BÉKY
ALBERT.

SZÁM-
TAN.

SZÁMTAN

A M. KIR. ERDŐŐRI SZAKISKOLÁK, AZ ERDŐŐRI SZAKVIZSGÁRA MAGÁN ÚTON KÉSZÜLŐK ÉS ERDŐALTISZTEK RÉSZÉRE.

IRTA:

BÉKY ALBERT

M. KIR. ERDÉSZ, A SZÁSZSEBESI M. KIR. ERDŐRENDEZŐSÉG VEZETŐJE.

KIADJA AZ ORSZÁGOS ERDÉSZETI EGYESÜLET.

(Budapest, V., Alkotmány-utca 6. sz.)

BUDAPEST.
LIPINSZKY ÉS TÁRSA, VIII., NAP-UTCA 19. SZÁM.
1904.

ÚTMUTATÓ
a könyv használói részére.

A tanulásnál illetőleg tanításnál az legyen a vezérlő gondolatunk, hogy az erdészet körében a számtan nem magamagaért van otthon, hanem csakis mint segédtudomány, amely nélkül az erdészet sok feladatát meg nem oldhatnánk. Ugyanezért ne a könyv szavai szerint való betanulásra fektessük a súlyt, hanem a megértésre és a gyakorlati alkalmazásra. Ha a tanár — habár csak egyes elejtett szóból is — azt látja, hogy tanítványa érti amit tennie kell s emellett meg is tudja tenni: meg lehet elégedve. Másrészt ha a magántanuló, kétséget kizárólag tisztában van azzal, hogy amit csinál, az csakis úgy lehet és másként nem: nyugodt lehet, hogy tudása elérte a kellő fokot, ha a könyv szavait nem is tudja elmondani.

A fő törekvés az legyen, hogy a tanuló a példákat segítség nélkül tudja kidolgozni!

A mértékeket illetőleg szükségesnek tartom megjegyezni, hogy azoknak részletes megtanulása ott, ahol a könyv sorrendje szerint (4. §.) következnek, lélekölő s mindamellett kevés sikerű fáradozás volna. Itt elég egyelőre csak általános tájékozódást szerezni felőlük; a beható megismerésnek és megtanúlásnak részben már a négy alapszámművelet példáinak kidolgozásánál, tulajdonképen pedig a 9. és 10. §-ok keretében van a helye.

A következőkben megjelölöm azokat a §-okat, amelyeknek tudását a szakiskolai tanulóktól a gyakorlati élet, a magántanulóktól pedig az erdőőri szakvizsgálat megköveteli: az 1.-től a 11.-ig bezárólag mind, a 16. (az előbbi §-okban tanúltak segélyével megfejthető példákat), 18., 20., 21., 23., a 29.-től bezárólag a 36.-ig mind s végül a 40. §-okat.

Természetes azonban, hogy ha a szakiskolai növendékekkel többet is el tudunk sajátíttatni s a magántanuló többet is meg tud tanúlni: erre törekednie kell. Ne tévesszük azonban szem elől, hogy inkább csak a szükségeset, de jól, — mint többet is, de csak félig-meddig. Az elmaradottakat később az életben iparkodjunk sorra venni.

A szerző.

TARTALOMJEGYZÉK.

BEVEZETŐ.

ELSŐ SZAKASZ.

Egész számokkal és tizedes törtekkel való számolás.

I. FEJEZET.

A négy alapszámművelet nevezetlen és egynevű számokkal.

II. FEJEZET.

Többnevű számokkal való számolás.

MÁSODIK SZAKASZ.

A számok oszthatóságáról.

HARMADIK SZAKASZ.

Közönséges törtekkel való számolás.

NEGYEDIK SZAKASZ.

Viszonyszámolás.

I. FEJEZET.

Viszonyok és arányok.

II. FEJEZET.

Hármasszabályi számolás.

III. FEJEZET.

Arányos osztás.

IV. FEJEZET.

Átlagszámítás.

BEVEZETŐ.

1. §. Általános fogalmak.

Mennyiség alatt a tárgyaknak számok segítségével leírható tulajdonságát értjük. Mennyiség pl. a szálfának a hossza, a kertnek a területe, a szobának a köbtartalma, a napkeltétől napnyugtáig terjedő időköz, stb. Minthogy a mennyiségtanban a létező dolgokat csakis mennyiséget tevő tulajdonságaikra való tekintettel tárgyaljuk: magukat a tárgyakat szoktuk, mint mennyiségeket említeni.

A mennyiségtan a mennyiségekről szóló tudomány.

A mennyiségtannak két része van, u. m. a számtan és a mértan. A *számtan* a számokat, a *mértan* a térbeli alakokat (pontok, vonalak, sikok és testek) tanítja.

Hogy mi a mennyiségeket számok által kifejezhessük, szükségünk van bizonyos, általánosan elfogadott megállapitásokra, amelyekhez a mennyiségeket hasonlíthassuk: ezek a *mértékek*; pl. méter, köbméter, liter, kilogramm.

Minden mennyiséget csak a neki megfelelő, vele egynemű mértékkel lehet mérni, azaz hosszúságot csak hosszmértékkel, nem pedig pl. súlymértékkel, területet térmértékkel, időt időmértékkel stb.

Ha mi a mennyiségeket számokkal ki akarjuk fejezni, összehasonlítjuk azokat a mértékkel, illetve a mértéknek egységével s ezáltal nyerjük a *számot;* pl. ha meg akarjuk tudni, hogy valamely csemeteágy egy méter hosszú sorában hány csemete van, megszámláljuk, megolvassuk a sorban lévő csemetéket; vagy ha meg akarjuk tudni, hogy bizonyos előttünk fekvő szálfa hány méter hosszú, megmérjük a szálfát méterrel. Ha azt találtuk, hogy hatvanöt csemete van egy sorban s a szálfa tizennyolc méter hosszú, akkor hatvanöt és tizennyolc számok, melyekhez a mennyiségnek a mértékegységgel való össszehasonlítása által, azaz számolás, mérés által jutottunk. A szám tehát az, ami megmutatja, hogy a mértékegység hányszor van meg a megmérendő mennyiségben. A csemeték számbavételénél a mértékegység egy darab, a szálfánál egy méter volt.

Szám van kétféle: *egész szám* és *tört szám.*

Ha a számbaveendő mennyiségben a mértékegység egyszer, vagy többször, de mindig a maga egészében van meg, akkor a nyert szám *egész szám*; ha azonban a mennyiség a mértékegységnek csak részeit (töredékeit) tartalmazza, akkor a nyert szám *tört szám.* Egész számok az előbbi példákban hatvanöt és tizennyolc. Ha azonban fél méter hosszú pálcám van s annak megmérésénél mértékegységül a métert veszem, akkor a nyert szám tört szám leend t. i. fél ($^1/_2$) méter.

Vannak *megnevezett* és *nevezetlen* vagy *elvont számok*. Megnevezett az a szám, amelyik azt is megmondja, hogy hány az egység s azt is, hogy miféle az egység pl. nyolc óra, tizenkilenc öl, hét darab. A nevezetlen szám csak azt mondja meg, hogy hány az egység; pl. tizenöt, három, kilenc, nyolcvanöt. A megnevezett számok lehetnek *egynevüek* (egynemüek) és *többnevüek* (többnemüek, különnemüek.) Az egynevüeknek egyforma nevük van; pl. öt méter, hét méter, tizenöt méter; a többnevüeknek a nevük különféle, pl. nyolc öl, három perc, kilencvenöt méter, hat gramm.

Számlálni annyit tesz, mint valamely számból kiindulva az egység folytonos hozzáadása vagy elvétele által számot képezni; pl. ha azt mondom (így olvasok) öt, hat, hét, nyolc stb., vagy hét, hat, öt, négy, három stb., akkor számlálok.

Ha tizenöt csemetéhez hozzáadok négyet, vagy hét liter makkból elveszek (kivonok) hármat, akkor *számolok* vagyis ismert számokból, meghatározott módon más, még ismeretlen számot keresek. A talált szám a számolás *eredménye.*

2. §. A számjegyekről.

A *számjegy* vagy *számjel* a számoknak írásbeli kifejezése, éppen úgy, mint ahogy a betű írásbeli jele a hangnak.

Kétféle számjegyeket ismerünk, ú. m. a *római* és *arab számjegyeket.* A római számjegyeket csakis számok jelölésére használjuk, míg a számmüveleteket az arab számjegyekkel hajtjuk végre.

1. *Arab számjegy* van tíz, ú. m.: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. A 0, 2, 4, 6, 8 páros, az 1, 3, 5, 7, 9 pedig páratlan számok.

Több számjegyből álló szám is a szerint páros vagy páratlan, amint a végső számjegye páros vagy páratlan, pl. 714 páros szám, mert a végső számjegye a 4-es páros. Arab számjegyeknek azért hívják ezeket a számjegyeket, mert az európaiak az araboktól tanulták el. (Ezekről bővebben a 3. §. szól.)

2. *Római számjegy* van hét.

A számjegyek ezek:

	I,	V,	X,	L,	C,	D,	M.
Értékük:	1,	5,	10,	50,	100,	500,	1000.

A számokat ezekkel a jegyekkel a következő öt szabály szerint írjuk le:

a) Ha több egyforma jegyet irunk egymás mellé, akkor azok annyit jelentenek, mint amennyi az értékük együttvéve; pl. II annyi mint 2; XXX annyi mint 30.

b) Ha kisebb értékű számjegyet nagyobb értékű után irunk, akkor előbbi az utóbbihoz hozzáadandó; pl. VI annyi mint 6; XVIII annyi mint 18.

c) Ha kisebb értékű számjegy nagyobb értékű előtt áll, akkor előbbi az utóbbiból levonandó; pl. IX annyi mint 9; XL annyi mint 40; CM annyi mint 900.

d) Az arab jegyekkel leírt szám minden arab jegyét külön jelöljük; pl. 49-et nem így IL, hanem így XLIX (40 meg 9.)

e) Összeadandónak háromnál s levonandónak egynél több egyforma jegy (az ezrest kivéve) egymás mellé nem írható; pl. 40 nem XXXX, hanem XL s 28 nem IIXXX, hanem XXVIII.

PÉLDÁK:

III	annyi mint	3	CCCXLIX	annyi mint	349
IV	„ „	4	CDLXXXIV	„ „	484
VIII	„ „	8	DCCCLXXIII	„ „	873
XIV	„ „	14	MDCCCXCVII	„ „	1897
XXXIX	„ „	39	MCM	„ „	1900
LXXXVIII	„ „	88	MIV	„ „	1004
XCIV	„ „	94	DCVII	„ „	607

3. §. A tízes vagy tizedes számrendszer.*)

1. Egész számok.

A tízes rendszer szabályai alapján bármely nagy számot röviden és pontosan kimondhatunk s a rendelkezésünkre álló tíz arab számjeggyel még rövidebben s egyszerűbben leírhatunk.

*) A tizedes rendszer megértetéséhez (főleg a törtekéhez) nem ajánlható eléggé a milliméter pontosságig beosztott métervessző (méteres.)

A tizedes rendszer alapszabálya az, hogy *valamely rendű egységekből tíz, a legközelebbi magasabb rend egy egységét teszi.* A különböző rendű egységek kellő megkülönböztetés céljából külön-külön nevet is viselnek, *u. m. egyes, tízes, százas, ezres stb.*

Ha egytől kezdve fölfelé számlálok, mikor a tízhez érek, ebben a számban már 10 eredeti egység gyűlt össze; a fenti szabály szerint ez a tíz egység az egyesekből a legközelebbi magasabb rend egy egységét teszi; az egyesek után következő magasabb rend a tizeseké, mondhatjuk tehát, hogy *tíz egyes tesz egy tízest.* Ugyanezen szabály szerint *10 tízes tesz egy százast, 10 százas 1 ezrest, 10 ezres 1 tízezres, 10 tízezres 1 százezrest, 10 százezres 1 millióst, 10 milliós 1 tízmillióst, 10 tízmilliós 1 százmilliót, 10 százmilliós 1 ezermilliót vagy milliárdost stb.*

Az elmondottak érvényesek a számok leírására is.

Hogy az ismeretes tíz arab számjeggyel bármily nagy számot leírhassunk, megállapították, hogy *bármely számjegy jobbról az első helyen egyeseket, egy-egy hellyel balfelé tovább állva pedig tízszer-tízszer többet jelentsen, mint a közvetlen megelőző helyen jelentene;* úgy, hogy bármelyik számjegy jobbról balra menve a második helyen annyi tízest, a harmadik helyen annyi százast, a negyedik helyen annyi ezrest stb. jelent, mint ahány egyest jelent az első helyen; pl. 222-ben a jobbról első helyen álló számjegy (a jobboldali végső számjegy): két egyest, az utána balra következő: két tízest (huszat) s az azután következő: két százast jelent, azaz a „2“ számjegy egy hellyel balra tovább írva mindig tízszer-tízszer többet. A 222-t így mondjuk ki: kétszázhuszonkettő. Hatvanötezer-négyszáznyolcvanöt leírva: 65,485. Hétmillió-nyolcszáznegyvenkilencezer-ötszázharminchét leírva: 7,849,537.

Az előbbiekből kitetszik, hogy a tízes rendszerben minden számjegynek kétféle értéke van: t. i. *alaki értéke,* mely éppen alakjánál fogva sajátja és *helyértéke,* melyet az általa elfoglalt hely ruház reá. Így a fenti példában mindahárom „2“ számjegy kettőt jelent, csakhogy az egyik helyen két egyest, a másik helyen két tízest s a harmadik helyen két százast.

Ha valamelyik rend egységeiből egy sincs, annak a rendnek a helyére „0“-t (zérót) írunk, mely számjegynek különben magányosan nincs értéke; pl. egyezer-egyet így írunk le: 1001; nyolcszáz-hét leírva: 807; tízezer-háromszáz leírva: 10,300.

Az egész számok kimondását nagyon megkönnyíti, ha belőlük vesszővel *három-három számjegyből álló csoportokat* képezünk, amidőn is a jobboldali első hármas csoportban az egyszerű egyesek, tizesek és százasok; a balra következő csoportban az ezreseknek egyesei, tizesei és százasai; a harmadik csoportban a milliósoknak egyesei, tizesei, százasai; a negyedik csoportban a milliárdosoknak egyesei,

milliók ezresek

tizesei, százasai stb. foglalnak helyet; pl. 875,424,756 annyi mint: 875 millió, 424 ezer, hétszázötvenhat; 23,074,500,090 annyi mint: 23 milliárd, 74 millió, 500 ezer, kilencven.

2. Tizedes törtek.

Ha egy, a tízes rendszerben leírt számot szemügyre veszünk, azt látjuk, hogy *minden számjegy egy hellyel jobbra írva csak tizedrészét jelenti annak, amit az előbbi helyen jelentett.* Ha e szabály szerint a számsort az egyeseken tul is folytatjuk, azaz egy egyest tíz egyenlő részre osztunk: *tizedrészt* nyerünk. Egy ily tizedrészt tekinthetünk alsóbb rendű egység gyanánt s elosztjuk ismét tíz részre; egy ily rész neve azonban — minthogy az egész egységnek már csak századrészét tartalmazza — *századrész.* A tízzel való osztást így folytatva tovább *ezredrészt, tízezredrészt* stb. nyerünk.

Minthogy az egy egész elosztásából s a további osztásból származó számjegyek az egész egységnek csak részeit tartalmazzák, ennélfogva törtek — még pedig, mivel a tizedes rendszer szabályai szerint származtak: *tizedes törtek.* Ez a neve megmarad a számnak akkor is, ha a törtrészeket jelentő számjegyek mellett egészeket jelentő számjegyek is vannak benne. Hogy az oly számok leírásánál, melyekben tizedes törtrészeket jelentő számjegyek is vannak, megtudjuk, hogy hol végződnek az egészek s hol kezdődnek a törtrészek: az egyes helyen álló számjegy s az első tizedes jegy közötti hézag felső részébe egy pontot, az u. n. *tizedes pontot* tesszük; pl. ezt a számot: huszonöt egész, egy tizedrész, így írjuk le: 25·1.

Ha a tizedes számjegyek mellett egészeket jelentő számjegyünk nincs, akkor a le rásnál *az egészek hiányát egy „0"-val* meg kell jelölnünk s utána a tizedes pontot föltennünk, különben a tizedes számjegyek tizedesi mivoltát nem tüntethetnénk föl. Pl. Harminchét századrészt így írunk le: 0·37.

Az előbbiekből következik, hogy tizedes törteknél külön kell meghatározni az egészeket s külön a tizedes törtrészeket jelentő számjegyek helyértékét, még pedig mindkettőét a *tizedes ponttól kiindulva,* csakhogy *az egészekét balra s a törtekét jobbra menve;* pl. ebben a számban: 222222222·222222 a helyértékek a következők:

egészek										tizedesek					
2	2	2	2	2	2	2	2	2	·	2	2	2	2	2	2
százmilliós	tízmilliós	milliós	százezres	tízezres	ezres	százas	tízes	egyes	tizedes pont	tizedrész	századrész	ezredrész	tízezredrész	százezredrész	milliomodrész

Az előbbi számot így mondjuk ki: kétszázhuszonkétmillió-kétszázhuszonkétezer-kétszázhuszonkét *egész,* kétszázhuszonkétezer-kétszázhuszonkét *milliomodrész.*

A leírt tizedes jegyek kimondásánál kettőre kell ügyelnünk:

1. hogy kimondjuk azt a számot, amelyet a tizedes számjegyek külön leírva kitennének;

2. hogy annyiadrésznek mondjuk ki, ahányadrész a helyértéke a (jobboldali) utolsó számjegynek.

Pl. 0·275-nél a tizedes számjegyek külön leírva 275-öt tesznek s mivel az ötös helyértéke „ezredrész“, így mondjuk ki a számot: kétszázhetvenöt ezredrész. 0·0048-nál a tizedes jegyek külön leírva 48-at tesznek, a 8-as helyértéke „tízezredrész“, a számot tehát így mondjuk ki: negyvennyolc tízezredrész.

A kimondott tizedes szám leírásánál viszont figyelnünk kell arra, hogy:

1. leírjuk azt a számot, amit kimondunk;

2. úgy írjuk le, hogy az utolsó számjegy helyértéke az legyen, ahányadrésznek a számot kimondtuk.

Pl. Hetvenkét egész, ötszáztizenhét százezredrészt így írunk le: 72·00517; hogy az utolsó számjegy helyértéke a megkivánt lehessen, a kimondható tizedes jegyek elé megfelelő számú „0“-t írunk.

Ha a leírt egész szám elébe balról, vagy a tizedes tört tizedes jegyei után jobbról zérót teszünk, ez a szám értékén nem változtat, mert a számjegyek helyértéke ezzel nem változik; pl.

034 annyi, mint harmincnégy; 0015·6800 annyi, mint tizenöt egész, hatvannyolc századrész. Ugyanezért az így felesleges zérókat le sem írjuk, vagy ha éppen számolásnál az eredményben kijöttek volna — elhagyjuk.

4. §. A mértékek.*)

1. A mértékekről általában.

A mértékek arra valók, hogy velök a mennyiségeket összehasonlítván (megmérvén) azokat számokban kifejezhessük. Aszerint, hogy a mennyiségek a térben és időben (tér- és időmennyiségek) terjednek ki: vannak *tér- és időmértékek.*

A térmennyiségek mérésére szolgálnak: a *hossz-, terület- (tér-), test- és darab-mértékek.* A hosszmértéket az egy irányban kiterjedő térmennyiségeknek: a vonaloknak, a térmértéket a két irányban kiterjedőknek: a síkoknak vagy lapoknak s a testmértéket a három irányban kiterjedő mennyiségeknek: a testeknek a mérésére használjuk. Testmérték van kétféle t. i. *köb- (űr-) mérték és súlymérték;* ezeket felváltva aszerint használjuk, amint a testeknek térfogatára vagy sulyára vagyunk tekintettel.

A darabmértéket (a darab szerint való számbavételt) mindennemű térmennyiségnél használjuk.

Az időmennyiségek mérésére szolgál a *másodperc, elsőperc* (vagy csak *perc*), *óra, nap, hét, hónap* és *esztendő* (vagy *év*).

A nap (az időmérték) a napnak (az égi testnek) egyik delelésétől a másikig terjedő időköz. A nap delelése alatt azt az időpontot értjük, amidőn az felettünk útjának legmagasabb pontján van. A napnak egy huszonnegyedrésze az óra. Egy óra = 60 elsőperc = 3,600 másodperc; egy perc (vagy elsőperc) = 60 másodperc. Egy évben van 12 hónap vagy 52 hét vagy 365 (szökőévben 366) nap. Egy hétben van 7 nap, de csak 6 munkanap. Számításoknál egy hónapban 4 hetet vagy 30 napot veszünk.

2. A térmennyiségek régi (bécsi) mértékei.

Az 1876. év első napjáig — amidőn a méterrendszer életbelépett — Magyarországon a következő mértékek voltak s részben még most is vannak alkalmazásban.**)

---

*) A megmutatható mértékek megismertetése el nem mulasztandó.

**) Csak a manapság is emlegetetteket sorolom elő.

a) Hosszúság mérésére az öl (jele: ^{0}) szolgált; ennek alrészei a láb (^{I}), a hüvelyk (^{II}), a vonal (^{III}) és a pont (^{IV}). Egy ölben van 6 láb vagy 72 hüvelyk vagy 864 vonal; egy lábban van 12 hüvelyk vagy 144 vonal; 1 hüvelykben van 12 vonal.

A földmérésnél az öl 10 lábra, a láb 10 hüvelykre s a hüvelyk 10 vonalra van osztva s az előbbi beosztástól való megkülönböztetés céljából az alrészek *mezei láb-, hüvelyk- és vonal*-nak neveztetnek.

Nagyobb hosszúság, illetve távolság mérésére a mértföldet (4,000 öl) használták. Kereskedők mértéke jobbára a rőf volt. Lovak mérésére a marok szolgált.

b) A terület mértékének egysége a négyzetöl ($\square^0$) volt. *1600*$\square^0$ *tesz 1 kataszteri holdat,* 1200$\square^0$ pedig 1 magyar holdat. *Hazánkban a földterület hivatalos mértéke még jelenleg is a kataszteri hold, illetve négyzetöl.*

c) A köb- (űr-) tartalom régi mértéke a köböl, a bécsi és pozsonyi mérő, a bécsi és magyar akó, a pint, az itce és a meszely volt.

d) A súly mérésére a bécsi fontot, latot és mázsát használták.

3. A méterrendszer.

Régente minden országnak külön mértékei voltak. A nemzetek közötti, mindinkább sűrűbb érintkezés, főleg a kereskedelem terén már régóta érezhetővé tette az egyenlő mértékek hiányát. A méternek, mint nemzetközi mértéknek használatba hozatala a francia nemzetet dicsőiti. A méter a természetből van véve s bármikor ismételten meghatározható hosszúság; *a méter u. i. földgömbünk egy déllője északi negyedének tízmilliomodrésze.* Az eredeti méter (egy iridium-platina rúdon két vonással megjelölt távolság Páris mellett Sèvresben nemzetközi költségen fentartott intézetben van. Erről mérte le egy bizottság a magyar országos levéltárban őrzött, szintén iridium-platina rúdra jelölt métert.

A méter a hosszmérték alapegysége ugyan, de belőle vannak a méterrendszer másnemű mértékei is leszármaztatva. A mértékegység többszörösei és alrészei minden mértéknemnél a tízes rendszer szabályai szerint (10, 100, 1000 és 10000-el való szorzás, illetve osztás által) képezvék. Az elnevezésben a tízszeres mértékegység kifejezésére „*deka*“ (jele: *dk*), a százszoroséra „*hekto*“ *(h),* az ezerszeresére *„kilo“ (k)*, a tízezerszeresére *„miria“ (μ)* szót teszünk a mértékegység neve elé; a mértékegység tizedrészének kifejezésére a *„deci“ (d)*, századrészére a *„centi“ (c)* s ezredrészére a *„milli“ (m)* szó szolgál.

A mértékek írásbeli jelölése nemzetközi megállapodás szerint minden nyelven, írásban és nyomtatásban egyaránt, latin, írott (kurzív), kis betűkkel történik; az egy jelöléshez tartozó betűk összefüggésben írandók le, utánok pont vagy más írásjel nem teendő, a számoktól jobbra, azokkal egy sorba, tizedes törteknél az utolsó tizedes számjegy után írandók.

A méterrendszer mértékei a következők:

a) HOSSZMÉRTÉK.*)

Egysége: a *méter* (jele: *m*)

10,000 *m* = 1 miriaméter	(*μm*)	A mértékegység többszörösei.
1,000 *m* = 1 kilométer	(*km*)	
100 *m* = 1 hektométer	(*hm*)	
10 *m* = dekaméter	(*dkm*)	
0·1 *m* = 1 deciméter	(*dm*)	A mértékegység alrészei.
0·01 *m* = 1 centiméter	(*cm*)	
0·001 *m* = 1 milliméter	(*mm*)	

Másként:

1 *m* = 10 *dm* = 100 *cm* = 1000 *mm*
1 *dm* = 10 *cm* = 100 *mm*
1 *cm* = 10 *mm*.

b) TERÜLETMÉRTÉK.

Egysége a *négyzetméter* (jele: m^2) azaz olyan derékszögü négyszög, melynek minden oldala 1 *m*.

10,000 m^2 = 1 hektár	(*ha*)	A mértékegység többszörösei.
100 m^2 = 1 ár	(*a*)	
0·01 m^2 = 1 négyzetdeciméter	(dm^2)	A mérték-egység hányadrészei
0·0001 m^2 = 1 négyzetcentiméter	(cm^2)	
0·000,001 m^2 = 1 négyzetmilliméter	(mm^2)	

*) Vegyük elő a métervesszőt (méterest), azon meg vannak jelölve a méter alrészei mind.

Másként:

$1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10{,}000\ cm^2 = 1{,}000{,}000\ mm^2$
$1\ dm^2 = 100\ cm^2 = 10{,}000\ mm^2$
$1\ cm^2 = 100\ mm^2$.

c) KÖBMÉRTÉK.

Egysége a *köbméter* (jele: m^3), azaz olyan kocka, melynek minden éle 1 *m*.

$0{\cdot}001\ m^3 = 1$ köbdeciméter (dm^3)	A mértékegység hányadrészei.	
$0{\cdot}000{,}001\ m^3 = 1$ köbcentiméter (cm^3)		
$0{\cdot}000{,}000{,}001\ m^3 = 1$ köbmilliméter (mm^3)		

Másként:

$1\ m^3 = 1{,}000\ dm^3$ (vagy 1,000 liter) $= 1{,}000{,}000\ cm^3 =$
$= 1{,}000{,}000{,}000\ mm^3$
$1\ dm^3 = 1{,}000\ cm^3 = 1{,}000{,}000\ mm^3$
$1\ cm^3 = 1{,}000\ mm^3$
$1\ m^3$-ben van $= 10\ hl = 1{,}000\ l$.

d) ŰRMÉRTÉK.

Egysége: a *liter* (jele: *l*) *annyi mint 1* dm^3.

$1{,}000\ l = 1$ kiloliter (kl)	A mértékegység többszörösei.
$100\ l = 1$ hektoliter (hl)	
$10\ l = 1$ dekaliter (dkl)	
$0{\cdot}1\ l = 1$ deciliter (dl)	A mértékegység alrészei.
$0{\cdot}01\ l = 1$ centiliter (cl)	
$0{\cdot}001\ l = 1$ milliliter (ml)	

Másként:

$1\ l = 10\ dl = 100\ cl = 1{,}000\ ml$
$1\ dl = 10\ cl = 100\ ml$
$1\ cl = 10\ ml$.

e) SÚLYMÉRTÉK.

Egysége a *gramm* (jele: *g*), *annyi mint 1* cm^3 *4 Celsius-fokú lepárolt víznek a súlya.*

$1{,}000\ g = 1$ kilogramm (kg)	A mértékegység többszörösei.
$100\ g = 1$ hektogramm (hg)	
$10\ g = 1$ dekagramm (dkg)	

0·1 *g* = 1 decigramm (*dg*)
0·01 *g* = 1 centigramm (*cg*)
0·001 *g* = 1 milligramm (*mg*) } A mértékegység alrészei.
100 *kg* = 1 métermázsa (*q*)
1,000 *kg* = 1 tonna (*t*) } A *kg* többszörösei.

Másként:

1 *g* = 10 *dg* = 100 *cg* = 1,000 *mg*
1 *dg* = 10 *cg* = 100 *mg*
1 *cg* = 10 *mg*
1 *kg* = 10 *hg* = 100 *dkg* = 1,000 *g*.

1 kg = 1 dm^3 (vagyis 1 liter) 4^0 C lepárolt víz súlya.
1 *hl* lepárolt víz 100 *kg*-ot vagyis 1 *q*-át,
1 m^3 pedig 1,000 *kg*-ot vagyis 10 *q*-át nyom.
A természetes víz valamivel nehezebb.
Az alábbi táblázat a mértékeket átnézetesen mutatja be.

A mérték neme	Az egység többszörösei				Egység	Az egység alrészei		
	10,000	1,000	100	10		0·1	0·01	0·001
Hosszmérték . .	μm	km	**hm**	**dkm**	m	dm	cm	mm
Területmérték .	ha	—	a	—	m^2	—	dm^2	—
Köbmérték . . .	—	—	—	—	m^3	(hl)	(dkl)	dm^3 (l)
Űrmérték . . .	—	**kl** (m^3)	hl	**dkl**	l	dl	cl	**ml**
Súlymérték .	—	kg	hg	dkg	g	dg	cg	**mg**
	—	t	q	—	kg	hg	dkg	g

Megjegyzés: az életben egyáltalában nem, vagy ritkán használt mértékek vastagabban vannak nyomva.

4. A térmennyiségek régi (bécsi) és jelenlegi (méter) mértékei közötti viszony.

Hosszmértékek:

1° = 1·89648 *m*
1′ = 0·31608 *m*
1″ = 2·634 *cm*
1 osztrák (posta) mértföld = 4,000 öl = 7·5859 *km*.
1 rőf = 0·777 *m*
1 marok (lómérték) = 10·536 *cm*
1 *m* = 0·52729 öl = 3·16375 láb.

Térmértékek

1 $\square^{0}$ = 3·5966 m^2
1 kataszteri hold (1,600 $\square^{0}$) = 5,755 m^2 = 0·5755 *ha*
1 magyar hold (1,200 $\square^{0}$) = 4,316 m^2 = 0·4316 *ha*
1 m^2 = 0·27804 $\square^{0}$
1 *ha* = 1·738 kat. hold = 2,780·4 $\square^{0}$
1 magyar hold = 0·75 kat. hold
1 kataszteri hold = 1·33333 magyar hold.

Köb- és ürmértékek

1 bécsi mérő = 0·6149 *hl*
1 pozsonyi mérő = 0·6253 *hl*
1 bécsi akó = 0·5659 *hl*
1 magyar akó (64 itczés) = 0·543 *hl*
1 bécsi pint = 1·4147 *l*
1 magyar itce = 0·8484 *l*
1 köböl = 6·821 m^3
1 köbláb = 0·0316 m^3
1 m^3 = 0·1466 köböl = 31·6669 köbláb

Súlymértékek

1 bécsi font = 0·56006 *kg*
1 bécsi lat = 17·502 *g*
1 bécsi mázsa = 56·006 *kg*
1 vámfont = 0·5 *kg*
1 vámlat = 16·666 *g*
1 vámmázsa = 50 *kg*

Azt a számot, amely mutatja, hogy egyik mérték egy egysége, a másik nemű mértékben mennyit tesz, „*átszámítási tényező*“-nek hívjuk. 1^0 = 1·89648 *m*, tehát az ölnek *m*-ré való változtatásánál az átszámítási tényező: 1·89648. Ha valamely mértéket át akarunk számítani más fajta mértékre, pl. kat. holdat *ha*-ra, azt úgy tesszük meg, hogy az átszámítandó mértékegységek számát megszorozzuk az átszámítási tényezővel. (Erről bővebben a 7. §. szól.)

5. Az arany- vagy korona-értékű pénz.

Az 1896. évi január 1.-től az Osztrák-Magyar Monarchiában törvényes erejű pénzérték: a korona-(arany-)érték. Ennek a pénznek az egysége a korona (*K*), mely 100 fillérre (*f*) oszlik.

Koronaértékű pénzdarabok a következők veretnek:

1. aranyból: 20 koronás és 10 koronás;
2. ezüstből: 1 koronás és 5 koronás;
3. nikelből: 20 filléres és 10 filléres;
4. bronzból: 2 filléres és 1 filléres.

A régi (osztrák értékű) pénz egysége: a forint *(frt)*, melyben 100 krajcár (*kr*) van.

1 *frt* = 2 *K*; 1 *kr* 2 = *f*.

1 *K* = 0·5 *frt*; 1 *f* = 0·5 *kr*.

ELSŐ SZAKASZ.

EGÉSZ SZÁMOKKAL ÉS TIZEDES TÖRTEKKEL VALÓ SZÁMOLÁS.

I. FEJEZET.

A NÉGY ALAPSZÁMMŰVELET (ÖSSZEADÁS, KIVONÁS, SZORZÁS ÉS OSZTÁS) NEVEZETLEN ÉS EGYNEVÜ SZÁMOKKAL.

5. §. Az összeadás.

Az összeadásnál olyan számot keresünk, amelyben annyi egység van, mint két vagy több adott számban együttvéve. Az adott számokat *„összeadandók“*-nak, az eredményül nyert számot *„összeg“*-nek hívjuk. 6 meg 8 meg 3 annyi mint 17. Itt a 6 a 8 meg a 3 az összeadandók, a 17 pedig az összeadás eredménye: az összeg. Az összeadás jele álló kereszt (+); kimondani e jelet „meg“, „plus“ (plus = több) vagy „hozzáadva“ szóval szoktuk.

Irásban az összeadandók és az eredmény lehetnek egymás mellett vagy egymás alatt. Az egymás mellé írt összeadandók közé a keresztet mindig oda kell tenni, míg ha a számok egymás alá vannak írva s vonás van alájuk húzva, az már magában véve azt jelzi (ha egyéb jel nincs mellettök), hogy össze kell azokat adni, s így a + elmaradhat.

Egymás mellé való írásnál*) az összeadandók és az összeg közé az egyenlőség jelét (=) tesszük. Ezt a jelt használjuk a mennyiségtanban mindenütt, ahol két vagy több egyenlő értékű mennyiség egyenlő voltát föl akarjuk tüntetni. Az egyenlőség jelét (=) úgy mondjuk ki, hogy „egyenlő“ vagy „annyi mint.“ Ha az összeadandók egymás alá vannak írva, akkor egy egyenes vonalat húzunk alattok s e vonal alá írjuk az összeget.

*) A gyakorlatban sokszor előfordulván az egymás mellé írt számoknak összeadása is, ebből kifolyólag ez is kellően gyakorlandó.

Az összeadás következőleg történik: 9 + 3 + 2 = 14. Kimondva: (balról jobbra): 9 meg 3 = 12; 12 meg 2 = 14; vagy (jobbról balra): 2 meg 3 = 5; 5 meg 9 = 14.

Egymás alá írva a számokat:

$$\left.\begin{array}{r} 8 \\ 9 \\ 7 \end{array}\right\}\text{össze-adandók} \qquad \begin{array}{r} \underline{} \\ 24 \end{array}\Big\}\text{összeg}$$

Kimondva: 8 meg 9 = 17; 17 + 7 = 24 (felülről lefelé); 7 + 9 = 16; 16 + 8 = 24 (alulról fölfelé).

Több számot tehát úgy adunk össze, hogy először kettőt összeadunk, az ezekből nyert összeghez adjuk a harmadik számot, az így nyert összeghez a negyediket stb.

Több számjegyből álló számok összeadásánál arra kell ügyelnünk, hogy csak egyenlő helyértékű számjegyeket adjunk egymáshoz. Hogy ez ellen ne véthessünk, legcélszerűbb a számokat úgy irni egymás alá, hogy az egy helyértékűek egymás alá kerüljenek. Ha bármily okból egymás mellé írt számokat kell összeadnunk, akkor a helyértékre minden számjegynél külön kell figyelmet fordítanunk.

$$\left.\begin{array}{r} 483 \\ 512 \\ 675 \end{array}\right\}\text{össze-adandók} \qquad \begin{array}{r} \underline{} \\ 1{,}670 \end{array}\Big\}\text{összeg}$$

Az összeadást mindig a legalacsonyabb helyértékű számjegyeken kezdjük; itt az egyeseken: 5 + 2 = 7; 7 + 3 = 10 = 0 egyes és 1 tizes; a 0-t leírjuk az egyesek oszlopa alá, az 1 tizest pedig hozzáadjuk a többi tizes számjegyhez (mondván: marad 1); 1 + 7 = 8; 8 + 1 = 9; 9 + 8 = 17 = 7 tizes meg 1 százas, a 7-t leírjuk a tizesek alá, az 1-t pedig a százasokhoz adjuk (marad: 1); 1 + 6 = 7; 7 + 5 = 12; 12 + 4 = 16 = 6 százas meg 1 ezres, amit leírunk. Az eredmény lesz tehát: egyezer hatszázhetven.

Kellő gyakorlat mellett csakis az összeget, meg a maradékot mondjuk ki, így: 5, 7, 10, marad 1 (a 0-t leírjuk); 8, 9, 17, marad 1 (a 7-et leírjuk); 7, 12, 16 (leírjuk).

Egymás mellé írt számoknál az eljárás ugyanez. 35 + 17 + 343 + 78 = 473 [8 + 3 = 11, 11 + 7 = 18, 18 + 5 = 23, (a 3-at leírjuk) marad 2; 2 + 7 = 9, 9 + 4 = 13, 13 + 1 = 14, 14 + 3 = 17, (a 7-et leírjuk) marad 1; 1 + 3 = 4 (leírjuk).]

Tizedes törtek összeadásánál az eljárás ugyanez azzal a különbséggel, hogy az összegben is föl kell tenni a tizedes pontot az „egyes“ és a „tizedrész“ helyértékü számjegyek közé; pl.

342·35	16·475	2·87 + 41·5 = 44·37
14·853	0·03	
1,572·0074	2·8	65·06 + 0·879 = 65·939
1,929·2104	35	
	54·305	

Az összeadás eredményének: az összegnek helyességét úgy vizsgáljuk meg, hogy a műveletet ellenkező irányban ismételjük. Nem valószinű ugyanis, hogy a számok másféle csoportosításánál ugyanazt a hibát ujólag elkövetjük.

Itt egyszer és mindenkorra megjegyezzük, hogy bármilyen számtani műveletet hajtottunk is végre s bármilyen jól tudunk is számolni, ha minden kétséget kizáró, pontos eredményt akarunk, addig sohase elégedjünk meg az eredménnyel, míg a műveletet *vagy meg nem próbáltuk vagy esetleg meg nem ismételtük,* mert semmiben sem oly könnyű hibázni, mint a számolásban. Még ily vigyázat mellett is megtörténik, hogy hiba csúszik a számításunkba.

Összeadni csak egynevű számokat lehet. Megnevezett számok összeadásánál tehát úgy teszünk, hogy együvé írjuk (egymás alá) az egynevűeket s aztán úgy adjuk össze, mint ha nevezetlen számok volnának; az összeg neve természetesen ugyanaz, ami az összeadandóké.

