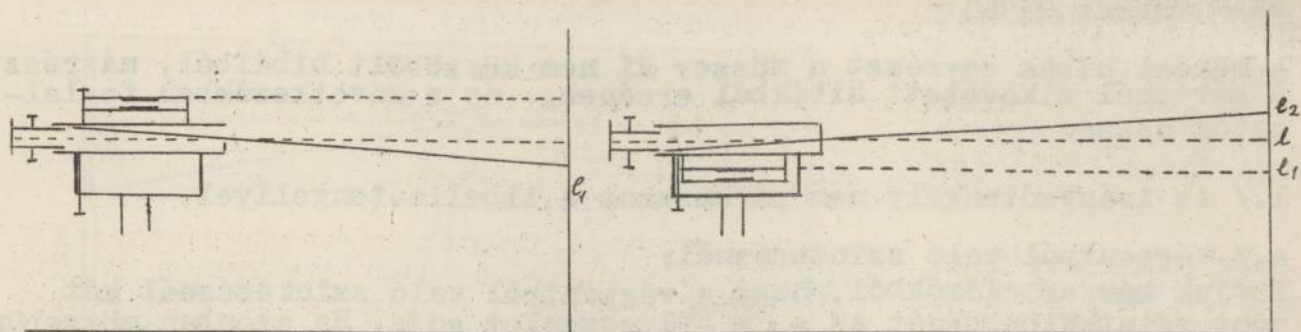
Egyes szintezőműszereknél nincsenek a távcsőtartó gyűrűknek igazítócsavarjai. Itt tehát nem tudjuk a hibát javítani ezért a távcsövet mindig csak egy fekvésben használjuk.

4./ Az irányzótengely párhuzamos legyen a távcsőlibella tengelyével.

Vizsgálatot és kiigazítást lásd a busszoláknál!

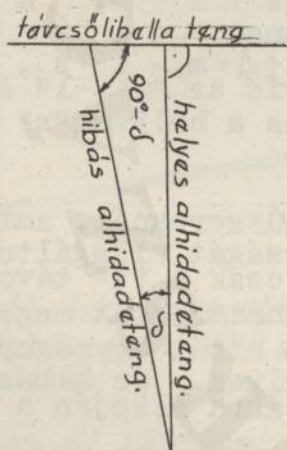
Abban az esetben, ha az iránykeresztet már a távcső hossztengelyébe hoztuk a 2./ alatti vizsgálat alapján, de az még mindig nem párhuzamos a libellatengellyel, akkor a kiigazítást a szintezőcsavarral végezzük úgy, hogy a szátkeresztet rávágatjuk a helyes értékre utána pedig a távcsőlibellát játszátjuk be a libella igazítócsavarjai segítségével.

Ha a műszer reverziós libellával van felszerelve, akkor a vizsgálatot egy álláspontból végezhetjük el. Felállítjuk szimtesen a műszert és tőle 20-30 m távolságra egy függőleges, kitámasztott lécezt állítunk fel. A távcsőlibella pontos bejátszatása után leolvasást végzünk a léccről $/l_1/$. Ezután a távcsövet a hossztengelye körül átfordítjuk 180° -kal, a libellát ellenőrizzük, hogy bejátszik-e, ha kitért, utána állítjuk. Ekkor újra leolvasást végzünk a léccről $/l_2/$. Ha $l_1 = l_2$, akkor a libellatengely párhuzamos az irányzótengellyel. Ha nem, akkor a kétszeres hibát kaptuk, tehát $l = \frac{l_1 + l_2}{2}$ értékre állítjuk be az iránysszalát a szátkereszt függőleges igazítócsavarjaival. Ha a műszer távcsővén nincsenek függőleges igazítócsavarok, akkor a szintező paránycsavarral állítjuk be a lécleolvasást, ezzel kitér a libella buboréka: ezt teljes értékig a libella igazítócsavarjával állítjuk be.



5./ Az egyik irányszál vízszintes, a másik függőleges legyen. A vizsgálatot lásd a busszolásnál.

6./ Az irányzótengely merőleges legyen az alhidade-tengelyre. Vizsgálatunk a következő: a műszert beszintezzük és úgy fordítjuk el a távcsövet, hogy a libella távcsőlibella egy szintezőcsavar fölé kerüljön. Itt bejátszatjuk a távcsőlibellát a szintező-paránycsavar segítségével. Amikor a buborék bejátszik, leolvassuk a csavar állását /0₁/, vagy ha az beosztással nem bír, bekarcolással megjelöljük a távcsőtartógyűrű vezető-nyulványán a távcsőtartó végjelének helyzetét. Ezután elfordítjuk az egész felső részt 180°-kal s megfigyeljük a távcsőlibella buborékját, hogy bejátszik-e. Ha igen, akkor a műszer megfelel a merőlegességi feltételnek. A paránycsavarról végzett leolvasás, vagy az abba karcolt jel lesz a műszer normál-pontja, melyre a szintező-paránycsavart a műszer felállításánál be kell állítani. Hogyha azonban a távcsőlibella buborékja az elforgatás után nem játszik be, akkor ez azt jelenti, hogy a körülfordítás a függőlegestől "σ" szöggel eltérő alhidade-tengely körül történt. Ebben az esetben a vízszintesített libella-tengely a nem függőleges alhidade-tengellyel 90°-σ szöget zár be. A 180°-kal való körülfordítás után ugyancsak 90°-σ a libellatengely és az alhidade-tengely által bezárt szög, tehát a libella-tengely két helyzete által bezárt szög:



$$2/90^\circ - \sigma / = 180^\circ - 2\sigma$$
 illetve: $180^\circ - /180^\circ - 2\sigma / = 2\sigma$ szöget zárja be. Ennek a szögnek $\frac{2\sigma}{2}$ buborékkitérés felel meg, vagyis a buborékkitérés fele.

Hogyha a távcsőlibella buborékját a második /180°-kal elforgatott/ helyzetben is be akarjuk játszani, akkor a libella tengelyét a szintező paránycsavar segítségével 2 szöggel kell kimozdítanunk. Ennek a kimozdításnak a paránycsavaron új leolvasás /0₁/ vagy a vezetőnyulványon új jel felel meg. A két leolvasás, vagy a két jel közötti hosszúság: 0₁ - 0₂ a 2σ szögeértéknek felel meg, a $\frac{0_1 - 0_2}{2} = \sigma$ szögeértéknek pedig $\frac{0_1 - 0_2}{2}$ leolvasáskülönbség. Eljárásunk tehát az lesz, hogy a tengelylibella buborékját a libellaigazító-csavarokkal fél értékkel bejátszatjuk, a másik fél értéket pedig a szintezőcsavarokkal hozzuk be. A vizsgálatot meg kell ismételni. Többszöri ismétlés után, ha a tengelylibella buborékja minden helyzetben bejátszik, úgy a műszerünk jó, és feljegyezve, vagy megjelölve a szintezőcsavar mostani állását, egyúttal a normálpontot is megkaptuk.

Szintmérési hibák.

A mérési hibák egyrészt a műszer ki nem küszöbölt hibáiból, másrészt a mérésnél elkövetett hibákból erednek, és a következőkben foglalhatók össze:

1./ Az irányzótengely nem párhuzamos a libella-tengellyel.

a./ Végpontból való szintezésnél:

Tudjuk már az előzőkből, hogy a végpontból való szintezésnél két pont szintkülönbségét az $s = m - l$ egyenlet adja. Ha azonban műszerünk a fentemlitett hibával van terhelve, úgy irányzótengelyünk nem fogja a valódi vízszintes síkot kijelölni s ezért a lécleolvasásnál is $\pm \Delta$ hibát követünk el. Hogy a helyes szintkülönbséget meg tudjuk határozni, ismernünk kell a " Δ " hibát előjelével együtt. A műszernél

a vízszintes irányzó-sík eltérése a valódi vízszintestől nem érzékelhető, azért az " m " műszermagasság meghatározását hibamentesnek vehetjük.

Figyelembevéve a lécleolvasás " $\pm \Delta$ " hibáját a "B" pontnak "A"-ra vonatkozó szintkülönbsége lesz:

$$s + l \pm \Delta = m$$

innen

$$s + \Delta = m - l = s_1, \text{ vagyis az } m - l \text{ érték}$$

egy Δ hibával terhelt szintkülönbséget ad, vagyis a helyes " s " helyett egy hibás " s_1 " értéket. Tehát

$$s = m - l \pm \Delta = s_1 \mp \Delta$$

A hiba kiküszöböléséről már volt azó a busszola-műszereknél, amikor az irányzótengely és a libella-tengely párhuzamosságát vizsgáltuk és igazítottuk ki. Ha nem igazítottuk ki a műszert, csak a " t " távolságban lévő lécen a vízszintestől való x eltérést határoztuk meg, akkor a méréseinket kell helyesbíteniük úgy, hogy a hibát egységnyi távolságra vonatkoztatjuk. Ha " σ_1 "-el jelöljük a helyes- és hibás szintkülönbségek egységekre eső eltérését, akkor az ábra alapján a következő arányt írhatjuk fel:

$$\sigma_1 : x = 1 : t, \text{ ahonnan } \sigma_1 = \frac{x}{t}$$

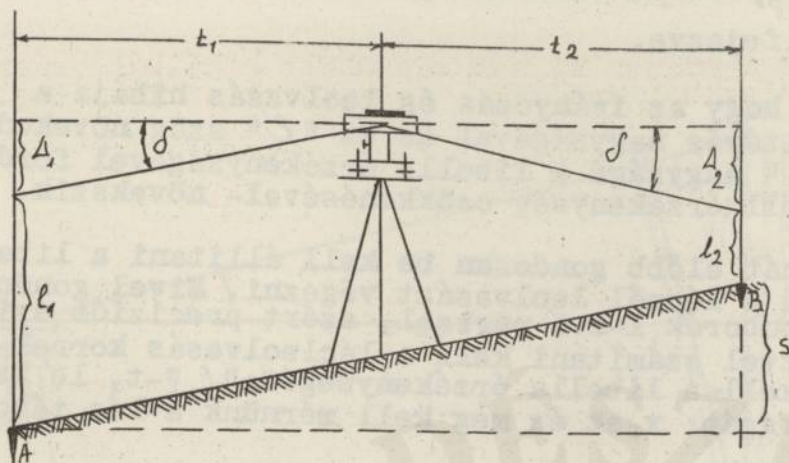
Ennek segítségével a helyes szintkülönbséget képezhetjük, hogyha a műszer és léce közötti " T " vízszintes távolságot ismerjük: $\pm \Delta = T \sigma_1$ továbbá az $s_1 = s \mp \Delta$ -ból a helyes szintkülönbséget képezve:

$$s = s_1 \mp T \sigma_1 \text{ értéket kapjuk.}$$

b./ Középpontból való szintezésnél.

A hátraírányozásnál a lécleolvasásunk a helyes lécleolvasástól $\pm \Delta_1$ hibájával fog eltérni, előreírányozásnál pedig $\pm \Delta_2$ hibát ad az, ha az irányzótengely és a libella-tengely nem párhuzamos. Amint az ábrából látszik:

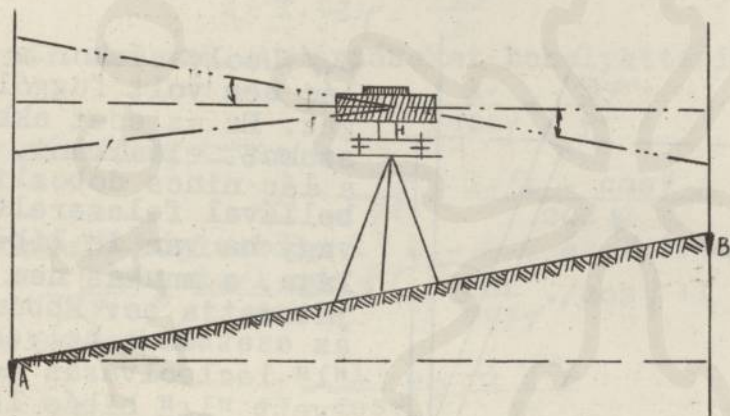
$$s + l_1 \pm \Delta_1 = l_1 \pm \Delta_1, \text{ tehát } s = l_1 \pm \Delta_1 - l_2 \mp \Delta_2 \text{ innen } s \mp \Delta_1 \pm \Delta_2 = l_1 - l_2 = s_1$$



sal küszöbölhetjük ki, a központi fölállásnál viszont a hiba a szintkülönbségek képzésénél csökken, mert ellenkező előjelű és ha a két léctávolság egyenlő, akkor teljesen kiesik. Ezért alkalmazzák a gyakorlatban mindenütt a középpontból való szintezést, mégpedig szabatos szintezéseknél egyenlő léctávolságokkal.

s, akkor lesz egyenlő a keresett s-sel, ha $\Delta_1 = \Delta_2$, ez pedig akkor áll elő, ha a műszer távolsága a két léccállástól egyenlő.

Ezek szerint a végpontból való szintezésnél az irányzótengely és a távcsőlibella-tengely nem párhuzamos fekvéséből származó hibát csak külön számítás-



sánál és leolvasásánál lehet vízszintes, vagy a vízszintestől egyik oldalra elhajló, a másik lécc megirányozásánál pedig a másik oldalra elhajló.

Abban az esetben, ha irányozás és leolvasás alkalmával a buborék nem játszott be, leolvassuk a buborék mindkét végének állását /n és m/ is és a libellák tárgyalásánál levezetett $x = \frac{n-m}{2}$ képletből nyerjük a buborék középpontjának eltérését a libella normálpontjától, vagy ami egyre megy a buborék végeinek eltérését a helyes fekvéstől kifejezve a libella osztásrészeivel. Minthogy pedig egy osztásrésszel való kitérésnek "ε" szög felel meg /ez a libella érzékenysége/, mellyel a libellatengely és a vele párhuzamos irányzótengely a vízszintestől elhajlik, akkor "x" osztásrésznek "x.ε" szögérték felel meg. Hogyha a lécc a műszertől "T" távolságban van, akkor az irányzótengely az "x.ε" szögértéknek és a "T" távolságnak megfelelő "Δ" ívhosszal fog a léccen a helyes fekvéstől eltérni, vagyis

$$x, \epsilon = \rho'' \cdot \frac{\Delta}{T}$$

s innen

2.7 A műszer nincs jól szintesítve.
Ha a műszer nincs jól szintesítve, akkor az első leolvasás után elforgatva a műszert a libella buborékja kitér, s ezáltal nemcsak a végponton való, de a középponti fölállásnál is hibás szintkülönbségeket nyerhetünk. Középponti fölállásnál az irányzótengely az egyik lécc megirányozá-

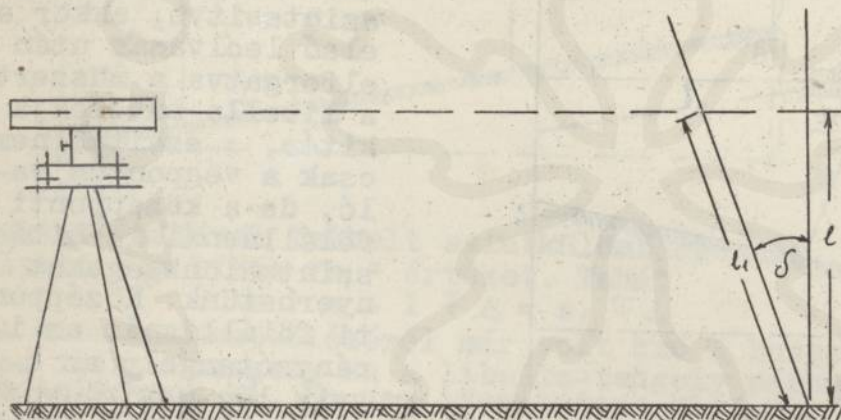
$$\Delta = x \cdot T \cdot \frac{\epsilon''}{\rho''} = 0.0048462 \cdot T \cdot x \cdot \epsilon'' \text{ mm}$$

hol "T" méterekben van kifejezve.

