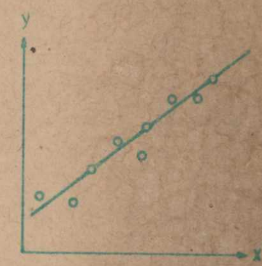
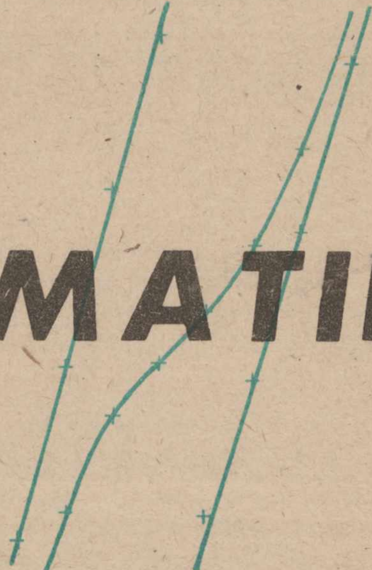
DR.ROXER: MATEMATIKA II.

ERDÉSZETI ÉS FAIPARI EGYETEM
FAIPARI MÉRNÖKI KAR

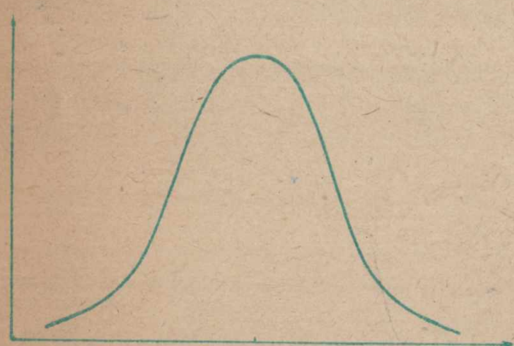
$$P_D \exp\left[\left(\frac{-i}{\hbar}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} V_I(t)\,dt\right]$$



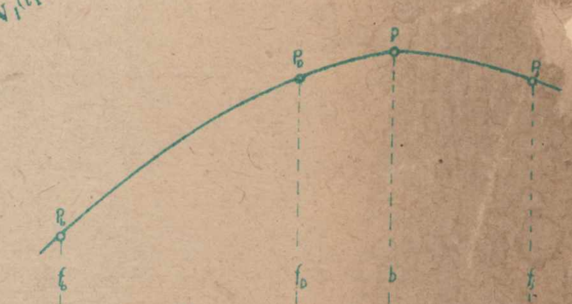
DR. ROXER EGON
egyetemi docens



MATEMATIKA III.



$$S = U(\infty) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n\int_{-\infty}^{+\infty}dt_1\int_{-\infty}^{+\infty}dt_2\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}dt_n\, T[V_I(t_1)V_I(t_2)\dots V_I(t_n)]$$



JEGYZETSOKSZOROSÍTÓ RÉSZLEG

SOPRON 1970

ERDÉSZETI ÉS FAIPARI EGYETEM
ERDŐMÉRNÖKI KAR

Dr.Roxer Egon
egyetemi docens

MATEMATIKA III.

Matematikai statisztika és lineáris programozás alapjai

Kézirat

Zólinak
baráti szeretettel
Egon

Sopron, 1970.

Lektorok:

Dr.Pankotai Gábor
egyetemi tanár

Dr.Moór Arthur
egyetemi tanár

A kiadásért felelős az Erdészeti és Faipari Egyetem Rektora
Megrendelve: 1970. II. 4. Példányszám: 300
Készült rotaprint eljárással 226 oldalon 57 ábrával
ERDÉSZETI ÉS FAIPARI EGYETEM JEGYZETSOKSZOROSITÓ RÉSZLEGE
Felelős: Dr.Pankotai Gábor

Előszó a Matematika III.-hoz

A mai kor erdőmérnöki tudományaiban, és egyuttal a gyakorlatban is, mondhatjuk, hogy alapvető szerepet játszik a lineáris programozás, a valószinüségszámitás és a matematikai statisztika. Különösen ez utóbbi döntő fontosságu a tekintetben, hogy az életjelenségek tendenciáit és tömegjelenségeiben rejlő törvényeit szabatosan megfogalmazzuk.

Midőn a Matematika III-t, dr. Roxer Egon kitünő munkáját, amely a matematika fent felsorolt ágainak a megalapozását és az erdőmérnöki gyakorlatban való alkalmazását tárgyalja, a hallgatók, oktatók és külső szakemberek kezébe adjuk, ugy hisszük, jelentős mértékben elősegitjük az erdőmérnöki tudományok fejlesztésének ügyét, amelyhez a matematikai tudás és felkészültség nélkülözhetetlen.

Ugy érzem azonban, mindannyiunk matematikai felkészültsége is korszerüsitésre szorul. A Matematika III. rész jegyzetének kiadása tehát nemcsak a hallgatóknak, de nekünk oktatóknak is gyümölcsöző befektetés. Bizonyitja ezt a gyakorlat részéről felénk irányuló érdeklődés is.

Meggyőződésem, hogy elkövetkezik az az idő, midőn a szaktanszékek vezetői saját munkájuk megkönnyitésére és az oktatás hatékonyságának emelésére egy negyedik félév beiktatását fogják kérni.

Sopron, 1969. december 31.

Dr.Pankotai Gábor
tanszékvezető egyetemi tanár
tudományos rektorhelyettes

Előszó a Matematika II.-hoz

A mai kor erdőmérnöki [illegible] egyetem a gyakorlatban is [illegible] megállapítják, hogy [illegible] a lineáris programozás, a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika. Különösen [illegible] adja a feladatokban, hogy [illegible] rejlő [illegible] alaposan megismerjük.

Midőn a Matematika II-t, [illegible] a matematika [illegible] a [illegible] és az erdő[illegible] ben való alkalmazását tárgyalja, a hallgatók, oktatók és [illegible] úgy hiszem, jelentős mértékben elősegítjük [illegible] feladatainak [illegible] a matematikai [illegible] nélkülözhetetlen.

Úgy érzem [illegible] matematikai [illegible] A [illegible] kiadása [illegible] hallgatóknak, és [illegible] részéről [illegible] is.

Meggyőződésem, hogy [illegible] az az [illegible], midőn a [illegible] munkáját megkönnyítésére és az oktatás [illegible] egy negyedik [illegible] fogják [illegible].

Sopron, 1963. december 11.

Dr. [illegible] Gábor
[illegible] egyetemi tanár
[illegible] rektorhelyettes

A kiadásért felelős az Erdészeti és Faipari Egyetem Rektora
[illegible] 4. Példányszám: 300
Készült rotaprint eljárással [illegible]
ERDÉSZETI ÉS FAIPARI EGYETEM JEGYZETSOKSZOROSÍTÓ [illegible]
[illegible] Dr. [illegible] Gábor

Tartalomjegyzék

old.

old.

I. Matematikai statisztika

Bevezetés

Az erdő- vagy faipari mérnök gyakorlatában, legyen a feladat tervező, ellenőrző vagy kutató jellegü, a szükséges információkhoz általában mérések, illetőleg megfigyelések révén keletkezett adathalmazok, ugynevezett statisztikai adatok elemzése vezet. A matematikának azt az ágát, amely a statisztikai adatok gyüjtésével, rendezésével és elemzésével foglalkozik matematikai statisztikának nevezték el. A matematikai statisztika a valószinüségelmélet egy fejezete, módszerei a valószinüségelmélet tételeire épülnek. A valószinüségelmélet a természetben, a társadalomban, termelésben stb. előforduló véletlen események objektiv törvényszerüségeit tárja fel. Véletlen eseményeknek tekintjük azokat az eseményeket, amelyeknek többféle kimenetele lehetséges, de előre nem tudjuk megállapitani, hogy azok közül melyik következik be. Természetesen a véletlen események bekövetkezésének is megvannak az okai, azonban ezeket az okokat egyáltalán nem vagy csak részben ismerjük. Az olyan véletlen események amelyek azonos körülmények között akárhányszor megismételhetők, vagy legalább megfigyelhetők a véletlen tömegjelenségek körébe tartoznak. A következő öt fejezetben a szakmánkban előforduló véletlen tömegjelenségek vizsgálatával fogunk foglalkozni.

1. A minta és legfontosabb jellemzői

1.1 Az alapsokaság

A szakmai gyakorlatban lépten-nyomon olyan halmazokkal találkozunk, amelyek egyedei egyes lényeges tulajdonságok, jegyek szempontjából homogének, viszont más tulajdonságok szempontjából változékonyságot mutatnak. Ezeket a halmazokat statisztikai sokaságoknak nevezzük. Ilyen például egy erdőrészlet faegyedeinek halmaza, vagy egy farostlemezszéria lemezeinek összessége. A statisztikai sokaságot azon jegyek szempontjából vizsgáljuk, amelyekre nézve ennek elemei változékonyságot mutatnak. A változékonyság a véletlenszerüen ható tényezők eredménye. A statisztikai sokaság egy változékonyságot mutató jegyre vonatkozó adathalmazát alapsokaságnak nevezzük. Alapsokaságot alkotnak az emlitett erdőrészlet faegyedeinek mellmagassági átmérői, magasságai stb. A másik példánkban a farostlemezszéria lemezeinek hajlitószilárdságai, térfogatsulyai stb. képeznek egy-egy alapsokaságot. Az alapsokaságot jellemző tulajdonságra vonatkozó adathalmaz kétféle lehet: mérhető és számlálható. Például mérhető jegyek: a mellmagassági átmérő, famagasság, farostlemez hajlító szilárdsága stb. számlálható jegyek: a fagyléces-ség, területegységére eső ujulat, faipari termék jó minősége, vagy selejtessége stb.

1.2 A minta

Amikor egy alapsokaságra vonatkozóan információkat akarunk szerezni, nem gazdaságos és gyakran nem is lehetséges minden elemét vizsgálat tárgyává tenni. Ilyenkor az alapsokaság elemei közül véletlenszerüen kiválasztunk "n" darabot, és ezt a véletlenszerüen kiválasztott "n" elemet együtt "n" elemszámu mintának nevezzük. Ez a minta fogja képviselni az alapsokaságot a vizsgálat során. Ugyanis, ha a minta elemszámát, az alapsokaság elemeinek változékonyságát figyelembe véve, elég nagyra terveztük, a minta hüen tükrözi az alapsokaság jellegzetes vonásait.

A minta elemszámának nagysága azonban nemcsak az alapsokaságot alkotó elemek változékonyságától függ, hanem attól is, hogy milyen célt szolgál. Ha a mintának hüen és pontosan kell képviselni az alapsokaságot, akkor nagymintát kell vennünk, amelynek elemszáma $n > 30$. Ha azonban előzetes tájékozódás, vagy pedig ellenőrzés a mintavétel célja, elegendő kismintát alkalmazni, ennek elemszáma $n < 30$.

1.21. Fontosabb mintavételi módszerek

A minta elemeinek kiválasztása az alapsokaságból a körülményeknek megfelelően többféleképpen történhet.

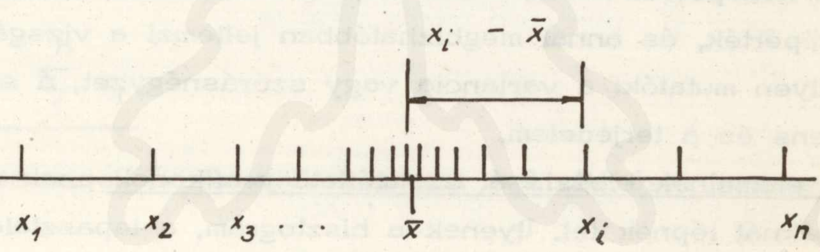
Kiválaszthatjuk a minta elemeit sorshuzással, vagyis az alapsokaság elemei számot kapnak, és a kihuzott számok sorrendjében kerülnek a mintába. A sorshuzást helyettesithetjük sorsolás alapján készült véletlen számtáblázatokkal. A kiválasztásnak ezt a módját egyszerü véletlen mintavételnek nevezzük. Jellemző követelménye, hogy az alapsokaság minden elemének azonos esélye legyen a mintába kerülésre.

De kiválaszthatjuk a minta elemeit szabályszerü sorrendben is. Például minden 10-ik elem kerül a mintába. Ez a szisztematikus mintavétel.

Ha az alapsokaság nem homogén, például elegyes erdő fafajonként alkothat egy-egy réteget, vagy több gépből származó munkadarab gépenként alkothat egy-egy réteget. Ilyenkor minden rétegből arányszámának megfelelő elemszámu mintát kell venni, akár egyszerü véletlen, akár szisztematikus mintavételel. Ez a rétegezett mintavétel.

Ha az alapsokaság nagy területen fekszik célszerü azt nagy egységekre bontani és ezek közül választani. A kiválasztott egységeket megint egységekre bontjuk, amelyekből ismét választunk stb. A kiválasztásnak ez a módszere a többlépcsős mintavétel. Az egységek kiválasztása itt is történhet véletlenszerüen vagy szisztematikusan.

Amennyiben a minta elemei bizonyos területen helyezkednek el, igy például egy erdőrészlet fái, és célszerü nem az egyes elemeket, hanem bizonyos kiválasztott területen lévő elemeket a mintába venni, területarányos mintavételről beszélünk. Ha a kiválasztott területegységek alakja kör, körös mintavétel, ha pászta, pásztás mintavétel a neve. A területarányos mintavételnek egy modern változatánál nem a területet jelöljük ki, hanem a felállás helyeit, amelyeken körbefordulva minden fát megszámlálunk, amelynek mellmagassági átmérőjét a meghatározottnál nagyobb szög alatt látjuk. Ezt a módszert szögszámlálási mintavételnek nevezzük. A területegységeket vagy felállás helyeket célszerübb a térképen szisztematikusan kiválasztani, mert igy könnyebben felkereshetők a terepen.



1. sz. ábra.

A nagyság szerint rendezett minta

1.22. A minta jellemzői

A minta rendeltetése az, hogy egy alapsokaságra vonatkozóan információkat szolgáltasson. A nyers minta azonban számok rendetlen halmazát jelenti, amely nem áttekinthető. Ha ezt a számhalmazt nagyság szerint rendezzük, ugynevezett megfigyelési sorozat áll rendelkezésünkre. (1. sz. ábra).

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_i, \ldots x_n$$

alakban, ahol x_1 a minta legkisebb - x_i a minta általános - és x_n a minta legnagyobb eleme. A kismintát gyakran érdemes ilyen alakban felirni. A nagymintát, amelynél $n > 30$, de gyakran 100 sőt 300 is lehet körülményes lenne nagyság szerint rendezni, és amellett továbbra is nehezen kezelhető maradna. Hogy a nagymintát áttekinthetőbbé tegyük, elemeit osztályokba rendezzük. Azon tudományágakban, ahol a reprezentativ statisztikai módszerek meghonosodtak, a mintavétel céljára nyomtatványokat készitettek, és a minta rendezett formában azonnal az ugynevezett mintavételi jegyzőkönyvbe vagy kartonokra kerül. A minta rendezett alakban a gyakorlott szemnek már némi tájékoztatást nyujt, az alapsokaság tulajdonságait illetően azonban konkrét következtetésekre csak a minta jellemzőinek ismeretében juthatunk. A minta jellemzői a középértékek, a változékonyság mérésére szolgáló mutatók, és az eloszlás grafikonjai.

A középértékek olyan általánositó mutató számok, amelyek a minta eltérő nagyságu elemeinek összességét - valamilyen tulajdonság szempontjából - tömören egy számmal képviselik. A középértéktől általában megkivánjuk, hogy dimenziója megegyezzen az elemekével, legyen érzékeny az összes elemek nagyságára, a további számitásokra alkalmas legyen, és könnyen lehessen kiszámitani. A legfontosabb középértékek: a számtani közép, a medián és a módusz.

A változékonyságot mérő mutatók jelzik, hogy a sorozat elemeinek mekkora a változékonysága, vagyis hogy ezek az elemek milyen mértékben szóródnak szét a középérték körül. Minél kisebb a szóródás mértéke, annál tipikusebb a középérték, és annál megbizhatóbban jellemzi a vizsgált mintát. A legfontosabb ilyen mutatók: a variancia vagy szórásnégyzet, a szórás, a variációs koefficiens és a terjedelem.

A minta elemeinek eloszlását szemléltető grafikonok csak az osztályokba rendezett mintáknál lépnek fel. Ilyenek a hisztogram, a tapasztalati sürüségpoligon, és a tapasztalati eloszláspoligon (poligon = sokszögvonal).

1.23. Az osztályokba nem rendezett minták (kisminták) jellemzői

A számtani közép, jele: $\bar{x}$

A számtani közép a minta elemeinek összege osztva az elemek számával. Számos előnyös tulajdonsága van. A megfigyelési sorozat legkisebb és legnagyobb elemei közé esik. Értéke határozott, dimensiója megegyezik az elemekével, a sorozat minden elemétől függ, könnyen számitható. Hátránya, hogy nem minden esetben tipikus. A középértékek közül leggyakrabban használják. A mintának tehát egyik legfontosabb mutatója, amely a további számitásokban képviseli a mintát. Legyen a nagyság szerint rendezett megfigyelési sorozat(1.sz.ábra):

$$x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$$

akkor a számtani közép:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$ ez rövidebben:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_1^n x_i}{n}} \qquad (1)$$

ahol: x_i = a minta általános eleme

$\sum_1^n$ = summa = összeg (1-n-ig)

$\sum_1^n x_i$ = az elemek összege (1-n-ig)

n = A minta elemszáma

A minta számtani középét az elemek helyébe irva, azok összege változatlan marad:

$$\underline{n\bar{x} = \sum_1^n x_i} \qquad (2)$$

A minta elemeinek a számtani középtől vett eltérései összegezve zérust eredményeznek:

$$\underline{\sum_1^n (x_i - \bar{x}) = 0} \qquad (3)$$

$$\Sigma(x_i) - n\bar{x} = 0; \quad \Sigma x_i = n\bar{x}.$$

Ha a számtani közepet az elemekből levonjuk, és az igy nyert eltérések négyzeteit összegezzük, akkor az eltérések négyzetösszege kisebb lesz, mint bármely más számértéktől számitott eltérések négyzetösszege. Az <u>eltérésnégyzet-összeg</u> jele SQ (summa quadrat).

$$SQ = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 = \Sigma(x_i - \bar{x})^2$$

$$SQ = \sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \text{minimum} \qquad (4)$$

Az SQ eltérésnégyzet-összeget némi átalakitással számitásra alkalmasabb alakra hozhatjuk. A Σ jel mögött elvégezzük a négyzetreemelést:

$$SQ = \Sigma (x_i - \bar{x})^2 = \Sigma (x_i^2 - 2 x_i \bar{x} + \bar{x})^2$$

A Σ jel a zárójelben lévő minden tagra vonatkozik:

$$SQ = \Sigma x_i^2 - \Sigma 2 x_i \bar{x} + \Sigma \bar{x}^2$$

A Σx_i^2 jelenti az elemek négyzetének összegét.

A $\Sigma 2x_i \bar{x}$ jelenti $2\bar{x}$ -el megszorzott elemek összegét. Mivel a $2\bar{x}$ az összeg minden tagjában mint szorzó szerepel kiemelhető a Σ jel elé:

$$\sum 2x_i \bar{x} = 2\bar{x} \Sigma x_i.$$

A $\Sigma \bar{x}^2$ tulajdonképpen $n \bar{x}^2$ -et jelent. Gondoljunk arra, hogy a kiindulásnál $\Sigma (x_i - \bar{x})^2$-ben, "n" eltérésnégyzetben szerepel az $\bar{x}$, igy a négyzetreemelés után is $n \bar{x}^2$ -nek kell lennie. Tehát:

$$SQ = \Sigma x_i^2 - 2 \bar{x} \Sigma x_i + n \bar{x}^2$$

A jobboldal második tagjában a Σx_i-t szorozzuk és osztjuk is "n" -el:

$$SQ = \Sigma x_i^2 - 2 \bar{x} n \frac{\Sigma x_i}{n} + n \bar{x}^2$$

de

$$\frac{\Sigma x_i}{n} = \bar{x} \quad \text{tehát:}$$

$$SQ = \Sigma x_i^2 - 2 \bar{x} n \bar{x} + n \bar{x}^2 = \Sigma x_i^2 - 2n \bar{x}^2 + n \bar{x}^2$$

$$SQ = \sum_{1}^{n} x_i^2 - n \bar{x}^2 \qquad (5)$$

A medián, jele: Me

A medián nagyság szerint rendezett megfigyelési sorozat középső eleme. A sorozatot két egyenlő részre osztja, vagyis megfelezi. Nem érzékeny az elemek nagyságára, amig azoknak a középhez viszonyitott helyzete nem változik. Gyakran jól megközeliti a számtani közép értékét, és könnyebben is számitható mint a számtani közép, ezért speciális esetben a számtani közép helyett használják, olyankor ha a két oldalán elhelyezkedő elemek nagyságra nézve is szimmetriát mutatnak. Ezen kivül szimmetriavizsgálatnál valamint a számtani középköz közelitő képleteiben szerepel. A kisminták mediánja páratlan elemszám esetén a nagyság szerint rendezett sorozat középső eleme, páros elemszám esetén a két középső elem számtani átlaga lesz.

A minta terjedelme, jele: W, (r).

A minta terjedelme a sorozat legnagyobb és legkisebb eleme közötti különbséget, intervallumot jelenti. Ha a terjedelem nagy, akkor az elemek változékonysága vagyis a számtani közép körüli szóródása is jelentős. A terjedelmet gyakran alkalmazzák a "közelitő" számitásoknál. Azonban mint a szóródás mutatója nem tul megbizható, mert csak 2 elemtől függ, és a minta legnagyobb és legkisebb eleme gyakran szélsőséges érték. Ha a minta legnagyobb elemét x_n-el, a legkisebbet x_1-el jelöljük, akkor a terjedelme:

$$W = x_n - x_1 \qquad (6)$$

A variancia (szórásnégyzet), jele: s^2

Az $x_1, x_2, \ldots x_n$ elemekből álló megfigyelési sorozat

$$(x_1 - \bar{x})^2, (x_2 - \bar{x})^2, \ldots (x_n - \bar{x})^2$$

eltérésnégyzeteinek számtani középértékét varianciának, szóródásnak, vagy szórásnégyzetnek nevezzük. A variancia a változékonyság egyik fontos mutatója. A kisérletek elemzésénél és egyes statisztikai próbáknál nélkülözhetetlen. A minta varianciája tehát:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$s^2 = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{S\varrho}{n} \tag{7}$$

A szórás, jele: s.

A szórásnégyzetből pozitiv négyzetgyökvonással kapjuk a minta szórását, ez a változékonyság másik fontos mutatója. Négyzetes átlageltérésnek is nevezik. Dimenziója megegyezik az elemekével. A minták elemzésénél a számtani középpel együtt a mintát képviseli. A szórás képlete tehát:

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_1^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n}} = \sqrt{\frac{S\varrho}{n}} \tag{8}$$

Az elemek szóródásának jellemzésére csaknem kizárólag a szórást használjuk. A szórás nagysága a minta minden elemétől függ. A szórás nagyságától viszont függ a minta megbizhatósága és igy a szükséges mintaelemszám is.

A minta szórása tehát az egy elemre eső átlagos eltérés leghasználatosabb mértékszáma.

A variációs koefficiens, jele: s%

A szóródási együttható vagy variációs koefficiens kifejezi a szórást a számtani közép százalékaként:

$$\bar{x} : s = 100\ \% : s\%$$

$$s\% = 100\ \frac{s}{\bar{x}}\ \% \tag{9}$$

Akkor alkalmazzuk, ha eltérő jelenségek szóródását vagy különböző mértékegységekben kifejtett megfigyelési sorok szóródását kell összehasonlitanunk. Erre alkalmassá teszi az, hogy %-ban fejezzük ki. De alkalmazzuk a szórás helyett a minta elemszámának meghatározásánál, vagy a megfigyelés hibájának számitásánál stb.

Példák a kisminták jellemzőinek számitására

A jellemzőket két tizedessel pontosabban számitjuk, mint ahogy az elemeknél van, és az utolsó tizedest kerekitjük. Összeadás közben az esetleges utolsó 5-ös számjegyet egyszer fel, egyszer lekerekitjük. A százalékban kifejezett értékeket elég 1 tizedesre kerekiteni.

1. Megmértük 20 db. idős sarjeredetü tölgy magasságát méterben. A nagyság szerint rendezett mérési sorozat a következő: 11, 13, 14, 14, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 18, 18, 19, 19, 21, 22. Számitsuk ki a w, $\bar{x}$, Me, s és s% értékeket:

A terjedelem könnyen felirható:

$$x_n = 22, \quad x_1 = 11, \quad w = x_n - x_1 = 22 - 11 = \underline{11 \text{ m}}$$

Az $\bar{x}$ és "s" számitását általában együtt végezzük. Célszerü a számitást táblázatban végezni. Az első oszlopba i = sorszám, a másodikba, x_1 = elemek, a harmadikba $(x_i - \bar{x})$ = eltérések, a negyedikbe $(x_i - \bar{x})^2$ = eltérésnégyzetek kerülnek.

I. sz. táblázat.

[m]

i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	11	- 5,5	30,25
2	13	- 3,5	12,25
3	14	- 2,5	6,25
4	14	- 2,5	6,25
5	15	- 1,5	2,25
6	15	- 1,5	2,25
7	15	- 1,5	2,25
8	16	- 0,5	0,25
9	16	- 0,5	0,25
10	16	- 0,5	0,25
11	16	- 0,5	0,25
12	17	- 0,5	0,25
13	17	0,5	0,25
14	17	0,5	0,25
15	18	1,5	2,25
16	18	1,5	2,25
17	19	2,5	6,25
18	19	2,5	6,25
19	21	4,5	20,25
20	22	5,5	30,25
Σ	329		131,00

$\sum x_i = 329; \quad n = 20$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{329}{20} \approx 16{,}5 \text{ m}$$

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 131 \; ; \quad n - 1 = 19$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{131}{20}} = \sqrt{6{,}55} = 2{,}56 \text{ m} \approx \underline{2{,}6 \text{ m}}$$

A számtani közép többnyire nem egész szám, és kényelmetlen képezni különbségeket és azok négyzeteit. Ha az x_i értékek nem tul nagyok, könnyebben számithatjuk a szórást az

$$s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n\,\bar{x}^2}{n}}$$ képlet segitségével.

II. sz. táblázat.

i	x_i	x_i^2
1	11	121
2	13	169
3	14	196
4	14	196
5	15	225
6	15	225
7	15	225
8	16	256
9	16	256
10	16	256
11	16	256
12	17	289
13	17	289
14	17	289
15	18	324
16	18	324
17	19	361
18	19	361
19	21	441
20	22	484
$\sum$	329	5543

$\sum x_i^2 = 5543$

$$n\bar{x}^2 = 20 \cdot 16{,}45^2 = 5412$$

Itt a számtani közepet kerekités nélkül kell alkalmazni.

$$s = \frac{\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2}{n} = \frac{5543 - 5412}{20} = \frac{131}{20} =$$

$$= 2{,}56 \approx \underline{2{,}6\ m}$$

A variációs koefficiens számitása a (9)-es képlet alapján történik:

$$s = 2{,}6\ m; \qquad \bar{x} = 16{,}5\ m$$

$$s\% = 100 \frac{s}{\bar{x}} \% = 100 \frac{2{,}6}{16{,}5} = \underline{15{,}7\ \%}$$

A medián - a sorozat páros elemszámu lévén - a 10.-ik és 11.-ik sorszámu elemek számtani közepe lesz:

$$x_{10} = 16; \qquad x_{11} = 16;$$

$$Me = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \underline{16}$$

1.24 A nagyminták rendezése és jellemzőinek számitása

Nagymintánál, amikor $n > 30$-nál, az elemekkel külön-külön számolni nehézkes és hosszadalmas lenne. Ezért a minta terjedelmét "k" darab egyenlő szakaszra, osztályra bontjuk. A szakasz szélességét osztályköznek nevezzük, és "d"-vel jelöljük. Az egyes osztályokat egymástól elválasztó értékeket osztályhatároknak, az osztály közepére eső értékeket pedig osztályközepeknek nevezzük. Az osztályközepeket ugyanugy, mint a minta elemeit indexszel ellátott "x"-el:

$$x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_k \quad \text{jelöljük.}$$

Például ha az 1. példában szereplő alapsokaságból nem 20, hanem 100 elemü mintát veszünk, célszerü a mintát ugy táblázatba rendezni, hogy az elemek oszlopába az előforduló magassági méreteket irjuk növekvő sorrendben. Ezek lesznek az osztályközepek. Igy az osztályköz d = 1 m lesz. Az osztályközepek oszlopa mellé egy uj oszlop kerül, amelybe az egyes magassági méretek darabszámát, gyakoriságát irjuk, ezen oszlopot f_i-vel jelöljük.

III. sz. táblázat

i	x_i m	f_i db
1	11	1
2	12	2
3	13	5
4	14	7
5	15	12
6	16	22
7	17	21
8	18	13
9	19	8
10	20	5
11	21	3
12	22	1
		100

A III. sz. táblázatban az osztályok száma k = 12, de választhattuk volna az osztályok számát k = 6-nak is, akkor az osztályköz 2 m lett volna.

Az osztályok számát "k"-t (általában 6 és 20 között) ugy választjuk meg, hogy a

$$0{,}1 < \frac{d}{s} < 1 \tag{10}$$

feltétel teljesüljön. Az "s" értékét közelitőleg becsüljük a (138) képlet segitségével. Célszerü ügyelni arra, hogy az osztályközepek lehetőleg minél egyszerübb számok legyenek. Az osztályhatárokat pedig, ha lehet érdemes ugy megválasztani, hogy pont rájuk ne essen egy elem sem. Ha ez nehézségekbe ütközik, legfeljebb a gyakoriságok nem lesznek egész számok.

Miután meghatároztuk az osztályok számát, az osztályközt, az osztályhatárokat és osztályközepeket, táblázatot készitünk, amelynek első oszlopába az osztályok sorszáma kerül, a másodikba az osztályok alsó és felső határa segitségével kijelölt osztályközök, a harmadikba a megfelelő osztályközepek. A negyedik oszlopot ugy képezzük, hogy a minta elemeit sorba megvizsgáljuk, és az osztálynak megfelelő sorba egy függőleges vonást huzunk. A hatodik oszlopot az egyes osztályokba eső elemek számai, a gyakoriságok alkotják. Az egyes osztályokba tartozó gyakoriságokat indexszel ellátott "f"-el jelöljük:

$$f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots, f_k.$$

Az f_i gyakoriságokat sulyoknak is nevezik, (IV. sz. táblázat).

IV. sz. táblázat.

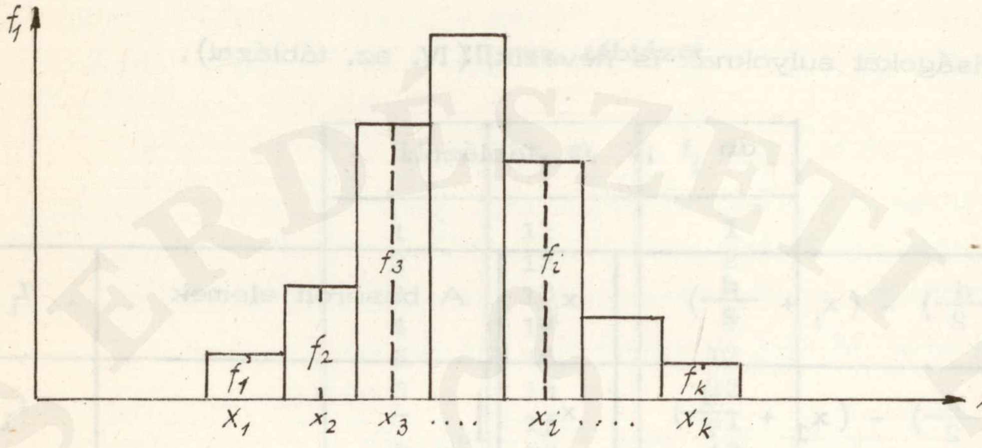
i	$(x_i - \frac{d}{2}) - (x_i + \frac{d}{2})$	x_i	A besorolt elemek	f_i
1	$(x_1 - \frac{d}{2}) - (x_1 + \frac{d}{2})$	x_1	I	f_1
2	$(x_2 - \frac{d}{2}) - (x_2 + \frac{d}{2})$	x_2	IIIII I	f_2
3	$(x_3 - \frac{d}{2}) - (x_3 + \frac{d}{2})$	x_3	IIIII IIIII IIII	f_3
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
k	$(x_k - \frac{d}{2}) - (x_k + \frac{d}{2})$	x_k	II	f_k
Σ				Σf_i

A nyomtatott felvételi jegyzőkönyvek, a lényeget illetően, hasonlók a IV. sz. táblázathoz.

A gyakoriságeloszlás

A vizsgált tulajdonságok szempontjából fontos tudnunk, hogy a minta elemei a terjedelmen belül hogyan helyezkednek el. Vagyis, hogy milyen a minta eloszlása. A minta eloszlására vonatkozóan legtöbbet a gyakoriságeloszlás és a valószinüségeloszlás mond. A valószinüségeloszlásról később lesz szó.

A minta "n" eleméből az első osztályba f_1, a másodikba f_2 . . . . , a "k"-ba f_k elem esik, ezt nevezzük gyakoriságeloszlásnak. Ha egy derékszögü koordinatarendszerben az "x" tengelyre az osztályközepeket felmérjük, majd ezek fölé az osztályközzel mint alappal és a gyakorisággal mint magassággal téglalapokat rajzolunk, hisztogramnak nevezett ábrát kapunk, amely kitünően szemlélteti a minta gyakoriságeloszlását. (2. sz. ábra).



2. sz. ábra.

A hisztogram

A sulyozott számtani közép

Az osztályba rendezett mintánál, ha az osztályba sorolást jól végeztük, és az első osztályba eső f_1 elem összegét - az elemek helyébe az x_1 osztályközepet téve - az $x_1 f_1$ szorzattal, a második osztály elemeinek összegét az $x_2 f_2$ . . . ., a "k"-adik osztály elemeinek összegét az $x_k f_k$ szorzattal helyettesitjük, a szorzatok összege a (2)-es reláció alapján $n \to \infty$ mellett a mintaelemeinek összegével lesz egyenlő:

$$\sum_1^n x_i = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_k f_k = \sum_1^k x_i f_i \; ; \quad n \to \infty \qquad (11)$$

mivel $\bar{x} = \dfrac{\sum_1^n x_i}{n}$ a sulyozott számtani közép képlete, ahol a gyakoriságokat értjük a sulyok alatt:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_1^k x_i f_i}{n}} \qquad (12)$$

A sulyozott szórás

Az első osztályba eső f_1 db elem helyébe az x_1 osztály közepet téve, az első osztályba eső elemek eltérésnégyzet összege $(x_1 - \bar{x})^2 f_1$ lesz. A második osztályba eső elemek eltérésnégyzet összege $(x_2 - \bar{x})^2 f_2 \ldots$, a "k"-adik osztályba eső elemeké $(x_k - \bar{x}) f_k$. A "k" db osztály eltérésnégyzeteinek összege a minta elemeinek eltérésnégyzetösszegével lesz egyenlő:

$$SQ = \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \ldots + (x_k - \bar{x})^2 f_k$$

$$SQ = \sum_1^k (x_i - \bar{x})^2 f_i \qquad (13)$$

$$s^2 = \frac{SQ}{n} = \frac{\sum_1^k (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n} \qquad (14)$$

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{\sum_1^k (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n}}} \qquad (15)$$

lesz a sulyozott szórás képlete.

Egyszerübb számitási mód a sulyozott számtani közép és szórás számitására

A nagyminta számtani közepének és szórásának számitására számitás-technikai szempontból alkalmasabb képleteket vezethetünk le.

Az osztályközepekkel az alábbi transzformációt végezzük:

$$\frac{x_i - x_D}{d} = x'_i \qquad (16)$$

ahol x_D az az osztályközép, amelyhez a legnagyobb gyakoriság tartozik, "d" az osztályköz, és x'_i a transzformált osztályközép. (16)-ból az x_i-t kifejezzük:

$$x_i = d\,x'_i + x_D$$

x_i értékét a (12)-be téve a sulyozott számtani közép:

$$\bar{x} = \frac{\sum_1^k x_i f_i}{n} = \frac{\sum (d\,x'_i + x_D) f_i}{n} = \frac{n\,x_D + d \sum x'_i f_i}{n}$$

$$\boxed{\bar{x} = x_D + d\,\frac{\sum\limits_1^k x'_i\, f_i}{n}} \qquad (17)$$

A szórás képletének számításánál a (13)-as képletből indulunk ki:

$$SQ = \sum_1^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i = \Sigma (x_i^2 - 2\, x_i \bar{x} + \bar{x}^2)\, f_i =$$

$$= \Sigma\, x_i^2 f_i - 2\bar{x}\, \Sigma\, x_i f_i + n\, \bar{x}^2 =$$

$$= \Sigma\, x_i^2 f_i - 2\,\frac{\Sigma\, x_i f_i}{n}\, \Sigma\, x_i f_i + n\,\frac{(\Sigma\, x_i f_i)^2}{n^2} =$$

$$= \Sigma\, x_i^2 f_i - 2\,\frac{(\Sigma\, x_i f_i)^2}{n} + \frac{(\Sigma\, x_i f_i)^2}{n} =$$

$$= \Sigma\, x_i^2 f_i - \frac{(\Sigma\, x_i f_i)^2}{n} \qquad (18)$$

SQ értéke nem változik meg ha (18)-ban az x_i osztályközepeket x_D-vel eltoljuk pozitiv irányba (x_i helyébe $x_i - x_D$ kerül):

$$SQ = \Sigma\, (x_i - x_D)^2\, f_i - \frac{\left[\Sigma\, (x_i - x_D)\, f_i\right]^2}{n}$$

de (16)-ból: $x_i - x_D = x'_i\, d$, tehát:

$$SQ = \Sigma\, (x'_i\, d)^2\, f_i - \frac{(\Sigma\, x'_i\, d\, f_i)^2}{n} =$$

$$= d^2\, \Sigma\, x'^2_i f_i - d^2\,\frac{(\Sigma\, x'_i f_i)^2}{n} =$$

$$= d^2 \left[\sum_1^k x'^2_i f_i - \frac{(\sum\limits_1^k x'_i\, f_i)^2}{n}\right] \qquad (19)$$

Ebből a szórásnégyzet:

$$s^2 = \frac{SQ}{n} = d^2 \frac{\sum_1^k x'^2_i f_i - \frac{1}{n}\left(\sum_1^k x'_i f_i\right)^2}{n}$$

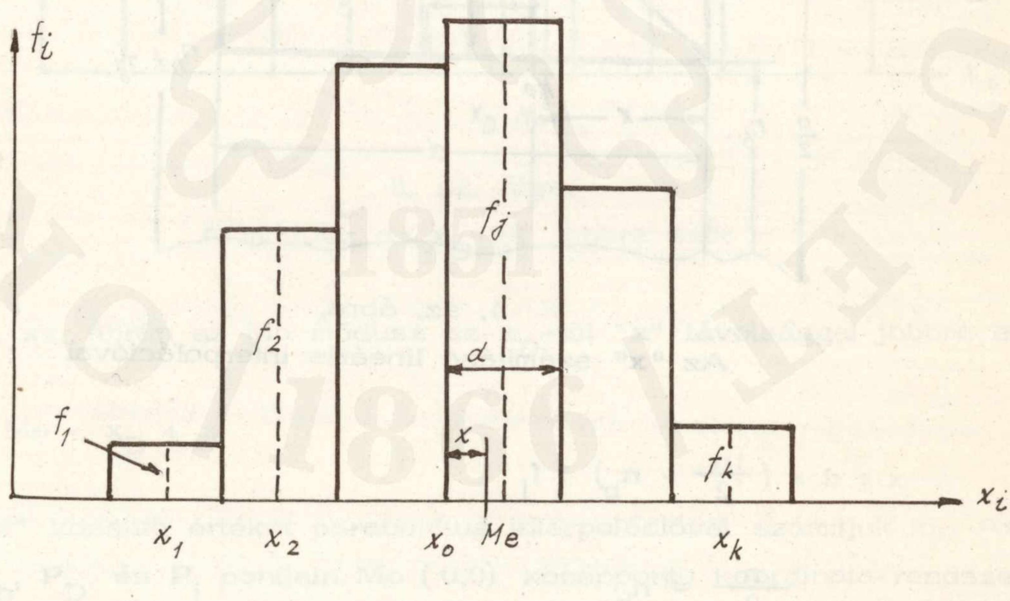
és végül a sulyozott szórás:

$$\boxed{s = d\sqrt{\frac{\sum_1^k x'^2_i f_i - \frac{1}{n}\left(\sum_1^k x'_i f_i\right)^2}{n}}} \qquad (20)$$

A képletekben szereplő $x'_i f_i$ és $x'^2_i f_i$ mennyiségeket táblázatban számitjuk ki (lásd a VIII. táblázatot).

Az osztályokba rendezett minta mediánja

Az osztályokba rendezett mintánál az elemek nem szerepelnek, csupán az osztályközepek és gyakoriságok, a medián nem kereshető ki, hanem számitanunk kell, mégpedig az osztályba rendezett mintánál rendelkezésünkre álló adatok segitségével. A medián képletének levezetésénél a minta hisztogramjából indulunk ki (3. sz. ábra).



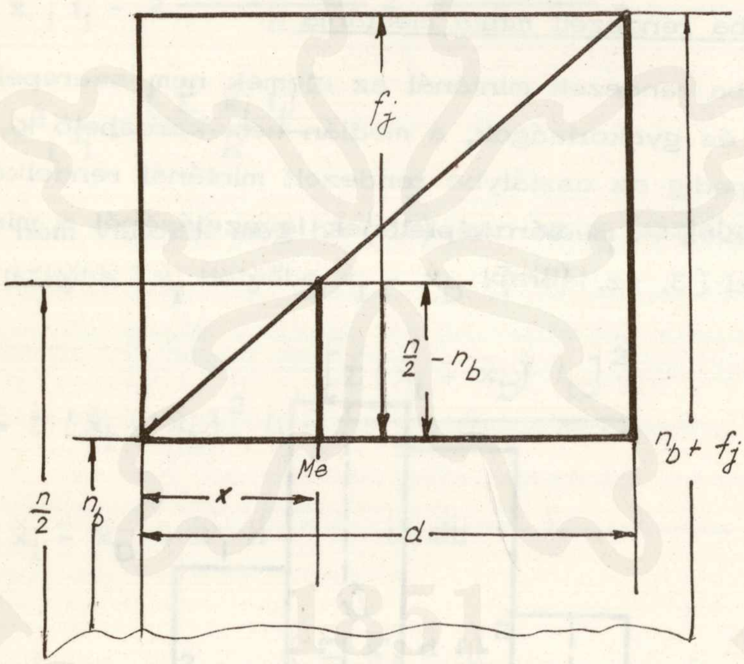
3. sz. ábra.

A medián az x_o osztályhatártól jobbra esik

Először megkeressük az x_o osztályhatárt, amely a mintát két közel egyenlő részre osztja, és amelytől a medián "x" távolsággal jobbra esik, tehát a medián:

$$Me = x_o + x \tag{21}$$

Az "x" értéket lineáris interpolációval jól közelithetjük. A 3. sz. ábra első négy oszlopát egymás fölé helyezzük. Az első három oszlop magassága $f_1 + f_2 + f_3 = n_b$ (az x_o-tól balra, táblázatban felfelé eső elemek számával egyenlő). Az első négy oszlop magassága $(n_b + f_j)$. Az n_b és $(n_b + f_j)$ magasságok közé esik az Me-hez tartozó $\frac{n}{2}$ (az elemszám fele) magasság. A 4. sz. ábra szerint hasonló háromszögekből "x" már számitható.



4. sz. ábra.
Az "x" számitása lineáris interpolációval

$$x : d = \left(\frac{n}{2} - n_b\right) : f_j$$

$$x = d \, \frac{\frac{n}{2} - n_b}{f_j}$$

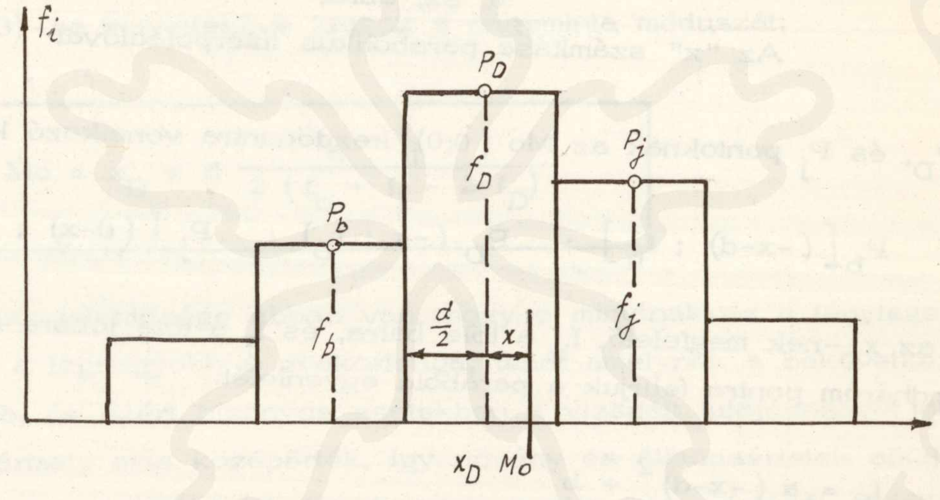
"x" értékét (21)-be téve kapjuk a nagyminta mediánjának képletét:

$$Me = x_o + d \frac{\frac{n}{2} - n_b}{f_j} \qquad (22)$$

A medián közelitésére gyakran használják annak az osztálynak a közepét, vagy határát amelybe a medián esik. Ennek neve nyers medián (Me').

A módusz, jele: Mo

A módusz a gyakorisági közép, az az "x" érték, amelyhez a legnagyobb gyakoriság tartozik. Csak osztályokba rendezett mintákból számitjuk. A legnagyobb gyakorisággal rendelkező osztályt, amelybe a módusz esik, modális osztályköznek szokták nevezni. Ennek az osztálynak a közepét, x_D-vel jelöljük. A módusz számitásánál a minta hisztogramjából indulunk ki (5. sz. ábra).