Példák.

1. Valakinek van 17,546 db. tölgy, 8,763 juhar s 87,500 erdei fenyő csemetéje; hány csemetéje van összesen?

17,546	
8,763	
87,500	Van: 113,809 csemetéje.
113,809	

2. Van valakinek három beerdősítendő területe, az egyik 13·74 kataszteri hold s az erdősítése számítás szerint bele fog kerülni 123·66 koronába, a másik 2·83 k. hold belekerül 33·96 K-ba, a harmadik 0·97 k. hold belekerül 17·46 K-ba; hány k. holdat kell összesen beerdősíttetnie s mennyi lesz reá az összes kiadása?

13·74 k. hold	123·66 korona
2·83 „ „	33·96 „
0·97 „ „	17·46 „
17·54 k. hold	175·08 korona.

Az összes beerdősítendő területe tehát: 17·54 k. hold s az összes kiadása: 175·08 korona.

3. Hány *hl* makkunk van, ha három csoport munkással gyűjtettünk s az első csoport 9·75 *hl*-t, a második 13·04 *hl*-t s a harmadik 17 *hl*-t gyűjtött? (van 39·79 *hl*.)

4. Az 1897. évben telepített valamely erdő melyik évben kerül vágás alá, ha 35 éves korában kell kihasználni? (Az 1932. évben).

5. Valamely ötszögű udvar oldalai a következő hosszúak: 35·7 *m*, 42·8 *m*, 28·6 *m*, 32·9 *m* és 29·8 *m*; hány méter hosszú kerítés kell ennek az udvarnak? (169·8 *m* hosszú.)

6. A magyar állam területén volt az 1895. évben: 4,239,582 k. hold tölgy, 8,259,364 k. hold bükk és más lombfa, 3,268,422 k. hold fenyőerdő; mennyi volt az összes erdőterület ebben az évben? (15,767,368 k. hold volt.)

6. §. A kivonás.

A kívonásnál mindig csak két adott számból olyan harmadikat keresünk, amelyik az adottak kisebbikével együtt az adottak nagyobbikával egyenlő. — Ha 9-ből elveszek (kivonok) 5-öt, marad 4. A 4 a kivonás eredménye; a 4 az 5-höz adva annyi mint 9.

Azt a számot, amelyikből kivonunk: „*kisebbítendő*“-nek s amelyiket az előbbiből kivonjuk: „*kivonandó*“-nak, a művelet eredményét pedig: „*maradék*“-nak vagy „*különbség*“-nek hívjuk. Az előbbi példában 9 a kisebbítendő, 5 a kivonandó és 4 a maradék vagy különbség.

A kivonás jele rövid fekvő vonás (—); ezt a jelt mindig a kivonandó elébe tesszük. Kimondása „kivonva“ vagy „minus“ (= kevesebb) szóval történik.

Az adott két számot és az eredményt írhatjuk egymás mellé*) vagy egymás alá; utóbbi célszerűbb. Egymás alá írásnál legfelülre írjuk a kisebbítendőt, alá a kivonandót s legalúlra a maradékot; a kívonandó és a maradék közé egyenes vonalat húzunk, ugy mint az összeadandók s az összeg közé az összeadásnál.

*) Az életben az egymás mellé írt számok kivonása is sokszor előfordulván, ez is kellően gyakorlandó.

A kivonás jele (—) a kivonandó elé teendő. Egymás mellé írásnál először a kisebbítendőt írjuk le, azután a — jelet, utána a kivonandót; a kivonandó után = jelet teszüuk s aztán írjuk csak le a különbséget.

A kivonás a következőleg történik: $8 - 3 = 5$. Kimondva: 8 minus $3 = 5$, vagy 8-ból kivonva 3-at marad 5, vagy $3 + 5 = 8$. A legutolsó eljárás a legcélszerűbb; ennél oly számot keresünk, mely a kivonandóhoz (a 3-hoz) adva a kisebbítendőt (a 8-at) adja, ez az 5, ez lesz a különbség vagy maradék.

$$\begin{array}{r} 7 \\ -\,3 \\ \hline 4 \end{array}$$

A művelet végrehajtásánál így beszélünk: 3 meg 4 az 7, (a 4-et mint különbséget leírjuk). A különbség nem változik, ha mind a kisebbítendőhöz, mind a kivonandóhoz ugyanazt a számot adjuk vagy mindkettőből ugyanazt a számot kivonjuk.

Pl. $\begin{array}{r} 9 \\ -\,3 \\ \hline 6 \end{array}$ $\begin{array}{r} (9+4=) \\ (3+4=) \end{array}$ $\begin{array}{r} 13 \\ -\,7 \\ \hline 6 \end{array}$ vagy $\begin{array}{r} (13-2=) \\ (7-2=) \end{array}$ $\begin{array}{r} 11 \\ -\,5 \\ \hline 6 \end{array}$

Több számjegyű számok kivonásánál ügyelnünk kell arra, hogy csakis egyenlő helyértékű számjegyeket vonjunk ki egymásból, ugyanezért legjobb, ha a számokat úgy írjuk egymás alá, hogy az egy helyértékűek egy függélyes sorba essenek.

$$\begin{array}{r} 879 \\ -\,534 \\ \hline 345 \end{array}$$

A kivonásnál úgy járunk el, hogy a kivonandó minden egyes számjegyét — kezdve mindig a legalacsonyabb helyértékűnél — külön kivonjuk a kisebbítendő ugyanolyan helyértékű számjegyéből s a talált különbséget egyenként leírjuk. A művelet menete szavakban ez: $4 + 5 = 9$ (az 5-öt leírjuk); $3 + 4 = 7$ (a 4-et leírjuk); $5 + 3 = 8$ (a 3-at leírjuk). Vagy:

$$\begin{array}{r} 716 \\ -\,402 \\ \hline 314 \end{array}$$

Szavakban: $2 + 4 = 6$ (a 4-et leírjuk); $0 + 1 = 1$ (az 1-et leírjuk); $4 + 3 = 7$ (a 3-at leírjuk.)

Abban az esetben, ha a kivonandó valamelyik számjegye nagyobb a kisebbítendő ugyanolyan helyértékű számjegyénél, úgy járunk el, hogy az utóbbihoz 10-et adunk s így vonjuk le belőle a kivonandó számjegyét; hogy azonban a különbség (a végeredmény) meg ne változzék, a kivonandó legközelebbi magasabb helyértékű számjegyéhez 1-et adunk s úgy vonjuk ki a felette levőből. (Azért adunk csak 1-et, nem pedig 10-et, mert az előbb a kisebbítendőhöz adott 10 a legközelebbi magasabb rendű helyen csak 1-et teszen.) Ezt a hozzáadást megtehetjük, mert — mint előbb láttuk — a különbség ugyanaz marad, ha ugyanazt a számot adjuk mind a kisebbítendőhöz, mind a kivonandóhoz. Pl.

$$\begin{array}{r} 854 \\ -\ 736 \\ \hline 118 \end{array}$$

A kivonás menete ez: $6+8=14$ (a 8-at leírjuk), marad 1; $(1+3=)\ 4+1=5$ (az 1-et leirjuk); $7+1=8$ (az 1-et leírjuk).

Vagy:

$$\begin{array}{r} 2{,}345 \\ -\ 1{,}879 \\ \hline 466 \end{array}$$

Mondva: $9+6=15$ (a 6-ot leírjuk), marad 1; 8 meg $6=14$ (a 6-ot leírjuk), marad 1; 9 meg $4=13$ (a 4-et leírjuk), marad 1; 2 meg $0=2$ a 0-t nem írjuk le, minthogy a szám előtt úgy sem jelent semmit.

Egymás mellé írt számoknál a művelet menete ugyanez, pl. $8{,}513-6{,}974=1{,}539$ $(4+9=13$, marad 1; $8+3=11$, marad 1; $10+5=15$ marad 1; $7+1=8)$.

A kivonás eredményének, a maradéknak helyességét úgy vizsgáljuk meg, hogy utóbbihoz hozzáadjuk a kivonandót; ha a kivonás helyes, az összegnek a kisebbítendővel egyenlőnek kell lenni. A következő néhány példában ez a próba meg van csinálva.

A tizedes törtek kivonása éppen úgy megy, mint az egész számoké azzal a különbséggel, hogy a maradékban az egész és tizedes számjegyek közé szintén föl kell tennünk a tizedespontot; pl.

$$\begin{array}{r} 374{\cdot}85 \\ -\ 89{\cdot}37 \\ \hline 285{\cdot}48 \\ +\ 89{\cdot}37 \\ \hline 374{\cdot}85 \end{array}\Bigg\}\text{ próba} \qquad \begin{array}{r} 2{,}050{\cdot}0807 \\ -\ 807{\cdot}502 \\ \hline 1{,}242{\cdot}5787 \\ +\ 807{\cdot}502 \\ \hline 2{,}050{\cdot}0807 \end{array}\Bigg\}\text{ próba} \qquad \begin{array}{r} 895{\cdot}73 \\ -\ 0{\cdot}9765 \\ \hline 894{\cdot}7535 \\ +\ 0{\cdot}9765 \\ \hline 895{\cdot}7300 \end{array}\Bigg\}\text{ próba}$$

Megnevezett számok kivonásánál arra kell ügyelnünk, hogy *csakis egynevű számokat lehet egymásból kivonni;* a maradék neve egyezik az egymásból kivont két száméval. A művelet különben ugyanaz, mint a nevezetlen számoknál.

Példák:

1. Két erdőőr közül az egyik 18·9 *km*-re, a másik 23·5 *km*-re lakik az erdőgondnoksága székhelyétől; hány *km*-rel lakik

közelebb egyik a másiknál; mennyivel kevesebb idő alatt jut el a közelebb lakó a székhelyre, ha ő 3·8 óra alatt odaér, míg a másiknak erre 4·6 órára van szüksége?

23·5 *km* — 18·9 „ 4·6 *km*	Az első közelebb lakik 4·6 *km*-el, mint a másik.
4·6 óra — 3·8 „ 0·8 óra	A közelebb lakó 0·8 órával (48 perccel) kevesebb idő alatt jut el.

2. Valaki 1800 K évi jövedelméből elkölt 1655 K 56 f-t; mennyit takarít meg évente? (Megtakarít 144·44 K-t.)

3. Az 1848. évben telepített erdő, hány éves az 1900. évben? (52 éves.)

4. A magyar állam területén az 1895. évben volt: 4,239,582 k. hold tölgy, 8,259,364 k. hold bükk és más lombfa s 3,268,422 k. hold fenyőerdő; mennyivel volt több a lombfa a fenyvesnél? (9,230,524 k. h.-al.)

5. Van 135,400 db. akáccsemeténk; 13·68 k. hold vágásunknak beültetésére csak 78,729 csemete kell, a többit eladhatjuk; mennyit adhatunk el? (Eladhatunk 56,671 csemetét.)

6. 3·68 k. holdnyi tisztásnak kocsányos tölggyel való bevetéséhez (makkrakással) szükségünk van 4·42 *hl* makkra, de nincs csak 2·78 *hl* makkunk; hány *hl*-t kell még beszereznünk? (Be kell még szereznünk 1·64 *hl*-t.)

7. Egy m^3 nyers bükkfa súlya 1,010 *kg* s egy m^3 nyers símafenyőé 730 *kg;* mennyivel könnyebb utóbbi az előbbinél? (280 *kg*-al könnyebb.)

8. Valaki 38 éves volt, mikor az atyja 72 éves korában meghalt; hány évvel volt idősebb az atyja? (34 évvel.)

9. Két fuvaros közül az egyik egy napon szállított 0·85 m^3 rönköt s kapott bérűl 5 K 10 f-t, a másik nap 1·06 m^3 rönkő szállításáért kapott 6 K 36 f-t; a másik fuvaros az első nap 0·97 m^3 rönkő szállításával keresett 5 K 82 f-t s a másik napon 0·86 m^3-el 5 K 16 f-t; mennyivel fuvarozott többet az egyik a másiknál (0·08 m^3-rel) s mennyi a különbség a pénzkeresményben? (0·48 K.)

10. Egyik erdőőr vett négy szarvasmarhát: 130·00, 115·00, 96·00 illetve 107·00 koronáért egyet-egyet. A marhákat 3 hónapig tar-

totta' illetményes legelőjén; fogadott hozzájok pásztorfiút, akinek 54 K-t fizetett. A három hó mulva eladta a négy jószágot 585 K 50 f-ért; mennyit nyert rajtok, ha még a marhák vásárról való haza s az eladáskor ismét a vásárra való hajtásáért együttesen fizetett 2 K 40 f-t is számítja? (A nyereséget megkapjuk, ha az összes bevételből kivonjuk az összes kiadást. A nyereség = = 81·10 K.)

7. §. A szorzás.

Szorozni annyit tesz, mint valamely számot annyiszor venni összeadandóul, mint ahányszor azt egy másik adott szám mutatja.

9-et szorozni 5-el annyi mint 9 + 9 + 9 + 9 + 9 ami 45-öt ad. Ezt azonban nem így összeadással, hanem szorzással szoktuk megfejteni.

Az első számnak (9) „*szorzandó,*" a másiknak (5) „*szorzó*", a szorzás eredményének (45) pedig „*szorzat*" a neve. A szorzandót és szorzót (9 és 5) a szorzat „*tényezői*"-nek is hívjuk.

A szorzás jele ferde kereszt (×); ezt a jelt a szorzandó és szorzó közé szoktuk írni. Kímondása: „szorozva" vagy „-szer, -szor, -ször."

5 × 3 = 15 Kimondva: 5 szorozva 3-al = 15, vagy 5-ször 3 = 15. Ez tulajdonképpen nem egyéb, mint 5 háromszor összeadandóúl véve, azaz: 5 + 5 + 5, ami szintén 15-öt tesz. A szorzásra tehát azt is mondhatjuk, hogy az rövidített összeadás. A példában a szorzandó az 5, a szorzó a 3 és a szorzat a 15.

A szorzat ugyanaz marad, ha a tényezőket helyeikre nézve megcseréljük; pl. 3 × 5 az szintén 15.

A leírásnál szabály az, hogy baloldalra mindig a szorzandót írjuk s vele egy sorba a × után a szorzót.

A szorzást az úgynevezett „egyszeregy" segélyével hajtjuk végre. Az egyszeregy táblázat, amely az értékes kilenc számjegynek (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) egymással való szorzatát tartalmazza; legrövidebb összeállítása (gyakorlásra célszerű formában) a következő:

9 × 9 = 81	8 × 8 = 64	7 × 7 = 49	6 × 6 = 36
9 × 8 = 72	8 × 7 = 56	7 × 6 = 42	6 × 5 = 30
9 × 7 = 63	8 × 6 = 48	7 × 5 = 35	6 × 4 = 24
9 × 6 = 54	8 × 5 = 40	7 × 4 = 28	6 × 3 = 18
9 × 5 = 45	8 × 4 = 32	7 × 3 = 21	6 × 2 = 12
9 × 4 = 36	8 × 3 = 24	7 × 2 = 14	6 × 1 = 6
9 × 3 = 27	8 × 2 = 16	7 × 1 = 7	
9 × 2 = 18	8 × 1 = 8		
9 × 1 = 9			
			5 × 5 = 25
		4 × 4 = 16	5 × 4 = 20
	3 × 3 = 9	4 × 3 = 12	5 × 3 = 15
2 × 2 = 4	3 × 2 = 6	4 × 2 = 8	5 × 2 = 10
2 × 1 = 2	3 × 1 = 3	4 × 1 = 4	5 × 1 = 5

10 × 10 = 100
10 × 100 = 1,000
100 × 100 = 10,000
1,000 × 1,000 = 1,100,000

Bármely számnak zéróval való szorzata zéró.

Az egyszeregy-et fennhangon kell tanulni s úgy, hogy két-két számnak egymással való szorzását a szorzattal együtt többször ismételjük egymás után, hogy végre a nyelvünk mintegy magától rámenjen bármely két szám kimondása után a megfelelő szorzatra, mert az egyszeregyet úgy kell tudni, hogy azon gondolkozni nem is szabad.

(Sok kezdő vagy gyenge számolónak az a rossz szokása van, hogy a szorzásnál mindig a kisebb tényezőt teszi előre s igy képezi a szorzatot, pl. nem mondja soha, hogy 9 × 4 = 36, hanem mindig csak 4 × 9 = 36, legyen bár a 9-es a szorzóban s a 4-es a szorzandóban; aki így tesz, az sohase fogja jól tudni az egyszeregyet. Az előbb leirt egyszeregy erre való tekintettel van összeállitva.)

A tanulásnál a tényezők helyre nézve meg is cserélendők, minthogy két-két szám szorzata csak egyszer fordul elő.

A szorzási művelet végrehajtása a következő: Először is a szorzandó alá egyenes vonalat húzunk; aztán megszorozzuk a szorzóval (4-el) a szorzandó minden egyes számjegyét külön s az egyes szorzatokat rész-

$$\begin{array}{r} \underline{572} \times 4 \\ 2{,}288 \end{array}$$

ben leirjuk, részben a következő magasabb helyértékü számjegyből nyerendő szorzathoz való hozzáadás céljából megtartjuk. A példánál így hajtjuk végre a szorzást: 4 × 2 egyes = 8 egyes (a 8-ast leirjuk a 2-es alá, mint 8 egyest jelentő számjegyet); 4 × 7 tízes = 28 tízes (= 8 tízes meg 2 százas, a 8-at leirjuk a már leírt 8-tól balra a tizesek helyére, a 2 százast pedig megtartjuk); 4 × 5 százas = 20 százas (= 0 százas meg 2 ezres, ehhez hozzáadva az előbb maradt 2 százast, lesz: 2 százas meg 2 ezres, amit leirunk.)

2,896 × 7	Röviden mondva: 7 × 6 = 42 (a 2-t leirjuk) marad 4;
20,272	7 × 9 = 63, meg 4 az 67 (a 7-et leirjuk) marad 6;
	7 × 8 = 56, meg 6 = 62 (a 2-t leirjuk) marad 6;
	7 × 2 = 14, meg 6 = 20 (leirjuk).

641 × 35
1923
3205
22,435

Ha a szorzó is több jegyből álló szám, akkor a következőleg járunk el. A szorzó minden egyes számjegyével — kezdve a legnagyobb helyértékün — külön megszorozzuk a szorzandót, úgy mint fentebb tettük az egyjegyü szorzóval, az igy nyert részlet-szorzatokat egymás alá irjuk s összeadjuk; az összeg lesz az adott két szám szorzata. A részletszorzatok leirásánál azonban figyelnünk kell arra, hogy minden részletszorzat jobboldali végső számjegye olyan helyértékü, mint amilyen a helyértéke a szorzó azon számjegyének, amellyel való szorzás utján éppen az illető részletszorzatot kaptuk, (a példánál 30 × 1 vagy 1 × 30 = 3 tizes és 5 × 1 vagy 1 × 5 = 5 egyes); ugyanazért, hogy az összeadásnál a részletszorzatok egyenlő helyértékü számjegyei egymás alatt legyenek, a leirásnál minden részletszorzatot annyi hellyel jobbra kijjebb kell kezdeni, ahány hellyel áll jobbra a szorzóban neki megfelelő számjegy az első számjegytől.

Ha a szorzó számjegyei közt „0" van, akkor ezzel nem szorzunk, de a következő számjegyből nyert szorzatot a „0" vagy esetleg „0"-kra való tekintettel irjuk az előbbi részletszorzat alá, azaz annyi hellyel kijjebb, ahány hellyel jobbra van az a szorzó számjegy az előbbi értékes szorzó számjegytől. Igy a részletszorzatok egyenlő helyértékű számjegyei egymás alá kerülnek; pl.

1,872 × 306	2,907 × 8004	35 × 1001
5616	23256	35
11232	11628	35
572,832	23,267,628	35,035

Az 1. példában $300 \times 2 = 600$, a hatos tehát százas; $6 \times 2 = 12$, az ebből leirt kettős pedig egyes, amit a 6 százastól két hellyel kell jobbra irni. A 2. példában $8000 \times 7 = 56,000$, a hatos tehát ezres; $4 \times 7 = 28$, a nyolcas egyes s igy a 6 ezresnél három hellyel irandó kijjebb.

Több számot egymással úgy szorzunk össze, hogy először összeszorzunk két számot, a nyert szorzatot szorozzuk a harmadik számmal, az ebből nyert szorzatot a negyedikkel stb.; pl. $25 \times 14 \times 8 \times 6 = ?$

$$\begin{array}{r} 25 \times 14 \\ \hline 25 \\ 100 \\ \hline 350 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 350 \times 8 \\ \hline 2,800 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2,800 \times 6 \\ \hline 16,800 \end{array}$$

Tehát: $25 \times 14 \times 8 \times 6 = 16,800$.

Tizedestörttel — akár a szorzandó, akár a szorzó, akár pedig mindkettő az — úgy szorzunk, mint az egész számokkal, hanem a művelet végén *a szorzatban annyi tizedes jegyet vágunk el, mint amennyi van a szorzandóban és szorzóban együttvéve.* Pl.:

$$\begin{array}{r} 8·05 \times 3 \\ \hline 24·15 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9,300 \times 86·02 \\ \hline 74400 \\ 55800 \\ 18600 \\ \hline 799,986·00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1·008 \times 56·36 \\ \hline 5040 \\ 6048 \\ 3024 \\ 6048 \\ \hline 56·81088 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0·007 \times 720 \\ \hline 49 \\ 14 \\ \hline 5·040 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0·56 \times 230 \\ \hline 112 \\ 168 \\ \hline 128·80 \end{array}$$

Ha a már meglevő szorzatból a kívánt számú tizedes számjegy nem telik ki, akkor balról a szükség szerinti mennyiségü „0"-val pótoljuk a szorzatot; pl.:

$$\begin{array}{r} 0·041 \times 0·0065 \\ \hline 246 \\ 205 \\ \hline 0·0002665 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0·00508 \times 2·06 \\ \hline 1016 \\ 3048 \\ \hline 0·0104648 \end{array}$$

Egyszerűsítések a szorzásnál.

a) *Szorzás 10, 100, 1000 stb.-vel.*

Egész számot 10-el, 100-al, 1000-el, 10,000-el stb. úgy szorzunk, hogy a szorzandó számhoz annyi „0"-t irunk, mint amennyi a szorzó 10, 100 stb.-ben van; pl. 482 × 10 = 4,820; 23 × 100 = 2,300; 901 × 1000 = 901,000; 80 × 100 = 8,000.

Tizedes törtet 10-el, 100-al, 1000-el stb. úgy szorzunk, hogy a tizedes pontot annyi hellyel tesszük jobbra a számban, ahány „0" van a szorzó 10, 100, stb.-ben. Ha szükséges, a számhoz jobbra „0"-kat irunk; pl.:

8·76 × 10 = 87·6; 93·56 × 1000 = 93,560;
0·0806 × 100 = 8·06; 2·3 × 1000 = 2,300;
0·00042 × 100 = 0·042; 6·795 × 10 = 67·95.

Ez az eljárás szorosan összefügg a tizedes rendszernek azzal a szabályával, hogy bármely számjegy egy-egy hellyel balra irva tízszer-tízszer többet jelent, mint a megelőző helyen. Egy, kettő, három stb. zérónak hozzáirása vagy a tizedes-pontnak 1, 2, 3, stb. hellyel való jobbra tétele ugyanis a számnak minden számjegyét 1, 2, 3 stb hellyel tolja balra, ami által minden számjegy 10, 100, 1000 stb.-szer (amennyi t. í. a szorzó) nagyobb lesz.

b) *Szorzás 0·1, 0·01, 0·001 stb.-vel.*

0·1, 0·01, 0·001 stb.-vel *egész számot* úgy szorzunk, hogy 1, 2, 3, stb. tizedes-jegyet vágunk el a számból, pl. 342 × 0·01 = = 3·42 vagy 23 × 0·001 = 0·023.

Tizedes tört szorzásánál pedig a tizedes pontot tesszük 1, 2, 3, stb. hellyel balra, pl. 87·42 × 0·1 = 8·742 vagy 5·73 × 0·01 = = 0·0573.

c) *Ha a tényezők végen zérók vannak.*

Ha a szorzandó vagy a szorzó végén zéró vagy zérók vannak, akkor a szorzást ezek elhagyásával hajtjuk végre, a nyert szorzathoz azonban jobbról annyi „0"-t irunk, amennyi a két tényezőben együttesen van; pl.:

372 × 450	8050 × 36	1800 × 4900
1488	2415	72
1860	4830	162
167,400	289,800	8,820,000

d) *Ha a szorzó első számjegye „1“.*

Ha a szorzó balra eső első számjegye „1“, akkor a szorzandó alá nem húzunk vonalat, hanem úgy tekintjük, mint az „1“-el való részletszorzatot, amiből kifolyólag a következő részletszorzatot kellőkép kijjebb kezdve irjuk alá s a szorzás után a többi részletszorzathoz hozzáadjuk; pl.:

8512 × 18·5	3·900 × 1·06	8·06 × 1·52
68096	234	4030
42560	4·13400	1612
15,7472·0		12·2512

A szorzás próbája.

```
(7) (8) (5)
58·75 × 0·896
47000
 52875
  35250
52·64000
   (8)
```

A szorzás helyességét az ú. n. kilences próbával vizsgáljuk meg, amely a példán végrehajtva következő: Csupán alaki értéküket tekintve, összeadjuk először a szorzandó számjegyeit: 5 + 8 + 7 + 5 = 25; a nyert összeg (25) számjegyeit újólag összegezzük s ezt az összeadogatást addig folytatjuk, mignem az összeg már csak egy számjegyből áll: 2 + 5 = 7; a 7 már csak egy számjegy, tehát a szorzandóval készen vagyunk. Ugyanezt megtesszük a szorzóval is: 8 + 9 + 6 = 23; 2 + 3 = **5**. Most a szorzandóból nyert 7 és a szorzóból nyert 5 számjegyet összeszorozzuk: 7 × 5 = 35 s az eredmény (35) számjegyeit ismét összeadogatjuk, mig egy jegyet nyerünk: 3 + 5 = **8** — amit megjegyzünk. Erre a szorzat számjegyeit adjuk össze mindaddig, mig egy számjegyünk lesz belőle: 5 + 2 + 6 + 4 = 17; 1 + 7 = **8**. Ha már most a szorzandóból és szorzóból nyert egy számjegy egyenlő a szorzatból nyerttel, akkor a szorzás helyes. Példánknál a szorzandó és szorzóból 8-at s a szorzatból szintén 8-at nyertünk, e szorzás tehát helyes.

Kilences próbának ezt az eljárást azért nevezik, mert az összeadogatásnál a 9-es számjegyet s azokat, amelyeknek összege 9, a próba helyességének kockáztatása nélkül elhagyhatjuk; pl.

$89{\cdot}354 \times 2{\cdot}76$ 178708 625478 536124 $246{\cdot}61704$	A szorzandóban a 9, 5 és 4 (mint hogy $5+4=9$), a szorzóban a 2 meg a 7 ($2+7=9$), a szorzatban a 2, 4, 1, 7, meg a 4 ($2+7=9$; $4+1+4=9$) elhanyagolhatók, lesz tehát a próba:

a szorzandóból : $8+3=11$; $1+1=2$,
a szorzóból : 6,
a két eredmény szorzata: $2\times6=12$; $1+2=\underline{3}$;
a szorzatból: $6+6=12$; $1+2=\underline{3}$.

$3=3$, tehát a szorzás helyes.

Jó — bár a kilencesnél hosszadalmasabb — próbája a szorzásnak az is, ha a tényezőket helyeikre (s neveikre) nézve fölcseréljük s így ismételjük a szorzást; a két eredménynek egyenlőnek kell lenni. Az előbbi példában 2·76 szorozva 89·354-el szintén 246·61704-et ad.

Megnevezett számok szorzása.

Megnevezett számok szorzására nézve megjegyzendő, hogy a két szorzási tényező (szorzandó és szorzó) közül mindig csakis az egyik lehet megnevezett szám, a másiknak elvontnak kell lennie; ha tehát olyan a feladványunk, hogy benne mindkét tényezőnek van neve, akkor mindig annak a tényezőnek tartjuk meg a nevét, amilyen nevű eredményt keresünk. Egyébként a megnevezett számokkal való szorzás egyenlő a nevezetlenekével.

Példák.

1. 57·8 öl hány méter?

Megfejtés: 1 öl = 1·896 *m* (a többi tízedes jegyet elhanyagolva), 57·8 öl 57·8-szer több; ha tehát 1·896 *m*-t megszorozzuk 57·8-el, megkapjuk az eredményt.

Itt ismételjük azt a szabályt, amit már a 4. §. 4. cime végén elmondtunk, hogy t. i. *egyik fajta mértéket úgy változtatjuk másik fajta mértékre, hogy az átszámítandó mérték egységeinek a számát megszorozzuk az átszámítási tényezővel.*

```
 1·896 × 57·8
 9480
 13272
   15168
109·5888
```

Tehát 57·8 öl = 109·5888 *m*.

A céltól illetve az ezzel összefüggő pontosságtól függ már most, hogy az eredményt használandjuk-e teljességében vagy a legalacsonyabb helyértékű számjegytől kezdve egyet vagy többet elhagyunk belőle. A fenti példában, minthogy már az 1·89648-ból is elhagytuk az utolsó két számjegyet, megelégszünk az eredményben is a méter ezredrészeivel; az utolsó számjegyet tehát, mint céljainkhoz feleslegeset elhagyjuk.

Ezt az elhagyást akként szoktuk eszközölni, hogy ha a még megtartandó utolsó számjegy után *közvetlenül* 0, 1, 2, 3 vagy 4 következik, akkor a megtartandó számjegyeket úgy hagyjuk, ahogy vannak, ha ellenben az első elhanyagolandó számjegy 5,*) 6, 7, 8 vagy 9, akkor a megtartott számjegyek utolsóját 1 egységgel nagyobbnak vesszük. Így a fenti példában három tizedes jeggyel megelégszünk ugyan, de mivel az ezredrészek helyén álló 8-as után 8-as következik, előbbit 9-nek vesszük; a megtartott (kikerekített) eredmény tehát 109·589 *m* lesz. Ezt az 1-et, amit a megtartott utolsó számjegyhez adunk, *javításnak* vagy *pótlásnak* hívjuk, az eljárást pedig a szám vagy *számok kikerekítésének*. Ha a fenti példában csak egész *méterekre volna szükségünk, akkor 110 m-t vennénk* számításba, minthogy az elhanyagolt első számjegy: az 5-ös, még megadja az 1 javítást.

2. 23·4 láb hány *m*? (= 7·394 *m*); 9·67 mértföld hány *km?* (= 73·357 *km*); 825·9 *m* hány öl? (= 435·249 öl); 4·67 *m* hány öl? (= 2·461 öl); 93·54 k. hold hány *ha?* (= 53·8323 *ha*); 52·4786 *ha* hány k. hold? (= 91·21 k. h.); 122·45 magyar hold hány kat. hold? (= 91·84 k. h.); 25·6 bécsi font hány *kg?* (= 14·34 *kg*); 458·72 frt hány K? (= 917·44 K); 5,847·06 K hány frt? (= 2,923·53 frt.)

3. 15·78 k. hold vágásunkat be akarjuk ültetni 1·5 *m* sor- és 1·0 *m* csemete távolságban lúccsemetékkel; hány csemete kell

*) Az 5-öst illetőleg ugyan egyenlő a hiba akár veszünk tőle pótlást akár nem; minthogy azonban az 5 után még *többnyire* következik értékes számjegy, amellyel együtt az 5 félnél (1/2-nél) többet tesz: ezért általában joggal veszünk tőle javítást.

hozzá s mennyibe fog kerülni az erdősités, ha 1 hold 17 K 60 f-be kerül?

Megfejtés: 1 k. holdra kell 3,837 csemete, 15·78 k. holdra:

15·78 × 3,837

4734
12624
4734
11046

60,547·86

Kell tehát 60,548 csemete.

1 k. hold belekerül 17·6 K-ba, 15·78 k. h. annyiszor többe:

15·78 × 17·6
11046
9468

277·728

15·78 k. hold belekerül tehát 277·73 K-ba.

4. Egyik vágásban termeltek 2,857 *ür*-m^3 hasábfát, 879 *ür*-m^3 dorongfát és 476 *ür*-m^3 galyfát; mennyit ér a vágás fatömege, ha a hasábfa *ür*-m^3-e 4·25 K, a dorongfáé 2·78 K s a gallyfáé 0·85 K?

Megfejtés:

2,857 × 4·25 = 12,142·25
879 × 2·78 = 2,443·62
476 × 0·85 = 404·60

14,990·47 korona az értéke a vágásban termelt fának.

5. 250,000 egy éves lúccsemete átiskolázásához felhasználtatott 95....0·70 K-ás, 105....0·90 K-ás és 102....1·10 K-ás napszám; mennyibe került az átiskolázás? (273·20 K-ba került.)

6. 42·7 *m* hosszú ültető zsinór hány öl hosszú? (22·5 öl hosszú.)

7. 25·89 kat. holdnyi bükkállomány hány *ha* kiterjedésű s mennyi az állomány fatömege, ha egy *ha*-on 355 m^3 fa van? (14·8997 *ha* kiterjedésű s fatömege 5,289·4 m^3.)

8. 7·658 *ha*-nyi réten hány *q* szénatermésre számíthatunk, ha 1 kat. hold hasonló minőségű réten 22 *q* széna szokott teremni? (Számíthatunk 292·82 *q* szénára. — Először kiszámítandó, hogy hány kat. holdat tesz a rét.)

9. Hány *kg*-ot nyom 23·05 m^3 lúcfenyő épületfa, ha 1 m^3 légenszáradt lúc épületfa súlya 430 *kg?* (9,911·5 *kg*-ot nyom.)

10. Hány tömörköbmétert *(m^3)* tesz 85·5 ürköbméter *(ür-m^3)* nyers bükk hasábfa, ha egy *ür-m^3*-ben 0·748 m^3 fát számítunk? (63·95 m^3-t tesz.)

Ürköbméter vagy egyszerűen csak űrméter (jele: *ür-m^3*) a neve az olyan köbméternek, amelynél a köbméternyi térfogatot nem tölti ki tökéletesen az az anyag (fa, szén, kéreg stb.) ami benne van, hanem üres helyek is maradnak közben. A tömörköbméternél vagy egyszerűen köbméternél (jelölése: tömör m^3, *t.* m^3 vagy csak m^3) az anyag teljesen kitölti a köbméternyi térfogatot.

11. Hány m^3 fa van 17·8 *űr-m^3* nyers nyír dorongfában, ha 1 *űr-m^3*-ben 0·65 m^3 van? (Van 11·57 m^3.)

12. Két csoport munkás szedett lucfenyő tobozt, az egyik 23·6 *hl*-t, a másik 31·9 *hl*-t; hány *kg* magunk lesz az egész tobozmennyiségből, ha 1 *hl* toboz átlag 1·5 *kg* szárnyatlan magot ad? (Lesz 83·25 *kg*.)

13. Egy folyó méter (hosszméter) másfél (= 1·5) *m* magas sövénykerítés elkészítéséhez kész anyagból, jó viszonyok közt 0·08 napszám szükséges; hány napszám kell 126 *m* hosszú ilyen kerítéshez s mennyibe fog kerülni az elkészítés, ha egy napszámot 1 koronával számítunk? (Belekerül 10·08 K-ba.)

14. 1000 db. 3 éves lúccsemete felneveléséhez 25 *g* vetőmag s 2·5 m^2 megművelt terület szükséges; hány *g* vetőmag s hány m^2 megművelt terület kell 47,000 ilyen csemete felneveléséhez? (Kell 1,175 *g* mag s 117·5 m^2 terület.)

15. 1000 db. 3—4 éves lúccsemetének kapával való, közönséges elültetéséhez kedvezőtlen viszonyok közt 3·5 napszám szükséges. Hány csemete kell 8·72 k. hold vágásnak beültetéséhez, ha 1 k. h.-ra 5,755 csemete kell; hány napszám kell az elültetéshez s mennyibe kerül a terület beerdősítése, ha egy napszámot 0·85 K-val számítunk?

Megfejtés: 5,755 × 8·72 = 50,184 csemete kell a területre; 1000 csemete elültetéséhez 3·5 napszám kell, 50,184 csemetéhez: 50·184 × 3·5 = 175·64 napszám; 1 napszám 0·85 K, 175·64 napszám: 175·64 × 0·85 = 149·29 K. A terület beerdősítése tehát belekerül 149 K 29 f-be.

Itt megjegyzendő, hogy hasonló esetben, *amidőn valamely* *adat nem egy, hanem ezer egységre vonatkozik,* mint a példában a napszámszükséglet 1,000 csemetére: úgy teszünk, hogy csakis annyi csemetét írunk egész számnak, amennyi egész ezrünk van, a százakat tevő csemetéket pedig tizedrésznek (minthogy száz az ezernek tizedrésze), a tízeket tevőket századrésznek (tíz az ezernek századrésze) s az egyeseket tevőket ezredrésznek (egy az ezernek ezredrésze) vesszük (másként mondva: a csemeték mennyiségét elosztjúk ezerrel) s az így nyert számmal számítunk. Igy a fenti példában 50,184 csemete helyett 50 egész (ezer) s 184 ezredrészt (50·184) veszünk s e számmal szorozzuk az egy egész ezerre vonatkozó adatot, a 3·5-et. Ugy is tehetünk, hogy az 50·184-gyel mint egész számmal szorzunk, hanem akkor az eredményt kell ezerrel elosztanunk. Hasonlóan járunk el, ha valamely adat 100 egységre vonatkozik (l. a 20. példát); ekkor csak az egész százat írjuk egésznek, a tizest tizedrésznek s az egyest századrésznek, illetve 1000 helyett 100-zal osztunk.

16. 1000 db. 4—5 éves iskolázott lomblevelü csemetének kapával való elültetéséhez jó viszonyok közt 8 napszám szükséges; hány napszám kell *a)* 8,750 db.; *b)* 275 db. elültetéséhez? (8,750-hez kell: 8·75 $\times$ 8 s *b)* 275-höz: 0·275 $\times$ 8 napszám.)

17. Hány m^2 terület szükséges 650 db. 4 éves iskolázott szelidgesztenye csemete fölneveléséhez, ha 1000 csemetéhez 150 m^2 kell? (97·5 m^2 szükséges.)

18. Bizonyos munkánál valaki 1·6 K napi bérért dolgozik; mennyit keres 3 hét alatt? (3 hét = 18 munkanap — 28·8 K-át keres.)

19. Mennyi 256 k. hold erdőnek *a)* egy tized része (0·1 része)? (25·6 k. hold); *b)* hat tized része (0·6 része)? (153·6 k. h.); *c)* egy századrésze (0·01 része)? (2·56 k. h.); *d)* négy századrésze (0·04 része)? (10·24 k. h.); *e)* huszonöt század része (0·25 része)? (64 k. h.); *f)* hetven század része (0·70 része? (179·2 k. h.)