Ebből tehát az tűnik ki, hogy az irányozás és leolvasás hibája a távolsággal, a buborék-kitérés nagyságával és az " ϵ " szög növekedésével - illetve mivel " ϵ " nagysága a libella érzékenységevel fordított arányban áll: a libellaérzékenység csökkenésével - növekszik.

Egyszerű szintezésnél tehát előbb gondosan be kell állítani a libellát és csak azután szabad a lécről leolvasást végezni. Mivel gondos beállításnál is kitér a buborék 1-1.5 parssal, azért precíziós szintezéseknél a fenti képlettel számítani kell a lécleolvasás korrekcióját. Ehhez ismernünk kell a libella érzékenységet: " ϵ "-t, le kell olvasnunk a kitérés nagyságát: x-et és meg kell mérnünk a léccel a távolságát a műszertől: T.

Kiszámítva a " Δ " hiba nagyságát, ezzel csökkentjük a nyer lécleolvasást, ha a buborék a léccel felé tér ki, mert ebben az esetben a libella tengelye és az ezzel párhuzamos irányzó-tengely a léccel szembe fordított oldalon, a vízszintes fölé emelkedik s így a valódinál nagyobb leolvasást kapunk; ha viszont a buborék a léccel szembe fordított oldalra tér ki, akkor az irányzó-tengely a vízszintes alá süllyed, ezzel a valódinál kisebb leolvasást kapunk, tehát léccel leolvasást növelnünk kell.



3./ Leolvasáskor a léccel nem volt függőleges. Ez az eset akkor szokott előállni, ha a léccel nincs dobozlibellával felszerelve, vagy ha van is libellája, a munkás nem játszatja be. Ebben az esetben a helyes "l" léccel leolvasás helyett "l₁" hibás leolvasást nyerünk. A leolvasás hibája:

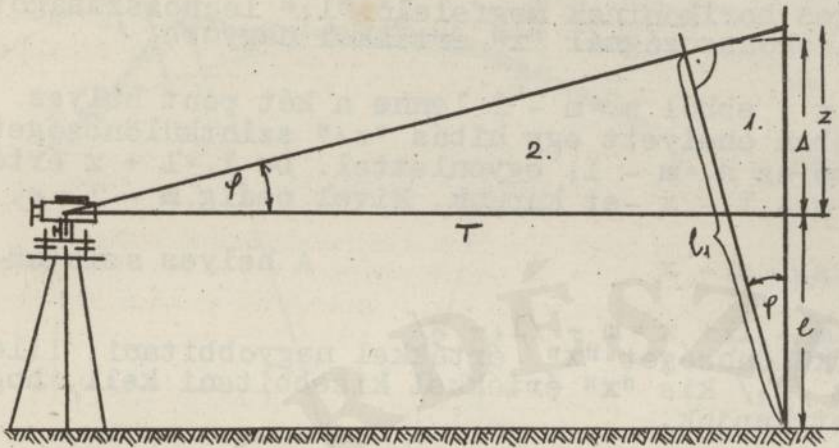
$$\Delta = l_1 - l$$

Ha a léccel elhajlása a függőlegetől " δ ", akkor $l = l_1 \cdot \cos \delta$. Ezt az értéket az előbbi egyenletbe behelyettesítve:

$$\Delta = l_1 - l_1 \cdot \cos \delta = l_1 (1 - \cos \delta)$$

lesz a hiba értéke. A fenti képletből láthatjuk, hogy a " Δ " akkor lesz "0", ha $\delta = 0$, mivel $\cos 0 = 1$ s innen $\Delta = l_1 (1 - 1) = l_1 \cdot 0 = 0$. Ha $\Delta = 0$, akkor "l" a leolvasás lehető legkisebb értéke. Ezen legkisebb leolvasás mellett a léccel mindig függőlegesen áll. Ezért mondtuk már a szintezés általános ismertetésében, hogy ha a léccel nincs libella, akkor a munkással lassan előre-hátra döntjük a léccel és ahol a legkisebb leolvasást kapjuk, az lesz a helyes érték.

4./ Az irányzó-tengely nem párhuzamos a libella-tengellyel és leolvasáskor a léccel nem függőleges. Ha az előbb tárgyalt két hiba egyszerre lép fel, akkor a nyert legkisebb leolvasás nem fogja a helyes "l" értékeket szolgáltatni, hanem egy hibás "l₁"-et olvasunk le.



Ebben az esetben a léc a nem vízszintes irányzótengelyre merőleges a legkisebb leolvasásnál, tehát nem függőleges helyzetű. A leg-rövidebb leolvasáskor a léc ugyanavval a "φ" szöggel tér el a függőlegestől, mint az irányzótengely a vízszintestől /merőleges szárú szögek./

A hiba nagysága:

$$\Delta = l_1 - l$$

Az ábrán kirajzolt

1./ háromszög alapján:

$$\cos \varphi = \frac{l_1}{l+z} \quad \text{ahonnan}$$

$$l+z = \frac{l_1}{\cos \varphi}$$

Az ugyancsak vastagon kirajzolt 2./ háromszögből pedig:

$$z = T \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{T \varphi''}{\rho''}$$

mivel kis

szögről van szó. Az értékeket behelyettesítve lesz:

$$\Delta = l_1 - \left(\frac{l_1}{\cos \varphi} - \frac{T \varphi''}{\rho''} \right)$$

Vagy másképen írva:

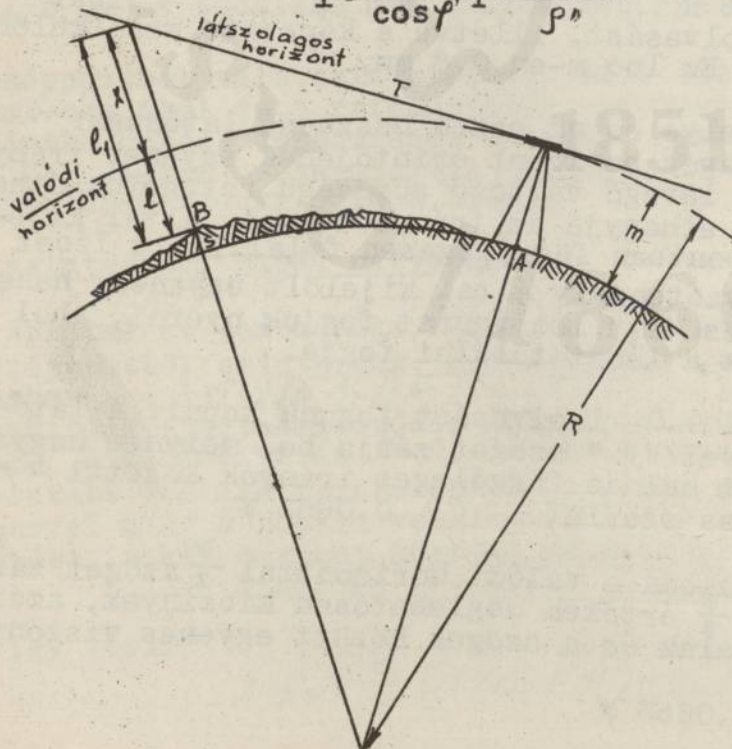
$$\Delta = \frac{T \varphi''}{\rho''} - \frac{l_1 / 1 - \cos \varphi}{\cos \varphi}$$

A kiinduló-képletből: $l = l_1 - \Delta$, és Δ értékét behelyettesítve:

$$l = l_1 - \frac{T \varphi''}{\rho''} + \frac{l_1 / 1 - \cos \varphi}{\cos \varphi} = \frac{l_1}{\cos \varphi} \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{\cos \varphi + 1 - \cos \varphi} - \frac{T \varphi''}{\rho''}$$

Végeredményben:

$$l = \frac{l_1}{\cos \varphi} \mp T \frac{\varphi''}{\rho''}$$



5./ A Föld gömb-alakjából és a sugártörésből /refrakció/ eredő mérési hiba.

Földünk gömb-alakjánál fogva a valódi vízszintes, vagyis a valódi horizont is gömbalakú. Ezzel szemben álláspontunkban /A/ műszerünk vízszintes irányzósíkja a valódi horizontot érintő sík, melyet látványos horizontnak nevezünk.

A látványos horizont eltérése a valódi horizontból - minél távolabb megyünk a műszerünkől, annál nagyobb lesz.

Ha "A" pontra vonatkozólag a "T" vízszintes távolságban levő "B" pont szintmagasságát keressük, akkor a "B" pontban függőlegesen felállított lécen nem a valódi horizontnak megfelelő "l" hanem az irányzótengely által kijelölt látszólagos horizontnak megfelelő "l₁" léchosszuságot nyerjük, mely a helyes léchosszuságnál "x" értékkel nagyobb.

Tudjuk azt, hogy $m = l + s$, ebből $s = m - l$ lenne a két pont helyes szintkülönbsége, mi azonban ehelyett egy hibás "s₁" szintkülönbséget kapunk, amely kifejezhető az $s_1 = m - l_1$ egyenlettel. De $l_1 = l + x$ értéket behelyettesítve: $s_1 = m - l - x$ -et kapunk. Mivel pedig $m - l = s$, végeredményben lesz:

$$s_1 = s - x$$

A helyes szintkü-

lönbség pedig lesz:

$$s = s_1 + x = m - l_1 + x = m - l_1 - x$$

Szavakban: a hibás szintkülönbséget "x" értékkel nagyobbítani, illetve a nyert lécleolvasást l_1 kis "x" értékkel kisebbiteni kell, hogy a helyes szintkülönbséget kapjuk.

Kérdés: mekkora ez az "x" érték? Ezt az R, T és R+x oldalakkal bíró háromszögből számíthatjuk ki:

$$R + x = \sqrt{R^2 + T^2} = R \sqrt{1 + \left(\frac{T}{R}\right)^2} \quad \text{és}$$

innen

$$x = R \left[\sqrt{1 + \left(\frac{T}{R}\right)^2} - 1 \right] = R \left[\sqrt{1 + \left(\frac{T}{R}\right)^2} - 1 \right]$$

A gyökjel alatti értéket írhatjuk a következő binom kifejezés alakjában: $\left[1 + \left(\frac{T}{R}\right)^2\right]^{1/2}$; mivel a második tag valódi tört és kis érték - "R" igen nagy a "T"-hez viszontiva - sorbafejtve egy erősen konvergáló sort kapunk. Lesz:

$$x = R \left(1 + \frac{T^2}{2R^2} - \frac{T^4}{8R^4} + \dots - 1 \right) = \frac{T^2}{2R} - \frac{T^4}{8R^3}$$

A gyakorlatban már a második tagot is el szokták hanyagolni, s így végeredményben

$$x = \frac{T^2}{2R}$$

lesz

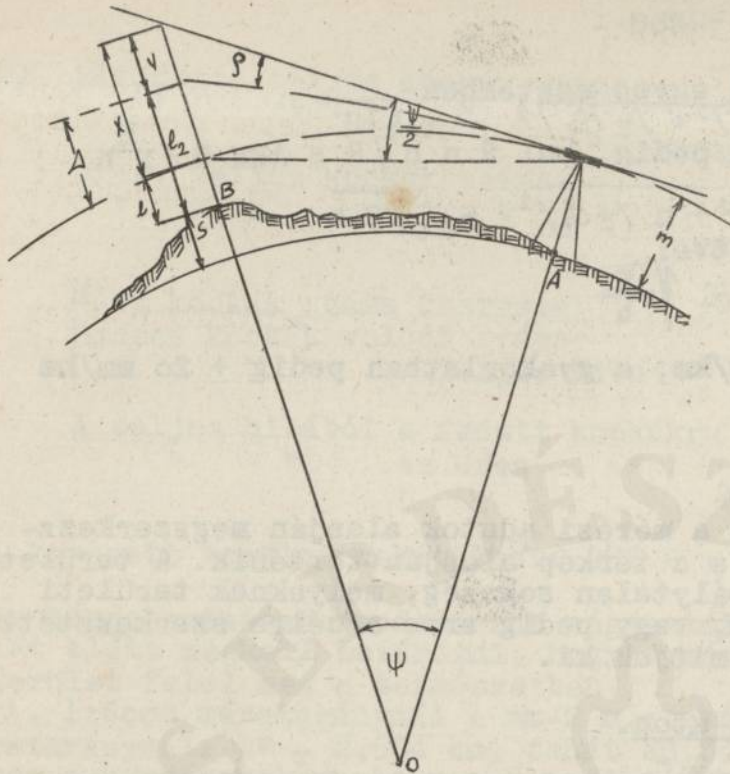
az az érték, amellyel a lécleolvasást, illetve a képezett szintkülönbséget meg kell változtatnunk. Ez lóó m-en 0.8 mm.

Azonban műszerünk irányzótengelye és az ezzel összeeső látósugár nem követheti mereven a valóságos horizont érintőjének egyenes irányát hanem a Föld-gömböt körülvevő levegő változó sűrűségű rétegeinek áthatolva törtést szenved. Emiatt elhagyja az irányzótengely által kijelölt egyenes irányt és a "B" pontban függőlegesen felállított lécet nem ott találja, ahol az irányzótengely által kijelölt egyenes, hanem ennél mélyebben. A lécen azt az "l₂" leolvasást fogjuk nyerni, ahol megtört irányu irányzósugarunk a lécet találni fogja.

Igy aztán nem "l₁", hanem $l_2 = l + \Delta$ leolvasást fogunk kapni. A látósugár iránya az egyenes iránnyal "ρ" szöget zárja be, melynek nagysága az "A" és "B" pontokon át haladó függőleges irányok közötti "ψ" szögnek 1/13-val egyenlő. Gauss szerint $\rho = 0.0653 \psi$

Az irányzótengely álláspontunkban a valódi horizonttal $\frac{\psi}{2}$ szöget zár be. Mivel azonban a "ρ" és $\frac{\psi}{2}$ értékek meglehetősen kicsinyek, azért az ezekkel szemközt fekvő oldalak és a szögek között egyenes viszony állítható föl, vagyis:

$$x : v = \frac{\psi}{2} : \rho = \frac{\psi}{2} : 0.0653 \psi$$



És innen: $x:v=1:0.1306$
vagy ugyanezen arány a-
lapján írhatjuk:

$$/x-v/:x = /1-0.1306/:1$$

$$\frac{x-v}{x} = \frac{1-0.1306}{1} = 0.8694$$

De $x-v=\Delta$, tehát

$$\Delta = 0.8694 x.$$

Továbbá láttuk, hogy

$$x = \frac{T^2}{2R}; \text{ ezt be-}$$

helyettesítve lesz:

$$\Delta = 0.8694 \frac{T^2}{2R} =$$

$$= 0.4347 \frac{T^2}{R}$$

"R"-et átlagosan

6.370.000 m-nek véve:

$$\Delta = 0.000.000.068.24 T^2$$

vagy másképpen írva: $\Delta = 6824 T^2 \cdot 10^{-11}$

lesz a Föld gömb-alakja és a refrakció következtében nyert eltérés a helyes leolvasástól, mely eltérés a távolság négyzetével arányosan növekszik. Nézzük meg, hogy milyen távolságnál kapunk

$\Delta = 1 \text{ mm} = 0.001 \text{ m}$ hibát?

$$T = \sqrt{\frac{0.001}{0.000.000.068.24}} = 121 \text{ m}$$

Vagyis 121 m-nél kisebb távolságon belül a " Δ " értéke kisebb, míg 121 m-en túl nagyobb lesz, mint 1 mm. A gyakorlatban 100 m távolságig sohasem vesszük a hibát figyelembe. Szintezésnél nem is szabad a léceket 50-60 m-nél nagyobb távolságba küldeni, mert ezen a távolságon túl a mm-ek becslése már nagyon bizonytalan.

Középpontból való szintezésnél, ha a léctávolságok egyenlőek, a Föld gömb-akajából és a refrakcióból származó hibák is kiesnek, mivel a szintkülönbség képezésénél a hibák egyenlő nagyok, de ellentétes előjelűek, lévén megsemmisítik egymást. Ha a léctávolságok nem egyenlőek, akkor csak redukálódik a hiba.