5. sz. ábra.
A módusz az x_D-től jobbra esik

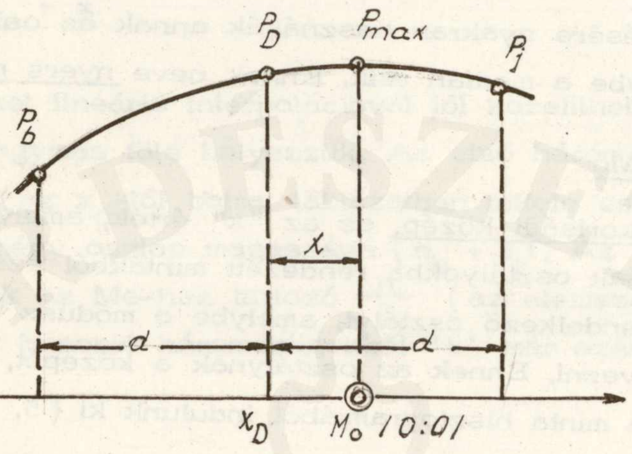
Az 5. sz. ábrán az Mo módusz az x_D-től "x" távolsággal jobbra esik.

$$Mo = x_D + x \qquad (23)$$

Az "x" közelitő értékét parabolikus interpolációval számitjuk ki. Az 5. sz. ábra P_b, P_D, és P_j pontjain Mo (0,0) középpontu koordinata-rendszerben

$$y = a x^2 + b$$

egyenletü parabolát fektetünk át, ahol "a" negativ érték, de ezt az egyszerüség kedvéért nem jelöljük (6. sz. ábra) , hiszen "a"-t, a képletből ugy is kiküszöböljük.



6. sz. ábra.

Az "x" számitása parabolikus interpolációval

A P_b, P_D, és P_j pontoknak az Mo (0;0) kezdőpontra vonatkozó koordinátái:

$$P_b \left[(-x-d) \; ; \; f_b \right] \; ; \quad P_D \; (-x \; ; \; f_D) \; ; \quad P_j \left[(d-x) \; ; \; f_j \right]$$

ahol f_D az x_D-nek megfelelő, f_b a tőle balra, és f_j a tőle jobbra eső gyakoriság. Mindhárom pontra felirjuk a parabola egyenletét:

$$f_b = a\,(-x-d)^2 + b$$

$$f_D = a\,x^2 + b \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 2\,f_D = 2a\,x^2 + 2b$$

$$f_j = a\,(d-x)^2 + b$$

Az első és harmadik egyenletben elvégezzük a müveleteket, majd összeadjuk és kivonjuk őket egymásból:

$$f_b = a\,d^2 + 2\,ad\,x + a\,x^2 + b$$

$$f_j = ad^2 - 2a\,d\,x + a\,x^2 + b$$

$$f_b + f_j = 2a\,d^2 + \overbrace{2a\,x^2 + 2\,b}^{2f_D} \qquad (24)$$

$$f_b - f_j = 4\,a\,d\,x \tag{25}$$

a (25)-ből kifejezzük "x"-et; a (24)-ből pedig 2ad-t

$$x = \frac{f_b - f_j}{4\,a\,d} = \frac{f_b - f_j}{2\,.\,2\,a\,d}; \qquad 2\,ad = \frac{1}{d}\left(f_b + f_j - 2f_D\right).$$

és a két egyenlet alapján felirjuk x-et:

$$x = \frac{f_b - f_j}{2\,\frac{1}{d}\left(f_b + f_j - 2f_D\right)} = d\,\frac{f_b - f_j}{2\left(f_b + f_j - 2\,f_D\right)} \tag{26}$$

(26)-ot a (23)-ba helyettesitve kapjuk a nagyminta móduszát:

$$\boxed{Mo = x_D + d\,\frac{f_b - f_j}{2\left(f_b + f_j - 2\,f_D\right)}} \tag{27}$$

A módusz jelentősége abban van, hogy a mintának az a tényleges értéke, amelynek a legnagyobb a gyakorisága, tehát amelynek a bekövetkezése a legvalószinübb, és ezért bizonyos esetekben a vizsgált tulajdonságot jobban kifejezi, mint bármely más középérték. Igy növény és állatkisérletek alkalmával, nemesitésnél, vagy terméseredmények, vagy a piac vizsgálatánál átlagár jellemzésére gyakran a módusz a leghasználhatóbb középérték. Szerepe van a módusznak az eloszlások szimmetriavizsgálatánál is. A módusz közelitésére alkalmazzuk a nyers móduszt (Mo'), amely vagy x_D osztályközép, vagy a móduszhoz legközelebb eső osztályhatár.

A nagyminta terjedelme

Ha a minta elemei ismertek, akkor ugyanugy állapitjuk meg, mint a kismintánál. Ha azonban csak az osztályokba rendezett minta ismert, az egyes elemek nem, akkor természetszerüleg a terjedelem a két szélső osztályhatár $x_1 - \frac{d}{2}$ és $x_k + \frac{d}{2}$ különbsége lesz, ami azt jelenti, hogy az $x_k - x_1$-azaz a legnagyobb és legkisebb osztályközép különbségéhez még "d"-t hozzá kell adni.

$$w = x_k - x_1 + d \tag{28}$$

A variációs koefficienst itt is a (9)-es képlettel számitjuk ki.

A tapasztalati valószinüség

Miután ismert előttünk a minta gyakoriságeloszlása azaz, hogy az "i"-edik osztályba f_i elem esik, gyakran tudnunk kell, hogy a minta egy véletlenül kiválasztott elemének mekkora töredéke jut az "i"-edik osztályra. Jelöljük a keresett mennyiséget g_i-vel. Ha "n" elemből f_i db esik az "i"-edik osztályba,akkor egy elemből g_i. Ez egyenes arányosság lévén:

$$n : 1 = f_i : g_i$$

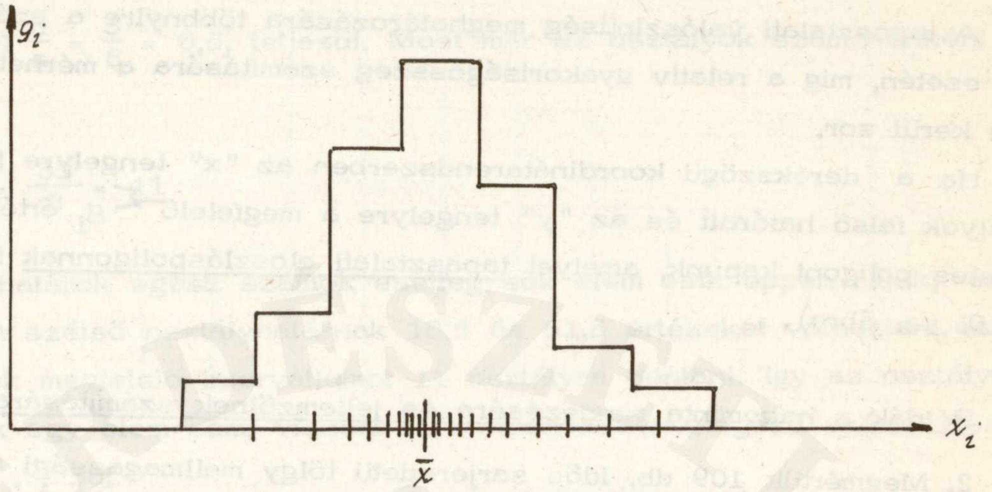
tehát az "i"-edik osztályra:

$$\boxed{g_i = \frac{f_i}{n}} \quad \text{jut} \tag{29}$$

A g_i érték az "i"-edik osztályhoz tartozó relativ gyakoriság, ez azt a valószinüséget jelenti, amellyel a minta egy véletlenszerüen kiválasztott eleme az "i"-edik osztályba esik. Mivel a g_i empirikus (tapasztalati) érték, amely az f_i gyakoriságot elosztva az "n" elemszámmal pontosan kiszámitható, ezért, tapasztalati valószinüségnek mondjuk. A minta tapasztalati valószinüségeloszlását a g_i relativ gyakoriságok sorozata jelenti (V. sz. táblázat g_i oszlopa). A tapasztalati valószinüségeloszlás szintén hisztogrammal szemléltethető. De most az "y" tengelyre a viszonylagos gyakoriságokat hordjuk fel. Ha ennek a hisztogramnak csak a felső határvonalát rajzoljuk meg, egy lépcsős ábrát kapunk (7. sz. ábra), amely azt szemlélteti, hogy a minta elemei milyen mértékben sürüsödnek a számtani közép körül.

Mivel a 7. ábrán látható poligonhoz (sokszögvonal) emprikus uton jutottunk tapasztalati sürüséggörbének nevezzük.

Egyes feladatoknál szükséges megállapitani, hogy a minta egy véletlenszerüen kiválasztott eleme mekkora tapasztalati valószinüséggel lesz kisebb mint az egyes osztályhatárok. Állapitsuk meg, hogy mekkora valószinüséggel lesz kisebb a minta "x" eleme az "i"-edik osztály felső határánál. A tapasztalati valószinüséget megkapjuk, ha gyakoriságot osztjuk az "n" elemszámmal. A 1, 2, . . . , i-ik osztályba összesen $f_1, f_2, \ldots f_i$. röviden $\sum_{i=1}^{i} f_i$ elem esik.



7. sz. ábra.

A tapasztalati sürüséggörbe

Ha ezt a valószinüséget

$$g\left[x < \left(x_i + \frac{d}{2}\right)\right] \text{-el jelöljük:}$$

$$g\left[x < \left(x_i + \frac{d}{2}\right)\right] = \frac{\sum_1^i f_i}{n} = \frac{f_1 + f_2 + \ldots + f_i}{n} =$$

$$= \frac{f_1}{n} + \frac{f_2}{n} + \ldots + \frac{f_i}{n} = g_1 + g_2 + \ldots + g_i =$$

$$= \sum_1^i g_i \qquad (30)$$

azt látjuk, hogy a keresett tapasztalati valószinüséget a $\sum_1^i g_i$ relativ gyakoriságösszeg szolgáltatja (V. sz. táblázat g_i oszlopa)

V. sz. táblázat

i	x_i	f_i	g_i	Σg_i
1	x_1	f_i	g_1	g_1
2	x_2	g_2	g_2	g_1+g_2
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
k	x_k	f_k	g_k	$\sum_1^k g_i$
Σ		n	1	

A tapasztalati valószinüség meghatározására többnyire a számlálható jegyek esetén, mig a relativ gyakoriságösszeg számitására a mérhető jegyek esetén kerül sor.

Ha a derékszögü koordinátarendszerben az "x" tengelyre felhordjuk az osztályok felső határait és az "y" tengelyre a megfelelő $\sum g_i$ értékeket, lépcsőzetes poligont kapunk, amelyet tapasztalati eloszláspoligonnak fogunk nevezni (10. sz. ábra).

Példák a nagyminta rendezésére és jellemzőinek számitására

2. Megmértük 109 db. idős sarjeredetü tölgy mellmagassági átmérőjét cm-ben, a mérési adatok a következők: 35, 26, 40, 38, 24, 23, 30, 33, 36, 25, 22, 31, 39, 19, 22, 36, 33, 32, 44, 43, 24, 28, 36, 38, 27, 25, 40, 32, 34, 37, 42, 38, 33, 27, 41, 39, 36, 30, 43, 40, 38, 41, 32 25, 33, 45, 28, 45, 39, 44, 28, 30, 37, 27, 35, 45, 26, 29, 36, 34, 37, 41, 28, 39, 37, 33, 47, 26, 29, 35, 39, 40, 36, 32, 29, 34, 51, 29, 31, 28, 27, 30, 30, 34, 37, 35, 37, 42, 37, 38, 35, 34, 26,30, 33, 27, 30, 32, 32, 34, 32, 29, 31, 31, 33, 37, 35, 31, 34, a/ Rendezzük a mintát. b/ Rajzoljuk meg a hisztogramot. c/ Számitsuk ki a minta Me, Mo, $\bar{x}$, s, s%, jellemzőit. d/ Összehasonlitás végett számitsuk ki $\bar{x}$ értékét a (17)-es és "s" értékét a (20)-as képlettel is.

a/ A minta rendezését a minta terjedelmének kiszámitásával kezdjük. A minta elemeit végignézve látjuk, hogy x_1 = 19 cm és x_n = 51 cm, tehát a minta terjedelme:

$$w = x_n - x_1 = 51 - 19 = \underline{32 \text{ cm}}$$

A 32 nem osztható maradék nélkül 3-al, ezért 1-et adunk hozzá és igy az osztályköz:

$$d = \frac{32 + 1}{11} = \underline{3 \text{ cm}} \quad \text{lesz.}$$

De ellenőriznünk kell, hogy megfelel-e a (10)-es feltételnek, és ehhez ismernünk kell az "s" értékét, amelyet a (138)-as képlettel közelitőleg számitunk ki a 17. példában:

$$s = \frac{w}{2\, t_{0,01}} = \frac{32}{5,24} = 6 \text{ cm}$$

A feltétel mivel $\frac{d}{s} = \frac{3}{6} = 0{,}5$, teljesül. Most már az osztályok száma önként adódik:

$$k = \frac{33}{3} = \underline{11}$$

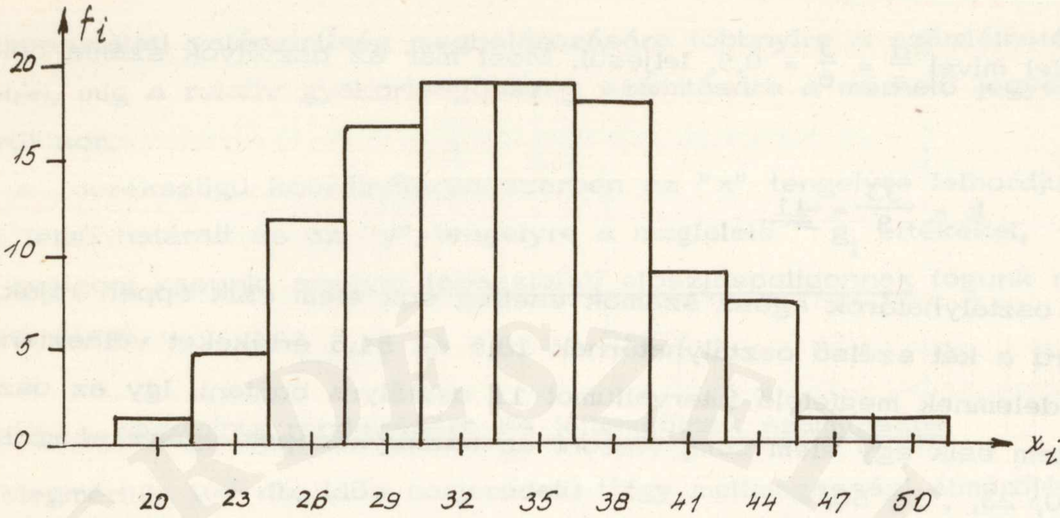
Ha az osztályhatárok egész számok esetleg sok elem esik éppen rájuk, ezért célszerü a két szélső osztályhatárnak 18,5 és 51,5 értékeket választani, és azt a terjedelemnek megfelelő intervallumot 11 osztályra bontani. Igy az osztályhatárra nem esik egy elem sem, viszont az osztályközepek egész számok lesznek: 20, 23, . . . 50.

Most már elkészithetjük a táblázatot, és beoszthatjuk a minta elemeit (VI. táblázat) :

VI. táblázat.

i	osztályok cm-ben	x_i cm	A beosztott elemek	f_i
1	18,5 - 21,5	20	|	1
2	21,5 - 24,5	23	~~||||~~	5
3	24,5 - 27,5	26	~~||||~~ ~~||||~~ ||	12
4	27,5 - 30,5	29	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ||	17
5	30,5 - 33,5	32	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ||||	19
6	33,5 - 36,5	35	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ||||	19
7	36,5 - 39,5	38	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ |||	18
8	39,5 - 42,5	41	~~||||~~ ||||	9
9	42,5 - 45,5	44	~~||||~~ ||	7
10	45,5 - 48,5	47	|	1
11	48,5 - 51,5	50	|	1
Σ				109

b/ A minta hisztogramját megkapjuk, ha a 11 osztálynak megfelelő intervallumot az osztályközepekkel a vizszintes tengelyre felhorjuk, majd ezekre a megfelelő gyakoriságokkal mint magassággal téglalapokat emelünk:



8. sz. ábra.

A 2. pl.-ban szereplő minta hisztogramja

c/ A minta Me, Mo s, $\bar{x}$ és s% értékeinek számitása. A medián számitásánál a VI. sz. táblázatból indulunk ki. Felirjuk azt az osztályhatárt, amely a mintát két közel egyenlő részre osztja: x_o = 33,5 cm; az x_o-tól felfelé eső elemek száma: n_b = 54; az elemszám fele $\frac{n}{2} = \frac{109}{2}$ = 54,5; az x_o alatti gyakoriság f_j = 19; és az osztályköz d = 3 cm. Ezeket az értékeket a (22)-es képletbe téve:

$$Me = x_o + d\,\frac{\frac{n}{2} - n_b}{f_j} = 33{,}5 + 3\,\frac{54{,}5 - 54}{19} =$$

$$= 33{,}5 + \frac{1{,}5}{19} = 33{,}5 + 0{,}08 = 33{,}58 \text{ cm} \approx \underline{33{,}6 \text{ cm}}$$

A nyersmediánnak itt az x_o = 33,5 osztályhatárt célszerü választani, tehát:

$$\underline{Me = 33{,}5 \text{ cm}}$$

A módusz számitásánál is a VI. sz. táblázatból indulunk ki. x_D-nek választhatjuk az x_5 = 32 vagy az x_6 = 35 osztályközepek közül bármelyiket, hiszen mindkettő gyakorisága a maximális értéket veszi fel.

Legyen x_D = 35 cm; az osztályköz: d = 3 cm; az x_D-től felfelé eső gyakoriság: f_b = 19 cm; az x_D-től lefelé eső gyakoriság: f_j = 18; az x_D-nek megfelelő gyakoriság: f_D = 19 cm. Ezeket az értékeket a (23)-as képletbe téve:

$$Mo = x_D + d\,\frac{f_b - f_j}{2\,/\,f_b + f_j - 2\,f_D\,/} =$$

$$= 35 + 3\,\frac{19-18}{2\,(19+18-2.19)} =$$

$$= 35 + \frac{3}{-2} = 35 - 1{,}5 = \underline{33{,}5\ \text{cm}}$$

A nyersmódusznak itt célszerü a 6- és 7-ik osztályok közötti osztályhatárt venni:

$$\underline{M'_o = 33{,}5\ \text{cm}}$$

amely itt pontosan megègyezik a módusszal, általában azonban többé kevésbé eltér tőle.

A számtani közép számitásához szükséges $\Sigma x_i f_i$ értékeket a VI. sz. táblázat alapján készitett VII. sz. táblázatban számitjuk:

VII. sz. táblázat.

i	x_i dm	f_i	$x_i f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$
1	20	1	20	- 13,7	187,69	187,69
2	23	5	115	- 10,7	114,49	572,45
3	26	12	312	- 7,7	59,29	711,48
4	29	17	493	- 4,7	22,09	375,53
5	32	19	608	- 1,7	2,89	54,91
6	35	19	665	1,3	1,69	32,11
7	38	18	684	4,3	18,49	332,82
8	41	9	369	7,3	53,29	479,61
9	44	7	308	10,3	106,09	742,63
10	47	1	47	13,3	176,89	176,89
11	50	1	50	16,3	265,69	265,69
Σ		109	3671			3931,81

$\Sigma x_i f_i = 3671$; $n = 109$; ezeket az értékeket a (12)-es képletbe téve:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i f_i}{n} = \frac{3671}{109} = 33{,}68 \approx \underline{33{,}7\ \text{cm}}$$

A szórás számitásához szükséges $SQ = \sum (x_i - \bar{x})^2 f_i$ eltérésnégyzet-összeget ugyancsak a VII. sz. táblázatban számitjuk ki.

$SQ = \sum (x_i - \bar{x})^2 f_i = 3931{,}81$; $n = 109$; a (15)-ös képlet alapján a szórás:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n}} = \sqrt{\frac{3931{,}81}{109}} = \sqrt{36{,}072} =$$

$$= 6{,}006 \approx \underline{6{,}0 \text{ cm}}$$

A szóródási együttható a (9)-es képlet alapján:

$$s\% = 100 \frac{s}{\bar{x}} \% = 100 \frac{6{,}0}{33{,}7} = \frac{600}{33{,}7} = 17{,}8\ \%$$

d/ $\bar{x}$ és s értékek gyorsabb számitása:

A (17)-es és (20)-as képletekhez a $\sum x'_i f_i$ és a $\sum x'^2_i f_i$ értékeket a VIII. sz. táblázatban számitjuk.

VIII. sz. táblázat.

i	x_i	f_i	x'_i	$x'_i f_i$	x'^2_i	$x'^2_i f_i$
1	20	1	-5	- 5	25	25
2	23	5	-4	-20	16	80
3	26	12	-3	-36	9	108
4	29	17	-2	-34	4	68
5	32	19	-1	-19	1	19
6	35	19	0	0	0	0
7	38	18	1	18	1	18
8	41	9	2	18	4	36
9	44	7	3	21	9	63
10	47	1	4	4	16	16
11	50	1	5	5	25	25
$\sum$				-114 66 - 48		458

Az x'_i értékek számitása a (16)-os képlet alapján történik;

$$x'_i = \frac{x_i - x_D}{d}\ ; \quad x_D = 35\ cm\ ; \quad d = 3\ cm$$

$$x'_i = \frac{x_1 - x_D}{d} = \frac{20 - 35}{3} = -5$$

$$x'_2 = \frac{x_2 - x_D}{d} = \frac{23 - 35}{3} = -4$$

$$\vdots$$

$$x'_6 = \frac{x_6 - x_D}{d} = \frac{35 - 35}{3} = 0$$

Az x_D os ztályközép sorában lévő x'_i érték mindig zérus, ettől felfelé eső x'_i értékek -1, -2, -3 stb. a lefelé esők pedig 1, 2, 3 stb. lesznek. Ezekkel a nem nagy egész számokkal a müveletek fejben, gyorsan végezhetők el. A (17)-es képlet alapján a számtani közép:

$$\bar{x} = \bar{x}_D + d\,\frac{\sum x'_i f_i}{n} = 35 + 3\,\frac{-48}{109} = 35 - 1{,}32 =$$

$$= 33{,}68 \approx \underline{33{,}7\ cm}$$

$$d = 3\ cm; \quad \sum x'^2_i f_i = 458; \quad \sum x'_i f_i = -48\ ; \quad n = 109$$

A (20)-as képlet alapján a szórás:

$$s = d\sqrt{\frac{\sum x'^2_i f_i - \frac{1}{n}(\sum x'_i f_i)^2}{n}} = 3\sqrt{\frac{458 - \frac{1}{109}(-48)^2}{109}} =$$

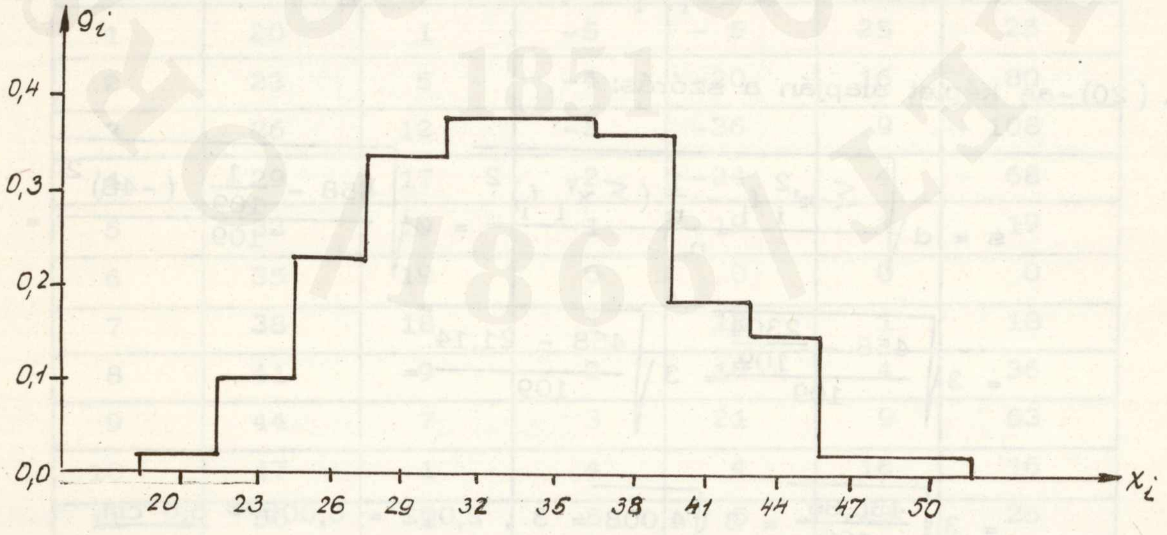
$$= 3\sqrt{\frac{458 - \frac{2304}{109}}{109}} = 3\sqrt{\frac{458 - 21{,}14}{109}} =$$

$$= 3\sqrt{\frac{436{,}86}{109}} = 3\sqrt{4{,}008} = 3\ .\ 2{,}002 = 6{,}006 \approx \underline{6{,}0\ cm}$$

e/ Számitsuk ki, az egyes osztályokba tartozó relativ gyakoriságokat, amelyek az egyes mellmagassági átmérők bekövetkezésének tapasztalati valószinüségei. Ezen kivül számitsuk ki a felső osztályokhoz tartozó relativ gyakoriságszögeket, amelyek annak a tapasztalati valószinüségét jelentik, hogy a véletlenül kiválasztott "x" elem kisebb lesz a felső osztályhatároknál. Majd vázoljuk fel a tapasztalati sürüség és eloszláspoligont.

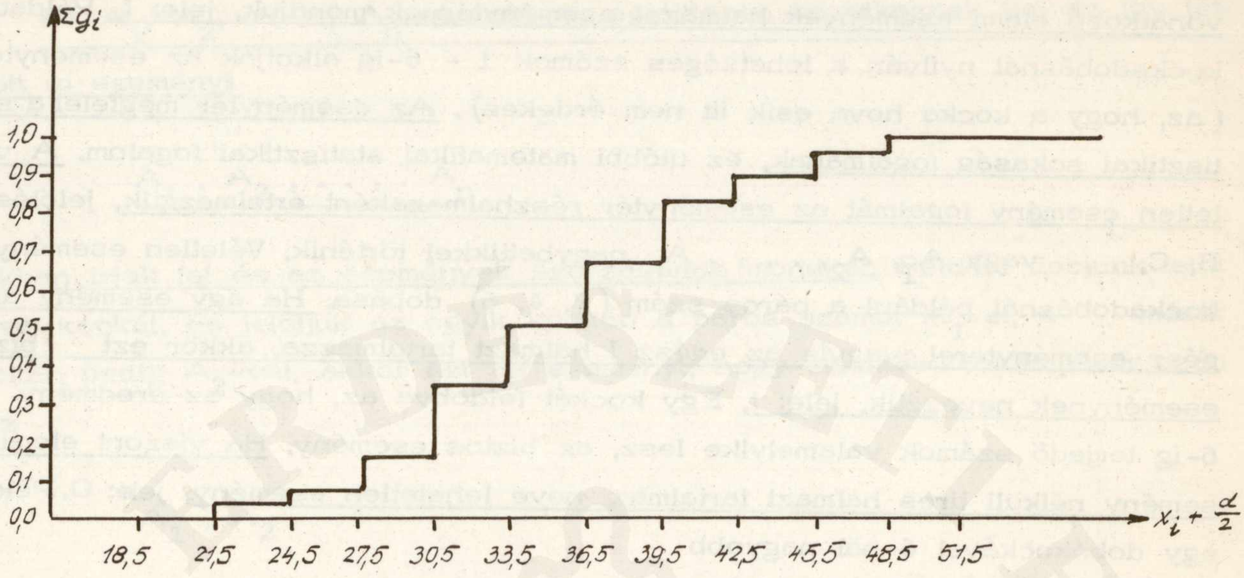
IX. sz. táblázat.

i	x_i	f_i	g_i	$x_i + \frac{d}{2}$	g_i
1	20	1	0,009	21,5	0,009
2	23	5	0,046	24,5	0,055
3	26	12	0,110	27,5	0,165
4	29	17	0,156	30,5	0,321
5	32	19	0,174	33,5	0,495
6	35	19	0,124	36,5	0,669
7	38	18	0,165	39,5	0,834
8	41	9	0,083	42,5	0,917
9	44	7	0,064	45,5	0,981
10	47	1	0,009	48,5	0,990
11	50	1	0,009	51,5	0,999
		109	0,999		



9. sz. ábra.

A mint sürüségpoligonja



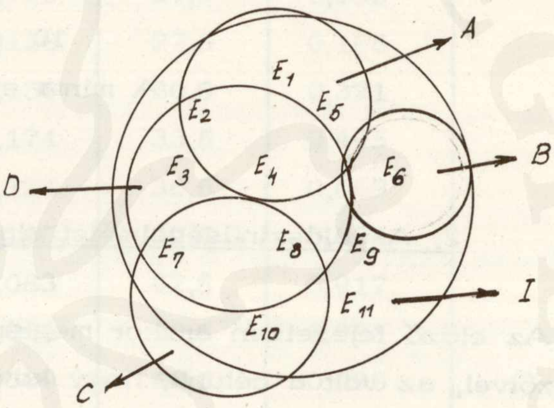
10. sz. ábra.
A minta eloszláspoligonja

2. A valószinüségelmélet alapjai

Az előző fejezetben amikor megismerkedtünk a mintával és legfontosabb jellemzőivel, az volt a célunk, hogy következtetéseket vonjunk le az alapsokaság tulajdonságaira vonatkozóan. Ezt ugy tehetjük, hogy matematikai statisztikai módszerekkel elemezzük a minták eloszlását, és a kiszámitott jellemzőket. Ezen müveleteket csak akkor tudjuk hibátlanul elvégezni, ha megértjük a matematikai statisztikai módszerek lényegét. De mivel az emlitett módszerek a valószinüségelmélet tételeire épülnek, meg kell ismerkednünk a valószinüségelmélet alapjaival.

2.1. Események közötti összefüggések

Már több izben szerepelt a véletlen esemény, amely a valószinüségelméletben mást jelent, mint a hétköznapi nyelvben. A véletlen események általában valamely kisérlettel, mégpedig véletlen kisérlettel kapcsolatosak. Véletlen azért, mert kimenetelét az általunk figyelembe vett feltételek nem határozzák meg egyértelmüen. Ezen kisérletek alatt nem a szükebben vett kisérleteket értjük, amelyekkel a 4. fejezetben ismerkedünk meg, hanem egyszerüen mérésekről, megfigyelésekről stb. van itt szó. Egy kisérlet lehetséges kimeneteleit elemi eseményeknek fogjuk nevezni. Valamely kisérletben egy meghatározott szempontra vonatkozó elemi események halmazát eseménytérnek mondjuk, jele: I. Például a kockadobásnál nyilván a lehetséges számok 1 - 6-ig alkotják az eseményteret, (az, hogy a kocka hova esik itt nem érdekes). Az eseménytér megfelel a statisztikai sokaság fogalmának, ez utóbbi matematikai statisztikai fogalom. A véletlen esemény fogalmát az eseménytér részhalmazaként értelmezzük, jelölése A, B, C, . . . vagy A_1, A_2, . . . , A_n nagybetükkel történik. Véletlen esemény a kockadobásnál például a páros szám (2, 4, 6) dobása. Ha egy esemény az egész eseményteret, vagyis az egész I halmazt tartalmazza, akkor ezt biztos eseménynek nevezzük, jele: I. Egy kockát feldobva az, hogy az eredmény 1 - 6-ig terjedő számok valamelyike lesz, az biztos esemény. Ha viszont elemi esemény nélküli üres halmazt tartalmaz, neve lehetetlen esemény, jele: O. Például egy dobókockával 6-nál nagyobb szám dobása lehetetlen esemény. Azon eseményt amely azt jelenti, hogy "A" esemény nem következik be "A" ellentétes eseményének mondjuk és $\bar{A}$-val jelöljük. Például annak, hogy páros számot dobunk ellentétes eseménye az, hogy nem dobunk páros számot azaz, hogy páratlan szám lesz az eredmény.



11. sz. ábra.

Az I eseménytér, az A, B, C, D véletlen események és az E_1, E_2, . . . elemi események

Ha A_1, A_2, . . . A_n események közül legalább az egyik bekövetkezik, azt az ujabb eseményt

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

alakban irjuk fel és az események összeadásának mondjuk. Például a kockadobásnál azt az eseményt, hogy az 1-6-ig terjedő számok közül valamelyik bekövetkezik, ha a számokat A_1, A_2, . . . A_6-al jelöljük,

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_6$$

alakban irjuk fel. ($A_1 + A_2 = A_1$ vagy* A_2)

---

* a "vagy" nem kizárólagos értelemben

Ha A_1, A_2, . . ., A_n események együttesen következnek be, az igy létrejött uj eseményt

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$$

alakban irjuk fel és az események szorzásának mondjuk. Például dobjunk fel 2 darab kockát, és jelöljük az egyik kockán a páros számot A_1-el, a másik kockán pedig A_2-vel, akkor azt az eseményt, hogy mindkét kockán páros szám lesz

$$A_1 \cdot A_2$$

alakban irjuk fel. ($A_1 \cdot A_2$ = A_1 és A_2 is).

A fentiek ismeretében már módunkban van néhány fontos összefüggést felirni.

a/ A lehetetlen és a biztos esemény ellentétes eseményei egymásnak:

$$O = \bar{I} \quad \text{és} \quad I = \bar{O}$$

b/ Az események összeadására érvényesek az alábbi összefüggések:

$$A + \bar{A} = I \; ; \quad A + O = A \quad \text{és} \quad A + A = A \tag{31}$$

c/ Az események szorzására érvényes az

$$AA = A \; , \quad AI = A \quad \text{és} \quad AO = O \tag{32}$$

összefüggés.

Ha $A_1 \cdot A_2 = O$, vagyis A_1 és A_2 esemény nem következhet be együttesen, akkor A_1 és A_2 egymást kizáró események. Igy egymást kizárják az ellentétes események:

$$A \cdot \bar{A} = O$$

Továbbá egymást kizáró események az eseményteret alkotó elemi események.

d/ Ha A_1, A_2, . . . A_n egymást kizáró események és összegük biztos esemény, akkor ezek az események teljes eseményrendszert alkotnak:

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n = I} & \text{ahol} \\ \underline{A_1 \cdot A_2 = O, \ldots A_1 A_n = O \quad \text{és} \quad A_2 A_n = O} & \end{array}\right\} \quad (33)$$

Teljes eseményrendszert alkotnak az ellentétes események is (lásd a b/ pontban.) Keressünk egy példát a teljes eseményrendszerre: Egy kockával dobható 1-6. minden szám, jelöljük ezt a 6 elemi eseményt $A_1, A_2, \ldots A_6$ -al, egy dobásnál ezek közül csak egy következhet be, (ezek egymást páronként kizáró események), viszont ez az egy feltétlen bekövetkezik, (igy összegük biztos esemény):

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_6 = I \quad \text{ahol}$$

$$A_1 A_2 = O; \ldots A_1 A_6 = O \quad \text{és} \quad A_2 A_6 = O$$

tehát az $A_1, A_2 \ldots A_6$ események teljes eseményrendszert alkotnak.

2.2. A valószinüség fogalma

Az előző fejezetben már találkoztunk a relativ gyakoriság fogalmával, amelyet ott tapasztalati valószinüségnek neveztünk.

Ha egy kisérletet "n"-szer elvégezve "A" esemény "f_A"-szor következik be, az f_A az "A" esemény gyakorisága, az $\frac{fA}{n} = g_A$ hányados pedig az "A" esemény relativ gyakorisága. Ha a kisérletsorozatot egymástól függetlenül, azonos körülmények között igen sokszor megismételjük, a relativ gyakoriság, stabilitást mutat, és az "n" minden határon tul való növelésével egy határértékhez tart. A relativ gyakoriság stabilitására vonatkozó törvény a nagyszámok törvénye. Az emlitett határérték pedig az "A" esemény valószinüsége, amelyet P(A) -val jelölünk:

$$\boxed{P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{f_A}{n}} \quad (34)$$

A P(A) valószinüség a g_A relativ gyakorisággal ellentétben egy elméleti érték.

2.3. A valószinüségelmélet alaptételei

A valószinüségelméletnek négy olyan alaptétele van, amelyekből a többi tételek levezethetők:

1/ A lehetetlen esemény valószinüsége zéró:

$$\boxed{P(O) = 0} \tag{35}$$

Bizonyitás:

$$f_A = 0, \quad \frac{f_A}{n} = 0 \longrightarrow P(O) = 0$$

2/ A biztos esemény valószinüsége egy:

$$\boxed{P(I) = 1} \tag{36}$$

Bizonyitás:

$$f_A = n, \quad \frac{f_A}{n} = 1 \longrightarrow P(I) = 1$$

3/ Egy tetszőleges "A" esemény P(A) valószinüsége legalább O, de legfeljebb egy lehet:

$$\boxed{0 \leq P(A) \leq 1} \tag{37}$$

Bizonyitás:

$$0 \leq f_A \leq n, \quad 0 \leq \frac{f_A}{n} \leq 1 \longrightarrow 0 \leq P(a) \leq 1$$

4/ Ha "A" és "B" egymást kizáró események - vagyis érvényes rájuk nézve az A.B = O reláció - akkor összegük valószinüsége egyenlő a valószinüségeik összegével. Tehát a valószinüségek összeadástétele:

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B) \;;\; A;B = O} \tag{38}$$

Bizonyitás: Végezzünk "n" kisérletet és legyen "A" gyakorisága f_A, "B" gyakorisága f_B, akkor az (A + B) esemény gyakorisága ($f_A + f_B$) lesz. Az (A + B) esemény relativ gyakorisága:

$$g_{(A+B)} = \frac{f_A + f_B}{n} = \frac{f_A}{n} + \frac{f_B}{n} = g_A + g_B$$

Határátmenettel: $\lim g_{(A+B)} = P(A+B)$, $\lim g_A = P(A)$ és $\lim g_B = P(B)$ és igy $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

A bizonyitás elvégezhető "n" egymást páronként kizáró eseményre is,igy az összeadás tételt $A_1, A_2, \ldots A_n$; $A_i \cdot A_j = 0$; $i \neq j$; eseményre is kiterjeszthetjük:

$$\underline{P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)} \qquad (38)$$

$$A_i \cdot A_j = 0 \; ; \; i \neq j.$$

Az alaptételekből a valószinüségelmélet többi tételei már levezethetők.

2.31 Az alaptételekből levezethető további tételek

α./ A teljes eseményrendszer valószinüsége. Már láttuk, hogy $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = I$ ha $A_i \cdot A_j = 0$; $i \neq j$.

A (38)-as alapján:

$$\underline{P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_n) = P(I) = 1} \qquad (39)$$

A teljes eseményrendszer egyes eseményeinek valószinüségei összegezve teljes valószinüséget azaz 1-et eredményeznek.

β./ Az ellentétes esemény valószinüsége: Az "A" és "$\bar{A}$" ellentétes események teljes eseményrendszert alkotnak:

$$A + \bar{A} = I; \qquad P(A) + P(\bar{A}) = P(I) = 1 \qquad \text{és ebből}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \qquad (40)$$

γ./ A klasszikus valószinüségi mező. Ha egy eseményteret véges számu elemi esemény alkot, akkor az véges eseménytér. Ha a véges eseménytér elemi eseményei egyenlően valószinü események, akkor klasszikus valószinüségi mező a neve. Az ide tartozó elemi események bekövetkezésének valószinüségét ugy számitjuk ki, hogy a kedvező esetek számát (k) elosztjuk a lehetséges esetek számával (n):

$$\boxed{P(A) = \frac{k}{n}} \tag{41}$$

Bizonyitás: A szóban forgó eseménytér "n" elemi eseményt tartalmaz, vagyis a lehetséges esetek száma "n". Az "n" esemény, mivel közülük 1 feltétlen bekövetkezik teljes eseményrendszert alkot:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

de egyenlően valószinü események lévén:

$$P(A_i) = P(A_j), \quad i \neq j; \quad \text{és igy}$$

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots P(A_n) = n\,P(A_i) = 1, \qquad \text{ahonnan:}$$

$$P(A_i) = \frac{1}{n}$$

Válasszunk ki az "n" eseményből "k" darabot, tekintsük ezeket kedvező eseteknek, és keressük annak a valószinüségét, hogy ezek közül 1 bekövetkezik: $P(A_\alpha + A_\beta + \dots + A_k) = P(A)$

$$P(A) = k\,P(A_i) = k\,\frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

Például: Mekkora annak a valószinüsége, hogy egy szabályos dobókockával első dobásra 6-ost dobunk. A lehetséges esetek száma n = 6, a kedvező esetek száma k = 1 tehát a 6-os valószinüsége:

$$P(6) = \frac{k}{n} = \frac{1}{6}$$

Ezután számitsuk ki annak a valószinüségét, hogy az első dobásra páros számot dobunk. A kedvező most a 2, 4, 6-os, k = 3 és n = 6, tehát:

$$P(2+4+6) = \frac{k}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Vagy az összeadástétel alapján:

$$P(2+4+6) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a páros számot "A"-val, ellentétes eseményét a páratlan számot $\bar{A}$-val jelöljük:

$$P(A + \bar{A}) = 1 \qquad \text{és} \qquad P(A) = P(\bar{A}), \qquad \text{tehát:}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

δ./ Tetszőlegesen "A" és "B" események összegének valószinüsége:

Az A és B események összege akkor is felirható két egymást kizáró esemény összegeként, ha "A" és "B" egymást nem zárják ki:

$$A \cdot B \neq O \;....\; A + B = A + \bar{A}B \qquad \text{ennek valószinüsége:}$$

$$P(A+B) = P(A) + P(\bar{A}B) \tag{42}$$

A "B" esemény is előállitható két egymást kizáró esemény összegeként:

$$B = AB + \bar{A}B \qquad \text{ennek valószinüsége:}$$

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) \qquad \text{ebből kifejezve} \qquad P(\bar{A}B)\text{-t}$$

$$P(AB) = P(B) - P(AB) \tag{43}$$

A (43)-at (42)-be behelyettesitve megkapjuk a tetszőleges "A" és "B" események összegének valószinüségét:

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)} \tag{44}$$

Például: Egy csomag magyar kártyából 1 lapot kihuzva mekkora valószinüsége annak, hogy az piros lesz, vagy ász lesz? Jelöljük a piros bekövetkezését A_1-el az ászét A_2-vel.

$$P(A_1) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}; \qquad P(A_2) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

Az $A_1 A_2$ eseményt a piros ász huzása jelenti, annak valószinüsége: $P(A_1 A_2) = \frac{1}{32}$.

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$$

$\mathcal{E}$/ Feltételes valószinüség. Tegyük fel, hogy egy kisérlet lehetséges kimenetelei "A", AB valamint (1-A) események bekövetkezése. A kisérletet "n"-szer megismételve az "A" esemény gyakorisága f_A, relativ gyakorisága $g_A = \frac{f_A}{n}$, az AB esemény gyakorisága f_{AB} és relativ gyakorisága $g_{AB} = \frac{f_{AB}}{n}$. Az a kérdés, hogy mekkora tapasztalati valószinüséggel következik be az "A"-ra kedvező (f_A számu) esetben a B esemény, amelyet B/ A-val jelölünk. A gyakoriságot (f_{AB}) osztva az elemszámmal (f_A):

$$g_{B/A} = \frac{f_{AB}}{f_A} = \frac{\frac{f_{AB}}{n}}{\frac{f_A}{n}} = \frac{g_{AB}}{g_A} \tag{45}$$

A (34)-es alapján a (45)-ös határértéke jelenti a B/ A esemény valószinüségét:

$$\lim_{n \to \infty} g_{B/A} = \lim_{n \to \infty} \frac{g_{AB}}{g_A} = \frac{\lim g_{AB}}{\lim g_A}$$

$$\lim_{n \to \infty} g_{B/A} = P(B/A); \quad \lim_{n \to \infty} g_{AB} = P(AB) \quad \text{és} \quad \lim_{n \to \infty} g_A = P(A)$$

$$\boxed{P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}} \tag{46}$$

A (46)-os hányadost "B" esemény "A"-ra vonatkozó feltételes valószinüségének nevezzük és P (B/A)-val jelöljük.

Például: Annak a valószinüsége hogy egy gyártmány nem selejtes P(A) = 0,96, hogy elsőrendü P (AB) = 0,24. Keressük annak a valószinüségét, hogy a nem selejtesek közül elsőrendü lesz:

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0{,}24}{0{,}96} = 0{,}25$$

ξ./ A valószinüségek szorzástétele. A (46)-os képletekből P (AB) —t kifejezve megkapjuk a valószinüségek szorzási tételét:

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$\boxed{P(AB) = P(A)\ P(B/A)} \qquad (47)$$

Például: Annak a valószinüsége, hogy egy gyártmány jó P (A) = 0,96, hogy ebből elsőrendü P (B/A) = 0,25. Mekkora a valószinüsége annak, hogy a gyártmány elsőrendü?

$$P(AB) = P(A)\ P(B/A) = 0{,}96 \cdot 0{,}25 = 0{,}24$$

η./ Események függetlensége. Az "A" és "B" eseményeket függetlennek nevezzük akkor, ha "A" és "B" együttes bekövetkezésének valószinüséges egyenlő az "A" és "B" események valószinüségeinek szorzatával:

$$\boxed{P(AB) = P(A)\ P(B)} \qquad (48)$$

Hogy alakul itt a P (B/A) feltételes valószinüség ?

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A)\ P(B)}{P(A)} = P(B)$$

Vagy a P (A/B) feltételes valószinüség?

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)\ P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Például: Két kockát feldobva, mekkora a valószinüsége annak, hogy mindegyiken 6-os lesz?

$$P(A) = \frac{1}{6}; \quad P(B) = \frac{1}{6};$$

$$P(AB) = P(A)\ P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

2.32. Bernoulli tétele

Induljunk egy olyan kisérletből, amelynek csak kétféle kimenetele lehetséges, azaz dobjunk fel egy forintost, azon vagy fej lesz vagy irás. Jelöljük a fej valószinüségét "p"-vel, az irás valószinüségét "q"-val, $p + q = 1$ vagyis $q = 1-p$. Vizsgáljuk meg, hogy 2 darab forintost feldobva mekkora valószinüséggel következik be 1 fej. Vagy az egyik forintoson lesz fej és a másikon irás, ennek valószinüsége a (48) szerint pq, vagy a másikon lesz fej és az egyiken irás ennek valószinüsége qp. Az 1 fej valószinüsége a (38) alapján $P(1) = pq + qp = 2pq$, a 2-s p és q permutációnak száma, amit két elem első osztályu kombinációjaként is felfogható:

$$P(1) = \binom{2}{1} pq$$

Dobjunk fel 3 forintost, mekkora lesz a 2 fej valószinüsége? Itt 3 eset lehetséges: ppq, pqp és qpp tehát: $P(2) = ppq + pqp + qpp = 3p^2q$, de a 3 tulajdonképpen 3 elem másodosztályu kombinációnak számát jelenti:

$$P(2) = \binom{3}{2} p^2 q$$

Ha ezután "n" darab forintost dobunk fel és azt vizsgáljuk, hogy mekkora valószinüséggel következik be "k" darab fej ($k \leq n$), a fentiek alapján:

$$\boxed{P(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}} \qquad (49)$$

képletet kapunk, ezt Bernoulli képletnek nevezzük.