Valamely számnak tizedes törtben kifejezett hányadrészét megkapjuk, ha azt a számot a hányadrészt jelentő tizedes törttel megszorozzuk; pl. 476-nak 0·38 része (harmincnyolc század része) = 476 $\times$ 0·38 = 180·88; vagy 54-nek 0·02 része (két század része) = 54 $\times$ 0·02 = 1·08; vagy 97-nek 0·1 része (egy tized része) = 97 $\times$ 0·1 = 9·7; vagy 8·703-nak 0·01 része (egy század része) = 8·703 $\times$ 0·01 = 0·08703; vagy 0·36-nak 0·20 része (húsz század része) = 0·36 $\times$ 0·20 = 0·072.

20. Hány koronába kerül egy negyed kat. holdnyi (400 □ ^{0})

területnek félméternyi mélyen való megforgatása, kövek, gyökerektől való kitisztogatása s begereblyézése, ha 100 m^2-enként jó viszonyok közt két férfi napszám szükséges s ha egy napszám 1·2 K?

Megfejtés: 1 □° = 3·6 m^2; 400 □° = 400 × 3·6 = 1,440 m^2; 100 m^2-hez kell 2 napszám, 1,440 m^2-hez kell 14·40 × 2 = 28·8 napszám (1,440 m^2 = 14 egész (száz) s 4 tizedrész (száz) m^2 (Lásd a 14. példát); 1 napszám 1·2 K, 28·8 napszám = 28·8 × 1·2 = 34·56 korona; ennyibe kerül a negyed hold megforgatása.

21. Csemetekertünkben 5 ágyban van 2 éves lúcfenyő csemete. Az ágyak hossza 6 *m*, szélessége 1 *m*, az ágyakon keresztbe menő csemetesorok egymástól való távolsága 15 *cm*. Minden ágyban van 40 sor s egy sorban van átlag 145 db. csemete; hány csemeténk van összesen?

Megfejtés: 1 sorban van 145 csemete, 1 ágyban vagyis 40 sorban van 40 × 145 = 5,800 csemete, s 5 ágyban (minthogy minden ágyban egyformán van) 5 × 5,800 = 29,000 csemete.

Vagy másként: összesen 5 × 40 = 200 sorunk van; 1 sorban 145 csemete lévén, a 200 sorban van: 200 × 145 = 29,000 csemete.

22. 100 m^2 talajnak 30—40 *cm* mélyen ásóval való első megműveléséhez 1·8 férfinapszám szükséges. Mennyibe fog kerülni 4,317 m^2-nek (= háromnegyed k. hold) ilynemű megművelése, ha a férfi napibér 1·05 K? (815·91 K-ba fog kerülni.)

23. 1000 db. 2 éves fenyőcsemetének ültető fával való átiskolázásához 1·3 asszonynapszám szükséges. Mennyibe fog kerülni 20,906 csemete átiskolázása 95 fillér napibér mellett? (25·82 K-ba fog kerülni.)

24. 1000 db. 1 éves kocsányos tölgy csemete felneveléséhez 6 m^2 megművelt terület s igen jó makkból 8 liter kell. Hány liter makkot kell beszereznünk s hány m^2 területet kell a vetéshez előkészitenünk, ha 28,750 csemetét akarunk nevelni? (A makk 230 *l*, a terület 172·5 m^2.)

25. 2 *m*-es négyes hálóban 1 k. holdra 1,439 csemete kell. Hány csemetével lehet 9·08 k. holdat beültetni s hány korona költséggel, ha 1000 db. 4 éves luccsemete elültetéséhez 3 napszám szükséges s ha a napibér 85 f? (A csemete 13,066 db. a költség 33·32 K.)

8. §. Az osztás.

Osztani annyit tesz, mint két adott számból olyan harmadikat keresni, amelyben annyi egység van, mint a hányszor az egyik adott számban: az *„osztandó“*-ban, a másik adott szám: az *„osztó“* megvan; pl. 8 osztva 2-vel annyi mint 4, mert 8-ban a 2 megvan 4-szer.

Vagy másként: osztani annyi, mint valamely számot (az osztandót) annyi egyenlő részre osztani, mint ahány egység egy másik számban (az osztandóban) van; pl. 8 osztva 2-vel annyi mint 4, mert 8 két egyenlő részre osztva 4-et ad.

Az osztás eredményének a neve: *„hányados;“* ez az előbbi példában a 4.

Az osztás jele kettős pont (:). Kimondása „osztva“ vagy „osztandó“ szóval történik.

Irásban előre tesszük az osztandót s utána írjuk sorban: a kettős pontot, az osztót, az egyenlőség jelet s végül a hányadost. 12 : 3 = 4. Tizenkettő osztva hárommal = négy. 12 = az osztandó, 3 = az osztó és 4 = a hányados. 3 a 12-ben megvan négyszer, tehát az eredmény (a hányados) 4, vagy az osztás másik értelmezése szerint: 12-őt 3 egyenlő részre kell osztanunk s minthogy 4 tesz 3-szor véve 12-őt, tehát a hányados 4.

Az osztandónak az osztó és a hányados tényezői; azaz ha a két utóbbit összeszorozzuk, nyerjük az osztandót; pl. 24 : 6 = 4; 6 × 4 = 24 vagy 15 : 3 = 5; 3 × 5 = 15.

Az osztást nem hajthatjuk mindig úgy végre, hogy az osztó és hányados szorzata éppen kiadja az osztandót; pl. 20 : 3 = 6; 6 × 3 = 18; vagyis a húszból 3 hat egységet tevő rész telt ki, de még megmaradt 2 egység, ezt *„maradék“*-nak hívjuk.

1. Egész szám osztása egész számmal.

a) 8,4, : 4 = 21 Az osztást az osztandó legmagasabb hely-
b) 12,8, : 4 = 32 értékű számjegyén kezdjük, megnézvén, hogy hányszor van meg benne az osztó s ahányszor megvan, azt a számot a hányadosban első helyre leírjuk. Ha az első számjegyben nincs meg az osztó, akkor a két első számjegyet összefoglaljuk s ebben keressük egyszerre. Hogy meddig vettük már

osztás alá az osztandót, azt a már osztás alá került utolsó számjegy mellé írt vonással jelöljük. A fenti példákat így fejtjük meg:

a) 8 tizes osztva 4 felé = 2 tizes (az egyenlőség jele után leírjuk); 4 egyes osztva 4 felé = 1 egyes (a 2-ős után leírjuk.)

b) 12 tizes (minthogy egy százas 10 tizest tesz) osztva 4 felé = 3 tizes (leírjuk a hányadosba); 8 egyes osztva 4 felé = 2 egyes (leírjuk).

E két példából látható, hogy a hányados valamely számjegyének helyértéke az, ami a hányados éppen kérdéses számjegyének nyerésekor az osztandóban osztás alá vett szám utolsó számjegyéé. Igy *a)*-nál a 4 egyes osztásából 1 egyest s *b)*-nél az 1 százas és 2 tizesből (12 tizesből) 3 tizest nyertünk a hányadosban. Ezt tudva, az osztásnál a számok helyértékét nem is emlegetjük, hanem röviden csak így osztunk:

a) 4 a 8-ban megvan 2-szer (leírjuk); 4 a 4-ben megvan 1-szer (leírjuk).

b) 4 a 12-ben megvan 3-szor (leírjuk); 4 a 8-ban megvan 2-szer (leírjuk.)

c) 9,6,4,5, : 5 = 1929
— 5
46
— 45
14
— 10
45
— 45

Ha az osztás alá kerülő számjegyekben az osztó nincs meg maradék nélkül, akkor úgy teszünk, hogy a nyert hányados - számjeggyel megszorozzuk az osztót s a szorzatot kivonjuk az osztandónak osztás alá vett részéből; a maradékhoz hozzávesszük (levesszük) az osztandó következő számjegyét s az így nyert számot osztjuk tovább az osztóval s ezt az eljárást mindaddig folytatjuk, míg az osztandó mindegyik számjegyét el nem osztottuk.

A *c)* példában így járunk el: 5 a 9-ben megvan 1-szer (az 1-et leírjuk a hányadosba), 1 × 5 = 5, az 5-öt a 9-es alá írjuk s kivonjuk belőle, marad 4; a 4-hez hozzáírjuk az osztandó következő számjegyét a 6-ost s azt, hogy a 6-ot már osztás alá vettük, a 6-os mellé írt vonással jelöljük; most osztjuk a 46-ot 5-el: 5 a 46-ban megvan 9-szer (leírjuk), 9 × 5 = 45; 46 — 45 = 1; az 1-hez levesszük a 4-est, 5 a 14-ben megvan 2-szer (leírjuk), 2 × 5 = 10; 14 — 10 = 4; a 4-hez levesszük az 5-öt, 5 a 45-ben megvan 9-szer, (leírjuk), 9 × 5 = 45; 45 — 45 = 0.

Maradék tehát nincs.

d) 23,8,9, : 9 = 265
— 18
58
— 54
49
— 45
4

Ha az osztás végén maradékunk van, akkor ezt, ha az osztónak a felét nem teszi ki, figyelmen kivül hagyjuk, ha pedig, kiteszi, vagy annál nagyobb, akkor a hányados utolsó számjegyét javítással vesszük. A példában a 4 maradék kisebb a 9 osztó felénél (4·5-nél), tehát a hányados 265 marad.

Ennek az eljárásnak az az alapja, hogy ha a maradék az osztó felével egyenlő, akkor (az osztás folytatása esetében) a hányados következő számjegye 5-ös s ha a maradék az osztó felénél több, akkor az 5-ösnél nagyobb (ha a felénél kevesebb, akkor az 5-ösnél kisebb) számjegy lesz; a hányados előbbi számjegyéhez pedig az 5-ös és a nála nagyobb számjegy javítást ád. A következő nehány példánál föl van hiva a figyelem erre az elbánásra.

Maradék esetében folytathatjuk azonban az osztást tovább is, amidőn aztán tizedes számjegyeket nyerünk a hányadosban. Minden egész számot ugyanis úgy lehet képzelni, mintha az egyes helyen álló számjegy után ott volna a tizedes pont s utána a zéróknak egész sora (már amennyire éppen szükségünk van) következnék; pl. 365 így képzelhető 365·000 . . . . Osszunk el 365-öt 8-al hozzá képzelvén három zérót tizedesnek, ami az értékén nem változtat.

e) 36,5·,0,0,0, : 8 = 45·625
— 32
45
— 40
50
— 48
20
— 16
40
— 40

A 365-nek elosztása után marad még 5; a hányadosban ekkor 45 egészünk van. Pontos eredményre lévén szükségünk, az 5 maradékból nem javítást veszünk, hanem az osztást tovább folytatjuk, úgy, hogy a 365-höz hozzáírt zérók közül levesszük az elsőt az 5-höz. Most osztjuk az 50-t 8-al, megvan benne 6-szor. Minthogy az 5-höz írt zérónak helyértéke tizedrész, az 50-nek osztása által nyert 6-os számjegynek is tizedrésznek kell lennie a hányadosban (lásd az *a)* és *b*) példánál); hogy ez meglegyen, az eddigi hányados, a 45 után föltesszük a tizedes pontot. Ezután az osztást a maradékhoz zérók hozzáírásával addig folytatjuk, míg vagy maradékunk már nem lesz, vagy a hányados tizedeseinek a száma a kivánt pontossághoz elegendő.

Többször megtörténik, hogy oly maradékot kapunk, amely végtelenségig ismétlődik, ez esetben természetesen a hányadosban is folyton ugyanazt a számjegyet nyerjük. Ilyenkor az osztást addig folytatjuk, ameddig az elérendő pontosság kivánja s ha kell, az utolsó számjegyet pótlással (javítással) vesszük számitásba; pl.

```
 16,4,0, : 3 = 546·66 . . . . . . . .
— 15
   14
 — 12
    20
  — 18
     20
   — 18
      20
    — 18
       2
       .
       .
       .
```

Ha csak két tizedes jegyre van szükségünk, akkor 546·67-t veszünk számitásba, minthogy a századrészek helyén álló 6-os után ismét 6 következnék. (A 2 maradék a 3 osztó felénél több!)

Ha az osztó több számjegyből áll, az osztási művelet ugyanaz marad, mint ahogy eddig leírtuk, nehezedik azonban annyiban, hogy nagyobb osztónál bajosabb eltalálni, illetve kieszelni, hogy hányszor van meg az osztandóban.

```
 86,2,5, : 23 = 375
— 69
  172
— 161
   115
 — 115
```

Menete ez: 23 a 86-ban megvan 3-szor (ezt fejben így okoskodjuk ki: a két számot összehasonlitva egymással, látjuk, hogy úgy 3-szor, 4-szer van meg a 23 a 86-ban, most próbáljuk 4-el megszorozni fejben a 23-at: $4 \times 2 = 8$ $(4 \times 20 = 80)$; $4 \times 3 = 12$; $80 + 12 = 92$; $4 \times 23 = 92$; tehát a 23 nincs meg a 86-ban csak 3-szor) $3 \times 23 = 69$; $86 - 69 = 17$; hozzáírjuk a 2-őt, 23 a 172-ben megvan 7-szer stb.

Ha az osztás elején az osztó az osztandó annyi számjegyében, mint amennyiből az osztó áll — nincs meg, akkor egy számjeggyel többet foglalunk össze s úgy kezdjük az osztást.

Ha a számolásban már kellő gyakorlatunk van, akkor az osztás végrehajtásánál az osztónak a hányados egyenként nyert számjegyeivel való szorzatait nem írjuk le az osztandónak osztás alatt álló részlete alá, hanem a kivonást mindjárt fejben végezzük el s csakis a maradékot írjuk le; pl.: Mondva: 52 a

```
183,6,7, : 52 = 353
 276
  167
   11
```

183-ban megvan 3-szor (leírjuk a 3-at a hányadosba); 3 × 2 = 6; 6 + 7 = 13 (a 7-et leírjuk a 183-nak a 3-asa alá), marad 1; 3 × 5 = 15; 15 + 1 = 16; 16 + 2 = 18 (a 2-t leírjuk a 18 alá); a maradék tehát 27; ehhez levesszük a 6-ot, 52 a 276-ban megvan 5-ször, 5 × 2 = 10, 10 + 6 = 16 (a 6-ot leírjuk) marad 1; 5 × 5 = 25, 25 + 1 = 26, 26 + 1 = 27 (az 1-et leírjuk a 27 alá), a maradék tehát 16; levesszük a 7-et stb. (A 11 maradék kevesebb az 52 osztó felénél (26-nál), a hányados tehát javítás nélkül marad. A hányados következő számjegye (110 : 52 =) 2 lenne, ez pedig pótlást nem ád.)

```
72,1,4,5, : 68 = 1060·96
 414
   650
    380
     40
```

68 a 72-ben megvan 1-szer, a maradék 4; levesszük az 1-et, 68 a 41-ben nincs meg (vagy megvan 0-szor), a zérót beírjuk a hányadosba; levesszük a 4-et, 68 a 414-ben megvan 6-szor, marad 6; levesszük az 5-öt, 68 a 65-ben nincs meg, a zérót beírjuk a hányadosba stb. A 68 a 380-ban ugyan csak 5-ször van meg, de mivel a 40 maradék a 68 osztónak a felénél nagyobb: az 5-öst javítással 6-nak vesszük. (A hányados következő számjegye (400 : 68 =) 5-ös lenne.)

Különösen megjegyzendő, hogy abban az esetben, ha a maradékhoz már hozzávettük (levettük) az osztandó következő számjegyét s az osztó így sincs meg a részletosztandóban: ezt a hányadosban zéró bejegyzésével föl kell tüntetni, mert különben a hányados már meglevő számjegyének vagy számjegyeinek a helyértéke nem volna a kellő. Ha a példánál nem írtuk volna be (zéróval), hogy a 41-ben nincs meg a 68, akkor a hányados első számjegye, az 1-es nem lehetne ezres — aminek pedig lennie kell — hanem csak százas; ha nem jegyeztük volna be, hogy a 68 a 65-ben nincs meg, akkor a hányados 6-osa nem lehetne 10-es, hanem csak egyes, ami pedig hiba volna.

2. Tizedes tört osztása egész számmal.

Az eljárás ugyanaz, mint azt eddig leírtuk, csakis arra kell ügyelnünk, hogy ha az osztandóban átléptük a tizedes pontot vagyis mielőtt az osztandó első tizedes jegyét is osztás alá vennénk, a hányadosban is föl kell tennünk a tizedes pontot, (aminek magyarázatát a *d)* és *c)* példáknál már megadtuk).

68,7,·3,5,: 25 = 27·494 ;	0,·5,7,3,9, : 37 = 0·0155
187	203
123	189
235	4
100	
0,·0,0,8,6,: 13 = 0·000662	1,·8,9,: 4 = 0·4725
80	29
20	10
7	20

(A 7 a 13 felénél több, azért 2 a hányados végső jegye!)

3. Egész számnak és tizedes törtnek osztása tizedes törttel.

Itt előre kell bocsátanunk azt a szabályt, hogy ha mi mind az osztót, mind az osztandót ugyanazzal a számmal szorozzuk vagy osztjuk, ezáltal a hányados értéke nem változik; pl. 36 : 6 = 6. Szorozzuk meg mind az osztandót, mind az osztót pl. 4-el, lesz: (36 × 4 = 144; 6 × 4 = 24) 144 : 24 = 6; vagy osszuk el az utóbbi esetnél mind az osztandót, mind az osztót 3-al, lesz: (144 : 3 = 48; 24 : 3 = 8) 48 : 8 = 6. A szabály tehát áll.

Ha az osztó tizedes tört (mint a címben írva van), akkor osztani nem lehet. Hogy az osztást mindennek dacára végrehajthassuk, szorzás által egész számot csinálunk az osztóból; hogy azonban ezáltal a hányados értéke meg ne változzék, ugyanazzal a számmal, amellyel meg kellett szoroznunk az osztót, hogy belőle egész szám legyen, meg kell szoroznunk az osztandót is. Ezután oszthatunk a már ismert módon; pl. 365 : 2·6. Itt az osztót tízzel (10-el) kell megszorozni, hogy belőle egész szám legyen, lesz belőle 26 egész; most az osztandót is meg kell szorozni 10-el, lesz belőle 3650 egész s így aztán oszthatunk:

36,5,0, : 26 = 140·38	37 : 1·5
105	
100	37,0, : 15 = 24·67 . . . .
220	70
12	100
	10
	.
	.
	.
	.
26 : 0·49	12·365 : 6·5
260,0, : 49 = 53·06	123·,6,5, : 65 = 1·902
150	586
300	150
6	20
64·7 : 2·872	0·08 : 0·097
6470,0, : 2872 = 22·5	80 : 97 = 0·82
7260	800
15160	240
800	46

4. Egyszerűsítések az osztásnál.

a) Osztás 10, 100, 1000, stb.-vel.

Egész számot 10, 100, 1000, stb.-vel úgy osztunk, hogy az osztandó számból annyi jegyet vágunk el tizedesnek, ahány zéró van az osztó 10, 100, 1000, stb.-ben; ha a szám a kellő mennyiségű tizedes jegyet ki nem adja, elől zérókkal pótoljuk; pl. 362 : 10 = 36·2; 1872 : 100 = 18·72; 92 : 1000 = 0·092; 300 : 10 = = 30; 200 : 100 = 2.

Tizedes törtek osztásánál a tizedes pontot helyezzük annyi hellyel balra, ahány zéró van az osztóban s ha kell, itt is zérókat pótolunk a szám elé; pl. 3·52 : 10 = 0·352; 483·6 : 100 = 4·836; 1·02 : 1000 = 0·00102.

Ez az eljárás szorosan összefügg a tizedes rendszernek azzal a szabályával, hogy bármely számjegy egy-egy hellyel jobbra tovább írva tízszer-tízszer kevesebbet jelent, mint a megelőző helyen. 1, 2, 3, stb. tizedesnek az elvágása vagy a tizedes pontnak 1, 2, 3 stb. hellyel való balra tétele ugyanis a számnak minden számjegyét 1, 2, 3, stb. hellyel tolja jobbra, ami által minden számjegy 10, 100, 1000, stb.-szer (amennyi t. i. az osztó) kisebb lesz. (L. összehasonlítás céljából a 10, 100, 1000, stb.-vel való szorzásnál a hasonló magyarázatot.)

b) Osztás 0·1, 0·01, 0·001 stb.-vel.

Egész számot 0·1, 0·01, 0·001, stb.-vel úgy osztunk, hogy annyi zérót irunk jobbról a számhoz, ahány tizedes jegy van az osztóban, ami tulajdonképpen nem egyéb mint a számnak 10, 100, 1000, stb.-vel való szorzása; pl. 361 : 0·01 = 36,100 (ha rendesen osztunk, akkor — minthogy az osztó tizedes tört — 36,100 : 1 volna, ami szintén 36,100); 23 : 0·001 = 23,000; 405 : 0·1 = 4,050.

Tizedes törtnél a tizedes pontot tesszük 1, 2, 3, stb. hellyel jobbra; pl. 3·65 : 0·1 = 36·5; 0·0036 : 0·01 = 0·36; 8·04 : 0·001 = 8,040; 0·5 : 0·001 = 500.

c) Ha az osztónak a végén zéró van vagy zérók vannak, akkor 10, 100, 1000, stb.-vel — aszerint, ahány zéró van az osztó végén — osztjuk mind az osztót, mind az osztandót s az igy röviditett számokkal végezzük az osztást; pl.

850 : 20 =	1000 : 300 =	634 : 200 =
8,5, : 2 = 42·5	10 : 3 = 3	6·34 : 2 = 3·17
10	1	
	.	
	.	
	.	
	.	

25·13 : 3000 = 0·02513 : 3 = 0·00838.

5. Az osztás próbája.

Az osztás helyességét úgy vizsgáljuk meg, hogy *az osztót meg a hányadost összeszorozzuk* — ha maradék nincsen — *a szorzatnak az osztandóval egyenlőnek kell lennie* s ha van maradék, akkor a szorzathoz még ezt is hozzá kell adni s az így nyert összegnek kell egyenlőnek lennie az osztandóval; pl.

a) 21,375 : 375 = 57	*b)* 103,692 : 213 = 486
2625	1849
	1452
	174

375 × 57 = 21,375

$$\begin{array}{r} 486 \times 213 \\ \hline 972 \\ 486 \\ 1458 \\ \hline 103518 \\ + \text{ a maradék: } 174 \\ \hline 103692 \end{array}$$

Az osztás próbája lehet a kilences próba is: Az osztandót az osztó és hányados szorzatának tekintjük s e három számon a szorzásnál leírt módon végezzük a próbát. Ha az osztás végén maradék van, ezt előbb levonjuk az osztandóból s a különbséget tekintjük szorzatnak. Pl. az *a)* példánál: az osztandó, mint szorzatból: 2 + 1 + 3 + 7 + 5 = 18, 1 + 8 = **9**; az osztóból: 3 + 7 + 5 = 15, 1 + 5 = 6; a hányadosból 5 + 7 = 12, 1 + 2 = 3; 6 × 3 = 18, 1 + 8 = **9**.

A *b)* példánál: 103,692—174 = 103,518; 1 + 0 + 3 + 5 + 1 + 8 = 18, 1 + 8 = **9**; az osztóból: 2 + 1 + 3 = 6; a hányadosból 4 + 8 + 6 = 18, 1 + 8 = 9; 9 × 6 = 54, 5 + 4 = **9**.

6. Megnevezett számok osztása.

Maga az osztási müvelet megnevezett számoknál is ugyanaz, mint az elvontaknál, arra kell csakis ügyelnünk, hogy a megfejtendő példánál mit kell osztanunk, illetve mivel kell osztanunk? Ennek miként való meghatározására szolgáljon néhány alább kidolgozott példa.

1. 4 k. holdnyi vágásban termeltek 1,055 m^3 fát; hány m^3 fatömeg volt 1 k. holdon?

Megfejtés: Minthogy az összes fahozam 4 k. holdon termett, az 1 k. holdra eső részt megkapjuk, ha az összes fatermést, azaz az 1,055 m^3-t elosztjuk négyfelé azaz 4-el:

10,5,5, : 4 = 263·75
 25
  15
   30
    20

1 k. holdon termett tehát 263·75 m^3 fa.

2. Valaki bizonyos munkát elvállalt 8·70 koronáért, dolgozott rajta egy hétig; szeretné tudni, hogy hány korona esik

egy napra, vagyis milyen napibérnek felel meg az ő keresete? Számitsuk ki.

Megfejtés: Egy hétben van 6 munkanap, az összes keresetnek egy napra eső részét tehát megkapjuk, ha elosztjuk 6-al.

8,·7,0, : 6 = 1·45 Esik tehát 1 napra 1·45 K.
27
30
—

3. Négyzet alaku állandó csemetekert körül keritést akarunk késziteni; hány oszlop kell ehhez a keritéshez, ha a csemetekertnek egy oldala 38 *m* hosszura van fölvéve s az oszlopokat egymástól harmadfél (2·5) *m*-nyire állitjuk be?

Megfejtés: A négyzet olyan derékszögü négyszög, amelyiknek minden oldala egyenlő hosszu; az egész kerités hosszát tehát megkapjuk, ha az egy oldalnak a hosszát megszorozzuk 4-el, lesz: 38 × 4 = 152 *m*.

Ha egyik oszlop 2·5 *m*-re esik a másiktól, akkor minden oszlopra 2·5 *m* hossz esik a keritésben; annyi oszlop kell tehát, ahányszor a 2·5 *m*-t rá lehet mérni a 152 *m*-es keritésre, azaz ahányszor a 2·5 megvan a 152-ben: 152 : 2·5 = 1520 : 25 = 60·8 Kellene tehát 60·8 oszlop s minthogy csakis egész oszlopokat használhatunk — 61 *db*.

4. 2·76 k. holdnyi terület beerdősitése belekerült 35·99 koronába; mennyi pénzzel lehet hasonló körülmények között 1 k. holdat beerdősiteni? (13·04 K-val.)

5. Hány k. holdat lehet 16,320 csemetével 1·5 *m*-es négyes hálóban beültetni, ha 1 k. holdra 2,558 csemete kell? (Annyi k. h.-at lehet beültetni, a hányszor a 2,558 csemete a készletünkből kitelik, azaz a hányszor megvan benne. (Be lehet ültetni 6·38 k. h.-at.)

6. Hány szekeret kell fogadnunk 63·87 m^3 kocsányos tölgy épületfa hazafuvarozására, ha 1 m^3 ilyen fa 780 *kg*-ot nyom s ha egy szekérre 650 *kg*-ot (6·5 *q*-t) rakhatunk? (Fogadnunk kell 76·6, egészben 77 szekeret).

7. 8·96 k. holdnyi kocsányos tölgy állományban becsültek holdanként 185 m^3 hasábfát; hány ür-m^3 hasábfa lesz ott k. holdanként s mennyi lesz összesen, ha 1 ür-m^3-ben átlag 0·634 m^3 fát számitunk? (Annyi ür-m^3-ünk lesz holdanként, ahányszor az

1 ür-m^3-t tevő 0·634 m^3 megvan a k. holdankénti 185 m^3-ben. (Lesz k. h.-anként 291·8 ür-m^3 s egészben 2,614·5 ür-m^3.)

8. 347·5 m^3 bükkfából hány ür-m^3 dorong telik ki, ha 1 ür-m^3 dorongfában 0·63 m^3 fa van? (Kitelik 551·6 ür-m^3 dorongfa.)

9. Gyönge termés mellett 8 napszámos szedett 1 nap alatt 2·32 *hl* tölgy makkot; hány napszám kell 1 *hl* tölgymakk gyüjtéséhez? (3·4 napszám kell.)

10. Hárman 4 nap alatt 10·06 *hl* erdei fenyő tobozt gyüjtöttek; hány napszám esik 1 *hl* toboz szedésére? (1·2 napszám esik.)

11. Szükségünk van 135 *kg* tiszta ákácmagra; hány *hl* hüvelyt kell gyüjtetnünk, ha 1 *hl* hüvelyből 4·3 *kg* mag kerül ki? (31·4 *hl* hüvelyt kell gyüjteni.)

12. 12·5 *hl* lucfenyő toboz adott 18·25 *kg* tiszta, szárnyatlan magot; hány *kg* magot adott 1 *hl* toboz? (1·4 *kg* magot adott.)

13. Hány *hl*-es zsákba fog beleférni 1,350 *kg* (13·5 *q*) kocsánytalan tölgymakk, ha 1 *hl*-nek a sulya 83 *kg*? (16·3 zsákba fér bele.)

14. 135 f. *m* (folyóméter) rúdkerités elkészitésénél 5 napszámos 4 napig dolgozott 1·1 *K* napibér mellett; kiszámitandó: *a)* mennyibe került a kerités elkészitése? (22 *K*-ba); *b)* hány napszám kellett 1 f. *m* elkészitéséhez? (0·15 napszám); *c)* menynyibe került 1 f. *m*-e a keritésnek? (0·16 *K*-ba.)

15. 5·5 *m* hosszú, 1 *m* széles csemeteágynak 36 sorában van 4,932 feketefenyő csemeténk; hány csemete nőtt egy, 1 *m*-es sorban? (137 csemete nőtt.)

16. Hány k. holdat vethetünk be 9·18 *hl* kocsányostölgy makkal lyukvetéssel, ha 1 *m* sortávolság s 0·75 *m* lyuktávolság mellett — minden lyukba 2 makkot téve — 1 k. h.-ra 1·2 *hl* makk kell? (7·65 k. h.-at.)

17. Hárman elvállalták 345 *m* hosszú, 1 *m* széles gyalogútnak az elkészítését f. *m*-enként 0·23 K-ért; dolgoztak rajta 3 hétig; mennyit kerestek összesen? (79·35 K-át) s hány korona esik napibérül? (1·47 K.) (A napibért megkapjuk, ha az összes keresetet a munkanapok összes számával — 3 ember 3 hétig — elosztjuk.)

18. Hány 2 éves fenyőcsemetét iskolázhat át 17 munkás 3 nap alatt ültetőfával, ha 1,000 csemete átiskolázásához 1·4 asz-

szonynapszám szükséges? (Annyi ezret iskoláz át, ahányszor az 1·4 napszám a 3×17 napszámban megvan, tehát 36·429 ezret, vagyis 36,429 darabot.)

19. Hány m^2 területet forgattathatunk meg 13 férfivel 2 hét alatt, 60 *cm* mélyen, ha 100 m^2-hez 2·7 napszám szükséges? (57·79-szer 100 m^2-t, vagyis 5,779 m^2-t.)

20. Elvettettünk 1·28 *kg* lúcfenyő magot. Hány 2 éves csemeténk lesz abból, ha 1,000 csemetére 0·021 *kg* magot számítunk? (60·952 ezer, vagy 60,952 db. csemeténk lesz.)

21. Hány k. holdat ültettethetünk be 1·5 *m*-es négyes hálóban 37,600 csemetével, ha 1 k. h.-ra 2,558 csemete kell? (14·70 k. holdat.)

22. Hány szekeret kell fogadnunk 3 napra 4·25 m^3 építési kő hazafuvaroztatásához, ha 1m^3 kő 25 métermázsát nyom s egy szekér 7·5 *q*-át rakhat föl? (4·7, kereken 5 szekeret kell fogadnunk.)

23. Felásattunk 179 m^2 csemetekerti talajt. Hány feketefenyő csemetét iskoláztathatunk bele, ha 1,000 csemetének 7·5 m^2 kell? (23·867 ezret, vagyis 23,867 darabot.)

24. 2 *m* sor, 1·5 *m* csemetetávolság mellett 1 k. h.-ra 1,918 csemete kell. Hány k. holdat ültettethetünk be 20,850 csemetével? (10·87 k. holdat.)

25. Hányszor nagyobb 8·32 k. h. 1·25 *ha*-nál? (3·83-szor nagyobb.)

26. Leszállítottak egyik héten 159 talptutajban 4,382 m^3 fát, a másik héten 208 tutajban 6,127 m^3 fát; hány m^3 fa volt egyre-másra egy tutajban? (28·63 m^3.)

27. Egyik szenítőrakásba beraktak 87 *ür-m*^{3} bükk hasábfát; égetés után kikerült belőle 375·8 *hl* szén; hány *hl* szenet adott egy ürméter fa? (4·3 *hl*-t.)

28. 3 *km* 896 *m* hosszú 1·5 *m* széles lóösvény elkészítésén dolgozott 82 munkás 23·5 napig. Hány napszámba került a lóösvény folyóméterje? (0·495 napszámba.)

29. 7306 ürméter fenyőfa úsztatásánál felhasználtunk 3487 napszámot. Mennyibe került az úsztatás űrméterenként, ha a napibér egyre-másra 1 K 35 f? (64·4 f-be került.)

30. Építettek 1872 f. méter vizes tönkcsúsztatót s felhasználtak hozzá 861·27 m^3 fát. Hány 6 *m*-es szakaszból áll a csúsztató s hány m^3 fa van egy szakaszban? (2·76 m^3 fa van.)

II. FEJEZET.

TÖBBNEVÜ SZÁMOKKAL VALÓ SZÁMOLÁS.

9. §. Magasabb rendü egységek szétbontása.

1 méter = 10 deciméter, 1 öl = 6 láb, 1 korona = 100 fillér, 1 nap = 24 óra. A méter, öl, korona és nap *magasabb rendü,* a deciméter, láb, fillér és óra pedig *alsóbb rendü egységeket* jelentenek.

Azt a számot, amely mutatja, hogy valamely mérték alsóbb rendü egységeiből hány van egy magasabb rendü egységben: „váltószám"-nak mondjuk. A fenti példában a 10, 6, 100 és 24 váltószámok. A váltószámokat a 4. §.-ból vegyük ki s az életben gyakrabban előfordulókat igyekezzünk megtanulni.

Magasabb rendü egységek *szétbontása* alatt azt értjük, ha belőlük alsóbb rendü egységeket csinálunk; pl. ölből lábat, *kg*-ból *g*-ot, órából percet stb. Ezt úgy tesszük meg, hogy *a magasabb rendü egységek számát megszorozzuk a váltószámmal;* pl.

1. 3 korona hány fillér? Egy koronában van 100 fillér, a váltószám 100; 3 K tehát $3 \times 100 = 300$ fillér. Ami egyébként is nagyon természetes, mert ha 1 K = 100 f, 3 K-nak 3-szor 100 f-t kell tennie.

2. 8 öl hány hüvelyk? 1 öl = 72″, a váltószám 72; 8 öl = $8 \times 72 = 576$ hüvelyk. (Ha 1 öl = 72″, 8 öl 8-szor annyi.)

3. 1·23 k. hold hány □°? 1 k. h. = 1,600 □°, tehát 1·23 k. h. = $1{\cdot}23 \times 1600 = 1{,}968$ □°.

$$\begin{array}{r} 738 \\ \hline 1968 \end{array}$$

4. 4 öl 5 láb 7 hüvelyk hány hüvelyk?

$$\begin{array}{lcl} 4^0 = 4 \times 72 = & 288'' & \\ 5' = 5 \times 12 = & 60'' & \qquad 4^0\ 5'\ 7''\ \text{tehát} = 355'' \\ 7'' = \qquad\quad = & 7'' & \\ \hline & 355'' & \end{array}$$

Ha valamely mértéknek alrészei és többszörösei a tizes rendszer szerint képezvék (mint a métermértékek, fillér stb.) vagyis ha a váltószámok 10, 100, 1000 stb., akkor több magasabb rendü egységet is nagyon egyszerüen változtatunk át a kivánt alsóbb rendü egységre; pl.

5. 6 *m* 8 *dm* 7 *cm* hány *cm*? Fejtsük meg először az eddigi eljárás szerint:

6 *m* = 6 × 100 = 600 *cm*		
8 *dm* = 8 × 10 = 80 „		6 *m* 8 *dm* 7 *cm* tehát = 687 *cm*.
7 *cm* = = 7 „		
687 *cm*		

Ezt az eredményt egyszerüen úgy is megkapjuk, ha a legfelsőbb rendü egységen kezdve, leírjuk egymásután a számokat s az így nyert számnak a legalsóbb rend nevét adjuk.

6. 24 *m* 6 *dm* 9 *cm* 3 *mm* hány *mm*? Annyi mint 24,693 *mm*.

Ha valamelyik közbeeső rend hiányzik, annak helyére zérót irunk; pl.

7. 34 *kg* 8 *dkg* 7 *g* hány *g*? Itt egy közbeneső rend, a hektogramm hiányzik, lesz tehát:

34 *kg* = 34 × 1000 = 34,000 *g*
8 *dkg* = 8 × 10 = 80 „
7 *g* = = 7 „
34,087 *g*

Egyszerre leírva: 34 *kg* 8 *dkg* 7 *g* = 34,087 *g*.

8. 375·76 *m* hány *cm*? Megszorozzuk 100-al, tehát = 37,576 *cm*.

9. 0·324 *m* hány *mm*? Megszorozzuk 1000-el, tehát = 324 *mm*.

10. 8·5⁰ *a)* hány láb? (= 51′); *b)* hány hüvelyk? (= 612″).

11. 36·73 öl hány láb és hány hüvelyk? Először lábakká változtatjuk az öleket s aztán hüvelyket a lábnak csak törtrészeiből csinálunk. (= 220′ 4·56″.)

12. 28·96 kat. hold *a)* hány k. h. és hány □ öl? (= 28 k. h. és 1,536 □⁰); *b)* hány □ öl? (46,336 □⁰.)

13. 0·637 kat. hold hány □ öl? (= 1,019·2 □⁰.)

14. 3 óra 53 perc és 6 másodperc hány másodperc? (= 13,986.)

15. 8·57 óra hány perc és hány másodperc? Először perceket csinálunk az órából s másodpercekké csak a perc törtrészeit változtatjuk. (= 514 perc és 12 másodperc.)

16. 0·675 hektár hány m^2? (= 6,750 m^2.)

17. 67·8976 *ha a)* hány ár? (= 6,789·76 ár); *b)* hány *ha* és hány m^2? (= 67 *ha* 8,976 m^2.)

18. 0·736 *kg a)* hány *dkg*? (= 73·6 *dkg*); *b)* hány *g*? (= 736 *g*.)

19. 3·65 *l* hány *l* hány *dl* és hány *cl*? (= 3 *l* 6 *dl* 5 *cl*.)

20. 1·202 m^3 *a*) hány *hl*? (12·02 *hl*); *b*) hány *l*? (= 1,202 *l*.)

21. 2·708 m^3 hány dm^3? (= 2,708 dm^3.)

22. 0·68 k. hold *a*) hány m^2? (= 3,913 m^2); *b*) hány □ öl? (= 1,088 □°.)

23. 13·67 *q* hány *kg*? (= 1,367 *kg*.)

24. 27·9 öl hány láb? (= 167·4′.)

25. 20·08 k. hold *a*) hány □ öl? (= 32,128 □°); *b*) hány m^2? (= 115,560 m^2)

10. §. Alsóbb rendü egységek összevonása.

Alsóbb rendü egységeket magasabb rendü egységekre úgy változtatunk (vonunk össze), hogy *az alsóbb rendü egységek számát elosztjuk a váltószámmal.* (Erre vonatkozólag l. még a 29. §. 20. példáját is.) Pl.

1. 23 láb 11 hüvelyk hány öl?

23′ = 23 : 6 =	3·833 öl		
11″ = 11 : 72 =	0·153 „		23′ 11″ = 3·986 öl.
	3·986 öl		

2. 53 óra 41 perc 28 másodperc hány nap és hány óra?