A szintmérési hibák nagysága.

A szint mérés pontossága változik aszerint, amint végpontból, vagy középpontból szintezünk. A végpontból való szintezésnél minden förláláskor $\pm \sigma = \sqrt{1/\pm \sigma_l^2 + 1/\pm \sigma_m^2}$ lesz a szintkülönbség /s/ középpontja a hibaálmozódás törvényei szerint. /L. hibaelmélet/, hol $1/\pm \sigma_l$ a lécleolvasás $1/\pm \sigma_m$ a műszermagasság mérésének középpontja. Hosszabb vonalak szintezésénél, vagyis amikor "n"-szer felállva a műszerrel n h=H hosszú vonalon /hol "h" rendszeren 50 m/ végezzük szint-mérést, a két végpont közötti középpont:

$$\pm \sigma = \sqrt{n [1/\pm \sigma_l^2 + 1/\pm \sigma_m^2]}$$

$$\text{de } n = \frac{H}{h}$$

s így lesz:

$$\pm \sigma = \sqrt{\frac{H}{h} [1/\pm \sigma_l^2 + 1/\pm \sigma_m^2]}$$

Középpontból való színtezésnél egyes esetekben

$$\pm \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{\sigma_e}{2} \right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{\sigma_e}{2} \right)^2} = \pm \sigma_e \sqrt{\frac{2}{n}}$$

Hosszabb vonalak színtezésénél pedig, hol $2 n h = H$ s így $n = \frac{H}{2h}$

$$\pm \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{\sigma_e}{2} \right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{\sigma_e}{2} \right)^2} = \pm \sigma_e \sqrt{\frac{2}{n}}$$

avagy "n" értékét behelyettesítve:

$$\pm \sigma = \sigma_e \sqrt{\frac{H}{n}}$$

Országos színtezéseknél ± 4 mm/km, a gyakorlatban pedig ± 20 mm/km a megengedett középhiba.

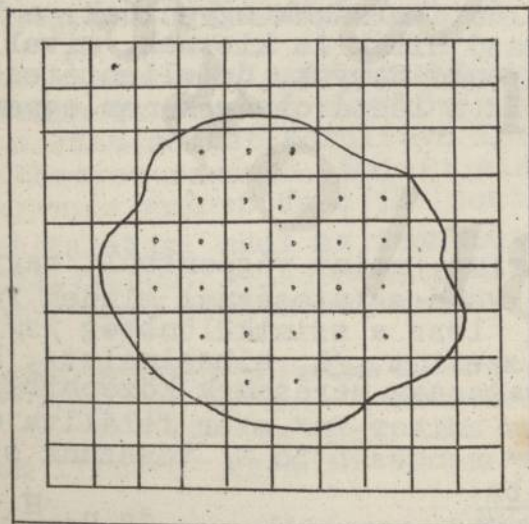
Területszámító műszerek.

A területszámítás a fölmért és a mérési adatok alapján megszerkesztett területidomok képe, vagyis a térkép alapján történik. A területidomok alakja rendszerint szabálytalan sokszög, melyeknek területi nagyságát vagy síkmértani úton, vagy pedig erre a célra szerkesztett műszerekkel mechanikai úton számítjuk ki.

1./ Területszámítás síkmértani úton.

Meghatározhatjuk valamely szabálytalan idom területét azáltal, hogy azt egyszerű idomokra /háromszög, négyszög, trapéz/ bontjuk s ezen idomok területének összege adja a keresett szabálytalan idom területét. Ezzel a második részben - a területszámítás és területosztás keretén belül - részletesen fogunk foglalkozni, itt csupán azokat a műszereket tárgyaljuk, amelyeknek a segítségével az egyszerű idomokra való bontás, valamint azok területeinek összegezése gyorsabban és könnyebben végezhető.

Igen telterjedt számítási mód a szabálytalan területek négyzetekre való bontása. Erre a célra u.n. négyzetes hálót használunk. A négyzetes háló alkalmazása abban áll, hogy a területidomot egy derékszögű négyszöggel vesszük körül, mely négyszöget a térkép léptékéről levett hosszúsággal, és pedig rendszeren 4, 5, 8, 10, 50, 100 öl vagy méter oldalhosszal bíró négyzetekből álló hálózattal vonjuk be. Hogy



azonban ne legyen szükséges térképtűnket ceruzavonalakkal behálózni, azért készítenek üvegből, vagy celluloidból ilyen négyzetes hálókat. Ezeket üvegplanimétereknek nevezzük. Használatuk igen egyszerű. Az üvegplanimétert ráhelyezzük a kiszámítandó területre és megszámloljuk, hogy hány teljes négyzög esik a területidomba. Ezután jönnek sorra azok a négyzetek, amelyek csak részben esnek a területidomba. Itt a gyakorlatban úgy járunk el, hogy minden kockánál külön megbecsüljük, hogy hány tized része esik a megmértendő területre.

A becsült értékeket és a teljes területét összegezve kapjuk a megmértendő idom területét. Ellenőrzésül ezután a teljesen, vagy részben üres kockák területét is meg kell határozni az előbbi módon. Az így kapott két terület összegének közel egyeznie kell az üvegplaniméter teljes területével. Az eltérés a becslés hibájából adódik és a meghatározandó terület nagyságának javítására használjuk.

Pl. Elfordított, teljes kockák száma:	642
" rész " "	41.2
Összesen:	683.2
Üres, teljes kockák száma:	793
" rész " "	92.4
	885.4
Mért kockák száma összesen:	1568.6
Összes kockák valódi száma:	-1600.0
Teljes hiba:	- 31.4

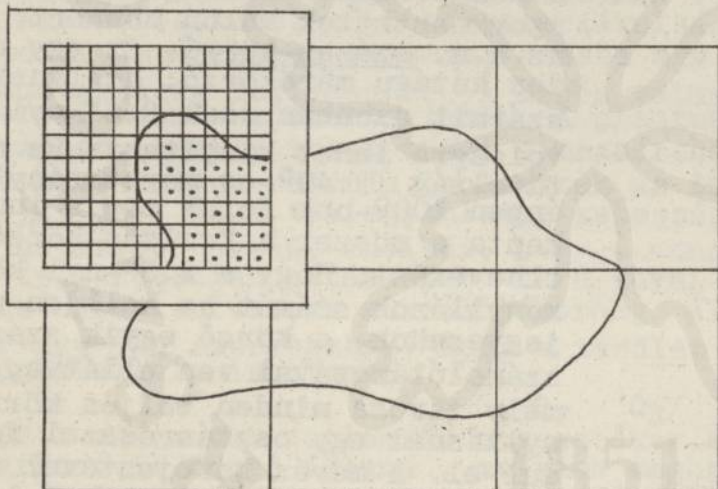
A teljes hibából a fedett kockákra esik	- 13.7
" " az üres " "	- 17.7
Összesen:	- 31.4

A keresett terület tehát lesz: $683.2 + 13.7 = 696.9$ kocka.

Az üvegplaniméter rendszerint négyzetmilliméteres beosztású. Használat előtt meg kell határozni, hogy a térképen lévő 1 mm^2 -nek mekkora terület felel meg a természetben.

Pl. 1:2000 méretarányánál $1 \text{ mm} = 2 \text{ m}$, tehát $1 \text{ mm}^2 = 4 \text{ m}^2$; Vagy $1":100^\circ$ méretarányánál: $1" = 2.634 \text{ cm}$, tehát 26.34 mm -nek a térképen 100° felel meg a természetben. 1 mm -nek pedig $\frac{100}{26.34} = 3.796^\circ$ felel meg.

Ezek szerint 1 mm^2 -nek $3.796^2 = 14.4$ $^\circ$ felel meg. Gyakran előfordul, hogy üvegplaniméterünk kisebb, mint a megmért terület nagysága.



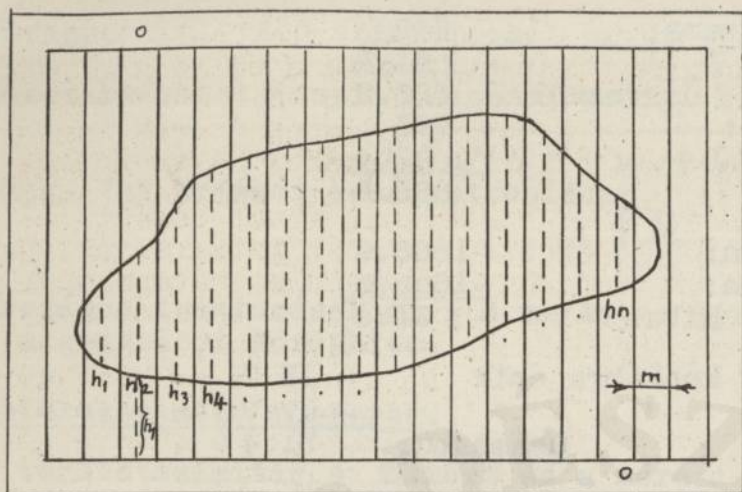
Ilyenkor az üvegplaniméter hálózatának megfelelő négyzetekre bontjuk a megmért területet és minden egyes ilyen keret-négyzetbe eső területrészt az üvegplaniméterrel határozzuk meg az előbbi módon. Az egyes négyzetekben mért területek összege adja a sikidom területét.

Üvegplaniméter helyett igen jól használható a papírkereskedésekben kapható átlátszó papírra

nyomott milliméter-háló is, ha a háló pontos.

A területmeghatározás másik módja a trapézokra való bontás. Ez azonban görbe vonalakkal határolt idomoknál igen hosszadalmas volna, mert térképünkön a meghatározandó területet vékony sávokra kellene bontanunk, ami magát a térképet is tönkretenné a sok vonallal. Ezért a sávokra való bontásra külön eszközt szerkesztettek: ez az Alder-féle hurok planiméter, vagy hárfa. Ennek vázát egy téglalapalakú rézkeret képezi, amelynek hosszabb oldalai között, egymástól $1/10$ hüvelyk, vagy 2 mm távolságban lőszorszálak vannak kifeszítve. Minden 10. szál vörös, minden 5. szál sárga színű.

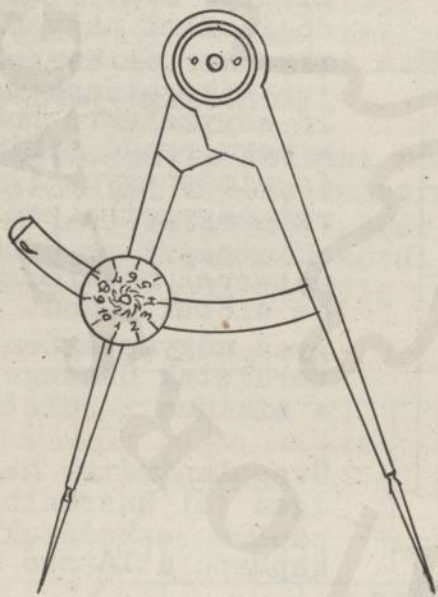
A készülék használata abban áll, hogy ráhelyezzük a megmért területre, miáltal a sikidomot egyenlő magasságú trapézokra bontottuk. Egy-egy trapéz területe egyenlő a középvonalának és magasságának szorzatá-



val. Minthogy pedig a magasság minden trapéznál ugyanaz, azért a trapézokra bontott egész síkidom területét úgy kapjuk meg, ha a közös magassággal $/m/$ megszorozzuk a trapézok középvonalainak összegét.

Hogy ne kelljen minden középvonal hosszát a térkép léptékéről külön-külön lemérni, úgy járunk el, hogy az első középvonal hosszát $/h_1/$ körzöbe fogjuk és ezt a körzőnyílást átvive a második középvonalra, annak $/h_2/$ hosszával meg-

hosszabbítjuk. Ezt az eljárást folytatólag addig ismételjük, amíg a kinyitott körző szárai között lévő távolságot a léptékünkől, megfelelő pontossággal le tudjuk olvasni. Az így leolvasott hosszat feljegyezzük majd ott folytatjuk a középvonalak mérését, ahol azt abbahagytuk, egészen addig, míg az összes középvonalak hosszát meg nem mértük. A középvonalak hosszának összege szorozva $"m"$ -nel adja a keresett idom területét.



A középvonalak összegezésére is szerkesztettek külön műszert: ez az u.n. százaskörző. Ez egy rendszeres kétágú mérőkörző, amelynek szárait azonban csak $2.5''$ -nyi távolságra lehet kinyitani. Ez a távolság $1'' : 40''$ -es méretarányban éppen $100''$ -nek felel meg s innen kapta a műszer a "százaskörző" elnevezést. Hogy a $2.5''$ -nyi körzőnyílások számát se kelljen megjegyeznünk, a körző egyik szára számolótárcsával van ellátva, amely tárcsa minden teljes körzőnyílásnál egy osztásrésszel fordul el. A mérés befejeztével a tárcsáról leolvashatjuk a teljes körzőnyílások számát, a maradékrész nyílás-nagyságát a térkép léptékéről mérjük le a lehető legpontosabban.

Mérés előtt meg kell még határoznunk az $"m"$ magasságok természetbeni hosszát is a méretarány segítségével.

Pl. ha a hurok egymástól távolsága 2 mm , akkor ennek $1 : 2000$ -es méretarány mellett 4 m felel meg, avagy $1'' : 100''$ -es méretarány esetén, mivel $1'' = 72''$, lesz az általános méretarányszám $1 : 72 \times 100 = 1 : 7200$, tehát 1 mm -nek 7.2 m , 2 mm -nek pedig 14.4 m felel meg.

Ha a hárfa tizedhüvelykes beosztású, akkor $1'' : 100''$ -es térképnél $0.1'' : 10''$; vagy ugyanennél a hárfánál $1 : 2000$ méretarány esetén, mivel $1'' : \frac{2000}{72}'' = 1'' : 27.77''$ az $"m"$ értéke lesz: $0.1'' = 2.78''$.

2./ A területszámításnak másik módja a mechanikai úton való területszámítás. Ennél a területszámítási eljárásnál erre a célra szolgáló műszerekkel, a planiméterekkel közvetlenül mérjük meg a térképen lévő idom területét. A planiméterek tulajdonképpen integrátorok, amelyekkel az $F = \int f/x/ dx$ alakú integrálok számértékei határozhatók meg. Tudjuk ugyanis a matematikából, hogy ha van egy görbénk, amelynek az egyenletét ismerjük, akkor azon görbevonal által bezárt területét meg tudjuk határozni, ha a görbe egyenletét integráljuk. Ha tehát meg tudnók állapítani a térképünkön lévő terület határológörbéjének egyenletét, akkor ezt integrálva megkapnánk a terület nagyságát. A határoló görbe azonban legtöbbször szabálytalan, s így teljesen lehetetlen annak egyenletét felírni. De nincs is szükségünk az egyenletre, mert az integrálást grafikusán is el tudjuk végezni. Ezt a grafikus integrálást automatikusan hajtják végre a különböző fajta planiméterek. A sokfajta planiméter közül a gyakorlat a kerületen-járó planimétereket használja, mert hisz a terület a kerület által van adva. A kerületen-járó planiméterek elve és kivitele aszerint változik, amint a terület-integrál-kifejezést derékszögű $F = \int f/x/ dx$, vagy sarkpontos $F = \int f/\varphi/d\varphi$ koordinátarendszerre vonatkoztatjuk. Eszerint megkülönböztetünk ortogonális vagy lineáris és sarkpontos vagy poláris planimétereket. Ezen csoportosításon belül is igen különböző lehet a planiméterek szerkezete, de valamennyinél fellelhető egy kémyszerpálya, amelyet a sarkpontos planiméternél a vezetőkar jelöl ki, egy mérőkar és egy integrálorsó vagy henger, amelynek teljes fordulatait egy számlálókorongról, a tört részeket pedig magának az orsónak a számozásáról egy nóniusz segítségével olvashatjuk le. A mérőkar végén van a vezetőtü. Az integrálorsó és a vezetőtü közötti távolság lehet állandó, és lehet változó, legtöbbször változó, hossza egy nóniusz segítségével tízed mm pontossáig leolvasható. A mérés valamennyi kerületen-járó planiméterrel azonos módon történik. A planimétert úgy helyezzük el a rajzlapra, hogy a vezetőtüvel a megméréndő terület határológörbéje bejárható legyen. Ezután leolvassuk az integrálorsó mérés előtti állását $0_k/$ és a tűt egyenletes sebességgel végigvezetjük a területet határoló görbén, anélkül, hogy a vonalról letérnénk, vagy a tűvel felkarcolnánk a térképet. Ha a tűvel a kiindulópontba visszaértünk újra leolvassuk a számlálókorong állását $0_v/$, s mivel a műszer úgy van szerkesztve, hogy a terület arányos az integrálorsó fordulataival, írhatjuk:

$$T = C./0_v - 0_k/$$

A "C" a műszerrel jellemző, a vezetőkar hosszától és a térkép méretarányától függő állandó, melynek meghatározását későbbben fogjuk tárgyalni.