A Bernoulli képlettel számitjuk ki bármely esemény bekövetkezési gyakoriságának valószinüségét, megismételt kisérletek esetén, ha a bekövetkezés valószinüsége állandó, igy a visszatevéses mintavételnél is.

A visszatevéses mintavétel. Egy láda csavar ellenőrzését végezzük ugy, hogy a darabot megvizsgálva ismét visszatesszük a ládába. A selejt valószinüsége p = 0,1, a jó valószinüsége q = 1-p = 0,9. Mekkora a valószinüsége, hogy m = 3 darabot megvizsgálva éppen k = 1 darab lesz selejtes?

$$\underline{P(2)} = \binom{3}{1} 0{,}9^{2} \cdot 0{,}1 = \underline{0{,}243}$$

2,33. Mintavétel visszatevés nélkül

Most ugy végezzük az ellenőrzést, hogy a vizsgált darabokat nem tesszük vissza az alapsokaságba. Legyen az összes munkadarabok száma "N" ebből selejtes "M" és jó N-M. "n" darabot kiválasztva mekkora lesz a valószinüsége annak, hogy éppen "k" darab selejtes?

"N" darabból "n" darabot $\binom{N}{n}$ féleképpen lehet kiválasztani, ez adja a lehetséges esetek számát.

"M" selejtből "k" darabot $\binom{M}{k}$ féleképpen lehet kiválasztani, de ettől függetlenül az (N-M) jóból (n-k) darab $\binom{N-M}{n-k}$ féleképpen választható ki, és mivel minden "k" darab selejthez (n-k) jót is ki kell választani, a kedvező esetek száma $\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$ lesz.

Tehát a keresett valószinüség a (41) szerint:

$$\boxed{P(k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}} \qquad (50)$$

Például: 100 baltanyél közül 5 db selejtes van. 3 darabot találomra kiválasztva, mekkora a valószinüsége annak, hogy éppen 2 db selejtes?

$$N = 100, \quad M = 5, \quad N-M = 95, \quad n = 3, \quad k = 2, \quad n-k = 1$$

$$P(2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{95}{1}}{\binom{100}{3}} = \frac{\frac{5.4}{2} \cdot 95}{\frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3}} =$$

$$= \frac{10 \cdot 95}{100 \cdot 33 \cdot 49} = \frac{19}{2 \cdot 33 \cdot 49} = \frac{19}{2 \cdot 1617} = \frac{19}{3234} =$$

$$= \underline{0{,}00588}$$

Az (50)-es képlet segitségével számithatjuk ki a lottó találatok valószinüségét is.

2.4. A valószinüségi változó

A matematikai statisztikában megismerkedtünk az alapsokaság fogalmával. Az alapsokaságnak a valószinüségelméletben a valószinüségi változó fogalma felel meg.

Definició: valószinüségi változónak nevezzük az elemi események halmazán értelmezett $\xi(x)$ függvényt.

A valószinüségi változót ξ, η stb. görög betükkel jelöljük. Egy kisérlettel kapcsolatban annyi valószinüségi változóról lehet szó, ahány függvény értelmezhető az elemi események terén. Például kockadobásnál: ξ_1 = 1, 2, 3,4, 5, 6 vagy ξ_2 = páros, páratlan, ξ_3 = 1, nem egyes stb.

2.41. A diszkrét valószinüségi változó, a valószinüségi és eloszlásfüggvénye.

Ha a jegyek megszámlálhatók, azaz a ξ valószinüségi változó véges,vagy megszámlálhatóan végtelen sok értéket vehet fel, a neve diszkrét valószinüségi változó. (diszkrét = megkülönböztetett). Legyen $\xi = x_1, x_2 \ldots, x_n$, a ξ bekövetkezési valószinüsége $P(\xi)$, amelyet valószinüségi függvénynek nevezünk. Ilyen valószinüségi függvény például "n" forintos feldobásánál a fejek gyakoriságára vonatkozó $\xi = k = 0,1, \ldots, n$ valószinüségi változó bekövetkezési valószinüsége:

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Vagy az "N" munkadarabból kiválasztott "n" darab esetén $\xi = k = 0,1, \dots , n$ db selejt bekövetkezési valószinüsége:

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

A $P(\xi < x)$ valószinüséget a (33)-as határértékeként vezethetjük be és F (x)-el jelöljük:

$$\boxed{P(\xi < x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{i} g_i = \sum_{1}^{i} P(x_i) = F(x_i)} \qquad (51)$$

<u>Az $F(x) = \sum P(x)$ függvényt a ξ diszkrét valószinüségi változó eloszlásfüggvényének mondjuk.</u> Ennek grafikonja ugyanolyan alaku mint a megfelelő minta eloszláspoligonja (10. ábra).

<u>2.42. A folytonos valószinüségi változó, az eloszlás- és sürüségfüggvénye</u>

Mérhető jegyek esetén, amikor a ξ a $(-\infty < \xi < \infty)$ intervallumban minden értéket felvehet, a $P(\xi)$ valószinüségi függvénynek nincs értelme, az $F(x) = P(\xi < x)$ eloszlásfüggvénynek annál inkább.

<u>Definíció: A ξ valószinüségi változót, ha eloszlásfüggvénye az egész számegyenes minden pontjában folytonos, továbbá véges számu "x" hely kivételével differenciálható, akkor folytonos valószinüségi változónak nevezzük.</u>

A folytonos ξ valószinüségi változó eloszlásfüggvénye mindig monoton növekvő és alul, felül korlátos függvény.

$P(\xi < -\infty) = F(-\infty) = 0$ ezt függvénytanilag felirva:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

$P(\xi < \infty) = F(\infty) = 1$ vagy másképpen:

$\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$ A fentiekből következik, hogy:

$$0 \leq F(x) \leq 1 \tag{52}$$

A folytonos ξ valószinüségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvényének differenciálhányadosát a ξ valószinüségi változó sürüségfüggvényének nevezzük és $f(x)$-el jelöljük:

$$f(x) = F'(x) \tag{53}$$

Ha a ξ valószinüségi változóból vett minta x_i értékeihez tartozó g_i relativ gyakoriságot elosztjuk a "d" osztályközzel, amit itt Δx_i-vel jelölünk, megkapjuk az elemeknek az "i"-edik osztályközre eső átlagos sürüségét, ami közelitőleg egyenlő az $f(x_i)$ sürüségfüggvény értékével:

$$f(x_i) \approx \frac{g_i}{\Delta x_i} \qquad \text{és} \qquad f(x_i)\,\Delta x_i \approx g_i \tag{54}$$

Ezután számitsuk ki az $f(x)$ függvény görbéje alatti területet $x = a$ és $x = b$ határok között, mikor is $b > a$:

$$T_a^b = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Ha most $x = -\infty$ és $x = \infty$ lesznek a határok:

$$T_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1 \tag{55}$$

Azt látjuk, hogy a görbe alatti egész terület egységnyi.

Számitsuk ki a $T_{-\infty}^{a}$ és $T_{-\infty}^{b}$ területeket

$$T_{-\infty}^{a} = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = F(a) - F(-\infty) = F(a) = P(\xi < a)$$

$$T^{b}_{-\infty} = \int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = F(b) - F(-\infty) = F(b) = \underline{P(\xi < b)}$$

A területet $-\infty$ -től számitva egyenlő lesz annak a valószinüségével,hogy ξ kisebb a felső határnál.

Végül vizsgáljuk a T^{b}_{a} terület valószinüségelméleti jelentését:

$$T^{b}_{a} = \int_{a}^{b} f(x)\, dx = F(b) - F(a) = P(\xi < b) - P(\xi < a) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{b} \frac{f}{n} - \lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{a} \frac{f}{n} = \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{1}^{b} f - \sum_{1}^{a} f \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \lim_{n \to \infty} \sum_{a}^{b} f = \lim_{n \to \infty} \sum_{a}^{b} \frac{f}{n} = \lim_{n \to \infty} g\,(a \leq x < b) =$$

$$= \underline{P(a \leq \xi < b)} \qquad (56)$$

Tehát az f(x) görbe alatti terület "a" és "b" határok között véve egyenlő annak a valószinüségével hogy a ξ értéke az $(a \leq \xi < b)$ intervallumba esik.

2.43 A valószinüségi változó várható értéke

<u>A ξ valószinüségi változó elméleti középértékét, amelyhez a belőle vehető összes minták számtani középértékei, mint határértékhez tartanak, a ξ valószinüségi változó várható értékének nevezzük. Jele: $M(\xi)$.</u>

<u>A diszkrét valószinüségi változó várható értéke, ahol</u> $\xi = x_1, x_2 \dots x_n$

$$\underline{M(\xi)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{1}^{n} x_i f_i}{n} = \lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{M} x_i \frac{f_i}{n} = \underline{\sum_{1}^{n} x_i P(x_i)} \qquad (57)$$

<u>A folytonos valószinüségi változó várható értéke.</u>

ahol $-\infty < \xi < \infty$ az (54) alapján:

$$M(\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_1^n x_i f_i}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n x_i g_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_1^n x_i f(x_i) \Delta x_i, \qquad \text{Ha } n \to \infty \text{ és } \Delta x_i \to 0:$$

$$\underline{M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx} \tag{58}$$

<u>A várható értékre vonatkozó tételek,</u> amelyeket csak diszkrét esetben bizonyitunk.

a/ <u>Egy ξ valószinüségi változó és egy "c" állandó szorzatának várható értéke egyenlő a valószinüségi változó várható értéke szorozva a "c" állandóval:</u>

$$\underline{M(c\xi) = c\,M(\xi)} \tag{59}$$

$$M(c\xi) = \sum_1^n c\, x_i P_i = c \sum_1^n x_i P_i = c\, M(\xi); \qquad P_i = P(x_i)$$

b/ <u>Két valószinüségi változó összegének várható értéke egyenlő a változók várható értékeinek összegével.</u> Legyen két valószinüségi változó

$\xi = x_1, x_2, \dots x_m$ és $\eta = y_1, y_2, \dots, y_n$, ha ξ és η eleme egy $\mathcal{L}$ halmaznak:

$$\underline{M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta)} \tag{60}$$
$$\xi, \eta \in \mathcal{L}.$$

$$M(\xi + \eta) = \lim_{mn\to\infty} \sum_1^{mn} (x_i + y_j) \frac{f_{ij}}{mn} =$$

$$= \lim_{mn\to\infty} \sum_1^m \sum_1^n \left(x_i \frac{f_{ij}}{mn} + y \frac{f_{ij}}{mn} \right) = \lim_{m\to\infty} \sum_1^m x_i \frac{f_i}{m} + \lim_{n\to\infty} \sum_1^n y_j \frac{f_j}{n} =$$

$$= \sum_{1}^{m} x_i P_i + \sum_{1}^{n} y_j P_j = M(\xi) + M(\eta)$$

c/ Két független valószinüségi változó szorzatának várható értéke egyenlő a változók várható értékeinek szorzatával.

$$\xi = x_1, x_2 \dots x_n, \qquad \eta = y_1, y_2 \dots, y_m$$

$$M(\xi\eta) = M(\xi)\,M(\eta) \tag{61}$$

$$M(\xi\eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j P(x_i y_j) = \sum\sum x_i y_i \left[P(x_i)\; P(y_j)\right] =$$

$$= \sum\sum\left[x_i P(x_i)\, y_j P(y_j)\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i) \sum_{j=1}^{m} y_j P(y_j) =$$

$$= M(\xi)\,M(\eta)$$

d/ A $\xi = x_1, x_2, \dots x_n$ $M(\xi)$-től vett eltéréseinek várható értéke zérus:

$$M\left[\xi - M(\xi)\right] = 0 \tag{62}$$

Mivel $M(c) = c$, ahol c = konstans, $M\left[M(\xi)\right] = M(\xi)$ és igy:

$$M\left[\xi - M(\xi)\right] = M(\xi) - M\left[M(\xi)\right] = M(\xi) - M(\xi) = 0$$

2.44 A valószinüségi változó szórása

A ξ valószinüségi változó változékonyságának mértékszámát, amelyet a ξ -ből vehető összes minták szórásainak határértékeként definiálhatunk, a ξ valószinüségi változó szórásának nevezzük, jele $D(\xi)$.

Diszkrét esetben a ξ szórása és szórásnégyzete:

$$D(\xi) = \sqrt{M\left[\xi - M(\xi)\right]^2} \tag{63}$$

A (63)-as négyzetét, amely a $\left[\xi - M(\xi)\right]^2$ eltérésnégyzetek várható értékeként irható fel a ξ szórásnégyzetének mondjuk és $D^2(\xi)$-vel jelöljük,

$$D^2(\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum (x_i - \bar{x})^2 \frac{f_i}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum (x_i - \bar{x})^2 P_i = M\left[\xi - M(\xi)\right]^2 \qquad (64)$$

Ha a (64)-ben a négyzetreemelést elvégezzük azt kapjuk, hogy <u>a ξ szórásnégyzete egyenlő négyzete várható értékének és várható értéke négyzetének különbségével:</u>

$$D^2(\xi) = M\left[\xi - M(\xi)\right]^2 = M\left[\xi^2 - 2\xi M(\xi) + M^2(\xi)\right] =$$

$$= M(\xi)^2 - 2\, M(\xi)\, M(\xi) + M^2(\xi) =$$

$$= M(\xi^2) - M^2(\xi) \qquad (65)$$

<u>Folytonos esetben a ξ szórásnégyzete: az (58) és a (64) alapján felirva:</u>

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum x_i^2 f_i}{n} - M^2(\xi) =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}} \sum x_i^2 g_i - M^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx\right]^2 \qquad (66)$$

<u>A valószinüségi változó szórására vonatkozó tételek.</u> Amelyeket csak diszkrét esetre bizonyitunk,

a/ Ha "a" és "b" valós számok:

$$D^2(a\xi + b) = a^2 D^2(\xi) \qquad (67)$$

<u>Bizonyitás:</u>

$$D^2(a\xi + b) = M\left[a\xi + b - M(a \quad + b)\right]^2 =$$

$$= M\left[a\xi + b - aM(\xi) - b\right]^2 = M\left[a\xi - aM(\xi)\right]^2 =$$

$$= a^2 M\left[\xi - M(\xi)\right]^2 = a^2 D^2(\xi)$$

b/ <u>Ha $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ független valószinüségi változók, akkor az összegük szórásnégyzete a szórásnégyzeteik összegével egyenlő:</u>

$$\underline{D^2(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_n)} = M\left[(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) - M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)\right]^2 =$$

$$= M\left[\xi_1 - M(\xi_1) + \xi_2 - M(\xi_2) + \dots + \xi_n - M(\xi_n)\right]^2 =$$

$$= M\left\{\sum_{i=1}^{m}\left[\xi_i - M(\xi_i)\right]^2 + \underbrace{2\sum_{i=1}^{n}\left[\xi_i - M(\xi_i)\right]\left[\xi_k - M(\xi_k)\right]}_{0}\right\} =$$

$$= \sum_{1}^{m} M\left[\xi_i - M(\xi_i)\right]^2 = \sum_{1}^{m} D^2(\xi_i) = \underline{D^2(\xi_1) + D^2(\xi_2) + \dots + D^2(\xi_n)} \qquad (68)$$

A (68)-as tétel olyan $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ valószinüségi változókra is fennáll, amelyek nem függetlenek, de szórásuk ugyanaz, jelöljük ezt σ-val.

$$D^2(\xi_1 + \xi_2 + \dots \xi_n) = n\sigma^2$$

Négyzetgyökvonást elvégezve:

$$\underline{D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \sqrt{n}\,\sigma} \qquad (69)$$

Az "n" növekedtével az összeg szórása $\sqrt{n}$ arányban növekszik.

2.45 A valószinüségi változó valószinüségeloszlása.

Legyen $\xi = x_1, x_2, \ldots x_n$ diszkrét valószinüségi változó, pl. a forintos feldobásnál a fej gyakorisága, akkor annak a valószinüsége, hogy értékei közül egy bekövetkezik:

$$\sum_{o}^{n} P = P(o) + P(1) + \ldots + P(n) = 1 \qquad (70)$$

Vagy legyen ξ folytonos valószinüségi változó, akkor annak a valószinüsége, hogy értéke a $(-\infty < x < \infty)$ intervallumba esik:

$$P(-\infty < x < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \qquad (71)$$

Azt, hogy az 1 teljes valószinüség eloszlik az $x_1, x_2, \ldots x_n$ értékek között illetőleg a $(-\infty < x < \infty)$ intervallum felett, a valószinüségi változó valószinüségeloszlásának röviden eloszlásának mondjuk.

Az eloszlás a valószinüségi változóra nézve meghatározó jellegü. Egy valószinüségi változó eloszlását eloszlásfüggvényével, de közvetve sürüségfüggvényével illetve valószinüségi függvényével adhatjuk meg.

2.5 Nevezetes eloszlások

A gyakorlatban szereplő valószinüségi változók eloszlása általában más és más, ezek zöme azonban néhány tipusba sorolható. Az egyes tipusokon belül az eloszlásfüggvény ugyanaz, csupán paraméterekben térnek el egymástól. A leggyakrabban előforduló tipusok eloszlásfüggvényét, sürüség- illetve valószinüségi függvényét levezették, és értékeiket táblázatba foglalták. Az emlitett eloszlásokat nevezetes eloszlásoknak mondjuk. Számunkra a legfontosabb eloszlások, a binomiális - és a normális eloszlás.

2.51. A binomiális eloszlás

Induljunk ki a Bernoulli képlet levezetésénél alkalmazott kisérletből, dobjunk fel "n" forintost és válasszuk valószinüségi változónak a fejek gyakoriságát $k = \xi = 0, 1, \ldots n$.

A valószinüségi változó értékeit $P(k) = \binom{n}{k} p^n q^{n-k}$ valószinüséggel veszi fel. Vagyis ennek a diszkrét valószinüségi változónak a valószinüségi függvénye a Bernoulli-képlet. Ha most azt kérdezzük, hogy mekkora valószinüséggel lesz a fejek száma 0 vagy 1 vagy 2 ... vagy n, a (49) es és (71) alapján:

$$\sum_{o}^{n} P = q^{n} + \binom{n}{1} p\, q^{n-1} + \binom{n}{2} p^{2} q^{n-2} + \ldots + p^{n} =$$

$$= (q + p)^{n} = 1 \qquad (72)$$

Mivel a fenti ξ valószinüségi változó valószinüségeloszlását a Newton-féle binomiális képlettel irtuk fel, ezt a változót binomiális eloszlásunak mondjuk. Binomiális eloszlást követ minden olyan diszkrét valószinüségi változó, amelynek valószinüségi függvénye a Bernoulli képlet. A binomiális eloszlású ξ valószinüségi változó paraméterei az "n" és a "p". A ξ várható értéke:

$$M(\xi) = \sum_{o} x_i P(x_i) = \sum_{o}^{n} k \binom{n}{k} p^{k} q^{n-k}$$

A "k"-val a szorzást elvégezve, az np konstans szorzatot kiemelve és az $n-k = \left[(n-1) - (k-1) \right]$ átalakitást elvégezve:

$$M(\xi) = np \sum_{o}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}\, q^{\left[(n-1) - (k-1) \right]} =$$

$$= np \sum_{o}^{n-1} (q + p)^{n-1}$$

de $\sum_{o}^{n-1} (q + p)^{n-1} = 1$ tehát:

$$\boxed{M(\xi) = np} \qquad (73)$$

A binomiális eloszlású ξ valószinüségi változó szórása a (65) alapján:

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \sum_0^n x_i^2 P(x_i) - n^2 p^2 =$$

$$= \sum_0^n k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} - n^2 p^2 = \sum_0^n k(k-1+1) \binom{n}{k} p^k q^{n-k} - n^2 p^2 =$$

$$= \sum_0^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \sum_0^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} - n^2 p^2 =$$

$$= n(n-1)\, p^2 \sum_0^n \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} q^{[(n-2)-(k-2)]} + np - n^2 p^2 =$$

$$= n(n-1)\, p^2 \underbrace{(p+q)^{n-2}}_{1} + np - n^2 p^2 =$$

$$= n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2 = np(1-p) = npq$$

$$\boxed{D(\xi) = \sqrt{npq}} \qquad (74)$$

Például: Dobjunk fel 6 forintost és vizsgáljuk a fej gyakoriságát, mint valószinüségi változót. A fej valószinüsége $p = \frac{1}{2}$, ellentétes valószinüsége $q = \frac{1}{2}$, $n = 6$, $\xi = k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. A változó binomiális eloszlást követ.

$$\sum_0^6 P(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 +$$

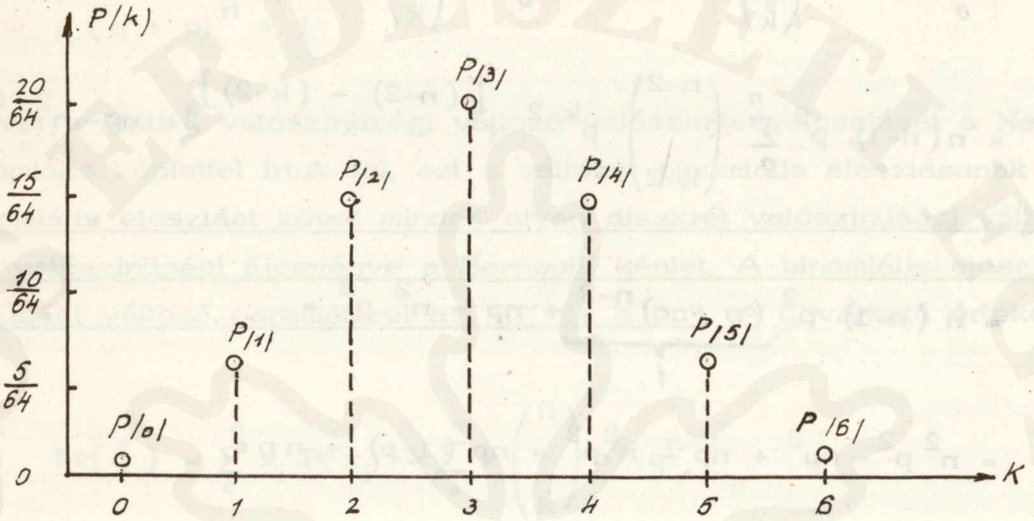
$$+ \binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^6 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 15\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 20\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 15\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 =$$

$$= 64\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{64}{64} = 1$$

$$M(\xi) = np = 6\,\frac{1}{2} = \underline{3}\,; \qquad D(\xi) = \sqrt{npq} = \sqrt{6\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \underline{\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

Az eloszlást ábrázolva:



12. sz. ábra.
Binomiális valószinüségeloszlás $p = \frac{1}{2}$ és $n = 6$ mellett

2,52 Néhány diszkrét eloszlás

a/ Hipergeometrikus eloszlásu az a diszkrét valószinüségi változó, amely a $\xi = k = 0, 1, 2 \dots n$ értékeit

$$P(k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$ valószinüséggel veszi fel, (2.33 pont).

A hipergeometrikus eloszlás paraméterei M, N, n.

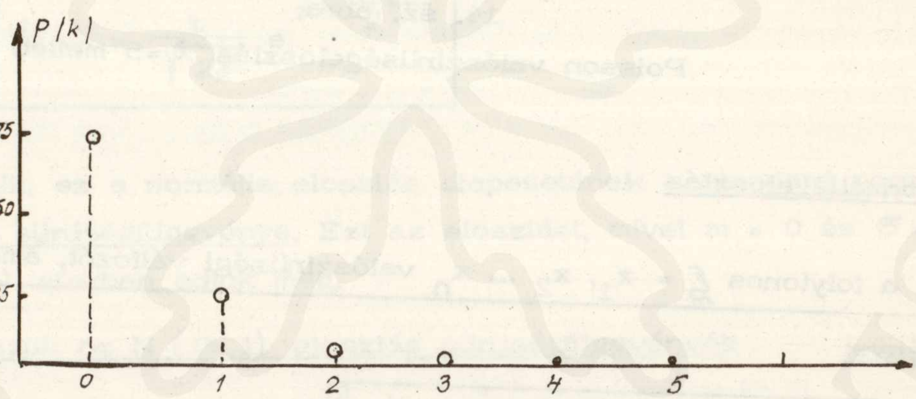
$$M(\xi) = n\,\frac{M}{N}\,; \qquad D^2(\xi) = \left[n\,\frac{M}{N} - n\left(\frac{M}{N}\right)^2\right]\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

Például: Válasszuk a lottó találatokat $\xi = k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ valószinüségi változónak, ennek valószinüségeloszlása hipergeometrikus, tehát valószinüségi függvénye az (50):

$$\sum_{0}^{5} P(k) = P(p) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1$$

$$\sum_{0}^{5} P(k) = \frac{\binom{5}{0}\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{85}{4}}{\binom{90}{5}} + \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} + \frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} + \frac{\binom{5}{4}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} +$$

$$+ \frac{1}{\binom{90}{5}} = 1$$



13. sz. ábra.

Hipergeometrikus valószinüségeloszlás N = 90, M = 5, n = 5 mellett

b/ Poison eloszlásu az a diszkrét valószinüségi változó, amely a

$\xi = k = 0,\ 1,\ \dots,\ n$ értékét

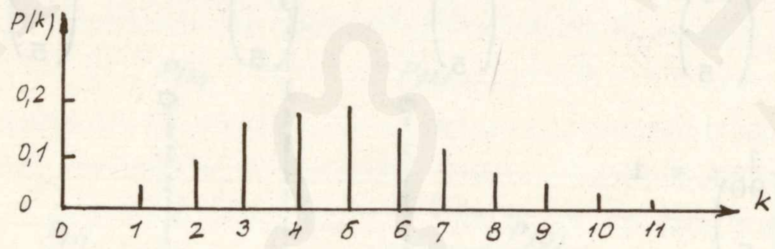
$$P(k) = \frac{\lambda^{k}}{k!}\, e^{-\lambda} \qquad (75)$$

valószinüséggel veszi fel. Az eloszlás paramétere λ.

$$M(\xi) = \lambda \quad ; \quad D^2(\xi) = \lambda .$$

Például: Egy utkereszteződésnél átlagosan perecenként $\lambda = 5$ gépkocsi halad át, válasszuk valószinüségi változónak a perecenként áthaladó gépkocsik gyakoriságát és vizsgáljuk, hogy mekkora valószinüséggel lesz ez $\xi = k = 0, 1, 2, ..$ n

$$\sum_{o}^{\infty} P(k) = P(o) + P(1) + ... + P(n) = 1$$



14. sz. ábra.
Poisson valószinüségeloszlás $\lambda = 5$ mellett

2,53 A normális eloszlás

Azt a folytonos $\xi = x_1, x_2 ... x_n$ valószinüségi változót, amelynek sürüségfüggvénye:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}} \qquad (76)$$

várható értéke: $M(\xi) = m$ és

szórása: $D(\xi) = \sigma$

"m" és σ paraméterü normális eloszlásu valószinüségi változónak nevezzük,röviden $N(m; \sigma)$ alakban adjuk meg. Eloszlásfüggvénye (53) alapján:

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx} \qquad (77)$$

A normális eloszlás a gyakorlatban a legtöbbet szereplő eloszlás. Ugyanis a központi határeloszlás-tétel szerint nagyszámu, független valószinüségi változó összege bizonyos feltételek mellett normális eloszlásba megy át, ha az egyes valószinüségi változók az összeghez képest elég kicsik. Igy általában normális eloszlásuak az állati és növényi egyedek fejlődéssel kapcsolatos adatai, a termékek méretei, szilárdsági adatai, a mérési hibák stb. Sőt normális eloszlásba mennek át a mintaelemek összegei, számtani közepei, szórásai, akkor is ha egyébként az elemek eloszlása nem normális, de a megfigyelések száma elég nagy.

Egyszerüség kedvéért vezessük be a

$$\boxed{\frac{x-m}{\sigma} = u \qquad \text{és} \qquad \sigma = 1} \tag{78}$$

transzformációt, a (76)-ból

$$\boxed{\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}} \tag{79}$$

alakot nyerjük, ez a normális eloszlás alapesetének a standard normális eloszlásnak a sürüségfüggvénye. Ezt az eloszlást, mivel m = 0 és σ = 1 röviden N (0; 1) alakban adjuk meg.

Elemezzük az N (0; 1) eloszlás sürüségfüggvényét:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}$$

$$\varphi'(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}} \left(-\frac{1}{2} 2u\right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot u$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, u = 0; \qquad \text{az egyenletnek}$$

u = 0 mellett lesz véges értéke:

$$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}3989 \approx \underline{0{,}4}$$

$$\varphi''(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi 2}}\left[e^{-\frac{u^2}{2}}u^2 - e^{-\frac{u^2}{2}}\right] = \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}(u^2 - 1)$$

$$\varphi''(0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ldots \underline{P_{max}(0;\ 0{,}4)}$$

$$\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}(u^2 - 1) = 0 \ldots u^2 - 1 = 0; \quad \underline{u = \pm 1}$$

$$\varphi(\pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} = 0{,}2420 \approx \underline{0{,}24}$$

Az inflexiós pontok:

$$\underline{P_1(1;\ 0{,}24)} \quad \text{és} \quad \underline{P_2(-1;\ 0{,}24)}$$

Az inflexiós pontoknál látható, hogy a függvény páros:

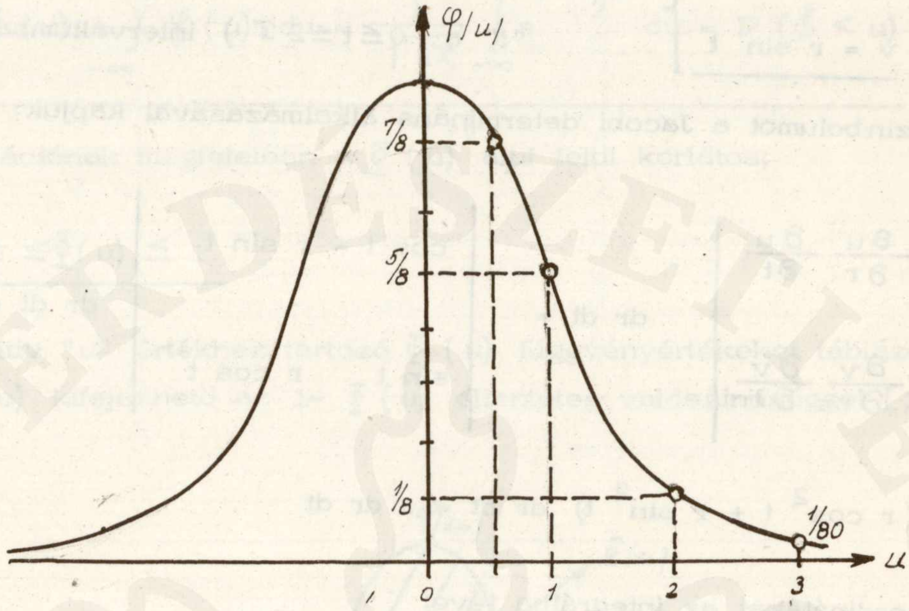
$$\underline{\varphi(-u) = \varphi(u)} \tag{80}$$

A számitások megkönnyitése végett a $\varphi(u)$ függvény értékeit táblázatba foglalták. Néhány értéket felirunk (X. táblázat):

X. táblázat

u	$\varphi(u) = \varphi(-u)$	$y \approx \varphi(u)$
0	0,3989	0,4
$\pm$ 0,5	0,3521	7/ 8. 0,4
$\pm$ 1,0	0,2420	5/ 8. 0,4
$\pm$ 2,0	0,0540	1/ 8. 0,4
$\pm$ 3,0	0,0044	1/ 80.0,4

A "P" maximum, a P_1 és P_2 inflexiós pontok, valamint a X. táblázat adatai alapján az N(0;1) eloszlású valószinüségi változó sürüségfüggvényét megrajzoljuk (15. ábra).



15. sz. ábra.

Az N/ 0 ; 1/ eloszlású változó sürüségfüggvényének görbéje

A sürüséggörbe alatti terület egységnyi, mint azt már az előzőkben emlitettük (55):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \; du = 1 \qquad (81)$$

A (81)-es bizonyitása:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \; du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \; du = ?$$

Ki kell számitanunk tehát az $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ integrált, könnyebbség kedvéért az integrál négyzetét kettős integrál alakjában irjuk fel:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2 + v^2}{2}} du \, dv,$$

u, v helyett r, t változókat vezetjük be:

$$\left.\begin{array}{l} u = r\cos t \\ v = r\sin t \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{ahol "r" a } (0 \leq r < \infty), \text{ és} \\ \text{"t" a } (0 \leq t \leq 2\pi) \text{ intervallumban változik.} \end{array}$$

d u d v szinbolumot a Jacobi determináns alkalmazásával kapjuk:

$$du\,dv = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix} dr\,dt = \begin{vmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{vmatrix} dr\,dt =$$

$$= (r\cos^2 t + r\sin^2 t)\, dr\,dt = r\,dr\,dt$$

A polárkoordinátákat az integrálba téve:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\, du\,dv = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}}\, r\,dr\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\, r\,dr\right) dt = \int_0^{2\pi}\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\infty} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, dt = t\Big]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du\right)^2 = 2\pi \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \sqrt{2\pi}\,;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = \underline{\underline{1}}$$

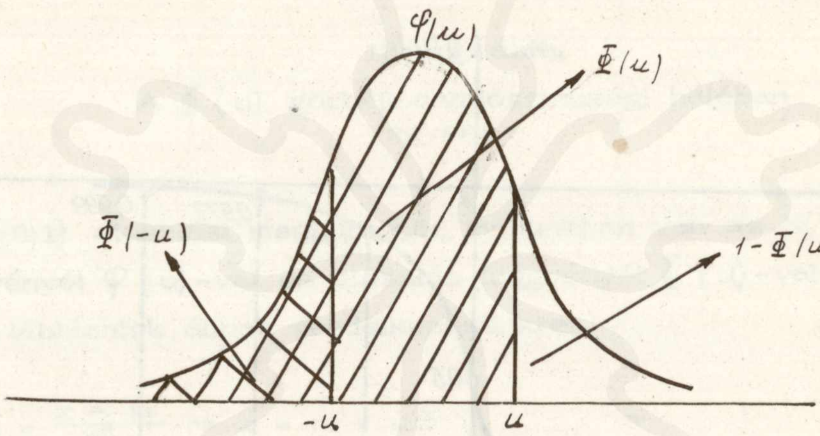
A $\varphi(u)$ sürüséggörbe alatti terület $(-\infty < \xi < u)$ intervallumban véve, az N(0;1) eloszlásu valószinüségi változó <u>eloszlásfüggvényét</u> jelenti, amely megfelel a $P(\xi < u)$ valószinüségnek, jele $\Phi(u)$:

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \varphi(u)\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = P(\xi < u) \qquad (82)$$

Az (52) relációnak megfelelően a $\Phi(u)$ alul felül korlátos:

$$0 \leq \Phi(u) \leq 1 \qquad (83)$$

A pozitiv "u" értékhez tartozó $\Phi(u)$ függvényértékeket táblázatba foglalták. A $\Phi(-u)$ kifejezhető az $1-\Phi(u)$ ellentétes valószinüséggel (16. sz.ábra):



16. sz. ábra.
A $\Phi(-u)$ terület egyenlő az $1-\Phi(u)$ területtel

$$P[\xi < (-u)] = \Phi(-u) = 1 - P(\xi < u) = 1 - \Phi(u) \qquad (84)$$

A $P[-u \leq \xi < u]$ valószinüséget a $P(\xi < u)$ és $P(\xi < -u)$ különbségeként irhatjuk fel:

$$P[-u \leq \xi < u] = P(\xi < u) - P(\xi < -u) = \Phi(u) - \Phi(-u)$$

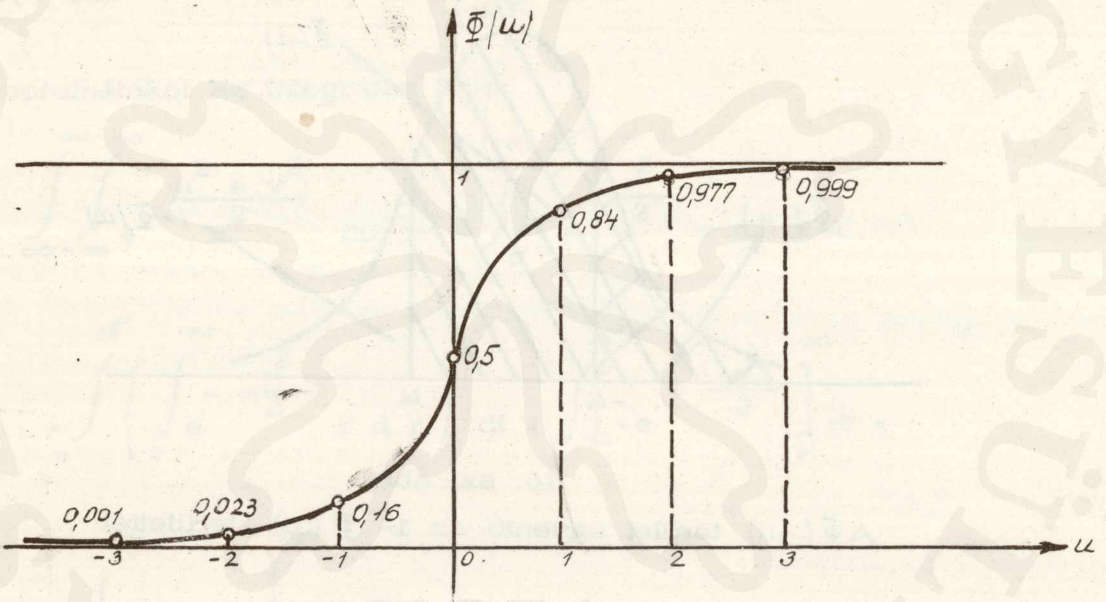
$$P[-u \leq \xi < u] = \Phi(u) - [1 - \Phi(u)] = 2\Phi(u) - 1 \qquad (85)$$

Néhány fontos $\Phi(u)$ értéket a XI. sz. táblázatban közlünk:

XI. táblázat.

u	$\Phi(u)$	$\Phi(-u) = 1-\Phi(u)$
0	0,5	-
± 1	0,84	0,16
± 2	0,977	0,023
± 3	0,9986	0,0014

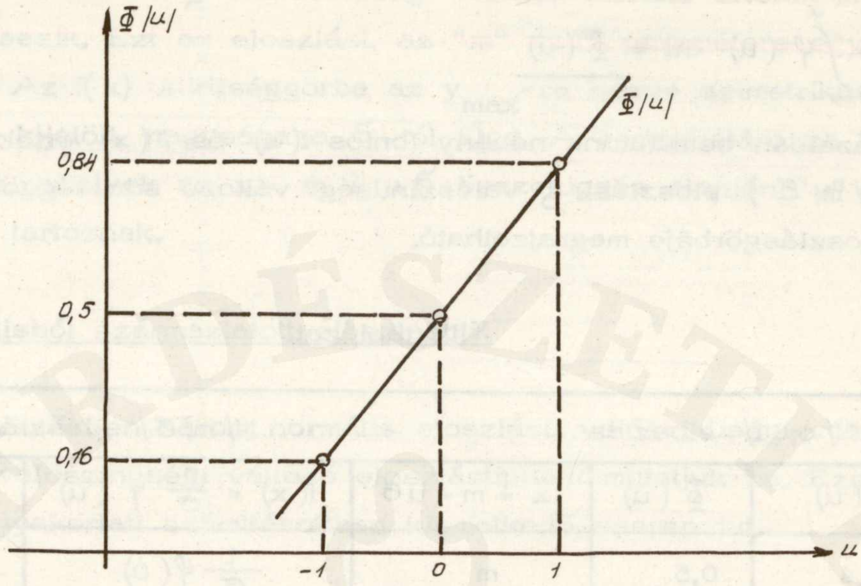
A XI-es táblázat alapján az N(0;1) eloszlásu ξ valószinüségváltozó $\Phi(u)$ eloszlásfüggvényét megrajzolhatjuk (17. sz. ábra).



17. sz. ábra.

Az N(0;1) eloszlásu változó eloszlásfüggvényének görbéje

Ha a $\Phi(u)$ értékeket egy tengelyre felhordjuk, ugynevezett valószinüségi skálát kapunk. Ha viszont egy derékszögü koordinátarendszer vizszintes tengelyére egyenletes beosztásu skálát, a függőleges tengelyre pedig valószinüségi skálát mérünk, valószinüségi hálót nyerünk. A $\Phi(u)$ eloszlásfüggvény görbéje a valószinüségi hálóban egyenes lesz (18. sz. ábra).



18. sz. ábra.

A Φ (u) görbéje a valószinüségi hálóban egyenes

Miután az N(0;1) eloszlást megismertük, módunkban van az N(m; σ) eloszlás sürüségfüggvényét φ (u) -val és eloszlás függvényét Φ (u) -val kifejezni, ezekhez ugyanis táblázatok állnak rendelkezésünkre:

$$u = \frac{x - m}{\sigma} \rightarrow x = m + u\sigma$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m + u\sigma - m)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} = \underline{\frac{1}{\sigma}\varphi(u)} \qquad (86)$$

$$x = m + u\sigma \rightarrow dx = \sigma\, du \;; \quad m = o, \quad \sigma = 1 :$$

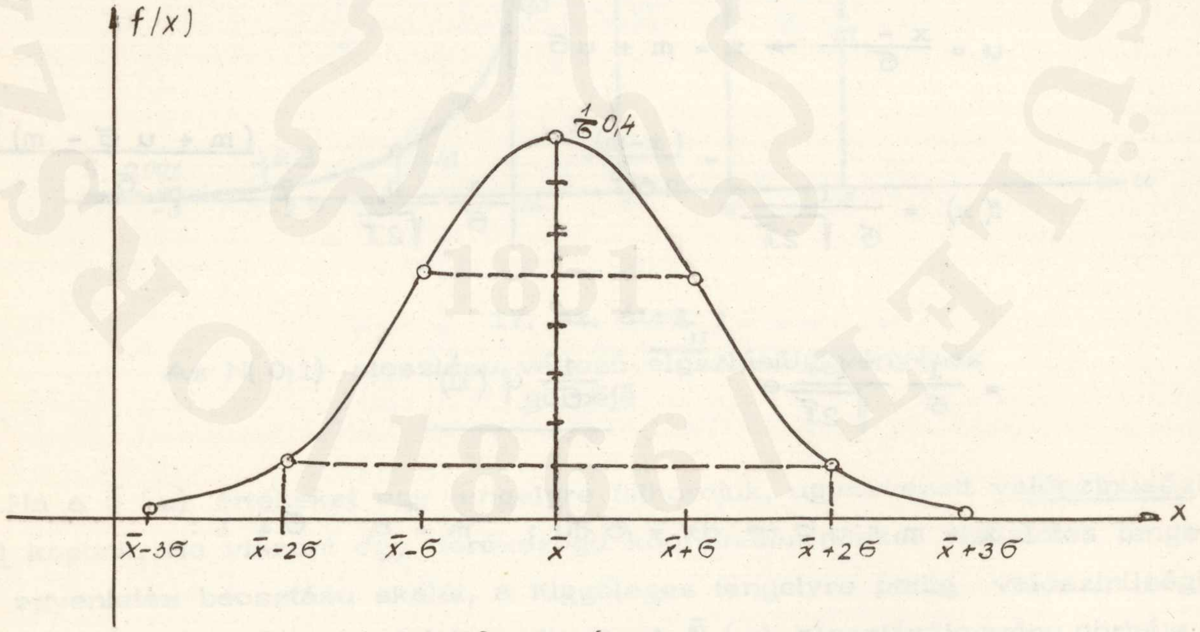
$$\underline{F(x)} = \int_{-\infty}^{x} f(x)\; dx = \int_{-\infty}^{m+u\sigma} \frac{1}{\sigma}\varphi(u)\; \sigma\, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{u} \varphi(u)\, du = \underline{\Phi(u)} \qquad (87)$$

A XIII. táblázatban bemutatunk néhány fontos f(x) és F(x) értéket, amelyek alapján az N/ m; σ) eloszlásu ξ valószinüségi változó süriiséggörbéje (19. sz. ábra) és eloszlásgörbéje megrajzolható.

XIII. táblázat.

	N/ o; 1/ eloszlás		N/ m; σ/ eloszlás		
u	$\varphi(u)$	$\Phi(u)$	$x = m + u\sigma$	$f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi(u)$	$F(x) = \Phi(u)$
0	0,4	0,5	m	$\frac{1}{\sigma}\varphi(0)$	0,5
1	5/ 8,0,4	0,84	$m + \sigma$	$\frac{1}{\sigma}\varphi(1)$	0,84
2	1/ 8.0,4	0,977	$m + 2\sigma$	$\frac{1}{\sigma}\varphi(2)$	0,977
3	1/ 80.0,4	0,999	$m + 3\sigma$	$\frac{1}{\sigma}\varphi(3)$	0,999



19. sz. ábra.

Az N/ m ; σ / eloszlás süriiséggörbéjének szerkesztése

Az $N/m\,;\,\sigma/$ eloszlásu ξ valószinüségi változó várható értéke, módusza és mediánja egybeesik. Ezt az eloszlást, az "m" és σ paramétere egyértelmüen meghatározza. Az f(x) sürüséggörbe az y_{max}-ra nézve szimetrikus. Az y_{max} helyét az "m" kijelöli, nagysága a σ-tól függ. A σ meghatározza "x"-nek azon értékeit is, amelyek az $x = m + u\sigma$ összefüggés alapján "u" egész számu értékeihez tartoznak.

2.54 A normálisból származtatott eloszlások

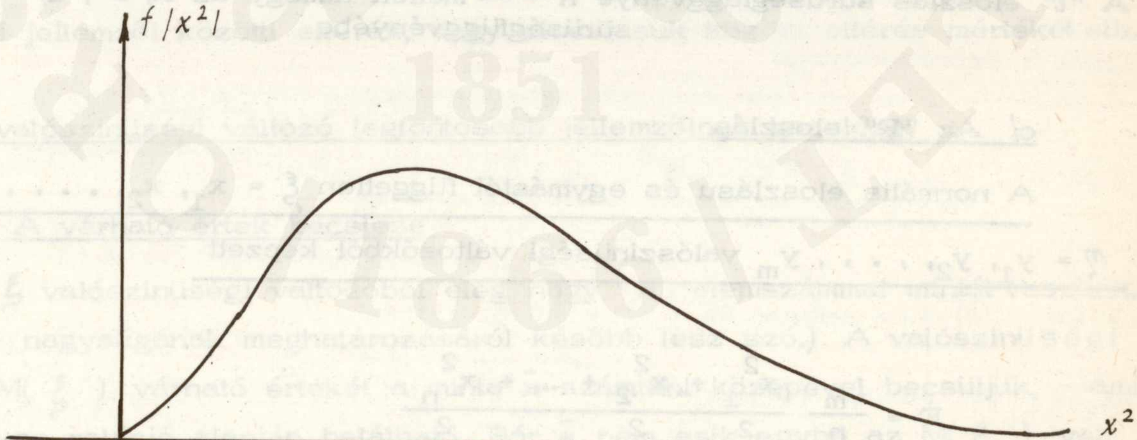
A következőkben három normális eloszlásu valószinüségi változókból képzett folytonos valószinüségi változó eloszlástipusát mutatjuk be. Ezen eloszlástipusoknak a gyakorlati számitásokban kiemelkedő szerep jut.

a/ A "X^2" (khi-négyzet) eloszlás

Az $N/O\,;\,1/$ eloszlásu $\xi = u_1, u_2, \ldots, u_n$ valószinüségi változó négyzetösszegének

$$X^2 = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2$$

mint valószinüségi változónak a valószinüségeloszlását "n" szabadságfoku "X^2" (khi-négyzet) eloszlásunak nevezzük. A "X^2" eloszlás sürüségfüggvénye az "n"-től függően más és más, növekvő "n" érték esetén közeledik a normális eloszlás sürüségfüggvényéhez, amelybe $n \to \infty$ mellett át is megy.