53 óra	= 53 : 24 =	2 nap	5·000	óra
41 perc	= 41 : 60 =	— „	0·683	„
28 másodperc	= 28 : 3600 =	— „	0·008	„
		2 nap	5·691	óra

53 óra 41 p. 28 mp. tehát = 2 nap 5·691 óra.

3. 1,354 □ öl hány kat. hold? 1,354 : 1,600 = 0·846 k. hold.

Ha az összevonandó mérték tizes rendszerü, akkor az alsóbb rendü egységeket egyszerüen a felsőbb rend annyiadrészének írjuk le tizedes törtben (ahány alsóbb rendü egység teszi a magasabb rend egy egységét, vagyis) ahány a váltószám, ami lényegében nem egyéb, mint a számnak a váltószámmal való osztása; pl.

4. 8 *dm* 9 *cm* hány *m*?

8 *dm* (minthogy 1 *dm* = 0·1 *m*) = 0·8 *m*
9 *cm* („ 1 *cm* = 0·01 *m*) = 0·09 *m*

összesen = 0·89 *m*, amit egyszerre is könnyen leírhatunk.

5. 25 *m* 18 *dm* 65 *cm* hány *m*?

25 *m*	=	25·00
18 *dm*	=	1·80
65 *cm*	=	0·65
összesen	=	27·45 *m*.

6. 2 óra 42 perc s 53 másodperc hány óra? (= 2·7147 óra.)

7. 53 kat. hold 975 □⁰ hány kat. hold? (= 53·61 k. h.)

8. 16 öl 4 láb 11 hüvelyk hány öl? (= 16·82⁰.)

9. 765·5 *m* hány *km*? (= 0·766 *km*.)

10. 36 *dm* 9 *cm* 7 *mm* hány *m*? (= 3·697 *m*.)

11. 875 fillér hány korona? (= 8·75 *K*); 3,412 *f* hány *K*? (= 34·12 *K*); 3·5 *f* hány *K*? (= 0·035 K.)

12. 2,572 *kg* hány *q* (= 25·72 *q*); 987·7 *kg* hány *q*? (= 9·877 *q*); 6·86 *kg* hány *q*? (= 0·0686 *q*); 0·9 *kg* hány *q* (= 0·009 *q*.)

13. 349 *dkg* *a*) hány *kg*? (= 3·49 *kg*); *b*) hány *q*? (= 0·0349 *q*.)

14. 7,542 *l* hány *hl*? (= 75·42 *hl*); 367 *l* 8 *dl* hány *hl*? (= 3·678 *hl*); 32·3 *l* hány *hl*? (= 0·323 *hl*.)

15. 6,854 dm^3 hány m^3 (= 6·854 m^3); 875·6 dm^3 hány m^3? (= 0·8756 m^3); 200 dm^3 hány m^3? (= 0·2 m^3)

16. 283 *hl* hány m^3-t tesz? (= 28·3 m^3-t); 519 *hl* 93 *l* hány m^3? (= 51·993 m^3)

17. 1,715 *l* hány m^3? (= 1·715 m^3); 635·8 *l* hány m^3? (= 0·6358 m^3); 43 *l* hány m^3? (= 0·043 m^3)

18. 8,736 m^2 hány *ha*? (= 0·8736 *ha*); 5,755 m^2 hány *ha*? (= 0·5755 *ha*); 977 m^2 hány *ha*? (= 0·0977 *ha*); 780 m^2 hány *ha*? (= 0·078 *ha*)

19. 26 láb hány öl? (= 4·3⁰); 307′ hány öl? (= 51·2⁰); 32″ hány láb? (= 2·67′)

20. 1,058 □öl hány kat. hold? (= 0·66 k. h.) és hány magyar hold? (= 0·88 m. hold); 65 □⁰ hány k. hold? (= 0·04 k. h.); 608 □⁰ hány k. hold? (= 0·38 k. h.); 13,696 □⁰ hány k. hold? (= 8·56 k. hold.)

21. 4,967 m^2 hány kat. hold? (A váltószám 5755; 0·86 k. hold); 685 m^2 hány k. hold? (= 0·12 k. hold); 34,328 m^2 hány k. hold? (= 5·96 k. hold.)

11. §. Számmüveletek többnevü számokkal.

Többnevü számokkal a gyakorlatban majdnem mindig ugy szoktunk elbánni, hogy a különféle rendü egységeket valamelyik megszokott rendbe összevonjuk illetve szétbontjuk s a számmüveleteket az így nyert egynevü számmal végezzük. A 12.—15. §-ban ismertetett eljárásokhoz ritkán folyamodunk.

12. §. Többnevü számok összeadása.

Többnevü számokat ugy adunk össze, hogy — kezdve a legalsóbb rendü egységeken — külön összeadunk minden rendet. Ha az összegben valamelyik alsóbb rendből annyi egységünk van, hogy azok egy vagy több felsőbb rendű egységet kitesznek, akkor az innen összevont egész egységeket a megfelelő felsőbb rend egységeihez hozzáadjuk, a maradékot pedig vagy meghagyjuk eredeti helyén vagy esetleg összevonjuk ezt is a felsőbb rend törtrészéül; pl.

1.		36^0	$5'$	$9''$
	+	–	$2'$	$11''$
		42^0	—	$4''$
		3^0	$4'$	$3''$
		81^0	$11'$	$27''$
		83^0	$1'$	$3''$

$27'' = 2' + \ldots\ldots\ldots 3''$
$2' + 11' = 13' = 2^0 \ldots + 1'$
$81^0 + 2^0 = \ldots 83^0$
összesen $= 83^0 \; 1' \; 3''$

2.		37 k. h.	875 □ öl
	+	9 „ „	1,342 „
		46 k. h.	2,217 □ öl
		47 „ „	617 „

2,217 □° = 1 k. h. + . . . 617 □°
1 k. h. + 46 k. h. = 47 k. h.
összesen = 47 k. h. 617 □°

vagy pedig: 46 k. h. + (2217 : 1600 =) 1·386 k. h. = 47·386 k. h.

A tizedes rendszerü mértékekkel vagy szintén így járunk el, vagy pedig — ami célszerűbb — a többnevű összeadandókat a legmagasabb rendbe összevonjuk, így adjuk össze s az eredményt végül szétbontjuk; pl.

3.		53 *m*	9 *dm*	5 *cm* =	53·95 *m*
	+	19 „	5 „	9 „ =	19·59 „
		27 „	8 „	6 „ =	27·86 „
		99 *m*	22 *dm*	20 *cm*	101·40 *m* = 101 *m* 4 *dm*
		99 „	24 „	0 „	
		101 „	4 „	0 „	

4

4.	875 *q*	85 *kg* =	875·85 *q*	
+	168 „	92 „ =	168·92 „	
	53 „	54 „ =	53·54 „	
			1,098·31 *q*	= 1,098 *q* 31 *kg*.

13. §. Többnevü számok kivonása.

Többnevü számok kivonása úgy történik, hogy — kezdve a legalsóbb rendü egységeken — külön kivonjuk az egyes rendeket egymásból; pl.

1.	42 óra	53 perc	25 másodpercből kivonandó
—	37 „	28 „	19 „ perc
	5 óra	25 perc	6 másodperc

Ha valamelyik rendnél a kisebbitendő kisebb, mint a kivonandó, akkor a kisebbitendő legközelebbi magasabb rendéből egy (esetleg több) egységet szétbontunk, hozzáadjuk az alsóbb rend egységeihez s a kivonást az így nagyobbitott számból eszközöljük; pl.

$$2.\quad \left.\begin{array}{rrr} 147^0 & 2' & 3'' \\ -\ 94^0 & 5' & 9'' \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{rrr} 146^0 & 7' & 15'' \\ 94^0 & 5' & 9'' \\ \hline 52^0 & 2' & 6'' \end{array}\right.$$

3″-ből 9″-et nem lehet kivonni, a 2′-ból tehát 1′-at hüvelykké változtatunk, lesz 12″; 12″ + 3″ = 15″. A megmaradt 1′-ból (egyet hüvelykké változtattuk) 5′-at nem lehet kivonni, 147^0-ből tehát 1^0-et lábbá kell változtatnunk, igy lesz 6 (az egy ölből) + 1 = 7 lábunk, öl pedig marad 146. Ezek után a kivonást a példánál látható módon végezhetjük.

Tizes rendszerbeli számokkal vagy hasonlóan cselekszünk, vagy még célszerübben összevonjuk mind a kisebbitendőt, mind a kivonandót a legmagasabb rendbe s így vonjuk ki egymásból, a különbséget végül szétbontjuk; pl.

$$3.\quad \left.\begin{array}{rrrr} 72\ m & 8\ dm & 7\ cm & 3\ mm \\ -\ 28\ „ & 9\ „ & 5\ „ & 7\ „ \\ \hline \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} 72{\cdot}873\ m \\ -\ 28{\cdot}957\ „ \\ \hline 43{\cdot}916\ m = \end{array}\right.$$

= 43 *m* 9 *dm* 5 *cm* 7 *mm*

$$4.\quad \left.\begin{array}{rrr} 38\ hl & 93\ l & 8\ dl \\ -\ 21\ „ & 85\ „ & 9\ „ \\ \hline \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} 38{\cdot}938\ hl \\ -\ 21{\cdot}859\ „ \\ \hline 17{\cdot}079\ hl = 17\ hl \end{array}\right.$$

7 *l* **9** *dl.*

14. §. Többnevü számok szorzása.

Többnevü csakis a szorzandó lehet, mivel a szorzónak elvont számnak kell lennie.

Többnevü számok szorzása úgy történik, hogy — kezdve a legalsóbb rendü egységeken — megszorzunk minden rendet külön-külön a szorzóval. Ha valamelyik rend egységeiből annyi van a szorzatban, hogy a felsőbb rend egy, esetleg több egységét kiteszi, akkor ezt összevonva a felsőbb rendhez adjuk.

1.	8 öl	5 láb	9 hüvelyk $\times$ 5	
	40^0	$25'$	$45''$	
	44^0	$4'$	$9''$	
2.	2 óra	23 perc	13 másodperc $\times$ 3	
	6 „	69 „	39 „	
	7 „	9 „	39 „	

Tizes rendszerü mértékekkel vagy hasonlóan járunk el, vagy összevonjuk a legfelsőbb rendbe, igy szorzunk s a nyert eredményt szétbontjuk; pl.

3. $53\,m\ 8\,dm\ 7\,cm \times 12 = 53{\cdot}87\,m \times 12 = 646{\cdot}44\,m = 646\,m$ $4\,dm\ 4\,cm$.

15. §. Többnevü számok osztása.

Itt háromféle eset lehetséges; külön tárgyaljuk mindegyiket.

1. Többnevü számok osztása elvont számmal.

Ennél az eljárás ez: először elosztjuk a legfelsőbb rendet; a talált hányadost, mint az eredmény első részét felirjuk, az esetleges maradékot pedig szétbontván a következő alsóbb rendre, ehhez hozzáadjuk, az így nyert összeget osztjuk tovább az előbbihez hasonlóan s ezt az eljárást addig folytatjuk, mig minden rendet el nem osztottunk.

A legalsóbb rendből nyert hányadosnál esetleg tizedes jegyeket is számíthatunk. Az egyes rendekből egyenkint nyert hányadosok együttesen adják az osztás egész eredményét; pl.

1. $16^0\ \ 5'\ \ 8'' : 3 = 5^0\ \ 3'\ \ 10{\cdot}67''$

$1^0 = \ldots + 6'$

$11' : 3$

$2' = \ldots 24''$

$32'' : 3$

20

20

2. 48 k. hold 872 □⁰ : 5 = 9 k. h. 1,134·4 □⁰

3 „ „ = + 4800 □⁰

5,672 □⁰ : 5

2. Többnevü számok osztása egynevü számmal.

Ebben az esetben vagy úgy teszünk, hogy a többnevü osztandó minden rendét az osztóval egyenlő rendbe összevonjuk (szétbontjuk) s az ekként nyert egy számot osztjuk az osztóval, vagy pedig mind az osztandót mind az osztót tetszés szerint választott egy és ugyanarra a rendre változtatjuk át s így osztunk; pl.

1. 4^0 3′ 2·4″ hosszú vonalra 3·4′-at hányszor lehet ráméni? Annyiszor a hányszor 3·4′ megvan a 4^0 3′ 2·4″-ben.

4^0 3′ 2·4″ : 3·4′; $4^0 = (4 \times 6') = 24{\cdot}0'$

$2{\cdot}4'' = (2{\cdot}4 : 12) = 0{\cdot}2'$

meg $3{\cdot}0'$

$27{\cdot}2'$

tehát 27·2′ : 3·4′ = 272 : 34 = 8, azaz nyolcszor lehet ráméni.

2. 82 *m* 8 *dm*-ben hányszor van meg 26 *cm*?

$$\left.\begin{array}{rl} 82\,m = & 8{,}200\ cm \\ 8\,dm = & 80\ „ \\ \hline & 8{,}280\ cm \end{array}\right\}\ \text{tehát } 8{,}280 : 26 = 318{\cdot}46$$

Vagy pedig:

$$\left.\begin{array}{rl} 82\,m = & 82{\cdot}00\,m \\ 8\,dm = & 0{\cdot}80\ „ \\ \hline & 82{\cdot}8\ „ \\ 26\,cm = & 0{\cdot}26\ „ \end{array}\right\}\ \text{tehát } 82{\cdot}8\,m : 0{\cdot}26\,m = 8{,}280 : 26 \text{ mint fent.}$$

3. 135 mezei láb 6 mezei hüvelykben 4 mezei láb hányszor van meg?

6 *m* hüvelyk = 0·6 *m* láb tehát:

135·6 : 4 = 33·9 — ennyiszer van meg benne.
15
36

3. Többnevü számok osztása többnevü számokkal.

Itt úgy járunk el, hogy mind az osztandó, mind az osztó minden rendét tetszés szerinti, de egy és ugyanarra a rendre változtatjuk át s így osztunk; pl.

1. 2 *q* 26 *kg*-ban hányszor van meg 2 *kg* 40 *dkg*? Itt legcélszerübb lesz minden rendet *kg*-ra változtatni:

2 *q* = 200 *kg*			2 *kg* = 2·00 *kg*	
26 *kg* = 26 „			40 *dkg* = 0·40 „	
226 *kg*			2·40 *kg*	

tehát: 226 : 2·4 = 2,260 : 24 = 94·17.

2. 8 *hl* 53 *l*-es kádba hány 12 *l* 4 *dl* ürtartalmú kanna viz fér bele?

8 *hl* = 800 *l*	12 *l* = 12·0 *l*
53 *l* = 53 „	4 *dl* = 0·4 „
853 *l*	12·4 *l*

tehát: 853 : 12·4 = 8530 : 124 = 68·79; ennyi kanna víz fér bele.

16. §. Vegyes példák.

1. Bizonyos útat fölmértek ketten, az egyik ember fölmért belőle 2 *km* 487 *m*-t, a másik 974·6 ölet; *a*) hány *m*? (= 4,334·8 *m*); *b*) hány *km*? (= 4·335 *km*); *c*) hány öl hosszú az az út? (= 2,285·2°)

2. Egyik erdőőr elindult erdőgondnoksága székhelyére; délelőtt ment 4 óra 37 percet, délben egy közbeeső községben megebédelt s délután 3 óra 45 percnyi gyalogolás után megérkezett; *a*) hány óráig és hány percig ment, mig odaért? (8 óráig és 22 percig); *b*) hány óráig ment? (8·35 óráig.)

3. Két szálfa közül az egyik 23 *m* 6 *dm*, a másik 25 *m* 3 *dm* hosszú; mennyivel hosszabb egyik a másiknál? *a*) hány *m* és hány *dm*-mel? (= 1 *m* és 7 *dm*-el); *b*) hány *m*-el? (= 1·7 *m*-el.)

4. Valaki az 1827. évi november 17.-én (1,827 év, 10 hónap, 17 nap) született s meghalt az 1894. évi július 13.-án (1894 év, 6 hónap, 3 nap); hány évet, hány hónapot és hány napot élt? (Élt 66 évet, 7 hónapot és 16 napot).

5. Ketten két hordó bort vettek, az egyik hordóban 1 *hl* 43 *l* 5 *dl*, a másikban 57 *l* 2 *dl* bor volt; *a*) hány *l*? *b*) hány *hl* bort vettek összesen? s ha igazságosan felezték meg, *c*) hány *l*? *d*) hány *hl* bor jutott egynek? (Egynek jutott 1·0035 *hl*.)

6. Ha valakinek a havi fizetése 66 kor. 67 fill.; *a*) mennyi az évi fizetése koronában (=800·04 *K*); *b*) hány fillér jut egy napra? (222 *f* jut.)

7. Valaki három fiára 975 k. hold 1,347 □ öl erdőt hagyott; ha egyenlően részesülnek belőle, *a*) hány k. holdat és □⁰-et? (325 k. h.-at és 449□⁰-et); *b*) hány k. holdat kap egy-egy? (325·28 k. h.-at) s *c*) mennyit tesz egynek a része *ha*-ban? (=187·1986 *ha*-t).

8. Valaki 5611 K 20 f-ért 23 k. hold 608 □⁰-nyi rétet vett. *a*) Hány K-ba került 1 k. h.? (240 K-ba); *b*) hány *q* szénát fog teremni az a rét, ha k. h.-anként 12 *q*-ára számithatunk? (= 280·6 *q*-át.)

9. Patakba bedobott fadarab 2 perc 37 másodperc alatt 180·6 m-nyi utat tett meg úszva; hány *m* a sebessége másodpercenként e pataknak? Annyi *m* a sebessége, ahány *m*-t az úszó fadarab 1 másodperc alatt megtett. (Sebessége = 1·15 *m*.)

10. Egyik hordónkban 57·2 *l* bor van; hány *kg*-ot nyom az, ha (csak körülbelül számitva) a bort olyan nehéznek vesszük mint a vizet s ha a hordóra 12 *kg*-ot számitunk? (69·2 *kg*-ot nyom.)

11. Kiszámitottuk, hogy bizonyos szénaboglya köbtartalma 57·68 m^3; mennyit ér ez a boglya széna, ha 1 m^3 széna belőle 85 *kg*-ot nyom s egy métermázsa széna ára 4 K 20 f? (205·92 K-át ér.)

12. Valaki lóháton 3 óra 28 perc alatt megtett 28·2 *km* útat; hány *km*-t haladt óránként? A percből órát kell csinálni s így osztani velök a *km*-ek számát. (8·13 *km*-t haladt.)

13. Valaki reggeli 6 órától délutáni 5 óráig gyalogolt, úgy, hogy közben reggelizéssel eltöltött 30 percet s ebédeléssel másfél órát (1 óra 30 perc); *a*) hány óráig gyalogolt összesen? (9 óráig); *b*) ha 40·5 *km*-nyi útat tett meg, hány *km*-t haladt óránként? (4·5 *km*-t haladt.)

14. Egyik erdőőrnek erdőgondnoka elrendelte, hogy bizonyos megjelölt helyen várja délelőtt 10½ (féltizenegy) órakor; hány órakor kell annak az erdőőrnek otthonról elindulnia, ha a kitüzött helytől 11·6 *km*-re lakik, ha tapasztalása szerint óránként 4·5 *km*-t haladhat s ha a kitüzött időnél egy negyed órával hamarább akar ott lenni? (7 óra 40 perckor kell elindulnia.)

15. Készitenünk kell 2 *m* magas, 187 *m* hosszú keritést álló deszkasorral; *a*) hány 2 *m* hosszú deszka kell hozzá, ha a deszkák szélessége 26 *cm*? (719·2 darab. Minthogy a kerités hosszából minden deszka 26 *cm*-nyi helyet foglal el, annyi deszka kell, ahányszor a 23 *cm* a 187 *m*-ben megvan.) *b*) Hány 4 *m* hosszú

deszkát kell vennünk, hogy elég legyen a kerítéshez? (359·6 db.-ot kell vennünk.)

16. 24 csemetét körben el akarunk ültetni; hány *m*-nek kell lenni a kör kerületének, ha egyik csemetét a másiktól 2·5 *m*-re ültetjük? (A kerület = 60 *m*.)

17. Egyik bükkfa vágásban termeltek 1,654 ür-m^3 hasábfát, 372 ür-m^3 dorongfát és 247 ür-m^3 galyfát; hány tömörköbméter volt az egész fatermés, ha 1 ür-m^3 hasábfa = 0·715 m^3, 1 ür-m^3 dorongfa = 0·630 m^3 s egy ür-m^3 galyfa (ágfa) = 0·492 m^3? (Az összes fatermés = 1,538·49 m^3.)

18. Ha 1 m^2-en 55 darab két éves akáccsemete nő fel, mennyire számíthatunk 400 □°-ön, vagyis egy negyed k. holdon? (79,145-re számíthatunk.)

19. Hány tölgycsemete esik ott 1 m^2-re, ahol egy negyed kat. holdas táblán 52,660 kocsányos tölgycsemetét becsültünk? (1 m^2-re esik 37 csemete.)

20. Hány csemetesort húzhatunk 20 öl hosszú táblán keresztbe, ha a sortávolságot 45 *cm*-re vesszük? (84 sort.)

21. Van 4 egyforma ágyban 2 éves feketefenyő csemeténk; az ágyak hossza 6 *m*, szélessége 1 *m*, az ágyakon keresztbe futó sorok egymástól való távolsága 15 *cm*. *a*) Hány csemetesor van egy ágyban? (40 sor); *b*) hány csemeténk van egy ágyban? (4,680), s összesen (18,720), ha több sor megolvasása után azt találtuk, hogy egy sorban átlag 117 csemete van?

22. Mennyit kell fizetni 2·5 m^3 égetett mész fuvarozásáért, ha 1 m^3 ilyen mész 8·15 *q*-át nyom s ha 1 *kg*-ot 1 f-ért szállítanak? (20·38 K-át.)

23. Mennyibe kerül 1 szekér (2 ür-m^3) bükk hasáb tűzifa fuvarozása, ha 1 ür-m^3 = 0·65 m^3, 1 m^3 740 *kg*-ot nyom s 1 *kg* terhet 1·5 f-ért szállítanak? (= 14·43 K-ba kerül).

24. Próbaként szedettünk gondos felügyelet mellett tölgymakkot; 9 gyerek szedett egy nap alatt 3 *hl* 65 *l*-t. Ha nem napszámba akarjuk szedetni tovább, mennyit fizethetünk 1 *hl* makk szedéseért, ha a gyereknapszám a vidéken 60 fillér?

Először ki kell számítani, hogy 1 *hl* makk szedésére a próbánál hány napszám kellett. (1·48 K-át fizethetünk.)

25. Hány *hl* tobozt kell gyüjtenünk, ha 5·5 *kg* tiszta, szárnyatlan erdeifenyő magra van szükségünk s ha 1 *hl* tobozból

1·05 *kg* magot várhatunk? Mennyibe fog kerülni a tobozszedés, ha 1 *hl* szedésére 1·5 napszám kell s egy napszámot 75 fillérrel számítunk? (5·90 K-ba fog kerülni.)

26. Hány szem mag kerül ki 0·79 *hl* ákáchüvelyből, ha 1 *hl* hüvely 4·5 *kg* magot ad s 1 *kg*-nyi magban átlag 50,000 szem van? Hány csemeténk lesz abból a 0·79 *hl* hüvelyből kikerülő magból, ha a magvaknak csak a feléből lesz csemete, a többi mag pedig nem csirázik ki? (88,875 csemeténk lesz.)

27. Egy literben megolvastunk 217 szem kocsányos tölgy makkot, hány szem makk van 1 *hl*-ben? (21,700.)

28. Hány darab kocsántalan tölgycsemete nő fel 1 *m* hosszú sorban, ha egyik csemete *a*) 2 *cm*-re; *b*) 3 *cm*-re van a másiktól? (50, illetve 33 csemete.)

29. Hány lúcfenyő csemete van abban az 1·2 *m* hosszú sorban, amelyben minden 5 *cm*-re 12 csemete esik? (Van 288 csemete.)

30. Milyen messze kell jegenyefenyő csemetéinket egymástól iskoláznunk, ha azt akarjuk, hogy 1·2 *m* hosszú sorban 15 csemete nőjjön fel? (8 *cm*-re.)

31. 100 m^2 területnek 50—60 *cm* mélyen való megforgatásához középszerü viszonyok között 3·0 férfinapszám kell; hány napszám kell egy negyed kat. hold (400 □°) megforgatásához? (43·17 napszám kell. Annyiszor 3 napszám, ahányszor 100 m^2 megvan a 400 □°-ben, vagyis 1,439 m^2-ben.) Mennyibe kerül 1 k. h. megforgatása, ha 1 napszámot 1·30 koronával fizetünk? (224·48 K-ba.)

32. 1,000 db. 3 éves iskolázott lúcfenyő csemete felneveléséhez 4·5 m^2 terület szükséges; hány csemetét nevelhetünk fel egy negyed kat. holdon? (319,778 csemetét.)

33. Hány k. holdat vethetünk be 22·5 *kg* jegenyefenyő maggal fészekvetéssel, ha 1000 fészekhez 2·0 *kg* mag kell s ha 1 k. holdon (1·5 *m* fészektávolság mellett) 2,558 fészek lesz? (4·40 k. h.-at lehet bevetni.)

34. Van három beerdősítendő területünk, egyenként 0·89, 8·57, 3·16 k. h.; van hozzá 31,700 csemeténk; ha 1 k. h.-ra (1·5 *m* sor, 1 *m* csemetetávolság mellett) 3,837 csemete kell, elég lesz-e a készletünk s ha nem, mennyit kell még beszereznünk? (Be kell még szereznünk 16,723 csemetét.)

35. Mennyibe fog kerülni az előbbi példánál beszerzendő

csemete, ha 1000-nek az ára 3·60 K, a vasuti szállítás ezrenként 32 f s a hazafuvarozás 50 f? (73·92 K-ba fog kerülni.)

36. Be kell ültetnünk évente 13·89 k. holdat 1·5 *m*-es négyes hálóban (így 1 k. holdra 2,558 csemete kell) 1 éves ákáccsemetékkel. Hány m^2 területet kell a csemetekertben vetés alá minden évben megművelnünk s hány *kg* magot kell elvetnünk, hogy az ültetéshez szükséges csemetemennyiség mindig rendelkezésünkre álljon, ha 1000 db. csemete felneveléséhez 12 m^2 terület s 70 *g* mag kell? (Az évente elültetendő csemetemennyiség 35,531 db., a bevetendő terület 426 m^2 s az elvetendő mag 2·49 *kg*.)

MÁSODIK SZAKASZ.

A SZÁMOK OSZTHATÓSÁGÁRÓL.

17. §. Magyarázatok.

Valamely számot egy másik számmal oszthatónak akkor mondunk, ha az osztás után maradék nincsen; pl. 32 osztható 8-al, 15 osztható 5-el, mert az osztás után nincs maradék.

Önmagával és 1-el minden szám osztható.

Azokat a számokat, amelyeket csak 1-el és önmagukkal lehet maradék nélkül osztani: *„törzsszámok“*-nak hivjuk. Ilyenek: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 stb. Azok a számok pedig, amelyek önmagukon s az 1-en kivül még más számmal is oszthatók: *„összetett számok“*; pl. 8 összetett szám, mert 2-vel is 4-el is osztható; 9 szintén összetett szám, mert 3-al is osztható.

Ha valamely szám egy másikkal osztható, akkor azt a számot, amellyel osztunk, az osztandó *„mérték“*-ének vagy *„osztó“*-jának, az osztandót pedig az osztó *„többszörös“*-ének mondjuk; pl. 12 osztható 3-al, 3 tehát a 12-nek mértéke vagy osztója, 12 pedig a 3-nak többszöröse.

Ha két vagy több szám ugyanazzal a számmal osztható, akkor ez a szám az előbbi számok *„közös osztó“*-ja. Pl. 12 is 18 is osztható 6-al, 6 tehát 12-nek és 18-nak közös osztója; szintúgy 5 közös osztója 10, 15, 20 stb.-nek.

Az egység (1) valamennyi szám közös osztója, minélfogva nem szoktuk az 1-et is érteni, ha több szám közös mértékéről van szó. Azokat a számokat, melyeknek az 1-en kivül közös osztójuk nincsen, egymásra nézve törzsszámoknak vagy *viszonylagos törzsszámok*-nak hivjuk; pl. viszonylagos törzsszámok: 3 és 7, 4 és 9, 8 és 11, 14 és 15.

Azt a számot, mely két vagy több számmal osztható, a számok *„közös többszörös“*-ének mondjuk; pl. 12 osztható 4, 3, 2 és 6-al, tehát 12 a 4, 3, 2 és 6-nak közös többszöröse; 7 és 3-nak közös többszöröse 21 ; 5 és 2-nek 30, 20 stb., 5 és 7-nek 35.

Az a legkisebb szám, mely két vagy több számmal osztható: ezeknek a számoknak *„legkisebb közös többszörös“*-e; pl. 6-nak és 4-nek legkisebb közös többszöröse 12, mert 12 osztható 6-al is meg 4-el is s mert kisebb szám nincsen, amelyik 6-al is meg 4-el is osztható volna; 3-nak meg 5-nek legkisebb közös többszöröse 15; 9-nek meg 6-nak 18; 8-nak meg 12-nek 24.

18. §. Az oszthatóság ismertető jelei.

1. 2-vel minden páros szám osztható. (Páros szám az, amelyiknek a végén 0, 2, 4, 6 vagy 8 áll; páratlan pedig az, amelyiknek utolsó számjegye 1, 3, 5, 7 vagy 9.)

Így 34, 8, 70, 876 stb. 2-vel oszthatók, mert párosak.

2. 3-al osztható az a szám, amelynél a számjegyek összeadásából nyert összeg 3-al osztható.

Az összegezésnél csupán a számok alaki értékét tekintjük; pl. 561 osztható 3-al, mert (5 + 6 + 1 =) 12 osztható 3-al; 9378 osztható 3-al, mert (9 + 3 + 7 + 8 =) 27 osztható 3-al.

3. 4-el az a szám osztható, amelynek két utolsó számjegye egy szám gyanánt tekintve, 4-el osztható; pl. 8356 osztható 4-el, mert 56 osztható 4-el; 1732 osztható 4-el, mert 32 osztható 4-el.

4. 5-el minden olyan szám osztható, amelyiknek a végén 0 vagy 5 áll; pl. 10, 20, 1570, 960, 1865, 835 oszthatók 5-el.

5. 6-al minden olyan szám osztható, amelyik 2-vel és 3-al is osztható; pl. 684, 3018, 5802 osztható 6-al, mert mind 2-vel, mind 3-al mindegyik osztható.

6. 7-el való oszthatóságra nincs ismertető jel.

7. 8-al osztható az a szám, amelyiknek három utolsó számjegye egy szám gyanánt tekintve 8-al osztható; pl. 97128, 51216, 45872 oszthatók 8-al, mert 128, 216 és 872 oszthatók 8-al.

8. 9-el az a szám osztható, amelynél a számjegyekből — csupán alaki értéköket tekintve — képezett összeg 9-el osztható; pl. 6,372 osztható 9-el, mert (6 + 3 + 7 + 2 =) 18 osztható 9-el; 80,973 osztható 9-el, mert (8 + 0 + 9 + 7 + 3 =) 27 osztható 9-el.

Mely számokkal oszthatók: 48, 315, 400, 91537, 8712, 5007, 6216, 8050, 714, 97, 108, 6875.

HARMADIK SZAKASZ.

KÖZÖNSÉGES TÖRTEKKEL VALÓ SZÁMOLÁS.

20. §. Magyarázatok.

Ha egy egészet több egyenlő részre osztunk s az így nyert részekből egyet vagy többet veszünk számításba, akkor az a szám, amely a számításba vett *részek* mennyiségét mutatja: *tört szám*, vagy egyszerüen *tört*. (L. az 1. §-ban is.)

Ha egy egész kenyeret négy egyenlő részre osztunk, egy ilyen részre azt mondjuk, hogy negyedrész kenyér; két ilyen rész két negyedrész, három ilyen rész három negyedrész kenyér. Egy negyedrész, két negyedrész, három negyedrész törtszámok, mert az egységnek, az egy egésznek csak részeit jelentik.

Törtszám kifejezéséhez két dolog meghatározása szükséges. Először tudnunk kell, hogy hány részre osztatott az egység s másodszor, hogy hány ilyen rész vétetett számításba. Ebből kifolyólag *a tört két számból áll: az egyik azt mutatja, hogy hány részre osztatott az egység: ez a szám a tört „nevező"-je; a másik azt mutatja, hogy hány rész vétetett számításba: ez a tört „számláló"-ja.* Ha pl. az egységet 4 egyenlő részre osztom s 3 ilyen részt veszek számításba, akkor a nyert törtszám: három negyedrész. Az ilyen törtszámot úgy írjuk le, hogy a számláló alá írjuk a nevezőt s a kettő közé vízszintes vagy ferde egyenes vonalat, az ú. n. *„törtvonal"*-at húzzuk, így: $\frac{3}{4}$ vagy $^3/_4$. Itt a 3 számláló, a 4 a nevező; kimondva: három negyedrész. $^5/_7$ = öt hetedrész; e törtnél 5 a számláló, 7 a nevező; a 7 azt jelenti, hogy az egység 7 egyenlő részre osztatott s az 5 azt mutatja, hogy 5 ily osztásrész vétetett számításba. $^{13}/_{27}$ = tizenhárom huszonhetedrész; $^{85}/_{139}$ = nyolcvanöt százharminckilencedrész.

Ha a tört nevezőjéül 10, 100, 1000 stb.-t veszünk, (azaz az egységet annyi részre osztva képzeljük), akkor *tizedes tört*-et nyerünk, s ezt legtöbbször már nem törtvonallal írjuk le, hanem tizedes tört alakjában; pl. $^{2}/_{10} = 0{\cdot}2$; $^{37}/_{100} = 0{\cdot}37$; $^{8}/_{1000} = 0{\cdot}008$. A törtvonallal írt törtet a tizedes törttől való megkülönböztetés céljából *közönséges tört*-nek nevezzük.

A kétféle tört között — mint látható — lényegileg csak az a különbség, hogy míg a tizedestört nevezője csak 10, 100, 1000, stb. lehet, addig a közönséges törté lehet bármilyen szám.

Ha a törtnél annyi egységet veszünk számításba, mint ahány részre osztatott az egység, akkor — minthogy az egységnek, az egésznek minden részét számításba vettük — a tört egy egészet tesz; mondhatjuk tehát, hogy *annak a törtnek, amelyiknek számlálója egyenlő a nevezőjével, értéke egy egész*, pl. $\frac{4}{4}, \frac{9}{9}, \frac{11}{11}, \frac{87}{87} = 1$.

Ha a tört számlálója kisebb mint a nevezője, akkor a tört értéke kisebb az egységnél (*egy egésznél*); *ha ellenben a számlálója nagyobb mint a nevezője, akkor értéke nagyobb az egységnél* (*egy egésznél*). Az első fajta törtnek *valódi tört* s a második fajtának — minthogy nem csupán törtrészeket, hanem egész egységet is tartalmaz — *áltört* (nem valódi tört) a neve. Áltört az a tört is, amelyiknek a számlálója egyenlő a nevezőjével. Valódi törtek pl. $^{3}/_{9}$, $^{5}/_{13}$, $^{48}/_{117}$, $^{14}/_{37}$; áltörtek: $^{12}/_{12}$, $^{23}/_{11}$, $^{7}/_{4}$, $^{9}/_{7}$, $^{72}/_{19}$, $^{114}/_{89}$. Az áltörtet a következőleg kell értelmeznünk: pl. $^{8}/_{5}$, ennél az egység 5 részre van osztva, egy egység vagy egészből kitelik tehát 5 ötödrész; hogy a 8 ötödrészhez még hiányzó 3 ötödrész is meglegyen, egy másik, de szintén 5 részre osztott egységből kell még 3 részt vennünk. Igy ahoz, hogy a $^{8}/_{5}$ meglegyen, egy egész egység s még 3 rész a második egységből is kell.

Egész számból és egy hozzáadott törtszámból álló számot vegyes számnak hivunk; pl. $4^{7}/_{9}$, $18^{3}/_{5}$, $2^{1}/_{2}$, $108^{13}/_{27}$ vegyes számok; kimondva: négy egész hét kilencedrész; tizennyolc egész három ötödrész stb.

Minden közönséges tört jelölt osztási müveletnek tekinthető, melyben a számláló az osztandó, a nevező az osztó s a törtvonal az osztásjel, úgy, hogy pl. ez a tört $^{4}/_{7}$, teljesen egyenlő számműveletet jelent s teljesen egyenlő értékü 4 : 7 jelzett osztással. Mindkét esetben osztani kell a 4-et a 7-el s ha ezt megtesszük, a törtnél megkapjuk annak értékét tizedes törtben (l. a 23. §-t), az osztásnál pedig a hányadost; a kettőnek természetesen egymással egyenlőnek kell lenni.

A 8. §. 3. címe alatt be van bizonyítva, hogy ha mi mind az osztandót, mind az osztót ugyanazzal a számmal megszorozzuk vagy elosztjuk, ezáltal a hányados értéke nem változik. Az előbbi bekezdés révén e szabálynak a közönséges törtre vonatkozólag is állnia kell, csakhogy ennél a tagok elnevezése más lévén, a szabály így hangzik: *ha mi a törtnek mind a számlálóját, mind a nevezőjét ugyanazzal a számmal megszorozzuk vagy elosztjuk, ezáltal a tört értéke nem változik;* pl. $^6/_8$, ennek a törtnek az értéke: $6:8=0{\cdot}75$. Szorozzuk meg mind a számlálót, mind a nevezőt pl. 3-al, lesz: $(6\times3=18;\ 8\times3=24)$: $^{18}/_{24}=18:24=0{\cdot}75$. Most osszuk el mind a számlálót, mind a nevezőt pl. 2-vel, lesz $(6:2=3;\ 8:2=4)$: $^3/_4=3:4=0{\cdot}75$. A tört értéke egyik esetben sem változott, a szabály tehát áll.

Ezt a szabályt a törtek rövidítésénél érvényesítjük.

21. §. A törtek rövidítése.

A törtek rövidítése alatt azt értjük, ha valamely törtet kisebb számokkal fejezünk ki anélkül, hogy a tört értéke ezáltal megváltoznék. Ezt úgy tesszük meg, hogy *a törtnek mind a számlálóját, mind a nevezőjét ugyanazzal a számmal elosztjuk.* E műveletnél osztó csak az a szám lehet, amelyik mind a számlálót, mind a nevezőt maradék nélkül osztja, amiből következik az is, hogy rövidíteni csak olyan törtet lehet, amelynél a számlálónak és nevezőnek közös osztója van. Ha több ilyen szám is van, akkor mindig a legnagyobbat használjuk föl. Pl. $^8/_{24}$ (a legnagyobb közös osztó: 8) $\frac{8:8}{24:8}=\frac{1}{3}$; $^9/_{15}=\frac{9:3}{15:3}=\,^3/_5$; $\frac{21}{84}=\frac{21:21}{84:21}=\,^1/_4$; $\frac{63}{108}$ (9-el osztva) $=\,^7/_{12}$; $^{56}/_{80}$ (8-al osztva) $=\,^7/_{10}$; $^4/_6$ (2-vel osztva) $=\,^2/_3$.