Mivel a gyakorlatban leginkább a sarkpontos planiméter van elterjedve, ezért a következőkben ezzel fogunk részletesebben foglalkozni.

A sarkpontos planiméter és elmélete.

A sarkpontos planiméter két fémrudból áll, amelyek csuklósan vannak egymással összekapcsolva. A csuklós kapcsolás a mérőkar egyik végének közelében van elhelyezve, a kar hosszabb végén a vezetőtü, rövidebb végén pedig az integrálorsót találjuk. Az integrálorsó egy a mérőkarral párhuzamos, vízszintes tengely körül forog. A tengely csapágái igen finomak, hogy az integrálorsó holt mozdulat nélkül, igen könnyen forogjon és így a mérőkar minden mozdulatát átvegye. Ezen a tengelyen egy végtelen csavar van, amely az integrálorsó egyszeri körülfordulása után a számlálókorong fogaskerekét egy értékekkel elforgatja. A vezetőkar egyik végén van a csukló, amely összeköti a mérőkarral, a másik végén pedig egy hegyes tű van, amelyet a rajzlapba szurunk, s az egész műszer ezen leszurt tű, mint

/Az integrálorsó a BD szakaszon esuszott!/ De az integrálorsó útját kifejezhetjük $ds = \rho d\varphi$ -vel is, hol $d\varphi$ a differenciális elmozdulás szöge. Az így kapott "ds" értéket behelyettesítve az előbbi képletbe, lesz:

$$\int \rho \cos \alpha \cdot d\varphi = r \, dv$$

és ebből:

$$\int \cos \alpha = r \frac{dv}{d\varphi}$$

A P S S₁ háromszög területe lesz:

$$dT = \frac{1}{2} R / R \, d\varphi = \frac{1}{2} R^2 d\varphi$$

A B P S háromszögből a cos. tétel alapján írhatjuk, hogy

$$R^2 = a^2 + b^2 + \rho^2 - 2/a + b/\rho \cos \alpha$$

Másrészt a P A B háromszögből ugyancsak a cos. tétel alapján:

$$c^2 = b^2 + \rho^2 - 2 b/\rho \cos \alpha$$

Hajtsuk végre a felső egyenletben a négyzetreemelést és vonjuk ki belőle az alsó egyenletet. Lesz:

$$\begin{aligned} R^2 - c^2 &= a^2 + 2ab + b^2 + \rho^2 - 2a/\rho \cos \alpha - 2b/\rho \cos \alpha \\ &\quad - b^2 - \rho^2 \\ R^2 - c^2 &= a^2 + 2ab - 2a/\rho \cos \alpha \end{aligned}$$

Innen

$$R^2 = a^2 + 2ab + c^2 - 2a/\rho \cos \alpha$$

Az előbbiekből láttuk, hogy $\rho \cos \alpha = r \frac{dv}{d\varphi}$. Behelyettesítve az így

kapott "R" értéket a "dT" képletébe:

$$dT = \frac{1}{2} / a^2 + 2ab + c^2 - 2ar \frac{dv}{d\varphi} / d\varphi$$

Más alakban:

$$dT = \frac{1}{2} / a^2 + 2ab + c^2 / d\varphi - ar \, dv$$

És végül az egész területet megkapjuk, ha az egyenletet φ_1 és φ_2 illetve v_1 és v_2 határok között integráljuk, ahol φ_1 és φ_2 a két vézér sugar által bezárt szög a kiinduláskor φ_1 és a befejezéskor φ_2 , viszont v_1 és v_2 az integrálorsó elfordulása, melyet a két leolvasás ad meg 0_k és 0_v .

Tehát $T = \frac{1}{2} / a^2 + 2ab + c^2 / \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi - ar \int_{v_1}^{v_2} dv$; ha pedig $\varphi_1 = \varphi_2$, ami akkor áll fenn, ha teljesen körüljártuk a területet, akkor

$$T = - ar / v_2 - v_1 = c / v_1 - v_2$$

Az "ar" szorzat értéke, mivel "a" a mérőkar hossza és "r" az integrálorsó sugara állandó, jelöljük "c"-vel s ez a műszer állandója. Viszont azt is láttuk már, hogy a $v_1 - v_2$ nem más, mint az integrálorsó elfordulása, melyet a kezdeti és végző leolvasás ad, tehát végeredményben

$$T = c / 0_v - 0_k$$

A planiméter állandójának /c/ meghatározása.

Az $ar = c$ egyenlőségből következik, hogy a mérőkar változásával egyenes arányban változik a "c" értéke is. Ezért, ha "a" hosszúságú mérőkarnak "c" állandó felelt meg, akkor az "a₁" mérőkarhosszúságnak valami "c₁" állandó fog megfelelni: $c_1 : c = a_1 : a$, innen $c_1 = c \frac{a_1}{a}$ lesz a keresett műszerállandó. De változik a műszer állandója a térkép kisebbítési aránya szerint is, hisz ugyanannak a térképi területnek bármely térképen ugyanaz a leolvasás, a természetben pedig más és más terület felel meg, aszerint, hogy milyen a térkép méretaránya. Eppen ezért minden planimetralás előtt meg kell határozunk az adott méretarányának állandó karhossz mellett megfelelő állandót, vagy adott méretarányának adott állandó mellett megfelelő karhosszat.

A planiméter állandóit a gyakorlatban mindig egy ismert terület segítségével határozzuk meg. A próbaidom alakja vagy négyzet, vagy kör, melyet adott oldalhosszal illetve sugárral rajzolunk, s melynek természetbeni területét a méretarány segítségével számítani tudjuk.

Hüvelyk-öles térképeknél rendszeren 1" oldalhosszal bíró négyzetet használunk, melynek területe tehát, ha a méretarány: $1":k^0:T = k^2$

Általános méretarányu térképeknél rendszerint 100 m-es oldalhosszal bíró négyzetet rajzolunk fel, tehát 1:2000 méretarányu térképen 5 cm-es oldalu négyzetet, melynek természetbeni területe:

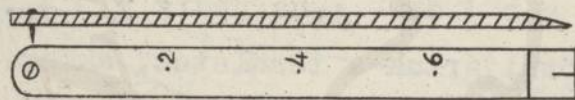
$$T = 10.000 \text{ m}^2 = 1 \text{ ha lesz.}$$

Ezután a terület határvonalán végigvezetjük a mérőkar vezetőtűjét és leolvassuk az integrálorsó kezdő és végső állását. Az ismert képlet alapján: $T = k^2 = c / O_V - O_K$, ahonnan

$$c = \frac{k}{O_V - O_K}$$

Ebben az esetben a mérőkar hossza tetszőleges, de az egész mérés alatt állandó érték.

Az állandó meghatározásánál a vezetőtűt egyszer az óramutató járásával egyező $\swarrow$ azután ellenkező $\searrow$ irányban vezetjük körül. Az egyező iránynál nyert $O_V - O_K$ és az ellenkező iránynál nyert $O'_K - O'_V$ értékeknek egyezniök kellene, ha műszerünk teljesen pontos lenne, és nem volnának megfigyelési hibáink. Az eltérés legfeljebb 3 egység lehet, ha ennél több, akkor igazítani kell a planimétert. A két értéknek a számtani közepét vesszük, mint végleges leolvasást.



A régi műszereknél rézlemezbe vésett, adott területű körök szolgáltak próbaterületül. Az újabb műszerekhez egy próbasugár van mellékelve. Ez egy fém lap, amelynek egyik végéhez közel egy

kis tű van. A tűt a rajzlapba szurhatjuk és körülötte elfordítható a próbasugár. A tűtől pontosan egy, vagy két cm távolságban kis pontok vannak bevésve: ezek egyikébe helyeztük a vezetőtűt. A próbasugár másik végén indexvonalas van. Ha ezt megjelöljük a papíron, akkor a vezetőtűvel egy kört rajzolhatunk le. A kör területét a sugárból számíthatjuk. A további eljárás megegyezik az előbbivel.

Mint hogy az állandó meghatározásához tetszőleges mérőkar-hosszúságot vettünk, a meghatározott "c" az egész-számokon kívül még sok tizedes jegyet tartalmazhat. Az ilyen állandóval a térképen való területszámítás meglehetősen kellemetlen, mivel az $O_V - O_K$ értéket egy igen hosszú számmal kell szorozni. Ezért úgy járunk el, hogy az állandóhoz közel-eső egész számot választunk állandónak és kiszámítjuk az ennek megfelelő karhosszúságot:

a "T" terület "a" karhosszúság mellett:

$$T = a \cdot r / O_V - O_K = c / O_V - O_K$$

és ugyanez a terület "a'" karhosszúság mellett:

$$T = a' \cdot r / O'_V - O'_K = c' / O'_V - O'_K$$

A baloldalalak egyenlősége folytán a jobb-oldalak is egyenlőek lesznek:

$$\begin{aligned} a \cdot r / 0_v - 0_k / &= a' \cdot r / 0_v' - 0_k' / ; & a / 0_v - 0_k / &= a' / 0_v' - 0_k' / \\ c / 0_v - 0_k / &= c' / 0_v' - 0_k' / ; & \text{innen } / 0_v - 0_k / &= \frac{c}{c'} / 0_v' - 0_k' / \end{aligned}$$

Vagy ezt az értéket az előbbi egyenletbe téve:

$$a / 0_v - 0_k / = a' \cdot \frac{c}{c'} / 0_v' - 0_k' /$$

és ebből

$$a = a' \cdot \frac{c}{c'}$$

lesz a keresett karhossz-
szuság. A fenti eredményre jutunk akkor is, ha a karhossz és az áll-
landó viszonyát arányalakban írjuk fel: $a:a' = c:c'$ és innen

$$a = a' \cdot \frac{c}{c'}$$

Ha a mérőkart beállítottuk az így kiszámított karhosszra, akkor az
összes, ugyanazon méretarányban készült térképeken lévő területek
nagyságát megkapjuk azáltal, hogy a megfelelő leolvasáskülönbségeket
megszorozzuk az adott állandóval.

A fenti levezetésből azt is látjuk, hogy az állandó és a karhossz
között egyenes-arány áll fenn, vagyis nagyobb karhossznak nagyobb
állandó felel meg. Ebből viszont az következik, hogy nagyobb állan-
dó esetén egy leolvasási egységnek nagyobb terület felel meg, s e-
miatt kisebb lesz a mérés pontossága. Tehát a planiméterpontossága
fordítottan arányos a mérőkar hosszával.

Ha az így beállított karhosszal más méretarányú térképen is akar-
nánk méréseket végezni úgy arra vonatkozóan ismét meg kell állapi-
tanunk a "c" állandót. Itt ismét használhatjuk a próbaidomos eljá-
rást, de számíthatjuk is az új állandót. Mivel próbaterületünk ter-
mészetbeni nagysága "k" méretarányban "T" és "k" méretarányban "T₁"
lesz:

$$\begin{aligned} T &= k^2 = c / 0_v - 0_k / \\ T_1 &= k_1^2 = c_1 / 0_v - 0_k / \end{aligned}$$

Ugyanis a rajzlapon mindkét esetben ugyanakkora a próbaterület, s
így a leolvasások is egyeznek mindkét esetben. Osszuk el a két e-
gyenletet egymással. Lesz:

$$\frac{c / 0_v - 0_k /}{c_1 / 0_v - 0_k /} = \frac{k^2}{k_1^2}$$

És innen az

új méretaránynak megfelelő állandó:

$$c_1 = c \cdot \frac{k^2}{k_1^2}$$

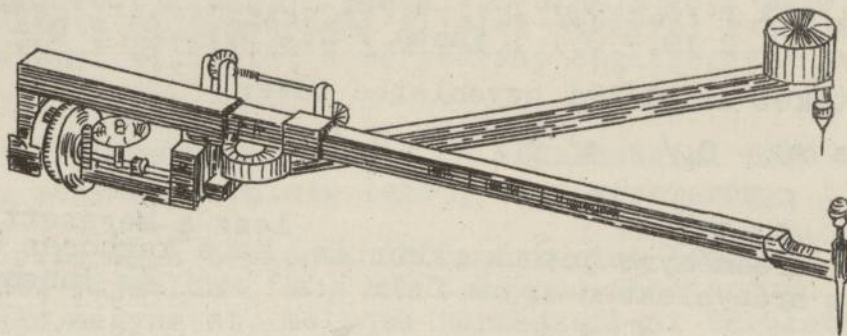
Az állandó meghatározásánál mindig figyelniünk kell arra, hogy erős
kisebbitésű térképeken rövidebb karhosszal kell mérniük, mint gyen-
gább kisebbitésű térképeken.

A sarkpontos planiméterek közül legelterjedtebbek az Amsler és a
Coradi-féle planiméterek.

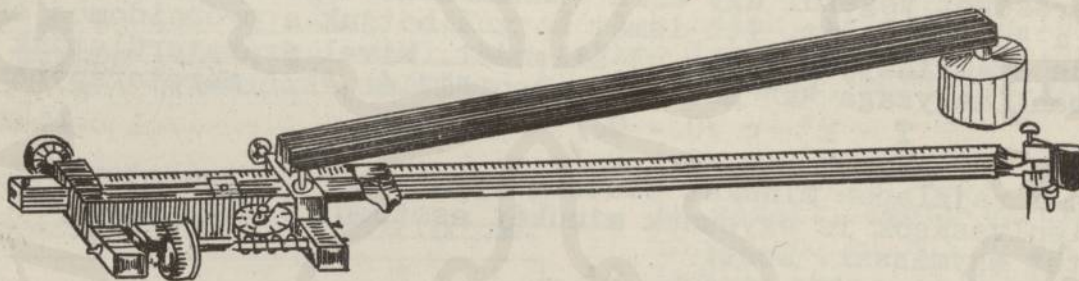
Az Amsler-féle sarkpontos planimétert azt jellemzi, hogy a vezető-
kar és a mérőkar csuklós összekötése állandó, ennél fogva a vezető-
kar a mérőkarnak mindig ugyanazon az oldalán foglal helyet.

A mérőkar két oldalán beosztást találunk a karhosszuság beállításá-
ra. Az egyik beosztás az öles, a másik a méteres mértékrendszerben
az egyes méretarányoknak megfelelően van számozva és mellé van írva
az illető karhossznak és méretaránynak megfelelő állandó értéke is.

Ennél a planiméternél a mérést egyszer az óramutató járásával egye-
ző, másodszor ellenkező irányban kell végezni.



A Coradi-féle, vagy kompenzációs planimétert az előbbivel szemben az jellemzi, hogy a csuklós összeköttetést a vezetőkar végén kiképezett gömbvégződésű csap alkotja, amely a mérőkar hüvelyébe mélyesztett csapba izül, s ezáltal egy könnyen szétbontható összeköttést eredményez. Ennél a planiméternél a vezetőkar a mérőkar bármelyik oldalára szabadon áthelyezhető miáltal a mérésből egyes hibákat ki lehet küszöbölni. Szerkezete egyébként nem tér el lényegesen az Amsler féle planiméterétől, mégis nagyobb pontosságot érhetünk el vele már csak azért is, mert a mérőkar hosszát egy a mérőkar művelén elhelyezett nóniusz segítségével 0,1 mm-es pontossággal tudjuk beállítani.