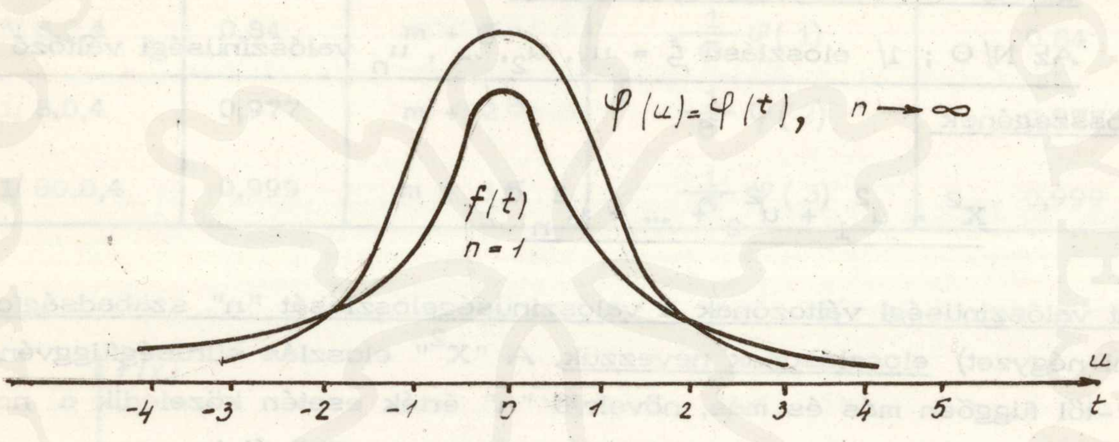
20. sz. ábra.

Az "n" szabadságfoku X^2 eloszlás sürüségfüggvénye b/ A "t" (Student) eloszlás

Az N/ O ; 1/ eloszlásu $\xi = u_1, u_2, \ldots u_n$ és tőle független N/ O ; $\sqrt{n}$/ eloszlásu $\eta = x_1, x_2, \ldots x_n$ valószinüségi változókból képett

$$t = \frac{\sqrt{n}\,\eta}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots u_n^2}}$$

valószinüségi változó valószinüségeloszlását "n" szabadságfoku "t" eloszlásnak mondjuk. Sürüségfüggvénye az "n" növekedésével közeledik az N/ O ; 1/ eloszlásához, amelybe $n \to \infty$ mellett át is megy.



21. sz. ábra.

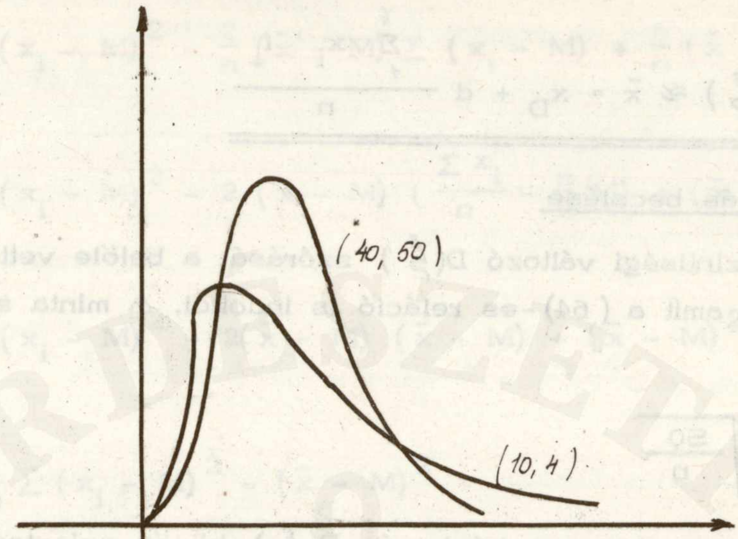
A "t" eloszlás sürüségfüggvénye $n \to \infty$ mellett átmegy az N/ O ; 1/ eloszlás sürüségfüggvényébe

c/ Az "F" eloszlás

A normális eloszlásu és egymástól független $\xi = x_1, x_2, \ldots, x_n$ és $\eta = y_1, y_2, \ldots, y_m$ valószinüségi változókból képzett

$$F = \frac{m}{n} \; \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_m^2}$$

valószinüségi változó valószinüségeloszlását m, n szabadságfoku "F" eloszlásnak nevezték el.



22. sz. ábra.
Az "F" eloszlás sürüséggörbéje

Az "F" eloszlás $n \to \infty$ mellett a "X^2" eloszláshoz, m = 1 mellett viszont a "t" eloszláshoz tart.

3. A megfigyelések kiértékelése

A minta jellemzőinek ismeretében most már becsülhetjük az alapsokaság (más szóval valószinüségi változó) paramétereit, eloszlását és a megfigyelés hibáját. Módunkban van ellenőrizni a minta és az alapsokaság, vagy két minta megfelelő jellemzői közötti eltérés, vagy eloszlásuk közötti eltérés mértékét stb.

3.11 A valószinüségi változó legfontosabb jellemzőinek becslése

a/ A várható érték becslése

A ξ valószinüségi változóból elég nagy "n" elemszámmal mintát veszünk. (Az "n" nagyságának meghatározásáról később lesz szó.) A valószinüségi változó M(ξ) várható értékét a minta $\bar{x}$ számtani közepével becsüljük, ami az (57) -es reláció alapján belátható. Bár $\bar{x}$ nem esik egybe az M(ξ) -val, hanem körülötte ingadozik, de az eltérés nem szisztematikus, hanem véletlenszerü. Az ilyen beclést torzitatlan becslésnek nevezzük. A (17) -es képlet alapján:

$$M(\xi) \approx \bar{x} = x_D + d \frac{\sum_1^k x_i{}' f_i}{n} \qquad (88)$$

b/ A szórás becslése

A ξ valószinüségi változó $D(\xi)$ szórását a belőle vett minta "s" szórásával becsüljük, amit a (64)-es reláció is indokol. A minta szórását eddig a (20)-as

$$s = \sqrt{\frac{SQ}{n}}$$

képlettel számitottuk, de ezen képlet és $D(\xi)$ között szisztematikus eltérés mutatkozik. Ennek szemléltetésére válasszuk azt a szélső esetet, amikor egy elemü mintából számitjuk a szórást a (8)-as képlettel:

$$x_i = x_1, \quad \bar{x} = x_1, \quad n = 1 ;$$

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - x_1)^2}{1}} = 0$$

Márpedig a $D(\xi) \neq 0$ tehát az alkalmazott képlettel végzett becslés torzitott.

Elemezzük ezt a képletet, amelynek legegyszerübb alakja a (8)-as képlet:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

ebből a szórásnégyzet:

$$s^2 = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2$$

az $(x_i - \bar{x})$-hez adjunk $M(\xi) - M(\xi)$-t és

az $M(\xi)$-t jelöljük röviden M-el:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x} + M - M)^2 = \frac{1}{n} \sum \left[(x_i - M) - (\bar{x} - M) \right]^2 =$$

$$= \frac{1}{n} \sum \left[(x_i - M)^2 - 2(x_i - M)(\bar{x} - M)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum(x_i - M)^2 - \frac{2}{n}(\bar{x} - M)\sum(x_i - M) + \frac{n}{n}(\bar{x} - M)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum(x_i - M)^2 - 2(\bar{x} - M)\left(\frac{\sum x_i}{n} - \frac{n}{n}M\right) + (\bar{x} - M)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum(x_i - M)^2 - 2(\bar{x} - M)(\bar{x} - M) + (\bar{x} - M)^2, \qquad \text{tehát}$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - M)^2 - (\bar{x} - M)^2$$

Vegyük mindkét oldal várható értékét

$$M(s^2) = M\left[\frac{1}{n}\sum(x_i - M)^2\right] - M(\bar{x} - M)^2$$

de $M(s^2) = D^2(x)$, $M\left[\frac{1}{n}\sum(x_i - M)^2\right] = D^2(\xi)$ és

$$M(\bar{x} - M)^2 = D^2(\bar{x}) \qquad \text{tehát:}$$

$$D^2(x) = D^2(\xi) - D^2(\bar{x}) \qquad (89)$$

(89)-ben látható, hogy $D^2(x) \neq D^2(\xi)$, az eltérés $D^2(\bar{x})$.

A $D^2(\bar{x})$ a <u>számtani közép szórásnégyzete,</u> ezt más alakban kell felírnunk. (69)-es reláció szerint:

$$D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \sigma\sqrt{n}$$

$$D(\bar{\xi}) = D\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \frac{\sigma\sqrt{n}}{n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

vegyünk ξ helyett $\bar{x}$-et és legyen $\sigma = D(\xi)$, akkor:

$$D(\bar{x}) = \frac{D(\xi)}{\sqrt{n}} \quad \text{vagy} \quad D^2(\bar{x}) = \frac{D^2(\xi)}{n} \qquad (90)$$

A (90)-et a (89)-be behelyettesitve:

$$D^2(x) = D^2(\xi) - \frac{D^2(\xi)}{n} = D^2(\xi)\,\frac{n-1}{n}$$

$$D^2(\xi) = \frac{n}{n-1}\,D^2(x) \approx \frac{n}{n-1}\,\frac{SQ}{n} = \frac{SQ}{n-1} = s^{*2}$$

Az $s^* = \sqrt{\dfrac{SQ}{n-1}}$ képlettel számitott szórás már mentes a szisztematikus eltéréstől, torzitástól és igy ezen képlettel számitott szórás alkalmas a valószinüségi változó szórásának becslésére. Az irodalom megkülönböztetés végett s^*-al jelöli. Mi a továbbiakban csak ezt használjuk, megkülönböztetnünk ezért nem szükséges.

$$D(\xi) \approx s = \sqrt{\frac{SQ}{n-1}} = d\sqrt{\frac{\sum_1^k x_i'^2 f_i - \frac{1}{n}(x_i' \cdot f_i)^2}{n-1}} \qquad (91)$$

A (91)-es képletben a (206)-ostól eltérően az SQ-t nem az elemek számával, hanem a szabadon megválasztható elemek számával osztjuk. Az $SQ = \sum (x_i - \bar{x})^2$, tehát az SQ-ban $\bar{x}$ már számitott érték, ha ezt az elemek helyébe tesszük, a mintának csak n-1 elemét választhatjuk meg szabadon, az utolsó: $x_n = n\bar{x} - \sum_1^{n-1} x_i$ már meghatározott. A szabadon megválasztható elemek számát a német Freiheitsgrad szó forditásaként <u>szabadságfoknak</u> nevezzük és FG-vel jelöljük. Itt

$$FG = n - 1$$

Általában a szabadságfokot megkapjuk, ha a képletben szereplő becsült paraméterek számát az elemek számából kivonjuk.

<u>c/ A számtani közép szórásának becslése</u>

Ha a ξ valószinüségi változóból "n" mintát vesszük, azok számtani közepei eltérnek az $M(\xi)$ változó értékétől, azaz van szórásuk. A számtani köszórását már felirtuk, (90)-es reláció:

$D(\bar{x}) = \frac{D(\xi)}{\sqrt{n}}$ itt a $D(\xi)$-et általában nem ismerjük, hanem "s"-el becsüljük. A $D(\bar{x}) \approx \frac{s}{\sqrt{n}}$ becslési röviden $s_{\bar{x}}$-el jelöljük:

$$\boxed{D(\bar{x}) \approx s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}} \tag{92}$$

Az $s_{\bar{x}}$ a számtani közép tapasztalati szórása, alkalmas arra, hogy a becslés hibájának tekintsük. Gyakran középhibának vagy standard hibának is nevezik.

3.12 A normális eloszlás paramétereinek, sürüség és eloszlás függvényének becslése

Az N/ m; σ) eloszlásu valószinüségi változó paramétereit, sürüség és eloszlás függvényét egy elég nagy elemszámu mintából számitott megfelelő jellemzővel becsüljük.

a/ A várható érték becslése a (88) alapján:

$$m \approx \bar{x} = x_D + d\,\frac{\sum_1^k x'_i f_i}{n} \tag{93}$$

b/ A szórás becslése a (91) értelmében:

$$\sigma \approx s = \sqrt{\frac{SQ}{n-1}} = d\sqrt{\frac{\sum_1^k x'^2_1 f_i - \frac{1}{n}\left(\sum_1^k x'_i f_i\right)^2}{n-1}} \tag{94}$$

c/ A számtani közép hibájának becslése a (92) alapján:

$$\sigma_{\bar{x}} \approx s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{95}$$

d/ A sürüségfüggvény becslése (54) szerint:

$$f(x_i) \approx \frac{g_i}{d} \qquad (96)$$

Ebből és (86)-ból összefüggést irhatunk fel a relativ gyakoriság és a sürüségfüggvény között:

$$g_i \approx d\, f(x_i) = \frac{d}{s} \varphi(u_i) \qquad (97)$$

Valamint a gyakoriság és a gyakoriság-sürüségfüggvény között:

$g_i = \frac{f_i}{n} \approx d\, f(x_i)$ és ebből f_i-t kifejezve:

$$f_i \approx dn\, f(x_i) = \frac{dn}{s} \varphi(u_i) \qquad (98)$$

e/ Az eloszlás függvény becslése (51) és (87) képleteknek megfelelően történik:

$$F(x_i) = \Phi(u_i) \approx \sum_{1}^{i} g_i \qquad (99)$$

A táblázatban a (97)-ben szereplő $\frac{d}{s}\varphi(u_i)$ mennyiséget várható relativ gyakoriságnak, a (98) képletben lévő $\frac{dn}{s}\varphi(u_i)$ mennyiséget pedig várható gyakoriságnak fogjuk nevezni.

Példa a normális eloszlás jellemzőinek becslésére.

3. Becsüljük a 2. példában szereplő mintából a valószinüségi változó jellemzőit és szerkesszük meg a sürüségfüggvényét. A következő adatok ismertek: $\bar{x}$ = 33,7; n = 109; $S\varrho$ = 3931,81

a/ $m \approx \bar{x}$ = 33,7 cm

b/ $\sigma \approx s = \sqrt{\frac{S\varrho}{u-1}} = \sqrt{\frac{3931{,}81}{108}} = \sqrt{36{,}406} = 6{,}03$ cm

c/ $\sigma_{\bar{x}} \approx s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{6{,}03}{\sqrt{109}} = 0{,}58$ cm

d/ A várható gyakoriság és várható relativ gyakoriság becslését a XIII. táblázatban végezzük el.

XIII. táblázat.

i	x_i	f_i	g_i	$u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$	$\varphi(u_i)$	$\frac{d}{s}\varphi(u_i)$	$\frac{nd}{s}\varphi(u_i)$
1	20	1	0,009	- 2,27	0,030	0,015	1,6
2	23	5	0,046	- 1,77	0,083	0,041	4,5
3	26	12	0,110	- 1,28	0,176	0,088	9,5
4	29	17	0,153	- 0,78	0,294	0,146	15,9
5	32	19	0,174	- 0,28	0,384	0,191	20,8
6	35	19	0,174	0,22	0,389	0,194	21,1
7	38	18	0,165	0,31	0,380	0,189	20,6
8	41	9	0,083	1,21	0,192	0,096	10,4
9	44	7	0,064	1,71	0,092	0,046	5,0
10	47	1	0,009	2,21	0,035	0,017	1,9
11	50	1	0,009	2,70	0,010	0,005	0,5
		109	0,999				

$$\frac{d}{s} = \frac{3}{6{,}03} = 0{,}4975 \; ; \qquad \frac{nd}{s} = 109.0{,}4975 = 54{,}23$$

A $\varphi(u_i)$ értékeket a N(0;1) eloszlás sürüségfüggvényének táblázatából irtuk ki. Összehasonlitva az f_i oszlopot az $\frac{nd}{s}\varphi(u_i)$, illetve a g_i oszlopot a $\frac{d}{s}\varphi(u_i)$ oszloppal, azt látjuk, hogy a tapasztalati és a várható értékek között nincs nagy eltérés. Ha az elemszámot növeljük az eltérés fokozatosan csökken.

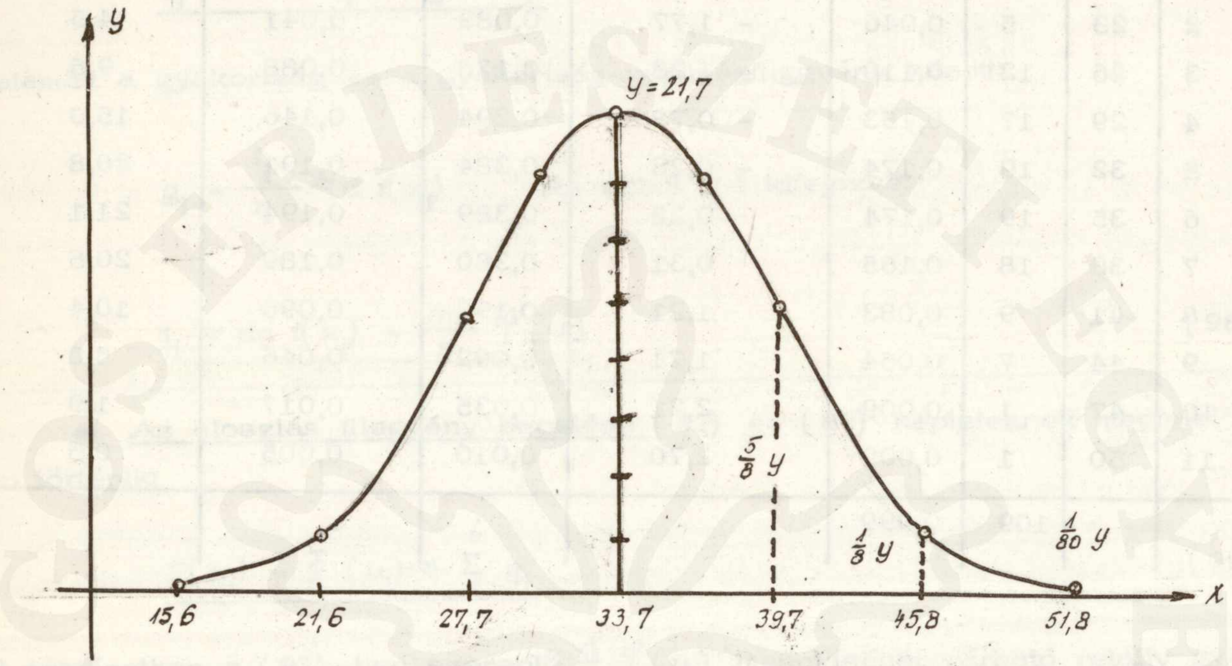
A sürüségfüggvények a két utolsó oszlop alapján megszerkeszthetők. Ha közelitő szerkesztéssel is megelégszünk, akkor a XII. táblázat és a 19. ábra mintájára járunk el. Lássuk például a gyakoriság-sürüséggörbét:

$$y_{max} = \frac{nd}{s}\, 0{,}4 = 54{,}23.0{,}4 = \underline{21{,}7} \qquad \text{(lásd. 23. ábra).}$$

3.13 A binomiális eloszlás paramétereinek becslése

A_2 N/ m; σ / eloszláshoz hasonlóan a valószinüségi változóból nagymintát veszünk. Az "n" meghatározott, ugyanis ha a valószinüségi változó "k" diszkrét értéket vesz fel, akkor n = k - 1. A "p" paramétert a (73)-as alapján becsüljük:

$$p = \frac{M(\xi)}{n} \approx \frac{\bar{x}}{n} \qquad (100)$$



23. sz. ábra.

A 3. példában szereplő sorozat gyakoriság-sürüséggörbéje

Az egyes $P(x_i)$ valószinüségeket a g_i relativ gyakoriságokkal becsüljük:

$$P(x_i) \approx g_i \qquad (101)$$

Példa a binomiális eloszlás jellemzőinek becslésére:

4. Egy madárfaj 100 olyan fészekalját figyeltük meg, amelyben 8 tojás volt. Hogy a fészekaljankénti 8 tojásból x_i = 0, 1, 2, ... 8 db hány esetben maradt meg, azt a XIV. táblázat f_i oszlopa mutatja. Becsüljük a sorozat alapján az eloszlás paramétereit és az egyes valószinüségeket.

Összehasonlitásképpen a binomiális eloszlás táblázatból kiirtuk a $P(x_i)$ valószinüségeket, és kiszámitottuk az $NP(x_i)$ várható gyakoriságokat is.

XIV. táblázat.

i	x_i	f_i	x'_i	$x'_i f_i$	x'^2_i	$x'^2_i f_i$	g_i	$P(x_i)$	$NP(x_i)$
1	0	1	-4	- 4	16	16	0,01	0,0032	0,32
2	1	4	-3	-12	9	36	0,04	0,0268	2,68
3	2	9	-2	-18	4	36	0,09	0,0977	9,77
4	3	20	-1	-20	1	20	0,20	0,2047	20,47
5	4	25	0	0	0	0	0,25	0,2702	27,02
6	5	22	1	22	1	22	0,22	0,2302	23,02
7	6	14	2	28	4	56	0,14	0,1237	12,37
8	7	4	3	12	9	36	0,04	0,0383	3,83
9	8	1	4	4	16	16	0,01	0,0053	0,53
		N=100		66 -54 12		234	1,00	1,0001	

A várható érték becslése:

$$M(\xi) \approx \bar{x} = x_D + d\,\frac{\Sigma x'_i f_i}{N} = 4 + \frac{12}{100} = 4{,}12$$

A "p" paraméter becslése (100) alapján:

$$p \approx \frac{\bar{x}}{n} = \frac{4{,}12}{8} = 0{,}515$$

A $D(\xi)$ szórás becslése:

a/ Történhet a (74) -es képlet szerint, ha tudjuk, hogy az eloszlás binomiális:

$$D(\xi) \approx \sqrt{n\,p\,q} = \sqrt{8\,.\,0{,}515\,(1-0{,}515)} = \sqrt{1{,}998} = 1{,}414$$

b/ Ha az eloszlás csak közel binomiális, a (91) -es reláció szerint

$$D(\xi) \approx s = \sqrt{\frac{\Sigma x'^2_i f_i - \frac{1}{N}(\Sigma x'_i f_i)^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{234 - 0{,}01\,.\,12^2}{99}} =$$

$$= \sqrt{\frac{232{,}56}{99}} = 1{,}533 \approx \underline{1{,}53}$$

3,2 A statisztikai biztonság és a tévedési valószinüség

Nevezzük azt a "B" valószinüséget, amellyel a ξ folytonos valószinüségi változó értéke ($a \leq \xi \leq b$) intervallumba esik statisztikai biztonságnak, feltéve hogy a $P(\xi < a)$ és $P(\xi > b)$ valószinüségek egyenlők:

$$P(a \leq \xi \leq b) = B; \qquad P(\xi < a) = P(\xi > b) \tag{102}$$

A "B" ellentétes valószinüségét, amellyel a ξ a jelzett intervallumon kivül esik tévedési valószinüségnek fogjuk nevezni és P^* -al jelöljük. A "B" és P^* közötti összefüggés a (40)-es reláció alapján, mivel a P^*-ot szokták megadni

$$B = 1 - P^* \tag{103}$$

A P^* valószinüség jelentése tehát:

$$\boxed{P(a > \xi > b) = P^*} \tag{104}$$

Például: Mekkora $1-P^*$ biztonsággal esik az N(0;1) eloszlásu "u" valószinüségi változó a $(-u_{P^*} \leq u \leq u_{P^*})$ intervallumba, (ahol u_{P^*} a P^* tévedési valószinüségtől függő kritikus érték, amelyet a XV. táblázat utolsó sorából olvashatunk ki)?

A (85)-ös összefüggés alapján leirható, hogy: $P(-u_{P^*} \leq u < u_{P^*}) = 2\Phi(u) - 1$

Tehát mivel: $P(-u_{P^*} \leq u \leq u_{P^*}) \approx P(-u_{P^*} \leq u < u_{P^*})$, a keresett valószinüség:

$$P(-u_{P^*} \leq u \leq u_{P^*}) \approx 2\Phi(u) - 1 \tag{105}$$

A (105)-ös összefüggéssel felirt valószinüségnek a 16. ábrán egyszeresen bevonalkázott terület felel meg.

A P^* tévedési valószinüséget és a $B = 1-P^*$ biztonságot többnyire százalékos alakban használjuk igy ezek eleget tesznek a

$$0\ \% \leq 100\ P^{*}\ \% \leq 100\%, \qquad \text{illetőleg a}$$

$$0\ \% \leq 100\ B\% \leq 100\% \quad \text{feltételnek.}$$

Ebben az esetben a két valószinüség közötti összefüggés:

$$100\ B\ \% = 100\ \% - 100\ P^{*}\ \%$$

alakban irható fel.

Példák a statisztikai biztonság és a tvéedési valószinüség értelmezésére.

5. Mekkora biztonsággal esik az N(0; 1) eloszlású "u" valószinüségi változó a $-u_{P^*} \leq u \leq u_{P^*}$ intervallumba, és mekkora P^* valószinüséggel azon kivül:

a/ ha $u_{P^*} = 1$, illetve b/ ha $u_{P^*} = 3$?

a/ $u_{P^*} = 1$ ... $P(-1 \leq u \leq 1) = ?$

A (105) -ös reláció alapján:

$$B = P(-1 \leq u \leq 1) = 2\Phi(1) - 1$$

de a XI. táblázatból kiolvasható, hogy $\Phi(1) = 0{,}84$, tehát a keresett biztonság

$$\underline{B} = P(-1 \leq u \leq 1) = 2 \cdot 0{,}84 - 1 = \underline{0{,}68}$$

ugyanez százalékosan felirva:

$\underline{100\ B\ \% = 68\ \%}$ azaz 68 %-os biztonsággal esik az "u" értéke a $(-1 \leq u \leq 1)$ intervallumba. A következő kérdés $P^* = ?$

$$\underline{P^*} = 1 - B = 1 - 0{,}68 = \underline{0{,}32}$$

Százalékosan felirva:

$\underline{100\ P^*\ \% = 32\ \%}$ azaz 32 %-os valószinüséggel esik az "u" értéke a $(-1 \leq u \leq 1)$ intervallumon kivül. Vagyis a tévedés valószinüsége 32 %.

b/ $u_{P^*} = 3$ ... $\underline{B} = P(-3 \leq u \leq 3) =$

$$= 2\Phi(3) - 1 = 2 \cdot 0{,}9986 - 1 = \underline{0{,}997}$$

ugyanez %-osan: $\underline{100\ B\% = 99{,}7\ \%}$

$$\underline{P^* = 1 - B = 1 - 0{,}997 = \underline{0{,}003}}$$

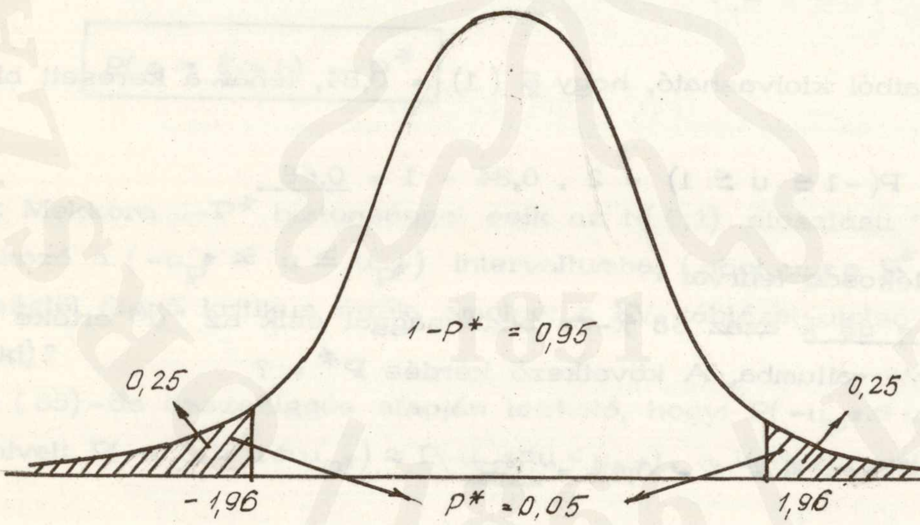
vagy %-osan: $\underline{100\ P^*\% = 0{,}3\ \%}$

A gyakorlatban általában a feladat éppen forditva jelentkezik. Előirják a tévedési valószinüséget, például 1%, 5%, 10% stb. és ehhez keressük ki a megfelelő táblázatból az u_{P^*}, t_{P^*}, F_{P^*}, χ^2_P kritikus értéket, amely kijelöli azt az intervallumot amelybe a vizsgált valószinüségi változónak 1 - P^* biztonsággal kell beleesni. A rövidség kedvéért a következőkben a 100 P^* % helyett egyszerüen $\underline{P^*\ \%}$-ot irunk.

6. $P^*\ \% = 5\%$, határozzuk meg a $(-u_{P^*} \leq u \leq u_{P^*})$ intervallum kritikus $u_{P^*} = u_{0,05}$ értékét.

A XV. táblázat utolsó sorában a $P^* = 0{,}05$ tévedési valószinüségnek megfelelő oszlopban 1,96-ot találunk, tehát $\underline{u_{0,05} = 1{,}96}$.

A kérdés intervallum: $-1{,}96 \leq u \leq 1{,}96$.



24. ábra.

A biztonság és tévedési valószinüség szemléltetése a 6. példa adatainak megfelelően.

3.3 A minta megbizhatósága

Ha egy ξ valószinüségi változóból végtelen sok mintát veszünk, azok számtani közepeinek halmaza mint valószinüségi változó normális eloszlást követ, még akkor is, ha a ξ eloszlása bizonyos mértékig eltér a normálistól. A számtani közepek mindegyikéből az "m" várható értéket levonva az $(\bar{x} - m)$ eltérések halmaza is normális eloszlásu lesz. A minta megbizhatósága - az $(\bar{x} - m)$ eltérések halmazának szórásától függ.

a/ Ha a ξ szórása a σ ismert, akkor az $\bar{x}$ változó szórása éppen a $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. A megbizhatóság elemzésére felhasználjuk a (105)-ös összefüggést, ez azonban csak ugy lehetséges, ha az $(\bar{x} - m)$ változót $\sigma_{\bar{x}}$ -elvaló osztás utján N(0; 1) eloszlásuvá alakitjuk: $\frac{\bar{x} - m}{\sigma_{\bar{x}}} = u.$

A mintát P^* tévedési szinten megbizhatónak itéljük, ha az "u" értéke $1 - P^*$ biztonsággal esik a $(-u_{P^*} \leq u \leq u_{P^*})$ intervallumba:

$$P\left(-u_{P^*} \leq \frac{\bar{x} - m}{\sigma_{\bar{x}}} \leq u_{P^*}\right) = 1 - P^* \qquad (106)$$

Vagy másképpen P^* valószinüséggel azonkivül:

$$P\left(-u_{P^*} > \frac{\bar{x} - m}{\sigma_{\bar{x}}} > u_{P^*}\right) = P^* \qquad (107)$$

A (106)-os relációból levezethetünk egy mennyiséget, amellyel magát a megbizhatóságot mérjük. E célból a (106)-os képletben az $(\bar{x} - m)$ abszolut értékét vesszük, igy az intervallum alsó határát elhagyhatjuk, majd az egyenlőtlenség mindkét oldalát beszorozzuk $\sigma_{\bar{x}}$ -el:

$$P\left(\frac{|\bar{x} - m|}{\sigma_{\bar{x}}} \leq u_{P^*}\right) = 1 - P^*$$

$$P\left(|\bar{x} - m| \leq u_{P^*}\sigma_{\bar{x}}\right) = 1 - P^* \qquad (108)$$

A (108)-as képletben szereplő $u_{P^*}\sigma_{\bar{x}}$ mennyiséget- amelynél az $|\bar{x} - m|$ eltérés $1 - P^*$ valószinüséggel kisebb kell hogy legyen - hibahatárnak nevezzük és Δ_{P^*} -vel jelöljük:

$$\boxed{\Delta_{P^*} = u_{P^*} \sigma_{\bar{x}} = u_{P^*} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad (109)$$

A Δ_{P^*} az $\bar{x}$ középérték P^* tévedési szinten vett hibahatára, amely még kifejezőbbé válik, ha a számtani közép százalékaként adjuk meg:

$$\boxed{\Delta_{P^*}\% = \frac{100\,\Delta_{P^*}}{\bar{x}} = 100\,\frac{u_{P^*}\sigma}{\bar{x}\sqrt{n}}} \qquad (110)$$

Rövidség kedvéért Δ_{P^*} - hibának a $\Delta_{P^*}\%$-ot százalékos hibának fogjuk nevezni.

A (106)-os reláció alapján felirhatunk egy olyan intervallumot, amelybe az "m" várható érték $1 - P^*$ valószinüséggel esik. E célból a (106)-os egyenlet baloldalán lévő egyenlőtlenséget végigszorozzuk a $-\sigma_{\bar{x}}$-el, majd minden tagjához $\bar{x}$-et hozzáadunk:

$$P\left[-u_P \leq \frac{\bar{x} - m}{\sigma_{\bar{x}}} \leq u_{P^*}\right] = P\left[u_{P^*}\sigma_{\bar{x}} \geq (m - \bar{x}) \geq -u_{P^*}\sigma_{\bar{x}}\right] =$$

$$= P\left[-u_{P^*}\sigma_{\bar{x}} \leq (m - \bar{x}) \leq u_{P^*}\sigma_{\bar{x}}\right] = P\left[-\Delta_{P^*} \leq (m - \bar{x}) \leq \Delta_{P^*}\right] =$$

$$= P\left[(\bar{x} - \Delta_{P^*}) \leq m \leq (\bar{x} + \Delta_{P^*})\right] = 1 - P^*$$

A jelzett

$$(\bar{x} - \Delta_{P^*}) \leq m \leq (\bar{x} + \Delta_{P^*}) \qquad (111)$$

intervallumot megbizhatósági vagy konfidencia intervallumnak nevezzük.

A konfidencia határok:

$$\bar{x} \pm \Delta_{P^*} = \bar{x} \pm u_{P^*}\sigma_{\bar{x}} = \bar{x} \pm u_{P^*} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (112)$$

Az "m" várható érték becslését a (111) alapján P^* tévedési valószinüség mellett:

$$m \approx \bar{x} \pm \Delta_{P^*} \tag{113}$$

intervallummal irhatjuk fel.

b/ Ha a ξ szórását σ -t nem ismerjük, hanem becslésre egy minta "s" szórását kell számitanunk, tekintetbe kell vennünk, hogy sok mintát feltételezve, "s" eltér σ -tól. Az eltérés annál nagyobb lesz, minél kisebbre választjuk a minták elemszámát. Tehát amikor az (x -m) változót most "s"$_{\bar{x}}$ -el azaz $\frac{s}{\sqrt{n}}$ -el osztjuk, akkor nem konstans értékkel, hanem az "n" elemszámtól függő változó értékkel osztjuk és igy az $\frac{\bar{x}-m}{s_{\bar{x}}} = \frac{(\bar{x}-m)\sqrt{n}}{s}$ változó az "n"-re érzékeny "Student" eloszlást követi (lásd a Student eloszlás definicióját): $\frac{\bar{x}-m}{s_{\bar{x}}} = t$. Ennek a változónak $1 - P^*$ valószinüséggel a $(-t_{P^*} \leq \frac{\bar{x}-m}{s_{\bar{x}}} \leq t_{P^*})$ intervallumba kell esni, és igy a hibahatárra - a már ismert módon - a

$$\boxed{\Delta_{P^*} = t_{P^*}\, s_{\bar{x}} = t_{P^*} \frac{s}{\sqrt{n}}} \tag{114}$$

képletet vezethetjük le. Ebben az esetben a százalékos hiba:

$$\boxed{\Delta_{P^*}\,\% = \frac{100\,\Delta_{P^*}}{\bar{x}}\,\% = 100\,\frac{t_{P^*}\frac{s}{\sqrt{n}}}{\bar{x}}\,\%} \tag{115}$$

A (114)-es és (115)-ös képletben szereplő t_{P^*} kritikus értéket a XV.-ös táblázatból keressük ki a P^* -nak megfelelő oszlop illetőleg az Fg = n - 1 szabadságfoknak megfelelő sorból.

A (115)-ben $\frac{100\, s}{\bar{x}}\,\% = s\%$ helyettesitést elvégezve megkapjuk a százalékos hibát a variációs koefficienssel kifejezve:

$$\boxed{\Delta_{P^*}\,\% = \frac{s\%\; t_{P^*}}{\sqrt{n}}} \tag{116}$$

XV. táblázat.

A "t" próba kritikus értékei. FG = ∞ sorában az "u" próba kritikus értékei

	Fg \ P^*	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,01	0,001
t_{P^*}	2	0,82	1,06	1,4	1,9	2,9	4,3	9,9	31,6
	3	0,76	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	5,8	12,9
	5	0,72	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	4,0	6,9
	7	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,5	5,4
	10	0,70	0,88	1,09	1,37	1,81	2,23	3,17	4,59
	15	0,69	0,87	1,07	1,34	1,75	2,13	2,95	4,07
	20	0,69	0,86	1,06	1,33	1,73	2,09	2,85	3,85
	30	0,68	0,85	1,06	1,31	1,70	2,04	2,75	3,65
	40	0,68	0,85	1,05	1,30	1,68	2,02	2,70	3,55
	60	0,68	0,85	1,05	1,30	1,67	2,00	2,66	3,46
	120	0,68	0,85	1,04	1,29	1,66	1,98	2,62	3,37
u_{P^*}	∞	0,67	0,84	1,04	1,28	1,65	1,96	2,58	3,29

A megbizhatósági határok: $\bar{x} + \Delta_{P^*}$; $\bar{x} - \Delta_{P^*}$

A várható értéket a P^*tévedési valószinüség mellett becsülve:

$$m \approx \bar{x} \pm \Delta_{P^*} = \bar{x} \pm t_{P^*} s_{\bar{x}} = \bar{x} \pm t_{P^*} \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (117)$$

A minta megbizhatóságának mérésére általában P^* %-os tévedési szinten a Δ_{P^*} hibát, illetve a Δ_{P^*} % százalékos hibát használjuk. Erre vonatkozólag szakterületenként, és a mintavétel céljától függően is változik az előirás, illetőleg szokás (ahol előirás még nincs). Az erdészeti és faipari gyakorlatban általában 5 %-os tévedési szinten 5 %-os hibát szoktak megengedni. Meg kell emlitenem azonban, hogy a körülményektől sok függ, és olyekor ennél lényegesen szigorubb megkötésekre van szükség, máskor viszont kénytelenek vagyunk ennél nagyobb hibával dolgozni.

Megjegyzem, hogy amikor a

$$\Delta_P * = t_P * \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \text{hibahatár helyett az} \quad s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

standard hibát használják, pl. a várható értéket $m \approx \bar{x} \pm s_{\bar{x}}$ alakban adják meg, akkor a $t_P * = 1$, amelyhez közelitőleg

<u>$P\,\% \approx 30\,\%$- -32 százalékos tévedési valószinüség</u>

<u>tartozik</u> az FG szabadságfoktól függően. Ami azt jelenti, hogy az alapsokaságból végtelensok egyforma elemszámu mintát véve az $\bar{x} - m$ eltérés átlagosan 100 eserből csak 68-70-szer lenne kisebb a hibahatárnál és 30-32 esetben pedig nagyobb lenne ennél.

<u>Példa:</u>

7. Számitsuk ki az 1. példában szereplő minta hibáját és százalékos hibáját, a megbizhatósági határokat, 1 %-os és 5 %-os tévedési szinten.

A minta adatai: $n = 20$; $\bar{x} = 16{,}5$; $s = \pm 2{,}6$ m; $s_{\bar{x}} = \pm 0{,}6$ m.

Majd hasonlitsuk össze a két szinthez tartozó értékeket.

A $\Delta_P *$ -t a (114)-es alapján számitjuk:

$P^* = 0{,}01$ ... $\Delta_{0,01} = t_{0,01} \cdot s_{\bar{x}}$; $s_{\bar{x}} = 0{,}6$ m ; A XV. sz. táblázatban a $P^* = 0{,}01$ valószinüségnek megfelelő oszlopban és a 20 szabadság-foknak megfelelő sorban 2,85-öt, a 15-nek 2,95-öt találunk.

$n - 1 = 19$-re interpolálva:

$$t_{0,01} \approx 2{,}87$$

$$\Delta_{0,01} = 2{,}87 \cdot 0{,}6 = 1{,}722 \approx \underline{1{,}7\text{ m}}$$

$$P^* = 0{,}05 \ldots \Delta_{0,05} = t_{0,05} \cdot s_{\bar{x}} ; \quad s_{\bar{x}} = 0{,}6 \text{ m};$$

$$n - = 19 \ldots t_{0,05} \approx 2{,}1$$

$$\Delta_{0,05} = 2{,}1 \cdot 0{,}6 = 1{,}26 \approx \underline{1{,}3\text{ m}}$$

A százalékos hibát a (115)-ös alapján számitjuk:

$$P^* = 0{,}01 \ldots \Delta_{0,01}\,\% = \frac{100\ \Delta_{0,01}}{\bar{x}}\,\% ;$$

$$\Delta_{0,01} = 1{,}7 ; \quad \bar{x} = 16{,}5 \text{ m} ;$$

$$\Delta_{0,01}\,\% = \frac{100 \cdot 1{,}7}{16{,}5} = \frac{170}{16{,}5} = \underline{10{,}3\ \%}$$

$$P^* = 0{,}05 \ldots \Delta_{0,05}\,\% = \frac{100\ \Delta_{0,05}}{\bar{x}}\,\% ;$$

$$\Delta_{0,05} = 1{,}3 \text{ m} ; \quad \bar{x} = 16{,}5 \text{ m} ;$$

$$\Delta_{0,05}\,\% = \frac{100 \cdot 1{,}3}{16{,}5} = \frac{130}{16{,}5} = 7{,}9\ \%$$

A megbizhatósági határokat a (117)-es alapján számitjuk:

$$P^* = 0{,}01 \ldots \bar{x} \pm \Delta_{0,01} ; \quad \bar{x} = 16{,}5 \text{ m} ; \quad \Delta_{0,01} = 1{,}7 ;$$

$$\bar{x} + \Delta_{0,01} = 16{,}5 + 1{,}7 = \underline{18{,}2 \text{ m}}$$

$$\bar{x} - \Delta_{0,01} = 16{,}5 - 1{,}7 = \underline{14{,}8 \text{ m}}$$

$$P^* = 0{,}05 \ldots \bar{x} \pm \Delta_{0,05} ; \quad \bar{x} = 16{,}5 ; \quad \Delta_{0,05} = 1{,}3$$

$$\bar{x} + \Delta_{0,05} = 16{,}5 + 1{,}3 = \underline{17{,}8 \text{ m}}$$

$$\bar{x} - \Delta_{0,05} = 16{,}5 - 1{,}3 = \underline{15{,}2 \text{ m}}$$

3.31 A minta elemszámának megtervezése

Eddigi ismereteink lehetővé teszik, hogy megtervezzük a minta "n" elemszámát, amely elégséges ahhoz, hogy a Δ_{P^*} vagy a $\Delta_{P^*}\,\%$ hiba csak P^* valószinüséggel legyen nagyobb egy adott értéknél. Vagyis amely mellett a minta a kivánt pontosságot nyujtja. Kiindulunk a (114)-es képletből:

$$\Delta_{P^*} = t_{P^*} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

ebből az egyenletből kifejezzük "n"-et:

$$\boxed{n = \left(\frac{t_{P^*}\, s}{\Delta_{P^*}}\right)^2} \qquad (118)$$

A Δ_P adott; "s" értékét, ha van idevonatkozó mintánk, onnan vesszük, és ilyenkor a t_{P^*} -hez tartozó FG szabadságfok adott. Ha régebbi megfigyelés nem áll rendelkezésre, tájékoztató jellegü kismintából számitjuk "s" értékét a (138)-as képlettel, a t_{P^*} -hez tartozó FG szabadságfok itt is adott. Gyakoribb az az eset, amikor a hibahatárt százalékosan adják meg. Ebben az esetben a (115)-ös képletből fejezzük ki "n"-et;

$$\Delta_{P^*}\% = \frac{s\%\ t_{P^*}}{\sqrt{n}}$$

$$\boxed{n = \left(\frac{t_{P^*}\ s\ \%}{\Delta_{P^*}\ \%}\right)^2} \qquad (119)$$

A Δ_{P^*} % adott. Az s%-ot vagy előző felvételekből vesszük, vagy tájékoztató jellegü kismintából, mikoris mindkét esetben ismert a t_{P^*}-hez tartozó FG szabadság fok. Ha egyik ut sem járható, hasonló jellegü megfigyelésekből veszszük az s%-ot, és ilyenkor biztonság kedvéért a 10-es szabadságfoknak megfelelő t_{P^*} értéket helyettesitjük a képletbe.

Példa:

8. Egy nagykiterjedésü egykoru tölgyesben hány fa magasságát kell megmérnünk, hogy a Δ_{P^*} hibahatár 95 %-os valószinüséggel 5 % alatt maradjon. Egy előzetes megfigyelésnél n = 20 elemü mintában s% = 16 % volt.

$$s\% = 16\,\%; \quad \Delta_{0,05}\,\% = 5\,\%; \quad FG = n - 1 = 19; \quad t_{0,05} \approx 2,1$$

$$n = \frac{t_{P^*}\ s\ \%}{\Delta_{P^*}\ \%} = \frac{2,1\ .\ 16}{5} = (6,7)^2 \approx \underline{45\ db}$$

Természetesen célszerü a kapott számot biztonság kedvéért felfelé kerekiteni, hiszen lehetnek a felvételben szélsőséges elemek stb.