22. §. Áltört átváltoztatása egész vagy vegyes számmá és megfordítva.

Áltörtet egész vagy vegyes számmá úgy változtatunk, hogy a számlálót elosztjuk a nevezővel. Ha az osztás után maradék nincs, akkor az átváltoztatás eredménye egész szám, ha pedig maradék marad, akkor vegyes szám; pl. $^{15}/_3=15:3=5$; $^{72}/_8=72:8=9$; $^{91}/_{13}=91:13=7$; $^{27}/_8=27:8=3\,^3/_8$; $^{67}/_9=67:9=7\,^4/_9$; $^{133}/_{21}=133:21=6\,^7/_{21}$.

Az átváltoztatás értelmezése pl. az utolsó törtnél ez: Az egység 21 részre lévén osztva, 21 ilyen rész tesz egy egészet; a 133 részből 21 rész 6-szor telik ki, tehát ennyi egészünk lesz; a $6 \times 21 = 126$ részen felül a 133-ban még meglevő 7 rész megmarad törtnek.

Egész számból áltörtet úgy csinálunk, hogy az adott (vagy tetszés szerint választott) *nevezővel megszorozzuk az egész számot; ez a szorzat lesz a tört számlálója, az adott nevező pedig a nevezője.* Ennek az eljárásnak az az alapja, hogy ha valamely számot egy másik számmal el kell osztanunk, de úgy, hogy azért a szám értéke megmaradjon, akkor azt a számot az osztó számmal meg is kell szoroznunk. Pl. 6-ból olyan tört csinálandó, amelyiknek 9 legyen a nevezője, lesz: $6 \times 9 = 54$, tehát $6 = {}^{54}/_{9}$; $12 = {}^{36}/_{3}$ $(12 \times 3 = 36$ vagy $36 : 3 = 12)$; $9 = {}^{72}/_{8}$; $7 = {}^{28}/_{4}$; $5 = {}^{35}/_{7}$.

Vegyes számból áltörtet úgy csinálunk, hogy a vegyes számban levő egész számot megszorozzuk a vegyes számban levő tört nevezőjével s a szorzathoz hozzáadjuk a tört számlálóját; ez az összeg lesz az áltört számlálója, a vegyes számban levő tört nevezője pedig az áltört nevezője; pl. $3^2/_3 = (3 \times 3 = 9;\ 9 + 2 = 11) = {}^{11}/_{3}$; $7^8/_9 = (7 \times 9 = 63;\ 63 + 8 = 71) = {}^{71}/_{9}$; $16^1/_3 = (16 \times 3 = 48;\ 48 + 1 = 49) = {}^{49}/_{3}$. Ez az átváltoztatás lépésről-lépésre menve úgy történik, hogy először a vegyes szám egész számából a vegyes szám tört számával egyenlő nevezőjű törtet csinálunk, ezt a törtet azután hozzáadjuk a vegyes számban levő törthöz s az összeg lesz a vegyes számnak megfelelő áltört. Lépésről-lépésre menve az első példánál így járunk el: $3^2/_3 = (3 \times 3 = 9)\ {}^{9}/_{3} + {}^{2}/_{3} = (9 + 2 = 11) = {}^{11}/_{3})$.

23. §. Közönséges tört átváltoztatása tizedes törtté és megfordítva.

a) *Közönséges törtet tizedes törtté úgy változtatunk, hogy (a közönséges törtben jelölt műveletet végrehajtjuk, azaz:) a számlálót elosztjuk a nevezővel.* Az osztást addig folytatjuk, míg vagy már maradék nincsen, vagy pedig a célhoz elég tizedes jeggyel rendelkezünk. Ha vegyes számmal van dolgunk, akkor csak a benne levő törtet kell tizedes törtté változtatnunk s ha ez megvan, ehhez hozzáadjuk az egész számot. Pl. ${}^{2}/_{5} = 2 : 5 = 0{\cdot}4$; ${}^{5}/_{8} = 5 : 8 = 0{\cdot}625$; ${}^{13}/_{24} = 13 : 24 = 0{\cdot}54167$; ${}^{12}/_{5} = 12 : 5 = 2{\cdot}4$; ${}^{32}/_{7} = 32 : 7 = 4{\cdot}572$;

$^{63}/_8 = 63:8 = 7{\cdot}875$; $6^3/_7 = ?$ $^3/_7 = 0{\cdot}429$, tehát $6^3/_7 = 6{\cdot}429$; $28^4/_7 = ?$ $^4/_7 = 4:7 = 0{\cdot}571$, tehát $28^4/_7 = 28{\cdot}571$.

b) *Tizedes törtet közönséges törtté úgy változtatunk át, hogy a tizedes pont elhagyásával leírjuk a számjegyeket úgy, ahogy vannak s nevezőül annyit írunk alájok, mint amennyi a helyértéke a tizedes tört legalsóbb rendű számjegyének.* Rövidebben s egyszerűbben mondva: a hányadrésznek a tizedestörtet kimondjuk, annyiadrésznek írjuk le közönséges tört alakjában. Ha a tizedes törtben egész is van, ezt többnyire meghagyjuk egésznek s csakis a tizedesjegyeket változtatjuk át, vagyis a tizedestörtből ez esetben vegyes számot csinálunk. A nyert törtet lehetőleg rövidítjük. Pl.

$0{\cdot}45 = {^{45}/_{100}}$ s rövidítve $= {^9/_{20}}$ (0·45 kimondva: zéró egész negyvenöt századrész; a zéró egészet, vagyis az egészek hiányát a közönséges törtnél nem szoktuk feltüntetni s így ha a negyvenöt századrészt közönséges tört alakjában egyszerűen így: $^{45}/_{100}$ leírjuk, megvan az átváltoztatás.) $0{\cdot}08 = {^8/_{100}}$ s rövidítve $= {^2/_{25}}$; $0{\cdot}2 = {^2/_{10}} = {^1/_5}$; $0{\cdot}25 = {^{25}/_{100}} = {^1/_4}$; $0{\cdot}50 = {^{50}/_{100}} = {^1/_2}$; $0{\cdot}75 = {^{75}/_{100}} = {^3/_4}$; $0{\cdot}382 = {^{282}/_{1000}} = {^{191}/_{500}}$; $6{\cdot}85 = \frac{685}{100} = {^{137}/_{20}}$; $4{\cdot}6 = {^{46}/_{10}} = {^{23}/_5}$; $9{\cdot}6 = 9^6/_{10} = 9^3/_5$; $47{\cdot}02 = 47^2/_{100} = 47^1/_{50}$; $108{\cdot}35 = 108^{35}/_{100} = 108^7/_{20}$.

24. §. A törteknek egyenlő nevezőjűekké való változtatása.

Közös nevezőjü vagy egyenlő nevezőjü törtek azok, amelyeknek ugyanaz a szám a nevezőjük; ilyenek pl. $^2/_9$, $^5/_9$, $^8/_9$, $^{17}/_9$, $^{35}/_9$, vagy $^4/_{13}$, $^9/_{13}$, $^{21}/_{13}$. A nem egyenlő nevezőjü törteket különnevezőjűeknek vagy nem egyenlő nevezőjűeknek hivjuk.

A nem egyenlő nevezőjü törteknek egyenlő nevezőjűekké való változtatása a következőleg történik: az eredeti nevezőknek kikeressük a legkisebb közös többszörösét, ez lesz a közös nevező; ezután a törtek számlálóját egyenként úgy változtatjuk át, hogy a közös nevezőt elosztjuk az eredeti nevezővel, a nyert hányadossal megszorozzuk az eredeti számlálót s a szorzat lesz az új számláló; pl. egyenlő nevezőjűekké változtatandók: $^2/_3$ és $^3/_4$. A nevezők legkisebb közös többszöröse $(3 \times 4 =)$ 12, ez lesz az új, a közös nevező. Most a leírt módon először $^2/_3$-ból csinálunk oly törtet, amelynek 12 a nevezője: $12:3 = 4$, $2 \times 4 = 8$ az új számláló, $^2/_3$-ból lett tehát $^8/_{12}$; $^3/_4$-el ugyanezt téve: $12:4 = 3$,

$3 \times 3 = 9$ az új számláló, $^3/_4$-ből lett tehát $^9/_{12}$. Összefoglalva: $^2/_3$ és $^3/_4 = {^8/_{12}}$ és $^9/_{12}$.

Ennél az eljárásnál — ha a közös nevező már megvan — egyebet tulajdonképpen nem teszünk a törtekkel, mint mind a számlálójukat, mind a nevezőjüket megszorozzuk ugyanazzal a számmal. A példában $^2/_3$-nál 4-el s $^3/_4$-nél 3-al van megszorozva mind a számláló, mind a nevező s így lett belőlük $^8/_{12}$ illetve $^9/_{12}$. Ha $^2/_3$-ból olyan törtet akarunk csinálni, amelyiknek 12 legyen a nevezője, akkor a $^2/_3$ nevezőjét, a 3-at 4-el kell megszoroznunk; de hogy a tört értéke meg ne változzék ugyanannyival meg kell szoroznunk a tört eredeti számlálóját a 2-t is. Az eljárásnál tehát azért osztjuk el a közös nevezőt az eredeti nevezővel, hogy megtudjuk, mennyivel kellett utóbbit megszoroznunk, hogy a közös nevezőt adja, hogy ugyanannyival (a kijött hányadossal) megszorozhassuk a számlálót is.

Példák.

1. Közös nevezőjűekké változtatandók: $^3/_4$, $^5/_6$, $^1/_2$, $^4/_5$, $^2/_3$.

$$\begin{array}{l|l} 4,\ 6,\ \cancel{2},\ 5,\ \cancel{3} & 2 \\ 2,\ 3,\ \quad 5 & \end{array}$$

$2 \times 5 \times 3 \times 2 = 60$ a legkisebb közös többszörös s egyszersmind a közös nevező.

$^3/_4$-ből lesz $(60:4 = 15 \ldots 15 \times 3 = 45) = {^{45}/_{60}}$
$^5/_6$-ból „ $(60:6 = 10 \ldots 10 \times 5 = 50) = {^{50}/_{60}}$
$^1/_2$-ből „ $(60:2 = 30 \ldots 30 \times 1 = 30) = {^{30}/_{60}}$
$^4/_5$-ből „ $(60:5 = 12 \ldots 12 \times 4 = 48) = {^{48}/_{60}}$
$^2/_3$-ból „ $(60:3 = 20 \ldots 20 \times 2 = 40) = {^{40}/_{60}}$

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3} = \frac{45}{60}, \frac{50}{60}, \frac{30}{60}, \frac{48}{60}, \frac{40}{60}.$$

2. Egyenlő nevezőjűekké változtatandók: $^6/_8$, $^3/_6$, $^1/_4$, $^2/_3$.

$$\begin{array}{l|l} 8,\ 6,\ 4,\ \cancel{3} & 2 \\ 4,\ 3, & \end{array}$$

A legkisebb közös többszörös, tehát a közös nevező is: $4 \times 3 \times 2 = 24$

$^6/_8$-ból lesz $(24:8 = 3 \ldots 3 \times 6 = 18) = {^{18}/_{24}}$
$^3/_6$-ból „ $(24:6 = 4 \ldots 4 \times 3 = 12) = {^{12}/_{24}}$
$^1/_4$-ből „ $(24:4 = 6 \ldots 6 \times 1 = 6\ ) = {^6/_{24}}$
$^2/_3$-ból „ $(24:3 = 8 \ldots 8 \times 2 = 16) = {^{16}/_{24}}$

$$\frac{6}{8}, \frac{3}{6}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3} = \frac{18}{24}, \frac{12}{24}, \frac{6}{24}, \frac{16}{24}.$$

Kellő gyakorlat mellett a zárójelbe tett műveleteket fejben szoktuk elvégezni.

25. §. Közönséges törtek összeadása.

Egyenlő nevezőjü törteket úgy adunk össze, hogy összeadjuk a törtek számlálóit s az összeg alá a közös nevezőt változatlanul odaírjuk (az eredményt amennyire lehet egyszerüsítjük, esetleg tizedes törtté változtatjuk). *Ha a törtek nem egyenlő nevezőjűek, akkor először olyanokká kell azokat változtatnunk.*

1. $^8/_{12}+{}^3/_{12}+{}^5/_{12}=\frac{8+3+5}{12}=\frac{16}{12}$. Az eredmény áltört; válasszuk belőle külön az egészeket s külön a törtrészeket, vagyis alakítsuk át vegyes számmá, lesz belőle $(16:12)=1^4/_{12}$, $^4/_{12}$ rövidíthető 4-el s így $1^4/_{12}=1^1/_3$. Tehát $^8/_{12}+{}^3/_{12}+{}^5/_{12}=1^1/_3$.

2. $^7/_{15}+{}^2/_{15}+{}^{11}/_{15}+{}^9/_{15}+{}^{24}/_{15}+{}^{36}/_{15}={}^{89}/_{15}=5^{14}/_{15}$.

3. $^2/_3+{}^5/_6+{}^3/_4+{}^1/_2=\frac{8+10+9+6}{12}=\frac{33}{12}=2^9/_{12}=2^3/_4$ vagyis $2{\cdot}75$.

4. $^7/_5+{}^1/_8+{}^2/_3=\frac{168+15+80}{120}=\frac{263}{120}=2^{23}/_{120}=2{\cdot}1917$.

Ha az összeadandó törtek között egész számok vagy vegyes számok vannak, akkor először összeadjuk a törteket, a belőlük származó egészeket hozzáadjuk az egészekhez s végül a két eredményt együvé írjuk; pl.

5. $^3/_7+14+{}^2/_3+65^1/_4+3^3/_4+{}^1/_3+80=?$

$^3/_7+{}^2/_3+{}^1/_4+{}^3/_4+{}^1/_3=\frac{36+56+21+63+28}{84}=\frac{204}{84}=2\frac{36}{84}=2^3/_7$

$14+65+3+80=162$. A főösszeg $=162+2^3/_7=164^3/_7=164{\cdot}429$.

26. §. Közönséges törtek kivonása.

Egyenlő nevezőjü törtek kivonása úgy történik, hogy a számlálókat egymásból kivonjuk s a különbség alá nevezőül a közös nevezőt írjuk (az eredményt lehetőleg egyszerüsítjük s végül esetleg tizedes törtté változtatjuk.) Ha a törtek nem egyenlő nevezőjüek, akkor először ilyenekké kell azokat változtatni. Ha a feladványban egész szám vagy vegyes szám fordul elő, akkor — aszerint amint a szükség kívánja — a meglevő egészekből egy vagy több egységet törtté alakítunk át.

Példák.

1. *a)* $^8/_{12}-{}^3/_{12}=\frac{8-3}{12}={}^5/_{12}$; *b)* $^{17}/_{25}-{}^9/_{25}={}^8/_{25}$; *c)* $^{21}/_{15}-{}^3/_{15}={}^{18}/_{15}=1^3/_{15}=1^1/_5$; *d)* $\frac{63}{48}-{}^9/_{48}={}^{54}/_{48}=1^6/_{48}=1^1/_8=1{\cdot}125$.

2. *a)* $^9/_{12}-{}^5/_8=\frac{72-60}{96}=\frac{12}{96}={}^1/_8=0{\cdot}125$; *b)* $\frac{36}{8}-{}^7/_3=\frac{108-56}{24}=\frac{52}{24}=2\frac{4}{24}=2^1/_6$; *c)* $\frac{12}{7}-\frac{1}{3}=\frac{36-7}{21}=\frac{29}{21}=1\frac{8}{21}=1{\cdot}381$.

3. *a*) $26 - {}^5/_8 = 25^8/_8 - {}^5/_8 = 25^3/_8$; *b*) $45 - \frac{36}{14} = 42\frac{42}{14} - \frac{36}{14} = 42^6/_{14} = 42^3/_7$; *c*) $5 - {}^2/_5 = 4^5/_5 - {}^2/_5 = 4^3/_5 = 4{\cdot}6$.

4. *a*) $12^3/_7 - {}^6/_7 = 11^{10}/_7 - {}^6/_7 = 11^4/_7$; *b*) $9^1/_3 - {}^3/_5 = 9^5/_{15} - {}^9/_{15} = 8^{20}/_{15} - {}^9/_{15} = 8^{11}/_{15} = 8{\cdot}733$; *c*) $6^3/_4 - {}^{15}/_6 = 6^{18}/_{24} - {}^{60}/_{24} = 4^{66}/_{24} - \frac{60}{24} = 4^6/_{24} = 4^1/_4 = 4{\cdot}25$.

5. *a*) ${}^{37}/_6 - 3 = 6^1/_6 - 3 = 3^1/_6$; *b*) ${}^{42}/_{12} - 2 = 3^6/_{12} - 2 = 1^6/_{12} = 1^1/_2$.

6. *a*) $25 - 9^2/_3 = 24^3/_3 - 9^2/_3 = 15^1/_3$; *b*) $8 - 5^2/_7 = 7^7/_7 - 5^2/_7 = 2^5/_7 = 2{\cdot}714$.

7. *a*) ${}^{27}/_6 - 2^1/_6 = 4^3/_6 - 2^1/_6 = 2^2/_6 = 2^1/_3$; *b*) ${}^{38}/_5 - 6^3/_4 = 7^3/_5 - 6^3/_4 = 7^{12}/_{20} - 6^{15}/_{20} = 6^{32}/_{20} - 6^{15}/_{20} = {}^{17}/_{20} = 0{\cdot}85$.

8. *a*) $19^2/_3 - 15^1/_3 = 4^1/_3$; *b*) $26^2/_7 - 12^5/_7 = 25^9/_7 - 12^5/_7 = 13^4/_7$; *c*) $8^3/_5 - 6^2/_3 = 8^9/_{15} - 6^{10}/_{15} = 7^{24}/_{15} - 6^{10}/_{15} = 1^{14}/_{15} = 1{\cdot}93$; *d*) $67^4/_7 - 48^7/_9 = 67\frac{36}{63} - 48^{49}/_{63} = 66\frac{99}{63} - 48\frac{49}{63} = 18\frac{50}{63} = 18{\cdot}793$.

27. §. Közönséges törtek szorzása.

a) *Tört szorzása egész számmal és megforditva*

Törtet egész számmal vagy egész számot törttel úgy szorzunk, hogy a tört számlálóját megszorozzuk az egész számmal s a szorzat alá a tört nevezőjét változatlanul aláírjuk (az eredményt lehetőleg egyszerüsítjük s végül esetleg tizedes törtté változtatjuk). Ha a tört helyett vegyes szám van a példában, akkor azt először áltörtté alakítjuk át. Pl.

1. *a*) ${}^7/_9 \times 6 = {}^{42}/_9 = 4^6/_9 = 4^2/_3$; *b*) $\frac{23}{5} \times 12 = \frac{276}{5} = 55^1/_5 = 55{\cdot}2$.

2. *a*) $18 \times {}^3/_5 = {}^{54}/_5 = 10^4/_5 = 10{\cdot}8$; *b*) $9 \times {}^5/_6 = {}^{45}/_6 = 7^3/_6 = 7^1/_2 = 7{\cdot}5$.

3. *a*) $3^4/_5 \times 7 = {}^{19}/_5 \times 7 = {}^{133}/_5 = 26^3/_5$; *b*) $13 \times 4^5/_8 = 13 \times {}^{37}/_8 = {}^{481}/_8 = 60^1/_8$.

Abban az esetben, ha az egész szám a tört nevezőjében maradék nélkül megvan, törtet egész számmal úgy is szorozhatunk, hogy a tört nevezőjét elosztjuk az egész számmal s a hányados fölibe a számlálót írjuk változatlanul; pl.

4. *a*) ${}^5/_{12} \times 3 = {}^5/_4 = 1^1/_4$ (az első eljárás szerint: ${}^5/_{12} \times 3 = {}^{15}/_{12}$, hárommal röviditve $= {}^5/_4, = 1^1/_4$); *b*) ${}^{38}/_{21} \times 7 = {}^{38}/_3 = 12^2/_3$; *c*) $16^4/_{15} \times 3 = (16 \times 3 = 48;\ {}^4/_{15} \times 3 = {}^4/_5) = 48^4/_5 = 48{\cdot}8$; *d*) $4 \times 6^7/_{24} = 24^7/_6 = 25^1/_6$.

b) *Tört szorzása törttel.*

Törtet törttel ugy szorzunk, hogy külön összeszorozzuk a számlálókat s külön a nevezőket (vagy másként a számlálót a számlálóval, a nevezőt a nevezővel szorozzuk meg), *a számlálók szorzata adja az eredmény számlálóját s a nevezőké a nevezőjét.* Az eredményt lehetőleg egyszerüsítjük s végül esetleg tizedes törtté változtatjuk. A vegyes számot először áltörtté alakítjuk át. Pl.

1. *a*) $^9/_{15} \times {}^2/_3 = {}^{18}/_{45} = {}^6/_{15} = {}^2/_5 = 0{\cdot}4$; *b*) $^{23}/_8 \times {}^5/_6 = {}^{115}/_{48} = 2^{19}/_{48} = 2{\cdot}396$.

2. *a*) $3^2/_7 \times {}^2/_5 = {}^{23}/_7 \times {}^2/_5 = {}^{46}/_{35} = 1^{11}/_{35} = 1{\cdot}314$; *b*) $^{37}/_{11} \times 3^4/_5 = {}^{37}/_{11} \times {}^{19}/_5 = \frac{703}{55} = 12\frac{43}{55} = 12{\cdot}782$; *c*) $2^1/_3 \times {}^6/_7 = {}^7/_3 \times {}^6/_7 = {}^{42}/_{21} = 2$.

3. *a*) $5^2/_3 \times 3^4/_7 = {}^{17}/_3 \times {}^{25}/_7 = \frac{425}{21} = 20^5/_{21}$; *b*) $8^1/_4 \times 2^3/_4 = {}^{33}/_4 \times {}^{11}/_4 = \frac{363}{16} = 22^{11}/_{16} = 22{\cdot}6875$.

28. §. Közönséges törtek osztása.

a) *Ha az osztó egész szám.*

Törtet egész számmal ugy osztunk, hogy a tört nevezőjét megszorozzuk az egész számmal s a számlálóját a szorzat fölibe változatlanul odairjuk (az eredményt lehetőleg egyszerüsítjük s végül esetleg tizedes törtté változtatjuk.) Ha az osztandó vegyes szám, ezt legelőször is áltörtté alakítjuk át. Pl.

1. *a*) $^5/_9 : 6 = {}^5/_{54} = 0{\cdot}0926$; *b*) $^{38}/_{13} : 7 = {}^{38}/_{91} = 0{\cdot}418$; *c*) $^{65}/_7 : 3 = {}^{65}/_{21} = 3^2/_{21} = 3{\cdot}095$; *d*) $^{15}/_{17} : 5 = {}^{15}/_{85} = {}^3/_{17} = 0{\cdot}176$.

2. *a*) $6^2/_3 : 4 = {}^{20}/_3 : 4 = {}^{20}/_{12} = 1^8/_{12} = 1^2/_3$; *b*) $7^3/_5 : 9 = {}^{38}/_5 : 9 = {}^{38}/_{45} = 0{\cdot}844$; *c*) $12^5/_7 : 3 = {}^{89}/_7 : 3 = {}^{89}/_{21} = 4^5/_{21} = 4{\cdot}238$.

Abban az esetben, ha az egész szám a törtnek a számlálójában maradék nélkül megvan, törtet egész számmal úgy is oszthatunk, hogy a tört számlálóját elosztjuk az egész számmal s a hányados alá a nevezőt írjuk változatlanul; pl.

3. *a*) $^{12}/_{17} : 6 = {}^2/_{17} = 0{\cdot}118$, (az első eljárás szerint: $^{12}/_{17} : 6 = {}^{12}/_{102}$, hattal rövidítve $= {}^2/_{17} = 0{\cdot}118$); *b*) $^{21}/_{35} : 3 = {}^7/_{35} = {}^1/_5 = 0{\cdot}2$; *c*) $4^2/_3 : 7 = {}^{14}/_3 : 7 = {}^2/_3$; *d*) $16^1/_5 : 9 = {}^{81}/_5 : 9 = {}^9/_5 = 1^4/_5 = 1{\cdot}8$.

b) *Ha az osztó törtszám.*

Egész számot vagy törtet törttel úgy osztunk, hogy megforditott törttel (megforditott osztóval) szorzunk. (A megforditás alatt azt kell érteni, hogy a számlálót tesszük nevezővé s a nevezőt számlálóvá.) Az eredményt lehetőleg egyszerüsítjük s végül esetleg tizedes törtté változtatjuk. A vegyes számot előbb áltörtté alakítjuk át. Pl.

1. *a*) $22 : {}^2/_3 = 22 \times {}^3/_2$ (mert ${}^2/_3$ megfordítva ${}^3/_2$) $= {}^{66}/_2 = 33$. (A megfordított törttel való szorzásnak magyarázata ez: $22 : {}^2/_3$. Itt olyan számot keresünk, amely ${}^2/_3$-szor véve vagy amelynek 3-ad része 2-szer véve 22-t ad (az osztó és hányados szorzata = az osztandóval.) Az a szám, mely 2-szer véve ad 22-t $\frac{22}{2}$. Ennek 3-ad része csak úgy adhat 22-öt, ha ${}^{22}/_2$-t 3-szor nagyobbra, azaz ha $3 \times \frac{22}{2}$-t veszünk, ami meg ${}^3/_2 \times 22$-vel egyenlő); *b*) $37 : {}^4/_5 = 37 \times {}^5/_4 = \frac{185}{4} = 46^1/_4$.

2. *a*) ${}^5/_7 : {}^3/_4 = {}^5/_7 \times {}^4/_3 = {}^{20}/_{21}$; *b*) ${}^7/_9 : {}^{11}/_{23} = {}^7/_9 \times {}^{23}/_{11} = \frac{161}{99} = 1\frac{62}{99} = 1{\cdot}626$.

3. *a*) $6^2/_5 : {}^4/_7 = {}^{32}/_5 : {}^4/_7 = {}^{32}/_5 \times {}^7/_4 = \frac{224}{20} = 11^4/_{20} = 11^1/_5 = 11{\cdot}2$; *b*) $11^1/_3 : {}^2/_5 = {}^{34}/_3 : {}^2/_5 = {}^{34}/_3 \times {}^5/_2 = {}^{170}/_6 = 28^2/_6 = 28^1/_3$.

4. *a*) $9^5/_6 : 2^1/_3 = {}^{59}/_6 : {}^7/_3 = {}^{59}/_6 \times {}^3/_7 = {}^{177}/_{42} = 4^9/_{42} = 4^3/_{14} = 4{\cdot}214$; *b*) $5^2/_3 : 3^2/_7 = {}^{17}/_3 : {}^{23}/_7 = {}^{17}/_3 \times {}^7/_{23} = {}^{119}/_{69} = 1^{50}/_{69} = 1{\cdot}725$.

29. §. Vegyes példák a közönséges törtekkel való számolásra s azok gyakorlati megfejtése.

A közönséges törtekkel való számolás a tizedes törtekkel való számolásnál sokkal hosszadalmasabb, nehézkesebb lévén, a gyakorlatban legtöbbször azt tesszük, hogy a feladványban levő közönséges törtet először is tizedes törtté változtatjuk át s a megfejtést a tizedes törttel végezzük. Kivételt csak azok az esetek tesznek, amelyeknél a közönséges törtekkel is hamar célt érünk vagy pedig amelyeknél a közönséges törtekkel való megfejtés pontosabb eredményt ad, (mindenütt, ahol a közönséges törtnek tizedes törtté való átváltoztatásánál folytonos maradék van) s pontos eredményre éppen szükségünk van.

Példák.

1. Nyárban többnyire 12 óra hosszat dolgoztatunk (reggel 5-től este $7^1/_2$ óráig, reggeli s uzsonnakor ${}^1/_2$ óra s délben 1 óra pihenéssel), ez esetben minden munkaóra ${}^1/_{12}$ napszám. Ilyen feltétel mellett dolgozott egyik munkásunk 3 napon át; az első nap

9 óráig, a második nap 7 óráig s a harmadik nap 11 óráig; hány napszámja van összesen s mennyi a keresménye, ha a napibér (12 órai munkaidőre) 1·4 K? $\frac{9+7+11}{12} = \frac{27}{12} = 2^3/_{12} = 2^1/_4 = 2{\cdot}25$ napszám; $2{\cdot}25 \times 1{\cdot}4 = 3{\cdot}15$ K keresmény.

2. Naponta 9 órai munkaidő mellett egyik munkás heti bérjegyzékébe a következő napszámok vannak följegyezve: 1, $^2/_9$, 1, $^8/_9$, $^5/_9$, 1; hány napszámja van összesen s mennyi a heti keresménye 1·5 K napibér mellett? (7 K a keresménye.)

3. Bizonyos munkánál dolgozott 5 munkás egyenként $9^3/_4$, $7^1/_2$, $8^{11}/_{12}$, $11^7/_{12}$, $10^1/_4$ napot; hány napszám kellett annak a munkának az elvégzéséhez s mennyi volt rá a kiadás, ha a napibér 1 K 60 f? (A kiadás 76·80 K.)

4. Mennyi 450·36 K-nak $^3/_4$ része?

Valamely számnak közönséges törtben kifejezett hányadrészét úgy kapjuk meg, ha azt a számot megszorozzuk a hányadrészt jelentő törtszámmal. (L. a 7. §. 19. példáját.) 450·36-nak $^3/_4$ része tehát: $450{\cdot}36 \times {}^3/_4 = \frac{450{\cdot}36 + 3}{4}$; $450{\cdot}36 \times 3 = 1351{\cdot}08$; $1351{\cdot}08 : 4 = 337{\cdot}77$. Könnyebben célt érünk, ha a müveletet úgy hajtjuk végre, hogy először 4-el osztunk s a kijött hányadost szorozzuk 3-al, így $\frac{450{\cdot}36}{4} \times 3$; $450{\cdot}36 : 4 = 112{\cdot}59$; $112{\cdot}59 \times 3 = 337{\cdot}77$. (Ha a 450·36-t elosztjuk 4-el, megkapjuk annak egy negyedrészét, amit 3-szor kell vennünk, hogy a három negyedrész ($^3/_4$) meglegyen.) Legcélszerübben pedig úgy teszünk, hogy a $^3/_4$-t átváltoztatjuk tizedes törtté s ezzel szorozzuk meg a 450·36-t. $^3/_4 = 0{\cdot}75$ tehát: $450{\cdot}36 \times {}^3/_4 = 450{\cdot}36 \times 0{\cdot}75 = 337{\cdot}77$.

5) Mennyi 224·73 k. holdnak $^5/_6$ része? Annyi mint $\frac{224{\cdot}73}{6} \times 5$; $224{\cdot}73 : 6 = 37{\cdot}455$; $37{\cdot}455 \times 5 = 187{\cdot}275$. Ha az $^5/_6$-t tizedes törtté változtatjuk: $^5/_6 = 0{\cdot}8333$; $224{\cdot}73 \times 0{\cdot}8333 = 187{\cdot}268$. Amint látjuk ez az eredmény az előbbi, egész pontos eredménytől sokban különbözik, pedig négy tizedes jeggyel számítottunk. Ez azért van, mert az $^5/_6$ nem alakítható át véges tizedes törtté; ha tehát pontos eredményre van szükségünk, akkor megmaradunk a közönséges törttel való kiszámításnál.

6. 174·36 k. h. kiterjedésü rétet föl kell osztani három részre úgy, hogy *A* $^3/_{12}$-t, *B* $^5/_{12}$-t, *C* $^4/_{12}$-t kapjon; hány k. hold lesz egynek-egynek a része?

Itt legcélszerübben úgy járunk el, hogy először elosztjuk a 174·36-t 12-vel, hogy megkapjuk egy tizenkettedrészét, amit aztán

A-nál 3-szor, *B*-nél 5-ször és *C*-nél 4-szer veszünk; 174·36 : 12 = 14·53, lesz tehát: *A* $^3/_{12}$; 14·53 × 3 = . . . 43·59

B $^5/_{12}$;	14·53 × 5 = . . .	72·65
C $^4/_{12}$;	14·53 × 4 = . . .	58·12
összesen = $^{12}/_{12}$		174·36

A tizedes törtekkel való számítás itt hosszadalmasabb volna.

7. Valaki 878·68 k. h. erdejét úgy rendeli fölosztani örökösei közt, hogy *A* kapja $^2/_5$ részét, *B* $^1/_3$ részét, *C* pedig a maradékot; hányadrészt kap *C* s mennyi egynek-egynek az öröksége?

A meg *B*-nek a hányadrészét össze kell adnunk, hogy megtudhassuk mennyi a *C*-é: $^2/_5 + ^1/_3 = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$; minthogy az egész örökség $\frac{15}{15}$ részt tesz, *C*-nek a része $\frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$; lesz tehát: 878·68 : 15 = 58·579 (58·579 878·68-nek egy tizenötödrésze).

A $^6/_{15}$;	58·579 × 6 =	351·474 =	351·47
B $^5/_{15}$;	58·579 × 5 =	292·895 =	292·89
C $^4/_{15}$;	58·579 × 4 =	234·316 =	234·32
Összesen = $^{15}/_{15}$; =		878·685	878·68

(Ugyis kiszámíthatnók, hogy vennénk mindjárt 878·68-nak *A*-nál $^2/_5$, (elosztjuk 5-tel, hogy meglegyen egy ötödrésze s azt megszorozzuk 2-vel); *B*-nél $^1/_3$ (elosztjuk 3-al s megvan az egy harmadrésze) részét s ami még a holdakból megmaradna, az volna a *C*-é; a hányadrészt mutató számot azonban ebben az esetben is az előbbi módon kellene kiszámítani.

Tizedes törtekkel így járunk el: $^2/_5$ = 0·400; $^1/_3$ = 0·333; *C*-nek a hányadrésze annyi, amennyi 0·400 + 0·333 = 0·733-t egy egészre (1·000) kiegészít, azaz 1·000 — 0·733 = 0·267; lesz tehát:

A 0·400;	878·68 × 0·4 =	351·47
B 0·333;	878·68 × 0·333 =	292·70
C 0·267;	878·68 × 0·267 =	234·61
Összesen = 1·000		878·68

8. Mennyi 1,493 k. 1,215 □-ölnyi erdőnek $^1/_3$, $^2/_5$, $^4/_7$, $^6/_8$, $^7/_9$, $^9/_{15}$ része?

9. 3,898 k. hold 763 □-öl kiterjedésü erdőt el kell osztani négyfelé úgy, hogy *A* $^2/_7$ részt, *B* $^5/_9$ részt kapjon, *C* meg *D* pedig a maradéknak felét-felét; hány k. hold jut egynek-egynek? (*A* = 1113·85, *B* = 2165·83, *C* = 309·40, *D* = 309·40 k. h.)

10. Az almafa sulya légenszáradt állapotban ugyanolyan tér-

fogatú víz sulyának csak $^{3}/_{4}$ részét teszi; hány *kg* nehéz 1 m^3 almafa? (1 m^3 víz — mint tudjuk — 1000 *kg*).

11. Egyik erdőrészletben 2,572 m^3 fát becsültek; ennek a fatömegnek $^{1}/_{5}$ része műfa, a többi tűzifa; hány m^3 a műfa s hány a tűzifa? (Tűzifa = 2057·6 m^3).

12. Bizonyos fuvarosnak el kell szállitania 124·5 ür-m^3 fát; hányszorra fogja elvinni, ha egyszerre $1^{3}/_{4}$ ür-m^3-t rak fel s hány nap alatt készül el vele, ha naponta háromszor fordulhat? (23·7 nap alatt.)

13. Ha $9^{2}/_{3}$ *hl* ákáchüvelyből 44·8 *kg* magot kaptunk; hány *kg* magot adott 1 *hl* hüvely? (4·63 *kg*-ot.)

14. 1·5 *m*-es négyes hálóban 1 k. h.-ra 2,558 csemete kell; hány csemete szükséges $19^{4}/_{5}$ k. h.-ra? (50,648 csemete.)

15. $32^{5}/_{6}$ öl hosszú kerités elkészítésén 15 munkás 7 óra hosszáig dolgozott; hány napszám kellett ehhez a keritéshez, ha a napi munkaidőt 12 órára vesszük (8·75 napszám kellett) s hány napszám kell egy méter ilyen kerítés elkészítéséhez? (1 *m*-hez 0·14 napszám kell.)

16. Ha 9 órai napi munkaidő mellett 2 munkás egyik nap csak 7 s a másik nap csak 8 órát dolgozott, mennyit kerestek összesen, ha a napibér 1 K 75 f? (5·83 K-t kerestek.)

17. 48,376 db. ákáckarót termeltettünk azzal a feltétellel, hogy minden 5 karóból 1 a termelőé, 4 a mienk, (mint mondani szokták: ötödében). Hány karót kapnak a termelők s mennyi marad nekünk? Ha 5 karóból a termelők 1-et s mi 4-et kapunk, akkor a termelőknek az összes karómennyiség $^{1}/_{5}$ s nekünk $^{4}/_{5}$ része jut; 48,376-nak egy ötödrésze (osztva 5-el) = 9,675 db. — ez a termelőké — s négy ötödrésze (az egy ötödrész 4-szer véve) = 38,700 db. — s az az egy, ami még fenmaradt, a mienk. A mi részünket úgy is kiszámíthatjuk, hogy az összes mennyiségből kivonjuk a termelőkét: 48,376 — 9,675 = 30,701. Vagy tizedes törtekkel dolgozva: $^{1}/_{5}$ = (1 : 5 =) 0·2; $^{4}/_{5}$ = (4 : 5 =) 0·8; 48,376 × 0·2 = 9,675; 48,376 × 0·8 = 30,701 (javítással.)

18. Többen 183 boglya szénát termeltek — egyéb járandóságot figyelmen kivül hagyva — azzal a föltétellel, hogy minden tizenharmadik (tizenharmadában) az övék; hány boglya jut nekik s hány nekünk? (A termelőké minden 13-ból 1, tehát $^{1}/_{13}$, ez = 14 boglya; a mienk $^{12}/_{13}$, ez = 169 boglya.)

19. Termeltettünk 648 kéve nádat úgy, hogy minden 7 kévé-

ből 3 a termelőké, 4 a mienk (három hetedében); hány kéve jut egy-egy részre? (A termelőké $^3/_7 = 278$ kéve, a mienk $^4/_7 = 370$ kéve; 648-nak egy hetedrésze $= 92{\cdot}6$.)