Ezeknél a műszereknél a méretarányok mincsenek a mérőkaron feltüntetve, hanem a műszer dobozában táblázatosan van kimutatva az állandó a karhossz és a méretarány függvényében.

Ezekkel a mérést mindig az óramutató járásával egyező irányban vétezzük, de az első mérésnél a vezetőkar a mérőkar jobb oldalán, a második mérésnél pedig a bal oldalán van.

Nagyobb területek mérésére ujabban meghosszabbítható vezetőkaru planiméterek is készülnek.

A sarkpontos planiméterek használata.

Mielőtt a planiméterrel a mérést megkezdenénk, az előbb tárgyaltak alapján be kell állítanunk a mérőkar hosszát, ha a műszer állandóját ismerjük, vagy pedig meg kell határoznunk az állandót az adott karhossz és méretarány mellett. Ezután a vízszintes rajzasztalon kifesztített térképre helyezzük a műszert. A vezetőkar pólusát úgy kell elhelyeznünk, hogy a vezetőtüvel az egész felméréndő területet körül-

járhassuk és a vezetőkar és mérőkar által bezárt szög lehetőleg ne legyen kisebb 30° -nál és ne legyen nagyobb 150° -nál, mert ezeken túl az integrálórso nem veszi át a forgó mozgást. Ha egy állásból úgy nem tudnánk az idom körül vezetni a vezetőtűt, akkor vékony vonalakkal több részre osztjuk fel a területet és részletekben határozzuk azt meg.

Ezután a vezetőtűt a terület határvonalára visszük és lehetőleg olyan pontba helyezzük el, ahol a megmérendő területidom vonala párhuzamos a mérőkarral illetve az integrálórso tengelyével, mert ebben az esetben ha nem is térünk vissza egész pontosan a kiindulási pontba, mégis helyes eredményt kapunk, mert az integrálórso itt csak csuszó mozgást végez. Ezt a pontot megjelöljük és leolvassuk az integrálórso kezdőállását $/O_K/$. Most végigvisszük a vezetőtűt az óramutató járásával egyező irányban a határvonalon, s amikor visszaérkeztünk a kezdőpontba, újra leolvassuk az integrálórso állását $/O_V/$. Ezáltal nyertük az első megfigyelést. Ezután az ellenkező irányban megismételjük a mérést. A kapott $/O_V - O_K/$ és $/O_K - O_V/$ értékek számtani közepét megszorozva az állandóval, kapjuk a keresett terület nagyságát.

Fontos, hogy az integrálórso elfordulását a lehető legnagyobb pontossággal határozzuk meg. A leolvasást mindig a számlálókorongon kezdjük, az integrálórson folytatjuk és az integrálórso nóniuszán fejezzük be. A számlálókorongról az ezreseket és százásokat, az integrálórsonról a tizedeseket, a nóniuszról pedig az egyeseket olvasuk le.

Pontosabb eredményt kapunk valamely terület meghatározásánál, ha a terület határán a mérőkar vezetőtűjét nem egyszer, hanem egymásután "n"-szer vezetjük végig először az óramutató járásával egyező, majd ellenkező irányban. Ebben az esetben

$$T_1 = c \frac{O'_V - O_K}{n} \quad T_2 = c \frac{O_K - O''_V}{n} \quad \text{és innen}$$

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Vagy egyszerűbb alakban; ha $\frac{O'_V - O_K + O_K - O''_V}{2} = O'_V - O_K$ akkor lesz a terület:

$$T = c \frac{O'_V - O_K}{n}$$

Nagyobb területet is mérhetünk sarkpontos planiméterrel, ha a póluspontot az idom középső részén helyezzük el. Ebben az esetben:

$$T = c /O_V - O_K/ + c_1, \text{ ahol } c_1 = /a^2 + 2ab + c^2/\pi$$

Ez az eljárás azonban nem ad pontos eredményt s ezért nem szoktuk alkalmazni, inkább felosztjuk a területet kisebb részekre.

A sarkpontos planiméter pontossági kellékei.

A sarkpontos planiméterek pontossági kellékeit a következő négy pontba foglalhatjuk össze:

- 1./ Az integrálórsonak holt mozdulatai nem legyenek.
- 2./ Az integrálórso tengelye könnyen forogjon a csapjaiban.
- 3./ Az integrálórso forgástengelye párhuzamos legyen a mérőkar hossztengelyével.
- 4./ Az állandója helyes legyen.

Ad 1./ A vizsgálatot úgy végezzük, hogy a mérőkart a csukló körül jobbra-balra forgatjuk és megfigyeljük azt, hogy az integrálorsó a legkisebb mozdulatokat is átveszi-e. Ha nem mozdulnak el, úgy meghúzzuk a csapágy-csavarokat, de csak annyira, hogy az orsó még könnyen mozogjon.

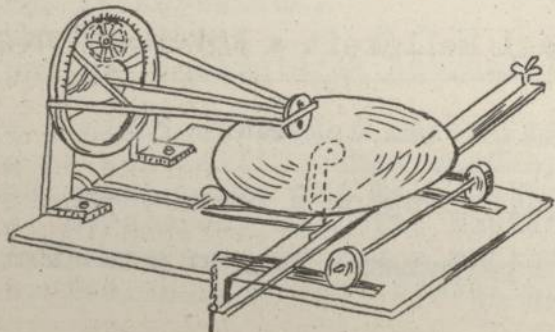
Ad 2./ Az integrálorsót arra nézve, hogy könnyen forog-e, úgy vizsgáljuk meg, hogy a planimétert fölemelve ujjunkkal könnyedén megforgatjuk az integrálorsót. Ha ez a forgatás után hirtelen megáll, akkor előbb kitisztítjuk a csapágyakat, majd a fogaskerék-részekkel együtt megolajozzuk és újra kipróbáljuk. Ha még most sem forogna elé könnyen és sokáig, úgy a csapágyszorító-csavarokat fölengedjük addig, amíg a körülfordulás könnyen és hosszú ideig tart.

Ad 3./ Az integrálorsó tengelyének és a mérőkarnak a párhuzamossága az előfeltétele annak, hogy ha a mérőkart hossz tengelyével azonos irányba mozgatjuk el, az integrálorsó csuszó mozgást végezzen. Ha azonban a párhuzamossági feltétel nincs kielégítve, úgy az integrálorsó gördülő mozgást is fog végezni akkor is, ha az mérőkart hossz tengelye irányában mozgatjuk el, viszont a mérőkar hossz tengelyére merőleges mozgásoknál az orsó részben csuszó mozgást is végez. Ezen okok miatt az integrálorsó körülfordulása nem lesz teljes, és így a területmérésnél hibás eredményt kapunk. A planiméter ezkirányu vizsgálata más lesz, ha Amsler, vagy Coradi-féle planiméterről van szó.

Az Amsler-féle planiméternél a vizsgálat úgy történik, hogy egy próbaterületet először az óramutató járásával megegyező irányban járunk körül és képezzük a területét, majd ugyanabból a pontból, ahonnan először kiindulva ellentétes irányban is végzünk mérést, és számítjuk a területet. Ha a planiméter hibamentes, akkor a két területnek egyeznie kell, vagyis az első $O_V - O_K$ -nak a második megfigyelés $O_K - O_V$ értékével egyenlőnek kell lennie.

A Coradi-féle komperzációs planiméternél a vizsgálatot úgy végezzük, hogy a vezetőkart először jobbkéz-felé, majd balkéz felé helyezzük el a mérőkartól s mindkét esetben az óramutató járásával megegyezőleg járjuk körül a területet. Ha a műszer helyes, akkor a kétféle vezetőkar-állás melletti leolvasásnak illetve a két területnek egyeznie kell.

Ha a műszer az itt tárgyalt hibával terhelve van, akkor az Amsler-féle planiméternél az óramutató járásával megegyező és ellentétes irányban kell a területet körüljárunk, a Coradi-félénél pedig egyszer jobb, másszor bal vezetőkar-állás mellett kell a mérést végeznünk és mindkét esetben a két megfigyelés középértékét kell számítanunk. Az így kapott értéket a "c" állandóval szorozva nyerjük a terület helyes nagyságát.



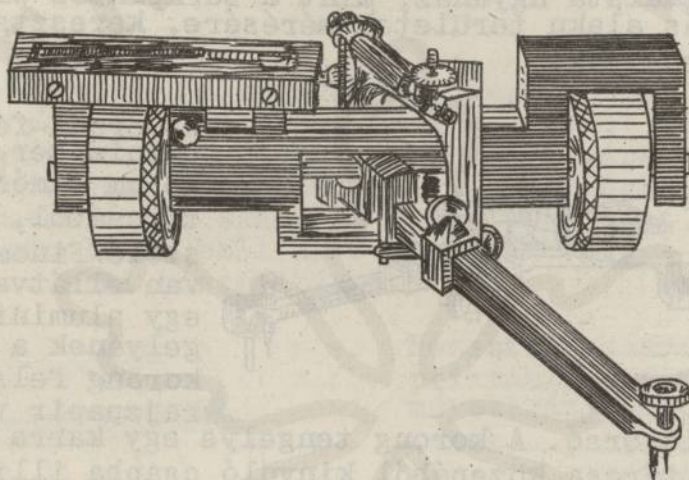
Különböző planiméterek:

A Vetli-féle planiméter lineáris planiméter. Egy réz alaplemezen 3 vezetősin van, amelyekeken egy kocsiszerkezet mozgatható egy vezetőrud segítségével. A vezetőrud ezen kívül még hosszirányában is eltolható, tehát a rud végén lévő vezetőtü minden irányba elmozdítható s így egy területidom

határvonalán körülvezethető. A vezetőrud két vége között egy sodronyszál van kifeszítve, amely a kocsiszerkezetből kinyúló függőleges forgástengely körül van vezetve, ha tehát a rudat hossz-irányban eltoljuk, akkor a tengely is forog. A tengelyre egy üvegkorong van szerelve, amelynek felső lapja rajzpapírral van beragasztva. Ezen fut az integrálorsó, melynek tengelye párhuzamos a vezetősinekkel. Ha a kocsiszerkezetet a sineken eltoljuk, akkor az integrálorsó nem forog, csak csuszlik. Ha viszont a vonórudat húzzuk, akkor forog az üvegkorong és elforgatja az integrálorsót is. Használata teljesen ugyanaz, mint a sarkpontos planiméteré. A gyakorlatban ma már nem fordul elő.

A Vetli-Starke-féle planiméter az előbbitől csak a leolvasó-készülék berendezésében tér el. A gyakorlatban nem terjedt el.

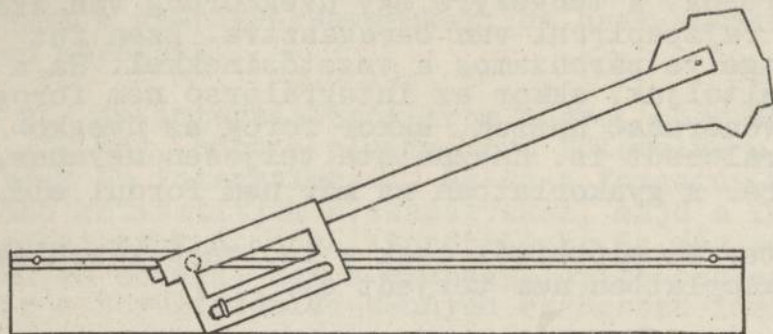
A Coradi-féle gördülő, vagy hengerlő planiméter szintén lineáris planiméter, mert a kényszerpálya, melyet a kocsiszerkezet utja határoz meg, egy egyenes.



Ennek a planiméternek lényege egy, két récézett szélestalpu súlyos keréken gördülő kocsi. A kocsi balkéz felé eső kerekének széle igen finom fogazással van ellátva, amelybe egy gömbsüveg forgástengelyén alkalmazott apró fogazású korong kapcsolható. A gömbsüveg a kocsiszerkezet tartójába van beágyazva, és ennek nyomja neki egy rugó az integrálorsót helyettesítő hengert, amelynek tengelyére van szerelve a számlálókészülék. A kocsi-kerekek fordulatát a fogaskerék segítségével átveszi a gömbsüveg és ez forgatja az integráló-hengert.

A mérés ezzel a planiméterrel is teljesen úgy történik, mint a sarkpontos planiméterrel. A mérőkart is ugyanúgy kell beállítani az állandónak megfelelő karhosszra, mint a többi, eddig tárgyalt planiméternél. Kényes szerkezete miatt a gyakorlatban nem terjedt el.

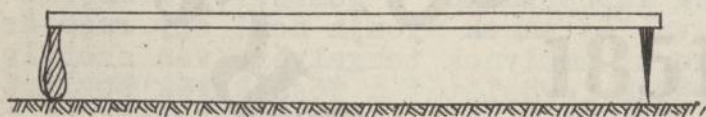
A Coradi-féle gördültárcsás planiméter hasonló az előbbihez: a különbség csak az, hogy a gördülő kerék fogazásához egy függőleges forgástengely fogaskereke fekszik. Ezen a tengelyen egy üvegkorong van, amely a tengellyel együtt forog. Az üvegkorongra rajzlap van ragasztva. Ezen fut az integrálorsó, melynek tengelye egy a mérőkarra merőlegesen elhelyezett tartóra van szerelve, tehát a tengely párhuzamos a mérőkarral. Előnye, hogy az integrálóró nem a térképen fut s így pontosabb eredményeket ad; hátránya viszont hogy szerkezete igen kényes; óvni kell a portól, csak lassan és óvatosan szabad vele dolgozni, ezért a gyakorlatban nem terjedt el. Használata teljesen azonos a sarkpontos planiméterével.



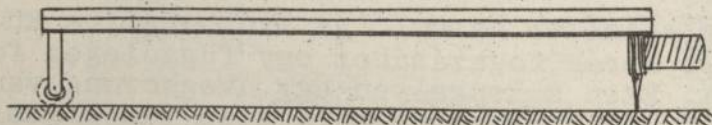
helyezve, alul pedig egy lefelé nyuló gömbös csap, amely a vonalzó vályatába illik és mérés közben ebben csuszlik el. tehát az is lineáris planiméter. Használata ugyanaz, mint a sarkpontos planimétereké. Inkább csak hosszukás alakú területek mérésére, keresztsszelvények meghatározására használják.



ezen fut az integráló-orsó. A korong tengelye egy kárra van szerelve, amely kar csapágya a tárcsa közepéből kinyuló csapba illik. A kar másik vége csuklósan van összekötve a mérőkarral. Használata megegyezik a sarkpontos planiméterekével. Pontossága az összes planiméterek között a legnagyobb, de mert igen kényes és drága műszer, a gyakorlatban nem terjedt el.



re van reszelve: ez a vezetőtű, a másik legörbített rész pedig a rud hosszirányában van élesre reszelve: ez a él helyettesíti az integráló-orsót. A gyárilag készített rudplanimétereknél a vezetőtűre egy hüvelyes fogantyú van elhelyezve, a laposra kireszelt él helyett pedig egy kis éles éllel bíró kerék van szerelve.