3.4 Statisztikai próbák

A tervezési, ellenőrzési és kutatási gyakorlat során gyakran kell eldöntenünk, hogy a vizsgált folyamatokkal kapcsolatos jellemzők közötti eltérések egy bizonyos P^* tévedési valószinüség mellett véletlenszerüek-e vagy lényegesek. E célból lehetőséghez képest "u" "t" , "F" vagy "X^2" eloszlású valószinüségi változót konstruálunk, és megvizsgáljuk, hogy a mi esetünkben ennek értéke mekkora ($1-P^*$) valószinüséggel esik a kritikus intervallumba illetőleg mekkora P^* valószinüséggel esik azon kivül, és igy az eltérés véletlenszerü ezen a szinten, vagy lényeges.

A fenti elven alapuló ellenőrző módszereket statisztikai próbáknak nevezzük.

3.41 "u" és "t" próba

Amig az "u" változó kiszámitott abszolut értéke kisebb P^* tévedési valószinüséghez tartozó kritikus u_{P^*} értéknél:

$$|u| \leq u_{P^*}$$

addig a $P(|u| \leq u_{P^*}) = 1 - P^*$ összefüggés alapján megállapithatjuk, hogy az "u" változó számlálójában lévő eltérés P^* %-os tévedési szinten véletlenszerü, csupán a változékonyság eredménye.

Mihelyt azonban

$$|u| > u_{P^*}$$

a $P(|u| > u_{P^*}) = P^*$ összefüggés alapján leszögezhetjük, hogy az eltérés P^* tévedési szinten lényeges, szignifikáns. Ezt a módszert "u" próbának nevezték el.

Ha a σ nem ismert, hanem helyette a minta szórását alkalmazzuk a változó megkonstruálásánál, a változó gyakran "t" eloszlású lesz.

Például:

$$t = \frac{x_i - \bar{x}}{s}, \quad t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_d} \quad \text{stb.}$$

Ilyenkor a számlálóban lévő eltérés ellenőrzésekor az "u" próbához hasonló módon járunk el. Ha

$$|t| \leq t_{P^*}$$

a $P(|t| > t_{P^*}) = 1 - P^*$ összefüggés alapján az eltérést P^* tévedési szinten véletlenszerünek mondjuk. Ha

$$|t| > t_{P^*}$$

a $P(|t| > t_{P^*}) = P^*$ összefüggés alapján az eltérést P^* tévedési szinten lényegesnek itéljük. Ez a módszer a "t" próba.

3.411 Szélsőséges elem kizárása, normális eloszlásu sokaságból, "u" illetőleg "t" próbával

Ha "m" és σ ismert, azt hogy egy "x" elem szélsőséges, az $(x - m)$ eltérés ellenőrzése utján dönthetjük el. És mivel a sokaság normális eloszlásu, az elemekből "m" levonása révén képzett $(x - m)$ is σ szórásu normális eloszlásu valószinüségi változó, amelyet $N(0;1)$ eloszlásuvá alakitunk:

$$u = \frac{x - m}{\sigma}$$

ennek értéke P^* valószinüséggel fog a $(-u_{P^*} \leq u \leq u_{P^*})$ intervallumon kivül esni. Vagyis az eltérés abszolut értékét véve:

$$P\left(\frac{|x - m|}{\sigma} > u_P\right) = P^*$$

Ez az egyenlet szavakba foglalva azt jelenti, hogy ha az alapsokaságból végtelen sok mintát vennénk, átlagosan 100 esetben 100 P^*-szor lenne a számitott "u" nagyobb a kritikus u_{P^*} értéknél. Tehát ha a mi sokaságunk adatai alapján számitjuk az $u = \frac{|x-m|}{\sigma}$ értéket és kiirjuk a XV. sz. táblázat $FG = \infty$ sorából a nála közvetlenül nagyobb u_{P^*} kritikus értéket, amelyhez P^* valószinüség tartozik, mivel az

$$\frac{|x - m|}{\sigma} > u_{P^*}$$

az "x" elemet a tévedésnek P^*-nál kisebb valószinüségével tekinthetnénk szélsőségesnek és zárhatnánk ki a mintából.

Ha "m" és σ nem ismert, hanem csak $\bar{x}$ és "s", akkor $N(0; 1)$ eloszlásu helyett "t" eloszlásu valószinüségi változónk lesz:

$$t = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

Annak a valószinüsége, hogy $|t| > t_{P^*}$

$$P\left(\frac{|x - \bar{x}|}{s} > t_{P^*}\right) = P^*$$

A kiszámitott $t = \frac{|x - \bar{x}|}{s}$ nél közvetlen nagyobb t_{P^*} értéket a XV. sz. táblázat FG = n - 1 sorából kiirva, az oszlop legfelső sorából kiolvashatjuk a tévedés P^* valószinüségét, és mivel

$$\frac{|x - \bar{x}|}{s} < t_{P^*}$$

csak akkor zárjuk ki az "x" elemet a mintából, ha $P^* < 0{,}01$. Vagyis ha ezt 1 %-nál kisebb tévedési valószinüséggel tehetjük.

A gyakorlatban általában táblázat nélkül végzik el az ellenőrzést, a t_{P^*} kritikus értékét célszerü egyszerüen 3-nak venni, amelyhez $P^* < 0{,}01$ tévedési valószinüség tartozik, és ha az

$$\frac{|x - \bar{x}|}{s} > 3, \qquad (120)$$

$P^* < 0{,}01$ tévedési szinten az $(x - \bar{x})$ eltérést lényegesnek, szignifikánsnak tekinthetjük, és az "x" elemet, mint szélsőséges elemet a további számitásokból kizárjuk.

Példa:

9. Egy 61 db bükkfa levéllemezének (fénylevelének) hosszméreteit tartalmazó mérési sorozat x = 82,9 mm méretü elemről kell eldönteni, hogy kizárható-e a mintából, ha $\bar{x}$ = 66,9 mm, s = 4,7 mm.

$$|x - \bar{x}| = 82{,}9 = 16 \text{ mm}; \quad \frac{|x - \bar{x}|}{s} = \frac{16}{4{,}7} = 3{,}41$$

és mivel

$$\frac{|x - \bar{x}|}{s} = \frac{16}{4{,}7} = 3{,}41 > 3$$

a (120)-as alapján az x = 82,9 méretü elemet $P^* < 0{,}01$ tévedési szinten kizárjuk a mintából.

3,412 Az $(\bar{x} - m)$ eltérés ellenőrzése "u" próba segitségével

A gyakorlati számitások során olykor meg kell állapitanunk, hogy P^*%-os tévedési szinten lényeges, szignifikáns-e az alapsokaság várható értéke és egy minta számtani közepe közötti $(\bar{x} - m)$ eltérés. Számtalan mintát feltételezve az $(\bar{x} - m)$ normális eloszlásu valószinüségi változó $\sigma_{\bar{x}}$ szórással, amely N(0;1) eloszlásuvá alakitható, mint azt már láttuk.

Az "u" értéke P^* valószinüséggel esik a $(-u_{P^*} \leq u \leq u_{P^*})$ intervallumon kivül, tehát a (107)-es alapján:

$$P\left(\frac{|\bar{x} - m|}{\sigma_{\bar{x}}} > u_{P^*}\right) = P^*$$

vagyis átlagosan 100 esetben 100 P^*-szer lenne a számitott "u" érték nagyobb mint u_{P^*} kritikus érték. Ha most a mi számitott "u" értékünk még kisebb is mint u_{P^*}:

$$\frac{|\bar{x} - m|}{\sigma_{\bar{x}}} \leq u_P$$

amely u_{P^*} az "u"-nál közvetlenül nagyobb kritikus érték, akkor legalább a hozzátartozó P^* valószinüséggel tévednénk, ha az $(\bar{x} - m)$ eltérést lényegesnek mondanánk.

A gyakorlatban legtöbbször nem keresik ki az "u"-nál közvetlenül nagyobb u_{P^*} értéket, és a hozzátartozó P^* szintet, hanem előre meghatároznak egy P^* tévedési szintet, és kikeresik a hozzátartozó u_{P^*} értéket. Ilyenkor

$$\left.\begin{array}{l} \text{ha az } |u| \leq u_{P^*} \text{ az eltérés véletlenszerü} \\ \text{ha az } |u| > u_{P^*} \text{ az eltérés } P^* \text{ szinten lényeges} \end{array}\right\} \qquad (121)$$

gyakran szükséges felirni a P^* szinten igazolható eltérést, amelyet megkapunk, ha a számitott $|\bar{x} - m|$ eltérésből a Δ_{P^*} véletlen eltérést levonjuk:

$$d_P = |\bar{x} - m| - \Delta_{P^*} \qquad (122)$$

Példa:

10. Egy automatagép által gyártott munkadarab hossza m = 100 cm kell, hogy legyen, a megengedett szórás σ = 0,2 cm. Ellenőrzésképpen n = 16 elemszámmal mintát vettünk, és a számtani középre x = 99,6 cm-t kapunk. Kérdés, hogy az eltérés lényeges-e 1 %-os tévedési valószinüség mellett?

$$m = 100 \text{ cm} ; \quad \bar{x} = 99{,}6 \text{ cm};$$

$$|\bar{x} - m| = 100 - 99{,}6 = \underline{0{,}4 \text{ cm}} ;$$

$$\sigma = 0{,}2 \text{ cm} ; \quad n = 16 ; \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{0{,}2}{4} = 0{,}05 \text{ cm}$$

$$u = \frac{|\bar{x} - m|}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{0{,}4}{0{,}05} = 8$$

$$u_{0,01} = 2{,}58 ; \quad \underline{u > u_{0,01}}$$

A (121)-es alapján 1 %-os tévedési szinten az eltérés lényeges, szignifikáns. Szemléltetésképpen képezzük a $\Delta_{0,01}$-et

$$\Delta_{0,01} = u_{0,01} \cdot \sigma_{\bar{x}} = 2{,}58 \cdot 0{,}05 = \underline{0{,}13 \text{ cm};} \quad 0{,}4 > 0{,}13 \text{ vagyis}$$

$|\bar{x} - m| > \Delta_{0,01}$, az eltérés a hibahatárnál nagyobb, tehát nem a változékonyság eredményezte csupán. Az eltérést 1 %-os tévedési szinten lényegesnek kell tekinteni, és a gépet át kell állitani.

A $P^* = 0{,}01$ tévedési szinten igazolható eltérés:

$$d_{0,01} = |\bar{x} - m| - \Delta_{0,01} = 0{,}4 - 0{,}13 = \underline{0{,}27 \text{ cm}}$$

3.413 Két alapsokaság becsült várható értékei közötti eltérés ellenőrzése "u" illetőleg "t" próbával

A kutatások kiértékelésénél gyakran kell megállapitanunk, hogy különböző körülmények között fejlődött statisztikai sokaságok között egy meghatározott jegyet tekintve van-e lényeges eltérés. E célból vizsgáljuk az $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ normális eloszlásu és σ_d szórásu valószinüségi változót, amely

$$u = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma_d} \quad \text{alakban } N(0;\ 1) \text{ eloszlást követ.}$$

A σ^2_d, lévén két valószinüségi változó különbségének szórásnégyzete, azok szórásnégyzeteinek összegeként jön létre (bizonyitás mint (68) é). Az $\bar{x}_1$ szórásnégyzete

$\frac{\sigma_1^2}{n_1}$, az $\bar{x}_2$ szórásnégyzete $\frac{\sigma_2^2}{n_2}$ és igy ha a $\sigma_1 \approx \sigma_2$-vel a

$$\sigma_d^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$ ebből négyzetgyökvonással:

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \qquad (123)$$

Mivel $P(|u| > u_{P^*}) = P^*$, mindkét alapsokaságból végtelen sok mintát feltételezve, átlagosan 100 esetből 100 P^*-szer lesz a számitott "u" nagyobb a kritikus u_{P^*} értéknél. Ha keressük a számitott "u"-nál közvetlen nagyobb u_{P^*} értéket a XV. sz. táblázat FG = ∞ sorában, felette a legfelső sorban kiolvasható a P^*, és mivel

$$\frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sigma_d} < u_{P^*}$$

100 esetből 100 P^*-szer tévedünk, ha az $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ eltérést lényegesnek minősitjük.

A próbát azonban a legtöbbször ugy hajtják végre, hogy előre meghatározott P^*%-os szinthez kikeresik az u_{P^*}-t és ha

$$\frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sigma_x} \leq u_{P^*}$$ az $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ eltérés véletlenszerü, de ha

$$\frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sigma_x} > u_{P^*}$$ az $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ eltérés lényeges szignifikáns egen a P^* tévedési szinten.

A két számtani közép (becsült várható értéke) között 100 P^* %-os tévedési szinten igazolható eltérést ugy képezzük, hogy a tényleges eltérésből kivonjuk a véletlen eltérést:

$$d_{P^*} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| - u_{P^*}\,\sigma_d$$

Ha az alapsokaságok σ_1 és σ_2 szórásai nem ismeretesek, akkor "u" próba helyett "t" próbát alkalmazzuk, és ebben az esetben, ha $s_1 \approx s_2$ a különbség szórása a (123)-as analógiájára:

$$s_d \approx \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \qquad (124)$$

A számtani közepek közötti eltérés véletlenszerü ha:

$$\frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{s_d} \leq t_{P^*} \qquad (125)$$

Viszont P^* %-os tévedési szinten lényeges (szignifikáns) lesz ha:

$$\frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{s_d} > t_{P^*} \qquad (126)$$

Az igazolható eltérés:

$$d_{P^*} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| - t_{P^*} s_d \qquad (127)$$

A t_{P^*}-t itt a XV. sz. táblázatban az $FG = n_1 - 1 + n_2 - 1 = n_1 - n_2 - 2$ szabadságfoknak megfelelő sorban és a P^* -nek megfelelő oszlopban találjuk meg.

Két számtani közepet összehasonlithatunk annak eldöntése végett, hogy van-e közöttük lényeges igazolható eltérés, és az mekkora. (lásd a 11. példát). De lehet a célunk két normális eloszlásu alapsokaság (minta) eloszlásának összehasonlitása is (lásd. a 12. példát). A számtani közepek összehasonlitásának csak akkor van értelme, ha a szórások között lényeges eltérés nincs, ezért a szórásnégyzetek összehasonlitására mindkét esetben szükség van. Ugyanis a normális eloszlást az "m" és σ paraméter teljes mértékben meghatározza, de ehhez mindkettőre szükség van. Igy ha két alapsokaság várható értékei között és szórásai között lényeges eltérés nincs, az eloszlások között nincs lényeges eltérés. De ha már az egyik paraméter lényeges eltérést mutat, az alapsokaságok közötti eltérés is lényeges. Mivel a szórásnégyzetek összehasonlitása egyszerübb, általában azt végzik el először. Ha itt lényeges eltérés adódik, nem érdemes tovább számolni, mert bár az eltérés lényeges, de azt váratlan tényezők is befolyásolják, és igy a számtani közepek összehasonlitása reális eredményt nem nyujt.

Példa:

11. Hasonlitsuk össze 5 %-os szinten különböző fényviszonyok mellett

fejlődő kocsánytalan tölgycsemeték azonos időtartam alatti hossznövekedését. Mindkét alapsokaságból 20 elemü mintát vettünk. Az adataik:

$$\bar{x}_1 = 8{,}1\ \text{cm} \qquad s_1 = 2{,}2\ \text{cm}; \qquad \bar{x}_2 = 10{,}8\ \text{cm}; \qquad s_2 = 2{,}4\ \text{cm};$$

$$s_1 \approx s_2.$$

$$s_d \approx \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \quad \text{de} \quad n_1 = n_2 \quad \text{igy:}$$

$$s_d \approx \sqrt{\frac{s_1^2}{n} + \frac{s_2^2}{n}} = \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{n}} = \sqrt{\frac{2{,}2^2 + 2{,}4^2}{20}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4{,}84 + 5{,}76}{20}} = \sqrt{\frac{10{,}6}{20}} = \sqrt{0{,}53} = 0{,}73\ \text{cm}$$

$n_1 + n_2 - 2 = 20 + 20 - 2 = 38$; $P^* = 0{,}05$; a Xv. sz. táblázatból: $t_{0,05} \approx 2{,}02$

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = 10{,}8 - 8{,}1 = 2{,}7\ \text{cm};$$

$$\frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{s_d} = \frac{2{,}7}{0{,}73} = 3{,}7 > t_{0,05}$$

Tehát az eltérés 5 %-os de még 0,1 %-os szinten is szignifikáns azaz lényeges. Az 5 %-os tévedési szinten igazolható eltérés:

$$t_{0,05} \cdot s_d = 2{,}02 \cdot 0{,}73 \approx 1{,}5\ \text{cm}$$

$$d_{0,05} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| - t_{0,05}\, s_d = 2{,}7 - 1{,}5 = \underline{1{,}2\ \text{cm}}$$

3.42 "F" próba

Ha két minta varianciáját akarjuk összehasonlitani annak eldöntése végett, hogy a közöttük lévő eltérés P^* szinten lényeges-e, szükséges olyan valószinüségi változót konstruálni, amely a két varianciát tartalmazza.

Az $\frac{n_1 - 1}{\sigma^2_1} s^2_1$ és az $\frac{n_2 - 1}{\sigma^2_2} s^2_2$ mint változó "X^2" eloszlást követ. Ezen két változóból "F" eloszlásu valószinüségi változót alakithatunk ki:

$$F = \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1} \cdot \frac{\frac{n_1 - 1}{\sigma^2_1} s^2_1}{\frac{n_2 - 1}{\sigma^2_1} s^2_2}$$

De mivel feltételezzük, hogy a két minta azonos közel $N(m; \sigma)$ eloszlásu alaposságból származik $\sigma^2_1 = \sigma^2_2$ és igy egyszerüsités után a valószinüségi változó

$$F = \frac{s^2_1}{s^2_2}$$

alakban irható fel. Az "F" eloszlás nem szimmetrikus (lásd a 22. sz. ábrát), azért annak az intervallumnak a határait, amelybe a változó értéke ($1-P^*$) valószinüséggel esik bele, nem egyenlők. Az intervallum alsó határa tört szám $\frac{1}{F_1}$, felső határa egész szám F_2 lesz. Tehát felirható, hogy:

$$P\left(\frac{1}{F_1} \leq \frac{s^2_1}{s^2_2} \leq F_2\right) = 1 - P^*$$

Igy azonban két F értéket kellene kiirni a táblázatból.

Ha az s^2_2 a nagyobb érték, akkor az intervallum alsó $\frac{1}{F_1}$ határa lesz az, amelyhez a hányados értékét hasonlitani kell. Ha viszont az s^2_1 a nagyobb érték, akkor az F_2 felső határ lesz a mérvadó kritikus érték. Ha megállapodunk abban, hogy a <u>nagyobb szórásnégyzetet mindig a számlálóba</u> irjuk:

$$F = \frac{s^2_1}{s^2_2} \quad \text{ahol} \quad s^2_1 > s^2_2 \,,$$

az $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ hányados 1-nél kisebb nem lehet, igy az intervallum alsó határára nem lesz szükségünk. Jelöljük a kritikus felső határt F_{P^*} -vel:

$$P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{P^*}\right) = P^* \qquad (128)$$

A (128)-as képlet alapján mindkét alapsokaságból végtelen sok mintát feltételezve, átlagosan 100 esetből 100 P^* -szer lesz a számitott $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ hányados nagyobb az F_{P^*} kritikus értéknél. Tehát ha

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \leq F_{P^*} \quad \text{az} \quad s_1^2 > s_2^2 \quad \text{mellett} \qquad (129)$$

<u>akkor a szórásnégyzetek között az eltérés nem lényeges, hanem véletlenszerü.</u>

Ha azonban $\frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{P^*}$ az $s_1^2 > s_2^2$ mellett (130)

<u>akkor a két szórásnégyzet között 100 P^* %-os tévedési szinten az eltérés nem a változékonyság eredménye, hanem lényeges, szignifikáns eltérés.</u>

Az F_{P^*} kritikus értékét a XVI. sz. táblázat P^* részéből irjuk ki, az $FG_1 = (n_1 - 1)$ szabadságfoknak megfelelő oszlopból és az $FG_2 = (n_2 - 1)$ szabadsaágfoknak megfelelő sorból. Az FG_1 szabadságfok mindig az

$\frac{s_1^2}{s_2^2}$ tört s_1^2 számlálójához tartozik (amely nagyobb az s_2-nél).

Ha történetesen az egyik szórásnégyzet elméleti érték, akkor ahhoz $n - 1 = \infty$ szabadságfok tartozik.

XVI. táblázat.

Az $F_P{}^*$ kritikus értékek táblázata

$P^* = 0{,}10$

FG_2 \ FG_1	1	2	3	4	6	10	20	200
1	39,9	49,5	53,6	55,8	58,2	60	61	63
2	8,5	9,0	9,2	9,2	9,3	9,4	9,4	9,5
3	5,5	5,5	5,4	5,3	5,3	5,2	5,2	5,1
4	4,6	4,3	4,2	4,1	4,0	3,9	3,8	3,8
5	4,1	3,8	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1
10	3,3	2,9	2,7	2,6	2,5	2,3	2,2	2,1
20	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,9	1,8	1,6
40	2,8	2,4	2,2	2,1	1,9	1,8	1,6	1,4
∞	2,7	2,3	2,1	1,9	1,8	1,6	1,4	1,0

$P^* = 0{,}05$

FG_2 \ FG_1	1	2	3	4	6	10	20	50	200
1	161	200	216	225	234	242	248	252	254
2	18,5	19,0	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	8,9	8,8	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,2	6,0	5,8	5,7	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,0	4,7	4,6	4,4	4,4
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,2	3,0	2,8	2,6	2,5
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,6	2,4	2	2,0	1,8
40	4,1	3,2	2,8	2,6	2,3	2,1	1,8	1,7	1,5
100	3,9	3,1	2,7	2,5	2,2	1,9	1,7	1,5	1,3
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,1	1,8	1,6	1,4	1,0

$P^* = 0{,}01$

FG_2 \ FG_1	1	2	3	4	6	10	20	50	∞
1	4052	4999	5403	5625	5859	6065	6208	6300	6366
2	98	99	99	99	99	99	99	100	100
3	34	31	29	28	27	27	27	26	26
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,2	14,5	14,0	13,7	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	10,7	10,1	9,6	9,2	9,0
10	10,0	7,6	6,6	6,0	5,4	4,9	4,4	4,1	3,9
20	8,1	5,9	4,9	4,4	3,9	3,4	2,9	2,6	2,4
40	7,3	5,2	4,3	3,8	3,3	2,8	2,4	2,1	1,8
100	6,9	4,8	4,0	3,5	3,0	2,5	2,1	1,7	1,4
∞	6,6	4,6	3,8	3,3	2,6	2,3	1,9	1,5	1,0

Példa:

12. Állapitsuk meg, hogy 5 %-os tévedési szinten van-e lényeges eltérés bükk levéllemez hosszméretére vonatkozó két alapsokaság között, ha adataik a következők: $\bar{x}_2 = 53{,}9$ mm, $s_2 = 3{,}9$ mm, $n_2 = 38$, $\bar{x}_1 = 66{,}4$ mm, $s_1 = 4{,}1$ mm, $n_1 = 61$.

Először "F" próbával ellenőrizzük a szórások eltérését:

$$s_2 = 3{,}9 \ldots s_2^2 = 15{,}21 \ ; \qquad s_1 = 4{,}1 \ldots s_1^2 = 16{,}81$$

$$s_1^2 > s_2^2 \ldots \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{16{,}81}{15{,}21} = 1{,}1$$

$$FG_1 = n_1 - 1 = 61 - 1 = 60 \ ; \qquad FG_2 = n_2 - 1 = 38 - 1 = 37;$$

$$P^* = 0{,}05;$$

A XVI. sz. táblázat $P^* = 0{,}05$ részben a 60 szabadságfoknak megfelelő oszlopban és a 37 - szabadságfoknak megfelelő sorban:

$$F_{0,05} \approx 1,7$$

kritikus értéket találunk. Mivel

$$\underline{\frac{s_1^2}{s_1^2} < F_{0,05}}$$

A szórások között 95 %-os biztonsági szinten az eltérés nem lényeges. Ezután "t" próbával ellenőrizzük a számtani közepek közötti eltérést.

$$s_d \approx \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{16,81}{60} + \frac{15,21}{38}} = \sqrt{0,26 + 0,46} = \sqrt{0,72} = 0,85$$

$$FG = n_1 + n_2 - 2 = 61 + 38 - 2 = \ldots \; t_{0,05} \approx 1,99$$

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = 66,4 - 53,9 = 13,5 \; ;$$

$$\frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{s_d} = \frac{12,5}{0,85} \approx \underline{14,7 > t_{0,05}}$$

tehát a számtani közepek között az eltérés lényeges 5 %-os tévedési szinten (de még ennél sokkal alacsonyabb tévedési szinten is), és igy az alapsokaságok eloszlásai is lényegesen eltérnek egymástól.

Meg kell jegyeznem, hogy ezzel a módszerrel csak két normális eloszlást hasonlithatunk össze, tehát ilyenkor szükséges ellenőrizni az eloszlások normális voltát.

Végül számitjuk az 5 %-os tévedési szinten igazolható eltérést.

$$d_{0,05} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| - t_{P\%} s_d = 12,5 - 1,99 \,.\, 0,85 =$$

$$= 12,5 - 1,7 = \underline{10,8 \text{ mm}}$$

3,43. Illeszkedés vizsgálat "X^2" (khi-négyzet) próbával

Egy tapasztalati eloszlásnak egy elméleti eloszláshoz való illeszkedését legcélszerübb az azonos x_i osztályközepekhez tartozó f_i tapasztalati gyakoriságok és $\sum f_i P(x_i)$ elméleti gyakoriságok eltéréseinek segitségével vizsgálni.

Hogy azonban az illeszkedés feltevésének elvetése esetére a tévedés valószinüségét megállapithassuk, az $\left[f_i - \sum f_i P(x_i) \right]$ eltérésekből "X^2" eloszlásu valószinüségi változót képezünk:

$$X^2 = \sum \frac{\left[f_i - \sum f_i P(x_i) \right]^2}{\sum f_i P(x_i)} \qquad (131)$$

A (131)-es képlettel számitott X^2 értékeket a kritikus $X^2_{P^*}$ értékkel összehasonlitva a

$$P(X^2 > X^2_{P^*}) = P^*$$

egyenlet kijelöli azt a $X^2_{P^*}$ kritikus értéket, amelynél a számitott X^2 értékek P^* valószinüséggel lesznek nagyobbak. Ha tehát a mi számitott értékünk:

$$X^2 < X^2_{P^*}$$

akkor számtalan azonos mintát feltételezve átlagosan 100 esetből 100 P^*-szer kapnánk $X^2_{P^*}$ vagy annál nagyobb értéket, de a mi X^2 eltérésünk kisebb is mint a kritikus érték, tehát P^*-nél magasabb valószinüséggel tévednénk, ha az illeszkedés feltevését elvetnénk. Ha a számitottnál közvetlen nagyobb $X^2_{P^*}$-hez tartozó tévedési valószinüség

$$P^* < 0{,}05$$

az illeszkedés feltevését el kell vetnünk.

A kritikus khi négyzet ($X^2_{P^*}$) értékeket a XVIII. táblázatban a P^* valószinüségnek megfelelő oszlopban és az FG = k' - b - 1 szabadságfoknak megfelelő sorban találjuk meg. A "b" a "X^2" az elméleti eloszlás becsült paramétereinek száma. A k' az osztályok száma az esetleges osztályösszevonás után. Ugyanis a khi-négyzeteloszlás természetéből kifolyólag a gyakoriságoknak 5-nél nagyobbnak kell lennie. Hogy ez a feltétel teljesüljön a szélső osztályokat össze kell vonni, és igy az osztályok száma k'-re csökken.

Ha a "X^2" próbával normalitásvizsgálatot végzünk, akkor a X^2 a következőképpen alakul.

$$X^2 = \sum_{1}^{k'} \frac{\left[f_i - \frac{nd}{s} \varphi(u) \right]^2}{\frac{nd}{s} \varphi(u)} \tag{132}$$

Természetesen itt a szabadságfok, mivel a normális eloszlás két paraméterü,

$$FG = k' - 3$$

Példák:

13. Állapitsuk meg, hogy a 2. pl.-ban szereplő minta illeszkedik-e az $N(\bar{x}\ ;\ s)$ elméleti eloszláshoz. Az adatokat a 2. pl-ból vesszük:

$$\bar{x} = 33{,}7 \text{ cm}; \quad s = 6 \text{ cm}; \quad n = 109.$$

Az $\dfrac{\left[f_i - \frac{nd}{s} \varphi(u) \right]^2}{\frac{nd}{s} \varphi(u)}$ értékeket fokozatosan a XVII. sz. táblázatban kiszámitjuk, majd összegezzük.

XVII. sz. táblázat.

i	x_i	f_i	$u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$	$\varphi(u_i)$	$\frac{nd}{s}\varphi(u_i)$	$f_i - \frac{nd}{s}\varphi(u_i)$	$\left[f_i - \frac{nd}{s}\varphi(u_i)\right]^2$	$\frac{\left[f_i - \frac{nd}{s}\varphi(u_i)\right]^2}{\frac{nd}{s}\varphi(u_i)}$
1	20	1 } 6	- 2,283	0,029	1,58 } 6,00	0,00	0,000	0,000
2	23	5	- 1,783	0,081	4,42			
3	26	12	- 1,283	0,175	9,54	2,46	6,052	0,163
4	29	17	- 0,783	0,294	16,02	0,98	0,960	0,060
5	32	19	- 0,283	0,383	20,87	-1,87	3,497	0,168
6	35	19	0,217	0,390	21,26	-2,26	5,108	0,240
7	38	18	0,717	0,309	16,84	1,16	1,346	0,080
8	41	9	1,217	0,190	10,36	-1,36	1,850	0,179
9	44	7	1,717	0,091	4,96			
10	47	1 } 9	2,217	0,034	1,85 } 7,36	1,64	2,690	0,365
11	50	1	2,717	0,010	0,55			
Σ								1,255

$$u_1 = \frac{20 - 33{,}7}{6} = -2{,}283\ ; \quad u_2 = \frac{23 - 33{,}7}{6} = -1{,}783\ ; \quad \text{stb.}$$

$\varphi(u_1) = 0{,}029$ (a Mat.Gyak. II. 1. sz. táblázat 249. old.)

$$\frac{nd}{s} = \frac{109 \,.\, 3}{6} = \frac{102}{2} = 54{,}5 \;;\; \frac{nd}{s}\varphi(u_1) = 54{,}5 \,.\, 0{,}029 = 1{,}58 \text{ stb.}$$

A számitott $X^2 = 1{,}255$. Az osztályok száma az összevonás után k' = 8, a becsült paraméterek száma 2, tehát a szabadságfok FG = 8 – 3 = 5. A számitottnál közvetlenül nagyobb kritikus érték a XVIII. táblázatban: $X^2_{0,90} = 1{,}61$. Ha az illeszkedést elvetnénk a tévedés valószinüsége 90 %-nál nagyobb lenne. A minta tehát normális eloszlásu.

XVIII. sz. táblázat

A khi-négyzet próba kritikus értékei

FG \ P*	0,99	0,95	0,90	0,70	0,50	0,30	0,10	0,05	0,01
1	0,000157	0,00393	0,0158	0,148	0,455	1,07	2,71	3,84	6,63
2	0,0201	0,103	0,211	0,713	1,39	4,21	4,61	5,99	9,21
3	0,115	0,352	0,584	1,42	2,37	3,67	6,25	7,81	11,3
4	0,297	0,711	1,06	2,19	3,36	4,88	7,78	9,49	13,3
5	0,554	1,15	1,61	3,00	4,35	6,06	9,24	11,1	15,1
6	0,872	1,64	2,20	3,83	5,35	7,23	10,6	12,6	16,8
7	1,24	2,17	3,83	4,67	6,35	8,38	12,0	14,1	18,5
8	1,65	2,73	3,49	5,53	7,34	9,52	13,4	15,5	20,1
9	2,09	3,33	4,17	6,39	8,34	10,7	14,7	16,9	21,7
10	2,56	3,94	4,87	7,27	9,34	11,8	16,0	18,3	23,2
12	3,57	5,23	6,30	9,03	11,3	14,0	18,5	21,0	26,2
14	4,66	6,57	7,79	10,8	13,3	16,2	21,1	23,7	29,1
16	5,81	7,96	9,31	12,6	15,3	18,4	23,5	26,3	32,1
18	7,01	9,39	10,9	14,4	17,3	20,6	26,0	28,9	34,8
20	8,26	10,9	12,4	16,3	19,3	22,8	24,4	31,4	37,6
25	11,5	14,6	16,5	20,9	24,3	28,2	34,4	37,7	44,3
30	15,0	18,5	20,6	25,5	29,3	33,5	40,3	43,8	50,9

14. Vizsgáljuk meg hogy 3. pl-ban szereplő minta a p = 0,515 paraméterü binomiális eloszláshoz illeszkedik-e. Az x_i, f_i, $P(x_i)$, $\Sigma f_i P(x_i)$ stb. értékeket a 3. sz. példából vesszük.

Az $\dfrac{\left[f_i - \Sigma f_i P(x_i)\right]}{f_i P(x_i)}$ értékeket fokozatosan a XIX. sz. táblázatban kiszámitjuk, majd összegezzük:

XIX.sz.táblázat.

i	x_i	f_i	$P(x_i)$	$\Sigma f_i P(x_i)$	$f_i - \Sigma f_i P(x_i)$	$\left[f_i - \Sigma f_i P(x_i)\right]^2$	$\frac{\left[f_i - \Sigma f_i P(x_i)\right]^2}{\Sigma f_i P(x_i)}$
1	0	1	0,003	0,3			
2	1	4	0,016	2,6	1,4	1,96	0,156
3	2	9	0,097	9,7			
4	3	20	0,205	20,5	-0,5	0,25	0,012
5	4	25	0,272	27,2	2,2	4,84	0,178
6	5	22	0,231	23,1	-1,1	1,21	0,052
7	6	14	0,123	12,3			
8	7	4	0,037	3,7	2,5	6,25	0,379
9	8	1	0,005	0,5			
Σ		100				$X^2 = 0,777$	

Az osztályok száma az összevonások után k' = 5. A becsült paraméterek száma b = 1 (p paraméter). Igy a szabadságfok: FG = k' - b - 1 = = 5 - 2 = 3. A XVIII. sz. táblázatban az FG = 3 sorában a $P^* = 0,70$-nek megfelelő oszlopban találjuk a $X^2 = 0,777$-nél közvetlen nagyobb kritikus értéket: $X^2_{0,7} = 1,42$. A mi $X^2 = 0,777$ értékünknek kb. $P^* = 0,85$ felelne meg. Ez azt jelenti, hogy olyan eltérések, amelyeknek a mi mintánk és az elméleti eloszlás között felléptek, vagy annál nagyobbak, számtalan azonos jellegü mintát feltételezve, 100 esetből átlagosan 85-nél fordulnának elő. Tehát tapasztalati eloszlásunk illeszkedik a p = 0,515 paraméterü binomiális eloszláshoz.

3.44 Homogenitásvizsgálat "X^2" próbával

Két tapasztalati eloszlás homogenitásának vizsgálatára az x_i osztályközepekhez tartozó viszonylagos gyakoriságok eltérései ($g_i - g'_i$) alkalmasak.

Ahol $g_i = \frac{f_i}{\Sigma f_i}$ és $g'_i = \frac{f'_i}{\Sigma f'_i}$

Az eltérések ellenőrzése céljából szükséges "X^2" eloszlásu valószinüségi változót képezni:

$$X^2 = \sum f_i \sum f'_i \sum_1^k \frac{(g_i - g'_i)^2}{f_i + f'_i} \qquad (133)$$

A "X^2" próba elvégzése pontosan ugyanazon elvek szerint történik, mint az illeszkedésvizsgálatnál, de a szabadságfok itt

$$FG = k' - 1$$

ahol k' azoknak az osztályoknak a számát jelenti, amelyekben legalább az egyik mintának 0-nál nagyobb gyakorisága van.

Példa:

15. Vizsgáljuk meg, van-e homogenitás a XX. sz. táblázatban lévő 1-es és 2-es sz. minta között. Az 1. sz. minta egy mátrai kisérleti területen, a 2. sz. egy bakonyi kisérleti területen tenyésző bükkállomány levéllemezeinek hosszméretére vonatkozik (fénylevelek).

$$X^2 \approx \sum f_i \sum f'_i \sum_1^k \frac{(g_i - g'_i)^2}{f_i + f'_i} = 100 \cdot 61 \cdot 0{,}0139 = \underline{84{,}79}$$

FG = k' - 1 = 12 - 1 = 11 ; A XVIII. táblázatban FG = 12-nél és $P^* = 0{,}01$-nél található

$$X^2_{0,01} = 26{,}2$$

A számitott X^2 érték ennél nagyobb, tehát a két minta közötti homogenitás feltevését 1 %-nál jóval kisebb tévedési valószinüség mellett el kell vetni.

3.45. Függetlenségvizsgálat "X^2" próbával

Két minőségi tulajdonság, közötti függetlenség fennállásának vizsgálatát is elvégezhetjük "X^2" próbával. Ha a függetlenség nem áll fenn, természetesen összefüggés van. A vizsgálat elvégzésére "X^2" eloszlásu valószinüségi változót kell konstruálnunk. E célból legyen "A" és "B" tulajdonságunk, "k" és k' minőségi osztállyal. Foglaljuk az osztályokba eső gyakoriságokat a XXI. sz. táblázatba, amelyet kontingencia táblázatnak nevezünk.

XX. sz. táblázat.

i	x_i	$\frac{1}{f_i}$	$\frac{2}{f'_i}$	g_i	g'_i	$f_i + f'_i$	$g_i - g'_i$	$(g_i - g'_i)^2$	$\frac{(g_i - g'_i)^2}{f_i + f'_i}$
1	45	4	0	0,04	0,00	4	0,04	0,0016	0,0004
2	48	3	0	0,03	0,00	3	0,02	0,0009	0,0003
3	51	10	0	0,10	0,00	10	0,10	0,0100	0,0010
4	54	15	0	0,15	0,00	15	0,15	0,0225	0,0015
5	57	24	1	0,24	0,02	25	0,22	0,0484	0,0019
6	60	26	7	0,26	0,11	33	0,15	0,0225	0,0007
7	63	11	12	0,11	0,19	23	–0,08	0,0064	0,0003
8	66	5	17	0,05	0,28	22	–0,23	0,0529	0,0024
9	69	1	16	0,01	0,26	18	–0,25	0,0625	0,0035
10	72	1	4	0,01	0,07	5	–0,06	0,0036	0,0007
11	75	0	3	0,00	0,05	3	–0,05	0,0025	0,0008
12	78	0	1	0,00	0,02	1	–0,02	0,0004	0,0004
Σ		100	61						0,0139

XXI. sz. táblázat.

B \ A	1	2	. . .	j	. . .		$\Sigma f_{i.}$
1	f_{11}	f_{12}	. . .	f_{1j}	. . . .		$f_{1.}$
2	f_{21}	f_{22}	. . .	f_{2j}	. . . .		$f_{2.}$
:	:	:		:			:
i	f_{i1}	f_{i2}	. . .	f_{ij}	. . . .		$f_{i.}$
:	:	:		:			:
k'	.	.		.		$f_{k'k}$	$f_{k'.}$
$\Sigma f_{.i}$	$f_{.1}$	$f_{.2}$		$f_{.j}$		$f_{.k}$	Σf_{ij}

Függetlenség esetén a kontingenciának nevezett

$f_{ij} - \dfrac{f_{i.} f_{.j}}{n}$ eltérések igen kicsinyek, és az összefüggés erősödésével növekedést mutatnak. Ezen eltérésekből alakitott "X^2" eloszlásu valószinüségi változó:

$$X^2 = n \cdot \sum_{1}^{k'} \sum_{1}^{k} \frac{\left(f_{ij} - \frac{f_{i.} f_{.j}}{n} \right)}{f_{i.} \; f_{.j}} \tag{134}$$

A szabadságfok: FG = (k'-1) (k-1) lesz. Ha

$$X^2 < X^2_{P^*}$$

akkor a függetlenség feltevését elutasitva a tévedés valószinüsége P^* -nél nagyobb lesz. $P^* < 0{,}05$ esetén a függetlenség feltevését el kell utasitanunk. Ekkor már mérhető összefüggés van a vizsgált tulajdonságok között. Az összefüggés szorosságának mérésére alkalmas tényezőt nyerünk, ha a számitott X^2 értéket osztjuk az n (q-1) szorzattal, majd e hányadosból gyököt vonunk, ez a kontingencia-együttható:

$$\varrho = \sqrt{\frac{X^2}{n\,(q-1)}} \qquad (135)$$

Ahol a "q" a k' és "k" osztályszámok közül a kisebb számot jelenti. A ϱ együttható értéke - amely 2x2-es kontingencia táblázat esetén megegyezik az "r" korrelációs tényezővel - a korrelációs tényező abszolut értékéhez hasonlóan:

$$0 \leq \varrho \leq 1 ,$$

és minél közelebb esik 1-hez annál szorosabb a kapcsolat. (lásd a XXXIV.sz. táblázatot).

Példa:

16. Állapitsuk meg, hogy van-e összefüggés mátrai termőhelyen tenyésző és bakonyi termőhelyen tenyésző bükk levelei szőrösségének mértéke között. Az adatokat a XXII. sz. táblázat tartalmazza.

XXII. sz. táblázat.

A levél szőrössége	Mátra	Bakony	Σ
erős	31	13	44
közepes	49	30	79
gyenge	20	57	77
Σ	100	100	200

$$\sum_{1}^{3}\sum_{1}^{2}\frac{\left(f_{ij}-\frac{f_{i.}\,f_{.j}}{n}\right)^2}{f_{i.}\,f_{.j}} =$$

$$= \frac{\left(31-\frac{44\,.\,100}{200}\right)^2}{44.100} + \frac{\left(49-\frac{79\,.\,100}{200}\right)^2}{79.100} + \frac{\left(20-\frac{77.100}{200}\right)^2}{77.100}$$

$$+ \frac{\left(13 - \frac{44.100}{200}\right)^2}{44.100} + \frac{\left(30 - \frac{79.100}{200}\right)^2}{79.100} + \frac{\left(57 - \frac{77.100}{77.100}\right)^2}{77.100} =$$

$$= \frac{(31-22)^2}{4400} + \frac{(49 - 39{,}5)^2}{7900} + \frac{(20-38{,}5)^2}{7700} + \frac{(13 - 22)^2}{4400} +$$

$$+ \frac{(30-39{,}5)^2}{7900} + \frac{(57 - 38{,}5)^2}{7700} =$$

$$= \frac{81}{4400} + \frac{90{,}25}{7900} + \frac{342{,}25}{7700} + \frac{81}{4400} + \frac{90{,}25}{7900} +$$

$$+ \frac{342{,}5}{7700} = \frac{162}{4400} + \frac{180{,}5}{7900} + \frac{684{,}5}{7700} =$$

$$= 0{,}0368 + 0{,}0228 + 0{,}0889 = \underline{0{,}1485}$$

$$X^2 = n \sum_1^3 \sum_1^2 \frac{\left(f_{ij} - \frac{f_{i.}\, f_{.j}}{n}\right)^2}{f_{i.} - f_{.j}} = 200 \cdot 0{,}1485 = \underline{29{,}70}$$

$$FG = (k' - 1)(k - 1) = (3 - 1)(2 - 1) = 2$$

A kritikus X^2 értékek táblázatban (XVIII. táblázat) FG = 2 szabadságfoknak megfelelő legnagyobb érték a $P^* = 0{,}01$ valószinüséghez tartozik:

$$\underline{X^2_{0,01} = 9{,}21}$$

A mi értékünk ennél jóval nagyobb, tehát a függetlenség fennállásáról még 1 % valószinüség mellett sem lehet szó. Tehát van összefüggés a kétféle termőhely és a levelek szőrösségének mértéke között. A mátrai bükk levelének szőrössége erősebb. A kapcsolat szorosságának mértékszáma:

$$\varrho = \sqrt{\frac{x^2}{n(q-1)}}; \quad q = 2 \text{ (a kisebb osztályszám)}$$

$$\varrho = \sqrt{\frac{29,70}{200\ (2-1)}} = \sqrt{\frac{29,70}{200}} =$$

$$= \sqrt{0,1485} = \underline{0,385}$$

Mivel a ϱ tényező kisebb 0,4-nél, bár eléggé megközeliti, a közepesnél gyengébb kapcsolatról van szó. (lásd a XXXIV. sz. táblázatot). Itt a kontingencia táblázat 2x3-as, igy a ϱ tényező nem egyezik meg az "r" tényezővel, de a XXXIV. sz. táblázat minden további nélkül felhasználható a kapcsolat mértékének jellemzésére.

3.5 Néhány közelitő módszer

3.51 Szimmetrikus eloszlásu minták $\bar{x}$ és "s" jellemzőjének kiszámitása megközelitő pontossággal.

Ha egy szimmetrikus eloszlásu minta x_1, x_n elemeit és a mediánját ismerjük, elég nagy elemszám mellett felirhatjuk, hogy:

$$Me \approx \bar{x}, \qquad \text{ebből} \qquad 2\ ME \approx 2\bar{x}; \qquad \text{és}$$

$$\frac{x_1 + x_n}{2} \approx \bar{x}, \qquad \text{ebből} \qquad x_1 + x_n \approx 2\bar{x}$$

A két egyenlet összeadva:

$$2\ Me + x_1 + x_n \approx 4\bar{x} \qquad \text{és ebből:}$$

$$\bar{x} \approx \frac{x_1 + x_n + 2\ Me}{4} \qquad (136)$$

Osztályokba rendezett minták esetén, az x_1 és x_k osztályközepek az M'_o ismeretében az $\bar{x}$ megközelitő értékét

$$\bar{x} \approx \frac{x_1 + x_n + 2Mo'}{4} \qquad (137)$$

képlettel számitjuk ki.

A szimmetrikus eloszlásu minták zömmel "Student" eloszlásuvá alakithatók:

$$\frac{x - \bar{x}}{s} \approx t$$

A "t" 99 %-os biztonsággal esik a $(-t_{0,01} \leq t \leq t_{0,01})$ intervallumba:

$$P\left[-t_{0,01} \leq \frac{x - \bar{x}}{s} \leq t_{0,01}\right] = 0,99 \quad \text{tehát:}$$

$$P\left[(\bar{x} - t_{0,01}\ s) \leq x \leq (\bar{x} + t_{0,01}\ s)\right] = 0,99$$ és igy egy "n" elemszámu minta $P^{*} = 0,01$ tévedési szinten várható terjedelme:

$$w = (\bar{x} + t_{0,01}\ s) - (\bar{x} - t_{0,01}\ s) = 2\ t_{0,01}\ s$$

Az egyenletből "s"-et kifejezve:

$$\boxed{s = \frac{w}{2\ t_{0,01}}} \tag{138}$$

képletet nyerjük, amely alkalmas a szórás közelitő értékének meghatározására.