20. Célszerüen értékesíthetjük a közönséges törtekről szerzett ismereteinket *alsóbbrendü egységek összevonásánál* (l. a 10. §-t). Maga az eljárás ugyan a régi marad, a közönséges törtek révén azonban világosabbá és könnyebben megtarthatóvá válik előttünk. Vegyünk fel példát: 27 láb hány öl? Hogy mit kell tennünk, hogy a felelet meglegyen, a következőleg okoskodjuk ki: 1 ölben van 6 láb, 1 láb tehát egy hatodrésze ($^1/_6$) az ölnek ($2' = {}^2/_6$, $8' = {}^8/_6$, $13' = {}^{13}/_6$) s $27' = {}^{27}/_6$ öl s így a $27'$ értéke ölben közönséges tört alakjában kifejezve már meg is van; ha ezt tizedes törtté változtatjuk — $27 : 6 = 4{\cdot}5$, $27'$ tehát $= 4{\cdot}5^0$ — éppen olyan eredményhez jutunk, mint a 10. §-ban leírt módon. Amint látjuk, itt is csak azt tettük, hogy a $27'$-at elosztottuk a váltószámmal.

a) $19''$ hány láb? Egy láb $= 12''$, $1''$ tehát $^1/_{12}$ láb; $19'' = {}^{19}/_{12}$ s tizedes törtben $= 1{\cdot}58$ láb. *b)* 536 $\square^0$ hány k. hold? 1 k. hold $= 1{,}600$ $\square^0$, 1 $\square^0$ tehát $= {}^1/_{1600}$ k. hold, 536 $\square^0$ pedig $^{536}/_{1600}$ s tizedes törtben ($5{\cdot}36 : 16 =$) $0{\cdot}34$ k. hold. *c)* 1,236 m^2 hány k. hold? 1 k. h. $= 5{,}755$ m^2, 1 m^2 tehát $^1/_{5755}$ k. hold, 1,236 m^2 pedig $^{1236}/_{5755} = 0{\cdot}215$ k. hold.

A tizedes rendszerü mértékeknél az eljárás egész egyszerü: *d)* 8 *dm* hány *m*? 1 *m* = 10 *dm*, 1 *dm* tehát $= {}^1/_{10}$ *m*, 8 *dm* pedig $^8/_{10} = 0{\cdot}8$ *m*. *e)* 6,056 m^2 hány *ha*? 1 *ha* = 10,000 m^2, 1 m^2 tehát $^1/_{10{,}000}$ *ha*, 6,056 m^2 pedig $^{6056}/_{10{,}000} = 0{\cdot}6056$ *ha*. *f)* 72 *dkg* hány *kg*? 1 *dkg* $= {}^1/_{100}$ *kg*, 72 *dkg* pedig $^{72}/_{100} = 0{\cdot}72$ *kg*.

NEGYEDIK SZAKASZ.

VISZONYSZÁMOLÁS.

I. FEJEZET.

VISZONYOK ÉS ARÁNYOK.

30. §. Viszonyok.

Ha a mennyiségeket abból a célból hasonlítjuk össze egymással, hogy megtudjuk hányszor nagyobb az egyik a másiknál: viszonyt nyerünk. Ha pl. meg akarom tudni, hogy 9 hányszor nagyobb 3-nál, vagy másként mondva 9-ben hányszor van meg a 3, akkor e két számot viszonyba állítom. Minthogy arra a kérdésre, hogy hányszor van meg egyik mennyiség a másikban, az osztással felelünk meg, a viszonyt is csak az osztás jelével (:) szoktuk jelölni, így 9:3, kimondva: kilenc viszonylik a háromhoz, vagy csak egyszerüen 9 a 3-hoz.

A viszonyhoz — mint látjuk — két szám szükséges, ezek a *viszony tagjai.* Az első a viszony *előtagja* s a második a viszony *utótagja.* Az eddigiek után mondhatjuk, hogy a viszonynál mindig azt keressük, hogy az utótag hányszor van meg az előtagban. Azt a számot, amely ezt megmutatja a viszony *mutató*-jának vagy *kitevő*-jének hívjuk. A kitevőt megkapjuk, ha a viszonyban jelölt müveletet végrehajtjuk, azaz az előtagot elosztjuk az utótaggal: $9:3=3$. Az előtag: 9, az utótag: 3, a kitevő: 3, tehát a 9 háromszor nagyobb a 3-nál.

Viszonyba állítani csak egynemü mennyiségeket lehet, mert nem kérdezhetem pl. azt, hogy 5 K hányszor nagyobb 3 *m*-nél.

Az előbbiekből világos, hogy minden viszony osztás gyanánt tekintendő, ahol az előtag az osztandó, az utótag az osztó, a kitevő pedig a hányados.

Azok a viszonyok, amelyeknek ugyanaz a szám a kitevőjük, egyenlő értékü viszonyok; pl. 12:3, 20:5, 16:4, 32:8 egyenlő viszonyok, mert a kitevője mindegyiknek 4.

A viszonyok egyenlősége nem követeli meg, hogy a viszonyokat alkotó számok egynevüek legyenek, sőt (s ez gyakori eset) lehetnek az egyik viszony számai megnevezettek s a másikéi elvontak. Mondhatom pl. ezt: 4 ür-m^3 fa úgy viszonylik 8 ür-m^3 fához, mint 8 K a 16 K-ához, vagy 15 *m* úgy viszonylik az 5 *m*-hez, mint 3 az 1-hez. Ezt így jelöljük: $15\,m:5\,m=3:1$.

A viszony értéke mindaddig nem változik, mig annak kitevője nem változik, ugyanezért, *ha mi a viszonynak* (mint jelölt osztásnak) *mind az előtagját, mind az utótagját ugyanazzal a számmal megszorozzuk vagy elosztjuk, ezáltal a viszony értéke nem változik meg.*

Ezt a körülményt (hogy, ha mi a viszonynak mind az előtagját, mind az utótagját ugyanazzal a számmal megszorozzuk, ezáltal a viszony értéke nem változik) arra használjuk fel, hogy segélyével a részben vagy egészben törtből álló viszonyt egész számokkal fejezzük ki. Ez úgy történik, hogy először a viszony mindkét tagját egyenlő nevezőjü törtté (ha t. i. nem olyanok) változtatjuk, azután megszorozzuk mindkét tagot a közös nevezővel s az ezáltal nyert egész számokból álló viszonyt — ha lehet — rövidítjük. A vegyes szám előbb áltörtté alakítandó át; pl.

1. $\frac{9}{7}:\frac{4}{7}$; a $^9/_7$-t és $^4/_7$-t úgy szorozzuk meg a 7-el, hogy a nevezőjüket osztjuk el (l. ezt a szorzást a 27. §-ban); $7:7=1$, lesz tehát $^9/_1$ meg $^4/_1$ s mivel $^9/_1=9$, $^4/_1=4$, így a viszony $=9:4$;

2. $7:{}^3/_5=\frac{35}{5}:\frac{3}{5}=35:3$;

3. $\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=\frac{12}{15}:\frac{10}{15}=12\overset{2}{:}10=6:5$;

4. $6^1/_3:4^3/_4=\frac{19}{3}:\frac{19}{4}=\frac{76}{12}:\frac{57}{12}=76\overset{19}{:}57=4:3$;

5. $9:3^1/_4=9:\frac{13}{4}=\frac{36}{4}:\frac{13}{4}=36:13$;

6. $4^1/_2:5^1/_4={}^9/_2:\frac{21}{4}=\frac{18}{4}:\frac{21}{4}=18\overset{3}{:}21=6:7$.

Azt, hogy ha mi a viszony mindkét tagját ugyanazzal a számmal elosztjuk, ez a viszony értékén nem változtat, a viszonyoknak kisebb számokkal való kifejezésére vagyis *rövidítésére* használjuk fel; pl. 40:32. Itt mindkét tagot oszthatjuk 8-al, lesz tehát 5:4. A viszony értéke nem változott, mert a kitevője mindkét esetben 1·25; 48:36 rövidítve 12-vel = 4:3 a kitevő mind a két esetben 1·33; 87:123 rövidítve 3-al = 29:41, a kitevő mindkét esetben 0·7073; 81:27 rövidítve = 9:3 = 3:1. Minthogy a viszony — éppen úgy, mint a közönséges tört — jelölt osztásnak tekinthető: lényegében mindháromnak a rövidítése ugyanaz.

Példák.

1. *a*) Miként viszonylik a *m* a *dm*-hez? (mint 10:1); *b*) 25 *cm* az 1 *m*-hez? (mint 1:4); *c*) 40 *f* az 1 *K*-hoz? (mint 2:5); *d*) 400□⁰ az 1 k. h.-hoz? (mint 1:4.)

2. *A* lóháton 3 óra alatt teszi meg azt az útat, amelyhez *B*-nek gyalog 6 órára van szüksége; hogy viszonylanak gyorsaságaik egymáshoz? (Mint 1:2.)

3. Két napszámos közül az egyik 6 óra alatt annyit végez, mint a másik 9 óra alatt; hogy viszonylanak munkabéreik egymáshoz? (Mint 2:3.)

4. *A* munkás 12 órai napi munkaidő mellett megforgatott 60 m^2 területet, *B* pedig hasonló viszonyok között csak 45 m^2-t; mikép viszonylanak munkabéreik egymáshoz? (Mint 4:3.)

5. Csemetekertünknek a hosszúsága 63 öl, szélessége pedig 36 öl; hogy viszonylik a két mérete egymáshoz? (Mint 7:4).

31. §. Arányok.

Két egyenlő viszony az egyenlőség jelével összekötve, „arány"-t alkot. 15:5 és 12:4 egyenlő viszonyok, mert kitevőjük egyenlő (3), ha tehát ezeket az egyenlőség jelével összekötjük, arányt nyerünk: 15:5 = 12:4 — ez arány; így mondjuk ki: 15 úgy viszonylik az 5-höz. mint 12 a 4-hez. Minden aránynak van két beltagja és két kültagja; 5 és 12 *beltagok* (azért mert az arány belsejében vannak), 15 és 4 pedig *kültagok.*

Minden helyes arányban a kültagok szorzata egyenlő a beltagok szorzatával. Igy a fenti példánál 15 × 4 = 60 és 12 × 5 = 60, vagy egy másik aránynál: $6:\frac{3}{4} = 4:\frac{1}{2}$; $6 \times {}^1/_2 = {}^6/_2 = 3$ és ${}^3/_4 \times 4 = {}^{12}/_4 = 3$.

Az arány helyessége nem szünik meg, ha mi egy beltagot és egy kültagot (bármelyiket) *ugyanazzal a számmal megszorzunk vagy elosztunk.* A szorzást itt is, mint a viszonynál a törtek kiküszöbölésére, az osztást pedig az arányok *rövidítésére* (kisebb számokkal való kifejezésére) használjuk fel; pl. 21:84 = 36:144; rövidítve 21-el: 1:4 = 36:144, tovább rövidítve 9-el 1:4 = 4:16, még 4-el rövidítve: $1:4 = 1:4$; vagy egy másik példánál: $81:3 = 108:4$, rövidítve 9-el: $9:3 = 12:4$, tovább rövidítve 3-al: $3:3 = 4:4$ s végül 3 és 4-el rövidítve: $1:1 = 1:1$. A rövidítés alkalmazása az alábbi példák megfejtésénél is látható.

Ha bármely arányban egy tag ismeretlen, annak értékét az ismeretes három tagból ki tudjuk számítani. Az ismeretlent a mennyiségtanban az ábécé utolsó betűivel (x, y, z), többnyire x-el szoktuk jelölni.

1. $x:4 = 6:2$
$2 \times x = 4 \times 6$
$x = \frac{4 \times 6}{2} = \underline{12}$

Ha 2 x annyi mint 4×6, akkor egy x-nek (4×6)-nak a felével, azaz $\frac{4+6}{2}$-vel kell egyenlőnek lenni, tehát:
$x = \frac{4+6}{2} = 12.$

2. $12:x = 8:4$
$8 \times x = 12 \times 4$
$x = \frac{12 \times 4}{8} = \underline{6}$

Ha $8 \times x = 12 \times 4$, akkor 1 x ennek a nyolcadrésze.

3. $48:16 = x:9$
$16 \times x = 48 \times 9$
$x = \frac{48 \times 9}{16} = \frac{432}{16} = \underline{27}$

Ha $16 \times x = 48 + 9$, akkor 1 *x* ennek a tizenhatodrésze.

4. $8:5 = 16:x$
$8 \times x = 16 \times 5$
$x = \frac{16 \times 5}{8} = \frac{80}{8} = \underline{10}.$

Ha $8\,x = 16 \times 5$, akkor 1 x ennek nyolcadrésze.

Ha e négy példában x-nek aláhúzott értékeit tekintjük, az alábbi két szabályt álithatjuk föl az arányok megfejtésére.

1. *Az arány ismeretlen kültagját megkapjuk* (1. és 4. példa), *ha a beltagok szorzatát elosztjuk az ismeretes kültaggal.*

2. *Az arány ismeretlen beltagját megkapjuk* (2. és 3. példa), *ha a kültagok szorzatát elosztjuk az ismert beltaggal.*

Példák.

1. $3:4 = 5:x;\ x = \frac{4+5}{3} = \frac{20}{3} = 6^2/_3 = 6{\cdot}67.$

2. $12:27 = x:15$
$\left.\begin{array}{l} 4:9 = x:15 \\ 4:3 = x:5 \end{array}\right\}$ rövidítve.
$x = \frac{20}{3} = 6^2/_3 = 6{\cdot}67$

3. $88:x = 72:63$
$\left.\begin{array}{l} 11:x = 9:63 \\ 11:x = 1:7 \end{array}\right\}$ röviditve.
$x = \frac{11 \times 7}{1} = 77.$

4. $x:10 = 144:80$
$\left.\begin{array}{l} x:1 = 144:8 \\ x:1 = 18:1 \end{array}\right\}$ rövidítve.
$x = \frac{18 \times 1}{1} = 18$

5. $x:{}^1/_2 = 2^1/_4:4$
$x:0{\cdot}5 = 2{\cdot}25:4$ (tizedes törtben.)
$x:0{\cdot}1 = 0{\cdot}45:4$ (rövidítve.)
$x = \frac{0{\cdot}45 \times 0{\cdot}1}{4} = 0{\cdot}045:4 = 0{\cdot}01125$

6. $1{\cdot}5 : 0{\cdot}5 = x : 0{\cdot}4$
$3 : \ 1 = x : 0{\cdot}4$ (rövidítve)
$x = 0{\cdot}4 \times 3 = 1{\cdot}2$

7. $x : 4{\cdot}375 = 15^1/_5 : 0{\cdot}85$
$x : 4{\cdot}375 = 15{\cdot}2 : 0{\cdot}85$ (tizedes törtben)
$x : 0{\cdot}875 = 15{\cdot}2 : 0{\cdot}17$ (5-el rövidítve)
$x : \ 87{\cdot}5 = 15{\cdot}2 : \ 17$ (100-al rövidítve)
$x = \frac{87{\cdot}5 \times 15{\cdot}2}{17} = 1330 : 17 = 78{\cdot}235$

II. FEJEZET.

HÁRMASSZABÁLYI SZÁMOLÁS.

32. §. Az arányosság fogalma.

Ha két mennyiség úgy függ össze egymással, hogy ahányszor *több* vagy kevesebb lesz az egyik, ugyanannyiszor *nagyobb* (vagy kisebb) lesz a másik is: akkor a két mennyiség egymással *egyenes arányban* áll; pl. egyenes arányban állanak egymással az árú mennyisége és az árú értéke: ha 1 ür-m^3 tüzifának az ára 4 K, akkor 3 ür-m^3 ilyen fáé 12 K lesz; 1 ür-m^3 fánál a 3 ür-m^3 fa 3-szor több s ugyanannyiszor több az 1 ür-m^3 fa áránál, a 4 K-nál a 3 ür-m^3 fa ára a 12 K is. Egyenes arányban áll egymással a munka és az idő: ha 3 nap alatt 3,000 csemetét lehet elültetni, akkor 1 nap alatt bizonyára csak 1,000-et; 1 nap a 3 napnál 3-szor kevesebb s ugyanannyiszor kevesebb az 1 nap alatt elültethető csemetemennyiség, az 1,000 db. is a 3 nap alatt elültethető 3,000 db. csemeténél.

Az egymással *egyenes arányban* álló mennyiségek miként való összefüggését röviden így fejezzük ki: *„minél több . . . . annál több . . . . . .“ vagy: „minél kevesebb . . . . annál kevesebb . . . . . .“*

Egyenes anrányban állanak egymással a következő mennyiségek is: a munka és a munkabér; az idő és a megtett út; a térfogat és a súly; a fogyasztók száma és a fogyasztott anyag mennyisége; a szállítási távolság és a fuvarbér stb., mert *minél több* (vagy) *kevesebb* a munka, idő, stb., *annál több* (vagy) *kevesebb* a munkabér, a megtett út, stb.

Ha két mennyiség úgy függ össze egymással, hogy ahányszor *nagyobb* lesz az egyik, ugyanannyiszor lesz *kisebb* a másik, vagy ahányszor *kevesebb* lesz az egyik, annyiszor lesz *több* a másik: akkor a két mennyiség egymással *fordított arányban* áll.

A fordított arányt röviden így fejezzük ki: „*minél több* . . . . . . *annál kevesebb* . . . .“ vagy: „*minél kevesebb* . . . . *annál több* . . . .“

Fordított arányban állanak pl. a munkások száma és a munkaidő; ha u. i. valamely munkát 5 munkás 4 nap alatt végez el, el, ugyanazt a munkát 10 munkás 2 nap alatt, vagy 1 munkás 20 nap alatt végzi el. Látjuk ebből, hogy ahányszor több lesz a munkások száma, ugyanannyiszor kevesebb lesz a munkanapok száma és megfordítva, vagyis: *minél több* a munkás, *annál kevesebb* a munkaidő, vagy: *minél kevesebb* a munkás, *annál több* a munkaidő.

Fordított arányban állanak a következő mennyiségek is egymással: a fogyasztók száma és a fogyasztott anyagból egyre eső rész; a teher és az út hossza; a deszkák száma és a deszkák szélessége; a napi munkaórák száma és a munkához szükséges összes idő, stb., mert minél több (vagy kevesebb) a fogyasztók száma stb., annál kevesebb (vagy több) az egyre eső rész stb.

33. §. Egyszerű hármasszabály.

Ha két különnevű, de egymással egyenes vagy fordított arányban álló mennyiség közül az egyiknek két, a másiknak pedig csak az egyik száma ismeretes, akkor ebből a három ismeretes tagból a negyedik ismeretlent ki lehet számítani. Ezt a számítási módot — minthogy az ismeretlent *három* ismert tag segélyével adja: *egyszerű hármasszabály*-nak hivjuk.

Minden hármasszabályi föladvány két részből áll: a *feltétel*-ből, vagy *feltevés*-ből és a *kérdés*-ből. A feltételbe foglaljuk a szereplő különnemű mennyiségek összetartozó, ismeretes tagjait, a kérdésbe pedig az ismeretlent a hozzátartozó taggal.

Leirni a feladványt két sorba szoktuk. A felső sorba irjuk a feltételt s alája a kérdést úgy, hogy az egynevű mennyiségek egymás alá kerüljenek. Ha az egymás alá kerülendő számok nevei (mértékei) nem egyenlő rendüek (pl. az egyik *m*, a másik *cm*), akkor ezeket a leírás előtt egyenlő rendüekké kell változtatni.

Itt egyszer és mindenkorra megjegyzendő, hogy minden hármasszabályi föladványnál fel van tételezve (illetve ez követelmény is), hogy a feltétel és kérdésre vonatkozólag meg nem említett körülmények mindkét résznél ugyanazok. Viszont a meg-említett, de mindkét résznél azonos körűlmények a számításnál figyelmen kivül hagyandók.

A hármasszabályi feladványok megfejtése kétféle módon eszközölhető, t. i. az egységre való hozatal módszerével és arányok segélyével.

a) *A feladványok megfejtése az egységre való vonatkoztatás módszerével.*

Ennél az eljárásnál először azt okoskodjuk ki, hogy az ismeretlenhez tartozó tag *egységére* mennyi esik az ismeretlennel egynevü mennyiségből; ennél az ismeretlennek az értéke annyiszor több, amennyi az ismeretlenhez tartozó tag (t. i. amelynek az egységére vonatkoztattunk). A következő példák az eljárást teljesen megvilágítják.

1. Ha 4 űr-m^3 tűzifának az ára 12 K, mennyibe kerül 7 űr-m^3? Az arány egyenes, mert minél több a fa, annál több az ára is.

Föltevés:	4 űr-m^3	. . . .	12 K,
Kérdés:	7 „	. . . .	x „
Megfejtés:	4 űr-m^3	. . . .	12 K,
	1 „	. . . .	$^{12}/_4$ „
	7 „	. . . .	$7 \times {}^{12}/_4$ K $= \frac{7 \times 12}{4}$

(4-el rövidítve) $= 7 \times 3 = 21$ K.

A megfejtés gondolatbéli menete ez: Ha 4 űr-m^3 fának az ára 12 K, akkor 1 űr-m^3-é annak a negyedrésze, vagyis $^{12}/_4$ K s 7 űr-m^3-é 7-szer annyi mint egyé, azaz 7-szer $^{12}/_4$ K.

2. Ha 1000 db. csemetének az átiskolázásához 1·7 napszám szükséges, hány csemetét iskolázhatunk át (1 nap alatt 12 napszámossal) 12 napszámmal?

Az arány egyenes, mert minél több a napszám, annál több az átiskolázott csemete.

Feltétel:	1000 cs.	. . . .	1·7 n.
Kérdés:	x „	. . . .	12·0 „
Megfejtés:	1·7 n.	. . . .	1000 cs.
	1 „	. . . .	$\frac{1000}{1 \cdot 7}$
	12 „	. . . .	$\frac{12 \times 1000}{1 \cdot 7}$

$= 120{,}000 : 17 = 7{,}058$ csemete.

Ha 1·7 napszámra 1,000 csemete esik, akkor 1 napszámra annak csak 1·7 része: $^{1000}/_{1\cdot7}$ s 12 napszámra 12-szer több, mint egyre.

3. Bizonyos munkát 14 napszámos elvégez 8 nap alatt; hány nap alatt végezi el ugyanazt 6 napszámos? Az arány fordított, mert minél kevesebb a napszámos, annál több idő kell a munka elvégzésére.

Föltétel:	14 nsz.	8 n.	
Kérdés:	6 „	x „	
Megfejtés:	14 nsz.	8 n.	
	1 „	14×8 n.	
	6 „	$\frac{14 \times 8}{6}$	(2-vel rövidítve)

$$= \frac{7 \times 8}{3} = 56:3 = 18{\cdot}7 \text{ nap.}$$

Ha 14 napszámos 8 nap alatt végzi el a munkát, akkor egy napszámosnak 14-szer annyi idő, 14-szer 8 nap kell hozzá s 6 napszámosnak 6-szor kevesebb, azaz $\frac{14 \times 8}{6}$ nap.

4. Ha bizonyos vágásnak a fatermését 3 osztályos fél kapja, jut egyre 96 űr-m^3 fa. Hány űr-m^3 lesz egy osztályrész akkor, ha a megváltozott viszonyok szerint a fatermésben nyolcan részesülnek? Az arány fordított, mert minél több az osztályos fél, annál kevesebb jut egyre.

Feltétel:	3 oszt. . . .	96 űr-m^3	
Kérdés:	8 „ . . .	x „	
Megfejtés:	3 oszt. . . .	96 űr-m^3	
	1 „ . . .	3×96 „	
	8 „ . . .	$\frac{3 \times 96}{8}$ „	(8-al rövidítve)

$= 3 \times 12 = 36$ űr-m^3, ha tehát 8 felé osztjuk, 1 rész 36 űr-m^3 lesz. A gondolat menete ez: Ha hárman osztozkodnak, egyre 96 űr-m^3 jut; ha a fának csak egy birtokosa lenne, az övé volna az összes fa, azaz 3×96 űr-m^3; míg ha nyolcan részesülnek benne, akkor egyre a fatermésnek, a 3×96 űr-m^3-nek csak a nyolcadrésze esik.

b) *A feladványok megfejtése arányok segélyével.*

A hármasszabályi feladványoknak arányok segélyével való megfejtése azon alapszik, hogyha két mennyiség egymással arányos (akár egyenes az arány, akár fordított), akkor az ezekből adott számok arányba foglalhatók s ha az adott számokhoz még egy ismeretlen is tartozik, ez az arányból az arány megfejtésének szabályai szerint kiszámítható.

A feladvány itt is feltevésből és kérdésből áll éppen úgy, mint az előbbinél. Most tehát csakis azt kell megtanulnunk, hogy a leírt feladványból miként kell felállítani az arányt, hogy belőle az ismeretlent kikereshessük. Az arány fölállítása aszerint, amint a mennyiségek egymással egyenes vagy fordított arányban állanak, különböző módon történik, amiért is mindkét esetet külön tárgyaljuk.

5. Vegyünk fel példát az egyenes arányra: Ha 12 kéve rőzsének az ára 96 f, akkor 4 kévéé 32 f (96-nak a harmadrésze). Az arány egyenes, mert minél több a kéve, annál több az ára is, a fillér.

Föltevés:	12 k.	. . . . .	96 f.
Kérdés:	4 „	. . . . .	32 „

Ha két mennyiség egymással egyenes arányban áll, akkor az egyiknek adott számai olyan értékü viszonyt adnak, mint a másikéi ugyanabban a sorrendben véve. Az „ugyanabban a sorrendben véve“ úgy értendő, hogy a második viszony előtagjául az első viszony előtagjához s a második viszony utótagjául az első viszony utótagjához tartozó szám veendő. Tehát 4 : 12 viszonynak egyenlőnek kell lennie 32 : 96 viszonynyal, ami úgy is van, mert mindkettőnek 3 a kitevője. Ha ezt a két egyenlő viszonyt az egyenlőség jelével összekötjük megvan a kivánt arány: $4 : 12 = 32 : 96$.

Vegyük most úgy fel a példát, hogy egy szám ismeretlen legyen: Ha 12 kéve rőzse 96 f, hány kéve rőzsét vehetünk 32 f-ért?

Föltétel:	↑12 k.	. . . . . .	↑96 f
Kérdés:	x „	. . . . . .	32 „

Megfejtés: $x : 12 = 32 : 96$

$$x = \frac{12 \times 32}{96} = \frac{384}{96} = 4 \text{ kéve.}$$

Az arányt bármelyik taggal kezdhetjük, legcélszerübb azonban az ismeretlent írni előre. Utána tesszük gondolkozás nélkül a vele egynevü (felette álló) tagot. Ezután megnézzük, hogy az arány egyenes-e vagy fordított; ha egyenes, a számokhoz két, egy irányba mutató nyilat huzunk s az arány második felébe a nyil szerint (alulról fölfelé) írjuk be a tagokat. Eszerint az egyszerü és könnyen megtartható, gépies eljárás szerint az arány tagjai éppen úgy helyökre kerülnek, mint a fentírt módon. A kész arányból az x = a beltagok szorzata osztva az ismert kültaggal.

6. Vegyünk most föl példát a fordított arányra: Ha 1 k. holdon 500 fa áll, egy fának a nőtere (1600 : 500 =) 3·2 □ öl, ha ellenben a fák száma 800, egynek a nőtere csak (1600 : 800 =) 2 □ öl. Az arány fordított, mert minél több a fák száma, annál kisebb a nőtér.

Feltétel: 2 $\square^0$ . . . . . 800 fa
Kérdés: 3·2 „ . . . . . 500 „

Ha két mennyiség egymással fordított arányban áll, akkor az egyiknek adott számai olyan értékü viszonyt adnak, mint a másikéi, de megfordított sorrendben véve. A „megfordított sorrend" úgy értendő, hogy a második viszony előtagjául az első viszony utótagjához s a második viszony utótagjául az első viszony előtagjához tartozó szám veendő. Tehát 3·2 : 2 viszonynak egyenlőnek kell lennie 800 : 500 viszonnyal, s azok is, lévén mindkettőnek 1·6 a kitevője. Egyenlő viszonyok arányba foglalhatók: 3·2 : 2 = 800 : 500, melyből ha egy tag ismeretlen, az a többiekből kiszámítható.

Legyen egy tag ismeretlen: Egy k. holdon jelenleg 800 fa áll, mely esetben az egyre eső nőtér 2 □-öl; hány □ öl lesz a nőtere egy fának, ha a területen már csak 500 fa fog állani?

Feltétel: ↓ 800 fa . . . . . ↑ $2\square^0$
Kérdés: 500 „ . . . . . x „

Megfejtés: x : 2 = 800 : 500

$$x = \frac{2 \times 800}{500} = 16 : 5 = 3{\cdot}2\square^0$$

Fordított aránynál a két ismert szám nyilát úgy húzzuk meg, hogy az x-től húzott nyillal ellenkező irányba mutasson; az arány második részébe így először a felső s aztán az alsó sorbeli szám kerül. Az arány alakja itt is ugyanaz, mint előbb.

Az eredmény helyességéről úgy győződhetünk meg, ha az arányba x helyett beletesszük a kikeresett értékét; ha az arány ezzel az értékkel helyes, akkor x-nek az értéke is jó: 3·2 : 2 = 800 : 500. A kültagok szorzatának egyenlőnek kell lenni a beltagok szorzatával, azaz $3{\cdot}2 \times 500 = 2 \times 800$. Mindkét szorzat 1600-at ad, az arány tehát helyes s igy x-nek az értéke is jó.

Egyszerű hármasszabályi feladványok fejben vagy legfeljebb egyszerű szorzás vagy osztás által is megfejthetők. Összetettebbek megoldásánál az arányok alkalmazása célszerűbb az egységre való hozatal módszerénél.

Példák.

7. Bizonyos fuvaros 2 ür-m^3 fát $12^3/_4$ *km*-re elszállít 1·5 K-ért; *a*) hány ür-m^3 fát szállít el 85 K-ért? (113·3 ür-m^3-t); *b*) mennyiért szállít el 45 ür-m^3-t? (33·75 K-ért); *c*) $23^1/_3$ *km*-re mennyiért szállítja el a 45 ür-m^3-t? (61·76 K-ért).

Itt egyszer és mindenkorra megjegyzendő, hogy ha külön nincs megemlítve, akkor minden egyes alkérdéshez (*a*), *b*), *c*) stb.) a legelől írt föltétel tartozik.

8. Ha egy szekérre $8^1/_2$ *q* terhet rakhatunk, hány szekeret kell fogadnunk 18·67 m^3 kocsánostölgy épületfa elfuvarozásához, ha 1 m^3 tölgyfa 780 *kg*-ot nyom? (17 szekeret.)

9. Egyik fuvaros bizonyos összegért 950 *kg* terhet 18 *km*-re szállít; *a*) mennyire szállít el 687 *kg*-ot? (24·9 *km*-re); *b*) hány *kg*-ot szállít el 25·4 *km*-re? (673 *kg*-ot.)

10. Ha 1 m^3 erdeifenyő épületfa 5·75 *q*-át nyom, milyen nehéz 16 db. 7 *m* hosszú $^{12}/_{16}$ *cm* vastag, vagyis 2·15 m^3-t tevő szarufa (12·36 *q*-át nyom) s mennyit kell annak a 16 szarufának a hazafuvarozásáért fizetni, ha 1 *kg* teher fuvarbére 1·5 f? (Fizetni kell 18·54 K-át).

11. Hány ür-m^3 akáchasábfa ér föl 24 ür-m^3 nyárhasábfával, ha az akácfa tűzereje úgy viszonylik a nyárfáéhoz, mint 1·166 : 0·787 ?

Feltétel :	24 ür-m^3	. . . .	0·787 tűzerő
Kérdés :	x „	. . . .	1·166 „

Az arány fordított, mert minél nagyobb valamely fának a tűzereje, annál kevesebb kell belőle, az arány lesz tehát: x : 24 = 0·787 : 1·166.

12. Egyik erdőőr évente 36 ür-m^3 bükk hasábfát kap; midőn már 12 ür-m^3-t kivett, a bükkfakészlet elfogy, de van készletben jegenyefenyő hasábfa; mennyit fog még ebből kapni, ha az átszámítás alapjául a tűzerőt vesszük, amelynek viszonyszáma a bükknél 1·282 s a jegenyefenyőnél 1·063? (28·9 ür-m^3-t kap még a jegenyefenyőből.)

13. Egyik erdőőr évi failletménye 42 űr-m^3 bükkhasábfa, ilyen fa azonban nincsen; mennyit kell a készletben levő nyírhasábfából kapnia, ha az átszámítás alapjáúl a fa árát vesszük s ha a bükk hasábfa ára 5·20 K s a nyírfahasábé 3·80 K? (57·4 űr-m^3-t kell a nyirből kapnia).

14. Ha a tavalyi 8 k. holdnyi vágásunkban 1,320 m^3 fatömeg volt; hány m^3 fahozamot várhatunk idei hasonló minőségü 13·45 k. holdas vágásunkból? (2,219 m^3-t.)

15. Ha $1^1/_2$ k. holdas próbatéren 74·67 m^3 műfát becsültünk, mennyi műfa van abban a 19·73 k. holdas erdőrészletben, amelyben ezt a próbateret fölvettük? (982·16 m^3 műfa van.)

16. Ha valamely munkát szakmányban akarunk végeztetni, de a szakmánybér kellő megállapításához alapunk nincsen, akkor úgy teszünk, hogy gondos felügyelet alatt bizonyos részletet napszámban végeztetünk a munkából s az így elért eredmény s a napszámbérből számítjuk ki a szakmánybért. Erre a kiszámításra szolgáljon az alábbi példa.

Próbaként szedettünk egy nap 5 gyerekkel tölgymakkot, szedtek 2·8 *hl*-t; kérdés, hogy ha szakmányba akarjuk kiadni a gyüjtést, mennyit fizethetünk 1 *hl*-ért, ha a gyereknapszám a vidéken 70 f? Először ki kell számítanunk, hogy a 2·8 *hl* szedése mennyi pénzbe került; belekerült 5 $\times$ 70 f-be = 350 f-be; most felírhatjuk a feladványt:

Feltétel:	↑ 2·8 *hl*	↑ 350 f
Kérdés:	↑ 1 „	↑ x „

$$x : 350 = 1 : 2{\cdot}8$$
$$x = 350 : 2{\cdot}8 = 125.$$

(Egyszerű osztással megfejtve: Ha 2·8 *hl* 350 f-be került, akkor az 1 *hl*-re eső költséget megkapjuk, ha 350-et 2·8 felé osztunk: 350 : 2·8 = 125).

17. Ha 3 gyerek 1 nap alatt 1·9 *hl* kőrismagot szedett, menynyit fizethetünk szakmányban 1 *hl* szedéséért, ha a gyereknapszám 55 f? (0·87 K-át; 165 fillér 1·9 felé osztva adja az 1 *hl*-re eső költséget).

18. A múlt évben 22 *hl* akáchüvelyből 103·4 *kg* tiszta magot kaptunk, ha az idei termés hasonló a tavalyihoz, *a)* hány *hl* hüvelyt kell szedetnünk, ha 150 *kg* magra van szükségünk? (31·9 *hl*-t); *b)* mennyibe fog kerülni a szedés, ha tavaly 16·50 K-át fizettünk a gyüjtésért? (23·93 K-ba fog kerülni).

19. Egyik gyárnak évente 800 ür-m^3 fát tartozunk szállítani 2 m darabhosszúsággal; bizonyos ideig szállítottunk 375 ür-m^3-t; hány ür-m^3-t kell még szállítanunk, ha a gyár az évi famennyiség többi részét 1·5 m darabhosszúsággal kivánja s mi ezt teljesíteni akarjuk? Először ki kell számítani, hogy 2 m-es darabokból mennyi járna még; járna: 800—375 = 425 ür-m^3.

Feltétel: ↑	2 m	↓ 425 ür-m^3
Kérdés: ↑	1·5 „	↓ x „

$$x : 425 = 2 : 1{\cdot}5.$$

Az arány fordított, mert minél rövidebbek a darabok, annál több ür-m^3-t kell adnunk, hogy ugyanazt a fatömeget nyújtsuk.

20. Egyik erdőőrnek a járandósága 32 ür-m^3 hasáb tűzifa 1 m hasábhosszúsággal; hány ür-m^3-t kap, ha a hasábok 1·2 m hosszúak? (26·7 ür-m^3-t kap.)

21. Ha 1 köblös (120 l) zsák tölgymak 93 kg-ot nyom, hány zsák makkot rakhatunk fel olyan szekérre, amelyik 8·5 q terhet vihet el? (9·1 zsák makkot).

22. $^1/_4$ kg-nyi akácmagban megolvastunk 12,357 szem magot; hány szem mag van 1 literben, ha 1 l mag 0·75 kg-ot nyom? (1 l-ben van 37,071 mag).

23. Valamely szobának a kipadlózásához számításunk szerint 40 db. 4 m hosszú, 29 cm széles deszka kellene, de nem kaphatunk csak 24 cm szélességüt; hány db. kell ebből? (48·3 db.)

24. Ha 10 $f.$ m (folyóméter) 1·5 m magas sövénykerítés elkészítéséhez 0·8 napszám kell, hány napszámmal készíthetünk el 273 m hosszú kerítést s mennyibe fog az kerülni, ha a napibér 1·2 K? (26·21 K-ba fog kerülni).

25. A különféle munkálatokhoz szükséges, az erdészeti zsebnaptárban s egyebütt található napszám-adatok 10 órai napi munkaidőre vonatkoznak. Ha a körülmények folytán naponta 10 óránál számbavehetően kevesebbet (pl. télen) vagy többet (pl. nyáron) dolgoztatunk s ha a munkaszükségletet pontosan akarjuk kiszámítani, akkor az adatokat a munkaóráknak megfelelően át kell számítanunk. Itt különösen kiemelendő, hogy csakis a munkával töltött órák veendők számításba; a pihenési idő elesik.

Ha 1 $f.$ m deszkakerítés elkészítéséhez (az erdészeti zsebnaptár szerint) 0·35 ácsnapszám szükséges, mennyi kell abban az esetben, ha csak $8^1/_2$ óra hosszáig dolgoztathatunk?

Feltétel: ↓	10 órai napi munkaidő mellett	↑ 0·35 nsz.
Kérdés:	8·5 „ „ „ „	x „

$$x : 0{\cdot}35 = 10 : 8{\cdot}5$$

$$x = \frac{0{\cdot}35 \times 10}{8{\cdot}5} = 35 : 85 = 0{\cdot}41 \text{ napszám.}$$

Az arány fordított, mert minél kevesebb órát dolgoztatunk naponta, annál több napszám kell ugyanannak a munkának az elvégzésére.

26. Ha 1000 db. csemetének az elültetéséhez 4·0 napszám szükséges, hány napszámot kell erre számítanunk, ha 10 óra helyett csak 9 óráig dolgoztathatunk? (4·44 napszámot).

27. Ha 1 *f. m* lóösvénynek az elkészítéséhez 0·58 napszám szükséges, hány napszámot számíthatunk erre $11^1/_2$ órai napi munkaidő mellett? (0·504 napszámot).

28. Hány ür-m^3 légenszáradt bükkhasábfát rakhatunk 100 *q*-ig terhelhető vaggonba, ha 1 ür-m^3 bükkhasábfa = 0·65 m^3 s ha 1 m^3 légenszáradt bükkfa súlya 740 *kg*? (20·8 ür-m^3-t rakhatunk.) Először ki kell számítani, hogy 1 ür-m^3 milyen nehéz?

29. Hány m^3 lúcfenyő deszkát rakhatunk 100 *q*-ig terhelhető vaggonba, ha 1 m^3 légenszáradt lúcdeszka 430 *kg*-ot nyom? (23·26 m^3-t rakhatunk.)