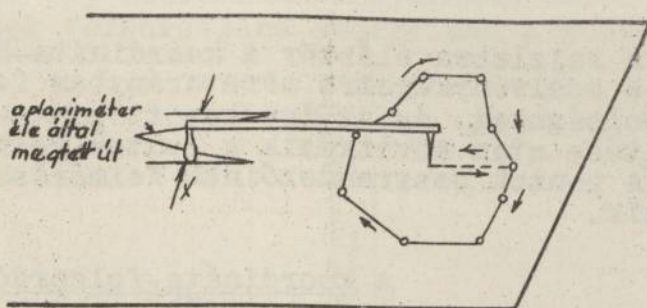


Használatánál a vezetőtűt az ídom szemmérték szerinti súlypontjába helyezzük, a planimétert gondosan függőleges helyzetben tartjuk, az éles élet benyomjuk a rajzlapba /ez helyettesíti a kezdő leolvasást/ ezután az ábra szerint körülvezetjük a vezetőtűt a megmérendő ídom

A Coradi-féle vonalzó planiméter áll egy súlyos fémvonalzóból, amelynek a szélén egy vályat van igen gondosan kiképezve. A fémvonalzó felső lapjára rajzpapír van ragasztva. Ezen a rajzlapon fut az integráló-orsó. A mérőkar egyik végén van a vezetőtű, másik végén az integráló-orsó van el-

A Coradi-féle tárcsás planiméter áll egy kb. 15 cm átmérőjű súlyos tárcsából, amelynek a széle finom fogazással van ellátva. Ebbe illik egy alumíniumkorong tengelyének a fogazása. A korong felső lapjára rajzpapír van ragasztva,

A Prytz-féle rudplaniméter egy 20-25 cm hosszúságú fémrud mindkét végén egy irányban 2-3 cm hosszúságban derékszögben le van görbítve. Az egyik le görbített vég helyes-



határán. Visszaérve a kiindulási pontba újból lenyomjuk a planiméter éles élét /ez helyettesíti a vég-leolvasást/. A két jel közötti "x" távolságot lemérjük milliméterekben. A terület lesz:

$$T = c \cdot x$$

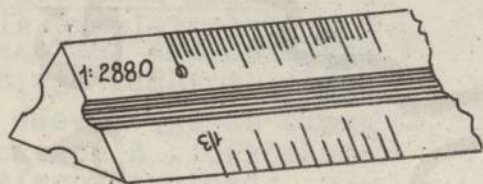
A "c" állandót úgy határozzuk meg, mint a sarkpontos

planimétereknél. Az így meghatározott területek pontossága nem valami nagy, ezért csak hozzávetőleges területmeghatározásokra használható. A mérés középhibája $\pm 0.5 \sim \pm 1 \%$ között van.

A felhordó műszerek.

1./ Hosszfelhordók.

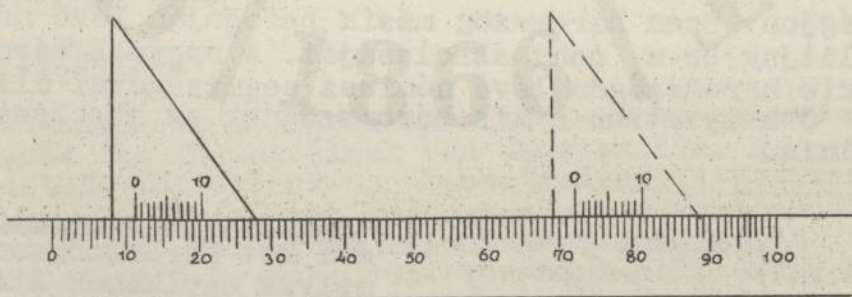
A hosszak felhordásához és leméréséhez legegyszerűbb segédeszköz az átlós lépték. Erről körzővel vesszük le a kívánt hosszakat, melyeket a térképen már előzőleg meghuzott vonalra mérünk fel. Mivel a körzővel való mérés eléggé pontatlan, maga az eljárás sem pontos. Átlagosan 0.1 mm pontossággal számolhatunk, tehát ha a méretarányunk 1:4000, akkor számolnunk kell az 0.1 mm térképbeli hosszak megfelelő 40 cm-es természetbeni hosszhibával.



Hosszfelrakásra használható a prizmaalaku famérce. A különböző méretarányoknak megfelelő beosztások a prizmaoldalak élein vannak, és a mércét a meghuzott vonal mellé helyezve, tüvel leszurjuk a kívánt értéket. Pontossága

még mindig nem elégséges: nagy gyakorlat és gondos munka esetén a hiba 0.05-0.1 mm között van.

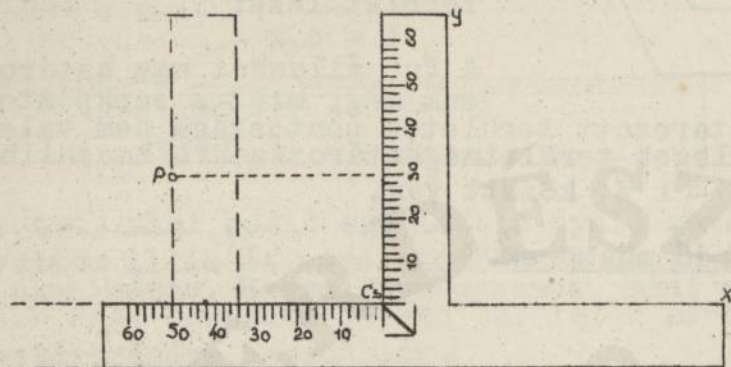
Pontosabb felhordásoknál egy a méretarányoknak megfelelően beosztott vonalzót és egy nóniusszal ellátott háromszöget használunk. Méréskor a vonalzót a megméréndő vonal mellé helyezzük, a háromszöget pedig az I. helyzetbe hozzuk úgy, hogy rajzolóélét az egyik végpont fölé illesztjük. Ezután a nóniusz segítségével leolvassuk a beállított értéket $/l_I/$.



Most eltoljuk a háromszöget a megméréndő hossz másik végpontjához /II. helyzet/, vagyis a háromszög rajzolóélét önmagával párhuzamosan eltoljuk a vonalzótól "h" értékkel. Ha tehát a felhordandó hossz: $h = 60.9$ m, a kezdőleolvasás: $l_I = 11.2$, akkor a II. helyzetben $l_I + h = 11.2 + 60.9 = 72.1 = l_{II}$ leolvasásra kell a vonalzót és a háromszöget állítanunk.

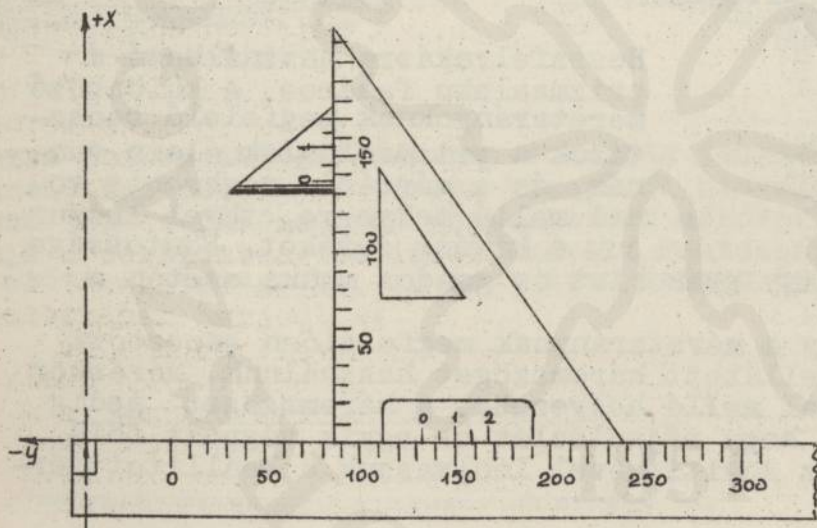
2./ Koordináta-felhordók.

A térképek megszerkesztésénél a rajzlapra először a koordináta-hálózatot rajzoljuk meg úgy, hogy a szelvénykeretre méretarányban felhordunk 100 m vagy 100°-es távolságokat, és az így kapott pontokat összekötjük. A hálózat elkészítése után következik a pontok felrakása a hálózaton belül. Ezeknek a pontok összehangolásának felmérése a koordináta-felhordókkal történik.



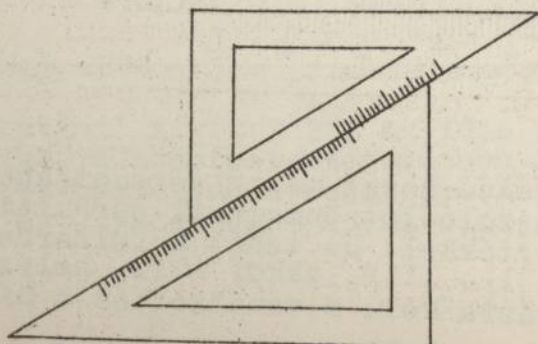
A koordináta-felhordók legegyszerűbb alakja egy fémből készült egyszerű derékszög, melynek a belső élek felé lecsapott lapján van a beosztás. Az osztással ellátott rész hossza ugyanakkora, mint a koordináta-négyszög egy oldalhossza. A műszert úgy állítjuk ki, hogy a "cs" csúcspont a koordináta-négyszög csucsán legyen, az éle pedig a négyszög oldalán fekszen.

Ide eltoljuk a műszert "x" irányban és a másik száron felmérjük a pl. $y = 30$ értéket, amelyet lepikirozva kapjuk a "P" pont helyét.



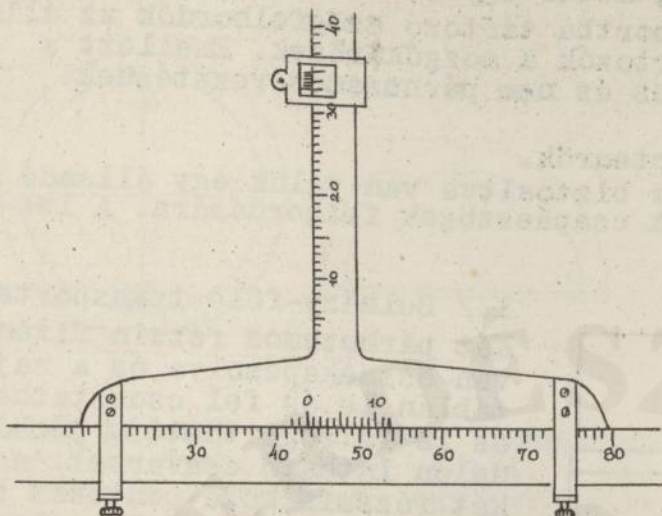
A Fasching-Süss-féle koordinátafelrakó áll egy hosszabb írvonalzóból, továbbá egy nagyobb és egy kisebb háromszögből. A hosszú, u.n. abscissa-vonalzót a hálózat mellé helyeztük úgy, hogy a végén lévő indexvonal egy ordinatavonallal vágjon. Ha erre "0" helyzetbe ráhelyezzük a nagyobbik háromszöget, ennek befogója kell, hogy az indexvonással, ill. az azzal egybeeső

ordinatával vágjon. Ezen háromszög másik befogóján lévő nóniusz segítségével állítjuk be a pont abszcissáját. A nagyobb háromszög mellé helyezett kis háromszögnél a nóniusz segítségével állítjuk be az ordinátát. "0" helyzetben a kis háromszögnek az abscissa-vonalzóhoz kell simulnia.



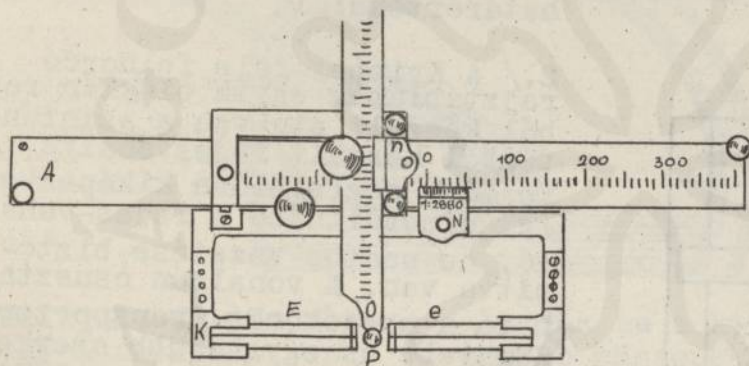
A Majzik-féle letoló-háromszög áll két háromszög-vonalzóból, melyek egyikének átfogóján van a beosztás a másik háromszög átfogóján pedig a beosztáshoz szolgáló nóniuszt találjuk. A beosztás úgy van elkészítve, hogy a háromszög befogójának elmozdulását abban a méretarányban kapjuk, amelyben a térképünk készült.

Ezek a koordinátafelhordók csak részletpontok felrakására szolgálnak: csak egy koordináta-négyszögön belül lehet velük dolgozni. Egész térképek felhordására szolgálnak a koordinátográfok.



A Coradi-féle koordinatográf egy szilárd, milliméterekre osztott alapvonalzóból áll, amelyen derékszög alatt egy kimerevített másik vonalzó toltatható el. Ezen a vonalzón egy leszűrőberendezés toltatható el. A leolvasó, illetve beállítókészülék nóniusz, vagy mikroszkóp, esetleg mikrométercsavar. A leolvasási határérték 0.02 mm, tehát 1:2000 méretaránynál még 4 cm természetbeni hossz is felhordható.

A Cemus-Fromme féle koordinatográf áll egy 30 cm hosszú abszcisszavonalzóból /A/ amelyen egy 18 cm hosszú és 7 cm széles keret /K/ egy mikrométerszerkezet segítségével eltolható. A keretre van erősítve az "N" nóniusz. Merőlegesen az abszcisszavonalzóra, ugyancsak mikrométerszerkezet segítségével



mozgatható az ordinátavonalzó /O/, amely szintén el van látva egy nóniusszal /n/. A keret mindkét végén egy-egy 8 cm hosszú és 2 cm széles üveglemez /E,e/ van, amelyekbe az abszcisszavonalzóval párhuzamosan egy-egy finom, egyenes vonal van bekarcolva. Az "E" lemez ezen kívül végétől 3 mm-re egy keresztvonással is bír, amely mind indexvonás

szerepel a műszernek a kezdőösszrendezőre való beállításnál. Az ordinátavonalzó előtt egy pikirozószerkezettel van ellátva /P/ amelynek tüje az "E" lemez indexvonalától 1:1000-es méretarányban 10 m távolságra esik. Ennek az állandónak az a célja, hogy a munka megkezdése előtt az "N" nóniuszt 10 m-re jobbra, vagy balra lehessen állítani aszerint, hogy hogyan akarja az ember az abszcisszákat felhordani.

3./ Szög-felhordók.

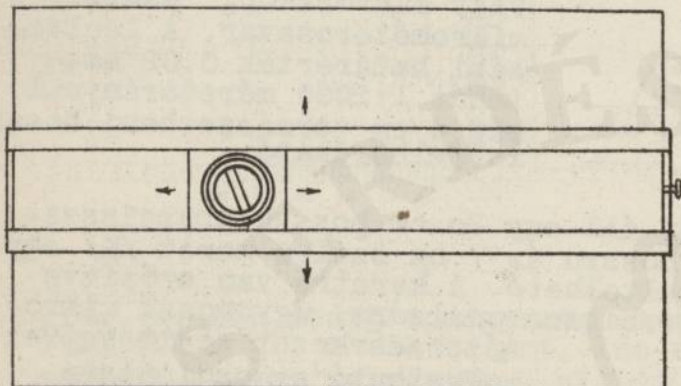
A felhordó-kompassz sárgarézlapra szerelt kompassz, amely sárgarézlapnak egyik éle rajzolóélnak van lecsiszolva. A rajzolóél párhuzamos az osztott-kör 0-180°-os beosztásával. A leolvasási határértéke 0.1° = 6', azért legfeljebb busszolásmérések felhordására használható. A kompasszal való felhordás lassu, mert sokáig kell várni, míg a delejtü nyugalmi helyzetbe jut. Vigyázni kell arra, hogy a közelben fém-tárgy, vagy egyenáramu vezeték ne legyen. Ma már nem használják.

A tulajdonképeni szögfelrakók fémből készült osztott-körök, amelyeknek közepében lévő forgástengely körül forgatva egy kar állítható be a kívánt szögértékre a megfelelő leolvasberendezés segítségével. A szögfelrakóknál vagy az osztott kör áll, ebben az esetben a leolvasóberendezés forog a rajzolókarral együtt, vagy pedig az osztott-kör van

a rajzolókarra szerelve, tehát a kettő együtt forog el az álló leolvasókészülék körül. Az első csoportba tartozó szögfelhordók az állókörösek, a második csoportba tartozók a mozgókörösek. Emellett a szögfelhordók lehetnek párhuzamos és nem párhuzamos-vezetésűek.