Gyakran leegyszerüsitik a (138)-as képletet ugy, hogy a $t_{0,01}$-et kereken 3-nak veszik, ebben az esetben a szórás:

$$s = \frac{w}{6} \tag{139}$$

A (139)-es képlet nem függ a minta elemszámától, és igy kevésbé közeliti meg a valóságot, mint a (138)-as.

Példa.

17. Számitsuk ki a 2. példában szereplő minta számtani közepét a (137) es és a szórást a (138)-as képlettel. $x_1 = 20$; $x_k = 50$; $Mo = 33,5$,

$$w = 32, \quad t_{0,01} = 2,62$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_k + 2\ Mo}{4} = \frac{20 + 50 + 67}{4} \approx 34\ \text{cm}$$

$$s = \frac{w}{2 \cdot t_{0,01}} = \frac{36}{2 \cdot 2{,}62} = \frac{32}{5{,}24} \approx \underline{6\ cm}$$

3,52 A valószinüségi háló közelitő szerkesztése

Egy derékszögü koordinátarendszer vizszintes tengelyére egyenletes beosztásu skálát mérünk, a függőleges tengelyre a XXIII-as táblázatnak megfelelően valószinüségi skálát mérünk.

XXIII. táblázat.

a lemért távolság mm-ben	0	±5,5	±11,0	±16,8	±22,9	±29,5	±36,7	±43,3	±45,0	±56,0	±71,7	±80,5
a megfelelő 100 Φ(u) %	50	55 45	60 40	65 35	70 30	75 25	80 20	84 16	85 15	90 10	95 5	98 2

Majd a skálák igy megjelölt pontjaiból a tengelyekre merőlegeseket emelve valószinüségi hálót nyerünk. (lásd a 27. ábrát).

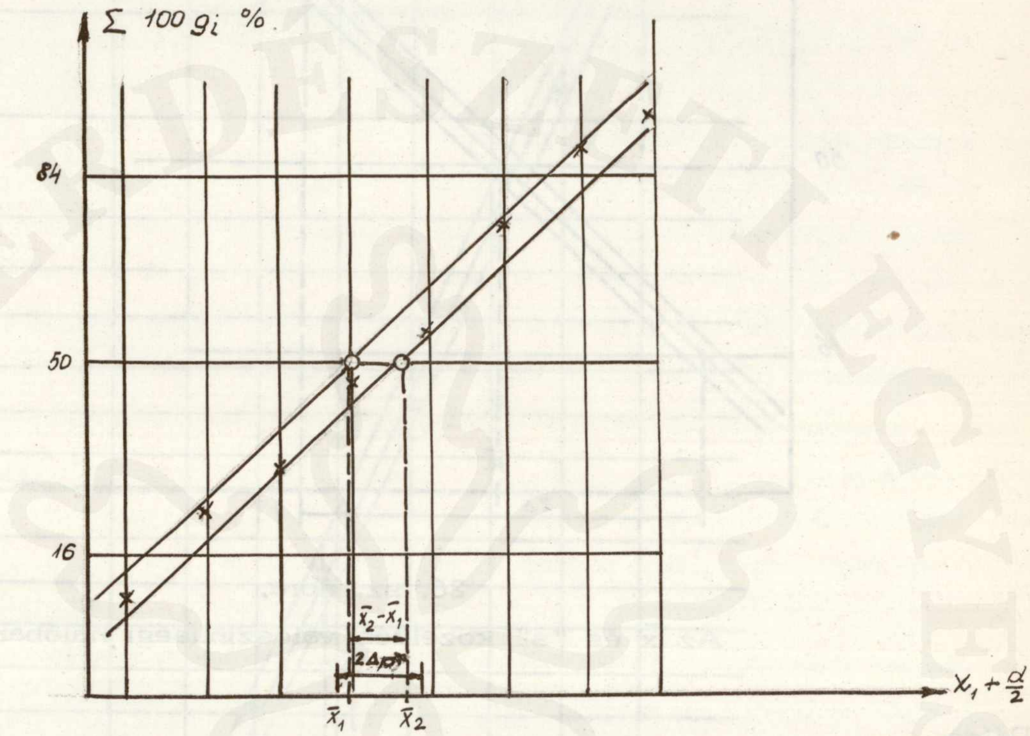
3,53 Normalitás vizsgálat a valószinüségi hálóban

Ha egy osztályba sorolt minta felső osztályhatárait a valószinüségi háló vizszintes tengelyén lévő egyenletes beosztásu (metrikus) skála beosztásához irjuk, majd felmérjük a felső osztályhatároknak megfelelő Σ 100 gi % értékeket a háló függőleges szálaira, egy a minta eloszlására jellemző pontsort kapunk. Ha ez a pontsor közel egyenesen fekszik akkor a minta megközelitőleg normális eloszlásu.

Konkrétabbá tehetjük ezt a módszert azáltal, hogy addig tekintjük normálisnak az eloszlást, amig a $\left[\left(x_i + \frac{d}{2} \right);\ \Sigma\, 100\, gi\ \% \right]$ pontok sora két olyan egyenes közé sorolható be amelyek mindegyike még a vizsgált eloszláshoz tartozik. Ez azt jelenti, hogy az emlitett egyenesek és a háló 50 %-os szálának metszéspontjai közötti vizszintes távolság kisebb kell, hogy legyen a minta megbizhatósági intervallumánál. Tehát a metszéspontok "x" koordinátáit $\bar{x}_1$ ill. $\bar{x}_2$-vel jelöljük, akkor

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \leq (\bar{x} + \Delta_{P^*}) - (\bar{x} - \Delta_{P^*}) \leq 2\,\Delta_{P^*} \qquad (140)$$

Ha $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > 2\Delta_{P^*}$ feltétel teljesül, a normalitást P^* tévedési szinten elvetjük. A P^*-ot ezen esetben 0,05-nek érdemes venni.

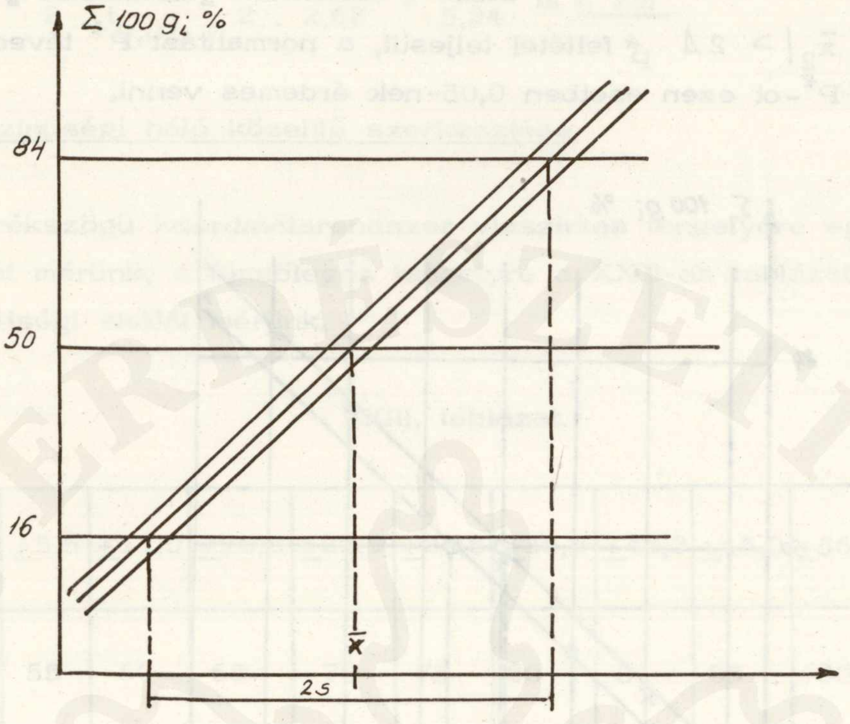


25. sz. ábra.

A minta normális eloszlásunak tekinthető ha a (140)-es reláció érvényesül.

3,54 A normális eloszlásu minta $\bar{x}$ és "s" jellemzőinek megközelitő becslése valószinüségi hálóban

Ha a 25. ábrán a pontsort határoló két egyenes közé középre velük párhuzamos egyenest huzunk, megkapjuk az elméleti eloszlás egyenesét. Ennek az 50 %-os illetőleg 16 és 84 %-os szálakkal képzett metszéspontjait a vizszintes tengelyre vetitjük. Az 50 %-osnak megfelelő "x" érték a minta számtani közepe. A 16 %-osnak megfelelő pont vetületét a 84 %-osnak megfelelő pont vetületéből kivonva megkapjuk a 2s értéket, ebből "s" már kiszámitható (26. ábra).



26. sz. ábra.

Az $\bar{x}$ és "s" közelités valószinüségi hálóban

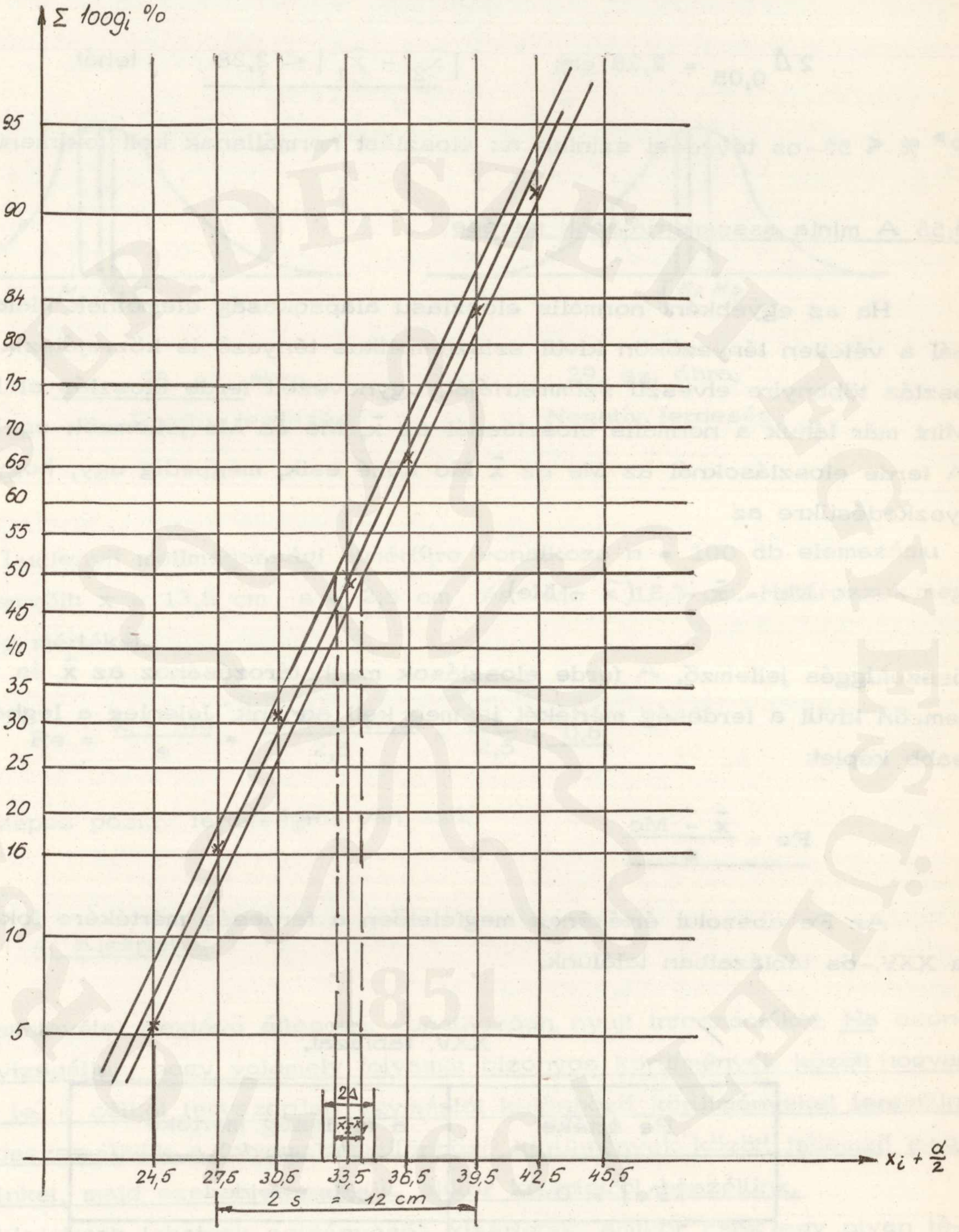
Példa

18. Végezzünk grafikus normalitás vizsgálatot a 2. példában szereplő mintánál és egyben becsüljük az $\bar{x}$ és az "s" megközelitő értékét. A IX.-es táblázatban megjelöljük a felső osztályhatárokat és a $\sum g_i$ értékeket. Ez utóbbi értékek mindegyikét 100-al megszorozva megkapjuk a $\sum 100\ g_i$ % értékeket. (XXIV.táblázat) .

A valószinüségi hálóban a vizszintes tengelyre az $(x_i + \frac{d}{2})$ felső osztályhatárok kerülnek a függőleges szálakra pedig a $\sum 100\ g_i$ % értékeket mérjük és az $\left[(x_i + \frac{d}{2}), \sum 100\ g_i\ \% \right]$ pontokat megjelöljük (27. sz. ábra) .

XXIV. sz. táblázat.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x_i + \frac{d}{2}$	21,5	24,5	27,5	30,5	33,5	36,5	39,5	42,5	45,5	48,5	51,5
$100 g_i$ %	0,9	5,5	16,5	32,1	49,5	66,9	83,4	91,7	98,7	99,0	99,9



27. sz. ábra.

Példa a grafikus normalitásvizsgálatra valamint az $\bar{x}$ és "s" jellemzők grafikus becslésére.

$\bar{x} \approx 33{,}5$ cm; 2s ≈ 12 cm; s ≈ 6 cm

$$\Delta_{0,05} = t_{0,05} \frac{s}{\sqrt{n}} = 1,98 \frac{6}{\sqrt{109}} = 1,14 \text{ cm}$$

$$2\Delta_{0,05} = 2,28 \text{ cm}; \qquad \underline{|\bar{x}_2 - \bar{x}_1| < 2,28} \qquad \text{tehát}$$

P^* % < 5%-os tévedési szinten az eloszlást normálisnak kell tekintenünk.

3,55 A minta asszimetriájának mérése

Ha az egyébként normális eloszlásu alapsokaság elemeinek kialakulásánál a véletlen tényezőkön kivül szisztematikus tényező is közrejátszik az eloszlás többnyire elveszti szimmetriáját, ugynevezett ferde eloszlás alakul ki. Mint már láttuk a normális eloszlásnál az $\bar{x}$, Mo és Me jellemzők egybeesnek. A ferde eloszlásoknál az Me az $\bar{x}$ Mo közé esik, mégpedig ugy, hogy elhelyezkedésükre az

$$Mo = \bar{x} - 3\,(\bar{x} - Me) \tag{141}$$

összefüggés jellemző. A ferde eloszlások meghatározásához az $\bar{x}$ és "s" jellemzőn kivül a ferdeség mértékét is meg kell adnunk. Jelenleg a leghasználatosabb képlet:

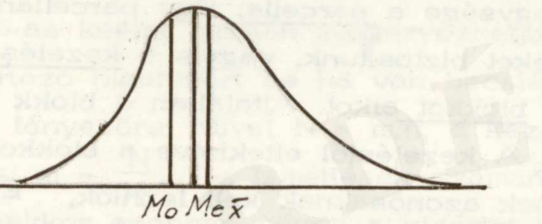
$$Fe = \frac{\bar{x} - Mo}{s} \tag{142}$$

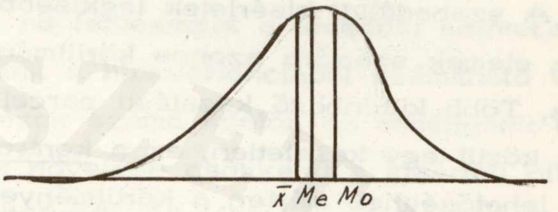
Az Fe abszolut értékének megfelelően a ferdeség mértékére fokozatokat a XXV.-ös táblázatban találunk.

XXV. táblázat.

Fe értéke	a ferdeség mértéke
$\lvert Fe \rvert = 0$	szimmetria
$0 < \lvert Fe \rvert < 0,5$	gyenge ferdeség
$0,5 \leq \lvert Fe \rvert \leq 1$	közepes ferdeség
$\lvert Fe \rvert > 1$	erős ferdeség

Az Fe előjelét tekintve, ha az Fe > 0 pozitiv vagy jobboldali ferdeségről, ha az Fe < 0 negativ vagy baloldali ferdeségről beszélünk. (28. és 29. sz.ábrák).





28. sz. ábra. Pozitiv ferdeség

29. sz. ábra. Negativ ferdeség

Példa

19. Lucfenyő mellmagassági átmérőire vonatkozó n = 100 db elemszámu minta jellemzőit: $\bar{x}$ = 13,8 cm s = 2,5 cm és Mo = 12,3 cm. Határozzuk meg a ferdeség mértékét.

$$Fe = \frac{\bar{x} - Mo}{s} = \frac{13{,}8 - 12{,}3}{2{,}5} = \frac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}6$$

Tehát közepes pozitiv ferdeségről van szó.

4. Kisérletek

A mintavétel meglévő állapotra vonatkozóan nyujt információkat. Ha azonban azt vizsgáljuk, hogy valamely folyamat bizonyos körülmények között hogyan játszódik le, e célból tervszerüen egymástól különböző körülményeket teremtünk meg és összegyüjtjük a folyamatot különböző körülmények között jellemző megfigyeléseinket, majd ezeket elemezzük, akkor kisérletről beszélünk.

A kisérletek lehetnek egytényezős kisérletek, amikor csak egy olyan tényező hatását vizsgáljuk, amely befolyásolja a kérdéses folyamat alakulását, és lehetnek többtényezős kisérletek, amikor több tényező hatását vizsgáljuk egyszerre.

Csak az egytényezős kisérletekkel, azok közül is csak néhány egyszerübb módszerrel tudunk megismerkedni ebben a fejezetben.

A kisérleteket végrehajthatjuk laboratóriumban, ezek laboratóriumi kisérletek, az üzemben, ezek üzemi kisérletek. Az erdészeti üzemi kisérletekhez tartoznak a csemetekertekben, az állományban végzett kisérletek. Ezeket a mezőgazdasági kisérletek mintájára szokták szabadföldi kisérleteknek is nevezni. A szabadföldi kisérleteknek külön irodalma van.

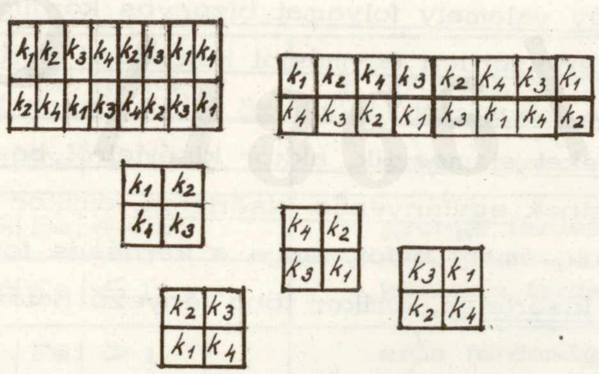
A szabadföldi kisérletek legkisebb egysége a parcella. Egy parcellán belül az elemek számára azonos körülményeket biztositunk, vagyis a kezelés azonos. Több különböző kezelésü parcella blokkot alkot. Általában a blokk parcellái közül egy kezeletlen, ez a kontroll. A kezeléstől eltekintve a blokkon belül a lehetőséghez mérten a körülményeknek azonosaknak kell lenniök. Ennek biztositása általában nem sikerül maradéktalanul. Hogy az igy fellépő kisérleti hibát csökkentsük a blokkokat megismételjük.

A laboratóriumi kisérleteknél nincsenek parcellák és blokkok, csak kezelésekről és ismétlésekről beszélünk, de a lényeg ugyanaz mint a szabadföldi kisérleteknél.

A kezelések (parcellák), ismétlések (blokkok) elhelyezése, elrendezése a körülményeknek megfelelően sokféleképpen történhet. Például lehet véletlenszerü, vagy szisztematikus.

4.1 Egytényezős véletlen elrendezésü kisérletek

Az elrendezés szemléltetésére tegyük fel, hogy egy hatótényezőt vizsgálunk 4 kezelésben. A 4 kezelést 4 egyenlő nagyságu egyformán előkészitett parcellán alkalmazzuk. Ezek együtt blokkot képeznek. Ismétlésként 4 blokkot alakitunk ki. A kisérleti hibát csökkenti, ha a blokkokban a parcellákat véletlenszerüen más-más sorrendben helyezzük el, sőt a blokkokat is a körülményeknek megfelelően rendezzük el. (30. sz. ábra).



30. sz. ábra.
A 4x4 parcella elhelyezése a négy blokkban

Általában a kezelések számát "n"-el, az ismétlések számát "m"-el fogjuk jelölni. A kisérletnek a vizsgált tényezőre vonatkozó megfigyelt adatait (parcella átlagok , x_{ij}) kezelésenként és ismétlésenként csoportositva táblázatba foglaljuk (XXVII. sz. táblázat). Az ismétlések számát a kezelések számával szorozva kapjuk a kisérlet elemszámát, jelöljük ezt "N"-el. Az "N" elemszámot a (163)-as képlet alapján megtervezhetjük, ha felvesszük a tévedési szintet,a hozzá tartozó hibahatárt és ha van becslésünk a hibavarianciából számitható variációs tényezőre. Mivel N = m.n, a kezelések száma kijelöli az ismétlések számát is: $m = \frac{N}{n}$. Az ismétlések számának növelése csökkenti a kisérleti hibát , ugyanakkor azonban növeli a kisérlet költségeit. Általában legalább 4-6 ismétlésre szükség van, rendszerint azonban a tervezésnél ennél nagyobb számokat kapunk. Ugyanis "N" helyett megtervezhető az ismétlések száma is a (155) képlet segitségével, és mivel a kezelések száma ismert "N" is számitható.

4.11 Az egyszerü varianciaanalizis

A véletlen elrendezésü egytényezős kisérletet a legegyszerübb esetben az egyszerü varianciaanalizis módszerével elemezzük, ha eloszlása normális.

A kisérlet számtani közepe és eltérésnégyzet összege:

$$\bar{x} = \frac{\sum_1^N x_{ij}}{N} ; \qquad SQ = \sum_1^N (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_1^N x_{ij}^2 - N\bar{x}^2$$

Azt, hogy az x_{ij} elemek az $\bar{x}$ számtani középtől eltérnek, egyrészt az elemek változékonysága okozza, másrészt a kezelések idézik elő. Ennek megfelelően az eltérésnégyzet összeg két részre bontható, a véletlenül adódó hiba eltérésnégyzet-összeg (jelöljük SQ_H-val) és a kezelések okozta kezelés eltérésnégyzet-összeg (jelöljük SQ_k-val).

$$\sum_1^N (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum (x_{ij} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{.j} - \bar{x})^2 =$$

$$= \sum_1^{m \cdot n} \left[(x_{ij} - \bar{x}_{.j}) + (\bar{x}_{.j} - \bar{x}) \right]^2 =$$

$$= \sum_1^h \left\{ \sum_1^m \left[(x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 + 2(x_{ij} - \bar{x}_{.j})(\bar{x}_{.j} - \bar{x}) + (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2 \right] \right\} =$$

$$= \sum_{1}^{n}\left[\sum_{1}^{m}(x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 + 2(\bar{x}_{.j} - \bar{x})\underbrace{\sum^{m}(x_{ij} - \bar{x}_{.j})}_{0} + m(\bar{x}_{ij} - \bar{x})^2\right] =$$

$$= \sum_{1}^{N}(x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 + m\sum_{1}^{n}(\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2$$

$$\underline{SQ = SQ_H + SQ_k} \qquad (143)$$

A <u>hiba eltérésnégyzet-összeg</u> tehát:

$SQ_H = \sum_{1}^{N}(x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2$, általában azonban a

$SQ_H = SQ - SQ_k$ képletből számitjuk.

A <u>kezelés eltérésnégyzet-összeg</u>:

$$SQ_k = m\sum_{1}^{n}(\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2 = m\sum_{1}^{n}\bar{x}^2_{.j} - N\bar{x}^2$$

Az SQ és SQ_k értékekhez szükséges mennyiségeket a XXVII. sz. táblázatban számitjuk ki.

XVII. sz. táblázat.

Kezelések / Ismétlések	1 ...		j ...		n		$\sum x_{i.}$	$\sum x^2_{i.}$
	$x_{.1}$	$x^2_{.1}$	$x_{.j}$	$x^2_{.j}$	$x_{.n}$	$x^2_{.n}$		
1	x_{11}	x^2_{11}	x_{1j}	x^2_{1j}	x_{1n}	x^2_{1n}	$\sum x_{1.}$	$\sum x^2_{1.}$
.								
.								
i	x_{i1}	x^2_{i1}	x_{ij}	x^2_{ij}	x_{in}	x^2_{in}	$\sum x_{i.}$	$\sum x^2_{i.}$
.								
.								
m	x_{m1}	x^2_{m1}	x_{mj}	x^2_{mj}	x_{mn}	x^2_{m}	$\sum x_{m.}$	$\sum x^2_{m.}$
Σ	$\sum x_{.1}$	$\sum x^2_{.1}$	$\sum x_{.j}$	$\sum x^2_{.j}$	$\sum x_{.n}$	$\sum x^2_{.n}$	$\sum x_{.ij}$	$\sum x^2_{ij}$
$\bar{x}_{.j}$	$\bar{x}_{.1}$	$\bar{x}^2_{.1}$	$\bar{x}_{.j}$	$\bar{x}^2_{.j}$	$\bar{x}_{.n}$	$\bar{x}^2_{.n}$	$\bar{x}$	$\sum \bar{x}^2_{.j}$

$\bar{x}^2$; $N\bar{x}^2$; $m\sum \bar{x}_{.j}^2$

Az SQ számitásában "N" elem vesz részt, a hozzátartozó szabadságfok FG = N-1, és igy a kisérlet szórásnégyzete:

$$s^2 = \frac{SQ}{N-1} = \frac{\sum (x_{ij} - \bar{x})^2}{N-1} = \frac{\sum x_{ij}^2 - N\bar{x}^2}{N-1}$$

Az SQ_k számitásában "n" db eltérés szerepelt, a hozzátartozó szabadságfok $FG_k = n - 1$, és igy a kezelésvariancia:

$$s_k^2 = \frac{SQ_k}{FG_k} = \frac{\sum (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{m\sum \bar{x}_{.j}^2 - N\bar{x}^2}{n-1} \qquad (144)$$

Az SQ_H-hoz tartozó szabadságfokot az

$$FG = FG_H + FG_k \quad \text{egyenlet alapján} \qquad (145)$$

$$FG_H = FG - FG_k = (nm-1) - (n-1) = n(m-1)$$

különbség adja, és igy a hibaszórásnégyzet vagy hibavariancia:

$$s_H^2 = \frac{SQ - SQ_k}{FG - FG_k} \qquad (146)$$

Annak eldöntése céljából, hogy a kezelések eredményeztek-e lényeges eltérést, "F" próbával ellenőrizzük, hogy van-e eltérés a kezelésvariancia és a hibavariancia között:

$$F = \frac{s_k^2}{s_H^2} ; \qquad (147)$$

Ha $F \leq 1$ vagyis a kezelésvariancia egyenlő a hibavarianciával, vagy még kisebb is, lényeges eltérésről nem lehet szó semmilyen szinten, és igy nincs szükség további számitásra. Ha $F > 1$ keressük az FG és FG_H szabadságfoknak megfelelő F_{P^*} kritikus értéket az előre felvett P^* -nak megfelelően, és ha

$$F \leq F_{P^*}; \qquad s_k^2 \not\approx s_H^2$$

ismét nincs szükség további számitásra. (148)
Ha viszont

$$F > F_{P^*}; \qquad s_k^2 \neq s_H^2$$

vagyis az "F" próba lényeges eltérést jelez, célszerü "t" próba segitségével ellenőrizni a kontroll számtani közepe és a többi kezelések számtani közepe közötti eltérést. Legyen a kontroll az egyes számu kezelés:

$$t = \frac{|\bar{x}_{.1} - \bar{x}_{.j}|}{s_H \sqrt{\frac{2}{FG_H}}}; \qquad (149)$$

A (149)-es képlet nevezőjében lévő szórás az $s_d \approx \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_1^2}{n_2}}$ képlet alapján irható fel, ha $s_1^2 = s_2^2 = s_H^2$; $n_1 = n_2 = m$:

$$s_d \approx \sqrt{\frac{s_H^2 + s_H^2}{m}} = \sqrt{\frac{2\, s_H^2}{m}} = s_H \sqrt{\frac{2}{m}}$$

A (149)-es képletben szereplő "t" eloszlásu változóra felirható, hogy:

$$P\left(-t_{P^*} \leq \frac{|\bar{x}_{.1} - \bar{x}_{.j}|}{s_H \sqrt{\frac{2}{m}}} \leq t_{P^*}\right) = 1 - P^*$$

$$P\left(\frac{|\bar{x}_{.1} - \bar{x}_{.j}|}{s_H \sqrt{\frac{2}{m}}} \leq t_{P^*}\right) = 1 - P^*$$

$$P\left(|\bar{x}_{.1} - \bar{x}_{.j}| \leq t_{P^*}\, s_H \sqrt{\frac{2}{m}}\right) = 1 - P^*$$

A $t_{P^*}\, s_H \sqrt{\frac{2}{m}}$ az a hibahatár, amelynél az $|\bar{x}_{.1} - \bar{x}_{.j}|$ eltérés abszolut értéke $1-P^*$ valószinüséggel lesz kisebb. Ezt az értéket legkisebb szignifikáns differenciának fogjuk nevezni és $Sz.D_{P^*}$-vel jelöljük:

$$SzD_{P^*} = t_{P^*}\ s_H \sqrt{\frac{2}{m}} \qquad (150)$$

A legkisebb szignifikáns differenciát kifejezhetjük a kisérlet számtani középének százalékaként is:

$$SzD_{P^*}\,\% = 100\ \frac{SzD_{P^*}}{\bar{x}}\,\% \qquad (151)$$

A t_{P^*} értéket az előre felvett P^*-nek és az FG_H-nak megfelelően keressük ki. A "t" próba végrehajtása a szokott módon történik:

$$\text{Ha } |t| \leq t_{P^*} \ldots \quad \underline{\bar{x}_{.1} \approx \bar{x}_{.j}}$$

$$\text{Ha } |t| > t_{P^*} \ldots \quad \underline{\bar{x}_{.1} \neq \bar{x}_{.j}} \qquad (152)$$

Ha a kontroll és valamelyik kezelés számtani közepei között lényeges eltérés mutatkozik, a P^* szinten igazolható eltérést megkapjuk, ha a számitott eltérésből levonjuk a legkisebb szignifikáns differenciát:

$$d_{P^*} = |\bar{x}_{.1} - \bar{x}_{.j}| - t_{P^*}\ s_H \sqrt{\frac{2}{m}} \qquad (153)$$

A kisérlet elemzésére felhasznált módszert egyszerü <u>variancia-analizisnek</u> nevezzük.

Már emlitettük, hogy az ismétlések száma megtervezhető. A (150)-as képletből kell kiindulnunk:

$$SzD_{P^*} = t_P\ s_H \sqrt{\frac{2}{m}}$$

$$SzD_{P^*}^2 = t_{P^*}^2 \cdot s_H^2 \cdot \frac{2}{m}$$

$$m = 2\left(\frac{t_{P^*} \cdot s_H}{SzD_{P^*}}\right)^2 \qquad (154)$$

Ugyanez százalékos adatok esetén:

$$m = 2\left(\frac{t_{P^*} \cdot s_H\,\%}{SzD_{P^*}\,\%}\right)^2 \qquad (155)$$

Példa:

20. Kocsánytalan tölgy csemeték természetes felujitásával kapcsolatban egytényezős 4 kezeléses kisérletet állitottunk be 4 ismétlésben annak eldöntése céljából, hogy a sarlózás, nyüvés, körülárkolás a csemeték hossznövekedésére milyen hatással van egy meghatározott idő alatt.

A kezelések:		
	1. kontroll	4 ism.
	2. sarlózás	4 ism.
	3. nyüvés	4 ism.
	4. körülárkolás	4 ism.

A parcellák átlagait a XXVIII. sz. táblázatban találjuk meg, ahol azonnal számithatjuk az SQ_k és SQ_H-hoz szükséges mennyiségeket is.

XXVIII. sz. táblázat.

kezelések / ismétlések	1		2		3		4			
	$x_{.1}$	$x_{.1}^2$	$x_{.2}$	$x_{.2}^2$	$x_{.3}$	$x_{.3}^2$	$x_{.4}$	$x_{.4}^2$	$\sum x_{i.}$	$\sum x_{i.}^2$
1	10,7	114,49	9,2	84,64	10,4	108,16	8,1	64,61	38,4	372,90
2	8,7	75,69	8,3	68,89	8,5	72,25	8,9	79,21	34,4	296,04
3	7,9	62,41	9,2	84,64	8,9	79,21	9,9	98,01	35,9	324,27
4	8,3	68,89	9,1	82,81	10,2	104,04	8,2	67,24	35,8	322,98
Σ	35,6	321,48	35,8	320,98	38,0	363,66	35,1	310,07	144,5	1316,19
$\bar{x}_{.j}$ cm	8,90	79,21	8,95	80,10	9,50	90,25	8,78	77,09	9,031	326,65

$$N = 16; \quad \bar{x} = 9{,}031 \text{ cm}; \quad \bar{x}^2 = 81{,}559; \quad N\bar{x}^2 = 16 \,.\, 81{,}559 = 1304{,}944;$$

$$m = 4; \sum \bar{x}_{.j}^2 = 326{,}65; \quad m\sum \bar{x}_{.j}^2 = 4 \,.\, 326{,}65 = 1306{,}60; \quad \sum x_{ij}^2 = 1316{,}19;$$

$$SQ = \sum x_{ij}^2 - N\bar{x}^2 = 1316{,}19 - 1304{,}94 = 11{,}25$$

$$FG = N - 16 - 1 = 15$$

$$s^2 = \frac{SQ}{FG} = \frac{11{,}25}{15} = \underline{0{,}75}$$

$$SQ_k = m\sum \bar{x}_{.j}^2 - N\bar{x}^2 = 1306{,}60 - 1304{,}94 = 1{,}66$$

$$FG_k = n - 1 = 3$$

$$s^2_k = \frac{SQ_k}{FG_k} = \frac{1,66}{3} = 0,55$$

$$SQ_H = SQ - SQ_k = 11,25 - 1,66 = 9,59$$

$$FG_H = FG - FG_k = 15-3 = 12$$

$$s^2_H = \frac{SQ_H}{FG_H} = \frac{9,59}{12} = 0,799$$

$$F = \frac{s^2_k}{s^2_H} = \frac{0,55}{0,799} < 1 \; ; \qquad \text{mivel az } F < 1 \text{ ,}$$

vagyis a kezelésvariancia kisebb a hibavarianciánál, a kezelések semmiféle lényeges változást nem eredményeztek. További számitásokra szükség nincs.

Példa:

21. A 20-as példában 4 ismétlést alkalmaztunk. Számitsuk ki a $SzD_{P^*}\%$ értékét $P^*\% = 5\%$-os szinten és állapitsuk meg, hogy ugyanekkora $P^*\%$ mellett az ismétlések számát hányra kell emelni, ha az SzD_P-t 10 %-ra akarjuk csökkenteni.

$$P^* = 0,05 \; ; \quad m = 4 \; ; \quad \bar{x} = 9,031 \text{ cm}; \quad s_H = \sqrt{0,799} \approx 0,883 \text{ cm}$$

$$FG_H = 12 \; . \; . \; . \; t_{0,05} \approx 2,2$$

$$SzD_{0,05} = t_{0,05}\, s_H \sqrt{\frac{2}{m}} = 2,2 \; . \; 0,883 \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{2,2 \; . \; 0,883}{2} = 1,37 \text{ cm}$$

$$SzD_{0,05}\% = 100 \; \frac{SzD_{0,05}}{\bar{x}} = \frac{137}{9.031} \approx 15,2 \; \%$$

$$s_H\% = 100 \; \frac{s_H}{\bar{x}} = \frac{88,3}{9,031} \approx 9,8 \; \% \; ; \qquad SzD_{0,05}\% = 10 \; \%;$$

$$m = 2\left(\frac{t_{P^*} s_H\%}{SzD_{P^*}\%}\right)^2 = 2\left(\frac{2,2 \ . \ 9,8}{10}\right)^2 = 2 \ . \ (2,16)^2 = 2 \ . \ 4,65 =$$

$$= 9,3 \approx \underline{10 \text{ ismétlés}}$$

4.12 A kettős varianciaanalizis

Előfordulhat, hogy a blokkokban nem sikerül a hozzávetőlegesen azonos körülmények biztositása. A kezelések közötti eltérések mellett lehetőség nyilik a blokkok közötti eltérések ellenőrzésére a kettős varianciaanalizis alkalmazásával.

Ebben az esetben az SQ eltérésnégyzetösszeget három részre bontjuk,az SQ_K és SQ_H mellé belép a blokkok közötti eltérések négyzetösszege, amelynek jele SQ_B.

$$SQ = SQ_K + SQ_B + SQ_H \tag{156}$$

Az SQ_B számitása teljesen az SQ_K-hoz hasonlóan történik:

$$SQ_B = n\sum(\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2 = n\sum x^2_{i.} - N\bar{x}^2 \tag{157}$$

Mivel az SQ_B számitásában "n" db blokkátlag vesz részt, a szabadságfok

$$FG_B = n-1 \tag{158}$$

Az SQ_K és SQ_H-hoz szükséges mennyiségeket a XXIX. táblázatban számitjuk.

Az SQ_H-t és ennek szabadságfokát FG_H-t az egyszerü variancia analizishez hasonlóan kapjuk:

$$SQ_H = SQ - (SQ_K + SQ_B) \ ; \ FG_H = FG - (FG_K + FG_B) \tag{159}$$

Példa:

22. Vizsgáljuk meg kettős variancia-analizissel, hogy azon kisérletben - melynek adatait a XXX. sz. táblázat tartalmazza - a kezelések és a blokkok között van-e lényeges eltérés.

XXIX. sz. táblázat.

B \ K		1	...	j	...	n	$\Sigma x_{i.}$ / $\Sigma x_{i.}^2$	$\bar{x}_{i.}$ / $\bar{x}_{i.}^2$
1	$x_{1.}$	x_{11}		x_{13}		x_{14}	$\Sigma x_{1.}$	$\bar{x}_{1.}$
	$x_{1.}^2$	x_{11}^2		x_{ij}^2		x_{14}^2	$\Sigma x_{1.}^2$	$\bar{x}^2_{1.}$
⋮								
i	$x_{i.}$	x_{i1}		x_{ij}		x_{in}	$\Sigma x_{i.}$	$\bar{x}_{i.}$
	$x^2_{i.}$	x_i^2		x_{ij}^2		x_{in}^2	$\Sigma x^2_{i.}$	$\bar{x}^2_{i.}$
⋮								
m	$x_{m.}$	x_{m1}		x_{mj}		x_{mn}	$\Sigma x_{m.}$	$\bar{x}_{m.}$
	$x_{m.}^2$	x^2_{m1}		x^2_{mj}		x_{mn}	$\Sigma x^{2.}_{m.}$	$\bar{x}^2_{m.}$
$\Sigma x_{.j}$		$\Sigma x_{.j}$		$\Sigma x_{.j}$		Σx_n	Σx_{ij}	
$\Sigma x_{.j}^2$		$\Sigma x_{.1}^2$		$\Sigma x_{.j}^2$		Σx^2_n	Σx^2_{ij}	$\Sigma \bar{x}^2_{.i}$
$\bar{x}_{.j}$		$\bar{x}_{.1}$		$\bar{x}_{.j}$		$\bar{x}_{.n}$	$\bar{x}$	
$\bar{x}_{.j}^2$		$\bar{x}_{.1}^2$		$\bar{x}_{.j}^2$		$\bar{x}^2_{.n}$	$\bar{x}^2$	$\Sigma \bar{x}^2_{.j}$

XXX. sz. táblázat.

B \ K		1	2	3	4	$\Sigma x_{i.}$ / $\Sigma x_{i.}^2$	$\bar{x}_{i.}$ / $\bar{x}_{i.}^2$
1	$x_{1.}$	7,8	11,7	8,5	9,0	37	9,250
	$x_{1.}^2$	60,84	136,89	72,25	81,00	350,98	85,5625
2	$x_{2.}$	15,2	13,3	10,9	12,4	51,8	12,960
	$x_{2.}^2$	231,04	176,89	118,81	153,76	580,50	167,7025
3	$x_{3.}$	10,4	12,0	9,7	13,2	45,3	11,325
	$x_{3.}^2$	108,16	144,00	94,09	174,24	520,49	128,2556
4	$x_{4.}$	11,9	12,4	13,1	13,9	51,3	12,825
	$x_{4.}^2$	141,61	153,76	171,61	193,21	660,19	164,4806
$\Sigma x_{.j}$		45,3	49,4	42,2	48,5	185,4	
$\Sigma x_{.j}^2$		541,65	611,54	456,76	602,21	2212,16	$546{,}0012=\Sigma\bar{x}_{i.}^2$
$\bar{x}_{.j}$		11,325	12,350	10,550	12,125	11,5875	
$\bar{x}_{.j}^2$		128,2556	152,5225	111,3025	147,056	134,2702	$539{,}0962=\Sigma\bar{x}_{.j}^2$

$$N\bar{x}^2 = 16 \,.\, 134{,}2702 = 2148{,}3232 \approx 2148{,}323$$

$$m\Sigma\bar{x}_{.j}^2 = 4 \,.\, 539{,}0962 = 2156{,}3848 \approx 2156{,}385$$

$$n\Sigma\bar{x}_{i.}^2 = 4 \,.\, 546{,}0012 = 2184{,}0048 \approx 2184{,}005$$

$$SQ = \Sigma x_{ij}^2 - N\bar{x}^2 = 2212{,}16 - 2148{,}32 = 63{,}84$$

$$FG = N - 1 = 16-1 = 15$$

$$SQ_K = m\Sigma\bar{x}_{.j}^2 - N\bar{x}^2 = 2156{,}385 - 2148{,}323 = 8{,}062 \approx 8{,}06$$

$$FG_K = m - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$SQ_B = n\sum \bar{x}^2_{i.} - N\,\bar{x}^2 = 2184{,}005 - 2148{,}323 = 35{,}682 \approx 35{,}68$$

$$FG_B = n - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$SQ_H = SQ - (SQ_K + SQ_B) = 63{,}84 - (8{,}06 + 35{,}68) = 20{,}10$$

$$FG_H = Fg - (FG_K + FG_B) = 15 - (3 + 3) = 9$$

$$s^2_K = \frac{SQ_K}{FG_K} = \frac{8{,}06}{3} \approx 2{,}69$$

$$s^2_B = \frac{SQ_B}{FG_B} = \frac{35{,}68}{3} \approx 11{,}89$$

$$s^2_H = \frac{SQ_H}{FG_H} = \frac{20{,}10}{9} \approx 2{,}23$$

Kezelések:

$$F = \frac{s^2_K}{s^2_H} = \frac{2{,}69}{2{,}23} \approx 1{,}21 \;; \qquad FG_K = 3 \;; \qquad FG_H = 9$$

$$F_{0,05} \approx 4 \;; \qquad F < F_{0,05} \;; \qquad s^2_K \approx s^2_H$$

Blokkok:

$$F = \frac{s^2_B}{s^2_H} = \frac{11{,}89}{2{,}23} \approx 5{,}33 \;; \qquad FG_B = 3 \;; \qquad FG_H = 9$$

$$F_{0,05} \approx 4 \;; \qquad F > F_{0,05} \;; \qquad s^2_B > s^2_H$$

A kettős variancia analizis a kezelések között nem mutat lényeges eltérést, de a blokkok között igen. Tehát nem sikerült a blokkokban biztositani az azonos körülményeket. A XXX. sz. táblázatban a blokkátlagokat összehasonlitva látszik, hogy az 1.-es blokk "kiugrik" a többi közül. Vizsgáljuk meg a "t" próbával a blokk-átlagok eltéréseit páronként.

$$SzD_{0,05} = t_{0,05}\, s_H \sqrt{\frac{2}{n}}\,; \qquad n = 4\,; \qquad s_H = \sqrt{2,23} = 1,49 \text{ cm};$$

$$FG_H = 9 \ldots t_{0,05} \approx 2,3$$

$$SzD_{0,05} = 2,3 \,.\, 1,49 \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1,3 \,.\, 1,49}{\sqrt{2}} \approx 2,43 \text{ cm}$$

$$\left|\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{2.}\right| = \left|9,25 - 12,95\right| = 3,70 \text{ cm} > SzD_{0,05} \quad \underline{\bar{x}_{1.} \neq \bar{x}_{2.}}$$

$$\left|\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{3.}\right| = \left|9,25 - 11,33\right| = 2,08 \text{ cm} < SzD_{0,05}$$

$$\left|\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{4.}\right| = \left|9,25 - 12,83\right| = 3,58 \text{ cm} > SzD_{0,05} \quad \underline{\bar{x}_{1.} \neq \bar{x}_{4.}}$$

$$\left|\bar{x}_{2.} - \bar{x}_{3.}\right| = \left|12,95 - 11,33\right| = 1,62 \text{ cm} < SzD_{0,05}$$

$$\left|\bar{x}_{2.} - \bar{x}_{4.}\right| = \left|12,95 - 12,83\right| = 0,12 \text{ cm} < SzD_{0,05}$$

$$\left|\bar{x}_{3.} - \bar{x}_{4.}\right| = \left|11,33 - 12,83\right| = 1,50 \text{ cm} < SzD_{0,05}$$

Az 1-es blokk átlaga a 2-es és a 4-es blokktól lényegesen eltér $P^{*} = 0,05$ tévedési szinten. Ha az "F" próba a kezelések között eltérést mutatna, célszerü volna az 1-es blokk nélkül az egyszerü varianciaanalizist mégegyszer elvégezni.

A véletlen elrendezésnek sok előnye van. Amellett, hogy legolcsóbban kivitelezhető, eleget tesz az elméleti követelményeknek. Utólag bármely kezelés, vagy blokk kihagyható az értékelésből, bármily kezelés csoport külön-külön is értékelhető, szükség esetén a kisérlet többtényezőssé is átalakitható, ezenkivül az esetleg kiesett érték is pótolható számitással.