30. Ha lovagló ember óránként 12 *km*-t haladva 54 *km*-t 4 óra 30 perc alatt tesz meg; mennyi időre van szüksége ugyanolyan út megtételéhez annak a gyalogos embernek, aki óránként csak 4·8 *km*-t halad? (11·3 órára van szüksége.)

31. Ha valamely munkát 9 napszámos 15 nap alatt végez el, hány napszámost kell fogadnunk, hogy azzal a munkával egy hét (6 nap alatt) készen legyünk? (22·5 napszámost.)

32. Valamely vágás beerdősítését a felfogadott 67 munkás elvégezné 18 nap alatt; ha 6 nap mulva elmegy a munkából 12 munkás; hány nap alatt végzik el az ültetést a megmaradottak? A 67 munkás bevégezte volna (18 — 6 =) 12 nap alatt, kérdés, hogy a megmaradt (67 — 12 =) 55 munkás hány nap alatt végzi el? (14·6 nap alatt.)

33. Bizonyos útat 18 munkás elkészítene 4 hét (24 nap) alatt; 5 napi munka után azt a rendeletet kapjuk, hogy az út egy hét (6 nap) alatt készen legyen; hány munkást kell még fogadnunk, hogy a kivánt időre készen legyünk? (18 munkás (24 — 5 =) 19

nap alatt, hány munkás 6 nap alatt? — Fogadnunk kell még 39 munkást.)

34. Ha valamely munkát 23 munkás naponta 10 órát dolgozva 2 hét alatt bevégez; hány munkást kell fogadnunk, ha naponta csak $8^1/_2$ órát dolgoztathatunk, de két hét alatt készen akarunk lenni? (27 munkást kell fogadnunk.)

34. §. Összetett hármasszabály.

Összetett hármasszabálynak nevezzük azt a számolási módot, amidőn az ismeretlennek az értékét háromnál több, de az ismeretlennel egyenes vagy fordított arányban álló számból kell meghatároznunk.

A feladvány itt is két részből áll, t. i. a feltevésből és a kérdésből. Leírására s megfejtésére vonatkozólag az egyszerü hármasszabálynál elmondott általános szabályok szintén érvényesek.

Az összetett hármasszabályi feladványoknak az egységre való hozatal módszerével való megfejtése hosszadalmas, nehézkes, ugyanezért — mint gyakorlatiast — csakis az arányok segélyével való megfejtést tárgyaljuk.

Ha az összetett hármasszabályi feladványt arányba foglaljuk, összetett arányt nyerünk. Összetett az az arány, amelynek négynél több tagja van. Szabályai egyenlők az egyszerü arányéival. A felállításnál az arány bal felére (az egyenlőség jel bal oldalára) írjuk az ismeretlent a vele egynemü taggal, de csak egyszer. Az arány jobb oldala annyi különálló viszonyból fog állani, ahány nemü mennyiségtől függ az ismeretlennek az értéke. Az egyes viszonyoknak a tagjait aszerint, amint az illető mennyiség az ismeretlenhez egyenes vagy fordított arányban áll, az ismeretlent tartalmazó viszonyéval egyenlő vagy fordított sorrendben írjuk be az arányba. Hogy a beirás sorrendje feltünő legyen, a számok elébe itt is húzhatunk nyilakat.

A kész arányt, ha lehet — egy beltagot és egy kültagot ugyanazzal a számmal osztva — rövidítjük s végre belőle az ismeretlen tagot meghatározzuk úgy, hogy a beltagok szorzatát (vagy — ha rövidítés után csak egy volna — a beltagot) elosztjuk a kültagok szorzatával (vagy esetleg csak a kültaggal.)

Különösen megjegyzendő, hogy az arányba való foglalásnál az egyes mennyiségeknek mindég *csakis az ismeretlenhez való* *arányára* kell tekintenünk s amidőn az egyes mennyiségeket külön-külön összehasonlítjuk az ismeretlennel, az összehasonlítást úgy tesszük meg, mintha a többi, bár különböző, de az összehasonlítás tárgyául éppen akkor nem szolgáló körülmény egyenlő volna.

Példák.

1. Ha 6 napszámos 5 nap alatt 36 K-át keres, mennyit keres 14 napszámos 11 nap alatt?

Feltétel:	6 nsz.	5 n.	36 K
Kérdés:	14 „	11 „	*x* „

$x : \overset{6}{\cancel{36}} = 11 : 5$ (Minél több nap, annál több K)

$14 : \cancel{6}$ (Minél több napszámos, annál több K)

$$x = \frac{6 \times 14 \times 11}{5} = {}^{924}/_{5} = 184{\cdot}8 \text{ K.}$$

2. Ha bizonyos munkát 9 napszámos naponta 10 órát dolgozva elvégez 8 nap alatt; hány munkást kell fogadnunk, hogy ugyanazt a munkát, naponta 8 órát dolgoztatva, 3 nap alatt elvégeztethessük?

Feltétel:	9 nsz.	10 ó.	8 n.
Kérdés:	x „	8 „	3 „

$x : \overset{3}{\cancel{9}} = 10 : 8$ (Minél kevesebb órát dolgoztatunk naponta, annál több napszámos kell.)

$\cancel{8} : \cancel{3}$ (Minél kevesebb a munkanap, annál több napszámos kell.)

$x = 3 \times 10 = 30$

3. Ha bizonyos fuvaros $1{\cdot}25\ m^3$ épületfát 6·40 K-ért 18 *km*-re visz el, hány m^3-t visz 55 K-ért 26 *km*-re?

Feltétel:	$1{\cdot}25\ m^3$	6·40 K	18 *km*
Kérdés:	x „	55·0 „	26 „

$x : 1{\cdot}25 = 55 : 6{\cdot}4$

$\overset{9}{\cancel{18}} : \overset{13}{\cancel{26}}$

$$x = \frac{1{\cdot}25 \times 55 \times 9}{6{\cdot}4 \times 13} = \frac{618{\cdot}75}{83{\cdot}2} = 7{\cdot}44\ m^3$$

4. Valamely szobának a kipadolásához 50 db. 4 *m* hosszú, 32 *cm* széles deszka szükséges; hány deszka kell akkor, ha a deszkák csak 3·5 *m* hosszúak s 26 *cm* szélesek? (70·3 db. kell.)

5. Valakinek évente 60 ür-m^3 bükk hasábfát tartozunk adni 1 m-es darabhosszúsággal; ha csak 1·20 m-es nyir dorongfánk van, mennyit kell ebből adnunk, ha a fa tűzerejét és az ürméterek tömör-köbtartalmát is tekintetbe vesszük az átszámításnál? (73·4 ür-m^3 nyir dorongot kell adnunk.) A tűzerő viszonyszáma az erdészeti zsebnaptár szerint a bükknél: 1·28 s a nyirnél 0·96; a bükk hasábfa tömörköbtartalma: 0·65 m^3 s a nyir dorongé 0·59 m^3.

6. Ha (az erd. zsebnaptár szerint) 1,000 db. 3 éves fenyőcsemetének az elültetéséhez 10 órai napi munkaidő mellett 3·5 napszám szükséges, hány napszámost kell fogadnunk, ha 1 m-es négyes hálóban 23·47 k. holdat kell beültetnünk, de naponta csak 8·5 órát dolgoztathatunk s emellett azt akarjuk, hogy az ültetés egy hét (6 nap alatt) meglegyen?

Először ki kell számítanunk, hogy a 23·47 k. h.-ra hány csemete kell; kell: $23{\cdot}47 \times 5{,}755 = 135{,}070$ csemete.

Feltétel:	↑ 1,000 cs.	↓ 10 ó.	↑ 1 nsz.	↓ 3·5 n
Kérdés:	135,070 „	8·5 „	x „	6 „

$x : 1 = 135{\cdot}07\cancel{0} : 1\cancel{000}$ (Minél több az elültetendő csemete, annál több munkás kell.)

$10 : \overset{1{\cdot}7}{\cancel{8{\cdot}5}}$ (Minél kevesebb a napi munkaórák száma, annál több munkás kell.)

$\overset{0{\cdot}7}{\cancel{3{\cdot}5}} : 6$ (Minél több a munkanap, annál kevesebb munkás kell.)

$$x = \frac{135{\cdot}07 \times 0{\cdot}7 \times 10}{1{\cdot}7 \times 6} = \frac{945{\cdot}49}{10{\cdot}2} = 93 \text{ napszámost kell fogadnunk.}$$

Amint a példából is látjuk, a könyvekben található napszámadatokat úgy kell a hármasszabályi feladványba foglalni, hogy a könyvben levő „szükséges napszám" a munkanapok számát jelentse, még pedig 10 órai munkaidővel. Ha a könyvből például ezt olvassuk: 1,000 fészek (vetéshez) elkészítéséhez 0·3 kézi napszám szükséges, ezt a hármasszabályi feladványba így kell befoglalnunk: 1,000 fészket 1 napszámos elkészít 0·3 nap alatt. Ha szükséges, odatesszük, hogy naponta 10 órát dolgozva.

7. Tizenöten elvállalták 2·5 k. holdnak a megforgatását; hány órát kell naponta dolgozniok, ha 4 hét (24 nap) alatt készen akarnak lenni, föltéve, hogy munkaadatok szerint hasonló körülmények között 100 m^2 megforgatásához 3·0 napszám szükséges?

Először ki kell számítani, hogy 2·5 k. hold hány m^2? (12 órát kell naponta dolgozniok.)

8. Van 6 munkásunk, föl akarunk velök daraboltatni 96 ür-m^3 fát; hány napra kell őket lekötnünk, ha adatok szerint 1 ür-m^3 fának a feldarabolásához 0·7 napszám szükséges, feltéve, hogy mi csak 8·5 óráig dolgoztathatunk? (13·2 napra kell őket lefoglalnunk.)

9. 3·8 *km* hosszú erdei út elkészítéséhez felfogadtunk 85 embert 11·5 órai napi munkaidő mellett; hány nap alatt lesz kész az út, ha munkaadatok szerint 1 f. *m* ilyen úthoz 0·8 napszám szükséges? (31 nap alatt lesz készen.)

10. 30·6 *km*-re fekvő vágásból 1 m^3 bükk rönkfát beszállítanak a raktárunkba 8·2 K-ért; mennyit fizethetünk szakmányban 560 m^3 erdei fenyő rönkfának a beszállításáért egy másik 21·3 *km*-re fekvő vágásból, ha a fa súlyát is tekintetbe vesszük? (1 m^3 bükk rönkfa 740 *kg*, erdei fenyő 520 *kg* — 2,246·11 K-t kell fizetnünk.)

11. Bizonyos fuvarossal megegyeztünk, hogy egyik 67 *km*-nyire fekvő községbe 1·96 m^3 száraz nyir szerszámfát elvisz 19 K-ért. Útközben rendeletünkre egy, tőlünk 45 *km*-re fekvő helyen lerak 0·75 m^3-t s a megmaradt terhet nem 67, hanem csak 59·7 *km*-nyire szállítja. Az alku alapján mennyi az összes fuvarbére az így változott körülmények közt? Az eredmény két részletben számítandó ki: külön a 45 *km*-re vitt 1·96 m^3-re eső s külön az (59·7 — 45 =) 14·7 *km*-re vitt (1·96 — 0·75 =) 1·21 m^3-re eső bér. (Az összes fuvarbér = 15·33 K.)

12. A vidéken egyenlő napi munkaidő mellett a férfi napibére úgy viszonylik az asszonyéhoz, mint 1 K a 80 f-hez (100 : 80 vagy rövidítve: 5 : 4). Mennyit érdemel napibérül az a férfi, aki 12 óráig dolgozik, ha egy asszonynak ugyanannál a munkánál 11 órai napi munkaidő mellett 90 f-t fizetünk?

Feltétel:	(asszony)	↑ 90 f	↑ 11 óra	↑ 4 arányszám
Kérdés:	(férfi)	x „	12 „	5 „

$$x : 90 = \overset{3}{\cancel{12}} : 11$$
$$5 : \cancel{4}$$

13. Valamely vágásnak a fatömegét 1213·8 m^3-re becsülték. Ha 1 fürész (2 férfi) 3 nap alatt 10·5 m^3-t dolgoz fel, hány fürészt

kell beállítanunk, hogy a vágás másfél hónap (6 hét) alatt készen legyen? (9·63, kereken 10 fürészt.)

14. Mennyibe kerül 270,000 fenyőcsemetének az átiskolázása 75 f napibér mellett, ha 1000 drb. csemetéhez 1·3 asszonynapszám szükséges, de mi 11 óra hosszáig dolgoztathatunk? (239·25 K-ba kerül.)

15. Egy f. *m* 1·5 *m* magas deszkakerítéshez, ha az oszlopok egymástól 3 méterre állanak 0·15 közönséges férfinapszám s 0·35 ácsnapszám szükséges; mennyibe fog kerülni 137 *m* hosszú, 2·5 *m* magas keritésnek az elkészítése, ha az oszlopait 2·5 *m*-nyire állítjuk, ha 11 órát dolgoztathatunk, ha az ácsnapibér 3·5 K s a közönséges 1·10 K? Külön kell kiszámítani az ács s külön a közönséges napszámszükségletet. (346·23 K-ba fog kerülni.)

16. Ha 5 napszámos 3 nap alatt, naponta 10 órát dolgozva, 105 *m* hosszú, fent 1 *m*, lent 33 *cm* széles és 50 *cm* mély árkot ás; hány munkást kell fogadnunk, hogy 1,475 *m* hosszú, fent 60 *cm*, lent 20 *cm* széles és 30 *cm* mély árok huzását, naponta 11 órát dolgozva, 5 nap alatt elvégezzék?

Feltétel:	↑ 5 nsz.	↓ 3 n.	↓ 10 ó.	↑ 105 h.	↑ 1·0 sz.	↑ 50 m.	↑ 33 sz.
Kérdés:	x „	5 „	11 „	1,475 „	0·6 „	30 „	20 „

$$x : \cancel{5} = \cancel{3} : \cancel{5}$$
$$\cancel{10} : 11$$
$$\overset{59\ \ 295}{\cancel{1475}} : \overset{217}{\cancel{105}}$$
$$\cancel{0{\cdot}6} : \cancel{1}$$
$$\cancel{30} : \cancel{50}$$
$$20 : \overset{11}{\cancel{33}}$$

$$x = \frac{59 \times 6 \times 20}{11 \times 7 \times 11} = \frac{7080}{847} = 8{\cdot}3.$$

35. §. Százalékszámolás.

A százalék az a szám, amely azt fejezi ki, hogy 100-ra valaminél vagy valamiből mennyi esik. Ha pl. azt mondom, hogy a lúcfenyő-magnak a csirázóképessége 72 százalék, ez azt jelenti, hogy annál a magnál minden 100 szemből 72 szem csirázik ki (a többi rossz). Vagy ha azt mondom, hogy valamely vágás fatermésének 26 százaléka műfa, ez azt jelenti, hogy abban a vágásban minden 100 m^3 fatömegből 26 m^3 műfa (a többi tüzifa).

A százalék jelzésére ferde vonáska két oldalára írt két kis zérót ($^0/_0$) használunk; pl. 72 százalék = 72$^0/_0$; 26 százalék = 26$^0/_0$.

A százalékot (illetve a százalékszámolást) mindenütt alkalmazzuk, ahol a mennyiségek összehasonlításánál azoknak közös, egyszerü és biztos alapon való elbirálása szükséges.

A százalékszámolásnál négy mennyiség szerepel: 1. a 100 mint *alapszám,* amelyre vonatkoztatunk; 2. a *százalék* ($^0/_0$), vagyis a 100-ra eső egységek száma; 3. az *összeg,* mely után a százalékot számítjuk; 4. az *összegre eső rész.* Ezek közül a 100 állandó és ismeretes szám. Ha a többi három valamelyike ismeretlen, ennek az értékét az ismeretesekből egyszerü *hármasszabály szerint* könnyen kiszámíthatjuk. A százalékszámolás nem egyéb, mint a hármasszabályi számolásnak egyik különös faja.

A százalékszámot a hármasszabályi feladványba két részre osztva kell beírni; pl. 38$^0/_0$ ezt úgy írjuk be, hogy 100-ból 38, vagy hány (x) százalék? ezt úgy írjuk be, hogy 100-ból mennyi (x)?

Az említett szereplő mennyiségek ismeretlenjének az értékét a következőleg számítjuk ki:

a) Valamely vágásnak összes fatermése 3,712 m^3, amelyből 1,295 m^3 műfa. Hány százalékát teszi a műfa az összes fatermésnek?

Feltétel:	3,712 m^3 összes fahozamra esik	1,295 m^3	műfa,
Kérdés:	100 „ „ „	(hány) x „ „	esik?

A százalékszámolásnál a tagoknak egymáshoz való aránya mindig egyenes; lesz tehát:

$$x : 1295 = 100 : 3{,}712$$

$$x = \frac{1295 \times 100}{3712} = 129500 : 3712 = 34{\cdot}9^0/_0$$

b) Vegyük föl most az előbbi példát úgy, hogy az összegre eső rész legyen az ismeretlen: Valamely vágásnak összes fahozama 3712 m^3, amelyből 34·9$^0/_0$ műfa; hány m^3-t tesz a műfa?

Feltétel:	100 m^3 összes fahozamra esik	34·9 m^3	műfa,
Kérdés:	3712 „ „ „	(hány) x „ „	esik?

$$x : 34{\cdot}9 = 3712 : 100$$

$$x = \frac{34{\cdot}9 \times 3712}{100} = \text{(a 100-al a 34·9 elosztva)} = 3{,}712 \times 0{\cdot}349 = 1{,}295\, m^3$$

c) Legyen ismeretlen az összeg. Ez esetben a feladvány így hangzik: Bizonyos vágásban 1295 m^3 műfa van; ha a műfa az összes fatömegnek 34·9%-át teszi, mennyi az összes fatömeg?

Feltétel:	100 m^3	összes	fatömegre	esik	34·9 m^3	műfa,	
Kérdés:	x (hány)	„	„	„	1295	„	„ ?

$$x : 100 = 1295 : 34{\cdot}9$$

$$x = \frac{1295 \times 100}{34{\cdot}9} = 1{,}295{,}000 : 349 = 3710{\cdot}6\ m^3$$

A 3712 m^3 azért nem jön ki pontosan, mert a százalékot jelentő 34·9-nél kevés az egy tizedes jegy.

x-nek *a) b)* és *c)* példáknál aláhúzott értékeiből az ismeretlen meghatározására a következő, fejben is könnyen megtartható szabályokat állíthatjuk fel:

a) *A százalékot megkapjuk, ha az összegre eső rész százszorosát elosztjuk az összeggel.*

b) *Az összegre eső részt megkapjuk, ha az összeget megszorozzuk a százalék századrészével.*

c) *Az összeget megkapjuk, ha az összegre eső rész százszorosát elosztjuk a százalékkal.*

Ha bizonyos szám nem azt mutatja, hogy 100, hanem, hogy 1000 egységre mennyi esik valaminél, akkor azt a számot *„ezertőli"*-nek *(pro mille)* hívjuk. Jelzése: ‰; 13 ezertőli (pro mille) = 13‰; a vele való számítás a százalékkal való számítástól csakis abban különbözik, hogy a 100 helyett alapszámúl mindenütt 1,000 szerepel.

A százalékszámolás az erdészet körében nagyon gyakori alkalmazást talál az alábbi példákban felhozott s az azokhoz hasonló esetekben.

Példák.

1. *a)* Mennyi 4,782-nek 52·4%-a? Megkapjuk, ha az összeget megszorozzuk a % századrészével: 4,782 × 0·524. *b)* Mennyi 10,807·09-nek 0·02%-a? Annyi mint: 10,807·09 × 0·0002. *c)* Mennyi 806·5-nek $3\frac{4}{5}$%-a? Annyi mint 806·5 × 0.038.

2. *a)* 234-nek a *fele*, azaz 117, hány %-a 234-nek?

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Feltétel:} & 234 & . \ . & 117 \\ \text{Kérdés:} & 100 & . \ . & x \end{array}\right\} \; x : 117 = 100 : 234;\; x = \frac{11700}{234} = 50\%.$$

b) 475-nek az *ötödrésze* azaz 95, hány $^0/_0$-a 475-nek?

$$x = \frac{9500}{475} = 20^0/_0.$$

c) 148-nak $^3/_4$ *része* azaz 111, hány $^0/_0$-a 148-nak?

$$x = \frac{11100}{148} = 75^0/_0.$$

Valaminek fele, ötödrésze, háromnegyedrésze, ugyanannak 50, 20, 75 százaléka. — 50 a fele, 20 ötödrésze, 75 háromnegyedrésze lévén 100-nak: kimondhatjuk a szabályt, hogy: *a hányadrészét teszi 100-nak a százalék, ugyanannyiadrésze az összegnek a százalék szerint számított öszegre eső rész.* E szerint valaminek $^1/_{10}$, $^3/_{10}$, $^9/_{100}$, $^5/_{1000}$, $^1/_8$, $^1/_4$, $^3/_5$. 0·17, 0·49, 0·156 stb. része, ugyanannak 10, 30, 9, 0·5, 12·5,25, 60, 17, 49, 15·6 stb. százaléka.

3. Ha 250 erdeifenyő magból 147 kicsirázik, hány $^0/_0$ annak a magnak a csirázóképessége? ($59^0/_0$).

4. 345 lúcfenyő magból a csiráztatási próbánál kikelt 183 szem; *a)* hány $^0/_0$ a csirázóképessége? ($53^0/_0$); *b)* hány mag fog a 345-ből a szabadban kikelni, ha feltesszük, hogy kint $10^0/_0$-al kevesebb mag csirázik ki, mint a csiráztatóban? (Ha 100-ból kikel $53 - 10 = 43$, mennyi fog kikelni 345-ből? — 148 szem fog kikelni.)

5. Ha az ákácmagnak csirázóképessége $62^0/_0$, hány mag fog akkor 50,000 magból (átlag ennyi szem van 1 *kg*-ban) a szabadban kikelni, ha itt feltevésünk szerint $10^0/_0$-al rosszabbul csirázik a mag? (26,000 szem fog kikelni.)

6. Ha valamely magnak a csirázóképessége $72^0/_0$, hány szemet kell belőle a szabadban elvetni, ha azt akarjuk, hogy 725 mag csirázzék ki s számítunk arra is, hogy a próbánál talált $72^0/_0$ csirázóképesség a szabadban $15^0/_0$-al lejebb száll? (1272 szemet kell elvetni.)

Ha 100 szem teljesen jó (ezt úgy mondjuk, hogy $100^0/_0$-os csirázóképességü) magot a szabadban vetünk el, abból nem lesz 100 egy éves csemete. A mostohább körülmények között már mindjárt kevesebb mag csirázik ki, mint a csiráztatóban (ez a különbség a körülmények szerint mintegy 5—$20^0/_0$ lehet, de lehet jóval több is).

A kikelt csemeték számát aztán az egész éven át az időjárás viszontagságai, betegségek, rovarok stb. apasztják annyira, hogy rendes körülmények között (az eddigi, még kevés tapasztalati adat szerint), az alább felsorolt fanemeknél 100 teljesen jó (100%-os csirázóképességü) magból csak a következő számú egyéves csemetére számíthatunk*): tölgynél, gesztenyénél 80, akác, kőris, juharnál 30, szilnél 20, égernél 10, a fenyőféléknél 40—50 egyéves csemetére. Ha a csemeték egy évnél tovább maradnak a csemetekertben, a következő években ismét elpusztul egy-egy részük, természetesen minél idősebbek annál kevesebb. Az évi apadékot lombfáknál mintegy 15%, fenyőknél 20%-ra vehetjük. Eszerint pl. nem 100, hanem 120 (100 + 20%) szem teljesen jó lúcfenyő magból lesz 50 kétéves csemete. Az erdészeti zsebnaptárban a csemeteneveléshez szükséges magmennyiséget feltüntető adatoknál az itt felsorolt körülmények már be vannak számítva.

7. Ha bizonyos csemetemennyiség fölneveléséhez 67%-os csirázóképességü magból 3·47 *kg* szükséges, mennyi kell 46%-os csirázóképességüből? (Rosszabb magból több kell, tehát fordított az arány: x : 3·47 = 67 : 46 . . . . . 5·05 *kg* mag kell.)

8. Ha egyik évben 5·27 *hl* 60%-os csirázóképességü kocsánytalan tölgymakkból 55,000 kétéves csemetét neveltünk fel, hányat nevelhetünk fel 8·5 *hl* 72%-os csirázóképességü makkból? (Felnevelhetünk 106,452 csemetét.)

9. Elvetettünk 1¼ *kg* 52%-os csirázóképességü feketefenyő magot. Hány 2 éves csemetére számíthatunk abból, ha 1000 db. csemete 74 *g* 65%-os magból lesz? (21,115 csemetére.)

10. Nevelnünk kell 64,500 egyéves ákáccsemetét; 38%-os magunkból hány *kg*-ot kell elvetni, ha 1000 csemetét 70 *g* 50%-os magból várhatunk? (5·941 *kg*-ot kell elvetnünk.)

$$x : 0{\cdot}07 = 64{\cdot}5\cancel{00} : 1\cancel{000}$$
$$50 : 38$$

11. Nevelnünk kell annyi 1 éves kocsányos tölgycsemetét, hogy 6⅔ k. holdnak 1·5 *m*-es négyes hálóban való beültetéséhez elegendő legyen; (1 k. h.-ra 2558 csemete kell.) Hány *hl* makkot kell elvetnünk, ha 1000 csemete felneveléséhez 8 liter 85%-os makk kell, a mienk azonban csak 50%-os? (Először az erdősítéshez szükséges csemetemennyiséget kell kiszámítani. — 2·32 *hl* makkot kell elvetnünk.)

12. Egyik tölgyfa vágásban termeltek 1,718 m^3 műfát, 5,962 ür-m^3 hasábfát, 1,562 ür-m^3 dorongfát és 954 ür-m^3 gallyfát; hány

---

*) Tomcsányi G.: „Csemetenevelés“ 52. l.

százalékát teszik az egyes választékok a vágás összes fatömegének?

Az ürmétereket először m^3-ekben kell kifejezni, utóbbival számítjuk ki aztán a százalékot. Az ürmétereket tömörköbméterekre úgy változtatjuk át, hogy az ür-m^3-ek számát megszorozzuk a választékok után zárójelbe tett átszámítási tényezőkkel. (Az átszámítási tényezők az erdészeti zsebnaptárból vétettek.)

1,718 m^3	műfa	......	= 1,718 m^3	... =	25%
5,962 ür-m^3	hasábfa (0·634)		= 3,780 „	... =	55 „
1,562 „	dorongfa (0·616)		= 962 „	... =	14 „
954 „	gallyfa (0·432)	.	= 412 „	... =	6 „
			6,872 m^3		100%

6,872 m^3-ből 1,718 m^3 műfa
100 „ „ x „ „

x : 1,718 = 100 : 6,872
x = 171,800 : 6872 = 25

Hasonlóan számítjuk ki egyenként a többit is. A százalékok összegének 100-nak kell lenni. Ha egész számokban akarjuk a százalékot kifejezni, de a kiszámításnál tizedes törteket kapunk, akkor kikerekítjük a számokat.

13. Egyik kemény lombfa vágásunk fahozama 347 m^3 műfa, 470 ür-m^3 hasábfa (1 ür-m^3 = 0·69 m^3), 57 ür-m^3 dorongfa (1 ür-m^3 = 0·63 m^3) s 2,750 kéve rőzse (100 kéve = 1·61 m^3); hány %-át teszik az egyes választékok a fatermésnek? (Műfa 46%, hasábfa 43%, dorongfa 5%, rőzse 6%.)

14. Egyik tölgyállomány összes fatömege becslés szerint 2,857 m^3, melyből 15% műfa, 65% hasábtüzifa (0·63), 14% dorongfa (0·62) s 6% galyfa (100 k. = 1·47 m^3); hány m^3-t, ür-m^3-t, illetve kévét tesznek az egyes választékok? Itt először minden választék mennyiségét m^3-ben kell egyenként kiszámítani (2857-nek 15, 65 stb. %-át); ha ezeket az eredményeket elosztjuk a zárójelbe tett átszámítási tényezőkkel, megvan minden választék a szokásos mértékében. (Műfa 429 m^3, hasábfa 2,948 ür-m^3, dorongfa 645 ür-m^3, rőzse 11,600 kéve.)

15. Bizonyos vágásban becsültünk 198 m^3 jegenyefenyőfát s 672 m^3 bükkfát; hány %-át teszik egyenként a fanemek az összes (870 m^3) fatömegnek s hány m^3 jegenyefenyő műfa van ott,

ha a műfa-százalékot 60-ra becsültük? (Jegenyefenyő 23%, bükk 77%, jegenyefenyő műfa 119 m^3.)

16. Hány százalék a sikere annak az ültetésnek, amelyiknél becslésünk szerint minden 5 csemete közül 1 veszett ki? (5-ből 4 sikerült, 100-ból x? A siker 80%.)

17. Valakinek évi jövedelme 1,950 K; fizet utánna 7·5% adót; *a)* hány K az adója? (146·25 K); *b)* mennyi lesz az adója, ha a fizetését 15%-al fölemelik? (168·19 K lesz az adója) s mennyi pénze marad utóbbi esetben az adó levonása után? (2074·31 K-ja marad.)

18. 1317 ür-m^3 hasábfából úsztatás után számbavettek 1,232 ür-m^3-t; hány ür-m^3 és hány % az úsztatási apadék? (85 ür-m^3 és 6·5%.)

19. Ha 55 ür-m^3 bükk-hasábfából álló szenítő rakásból 292 *hl* szenet nyertünk, hány % a szénkihozatal térfogat szerint? (55 m^3 = 550 *hl*; 550 *hl*-ből 292, 100-ból x? . . . . 53%.)

20. Hány *hl* szenet kell kiadni 67 ür-m^3 nyirhasábfából álló szenitő rakásnak, ha a szénkihozatal térfogat szerint 62%? (415·4 *hl*-t.)

21. Jegenyefenyőnek vetéssel való alátelepítésénél fölvehetjük, hogy minden 25 teljesen jó (100%-os) magból lesz egy felnőtt fa a fészekben. Hány szemet kell 54%-os magból fészkenként elvetnünk? (46 szemet.) Hány *kg* mag kell 4·53 k. hold alátelepítéséhez, ha k. holdanként 2,558 fészket csináltatunk, feltéve, hogy 1 *kg*-ban 22,000 magszem van? (24·23 *kg* mag kell.)

22. Hány m^3 deszka kerül ki 28·37 m^3-nyi fenyőtönkből, ha a tiszta árú kihozatal 54% szokott lenni? (15·32 m^3.)

23. Hány % annak az útnak az esése (100 *m*-enként hány *m*-t emelkedik vagy esik), amelyiknél minden 28 *m*-re átlag 1·5 *m* emelkedés jut? (5·3%.)

24. Hány *m*-t kell emelkednie 30 *m*-enként annak a csúsztatónak, amelyet nedves állapotban hasábfa közelítésére akarunk használni, ha az ilyen csúsztató emelkedésének (vagy esésének) legalább 25%-nak kell lennie? (7·5 *m*t.)

25. Lehet-e azon a szálfacsúsztatón száraz állapotban fűrésztönköket szállitani, amelynél 15 *m*-enként 2·8 *m* az esés, ha a száraz tönkcsúsztatónak legalább is 25% eséssel kell bírnia? (Nem lehet, mert annak a csúsztatónak csak 18·7% az esése.)

26. Vizre bocsátottak 789 ür-m^3 fát. Hány ür-m^3-nek kell a

gerebrakodóba megérkezni, ha az úsztatási apadék 4·5% szokott lenni? (753·5 ür-m^3-nek kell beérkezni.)

27. Valamely gerebrakodón úsztatás után számbavettek 2,168 ür-m^3 fát. Hány ür-m^3-t bocsátottak vízre, ha az úsztatási apadék 6% volt? (100-ból a rakodóba érkezett $100 - 6 = 94$ ür-m^3, mennyiből érkezett 2,168? — 2306 ür-m^3-t bocsátottak vízre.)

36. §. Egyszerü kamatszámolás.

Annak a pénzösszegnek, amelyet valakinek használatra átengedünk, (kölcsön adunk, takarékpénztárba beteszünk): *tőke* a neve.

Valamint minden vagyonnak (földbirtok, ház stb.) úgy a pénznek a használatáért is fizetni kell. Más vagyonnak a használatáért fizetett pénzt *bér*-nek (földbér, házbér stb.) hívjuk, a tőke használatáért fizetett pénznek pedig *kamat* a neve. A kamat — ha az ellenkező világosan ki nincs mondva — mindég 1 évre szól.

A kamatot százalék szerint határozzuk meg. Ha azt mondjuk, hogy valamely tőkéért 4% kamatot fizetnek, ez azt jelenti, hogy annak a tőkének minden 100 (pénzegysége) koronája után 1 évre 4 koronát fizetnek. A kamatszámolásnál a százalékot *kamatláb*-nak hívjuk.

Amint látjuk *a kamatszámolás a százalékszámolásnak egyik különös faja,* amelynél az eddigelé szereplő mennyiségekhez még egy új, az *idő* is csatlakozik. A kamatszámolásnál eszerint a következő mennyiségek fordulnak elő: a tőke, a kamat, az idő és a százalék (a 100 alapszám és az utána járó egységek.)

A kamatszámolásnál minden hónap 30 napból állónak s így az év (30×12) 360 naposnak vétetik.

Kétféle kamatozás s ebből kifolyólag kétféle kamatszámítás is van, tudniillik az egyszerü és összetett kamatszámolás. Utóbbit kamatos-kamatszámolásnak hívjuk. Az egyszerűnél a tőke által hozott kamatokat évről-évre elvesszük a tőkétől, utóbbi tehát állandóan ugyanaz marad. Az összetettnél a kamatot nem vesszük el a tőkétől, hanem évről-évre hozzácsatoljuk, hogy a tőkével együtt az is kamatozzék; ezért hivják kamatos-kamatozásnak is. Mi itt csak az egyszerü kamatszámolást tárgyaljuk.

Az egyszerü kamatszámolás feladványait a *hármasszabály segítségével* fejthetjük meg. Különösen csak arra kell ügyelnünk, hogy a százalékot megfelelőleg szétbontsuk a felirásnál. Ezt pl.

hogy 6%-os kamat így kell felírni: 100 K tőke 1 év alatt 6 K-át kamatoz. Vagy: hány (x) %-os kamat? ez így irandó fel: hány (x) K-át kamatoz 1 év alatt 100 K?

Ha az idő mind a feltételben, mind a kérdésben 1 év, akkor azt nem is írjuk ki.

Az egyszerü kamatszámolásnál szereplő mennyiségek közül egynek-egynek a többi ismertből való kiszámítását az alábbi példák mutatják.

1. Ha 494 K 3 év alatt 66·69 K-át kamatozott, hány %-al volt az kölcsön adva?

$$\begin{array}{llllll} \uparrow 494 & \text{K tőke} & \uparrow 3 & \text{év} & \uparrow 66{\cdot}69 & \text{K kamat} \\ 100 & \text{„ „} & 1 & \text{„} & x & \text{„ „} \\ \hline \end{array}$$

$$x : \overset{22{\cdot}23}{\cancel{66{\cdot}69}} = \cancel{1} : \cancel{3} \text{ (Minél több az idő, annál több a kamat.)}$$
$$100 : 494 \text{ (Minél több a tőke, annál több a kamat.)}$$
$$x = 2223 : 494 = 4{\cdot}5\%$$

Ebből szabályként fel is írhatjuk, hogy: *A kamatlábot megkapjuk, ha az évi kamat* ($66{\cdot}69 : 3 = 22{\cdot}23$) *százszorosát elosztjuk a tőkével.* (Ez egyenlő a 35. §. *a)* alatti szabályával, csak más szavakba van öntve.)

$$\% = \frac{k \times 100}{T}$$

2. Valakinek kölcsön adtunk 285 K-át 5%-os kamatra; mennyit kell évente kamat fejében fizetnie?

$$\left.\begin{array}{llll} \uparrow 100 & \text{K t.} & \uparrow 5 & \text{K k.} \\ 285 & \text{„} & x & \\ \hline \end{array}\right\} x = 285 \times 0{\cdot}05 = 14{\cdot}25 \text{ K.}$$

Ennél a feladványnál a 35. §-ban *b)* alatt leírt szabály szerint, hármasszabály nélkül, egyszerre is felírhattuk volna x-nek $285 \times 0{\cdot}05$ értékét.

A kamatszámolás szavaival a szabály: *A kamatot megkapjuk, ha a tőkét megszorozzuk a kamatláb századrészével.*

$$k = \frac{T \times \%}{100}$$

3. Hány K tőkéje van annak a tőkepénzesnek, akinek kamat fejében évente 7,560 K-át fizet a takarékpénztár, feltéve, hogy a kamatláb $4^1/_2\%$?

$$\begin{array}{l} 100 \text{ K t.} \quad 4{\cdot}5 \text{ K k.} \\ \underline{\text{x} \quad „ \quad\quad 7{,}560 \text{ K}} \\ \text{x} : 100 = 7560 : 4{\cdot}5 \\ \text{x} = \frac{7560 \times 100}{4{\cdot}5} = 168{,}000 \text{ K.} \end{array}$$

A 35. §. *c)* pontja alatt leírt szabály szerint $x = 756{,}000 : 4{\cdot}5$ egyszerre is felírható.

Szabály: *A tőkét megkapjuk, ha a kamat százszorosát elosztjuk a kamatlábbal.*

$$T = \frac{k \times 100}{\%}$$

4. Valaki kölcsön adott 670 K-át 4·5%-ra, a kamatokat évente fölvette; hány évig volt kiadva a tőkéje, ha összesen 180·90 K-t szedett fel kamat fejében?

$$\begin{array}{lll} \downarrow 100 \text{ K t.} & \uparrow 1 \text{ év} & \uparrow 4{\cdot}5 \text{ K k.} \\ \;\; 670 \;„ & \;\; \text{x} \;„ & \;\; 180{\cdot}9 \text{ K} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{x} : 1 = \overset{201\ 603}{\cancel{180{\cdot}9}} : \overset{15\ 5}{\cancel{4{\cdot}5}} \\ \qquad\quad \overset{2}{\cancel{100}} : \cancel{670} \\ \text{x} = \frac{201 \times 2}{67} = 6 \text{ év} \end{array}$$

(Minél nagyobb a tőke, annál kevesebb idő kell ugyanannak a kamatnak a hozására, — az arány tehát fordított.)

Ha a kamatot nem egész évre vagy évekre, hanem hónapokra vagy napokra kell kiszámítani, akkor úgy járunk el, hogy először 1 évre számítjuk ki a kamatot s aztán az eredményt az év hányadrészében kifejezett hónapok vagy napok számával megszorozzuk. Pl.

5. 523·47 K-nak 8%-os kamatja 3 hónapra mennyi?

A kamat 1 évre $= 523{\cdot}47 \times 0{\cdot}08 = 41{\cdot}88$ K

3 hónap $= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ év, tehát a kamat

3 hónapra $= 41{\cdot}88 \times \frac{1}{4} = 41{\cdot}88 \times 0{\cdot}25$ vagy $41{\cdot}88 : 4 = 10{\cdot}47$ K.

6. 97·65 K-ért február 7.-étől július 23.-áig $5\frac{1}{2}$%-al mennyi kamatot kell fizetni?