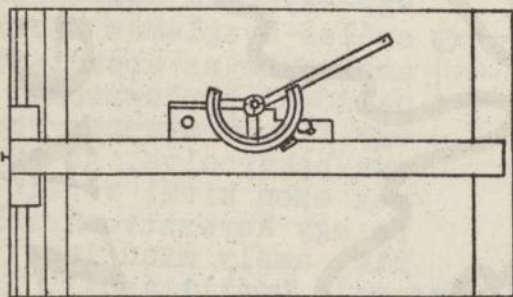
a./ Párhuzamos vezetésű transporteurök.

E szögfelhordók forgókörösek, és biztosítva van velük egy állandó irány, tehát különösen alkalmasak csapásszögek felhordására. A leggyakoribbak a következők:



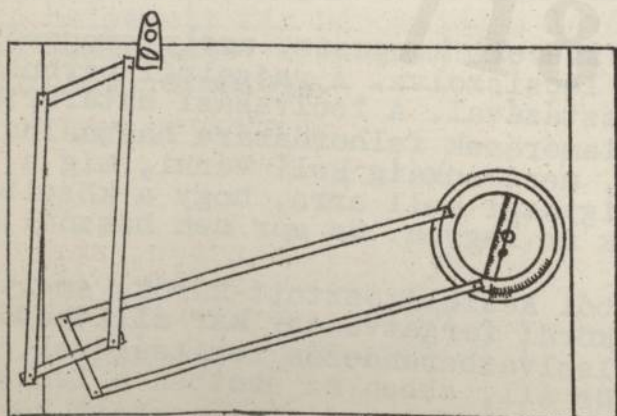
1./ Belházy-féle transporteur.

Két párhuzamos rézsin fixen van összekapcsolva és a rajztáblán le és fel csuszatható és le is rögzíthető a jobboldalon látható csavarral. A két rézsin közé pontosan beillik egy jobbra-balra elcsuszatható rézkeret teljeskörű transporteurrel. Az osztottkör átmérője van rajzoló-karnak kiképezve. E műszer gyors és pontos felhordó, leolvasási határértéke: 1°



2./ A Krippel-féle felhordó rajztáblának egyik oldalán rézből készült sin van a szintén fémből készült fejesvonalzó fejének megfelelően kiképezve. Így elmozdítható a fejes-vonalzó, de pontos vezetése biztosítva van. A vonalzón csuszatható a mozgókörös transporteur. Könnyebb és egyszerűbb szerkezet, mint az előző, de valamivel pontatlanabb is. Leolvasási határértéke: 6'

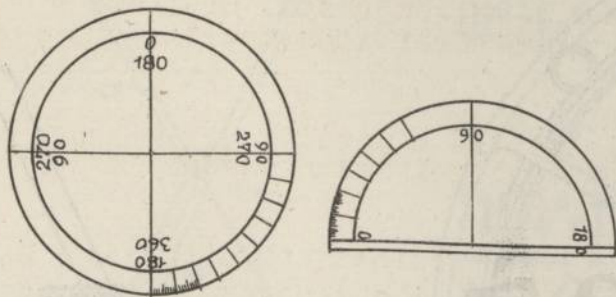
3./ A Fromme-féle felhordó rajztáblára szerelhető, forgó osztott-körrel bir, amelynek kettős csuklós vezetőse van és így párhuzamosan tolató el a rajzasztal bármely helyére. Az osztott kör rajzolóélén hossz lépték is van, tehát a távolság közvetlenül leosztható. A rajzolókaron



a leggyakrabban előforduló méretarányoknak megfelelő léptéket találjuk. Csuklós vezetése miatt, ha a csuklók kikopnak, idővel az állandó irány bizonytalan lesz. Tachymetrikus felvételek megszerkesztésénél használják.

b./ Nem párhuzamos vezetésű transporteurök. Szintén lehetnek forgó-körösek és állókörösek. Az állókörös transporteur beosztásának a busszola osztásával ellenkezőnek, kivéve a Wild T 0-ét a teodolit lánbuszkörének osztási irányával, egyezőnek, a forgókörös trans-

porteur beosztásának a busszola osztott körének beosztásával egyező, szintén kivétel a Wild T 0, a teodolit lóbus osztásával, ellenkező irányúnak kell lennie. Könnyen megérthetjük ezt, ha megfontoljuk, hogy a busszola osztott-köre forgó, tehát a helyes értéket egyenlő osztásirányú forgókörös, avagy ellenkező irányban osztott állókörös szögfelrakóval hordjuk fel.



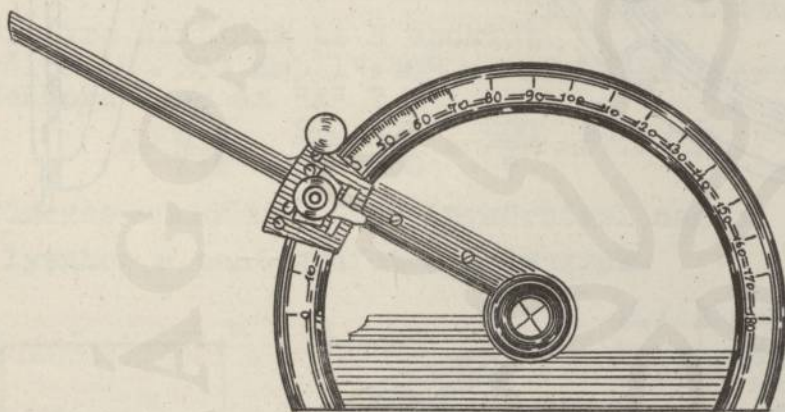
A legegyszerűbb állókörös transporteur a celluloidból készül. Ez vagy egész-, vagy félkörös. A középpontja egy kereszttel meg van jelölve.

A beosztása fokos, esetleg a fokok még 2-3 részre vannak osztva.

A fémből készült állókörös transporteurok szintén vagy egész, vagy félkörösek. Gyakoribb az utóbbi. A kör közepén egy celluloid lap van, amelyen a középpont egy kereszttel van megjelölve. A rajzoló-

kar e körül a középpont körül forgatható el.

A félkörös szögfelhordók úgy vannak szerkesztve, hogy vonalzón eltolhatóak legyenek; ezért a fekvési élnek párhuzamosnak kell lennie az osztott-kör 0-180° osztását összekötő egyenessel. Ábránk egy állókörös, transporteur képét mutatja. A pont képe fölé az átlátszó celluloid-lapon lévő kereszt segítségével

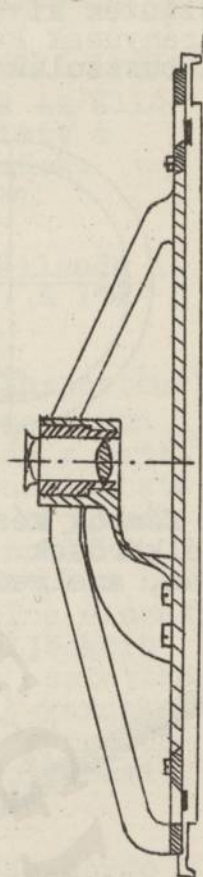
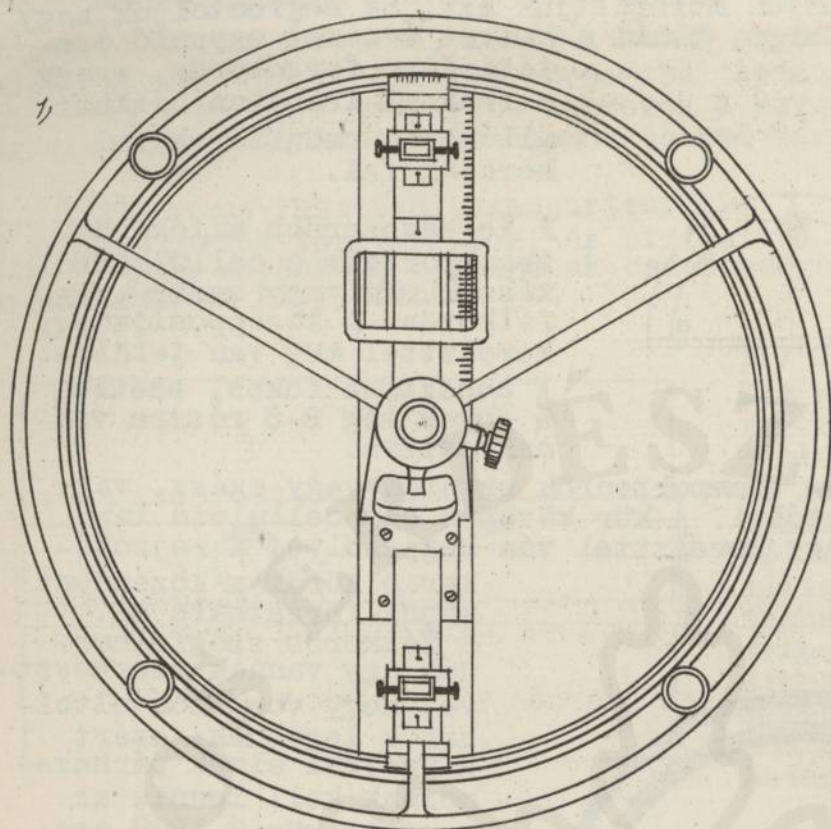


állítjuk. Ezután a kart állítjuk be a kívánt szögértékre. A kart vagy a surlódás, vagy pontosabb műszereknél egy kötőcsavar tartja a beállított helyzetben. A pontosabb felhordók beállítása paráncsavar segítségével történik.

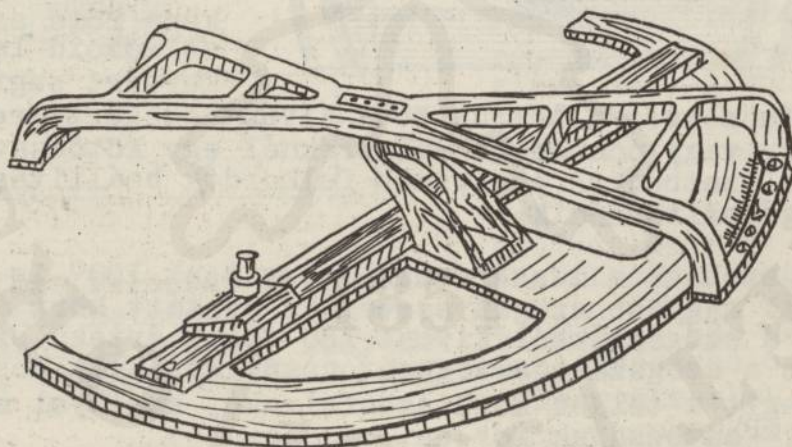
Nagy hátrányuk ezeknek a műszereknek, hogy csak 180°-ig lehet velük felhordani ennél nagyobb szögek esetén az osztott kört át kell fordítanunk, vagy a szögértékből kivont 180 fokos értékű szöget megszerkesztve ezt a szögszárat a végponton túl meg kell hosszabbítani. Ezen a hibán segít a teljes-körü szögfelrakó, amellyel már 360°-ig lehet dolgozni. Pontosságuk 20"-es.

Állókörös transporteur a Szovátay-féle teljeskörű felhordó /1. ábra/ Osztott köre 32 cm-es átmérővel bír. A rajzolókar egy leszuróberendezéssel van ellátva. Ez a kar a szokásos méretarányának megfelelő beosztással bír. A leszuró-tűt a kívánt távolságra nóniusz segítségével állítjuk be. Jól használható sarkponti összrendezők felhordására.

A mozgóköröseknél egy alapllemezen fordul el a kör átmérője, amely rajzoló-karnak van kiképezve. Ilyen a Szepessy-féle felhordó /2. ábra/ Sarkponti összrendezők felhordására igen pontos felhordókat golyós csapággyakkal készít a Coradi cég.



2,



A térképek kisebbitésére ill. nagyítására szolgáló műszerek.

1./ Az aránykörző egy olyan körző, amelyen a csukló helyét változtatni tudjuk. A körző egyik szára milliméterekre van osztva és a csuklóhoz szerelt nóniusz segítségével beállítható a csucstól számított "x" távolságra. Az "x" távolságra. Az "x" értéke a kisebbitési méretarányoknak megfelelően számítható. Tudjuk ugyanis, hogy $\frac{AB}{ab} = \frac{1}{N}$ vagy $\frac{ab}{AB} = N$ ahol "N" a kisebbitési ill. nagyobbitási viszonyszám.

Az ábra alapján írhatjuk, hogy:

$$\frac{ab}{AB} = N = \frac{x}{H-x}$$

ahol "H" a körzőszár egész hossza, "x" pedig a csukló távolsága a körző egyik végétől. A törteteket eltüntetve:

$$NH - Nx = x$$

$$x / (N+1) = NH \quad \text{és innen: } x = \frac{NH}{N+1}$$

Vagyis adott "N" mellett erre az "x" értékre állítjuk be a csuklót. A gyakorlatban legtöbbször nem az "N", hanem a régi /1/K/ és az új térkép méretaránya /1/K₁/ van megadva. Ekkor $N = \frac{K}{K_1}$, ezt behelyettesítve:

$$K = \frac{\frac{K H}{K_1}}{\frac{K}{K_1} + \frac{K}{K_1}} = \frac{K H}{K + K_1}$$

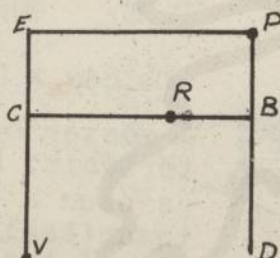
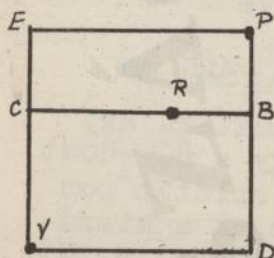
Tehát most adott "K" és "K₁" segítségével számítottuk az "x"-et és erre az

értékre állítjuk be a csuklót.

Példa. H = 200 mm, 1":40°-es térképet akarunk kisebbiteni 1":100°-re Mekkora lesz az "x" ?

$$x = \frac{H K}{K + K_1} = \frac{200 \cdot 40}{40 + 100} = \frac{400}{7} = 57.14 \text{ mm}$$

Tömeges munkáknál az aránykörzővel nagyon lassan megy a munka, ezért ilyenkor a pantográfot alkalmazzuk.



2./ A pantográf elvben 5 egyenlő hosszúságú, csuklókkal összekötött rudból áll, amelyek közül a gyakorlatban az ötödik hiányzik. A négy kar egy négyzetet alkot, az ötödik kar a négy karon belül fekszik és beállítható. A PD, EV és BC kar milliméterosztással van ellátva, hogy a mozgatható kart a "P" ponttól "x" távolságra beállíthassuk a mőniuszok

segítségével, illetve hogy a mozgatható karon eltolhassuk a rajzolótűt, a "B" ponttól szintén "x" távolságra.

A fix "P" póluspont kisebbitésnél kívül, nagyobbításnál belül foglal helyet. A készüléken két tű van: a "V" vezetőtü és az "R" rajzolótű. A pólus a rajzolótű és a vezetőtü a pantográf minden helyzetében egy egyenesbe esik.