4.13 A kisérletben hiányzó érték pótlása

Hiányozzék egy "n" kezelésü és "m" ismétlésü véletlen elrendezésü kisérletből egy elemünk valami ok folytán. Jelöljük a hiányzó elemet "x"-el. A feladatunk ezen "x" elem meghatározása. Evégből jelöljük az "x"-et tartalmazó kezelés "x" nélküli összegét $\sum_{1}^{m-1} x_i$-vel, az "x"-t tartalmazó ismétlés (blokk) "x" nélkül vett összegét $\sum_{1}^{n-1}$ xj-vel, a kisérlet összegét "x"- nélkül $\sum_{1}^{N-1} x_{ij}$-vel és irjunk fel belőlük egyenlőséget:

$$n\left(\sum_{1}^{m-1} x_i + x\right) + m\left(\sum_{1}^{m-1} x_j + x\right) \approx \sum_{1}^{m-1} x_{ij} + x + mnx$$

ebből ki kell fejeznünk "x"-et

$$n\sum_{1}^{m-1} x_i + m\sum_{1}^{n-1} x_j + nx + mx \approx \sum_{1}^{N-1} x_{ij} + x + mnx$$

$$n\sum_{1}^{m-1} x_i + m\sum_{1}^{n-1} x_j - \sum_{1}^{N-1} x_{ij} \approx x\,(mn-n-m+1)$$

$$n\sum_{1}^{m-1} x_i + m\sum_{1}^{n-1} x_j - \sum_{1}^{N-1} x_{ij} \approx x\,(m-1)\,.\,(n-1)$$

$$x \approx \frac{n\,.\sum_{1}^{m-1} x_i + m\sum_{1}^{n-1} x_j - \sum_{1}^{N-1} x_{ij}}{(m-1)\,.\,(n-1)} \qquad (160)$$

Példa:

23. Számitsuk ki a XXXI. sz. táblázatban szereplő kisérletnél a hiányzó "x" értéket.

XXXI. sz. táblázat.

blokk \ kezelés	1	2	3	4	Σ
1	x	9,165	10,365	8,100	27,630
2	8,745	8,255	8,505	8,895	34,400
3	7,880	9,175	8,950	9,895	35,900
4	8,335	9,135	10,190	8,155	35,815
Σ	24,960	35,730	38,010	35,045	133,745

$$\sum_{1}^{m-1} x_i = 24{,}960; \quad n = 4; \quad n\sum_{1}^{m-1} x_i = 4\,.\,24{,}960 = 99{,}840$$

$$\sum_1^{n-1} x_j = 27{,}630; \quad m = 4; \quad m \sum_1^{n-1} x_j = 4 \cdot 27{,}630 = 110{,}520$$

$$\sum_1^{N-1} x_{ij} = 133{,}745; \quad (m-1) \cdot (n-1) = 9$$

$$x \approx \frac{n \sum_1^{m-1} x_i + m \sum_1^{n-1} x_j - \sum_1^{N-1} x_{ij}}{(m-1)\ (n-1)} = \frac{110{,}520+99{,}840 - 133{,}745}{9} =$$

$$= \frac{76{,}615}{9} = 8{,}513$$

4.14 A kisérlet pontosságának ellenőrzése

A kisérlet pontosságának ellenőrzésére fel szokták használni a hibaszórással számitott variációs koefficienst:

$$s_H\% = \frac{100 \cdot s_H}{\bar{x}}\ \%$$

Ez az érték azonban a kisérlet természetétől függ, különböző tipusu kisérleteknél más és más. Kialakult skálával erdészeti és faipari kisérleteket illetően még nem rendelkezünk. Ezért előnyösebb a kisérlet pontosságának mérésére a kisérlet hibahatárát felhasználni, amelynek képletében a kisérlet szórása helyett a hibaszórását használjuk fel, és a t_P^*-t az FG_H-nak megfelelően irjuk ki a táblázatból:

$$\Delta_H = t_P* \frac{s_H}{\sqrt{N}} \tag{161}$$

Ezt a hibahatárt a kisérlet számtani közepének százalékában is kifejezhetjük:

$$\Delta_H\% = \frac{100\ \Delta_H}{\bar{x}}\ \% \tag{162}$$

Erre az értékre ugyanaz érvényes, mint a mintánál már emlitettük, hogy általában a $\Delta_H\%$ az 5%-os tévedési szinten ne haladja meg az 5%-ot.

Már szó volt arról, hogy a kisérlet elemszáma megtervezhető. A képlet levezetésénél a (162) -esből indulunk ki.

$$\Delta_H\% = \frac{100\ t_P^* s_H}{\bar{x}\sqrt{N}} = \frac{t_P^* s_H\%}{\sqrt{N}}$$

$$\sqrt{N} = \frac{t_P^* s_H\%}{\Delta_H\%}$$

$$N = \left(\frac{t_P^* s_H\%}{\Delta_H\%}\right)^2 \qquad (163)$$

A t_P^* kikeresésénél az FG_H-t használjuk fel, illetőleg ha ez nem áll rendelkezésre, FG_H = 10-el dolgozunk.

Példa:

24. Ellenőrizzük a 22-es példában szereplő kisérlet pontosságát, majd állapitsuk meg, hogy mekkora "N" mellett lehetne a Δ_H %-ot 5 %-ra leszoritani.

$$s_H = 1{,}49\ \text{cm}; \quad n = 16; \quad FG_H = 9\ \ldots\ t_{0,05} \approx 2{,}3$$

$$\Delta_H = t_P^* \frac{s_H}{\sqrt{N}} = 2{,}3\ \frac{1{,}49}{\sqrt{16}} = 0{,}856 \approx 0{,}86\ \text{cm}$$

$$\bar{x} = 11{,}59\ \text{cm};$$

$$\Delta_H\% = \frac{100\ \Delta_H}{\bar{x}} = \frac{86}{11{,}59} \approx \underline{7{,}4\ \%}$$

$$\Delta_H\% = 5\ \%; \quad s_H\% = \frac{100\ s_H}{\bar{x}} = \frac{149}{11{,}59} \approx 12{,}9\ \%;$$

$$FG_H = 9\ \ldots\ t_P^* \approx 2{,}3$$

$$N = \left(\frac{t_{P^*} \, s_H\%}{\Delta_H\%}\right)^2 = \left(\frac{2{,}3 \, . \, 12{,}9\,\%}{5\,\%}\right)^2 = 5{,}94^2 \approx \underline{35}$$

Mivel a kezelések száma 4 célszerü a 35-öt 36-ra kerekiteni. Igy az ismétlések száma 9 lesz.

A kisérlet elemzésénél szereplő elemek általában már átlagértékek. A mi példáinkban parcella átlagok voltak, tehát 20-20 facsemete megfelelő méreteinek átlagai. De lehettek volna egy-egy forgácslapból készitett 10-20 próbatest megfelelő jellemzőjének átlaga is. Felmerül a kérdés, hogy a kisérletben szereplő átlagokat hány elemü mintából számitsuk. Ennek megállapitásánál a (118) - as képlet szerint járunk el. Természetesen a kisérletben szereplő minden átlag mögött egyforma elemszámu mintának (parcellának) kell állnia.

4.2 Latinnégyzet kisérletek

Már emlitettük, hogy elhelyezhetők a kezelések szisztematikusan is. Példa erre a latinnégyzet módszer, amikor az ismétlések száma a kezelések számával megegyezik $m = n$ és igy $N = n^2$. Minden kezelés soronként és oszloponként csak egyszer szerepel, igy minden sor illetve minden oszlop az összes kezelésnek teljes ismétlése (31. sz. ábra).

Oszlop:	1	2	3	4	5
1.blokk	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
2. "	K_3	K_4	K_2	K_5	K_1
3. "	K_4	K_1	K_5	K_2	K_3
4. "	K_5	K_3	K_4	K_1	K_2
5. "	K_2	K_5	K_1	K_3	K_4

31. sz. ábra.

5x5-ös latinnégyzet elrendezése

Leggyakrabban alkalmazzák az 5 x 5-ös és 6 x 6-os, ritkábban a 7 x7-es és 8 x 8-as elrendezéseket. Ennek az elrendezésnek az előnye a véletlen elrendezéssel szemben, hogy a talajegyenlőtlenségeket jobban kiküszöböli. Hátránya viszont, hogy több tényező esetén terjedelmes és bonyolult. Itt ellenőrizzük a blokkok közötti, a kezelések között, mivel a kezelések nem esnek egy oszlopba, az oszlopok közötti eltéréseket és a véletlenből adódó hiba eltérést. Tehát az eltérés négyzetösszeget itt 4 részre bontjuk:

$$\left.\begin{aligned} SQ &= SQ_H + SQ_K + SQ_B + SQ_0 \\ FG &= FG_H + FG_K + FG_B + FG_0 \end{aligned}\right\rangle \qquad (164)$$

$$SQ_0 = n\sum_1^n(\bar{x}_{.j}-\bar{x})^2 = n\sum_1^n \bar{x}_{.j}^2 - N\bar{x}^2; \qquad FG_0 = n-1$$

$$SQ_B = n\sum_1^n(\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2 = n\sum_1^n \bar{x}^2_{i.} - N\bar{x}^2; \qquad FG_B = n-1$$

$$SQ_K = n\sum_1^n(\bar{x}_K - \bar{x})^2 = n\sum_1^n \bar{x}^2_K - N\bar{x}^2; \qquad FG_K = n-1$$

$$SQ_H = SQ - (SQ_0 + SQ_B + SQ_K);$$

$$FG_H = FG - (FG_0 + FG_B + FG_K) = n^2 - 1 - 3(n-1) = n^2 - 3n + 2 =$$

$$= \underline{(n-1)\ (n-2)}$$

Példa:

25. Elemezzük a XXXII. táblázatba foglalt 5 x 5-ös latinnégyzet kísérletet. A kezeléseket indexszel ellátott "K"-val jelölöm.

XXXII. sz. táblázat.

Blokk \ Oszlop	1		2		3		4		5	
1	45	K_1	33	K_2	35	K_3	34	K_4	43	K_5
2	42	K_3	46	K_4	38	K_2	39	K_5	36	K_1
3	38	K_4	44	K_1	44	K_5	28	K_2	35	K_3
4	31	K_5	39	K_3	42	K_4	35	K_1	30	K_2
5	41	K_2	37	K_5	45	K_1	48	K_3	42	K_4

Az SQ értékekhez szükséges mennyiségeket a XXXIII. sz. táblázatban számitjuk.

XXXIII. sz. táblázat

B \ O		1	2	3	4	5	$\Sigma x_{i.}$ / $\Sigma x_{i.}^2$	$\bar{x}_{i.}$ / $\bar{x}_{i.}^2$	Σx_K	$\bar{x}_K$ / $\bar{x}_K^2$
1	$x_{1.}$	45 K_1	33	35	34	43	190	38,0	205	41,0
	$x_{1.}^2$	2025	1089	1225	1156	1849	7344	1444	K_1	1681
2	$x_{2.}$	42	46	38	39	36 K_1	201	40,2	170	34,0
	$x_{2.}^2$	1764	2116	1444	1521	1296	8141	1616,04	K_2	1156
3	$x_{3.}$	38	44	44 K_1	28	35	189	37,8	199	39,8
	$x_{3.}^2$	1444	1936	1936	784	1225	7325	1428,84	K_3	1584,04
4	$x_{4.}$	31	39	42	35 K_1	30	177	35,4	202	40,4
	$x_{4.}^2$	961	1521	1764	1225	900	6371	1253,16	K_4	1632,16
5	$x_{5.}$	41	37	45 K_1	48	42	213	42,6	194	38,8
	$x_{5.}^2$	1682	1369	2025	2304	1764	9143	1814,76	K_5	1505,44
$\Sigma x_{.j}$		197	199	204	184	186	970	$7554{,}8 = \Sigma \bar{x}_{i.}^2$	$\Sigma \bar{x}_K^2 = 7558{,}64$	
$\bar{x}_{.j}$		39,4	39,8	40,8	36,8	37,2	$\bar{\bar{x}} = 38{,}8$		$\bar{\bar{x}}^2 = 1505{,}44$	
$\Sigma x_{.j}^2$		1875	8031	8394	6990	7034	$38324 = \Sigma x_{ij}^2$			
$\bar{x}_{.j}^2$		1552,36	1584,04	1664,64	1354,24	1383,84	$7539{,}12 = \Sigma \bar{x}_{.j}^2$			

$N\bar{\bar{x}}^2 = 25 \cdot 1505{,}44 = 37636;\quad n\Sigma \bar{x}_{.j}^2 = 5 \cdot 7539{,}12 = 37695{,}6;$

$n\Sigma \bar{x}_{i.}^2 = 5 \cdot 7556{,}80 = 37784;\quad n\Sigma \bar{x}_K = 5 \cdot 7558{,}64 = 37793{,}2;$

$SQ = \Sigma x_{ij}^2 - N\bar{\bar{x}}^2 = 38324 - 37636 = 688$

$$FG = N-1 = 25-1 = 24; \quad s^2 = \frac{SQ}{FG} = \frac{688}{24} = 28{,}67$$

$$SQ_B = n \sum \bar{x}_{i.}^2 - N \bar{x}^2 = 37784 - 37636 = 148$$

$$FG_B = n - 1 = 4; \quad s^2_B = \frac{SQ_B}{FG_B} = \frac{148}{4} = 37$$

$$SQ_0 = n \sum \bar{x}_{.j}^2 - N \bar{x}^2 = 37695{,}6 - 37636 = 59{,}6$$

$$FG_0 = n - 1 = 4; \quad s^2_0 = \frac{SQ_0}{FG_0} = \frac{59{,}6}{4} = 14{,}9$$

$$SQ_K = n \sum \bar{x}^2_K - N \bar{x}^2 = 37793{,}2 - 37636 = 157{,}2$$

$$FG_K = n - 1 = 4; \quad s^2_K = \frac{SQ_K}{FG_K} = \frac{157{,}2}{4} = 39{,}3$$

$$SQ_H = SQ - (SQ_B + SQ_0 + SQ_K) = 688 - 148 - 59{,}6 - 157{,}2 = 323{,}2$$

$$FG_H = (n-1)(n-2) = 4.3 = 12; \quad s^2 = \frac{SQ_H}{FG_H} = \frac{323{,}2}{12} = 26{,}93$$

$$F = \frac{s^2_K}{s^2_H} = \frac{39{,}3}{26{,}93} = 1{,}146$$

$$FG_K = 4; \quad FG_H = 12 \; .... \quad F_{0,05} \approx 3{,}3$$

$$\underline{F < F_{0,05}}$$

5%-os szinten a kezelések között lényeges eltérés nincsen. Ezenkivül mind az s^2_B mind az s^2_0 kisebb mint s^2_K, igy minden további számitás nélkül is megállapitható, hogy ezen a szinten a blokkok, illetőleg az oszlopok között nincs lényeges eltérés. Még ellenőrizzük a kisérlet pontosságát:

$$s_H = \sqrt{26{,}93} \approx 5{,}09; \quad N = 25; \quad FG_H = 12 \; ... \; t_{0,05} = 2{,}2$$

$$\Delta_H = t_P * \frac{s_H}{\sqrt{N}} = 2{,}2 \, \frac{5{,}09}{5} \approx 2{,}24 \; ; \quad \bar{x} = 38{,}8;$$

$$\Delta_H\% = \frac{100 \quad H}{\bar{x}} = \frac{224}{38{,}8} \approx \underline{5{,}8\ \% > 5\ \%}$$

Tervezzük meg az elemszámot 5%-os hibahatárhoz:

$$\Delta_H\% = 5\%; \qquad s_H\ \% = \frac{100\ s_H}{\bar{x}} = \frac{509}{38{,}8} = 13{,}2\ \%;$$

$$FG_H = 12\ .\ .\ .\ t_P^* = 2{,}2;$$

$$N = \left(\frac{t_P^*\ s_H\%}{H\%}\right)^2 = \left(\frac{2{,}2\ .\ 13{,}2\ \%}{5\%}\right)^2 = (5{,}77)^2 \approx 6^2$$

Tehát 6 x 6-os elrendezéssel a $\Delta_H\%$ hibahatárt 5%- alá szorithattuk volna.

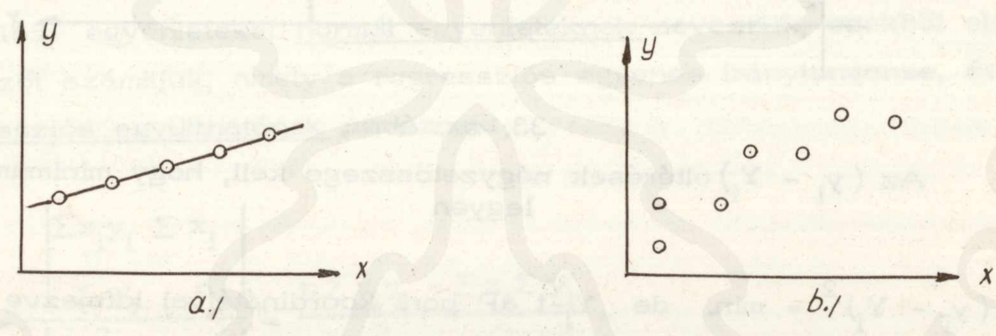
5. Korreláció és trendszámitás

5.1 A kétváltozós korreláció

Tanulmányaink során már találkoztunk két változó mennyiség között fennálló olyan kapcsolattal, mikor is a független változó adott számértékéhez a függő változónak meghatározott értéke (esetleg több meghatározott érték) tartozott. Az ilyen kapcsolatot függvény-kapcsolatnak neveztük (32/ a ábra). A valószinüségi változók közötti kapcsolat általában olyan, hogy a "független változónak" adott értékeihez a "függő változónak" csak átlagos értékei tartoznak. Az ilyen kapcsolatot sztohasztikus kapcsolatnak, vagy korrelációnak nevezzük. A korreláció tehát minden olyan összefüggés amely a függetlenség és függvénykapcsolat között van.

Mivel az erdővel és a faiparral kapcsolatos természeti, biológiai és gazdasági jelenségek egymással kapcsolatban állnak, a törvényszerüségek feltárása szempontjából komoly jelentősége van a statisztikai összefüggések (korreláció) vizsgálatának.

A statisztikai összefüggések vizsgálata két változós mintavétellel kezdődik, amelynek eredményeként két megfigyelési sorozat, (vagy gyakorisági sor) áll rendelkezésünkre. A két megfigyelési sorozat összetartozó értékpárjainak megfelelő pontokat korrodinata rendszerbe felhordva, ugy, hogy a "független változó" értékeit a vizszintes tengelyre, a "függő változóét" a függőleges tengelyre mérjük, korrelációs diagramot (32/ b. ábra) kapunk. A korrelációs diagram utbaigazitást ad a többi munkát illetően. Az összefüggés-vizsgálat célja ugyanis, hogy a független változónak (x_i) a "függő változóra" (y_i) gyakorolt hatását vizsgálja. Ezt a hatást általában két szempontból elemezzük. Egyik szempont a kapcsolat szorosságának mértéke, amit a korrelációs együtthatóval illetőleg a korrelációs indexszel mérünk. A korrelációs együttható, illetőleg a korrelációs index számitása a korreláció-számitás. A másik szempont az összefüggés tendenciája, vagyis az, hogy a "független változó" adott értékéhez átlagosan a "függő változónak" mekkora értéke várható. Másképpen kifejezve hogy a korrelációs diagramm pontjaira milyen függvény illeszkedik a legszorosabban. Azt a függvényt amelytől számitva a korrelációs diagram pontjainak a szórása a legkisebb, regressziós függvénynek nevezzük, ennek számitása a regressziós elemzés. A korreláció-számitást és regressziós elemzést általában együtt végezzük el a legkisebb négyzetek módszerének alapján, ezért együtt is fogjuk tárgyalni.



32. sz. ábra.

a/ Függvénykapcsolat b/ Korreláció

Az emlitett analitikus módszeren kivül az összefüggés vizsgálatnak számos közelitő módszere ismeretes, amelyekre itt nincs módunkban kitérni.

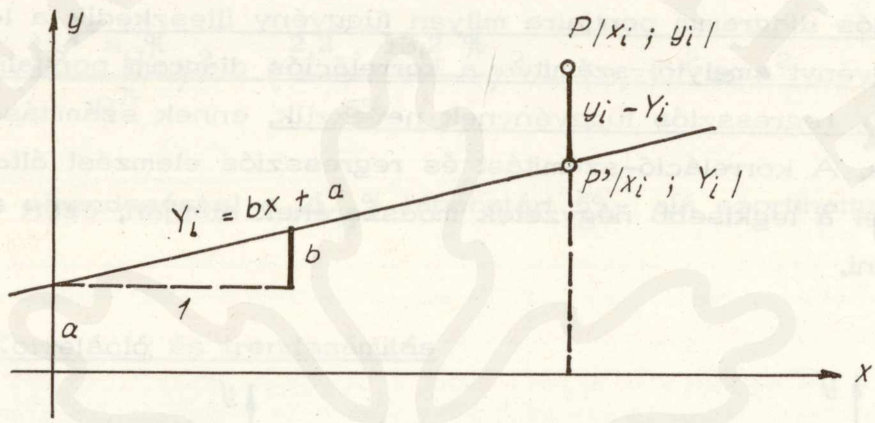
5.11 Két megfigyelési sorozat közötti lineáris összefüggés elemzése kevés adat esetén

Ha a korrelációs diagram pontjaira a legjobban illeszkedő függvény egyenes, lineáris korrelációról beszélünk (35. ábra). Ekkor a függvényt regressziós egyenesnek nevezzük.

Az elemzés célja a regressziós egyenes egyenletének meghatározása, majd a korrelációs tényező kiszámitása. A regressziós egyenes egyenlete:

$$\boxed{Y = b\,x + a}$$

Az egyenletben nem ismerjük "a" és "b" értékét, ezek számitásánál abból indulunk ki, hogy annak az egyenesnek az egyenletét keressük, amelytől az $(x_i ; y_i)$ pontok y irányu szórása és igy természetesen az eltérés négyzetösszege is minimális (33. sz. ábra).



33. sz. ábra.

Az $(y_i - Y_i)$ eltérések négyzetösszege kell, hogy minimum legyen

$\sum(y_i - Y_i)^2$ = min. de Y_i-t aP pont koordinátáival kifejezve Y_i =

$= b\,x_i + a$ tehát

$$\sum(y_i - bx_i - a)^2 = \text{min.}$$

Keressük azon "a" és "b" értékeket, amelyek mellett az eltérésnégyzetösszeg minimumban van. A kétváltozós függvények maximum-minimum számitásához hasonlóan számitjuk a függvénynek "a" és "b" szerinti parciális differenciálhányadosait, és azokat zéróval tesszük egyenlővé. Az igy kapott egyenletrendszer megoldása szolgáltatja a keresett "a" és "b" állandók értékét.

$$\frac{\partial \sum(y_i - a - bx_i)^2}{\partial b} = 2\sum(y_i - a - bx_i)(-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial \sum (y_i - a - bx_i)^2}{\partial_a} = 2\sum (y_i - a - b\,x_i)\;(-1) = 0$$

$$\sum (b\,x^2_i + ax_i - x_i\,y_i) = 0$$

$$\sum (b\,x_i + a - y_i) = 0$$

$$b\sum x^2_i + a\sum x_i - \sum x_i y_i = 0$$

$$b\sum x_i + a\,n - \sum y_i = 0$$

$$b\sum x^2_i + a\sum x_i = \sum x_i\,y_i$$

$$b\sum x_i + a\,n = \sum y_i \qquad (165)$$

A (165) egyenleteket <u>normál egyenleteknek</u> nevezzük, ezekből először a "b" tényezőt számitjuk, amely a regressziós egyenes iránytangense, és amelyet <u>regressziós együtthatónak</u> neveznek:

$$b = \frac{\begin{vmatrix} \sum x_i y_i & \sum x_i \\ \sum y_i & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x^2_i & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{vmatrix}} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x^2_i - (\sum x_i)^2} =$$

$$= \frac{\sum x_i y_i - n\,\frac{\sum x_i}{n}\,.\,\frac{\sum y_i}{n}}{\sum x^2_i - n\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2} = \frac{\sum x_i y_i - n\,\bar{x}\,\bar{y}}{\sum x^2_i - n\,\bar{x}^2} =$$

$$= \frac{\sum (x_i - \bar{x})\,.\,(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

<u>A $\sum (x_i - \bar{x})\,.\,(y_i - \bar{y}) = \sum x_i\,y_i - n\,\bar{x}\,\bar{y}$ eltérésszorzat összeget SP-</u>

vel jelöljük. A regressziós együttható tehát

$$\boxed{b = \frac{SP}{SQ_x}}$$

Az "a"-t legkönnyebben ugy határozhatjuk meg, ha a regressziós egyenes egyenletét az $(\bar{x} ; \bar{y})$ pontra felirjuk:

$$\bar{y} = b\,\bar{x} + a\,, \qquad \boxed{a = \bar{y} - b\,\bar{x}}$$

A regressziós egyenes egyenlete tehát:

$$Y = \frac{SP}{SQ_x}\,x + \left(\bar{y} - \frac{SP}{SQ_x}\,\bar{x}\right) \tag{166}$$

Az alkalmazott minimum-számitási módszert a legkisebb négyzetek elvének nevezzük.

Ezt a módszert eddig elméletileg nem sikerült indokolni, a kétváltozós függvények relativ szélsőérték számitásához csupán hasonlóan történik. A statisztikában alkalmazva azonban a gyakorlat hasznos eredményekkel bizonyitotta a módszer létjogosultságát.

A regresszió akkor lineáris, ha a korrelációs diagramm $P\,(x_i\,;\,y_i)$ pontjainak szórása a regressziós gyenestől számitva a legkisebb. Vagyis ha ezekre a pontokra jobban illeszkedik az egyenes, mint valamely más függvény. Ennek ellenőrzésére számitjuk a regressziós becslés szórását. Ezt egyenes esetében ugy kapjuk, hogy a pontoknak az egyenestől vett "y" irányu eltérésnégyzet összegét $SQ_Y = \sum (y_i - Y_i)^2$ osztjuk az $FG_Y = n-2$ szabadságfokkal (Y_i-ben "a", és "b" állandó szerepel), majd az igy kapott hányadosból négyzetgyököt vonunk:

$$s_Y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - Y_i)^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{SQ_Y}{FG_Y}} \tag{167}$$

$$SQ_Y = (y_i - Y_i)^2 = SQ_y - \frac{SP^2}{SQ_x}$$

A megfelelő variációs koefficiens:

$$s_Y\,\% = \frac{100\ s_Y}{\bar{y}}\,\%$$

ezt néha használják a regressziós becslés ellenőrzésére. Azonban általában a $(b-\beta)$ különbségből és ennek s_b szórásából képzett

$$t = \frac{b-\beta}{s_b}$$

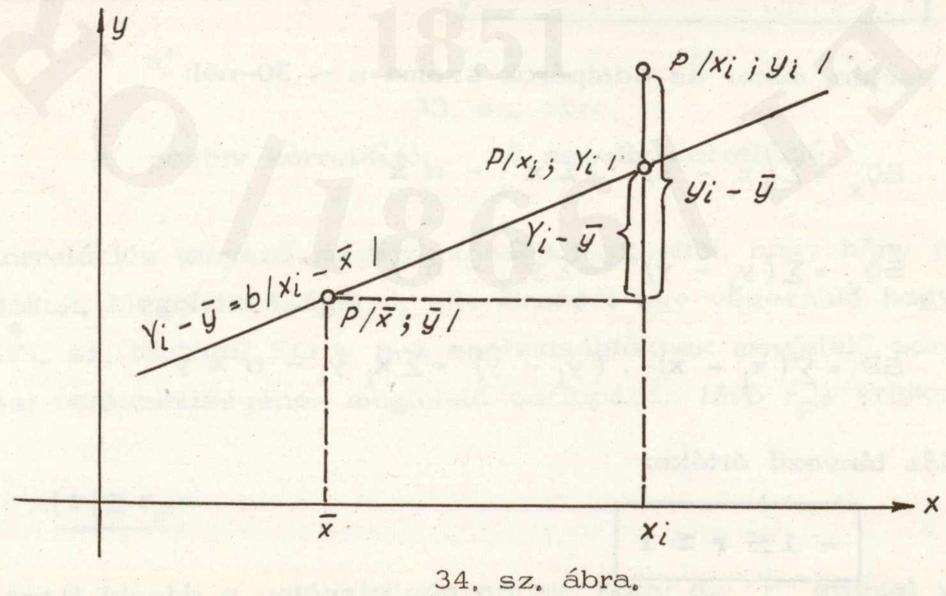
"t" eloszlásu valószinüségi változót használjuk fel. Ahol a β a "b" változó várható értéke, $\beta = 0$; s_b pedig a regressziós koefficiens szórása:

$$s_b = \frac{s_Y}{\sqrt{SQ_x}} \qquad (168)$$

Ha $\dfrac{|b-\beta|}{s_b} \leq t_{P^*}$ akkor a regressziós koefficiens P^* szinten véletlenszerü.

Ha azonban $\dfrac{|b-\beta|}{s_b} \leq t_{P^*}$ akkor a regressziós koefficiens P^* szinten szignifikáns (megbizható). A t_{P^*}-t az $FG_Y = n-2$ szabadságfoknak megfelelően irjuk ki.

Azt már meg tudjuk állapitani, hogy a kapcsolat lineáris, kiszámithatjuk a regressziós egyenes egyenletét. De a kapcsolat szorosságára vonatkozóan még nem sokat tudunk. <u>A kapcsolat szorosságának mérésére a korrelációs tényező szolgál.</u> Ennek számitásánál a 34. sz. ábrából indulunk ki:



34. sz. ábra.

A regressziós egyenes felirható, mint a $P(\bar{x}\ ;\ \bar{y})$ ponton átmenő egyenes

Minél szorosabb a két változó közötti kapcsolat, annál közelebb esnek az $(x_i ; y_i)$ pontok a regressziós egyeneshez, és az egyenes $(x_i ; Y_i)$ pontjai "y" irányu eltérésnégyzet-összegének és az $(x_i ; y_i)$ pontok "y" irányu eltérésnégyzet-összegének hányadosa annál jobban közeledik 1-hez, amit függvénykapcsolat esetén ér el. Ha a pontok távolodnak az egyenestől, az előbbi hányados zéróhoz közeledik. Jelöljük ezt a hányadost r^2-el.

$$r^2 = \frac{\sum (Y_i - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} ; \quad \text{de} \quad Y_i - \bar{y} = b(x_i - \bar{x}) :$$

$$r^2 = \frac{\sum \left[b(x_i - \bar{x}) \right]^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = b^2 \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = b^2 \frac{SQ_x}{SQ_y} =$$

$$= \frac{SP^2}{SQ_x^2} \frac{SQ_x}{SQ_y} = \frac{SP^2}{SQ_x \, SQ_y}$$

r^2-ből négyzetgyökvonással kapjuk a korrelációs tényezőt, amely alkalmas a lineáris kapcsolat szorosságának mérésére:

$$\boxed{r = b \sqrt{\frac{SQ_x}{SQ_y}} = \frac{SP}{\sqrt{SQ_x \, SQ_y}}} \qquad (169)$$

kevés adat esetén, mikor az adatpárok száma $n < 30$-nál:

$$SQ_x = \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n \bar{x}^2$$

$$SQ_y = \sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - n \bar{y}^2$$

$$SP = \sum (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = \sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}$$

A korrelációs tényező értéke:

$$\boxed{-1 \leq r \leq 1}$$

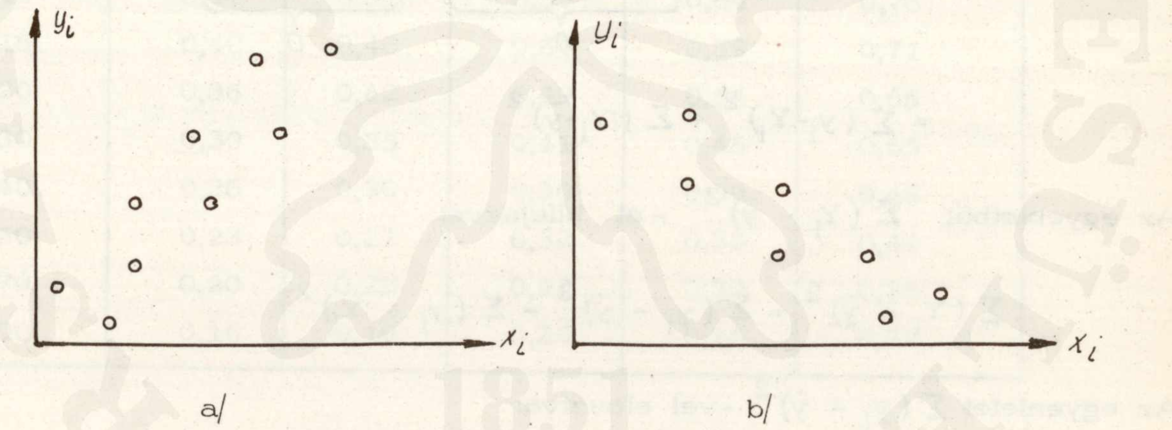
A kapcsolat mértékére a XXXIV. sz. táblázat közöl fokozatokat.

XXXIV. sz. táblázat.

r értéke	a kapcsolat szorossága
$r = 0$	nincs kapcsolat
$\lvert r \rvert < 0{,}4$	gyenge kapcsolat
$0{,}4 \leq \lvert r \rvert \leq 0{,}6$	közepes kapcsolat
$\lvert r \rvert > 0{,}6$	határozott kapcsolat
$\lvert r \rvert = 1$	függvény kapcsolat

Ha $r > 0$, x_i növekedése az y_i növekedésével jár, ez pozitiv korreláció.

Ha $r < 0$, x_i növekedése az y_i csökkenését vonja maga után, ennek neve negativ korreláció. (lásd a 33. sz. ábrát).



33. sz. ábra.

a/ pozitiv korreláció; b/ negativ korreláció

A korrelációs tényező megbizhatósága függ attól, hogy hány pont alapján számitottuk. Megbizhatóságának ellenőrzését ugy végezzük, hogy kikeressük a XXVII. sz. táblázat FG = n-2 szabadságfoknak megfelelő sorában és a P^* tévedési valószinüségének megfelelő oszlopában lévő r_{P^*} kritikus értéket, és ha

$$\lvert r \rvert \geq r_{P^*} \qquad (170)$$

P^* vagy annál kisebb a valószinüség annak, hogy az "r" értéket véletlen folytán adódjon ekkorának, tehát ezen a szinten a kapott mértékü kapcsolat szignifikáns. Ha viszont

$$|r| < r_{P^*} \qquad (171)$$

P^* szinten a kapcsolat mértéke nem megbizható, nem szignifikáns.

A regressziós egyenes illeszkedésének mértékét a korrelációs indexszel mérhetjük. A lineáris regressziónál a korrelációs index egyenlő a korrelációs koefficienssel, azonban a korreláció előjelét nem mutatja.

Jele: η. Az SQ_y felbontható két részre:

$$SQ_y = \Sigma(y_i - \bar{y})^2 = \Sigma(y_i - Y_i + Y_i - \bar{y})^2 =$$

$$= \Sigma\left[(y_i - Y_i) + (Y_i - \bar{y})\right]^2 =$$

$$= \Sigma\left[(y_i - Y_i)^2 + 2(y_i - Y_i) \cdot (Y_i - \bar{y}) + (Y_i - \bar{y})^2\right] =$$

$$= \Sigma(y_i - Y_i)^2 + \underbrace{2\Sigma Y_i(y_i - Y_i)}_{0} - \underbrace{2\bar{y}\Sigma(y_i - Y_i)}_{0} + \Sigma(Y_i - \bar{y})^2 =$$

$$= \Sigma(y_i - Y_i)^2 + \Sigma(Y_i - \bar{y})^2$$

Az egyenletből $\Sigma(Y_i - \bar{y})^2$ -et kifejezve:

$$\Sigma(Y_i - \bar{y})^2 = \Sigma(y_i - \bar{y})^2 - \Sigma(y_i - Y_i)^2$$

Az egyenletet $\Sigma(y_i - \bar{y})^2$ -vel elosztva:

$$\frac{\Sigma(Y_i - \bar{y})^2}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\Sigma(y_i - Y_i)^2}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}$$

$$r^2 = \eta^2 = 1 - \frac{\Sigma(y_i - Y_i)^2}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}$$

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{\Sigma(y_i - Y_i)^2}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{SQ_Y}{SQ_y}} \qquad (172)$$

Lineáris regresszió esetén ha az egyenest is számitjuk előnyösebb a korrelációs indexet számolni, ez a kapcsolat szorossága mellett az illeszkedés mértékét is jellemzi. Természetesen ha az összefüggés csak közel lineáris, az "r" és η között eltérés van.

XXXV. sz. táblázat.

r_{P^*} kritikus értékek

FG \ P^*	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
3	0,81	0,88	0,93	0,96	0,99
4	0,73	0,81	0,88	0,92	0,97
5	0,67	0,75	0,83	0,87	0,95
6	0,62	0,71	0,79	0,83	0,92
8	0,55	0,63	0,71	0,76	0,87
10	0,50	0,57	0,67	0,71	0,82
13	0,44	0,51	0,59	0,64	0,76
16	0,40	0,46	0,54	0,59	0,71
20	0,36	0,42	0,49	0,54	0,65
30	0,30	0,35	0,41	0,45	0,55
40	0,26	0,30	0,36	0,39	0,49
50	0,23	0,27	0,32	0,35	0,44
70	0,20	0,23	0,27	0,30	0,38
100	0,16	0,19	0,23	0,25	0,32

Példa

26. Elemezzük a kocsánytalan tölgycsemeték bizonyos idő alatti növekedésének mértéke és az anyaállomány záródása közötti összefüggést. A záródás mértékét jelző értékeket a XXXV. sz. táblázat x_i oszlopában, a növekedés mértékét jelző adatokat pedig az y_i oszlopban találjuk meg. Ugyanebben a táblázatban számitjuk az SP, SQ_x és SQ_y képletében szereplő mennyiségeket.

A korrelációs diagramm pontjainak elhelyezkedése mutatja, hogy a kapcsolat lineáris. (25. sz. ábra).

XXXVI. sz. táblázat.

i	x_i	y_i cm	$x_i y_i$	x^2_i	y^2_i
1	0,00	21,7	0,000	0,0000	470,89
2	0,20	17,1	3,420	0,0400	292,41
3	0,30	14,0	4,200	0,0900	196,00
4	0,40	12,2	4,880	0,1600	148,84
5	0,53	12,9	6,837	0,2809	166,41
6	0,56	10,7	5,992	0,3136	114,49
7	0,66	9,2	6,072	0,4356	84,64
$\sum$	2,65	97,8	31,401	1,3201	1473,68

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{2,65}{7} = 0,3786 \approx 0,38 \; ; \qquad \bar{x}^2 = 0,1433$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{97,8}{7} = 13,9714 \approx 13,97 \; ; \qquad \bar{y}^2 = 195,2000$$

$$SP = \sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = 31,401 - 7 \,.\, 0,3786 \,.\, 13,9714 = 31,401 - 37,027 =$$

$$= - 5,626; \; SQ_x = \sum x^2_i - n\bar{x}^2 = 1,3201 - 7 \,.\, 0,1433 = 1,3201 - 1,0031 = 0,317$$

$$SQ_y = \sum y^2_i - n\bar{y}^2 = 1473,68 - 7 \,.\, 195,1000 = 1473,68 - 1366,40 = 107,28$$

$$b = \frac{SP}{SQ_x} = - \frac{5,626}{0,317} = - 17,7476 - \underline{17,75}$$

$$a = \bar{y} - b\,\bar{x} = 13,9714 + 17,7476 \,.\, 0,3786 =$$

$$= 13,9714 + 6,7192 = 20,6906 \approx \underline{20,69}; \qquad Y = bx + a;$$

$$\underline{Y = - 17,75\, x + 20,69}$$

Az s_Y, s_b és η értékekhez szükséges mennyiségeket a XXXVII-es táblázatban számitjuk:

XXXVII. sz. táblázat.

i	x_i	bx_i	Y_i	y_i	y_i-Y_i	$(y_i-Y_i)^2$
1	0,00	0,00	20,69	21,7	1,01	1,020
2	0,20	-3,55	17,14	17,1	-0,04	0,002
3	0,30	-5,32	15,37	14,0	-1,37	1,877
4	0,40	-7,10	13,59	12,2	-1,39	1,932
5	0,53	-9,41	11,28	12,9	1,62	2,624
6	0,56	-9,94	10,75	10,7	-0,05	0,003
7	0,66	-11,71	8,98	9,2	0,22	0,048
$\sum$						7,506

$$SQ_Y = 7{,}51; \qquad FG_Y = n - 2 = 5$$

$$s_Y = \sqrt{\frac{SQ_Y}{n-2}} = \sqrt{\frac{7{,}51}{5}} = \sqrt{1{,}50} = \underline{1{,}23}$$

$$s_Y\% = \frac{s_Y 100}{\bar{y}} = \frac{123}{13{,}97} = 8{,}8\%$$

A pontok tehát 8,8 %-ban térnek el az egyenestől.

$$SQ_x = 0{,}32; \qquad s_Y = 1{,}23;$$

$$s_b = \frac{s_Y}{\sqrt{SQ_x}} = \frac{1{,}23}{\sqrt{0{,}32}} = 2{,}18$$

Elvégezzük a szignifikancia vizsgálatot:

$$FG_Y = n-2 = 5 \ldots t_{0{,}001} = 6{,}9 \; ; \; \beta = 0 \; ; \quad b = -17{,}75$$

$$t = \frac{|b-\beta|}{s_b} = \frac{|-17{,}75 - 0|}{2{,}18} = \frac{17{,}75}{2{,}18} \approx 8{,}15$$

$t > t_{0,001}$ tehát $P^*\% < 0,1\%$ szinten is szignifikáns a regressziós együttható.

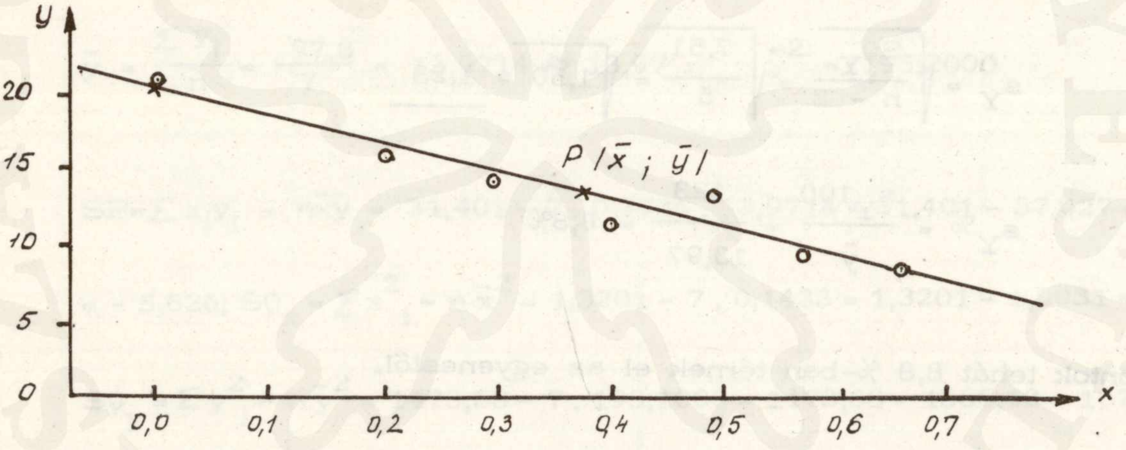
$$SQ_Y = 7,51; \qquad SQ_y = 107,28;$$

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{SQ_Y}{SQ_y}} = \sqrt{1 - \frac{7,51}{107,28}} = \sqrt{1-0,07} =$$

$$= \sqrt{0,93} = \underline{0,96}$$

Tehát a kapcsolat határozott és a regressziós egyenes jól illeszkedik a korrelációs diagramm pontjaira (35. sz. ábra).

$\underline{Y = 17,75\ x + 20,69}$



35. sz. ábra.
A korrelációs diagrammban a regressziós egyenes egyenlete

Végül szemléltetésképpen kiszámitjuk a korrelációs együtthatót, bár a korreláció lineáris lévén, tudjuk, hogy abszolut értékben meg fog egyezni a korrelációs indexszel:

$$SP = -5,63 \; ; \quad SQ_x = 0,32 \; ; \quad SQ_y = 107,28;$$

$$r = \frac{SP}{\sqrt{SQ_x\ SQ_y}} = \frac{-5,63}{\sqrt{0,32.107,28}} \approx -0,96$$

Ez határozott negativ kapcsolatot jelent. Elvégezzük a szignifikancia vizsgálatot:

$FG_Y = n-2 = 5$ -nek a XXXV-ös táblázatban $r_{0,001} = 0{,}95$ felel meg; tehát mivel

$$r > r_{0,001}$$

még a $P^{*}\% < 0{,}1\%$-os tévedési szinten is szignifikáns a határozott negativ korreláció.

5.12 Két megfigyelési sorozat lineáris kapcsolatának elemzése sok adat esetén

Sok adat esetén általában ha a pontok száma $n > 30$-nál, célszerü gyakorisági táblázatban (XXXVIII. sz. táblázat) rendezni az adatokat, majd ennek alapján korrelációs táblázatot (XXXIX. sz. táblázat) késziteni, melynek segitségével kiszámithatjuk a regressziós egyenes egyenletében és a korrelációs tényező képletében szereplő $\bar{x}$, $\bar{y}$, SQ_x, SQ_y és SP mennyiségeket.