A kamat 1 évre $= 97{\cdot}65 \times 0{\cdot}055 = 5{\cdot}37$ K.

Február 7.-étől július 23.-áig = 5 hónap és 15 nap. (A kamatozásnál csak az egész napok számítanak; nem számít tehát az a nap, amelyen a pénzt odaadtuk és visszavesszük.)

A kamat 5 hóra $= 5\cdot37 \times {}^{5}/_{12} = (5\cdot37 : 12) \times 5 \qquad = 2\cdot24$ K,
„ 15 napra $= 5\cdot37 \times {}^{15}/_{360} = 5\cdot37 \times {}^{1}/_{24} = 5\cdot37 : 24 = 0\cdot22$ K,
„ 5 hóra és 15 napra összesen $= 2\cdot46$ K.

Az ${}^{5}/_{12}$-t és ${}^{15}/_{360}$-t átváltoztathatjuk tizedes törtté is s így szorozzuk meg vele az 5·37-t.

Ha az egy hónapra eső kamatot tudjuk, akkor a napokra esőt könnyebben ebből számítjuk ki.

7. Valamely birtok megvételénél a vevőnek fizetnie kell 15,000 K-t rögtön; 12,500 K-t 5%-os kamatával 6 hónap mulva s 22,500 K-át ugyancsak 5%-os kamatával 1 év és 3 hónap mulva; mennyit kell fizetnie minden fizetési határidőnél?

a) Rögtön . . . . 15,000·00 K

b) 6 hónap mulva: (12,500 K-nának egy évre eső kamata $= 12{,}500 \times 0\cdot05 = 625$ K; 6 hónapra $= 625 : 2 = 312\cdot5$ K;) $12{,}500 + 312\cdot5$ K $=$ . . . 12,812·50 K

c) 1 év és 3 hó mulva: (22,500 K-nak egy évi kamata $= 22{,}500 \times 0\cdot05 = 1{,}125$ K; 3 hónapi kamata $= 1{,}125 : 4 = 281\cdot25$ K;) $22{,}500 + 1{,}125 + 281\cdot25$ K $=$ . . . . 23,906·25 K.

8. Milyen nagy az a tőke, amelyik 3·5%-os kamatozás mellett évente 3754·75 K-t jövedelmez? (107,278·57 K.)

9. Valaki letett 60 K-t biztositékul; 8 hónap és 17 nap mulva mennyit kap vissza, ha a biztosíték az alatt az idő alatt 4%-al kamatozott? (61·71 K-t.)

10. Szükségünk van 376 K kölcsönpénzre; valaki felajánlja az összeget oly feltétellel, hogy 28 K kamatot fizessünk érte évente. Érdemes-e elfogadni az ajánlatot, ha a pénzt 6%-os kamatra a takarékpénztárból is megkaphatjuk? (Nem érdemes, mert utóbbi helyen csak 22·56 K a kamat.)

11. Kölcsön adott pénzért 8%-nál nagyobb kamatot fizettetni a törvény szerint tilos; aki ennél többet fizettet, az uzsorás s megbüntetik. — Valaki kölcsön adott 137 K-jáért 3 hónapra 3·50 K kamatot követel; szabad-e ennyit fizettetnie, uzsorás-e az? (Uzsorás, mert a kamatláb 10·2 K.)

12. Bizonyos erdőbirtok évente, tisztán 20,465 K-t jövedelmez. Mily nagy tőkét képvisel az, ha $3^{1}/_{2}$% kamatozással számítunk? (584,714 K tőkeértéket képvisel.)

13. Egyik fakereskedő 6749 K-ért fát vett. Háromnegyed év

múlva eladta 8312 K-ért. Hány %-ot tesz a nyeresége, ha raktározás alatt 348 K-t költött a fára? (24% a nyeresége.)

14. Valaki megvett 17,594·68 kat. holdnyi erdőbirtokot holdanként 85 K-ért. Hány K tiszta évi jövedelmet kell annak a birtoknak nyujtania, hogy a birtokos — aki $3^1/_4$% kamatozást remél — számításában ne csalatkozzék? (48,605·30 K-t kell jövedelmeznie.)

III. FEJEZET.

ARÁNYOS OSZTÁS.

37. §. Arányos osztás vagy társaságszabály.

Az arányos osztás az a számolási mód, amelynek segélyével *valamely mennyiséget több egyenlőtlen részre aszerint osztunk el, amint azt két vagy több adott számnak egymáshoz való viszonya mutatja.* Az elosztás arányát meghatározó számokat *viszonyszámok*nak hívjuk.

Társaságszabálynak azért nevezik ezt a számolási módot, mert leggyakoribb alkalmazást ott talál, ahol több ember együttesen, társaságban vesz részt valamiben.

Van egyszerü és összetett arányos osztás. Az egyszerűnél az elosztás a viszonyszámoknak csak egy, az összetettnél pedig azoknak több sorától függ.

38. §. Egyszerü arányos osztás.

1. 189 K-át el kell osztani 3 egyén közt úgy, hogy *A* kapjon belőle 1 részt, *B* 3 részt s *C* 5 részt; hány K jut egynek-egynek?

1, 3 és 5 a viszonyszámok; ezek egyszerü magyarázat szerint azt jelentik, hogy amikor abból az összegből *A* 1 K-t kap, ugyanakkor *B*-nek 3 K-t s *C*-nek 5 K-t kell kapnia. Ha számolni nem tudnánk, akkor az elosztást úgy végezhetnénk, hogy — koronákra váltván az összeget — magunk elé állítanánk *A*, *B* és *C*-t s kezdvén *A*-n, adnánk neki 1 K-t, tovább *B*-nek 3 K-t s *C*-nek 5 K-t s ezt így folytatnánk tovább, mig a pénzt mind ki nem osztottuk. Ahoz, hogy mindegyiknek egyszerre adjunk, $1+3+5=9$ K kell. Ahányszor a 9 K megvan a 189 K-ban, annyiszor adhatunk *A*-nak 1, *B*-nek 3 s *C*-nek 5 K-át. — 9 a 189-ben megvan $(189:9=)$ 21-szer, *A* kap tehát $21 \times 1 = 21$ K-t; *B* $21 \times 3 =$

63 K-t s *C* $21 \times 5 = 105$ K-t; $21 + 63 + 105 = 189$. Igy az egész összeg el van osztva s a feltételnek is elég van téve, mert $21:63:105 = 1:3:5$.

Gyakorlatiasan a kiszámítást így vegezzük:

A	1	. . . . .	$1 \times 21 =$ . . .	21 K.
B	3	. . . . .	$3 \times 21 =$ . . .	63 „
C	5	. . . . .	$5 \times 21 =$ . . .	105 „
	9			189

$189:9 = 21$

Ebből felírhatjuk az egyszerü arányos osztás megfejtésének a szabályát:

a) Egymás alá írjuk a viszonyszámokat s összeadjuk.

b) A viszonyszámok összegével elosztjuk a felosztandó összeget.

c) Az osztásból nyert hányadossal megszorozzuk külön-külön a viszonyszámokat; a nyert szorzatok teszik a keresett részeket.

Ha a viszonyszámoknak közös osztójuk van, akkor azokat először rövidítjük, ha pedig törtszámok, akkor először egész számokká változtatjuk s a kiszámítást csak aztán kezdjük meg. (A viszonyszámok átváltoztatására vonatkozólag lásd a 30. §-t.) Lényegében arányos osztás a 29. §-nak 6., 7., 9., 17., 18. és 19. példája is. Fejtsük meg azokat így is.

2. Hárman legelőt vettek bérbe 2150 K-ért. *A* ráhajtott 30, *B* 15 s *C* 45 felnőtt szarvasmarhát; mennyit fognak a bérösszegből egyénként fizetni?

A fizetés természetesen a felhajtott marhák számának arányában történik.

A	$\overset{5}{\cancel{30}}$	$\overset{3}{\cancel{6}}$	2	$2 \times 358{\cdot}33 =$	716·67 K.
B	15	3	1	$1 \times 358{\cdot}33 =$	358·33 „
C	45	9	3	$3 \times 358{\cdot}33 =$	1,075·00 „
			$2{,}150:6 = 358{\cdot}33$		2,150·00 K.

3. Valamely vágásnak 513 ür-m^3-nyi fatermését föl kell osztani négy birtokos közt úgy, hogy *A* 3-szor annyit kapjon mint *B*, *C* felényit mint *A* s *D* annyit mint *B* meg *C* együttesen. Hány ür-m^3-t kap mindegyik? A viszonyszámok megállapitásához vegyük alapul *B*-t s legyen az ő száma 1; akkor az *A*-é 3, *C*-é 1·5 s

D-é 2·5 lesz. (*A*-nak 192·4, *B*-nek 64·1, *C*-nek 96·2 s *D*-nek 160·3 ür-m^3 jut.)

4. 827·58 k. hold erdőt $^1/_3$, $^5/_6$, $^2/_3$, $^1/_2$ számok viszonya szerint kell 4 osztályos között elosztani; hány k. holdat kap egy-egy?

A	$^1/_3 = {}^2/_6$	 2	. . . . $2 \times 59·113$	=	118·23 k. hold
B	$^5/_6 = {}^5/_6$	 5	. . . . $5 \times 59·113$	=	295·56 „ „
C	$^2/_3 = {}^4/_6$	 4	. . . . $4 \times 59·113$	=	236·45 „ „
D	$^1/_2 = {}^3/_6$	 3	. . . . $3 \times 59·113$	=	177·34 „ „
		827·58 : 14 = 59·113			827·58 k. hold.

5. Négyen legelőterületet vettek bérbe évente 850 K-ért; mennyit fizetnek egyenként minden évben, ha

A	ráhajtott	8 tehenet és 12 db. 3 éven aluli szarvasmarhát
B		5 „ „ 3 lovat
C		7 „ „ 6 tinót
D		6 lovat „ 17 csikót?

Tudjuk, hogy ugyanabból az állatfajból a felnőtt többet eszik, mint a növendék; pl. a tehén többet, mint a két éves tinó vagy mint a borju. Másrészt igaz az is, hogy egyik állatfaj étkesebb, falánkabb, mint a másik s így többet is fogyaszt; pl. a ló többet eszik, mint a szarvasmarha, a kecske többet, mint a juh, még ha egyenlő nehezek is. Nem volna tehát igazságos, ha aki pl. 5 tehenet hajt a legelőre, az annyit fizetne, mint aki 5 borjut hajt, vagy aki 7 lovat ereszt reá, az annyit fizetne, mint akinek 7 tehene van ott.

Ezekre való tekintettel meg van határozva, hogy legeltetésnél milyen viszony van először ugyanannak az állatfajnak felnőtt és növendék állata s másodszor a felnőtt szarvasmarha és a többi állatfaj felnőtt állata között. A viszony mindkét esetben számokban van adva, amelyek segélyével ki lehet számítani, hogy pl. hány csikó számít egy lovat vagy pedig, hogy hány ló számít egy felnőtt szarvasmarhát. Az átszámítás alapjául, egységéül — mint látjuk — 1 darab felnőtt szarvasmarha van elfogadva. Egy ilyen egységül elfogadott darab marhát *„számos marhá“*-nak mondunk.

A gyakrabban előforduló állatoknak egymáshoz való viszonya s az átszámitási tényezők itt következnek:

3 db.	3 éven aluli szarvasmarha .	=	1	db.	felnőtt állat a maga nemében
3 „	tinó	=	2	„	
2 „	3 éven aluli ló	=	1	„	
3 „	bárány	=	1	„	
2 „	süldő	=	1	„	
4 „	malac	=	1	„	

1 db.	felnőtt szarvasmarha . . .	=	1	db.	számos marha
3 „	3 éven aluli „	=	1	„	
3 „	tinó	=	2	„	
4 „	ló	=	5	„	
8 „	3 éven aluli ló	=	5	„	
10 „	juh	=	1	„	
30 „	bárány	=	1	„	
4 „	felnőtt sertés	=	1	„	
8 „	süldő	=	1	„	
16 „	malac	=	1	„	

Előbbiek szerint az átszámítási tényezők:

1 db.	felnőtt szarvasmarha . . .	=	1·000	számos marha
1 „	3 éven aluli „	=	0·333	
1 „	tinó	=	0·667	
1 „	ló	=	1·250	
1 „	3 éven aluli ló	=	0·625	
1 „	juh	=	0·100	
1 „	bárány	=	0·033	
1 „	felnőtt sertés	=	0·250	
1 „	süldő	=	0·125	
1 „	malac	=	0·063	

Ha az adotthoz hasonló példát ki akarunk dolgozni, akkor először minden birtokos állatállományát át kell számítani számos marhára az átszámítási tényezővel való szorzás által. A számos marhák mennyisége lesz a viszonyszám.

Az adott példa kidolgozása a következő:

A 8 tehén 12 — 3 é. a. sz. m.	$=8+0{\cdot}333\times12=8+4{\cdot}00=$	12·00	számos marha
B 5 „ 3 ló	$=5+1{\cdot}25\times3=5+3{\cdot}75=$	8·75	
C 7 „ 6 tinó	$=7+0{\cdot}667\times6=7+4{\cdot}00=$	11·00	
D 6 ló 17 csikó	$=(1{\cdot}25\times6)+(0{\cdot}625\times17)=7{\cdot}50+10{\cdot}63=$	18·13	
		49·88	

$$
\begin{array}{llr}
 & 850:49{\cdot}88 = 17{\cdot}041 & \\
A & 12{\cdot}00 \times 17{\cdot}041 = 204{\cdot}49 & K \\
B & 8{\cdot}75 \times 17{\cdot}041 = 149{\cdot}11 & „ \\
C & 11{\cdot}00 \times 17{\cdot}041 = 187{\cdot}45 & „ \\
D & 18{\cdot}13 \times 17{\cdot}041 = \underline{308{\cdot}95} & „ \\
 & 850{\cdot}00 & K.
\end{array}
$$

6. Hárman erdőt vettek; *A* a vételhez 28,000, *B* 18,500 s *C* 13,500 K-val járult. Mennyit kap mindegyik az évi jövedelemből, ha az a f. évben 1936·62 K? Az osztozkodás a vételhez adott összegek arányában történik. A rövidítés útján nyert arányszámok 56, 37 és 27. (*A* kap 903·76, *B* 597·12 s *C* 435·74 K-t.)

7. Ketten megvették bizonyos vágásnak a fatömegét; *A* fizetett a vételárból 4,570 K-t, *B* 13,500 K-t. A kihasználásnál állandóan *A* foglalkozott, amit *B* beszámít neki 950 K-ba. Az üzleten nyertek 4,755·63 K-t; mennyit kap a nyereségből *A* s mennyit *B*? A nyereséget üzleteknél mindig a befektetés és egyéb beszámítható hozzájárulás arányában kell felosztani. Itt a nyereségből mindenekelőtt levonandó *A*-nak a 950 K-ja s ami marad az osztandó föl. ($A = 950 + 962{\cdot}46$ K, $B = 2{,}843{\cdot}17$ K.)

8. 2374·86 k. hold erdőt négy osztályos fél között úgy kell fölosztani, hogy *A* $^1/_8$ részt, *B* $^2/_3$ részt kapjon, *C* és *D* pedig a maradékot egyenlő arányban; mennyit kap mindegyik? ($A = 296{\cdot}86$ k. hold, $B = 1583{\cdot}24$ k. hold, $C = 247{\cdot}38$ k. h., $D = 247{\cdot}38$ k. h.)

9. 218 ür-m^3 tüzifa felosztandó úgy, hogy *B* a negyedrészét kapja annak, amit *A* kap, *C* pedig másfélszer annyit kapjon, mint *A*; hány ür-m^3-t kap mindegyik? ($A = 19{\cdot}8$ ür-m^3, $B = 79{\cdot}3$ ür-m^3, $C = 118{\cdot}9$ ür-m^3-t.) Ha *B*-nek a részét egységül vesszük, akkor *A* 4 részt, *C* pedig $1{\cdot}5 \times 4 = 6$ részt kap; a viszonyszámok tehát: *A* 4, *B* 1, *C* 6.

10. Bizonyos fuvarossal megalkudtunk, hogy három részletben elszállít 84 ür-m^3 fát 123·50 K-ért; egyszer elvitt 24 ür-m^3-t, máskor 33 ür-m^3-t s utoljára 27 ür-m^3-t; hány K fuvarbér jár neki egy-egy vitelért? (Jár: 35·28, 39·70 és 48·52 K.) Ezt kétfélekép is kiszámíthatjuk: úgy is, hogy a 123·5-et elosztjuk a 24, 33, 27 számok aránya szerint s úgy is, hogy először kiszámítjuk, hogy 1 ür-m^3-re mennyi esik a fuvarbérből (123·5 : 84) s a hányadost megszorozzuk az egyes alkalmakkor fuvarozott ür-m^3-ek számával. A két eljárás különben lényegileg ugyanaz.

11. Öten elvállaltak bizonyos munkát szakmányban 52 K-ért; egyenként 12, 6, 5, 8, 9 napig dolgoztak rajta; mennyit kap mindegyik a munkabérből? (Kapnak: 15·60, 7·80, 6·50, 10·40 és 11·70 K-t.)

12. Bizonyos vállalatban befektetett: *A* 475 K-t, *B* 837 K-t, *C* 548 K-t. A nyereségből *A* kapott 98·73 K-t; mennyit kapott *B* és *C* s mennyi volt az összes nyereség?

A-nál: 475 K befektetésre 98·73 K nyereség
B-nél: 837 „ „ x „ „ stb.

($B = 173·97$ K, $C = 113·90$ K s az összes nyereség 386·60 K.)

13. Két szomszédos községnek közös költsége akadt még pedig 375·19 K; a költség viselését az állami adó arányában határozták el; mennyit fizetnek egyenként, ha *A*-nak az adója 2817·38 K s *B*-é 3654·56 K? ($A = 163·32$ K; $B = 211·87$ K.)

14. 32,476 db. szőlőkarót föl kell osztani $^2/_9$, $^4/_9$ és $^3/_9$ számok aránya szerint. Mennyi jut egy-egy részre? (7,217; 14,434 és 10,825 db. jut.)

15. Valaki három helyre tartozott, 175, 213, illetve 84·60 K-val. Elhalván, maradt utánna 300·08 K; mennyit kapnak ebből a hitelezői egyenként? (Kapnak: 111·12, 135·25, illetőleg 53·71 K-t.)

16. Négyen vállalatot szerveztek. *A* kétszer annyit adott, mint *B*, *C* harmadrésznyit mint *A*, *D* pedig annyit mint *B* meg *C* együttesen. Nyertek a vállalaton 7,513·64 K-t; mennyi jut egyre-egyre, ha *C* a vállalat vezetéséért az összes nyereség 8%-át is kapja? Először a *C*-nek járó 8%-ot kell levonni s ami marad, azt kell elosztani. *B*-nek a viszonyszáma 1, *A*-é 2, *C*-é $^2/_3$ és *D*-é $(1 + {}^2/_3) = {}^5/_3$. ($A = 2592·21$, $B = 1296·10$, C 1465·16 és $D = 2160·17$ K.)

39. §. Összetett arányos osztás.

Az összetett arányos osztásnál a viszonyszámoknak több sora van adva. Az egyes részletek a rájok vonatkozó viszonyszámoknak a szorzataitól függnek. Ebből kifolyólag *összeszorozzuk az egy-egy részhez tartozó viszonyszámokat, ami által az összetett arányos osztást egyúttal egyszerü arányos osztássá változtattuk át,* lévén most már csakis egy sora a viszonyszámoknak, t. i. a szorzatok. Ezután a feladvány megfejtése éppen úgy történik, mint az egyszerü arányos osztásnál.

Példák.

1. Hárman legelőt vettek bérbe egy évre 360 K-ért;

A	ráhajtott: 4 tehenet, 2 tinót $= 5{\cdot}33$	számos marhát	$4^1/_2$ hónapra
B	7 „ 3 „ $= 9{\cdot}00$		5 „
C	4 csikót, 6 „ $= 6{\cdot}50$		$5^1/_2$ „

Mennyit fizetnek egyenként a legelőbérből?

$$\begin{array}{lll}
A = 5{\cdot}33 \times 4{\cdot}5 \overset{5}{=} 5{\cdot}33 \times 0{\cdot}9 = 4{\cdot}80; & 4{\cdot}8 \times 17{\cdot}184 = & 82{\cdot}48 \text{ K.} \\
B = 9{\cdot}00 \times 5{\cdot}0 = 9{\cdot}00 \times 1 \;\; = 9{\cdot}00; & 9{\cdot}0 \times 17{\cdot}184 = & 154{\cdot}66 \;\text{„} \\
C = 6{\cdot}50 \times 5{\cdot}5 = 6{\cdot}5 \;\; \times 1{\cdot}1 = \underline{7{\cdot}15}; & 7{\cdot}15 \times 17{\cdot}184 = & \underline{122{\cdot}86 \;\text{„}} \\
\qquad 360 : 20{\cdot}95 = 17{\cdot}184 & & 360{\cdot}00 \text{ K.}
\end{array}$$

2. Négy munkáscsoport fölvállalta bizonyos pataknak szabályozási munkálatait 1,650 K-ért. Az 1. csoportban dolgoztak 16-an 24 napig, a 2.-ban 9-en 15 napig, a 3.-ban 22-en 11 napig és a 4.-ben 12-en 19 napig. Mennyi esik egy-egy csoportra a keresményből? (1. csoport = 640·66; 2. cs. = 225·22; 3. cs. = 403·74 4. cs. = 380·38 K.) ;

3. Bizonyos fuvarossal megegyeztünk, hogy 68 K-ért elvisz 18 ür-m^3 hasábfát 4·8 *km*-re, 23 ür-m^3-t 5·6 *km*-re és 32 ür-m^3-t 3·2 *km*-re; mennyi fuvarbér jár neki mindegyik vitelért? (Jár: 18·50, 27·58 és 21·92 K.)

4. Valamely vállalatba befektetett *A* 1,250 K-t 8 hónapra, *B* 1,800 K-t másfél évre s *C* 2,100 K-t $1^1/_4$ évre. Az üzlet végén a nyereség a befektetésnek éppen 23%-át teszi. Mennyit kap a nyereségből mindegyik? *A* = 160·28, *B* = 519·32 és *C* = 504·90 K.)

5. Bizonyos munkát felvállaltak négyen 42 K-ért. *A* dolgozott 5 napig, naponta 12 órát; *B* 9 napig, naponta 10 órát; *C* 7 napig, naponta 11·5 órát s *D* $6^1/_2$ napig, naponta 10·5 órát; mennyit kap a munkabérből mindegyik? (*A* = 8·73; *B* = 13·09; *C* = 10·25; *D* = 9·93 K.)

6. Hárman legelőt béreltek 2,940 K-ért.

A	ráhajtott: 25 tehenet,	30 tinót-borjut s	12 csikót	$3^1/_2$ hónapra,
B	20 „	35 „ „	10 „	5 „
C	15 „	25 „ „	8 „	$5^1/_2$ „

mennyit fizet mindegyik a legelőbérből? (*A* = 884·92; *B* = 927·17 és *C* = 1,127·91 K.)

7. Bizonyos vállalatba befektetett *A* 2500 K-t 1·5 évre; *B* 5740 K-t 2 évre. A két év végén a nyereségből *A* 290·90 K-t kapott; mennyit kapott *B* s hány százalékát tette a nyereség a befektetésnek? (*B* = 890·54 K; a nyereség = 14·3%.)

8. Két községnek közös munkát kellett végeztetni. Az egyik községből dolgozott 73 munkás 18 napig, naponta 11 órát; a másikból 68 munkás 25 napig, naponta 10 órát. Ha a munkát egyenlő arányban tartoztak végezni, mennyit köteles az egyik község a másiknak munkatöbbletéért pénzben megtéríteni, ha egy napi bért 10 órai munkaidő mellett 92 f-el számítanak?

A 73 munkás 18 napig = 1314 napszám 11 órával.
B 68 „ 25 „ = 1700 „ 10 „

$$A \begin{cases} 1314 \text{ nsz. } 11 \text{ órai munkaidő mellett} \\ x \quad „ \quad 10 \quad „ \quad „ \quad „ \end{cases}$$

x : 1314 = 11 : 10 (Fordított arány.)

$$x = \frac{1314 \times 11}{10} = 1445{\cdot}4 \text{ napszám.}$$

A községnek tehát 1700 — 1445·4 = 254·6 tíz órás napszámmal van kevesebbje, amit — 92 f-el számítva — pénzben tartozik megadni.

9. Hárman megvették bizonyos erdőbirtok évi vágását 28,000 K-ért; *A* hozzájárult a vállalathoz 12,000 K-val, *B* 9,000 K-val s *C* 7,000 K-val. A vállalat 2 év alatt lebonyolódott. *A* az első év végén kilépett a vállalatból, *C* ellenben még az első év közepén apróbb berendezésekre befizetett pótlólag 400 K-t. A vállalat 5,200 K nyereséggel végződött; mennyi jut ebből mindegyikre, ha *B* a kihasználás és értékesítés vezetéséért az összes nyereség 12%-át is kapja? (*A* = 1231·21 K; *B* = 1846·82 + 624 K; *C* = 1497·97 K.)

IV. FEJEZET.

ÁTLAGSZÁMÍTÁS.

40. §. Átlagszámítás.

Valaki 4 napig dolgozott. Az első nap 1·68 s a többi napokon 1·51, 1·84 illetve 1·73 K-t keresett. Az összes keresménye $1·68 + 1·51 + 1·84 + 1·73 = 6·76$ K. Ha a 6·76 K-t elosztjuk 4-el, megkapjuk, hogy átlagosan (átaljában, általában, egyre-másra) mennyit keresett naponta; $6·76 : 4 = 1·69$, az átlagos napi keresménye tehát 1·69 K. Ez azt jelenti hogy, ha az a munkás minden nap 1·69 K-t kapott volna, éppen annyi lenne a négy napi összes bére, mint a fentírt módon.

Azt a számot, amelynek több adott számmal szemben olyan tulajdonsága van, mint itt az 1·69-nek: *átlagszám*-nak hívjuk. 1·69 a fenti négy számnak átlaga, közepese vagy középértéke.

Az átlagszám a számoknak nemcsak (mint előbb) egy, hanem két, de egymáshoz tartozó sorától is függhet. Kikeresése mindkét esetben más-más, ugyanezért külön tárgyaljuk.

a) *Ha az átlagszám csak egy számsortól függ.*

Ebben az esetben az átlagszámot úgy találjuk meg, hogy *az adott számokat összeadjuk s az összeget elosztjuk annyival, ahány számot összeadtunk*; a hányados maga az átlagszám.

1. Mennyi 25, 13, 42 és 64-nek az átlaga? Annyi mint: $(25 + 13 + 42 + 64 = 144;\ 144 : 4 =)$ *36* $(36 \times 4 = 144)$.

2. Valamely szálfának alsó vastagsága 48 *cm*, a felső 22 *cm*, mennyi az átlagos vastagsága? (= 35 cm.)

3. Hat csemetesorból kiemeltünk: 52, 64, 77, 56, 81 illetve 62 két éves kőriscsemetét. Hány volt átlag egy sorban? (65 db.)

4. Öt egyenlő hosszú rönkőnek felső átmérője: 26, 19, 24, 40 illetve 27 *cm*; mennyi az átlagos felső vastagságuk? (27 *cm.*)

5. 10 deszkának a szélessége: 32, 26, 39, 18, 21, 24, 29, 34, 16, illetve 42 *cm*; mennyi az átlagos deszkaszélesség? (28 *cm.*)

6. Bizonyos napszámos egy hét (6 nap) alatt, naponta: 1 K, 1·15 K, 1·36 K, 1·40 K, 1·08 K és 1·44 K-t keresett; mennyi jut átlag egy napra? (1·24 K jut.)

7. Négy fuvaros a következő rönkőmennyiséget fuvarozta egyszerre: 106 m^3, 0·78 m^3, 0·90 m^3 és 1·11 m^3-t; mennyit lehet átlag egy szekérre hasonló körülmények között számítani? (0·96 m^3-t.)

8. Öten talajt fordítottak, még pedig 1 nap alatt 36, 40, 32, 37 illetve 35 m^2-t. Hány m^2 esik átlag 1 napszámra? (36 m^2.)

9. 6 gyerekkel szedettünk próbaként külön-külön (hogy jobban igyekezzenek) tölgymakkot; szedtek: 0·53, 0·61, 0·49, 0·56, 0·75 és 0·54 *hl*-t. Hány *hl*-t lehet átlag egy gyerek-napszámra számítani és megfordítva hány napszám kell 1 *hl* szedésére? (1 *hl* szedésére 1·72 napszám kell.)

10. Egy héten dolgoztattunk naponta $10^1/_4$, $9^1/_2$, 11, $10^3/_4$, $9^3/_4$ és $11^1/_4$ óra hosszáig; hány óra az átlagos napi munkaidő? (10·45, kereken 10·5 óra.)

Csemetemennyiség becslése.

11. 6 *m* hosszú, 3 éves lúccsemetés ágyban, 5 közepesnek látszó sorban megolvastunk: 76, 89, 94, 82 és 87 csemetét. Hány csemete van átlag egy sorban s hány csemete van az egész ágyban, ha 30 sor van? (Összesen 2,568 csemete van.)

A csemetemennyiség becslésnél röviden a következőleg járunk el: A megbecsülendő ágyat vagy táblát jól megvizsgálván, kiválasztunk belőle néhány közepesnek látszó sort: *próbasor*-t, ezekben megolvassuk a csemetéket s kiszámítjuk, hogy mennyi esik átlag egy sorra; ha ezt az átlagot megszorozzuk annyival, ahány sor van az ágy vagy táblában, megkapjuk az összes csemetemennyiséget. A csenevész csemetéket, melyeket a kiszedésnél úgy is eldobnánk, nem vesszük számításba.

Ha több ágyat vagy táblát kell megbecsülnünk, akkor is legpontosabban úgy járunk el, ha minden ágyat vagy táblát önállóan becsülünk meg s az eredményt végül összegezzük.

Úgy is tehetünk, hogy az ágyak vagy táblák közül kikeresünk egy (esetleg több) közepesnek látszót (próbaágyat, próbatáblát), ezt (vagy ezeket) a leírt módon megbecsüljük s az eredményt (ha több a próbaágy azok eredményeinek az átlagát) az ágyak vagy táblák számával megszorozzuk.

Úgy is járhatunk el, hogy a próbasorokat össze-vissza válogatjuk ki valamennyi megbecsülendő ágyból s a nyert átlagot valamennyi ágy összes sorainak a számával szorozzuk meg.

Ágyakra be nem osztott csemetetáblában hozzávetőleges, de gyors becslést úgy végezhetünk, hogy össze-vissza választott, nehány átlagos minőségü helyen megolvassuk, hogy 1 *m* hosszú sordarabon hány csemete van; ha az olvasások eredményeinek az átlagát megszorozzuk valamennyi csemetesor méterekben kifejezett hosszával: megkapjuk az összes csemetemennyiséget.

Ugyancsak ágyakra be nem osztott táblában, egyenként álló, főleg egyenletesen iskolázott csemetéknél gyorsan, de szintén csak megközelitő pontossággal úgy is becsülhetünk, hogy több helyen való megmérés és szemmérték útján megállapítjuk, hogy mennyi az átlagos csemetetávolság; ha ezzel az átlaggal elosztjuk a csemetesorok összes hosszát: megvan a csemetemennyiség.

Külön fanemü vagy külön koru csemeték természetesen mind külön becsülendők.

Ha pontos eredményre van szükségünk, akkor a megbecsülendő összes csemetemennyiségnek *legalább 10%-át* ($^1/_{10}$ részét) meg kell olvasnunk.

Az igen erős csemetéket és suhángokat mind megolvassuk, ez azonban már nem becslés, hanem számbavétel.

12. 8 *m* hosszú csemeteágynak 5 közepes sürüségü sorában megolvastunk: 128, 142, 137, 146, illetve 131 egy éves vörösfenyő csemetét. Hány csemete van abban az ágyban, ha a sorok száma 52? (7113 csemete.)

13. 23 csemeteágy közül 4 közepesnek látszóban megolvastunk: 827, 882, 844, illetve 868 két éves fürtösjuhar csemetét. Hány ilyen csemeténk van összesen? (19,665 db.)

14. 3 csemeteágyból össze-vissza választott 9 közepes sorban megolvastunk: 152, 139, 164, 147, 141, 158, 167, 136, illetve 144 két éves havasifenyő csemetét. Hány ilyen csemeténk van összesen, ha 2 ágyban 28—28 s 1 ágyban 29 sor van? (12,733 csemeténk van.)

15. Egyik csemetetáblánkban tíz, átlagos minőségü helyen 1—1 *m*-es sordarabon megolvastunk: 42, 49, 37, 51, 46, 39, 49, 44, 55, illetve 38 két éves kocsánytalan tölgycsemetét. Hány csemete van abban a táblában, ha a sorok hossza 30 *m* s ilyen sor 168 van? (226,800 csemete van.)

16. Hány 4 éves iskolázott kőriscsemete van abban a táblában, amelyikben a csemetetávolságot egyre-másra 23 *cm*-re be-

csüljük, ha a sorok száma 76 s hossza 25 *m*? (8,261 csemete van.)

b) *Ha az átlagszám két összefüggő számsorból számítandó ki.*

Összeszorozzuk a két számsornak egymáshoz tartozó tagjait, a szorzatokat összeadjuk s a nyert összeget elosztjuk annak a számsornak az összegével, amelyiknek egységére az átlagszámot vonatkoztatni akarjuk; a hányados lesz az átlagszám.

Példák.

1. Valamely raktárban együvé rakásoltak: 8 ür-m^3, ür-m^3-enként 3·60 K, 3 ür-m^3 à 5·20 K, 7 ür-m^3 à 4·30 K és 12 ür-m^3 à 4·60 K áru fát; mennyi az így vegyített rakásból 1 ür-m^3 fának az ára?

A keresett ár a vegyített fák összes értékéből 1 ür-m^3-re eső átlag. Ezt a fentebbiek szerint a következőleg találjuk:

8 ür-m^3	à 3·60 K	=	8 × 3·6	=	28·8 K
3 „	„ 5·20 „	=	3 × 5·2	=	15·6 „
7 „	„ 4·30 „	=	7 × 4·3	=	30·1 „
12 „	„ 4·60 „	=	12 × 4·6	=	55·2 „
30 ür-m^3			30		129·7 K

129·7 : 30 = 4·323 = 4·32 (vagy ha veszíteni semmit sem akarunk) 4·33 K a vegyítékből 1 ür-m^3 fának az ára.

2. Bizonyos munkánál felhasználtak: 17·6 napszámot à 0·70 K, 23 napszámot à 0·85 K, 13·5 napszámot à 0·90 K és 7 napszámot à 1·40 K; mennyi az átlagos napibér?

17·6 napszám	à 0·70 K	=	12·32 K
23·0 „	„ 0·85 „	=	19·55 „
13·5 „	„ 0·90 „	=	12·15 „
7·0 „	„ 1·40 „	=	9·80 „
61·1			53·82 K

53·82 : 61·1 = 0·88085 K = 88·09 f az átlagos napibér.

3. Egyik évben beerdősítettünk ültetéssel: 4·52 k. holdat holdanként 16·23 K-val, 24·16 k. h.-at holdanként 14·68 K-val és 10·07 k. h.-at holdanként 19·47 K-val; mennyibe került átlagosan egy k. holdnak a beerdősítése? (1 k. h. átlag 16·11 K-ba került.)

4. Van 18 db. 32 *cm* széles, 24 db. 21 *cm* széles, 33 db.

26 *cm* széles, 9 db. 39 *cm* széles deszkánk; mennyi a deszkák átlagos szélessége? (27·3 *cm*.)

5. Valamely munkánál felhasználtunk 22·8 napszámot à 1·35 K, 33·4 napszámot à 1·20 K és 19·1 napszámot à 0·85 K; hány fillér az átlagos napibér? (116 f.)

6. Van 4·38 *kg* 72%-os és 7·43 *kg* 48%-os csirázóképességü lúcfenyő magunk. Ha a kettőt összevegyítjük, mennyi lesz a vegyíték csirázóképessége? (5·7%-os.)

7. Valamely vágásnak a fatermése: 1,318 ür-m^3 hasábfa, 357 ür-m^3 dorongfa és 97 ür-m^3 galyfa. Valaki meg akarja az egész vágást venni s igér ür-m^3-enként a fáért egyre-másra 4·50 K-t. Oda lehet-e annyiért adni, ha 1 ür-m^3 hasábfa ára abban az időben 5·2 K, 1 ür-m^3 dorongfáé 3·6 K és 1 ür-m^3 galyfáé 2·1 K? (Nem lehet, mert az árjegyzék szerint 1 ür-m^3 átlagos ára 4·71 K.)

8. Van 13 db. 0·42 m^3, 7 db. 0.56 m^3, 5 db. 0·48 m^3, 9 db. 0·45 m^3 és 10 db. 0·54 m^3 köbtartalmú fatörzsünk. Mennyi az átlagos köbtartalmuk? (0·48 m^3).

9. Van 18 db. alúl 10 *cm* vastag s 7·5 *m* hosszú, 26 db. alúl 8 *cm* vastag s 5 *m* hosszú, 47 db. alúl 13 *cm* vastag s 7·5 *m* hosszú, 33 db. alúl 10 *cm* vastag s 6 *m* hosszú és 29 db. alúl 9 *cm* vastag s 5·5 *m* hosszu rudunk. Hány *cm* a rudak átlagos alsó vastagsága s hány *m* az átlagos hossza? Külön számítandó ki mind a kettő. (Az átlagos vastagság 10·4 *cm* s az átlagos hosszúság 6·1 *m*.)

41. §. Plus (+) és (—) minus mennyiségek átlaga.*)

Egyik különleges esete az átlagszámításnak az, amidőn az adott számok egy része „plus“ (+), más része „minus“ (—) előjelü, mint pl. a hőmérő adatai. Ilyen esetben az átlagot a következőleg számítjuk ki.

Külön összeadjuk a plus és külön a minus előjelü számokat; a nagyobb összegből kivonjuk a kisebbiket s végül a különbséget elosztjuk annyival, ahány szám (plus és minus) van összesen; a hányados az átlagszám. Az átlagszám előjele a nagyobb összeget tevő adatok előjelével azonos.

*) Ezt a részt az erdészet körében mindinkább terjedő meteorologiai megfigyelésre való tekintetből tartottam célszerünek bevenni.

1. Legyen valamely hőmérőnél reggel, délben és este a leolvasás: —10·2, 8·1 és —5·2 Celsius fok (C⁰); mennyi az átlagos napi hőmérsék?

—10·2 meg —5·4 = —15·4; —15·4-ből kivonva 8·1-t, marad —7·3; —7·3 : 3 = —2·4 C⁰, ennyi az átlagos hőmérsék.

2. A hőmérő leolvasásai: —6·6, 12·9, —2·6, —0·9, 19·4 és 0·8 C⁰; mennyi az átlagos hőmérsék? (+3·8 C⁰.)

3. A hőmérő adatai: —12·6, 4·8, 3·7, —9·2, —6·3 C⁰; mennyi az átlagos hőmérséklet? (—3·9 C⁰.)