A kisebbitési arányszám: $N = \frac{a}{A}$; Az ábrabeli $PVD \Delta \sim PRB \Delta$, ezért írhatjuk, hogy

$$\frac{P V}{P R} = \frac{H}{x}$$

ahol "H" egyenlő a pantográf rudjainak hosszával, "x" pedig az ötödik karnak a távolsága a pólustól. Most elmozdítjuk a pantográfot úgy, hogy a vezetőtü a kisebbitendő vonal másik végpontjába kerüljön. Újból hasonló háromszögeink lesznek:

$$P V' D' \Delta \sim P R' B' \Delta$$

$$\frac{P V}{P R} = \frac{H - x}{x}$$

A $P C' V' \Delta \sim P B' R' \Delta$ folytán viszont írhatjuk, hogy

$$\frac{P V'}{P R'} = \frac{H - x}{x} \quad \text{és innen} \quad \frac{P V}{P R} = \frac{P V'}{P R'}$$

Ebből következik, hogy $P V V' \Delta - P R R' \Delta$ s így $A \parallel a$.

$$\frac{a}{A} = N, \text{ továbbá } \frac{a}{A} = \frac{P R}{P V} = \frac{x}{H - x} = N \quad \text{ahonnan}$$

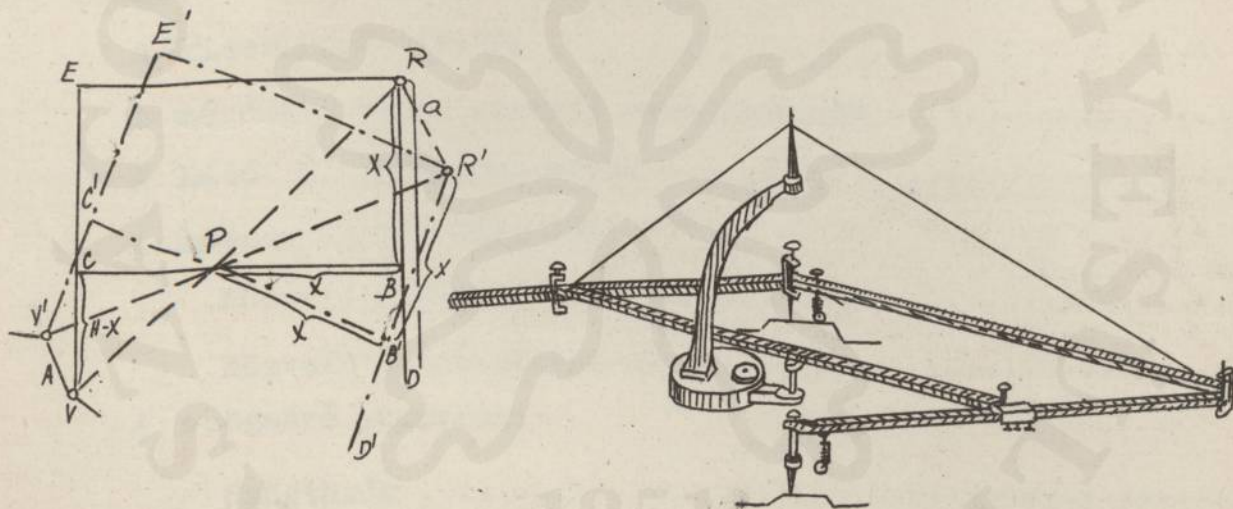
$$x = N H - N x \text{ és } x / 1 + N / = N H \quad \text{végül pedig} \quad x = \frac{N H}{1 + N}$$

Ha a méretarányok vannak megadva, akkor

$$a = \frac{1}{K_1}, \quad A = \frac{1}{K} \quad \text{s így} \quad N = \frac{K}{K_1} \quad \text{és innen}$$

$$x = \frac{\frac{K H}{K_1}}{\frac{K_1 + K}{K_1}} = \frac{K H}{K_1 + K}$$

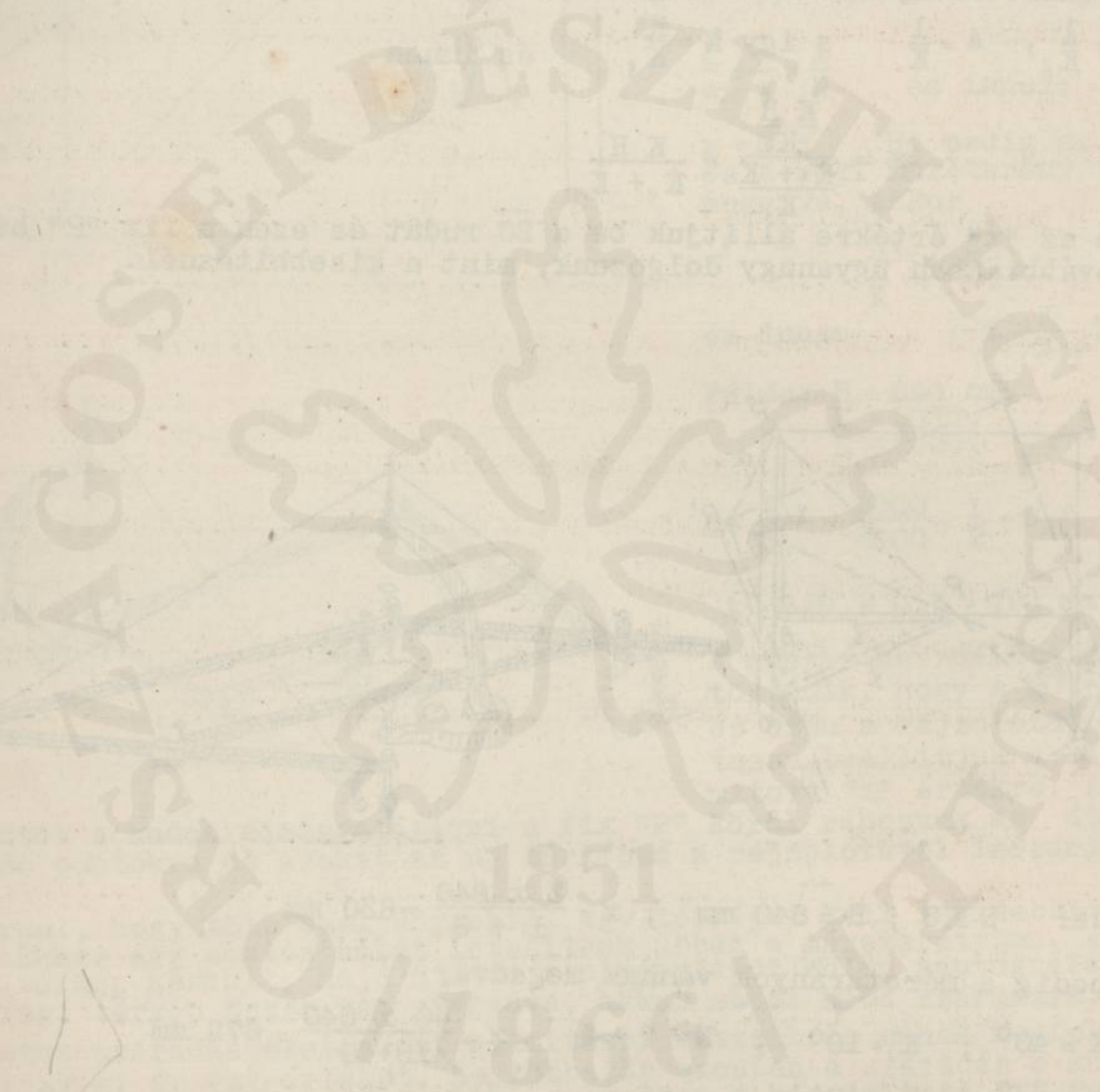
Erre az "x" értékre állítjuk be a $\overline{BC}$ rudat és ezen a fix "p" helyét A továbbiakban ugyanugy dolgozunk, mint a kisebbitésnél.



Példa: $N = 3$; $H = 840 \text{ mm}$; $x = \frac{3 \times 840}{1 + 3} = 630 \text{ mm}$

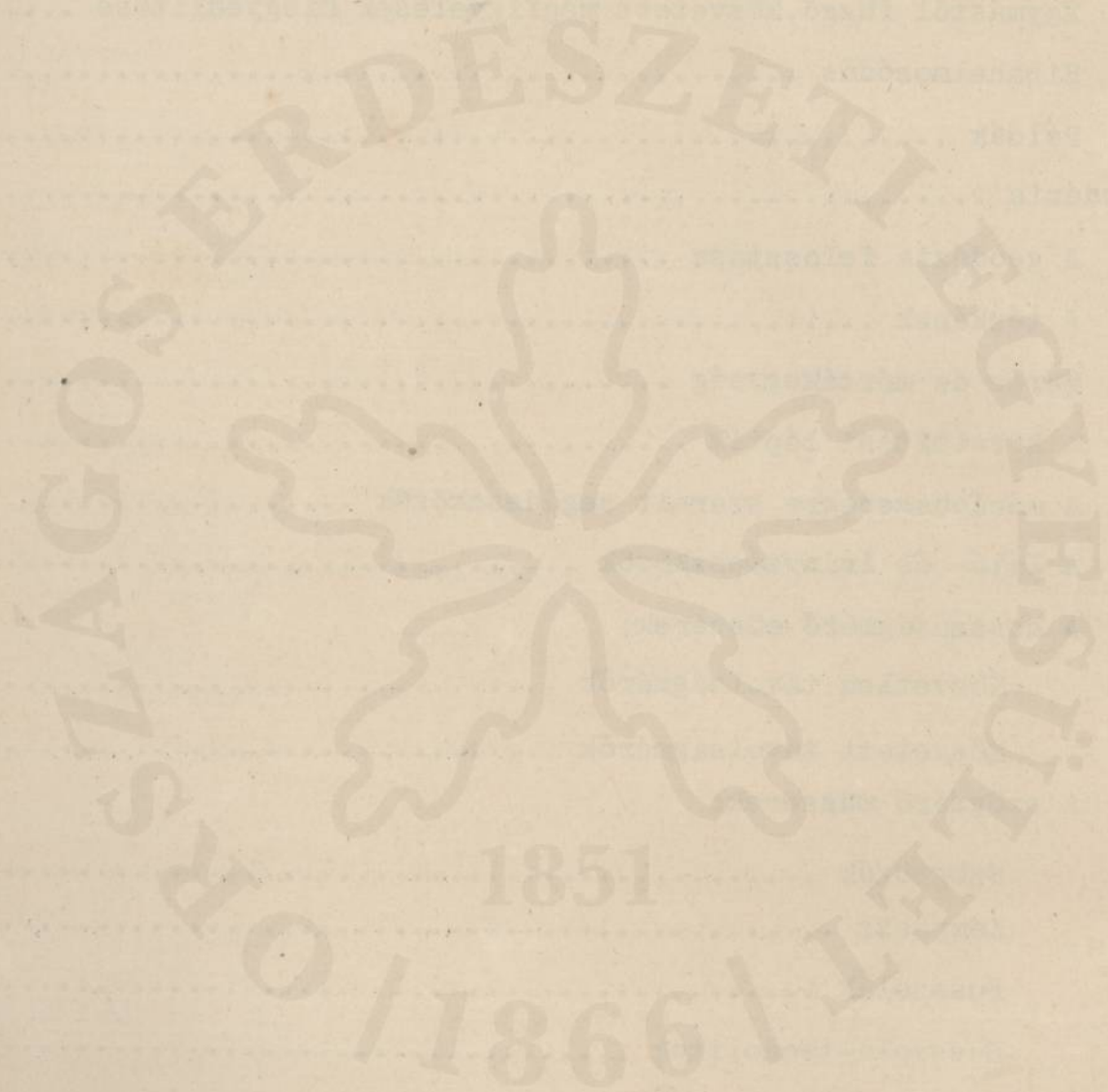
Ha pedig a méretarányok vannak megadva;

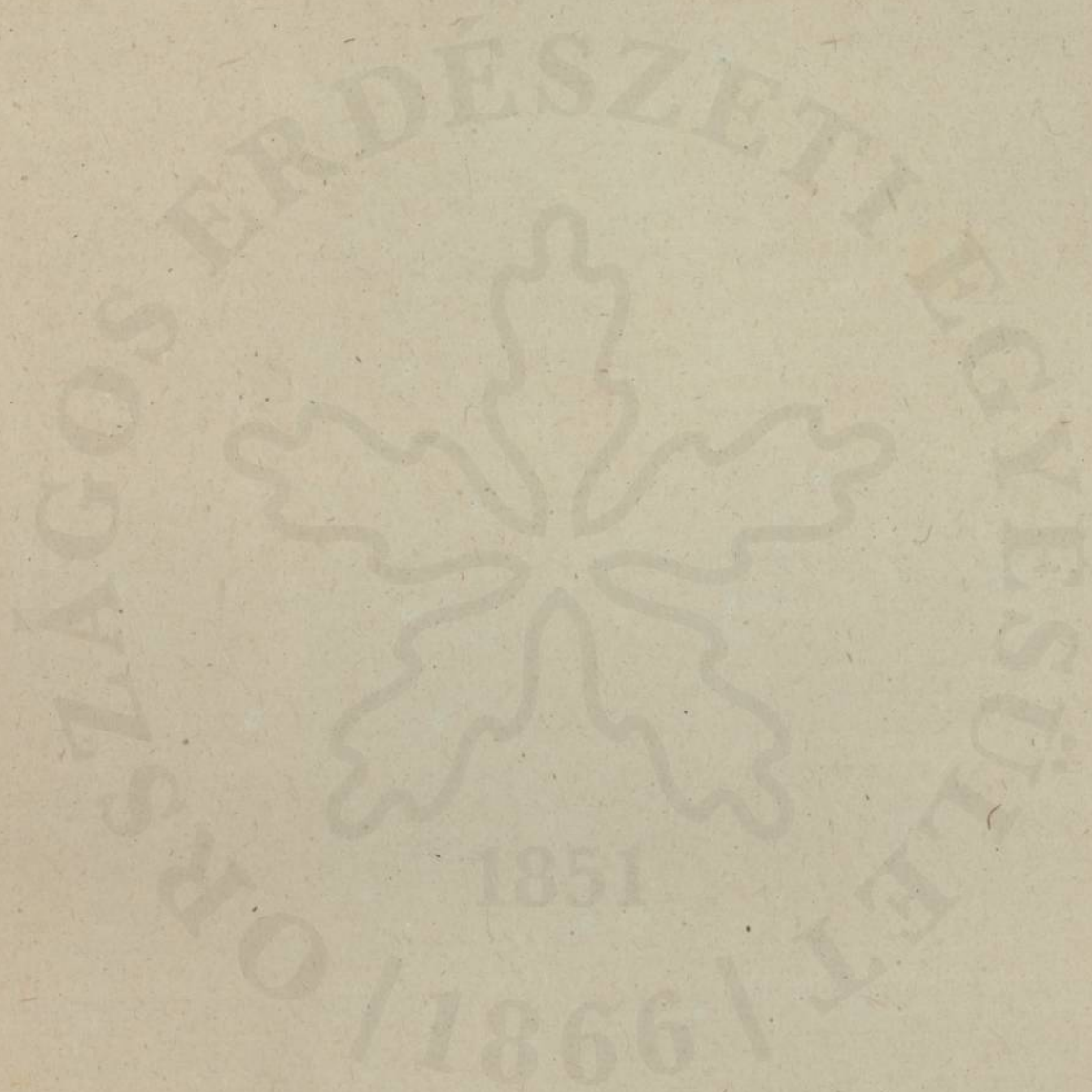
$$K = 40^\circ ; \quad K_1 = 10^\circ ; \quad N = ? = 4 \quad x = \frac{40 \times 840}{10 + 40} = 672 \text{ mm}$$



T a r t a l o m j e g y z é k

Bevezetés	1
Kiegyenlítő számítás	4
Egyenlősúlyu közvetlen megfigyelések kiegyenlítése	7
Különbözősúlyu közvetlen megfigyelések kiegyenlítése	11
Egymástól független, közvetett megfigyelések kiegyenlítése	15
Egymástól függő, közvetett megfigyelések kiegyenlítése	22
Hibahalmozódás	28
Példák	31
Geodézia	43
A geodézia felosztása	43
A térképek	44
Mérés és mértékegység	47
A kisebbitési lépték	52
A mérőműszerekre szerelt segédeszközök	64
A látó- és irányzóeszközök	76
A hosszúságmérő műszerek:	
Közvetlen távolságmérők	103
Közvetett távolságmérők	110
A szögmérő műszerek:	
Szögtűzők	124
Kompassz	134
Busszolak	136
Busszola-teodolitok	151
Sextans	155
Teodolitok	155
Tachiméterek	176
A mérőasztalok	179
A szintezőműszerek	192
A területszámító műszerek	208
A felhordó műszerek	221
A térképmásoló műszerek	226





Mikano.

1 + 11.