Az $\bar{x}$ és $\bar{y}$ számtani közepeket célszerü a (17)-es képlettel számitani:

$$\bar{x} = x_D + d_x \frac{\sum x'_i f_i}{n}$$

$$\bar{y} = y_D + d_y \frac{\sum y'_i f_i}{n}$$

Az SQ_x, SQ_y és SP eltérésnégyzetösszegeket viszont a (19)-es képlet alapján érdemes számitani:

$$SQ_x = d^2{}_x \left[\sum x'^2_i f_i - \frac{1}{n} \left(\sum x'_i f_i \right)^2 \right]$$

$$SQ_y = d^2{}_y \left[\sum y'^2_i f'_i - \frac{1}{n} \left(\sum y'_i f'_i \right)^2 \right]$$

$$SP = d_x \cdot d_y \left[\sum x'_i y'_i f_{ij} - \frac{1}{n} \sum x'_i f_i \sum y'_i f'_i \right]$$

$$SQ_Y = SQ_y - \frac{SP^2}{SQ_x}$$

<u>Példa:</u>

27. Elemezzük 100 db. bükk fénylevelénél, a levéllemez hosszmérete és szélességi mérete közötti összefüggést. Az x_i a hosszméret, y_i a szélességi méretre vonatkozó valószinüségi változó. Az adatokat a XXXVIII. sz. gyakorisági táblázat tartalmazza:

XXXVIII. sz. táblázat.

x_i \ y_i	28	31	34	37	40	43	46	49	f_i
45	II	I	I						4
48			II	I					3
51		IIII	IIII	II					10
54		II	II	卌 I	IIII				14
57			卌	卌 卌 II	卌 II	I			25
60			III	III	卌 卌	卌 II	II		25
63				II	卌	卌			12
66					III	II			5
69								I	1
72							I		1
f'_i	2	7	17	29	28	13	3	1	100

A XXXVIII. sz. táblázatban a gyakoriságok az átlóra szimmetriusan helyezkednek el. Tehát az összefüggés lineárisnak tekinthető. Elkészithetjük a korrelációs táblázatot, amelyet ugy nyerünk, hogy a fenti táblázatra jobboldalt az x_i értékek, alul pedig y_i értékek számtani közép és szórásszámitási táblázatát épitjük rá. (XXXIX. sz. táblázat). Ebben a táblázatban számitjuk az $\bar{x}$, $\bar{y}$, SP, SQ_x és SQ_y értékekhez szükséges mennyiségeket:

$$\bar{x}' = 57; \qquad d_x = 3; \qquad \Sigma x'_i f_i = 14; \qquad n = 100;$$

$$\Sigma x'^2_i f_i = 304; \qquad \frac{1}{n} = 0{,}01; \qquad (\Sigma x'_i f_i)^2 = 196;$$

XXXIX. sz. táblázat.

x_i \ y_i	28	31	34	37	40	43	46	49	f_i	x'_i	x'^2_i	$x'_i f_i$	$x'^2_i f_i$
45	2	1	1						4	-4	16	-16	64
48			2	1					3	-3	9	-9	27
51	I	4	4	2			III		10	-2	4	-20	40
54		2	2	6	4				14	-1	1	-14	14
57			5	12	7	1			25	0	0	0	0
60			3	3	10	7	2		25	1	1	25	25
63				2	5	5			12	2	4	24	48
66	IV			3	2		II		5	3	9	15	45
69								1	1	4	16	4	16
72							1		1	5	25	5	25
f'_i	2	7	17	29	28	13	3	1	100			14	304
y'_i	-3	-2	-1	0	1	2	3	4					
y'^2_i	9	4	1	0	1	4	9	16					
$y'_i f'_i$	-6	-14	-17	0	28	26	9	4	30				
$y'^2_i f'_i$	18	28	17	0	28	52	27	16	186				

$$\bar{x} = \bar{x}' + d_x \frac{\Sigma x'_i f_i}{n} = 57 + 3\,\frac{14}{100} = \underline{57{,}42 \text{ mm}}$$

$$SQ_x = d^2_x \left[\Sigma x'^2_i f_i - \frac{1}{n} (\Sigma x'_i f_i)^2 \right] = 9 \,.\, 302{,}04 = 2718{,}36$$

$\bar{y}' = 37;\quad d_y = 3;\quad \Sigma y'_i f'_i = 30;\quad n = 100;\quad \Sigma y'^2_i f'_i = 186;$

$\frac{1}{n} = 0{,}01$

$(\Sigma y'_i f'_i)^2 = 900$

$$\bar{y} = \bar{y}' + d_y \frac{\sum y'_i f'_i}{n} = 37 + 3 \frac{30}{100} = 37 + 0,9 = 37,9 \text{ mm}$$

$$SQ_y = d^2_y \left[\sum y^2_i f'_i - \frac{1}{n} \left(\sum y'_i f'_i \right)^2 \right] = 9 \;.\; 177 = 1593$$

A $\sum x'_i y'_j \,.\, f_{ij}$ kifejezést ugy számitjuk ki, hogy a XXXIX. sz. táblázatban mindenegyes f_{ij} elemet megszorozzuk a vele egy sorban lévő x'_i és egy oszlopban lévő y'_i értékkel, majd ezeket a szorzatokat összegezzük. Az összegezést célszerü a táblázat négy részének megfelelően végezni.

I.	II.	III.
24	10	– 4
8	14	IV.
4	6	– 3
6	10	
16	20	
8	6	
4	15	
2	16	
72	97	

$$\sum x'_i \, y'_i \, f_{ij} = 169 - 7 = 162$$

$$SP = d_x d_y \left(\sum x'_i y'_i f_{ij} - \frac{1}{n} \sum x'_i f_i \sum y'_i f'_i \right) = 3.3 \,(162 - 0,01 \,.\, 14 \,.\, 30) = 157,8 \,.\, 9 = 1420,2$$

$$b = \frac{SP}{SQ_x} = \frac{1420,20}{2718,36} = \frac{157,80}{302,04} \;; \quad b = 0,5224$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 37,9 - 0,52 \,.\, 57,42 = 37,9 - 29,86 = 8,04$$

$y = b\,x + a$; $\quad y = \underline{0,52\,x + 8,04}$ regressziós egyenes.

A regressziós együttható szignifikancia vizsgálatához számitjuk s_y és s_b szórásokat.

$$SQ_x = 2718,36; \quad SQ_y = 1593; \quad SP = 1420,2$$

$$SQ_Y = SQ_y - \frac{SP^2}{SQ_x} = 1593 - \frac{(14202)^2}{2718,36} =$$

$$= 1593 - \frac{2016968{,}84}{2718{,}36} = 1593 - 741{,}98 = \underline{851{,}02}$$

$$s_Y = \sqrt{\frac{SQ_y}{n-2}} = \sqrt{\frac{851{,}02}{98}} = \sqrt{8{,}684} \approx 2{,}95$$

$$s_b = \frac{s_y}{\sqrt{SQ_x}} = \frac{2{,}95}{\sqrt{2718{,}36}} \approx 0{,}018; \quad b = 0{,}52, \ \beta = 0$$

$$t = \frac{|b-\beta|}{s_b} = \frac{0{,}52}{0{,}018} \approx 28{,}89$$

$$FG_Y = n-2 = 98 \ . \ . \ . \quad t_{0{,}001} \approx 3{,}4$$

$t > t_{0{,}001}$; tehát a regressziós együttható még $P^* < 0{,}001$ tévedési szinten is szignifikáns.

$$r = \frac{SP}{\sqrt{SQ_x \ SQ_y}} = \frac{1420{,}2}{\sqrt{2718{,}36 \ . \ 1593}} =$$

$$= \frac{157{,}8}{\sqrt{302{,}04 \ . \ 177}} = \frac{157{,}8}{13{,}30 \ . \ 17{,}39} = \frac{157{,}8}{231{,}3} \approx 0{,}68$$

A XXXIV. sz. táblázatban FG = 100 - 2 = 98-nál még a $P^* = 0{,}001$-hez tartozó kritikus érték is csak $r_{P^*} = 0{,}32$, ennél a számitott r = 0,68 érték lényegesen nagyobb, tehát $P^* < 0{,}001$ tévedési valószinüség mellett sem vethető el a határozott pozitiv korreláció ténye.

A korrelációs index:

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{SQ_Y}{SQ_y}} = \sqrt{1 - \frac{851{,}02}{1593}} = \sqrt{1 - 0{,}534} =$$

$$= \sqrt{0{,}466} \approx \underline{0{,}68}$$

megegyezik a korrelációs együtthatóval.

5.13 Lineárisra visszavezethető görbevonalu kapcsolat

Elég gyakori eset amikor pl. a korrelációs diagramm pontjaira valamilyen csucsponti, illetőleg középponti helyzetü "b"-ed foku parabola illeszthető a legszorosabban, vagy legalábbis egy meghatározott intervallumban a regressziós függvénynek jó közelitését adja. Ennek általános egyenlete:

$$\underline{y = a\,x^{b}} \tag{173}$$

Az egyenletet logaritmizálva:

$$\underline{\lg y = \lg a + b \lg x} \tag{174}$$

lineáris egyenletre jutunk, tehát a lineáris regresszió és korreláció képleteit alkalmazzuk, vigyázva arra, hogy x_i és y_i helyébe azok logaritmusa kerüljön. Igy az SQ értékek:

$$SP = \Sigma(\lg x_i - \overline{\lg x})\ (\lg y_i - \overline{\lg y})$$

$$SQ_x = \Sigma(\lg x_i - \overline{\lg x})^2 \tag{175}$$

$$SQ_y = \Sigma(\lg y_i - \overline{\lg y})^2$$

Példa:

28. Elemezzük a XL. sz. táblázatban lévő gyakorisági sorok közötti összefüggést.

XL. sz. táblázat.

i	x_i	y_i	$\lg x_i$	$\lg y_i$
1	1	0,2	0,0000	- 0,6990
2	3	0,7	0,4771	- 0,1549
3	4	1,1	0,6021	0,0414
4	7	2,8	0,8451	0,4472
5	9	4,2	0,9542	0,6232
6	12	5,2	1,0792	0,7160
7	15	9,4	1,1761	0,9731
8	17	15,1	1,2304	1,1790
Σ			6,3642	3,0860

$$\overline{\lg x} = \frac{\Sigma \lg x}{n} = \frac{6,3642}{8} = \underline{0,7955}$$

$$\overline{\lg y} = \frac{\Sigma \lg y}{n} = \frac{3,0860}{8} = \underline{0,3858}$$

XLI. sz. táblázat.

i	$\lg_x - \overline{\lg x}$	$\lg y - \overline{\lg y}$	$(\lg x - \overline{\lg x})^2$	$(\lg y - \overline{\lg y})^2$	$(\lg x - \overline{\lg x})(\lg y - \overline{\lg y})$
1	- 0,7955	- 1,0848	0,6328	1,1768	0,8630
2	- 0,3184	- 0,5407	0,1014	0,2924	0,1721
3	- 0,1934	- 0,3444	0,0374	0,1186	0,0666
4	0,0496	0,0614	0,0025	0,0038	0,0030
5	0,1587	0,2374	0,0252	0,0564	0,0377
6	0,2837	0,3302	0,0805	0,1090	0,0937
7	0,3806	0,5873	0,1448	0,3449	0,2235
8	0,4349	0,7932	0,1891	0,6292	0,3450
$\sum$			1,2137	2,7311	1,8046

$$SQ_x = 1{,}2137; \qquad SQ_y = 2{,}7311; \qquad SP = 1{,}8046$$

$$b = \frac{SP}{SQ_x} = \frac{1{,}8046}{1{,}2137} = \underline{1{,}4869 \approx 1{,}49}$$

$$\overline{\lg y} = \lg a + b\,\overline{\lg x}\,; \qquad \lg a = \overline{\lg y} - b\,\overline{\lg x}$$

$$\lg a = 0{,}3858 - 1{,}4869 \,.\, 0{,}7955 = 0{,}3858 - 1{,}1828$$

$$\lg a = -0{,}7970 = 0{,}2030 - 1; \qquad a = 0{,}1596$$

$$\underline{\lg y = -0{,}7970 + 1{,}4869 \lg x}$$

$$r = \frac{SP}{\sqrt{SQ_x\, SQ_y}} = \frac{1{,}8046}{\sqrt{1{,}2137 \,.\, 2{,}7311}} = \frac{1{,}8046}{\sqrt{3{,}3147}} =$$

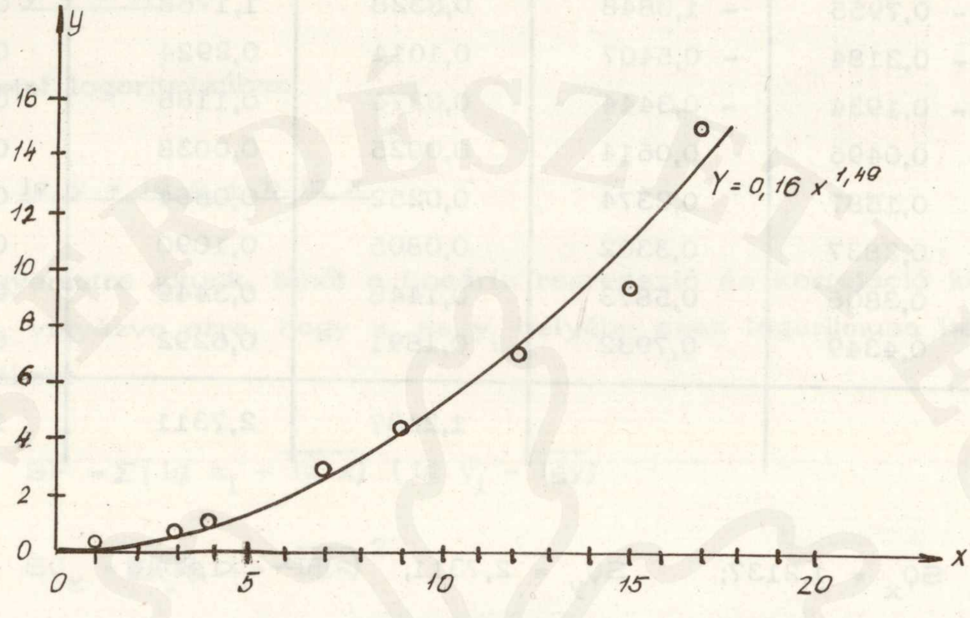
$$= \frac{1{,}8046}{1{,}8204} = 0{,}991$$

$$FG = n - 2 = 6 \qquad \ldots \qquad r_{0{,}001} = 0{,}92$$

$r > r_{0,001}$ . . . $P^{*}\,\% = 0{,}1$ %-os szinten is szignifikáns a korreláció.

$b \approx 1{,}49$; $a = 0{,}1596 \approx 0{,}16$ igy a regressziós függvény:

$$\underline{Y = 0{,}16\ x^{1{,}49}} \qquad (\text{36. sz. ábra}).$$



36. sz. ábra.

$Y = 0{,}16\ x^{1{,}49}$ egyenletü regressziós parabola a korrelációs diagrammban

Ha a korrelációs diagramm pontjaira nem illeszthető középponti (csucs-ponti) helyzetü parabola, a pontsort a tengelyek mentén a 35. példához hasonlóan a kivánt helyzetbe eltoljuk.

5.14 Másodfoku parabola illesztése görbevonalu regresszió esetén

A letárgyalt esetnél még gyakoribb az, amikor másodfoku parabolát illesztünk a korrelációs diagramm pontjaira. A másodfoku regressziós parabola egyenletét az irodalom

$$\underline{Y = a + b\,x + c\,x^2} \quad \ldots \qquad (176)$$

alakban ismerteti. Az egyenletből lévő a, b és c együtthatókat a legkisebb négyzetek módszerével határozzuk meg.

$$\Sigma\,(y_i - Y_i)^2 = \text{min.}\ ; \qquad Y_i = a + b\,x_i + c\,x_i^2$$

$$\Sigma(y_i - a - b\,x_i - c\,x^2{}_i)^2 = \min.$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2\Sigma(y_i - a - b\,x_i - cx^2{}_i)\,(-1) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2\Sigma(y_i - a - b\,x_i - c\,x^2{}_i)\,(-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = 2\Sigma(y_i - a - b\,x_i - c\,x^2{}_i)\,(-x^2{}_i) = 0$$

$$\Sigma(a + bx_i + c\,x^2{}_i - y_i) = 0$$

$$\Sigma(ax_i + bx^2{}_i + c\,x^3{}_i - x_i y_i) = 0$$

$$\Sigma(ax^2{}_i + b\,x^3{}_i + c\,x^4{}_i - x^2{}_i\,y_i) = 0$$

$$\begin{aligned} &na + b\Sigma x_i + c\Sigma x^2{}_i = \Sigma y_i \\ &a\Sigma x_i + b\Sigma x^2{}_i + c\Sigma x^3{}_i = \Sigma x_i y_i \\ &a\Sigma x^2{}_i + b\Sigma x^3{}_i + c\Sigma x^4{}_i = \Sigma x^2{}_i y_i \end{aligned} \qquad (177)$$

Számitás technikai szempontból azonban érdemes x_i helyett $x_i - \bar{x}$ és y_i helyett $y_i - \bar{y}$ eltérésekkel számolni:

$$an + b\Sigma(x_{i_0} - \bar{x}) + c\Sigma(x_i - x)^2 = \Sigma(y_{i_0} - \bar{y})$$

$$a\Sigma(x_i - \bar{x}) + b\Sigma(x_i - \bar{x})^2 + c\Sigma(x_i - \bar{x})^3 = \Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$a\Sigma(x_i - \bar{x})^2 + b\Sigma(x_i - \bar{x})^3 + c\Sigma(x_i - \bar{x})^4 = \Sigma(x_i - \bar{x})^2(y_i - \bar{y})$$

mivel az eltérésösszegek értéke zérus:

$$
\left.
\begin{aligned}
&a n + c\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 0 \\
&b\Sigma(x_i - \bar{x})^2 + c\Sigma(x_i - \bar{x})^3 = \Sigma(x_i - \bar{x})\,(y_i - y) \\
&a\Sigma(x_i - \bar{x})^2 + b\Sigma(x_i - \bar{x})^3 + c\Sigma(x_i - \bar{x})^4 = \Sigma(x_i - x)^2(y_i - y)
\end{aligned}
\right| \qquad (178)
$$

$$
D = \begin{vmatrix} n & 0 & \Sigma(x_i-\bar{x})^2 \\ 0 & \Sigma(x_i-\bar{x})^2 & \Sigma(x_i-\bar{x})^3 \\ \Sigma(x_i-\bar{x})^2 & \Sigma(x_i-\bar{x})^3 & \Sigma(x_i-\bar{x})^4 \end{vmatrix} =
$$

$$
= n\left\{\Sigma(x_i - \bar{x})^2\Sigma(x_i - \bar{x})^4 - \left[\Sigma(x_i - \bar{x})^3\right]^2\right\} +
$$

$$
+ \Sigma(x_i - \bar{x})^2\left[-\Sigma(x_i - \bar{x})^2\Sigma(x_i - \bar{x})^2\right] =
$$

$$
= n\left\{\Sigma(x_i - \bar{x})^2\Sigma(x_i - \bar{x})^4 - \left[\Sigma(x_i - \bar{x})^3\right]^2 - \frac{1}{n}\left[\Sigma(x_i - \bar{x})^2\right]^3\right\}
$$

$$
D_c = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma(x_i - \bar{x})^2 & \Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ \Sigma(x_i - \bar{x})^2 & \Sigma(x_i - \bar{x})^3 & \Sigma(x_i - \bar{x})^2(y_i - \bar{y}) \end{vmatrix} =
$$

$$
= n\left[\Sigma(x_i - \bar{x})^2\Sigma(x_i - \bar{x})^2\,(y_i - \bar{y}) - \Sigma(x_i - \bar{x})^3\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right.
$$

$c = \dfrac{D_c}{D}$; "n"-el egyszerüsitve:

$$
\boxed{c = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2\Sigma(x_i - \bar{x})^2\,(y_i - \bar{y}) - \Sigma(x_i - \bar{x})^3\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2\Sigma(x_i - \bar{x})^4 - \left[\Sigma(x_i - \bar{x})^3\right]^2 - \frac{1}{n}\left[\Sigma(x_i - \bar{x})^2\right]^3}}
$$

(179)

"c" ismeretében "a" és "b" már könnyen feltárható a (177)-es egyenletek alapján:

$$an = -c\sum(x_i - \bar{x})^2$$

$$\boxed{a = -\frac{c\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}} \qquad (180)$$

$$b\sum(x_i - \bar{x})^2 = \sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) - c\sum(x_i - \bar{x})^3$$

$$\boxed{b = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) - c\sum(x_i - \bar{x})^3}{\sum(x_i - \bar{x})^2}} \qquad (181)$$

Igy a regressziós parabola egyenlete:

$$\boxed{Y - \bar{y} = a + b(x - \bar{x}) + c(x - \bar{x})^2} \qquad (182)$$

A regressziós becslés szórását a (168)-as képlettel számitjuk ki, ahol $SQ_Y = \sum(Y_i - y_i)^2$ és $FG_Y = n - 3$) Y_i egyenletében 3 állandó van).

A kapcsolat szorosságát és egyben a regressziós parabola illeszkedését a korrelációs indexszel (172) mérjük.

Példa:

29. Elemezzük a XLII. sz. táblázatban lévő gyakorisági sorok közötti összefüggést.

XLII. sz. táblázat.

i	x_i	y_i
1	1	0,9
2	3	3,1
3	5	4,5
4	6	5,1
5	7	4,9
6	8	4,4
7	10	3,5
8	12	1,1
Σ	55	27,5

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{55}{8} = 6,875 \approx \underline{6,9}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{27,5}{8} = 3,4375 \approx \underline{3,44}$$

A regressziós parabola egyenletét a (182)-es képlettel és az ebben lévő állandókat a (179), (180) és (181)-es képletekkel számitjuk ki.

Ezen képletekben lévő mennyiségeket a XLIII. sz. táblázatban képezzük.

i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^3$	$(x_i - \bar{x})^4$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2 (y_i - \bar{y})$
1	-5,9	-2,54	34,81	-205,379	1211,7361	14,986	-88,4174
2	-3,9	-0,34	15,21	- 59,319	231,3441	1,326	- 5,1714
3	-1,9	1,06	3,61	- 6,859	13,0321	- 2,014	3,8266
4	-0,9	1,66	0,81	- 0,729	0,6561	- 1,494	1,3446
5	0,1	1,46	0,01	0,001	0,0001	0,146	0,0146
6	1,1	0,96	1,21	1,331	1,4641	1,056	1,1616
7	3,1	0,06	9,61	29,791	92,3521	0,186	0,5766
8	5,1	-2,34	26,01	132,651	676,5201	- 11,934	-60,8634
Σ			91,28	-272,286 163,774 -108,512	2227,1048	17,700 - 15,442 2,258	-154,4522 6,9240 -147,5282

$$c = \frac{91{,}28\,(-147{,}5282) - (-108{,}512)\;2{,}258}{91{,}28\,.\,2227{,}1048 - (-108{,}512)^2 - \frac{1}{8}(91{,}28)^3} =$$

$$= \frac{-13466{,}6637 + 245{,}0201}{203290{,}1261 - 11774{,}8541 - 95068{,}5531} =$$

$$= \frac{-13221{,}6436}{96446{,}7189} = -\underline{0{,}1371}$$

$$a = -\frac{-0{,}1371\,.\,91\,.\,28}{8} = \frac{12{,}5145}{8} = \underline{1{,}5643}$$

$$b = \frac{2{,}258 - (-0{,}1371)\,(-108{,}512)}{91{,}28} =$$

$$= \frac{2{,}258 - 14{,}877}{91{,}28} = -\frac{12{,}619}{91{,}28} = -\underline{0{,}1382}$$

$$Y - 3{,}4375 = 1{,}5643 - 0{,}1382\,(x - 6{,}8750) - 0{,}1371\,(x - 6{,}8750)^2$$

$$Y = 3{,}4375 + 1{,}5643 - 0{,}1382\,x + 0{,}9501 - 0{,}1371\,x^2 +$$

$+ 1{,}8851\,x - 6{,}4801$

$Y = -\,0{,}528 + 1{,}7469\,x - 0{,}1371\,x^2$ az állandókat kerekitve:

$\underline{Y = -\,0{,}53 + 1{,}75\,x - 0{,}14\,x^2}$

Ezután kiszámitjuk a regressziós becslés szórását és a korrelációs indexet. A még ismeretlen SQ_Y és SQ_y mennyiségeket a XLIV. sz. táblázatban képezzük.

XLIV. sz. táblázat.

i	bx	cx^2	Y_i	$y_i - Y_i$	$(y_i - Y_i)^2$	$(y_i - \bar{y}_i)^2$
1	1,747	- 0,137	1,08	- 0,18	0,0324	6,4516
2	5,241	- 1,233	3,48	- 0,37	0,1369	0,1156
3	8,735	- 3,425	4,78	-00,28	0,0784	1,1236
4	10,482	- 4,932	5,02	0,08	0,0064	2,7556
5	12,229	- 6,713	4,99	- 0,09	0,0081	2,1316
6	13,976	- 8,768	4,68	- 0,28	0,0784	0,9216
7	17,470	-13,700	3,24	0,26	0,0676	0,0036
8	20,964	-19,728	0,71	0,39	0,1521	5,4756
Σ					0,5603	18,9788

$$SQ_Y = 0{,}5603\ ; \quad FG_Y = n - 3 = 5$$

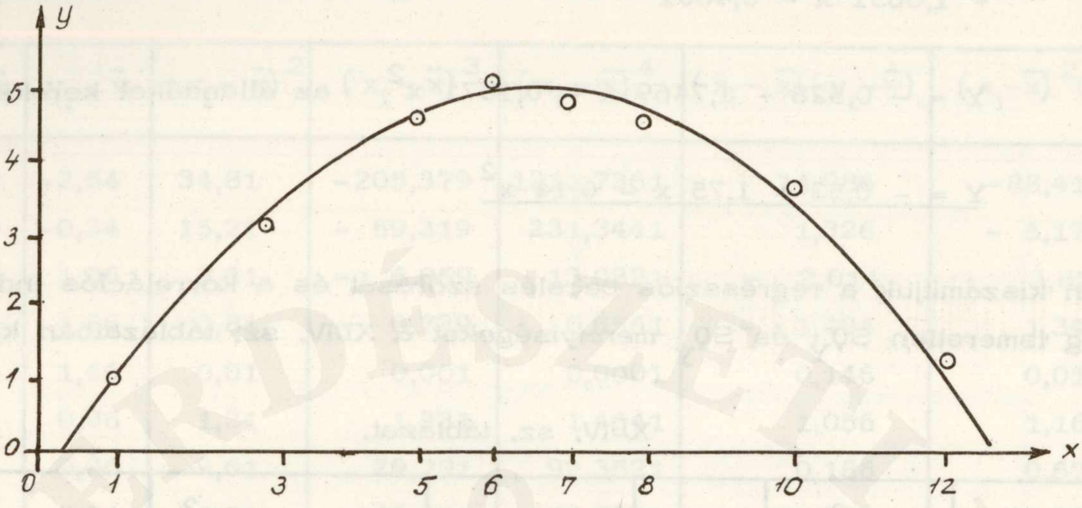
$$s_Y = \sqrt{\frac{SQ_Y}{FG_Y}} = \sqrt{\frac{0{,}5603}{5}} = \sqrt{0{,}112} = \underline{0{,}335}$$

$$s_Y\% = \frac{100\ s_Y}{\bar{y}} = \frac{33{,}5}{3{,}44} \approx 9{,}7\ \%$$

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{SQ_Y}{SQ_y}} = \sqrt{1 - \frac{0{,}5603}{18{,}9788}} = \sqrt{1 - 0{,}0295} =$$

$$= \sqrt{0{,}9705} = \underline{0{,}985}$$

Igen szoros kapcsolatról és jó illeszkedésről van szó.



37. sz. ábra.

Az $Y = -0,53 + 1,75x - 0,14x^2$ egyenletü regressziós parabola

5.15 Hiperbola illesztése görbevonalu regresszió esetén

Ha a korrelációs diagramm pontjai ugy helyezkednek el és az összefüggés természetéből is logikusan következik, hogy a regressziós függvény görbéjének aszimptótái lesznek, akkor ezekre a pontokra regressziós hiperbolát illesztünk.

A legegyszerübb esetben, amikor a függőleges aszimptota maga az "y" tengely és a vizszintes aszimptota párhuzamos az "x" tengellyel, regressziós függvénynek az

$$\boxed{y = a + \frac{b}{x}} \qquad (183)$$

egyenletü egyenszáru hiperbolát választjuk. Az "a" és "b" állandókat a legkisebb négyzetek módszerével állapitjuk meg.

$$\sum(y_i - Y_i)^2 = \min.; \qquad Y_i = a + \frac{b}{x_i}$$

$$\sum\left(y_i - a - \frac{b}{x_i}\right)^2 = \min.$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2\sum\left(y_i - a - \frac{b}{x_i}\right) \cdot (-1) = 0$$

$$\frac{\delta F}{\delta b} = 2\sum\left(y_i - a - \frac{b}{x_i}\right)\left(-\frac{1}{x_i}\right) = 0$$

$$\sum\left(a + \frac{b}{x_i} - y_i\right) = 0$$

$$\sum\left(\frac{a}{x_i} + \frac{b}{x_i^2} - \frac{y_i}{x_i}\right) = 0$$

$$an + b\sum\frac{1}{x_i} = \sum y_i$$

$$a\sum\frac{1}{x_i^2} + b\sum\frac{1}{x^2} = \sum\frac{y_i}{x_i}$$

$$D = \begin{vmatrix} n & \sum\frac{1}{x_i} \\ \sum\frac{1}{x_i} & \sum\frac{1}{x_i^2} \end{vmatrix} = n\sum\frac{1}{x_i^2} - \left(\sum\frac{1}{x_i}\right)^2$$

$$D_a = \begin{vmatrix} \sum y_i & \sum\frac{1}{x_i} \\ \sum\frac{y_i}{x_i} & \sum\frac{1}{x_i^2} \end{vmatrix} = \sum y_i\sum\frac{1}{x_i^2} - \sum\frac{y_i}{x_i}\sum\frac{1}{x_i}$$

$$D_b = \begin{vmatrix} n & \sum y_i \\ \sum\frac{1}{x_i} & \sum\frac{y_i}{x_i} \end{vmatrix} = n\sum\frac{y_i}{x_i} - \sum y_i\sum\frac{1}{x_i}$$

$$\boxed{a = \frac{D_a}{D} = \frac{\sum y_i\sum\frac{1}{x_i^2} - \sum\frac{y_i}{x_i}\sum\frac{1}{x_i}}{n\sum\frac{1}{x_i^2} - \left(\sum\frac{1}{x_i}\right)^2}}$$

$$\boxed{b = \frac{D_b}{D} = \frac{n\sum \frac{y_i}{x_i} - \sum y_i \sum \frac{1}{x_i}}{n\sum \frac{1}{x_i^2} - \left(\sum \frac{1}{x_i}\right)^2}}$$

Ha a korrelációs diagramm pontjaira olyan hiperbola illik, amelyik "x" irányba tolódik el, akkor a regressziós hiperbola egyenlete:

$$Y = \frac{1}{c + dx} \qquad (184)$$

amelynek azonban - könnyebb kezelés céljából - érdemes reciprokát venni:

$$\frac{1}{Y} = c + dx \qquad (185)$$

Ebben az egyenletben $\frac{1}{Y} = Y^*$ helyettesitést alkalmazva $Y^* = c + dx$ lineáris függvényt nyerünk, amelynek az illesztését már ismerjük.

Amennyiben a pontsorra illeszthető hiperbola mindkét irányban el van tolva, a regressziós függvény egyenlete:

$$Y = a + \frac{b}{x - c} \qquad (186)$$

Mivel itt három értéket (a, b, c) kell meghatároznunk, megvizsgáljuk, hogy a rendelkezésünkre álló ismeretek alapján "a" illetőleg "c" paraméterek közül melyiket tudjuk pontosabban megbecsülni:

a/ Ha "c"-t, akkor az x_i sorozatot "c"-vel eltoljuk, ugy hogy a hiperbola függőleges aszimptótája az "y" tengely legyen. Ebben az esetben a (183) -as lesz a regressziós függvény.

b/ Ha az "a"-t, akkor az y_i sorozatot toljuk el "a"-val ugy, hogy a hiperbola vizszintes aszimptótája az "x" tengely legyen. Majd a (186) -os egyenlet

$$\underbrace{Y - a}_{z} = \frac{b}{x - c} \qquad z = \frac{b}{x - c}$$

alakot vesz fel, és ezt $\frac{1}{z} = \frac{1}{b}x - \frac{c}{b}$ azaz

$$\frac{1}{z} = c^* + d^*$$

formára hozhatjuk, amely viszont megegyezik a (185) -ös függvénnyel.

A regressziós becslés szórását és a korrelációs indexet ugyanazon módszerrel számitjuk, mint a regressziós másodfoku parabolánál tettük. A (183)-as egyenletnél FG_Y = n - 2, viszont a (186)-osnál FG_Y = n -3 lesz, a becsült állandóktól függően.

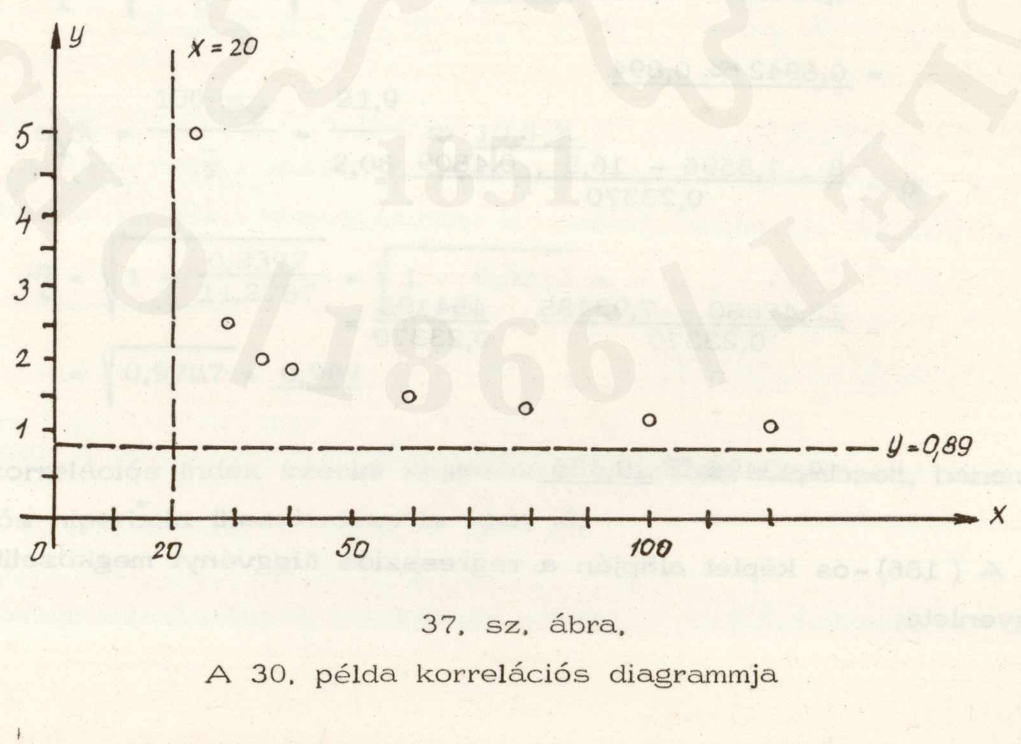
Példa:

30. elemezzük a XLV. sz. táblázatban lévő gyakorisági sorok közötti összefüggést.

XLV. sz. táblázat.

i	x_i	y_i
1	25	5,0
2	30	2,5
3	35	2,0
4	40	1,8
5	60	1,5
6	80	1,3
7	100	1,2
8	120	1,2

A XLV. sz. táblázat alapján korrelációs diagrammot készithetünk. (37. sz. ábra) .



37. sz. ábra.

A 30. példa korrelációs diagrammja

"c" értékét + 20-nak választjuk és azt az értéket minden x_i értékből kivonjuk az uj változót x_i'-vel jelöljük. $x_i' = x_i - 20$.

XLVI. sz. táblázat.

i	x'_i	y_i	$\frac{1}{x'_i}$	$\frac{1}{x'^2_i}$	$\frac{y_i}{x'^2_i}$
1	5	5,0	0,2000	0,04000	1,0000
2	10	2,5	0,1000	0,01000	0,2500
3	15	2,0	0,0667	0,00445	0,1334
4	20	1,8	0,0500	0,00250	0,0900
5	40	1,5	0,0250	0,00063	0,0375
6	60	1,3	0,0167	0,00028	0,0217
7	80	1,2	0,0125	0,00016	0,0150
8	100	1,2	0,0100	0,00010	0,0120
Σ		16,5	0,4809	0,05812	1,5596

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{n} = \frac{16{,}5}{8} = \underline{2{,}0625}$$

$$a = \frac{16{,}5 \cdot 0{,}05812 - 1{,}5596 \cdot 0{,}4809}{8 \cdot 0{,}05812 - 0{,}4809^2} =$$

$$= \frac{0{,}95898 - 0{,}75001}{0{,}46496 - 0{,}23126} = \frac{0{,}20897}{0{,}23370} =$$

$$= 0{,}8942 \approx \underline{0{,}894}$$

$$b = \frac{8 \cdot 1{,}5596 - 16{,}5 \cdot 0{,}4809}{0{,}23370} =$$

$$= \frac{12{,}47680 - 7{,}93485}{0{,}23370} = \frac{454195}{0{,}23370} =$$

$$= 19{,}43496 \approx \underline{19{,}435}$$

A (186)-os képlet alapján a regressziós függvényt megközelitő hiperbola egyenlete:

$$Y = 0{,}894 + \frac{19{,}435}{x - 20}$$

A regressziós becslés szórásához és a korrelációs indexhez szükséges SQ_Y és SQ_y mennyiségeket a XLVII. sz. táblázatban számitjuk. $FG_Y = n - 3 = 5$ (Y_i egyenletében a, b és c szerepel).

XLVII. sz. táblázat.

i	$\frac{1}{x_i^3}$	$\frac{6}{x_i}$	Y_i	$y_i - Y_i$	$(y_i - Y_i)^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	0,2000	3,8872	4,7814	0,2186	0,0478	2,9375	8,6289
2	0,1000	1,9435	2,8377	-0,3377	0,1140	0,4375	0,1914
3	0,0667	1,2963	2,1905	-0,1905	0,0363	-0,0625	0,0039
4	0,0500	0,9717	1,8659	-0,0659	0,0043	-0,2625	0,0689
5	0,0250	0,4859	1,3801	0,1199	0,0144	-0,5625	0,3164
6	0,0167	0,3246	1,2188	0,0812	0,0066	-0,7625	0,5814
7	0,0125	0,2429	1,1371	0,0629	0,0039	-0,8625	0,7439
8	0,0100	0,1943	1,0885	0,115	0,0124	-0,8625	0,7439
Σ					0,2397		11,2787

$$s_Y = \sqrt{\frac{0{,}2397}{5}} = \sqrt{0{,}04794} = \underline{0{,}219}$$

$$s_Y\% = \frac{100\, s_Y}{\bar{y}} = \frac{21{,}9}{2{,}06} \approx \underline{10{,}6\ \%}$$

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{0{,}2397}{11{,}2787}} = \sqrt{1 - 0{,}0213} =$$

$$= \sqrt{0{,}9787} = \underline{0{,}989}$$

A korrelációs index szerint nemcsak a kapcsolat határozott, hanem a regressziós hiperbola illeszkedése is igen jó.

5.2 A trendszámitás

Ha a kapcsolatban lévő két valószinüségi változó közül a "független változó" helyébe az idő lép, akkor a függő változó megfigyelt értékeinek sorozata egy az időben lejátszódó folyamatot jellemez, neve idősor. A folyamat alapvető tendenciáját, amelyet az idősor szemléltet, trendnek nevezzük. Az erre illeszkedő görbe a trendvonal. A trendvonalnak megfelelő függvény a trendfüggvény kiszámitását trendszámitásnak nevezték el. Ha a trendvonal egyenes, lineáris trend, ha exponenciális vagy logaritmus görbe, exponenciális vagy logaritmikus trend vagy ha parabola, parabolikus trendről, stb. beszélünk. A trend-számitás tulajdonképpen a regressziós elemzés egy speciális esete, tehát a trendszámitásnál a megfelelő regressziós függvény levezetéséhez hasonló módon járunk el. Azonban itt a képletek egyszerübb alakot fognak ölteni. Ugyanis az x_i időt jelentő sorozat elemei pontosan meghatározott értékek, közöttük az eltérések egyenlők, hiszen a megfigyeléseket egyenlő időközökben végezzük. Ez lehetővé teszi azt, hogy az x_i sorozatot egy olyan x'_i sorozattal helyettesitsük, amelynél a $\sum x'_i = 0$ lesz. Ha az x_i sorozat számsorozat, amellyel számitást lehet végezni, akkor x'_i szorzatot x_i-ből páratlan elemszám esetén

$$x'_i = \frac{x_i - Me}{d} \; ; \quad x'_i = \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

transformáció utján nyerjük, páros elemszám esetén pedig

$$x'_i = \frac{x_i - Me}{0,5\ d} \; ; \quad x'_i = \ldots -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots$$

lesz a transformáció képlete. Ha az x_i sorozat nem számsorozat, hanem az időközöket szimbolumok jelölik, a fenti transformációk analógiájára x'_i sorozattal helyettesitjük. Ez utóbbi esetben a trendfüggvényt csak az x'_i sorozatra vonatkozóan irhatjuk fel.

5.21 A lineáris trendfüggvény

A lineáris trendfüggvény általános alakja csak ugy mint a lineáris regressziós függvényé

$$\underline{Y = a + bx}$$

"a" és "b" kiszámitásához ott a legkisebb négyzetek módszere alapján a (165)-ös normál egyenleteket irtuk fel:

$$b \sum x_i^2 + a \sum x_i = \sum x_i y_i$$

$$b \sum x_i + a n = \sum y_i$$

A trendszámitásnál x_i-ről x'_i-re térünk át, amely sorozatra nézve $\sum x'_i = 0$.

$$b \sum x'^2_i + a\, 0 = \sum x'_i y_i \ \ldots \ b \sum x'^2_i = \sum x'_i y_i$$

$$b\, 0 = a n = \sum y_i \qquad \ldots\ a n = \sum y_i$$

$$b = \frac{\sum x'_i y_i}{\sum x'^2_i}; \qquad a = \frac{\sum y_i}{n} \tag{187}$$

Az "a" és "b" értékek ismeretében a lineáris trendfüggvény az x'_i sorozatra vonatkoztatva:

$$Y = a + b x' \tag{188}$$

Ahol a páratlan elemszám esetén:

$$x' = \frac{x - Me}{d}$$

és páros elemszám esetén:

$$x' = \frac{x - Me}{0{,}5\, d} \tag{189}$$

x' (189) szerint megfelelő értékét a (188)-ba behelyettesitve megkapjuk a lineáris trendfüggvényt az eredeti x_i változóra vonatkoztatva:

$$Y = a' + b x \tag{190}$$

Az illeszkedés mértéke az η korrelációs indexszel ellenőrizhető.

Példa:

31. Megfigyeltük egy faipari üzem egy délelőtti müszakjában az elektromos gépek felvett hasznos teljesitményének alakulását. Az idősort a XLVIII. sz. táblázat tartalmazza. Számitsuk ki a lineáris trendfüggvényt.

x_i -t órában, y_i -t KW-ban mértük.

XLVIII. sz. táblázat.

i	x_i	y_i	x'_i	y_i' y_i	x'^2_i
1	7	164	- 4	- 656	16
2	8	152	- 3	- 456	9
3	9	147	- 2	- 294	4
4	10	149	- 1	- 149	1
5	11	145	0	0	0
6	12	147	1	147	1
7	13	130	2	260	4
8	14	149	3	447	9
9	15	144	4	576	16
Σ		1327	0	-1555 1430 - 125	60

Me = 11 ; n páratlan

$$x'_i = \frac{x_i - Me}{d} \; ; \; d = 1$$

$$x'_i = x_i - 11$$

$$b = \frac{\sum x'_i y_i}{\sum x_i'^2} = \frac{-125}{60} = 2{,}083 \approx 2{,}1$$

$$a = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{1327}{9} = 147{,}444 \approx 147{,}4$$

Az x'_i-re vonatkoztatott lineáris trendfüggvény:

$$Y = 147{,}4 - 2{,}1\ x'$$

Az eredeti x_i-sorozatra vonatkoztatott trendfüggvény:

$$Y = 147{,}444 - 2{,}083\ (x-11) = 147{,}444 - 2{,}083\ x + 22{,}913 =$$

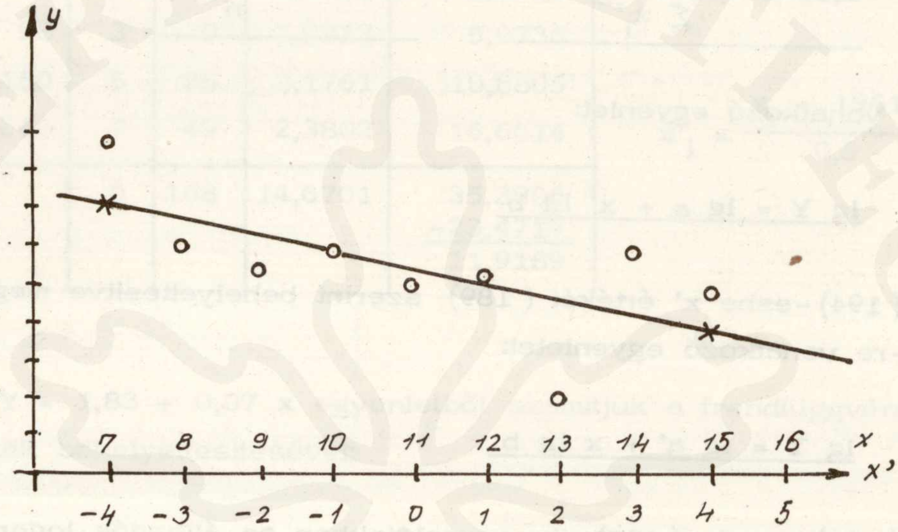
$$= 170{,}357 - 2{,}083\ x$$

$$\underline{Y = 170{,}4 - 2{,}1\ x}$$

A trendfüggvényt két pontja segitségével ábrázolhatjuk (38. sz. ábra).

$$x_1 = 7\ .\ .\ .\ y_1 = 170{,}4 - 2{,}1\ .\ 7 = 155{,}7$$

$$x_2 = 15\ .\ .\ .\ y_2 = 170{,}4 - 2{,}1\ .\ 15 = 138{,}9$$



38. sz. ábra.

Az Y = 170,4 - 2,1 x egyenletü lineáris trendfüggvény

A 38. sz. ábra lineáris trendfüggvénye csökkenő tendenciát mutat. Az egyenletes csökkenés mértéke:

$$b = -\ 2{,}1\ \frac{KW}{h}$$

<u>A lineáris trendfüggvénnyel jellemezzük az idősor tartós tendenciáját, ha az egyenletesen változik.</u>

5,22 Az exponenciális trendfüggvény

A trend számitásnál gyakori az

$$\underline{Y = a\ .\ b^x} \qquad (191)$$

alaku exponenciális trendfüggvény, amely logaritmizálva lineáris alakot ölt

$$\underline{\lg Y = \lg a + x \lg b} \qquad (192)$$

Számitanunk kell az lg a és lg b mennyiségeket. Ezt a lineáris trendszámitás képleteivel végezzük, miután x_i helyébe x'_i-öt és y_i helyébe $\lg y_i$-t irtunk:

$$\lg b = \frac{\sum x_i' \lg y_i}{\sum x_i'^2} \; ; \qquad \lg a = \frac{\sum \lg y_i}{n} \qquad (193)$$

az x'_i-re vonatkozó egyenlet:

$$\underline{\lg Y = \lg a + x' \lg b} \qquad (194)$$

A (194)-esbe x' értékét (189) szerint behelyettesitve megkapjuk az eredeti x_i-re vonatkozó egyenletet:

$$\underline{\lg Y = \lg a' + x \lg b} \qquad (195)$$

A (194)-es és (195)-ös egyenletekben az állandók logaritmusait visszakeresve felirhatjuk a (191)-nek megfelelő exponenciális trendfüggvényt x'_i-re illetőleg x_i-re vonatkoztatva.

Példa:

32. Tegyük fel, hogy egy ujonnan bevezetett gyártmány által hozott évi jövedelem az elmult 8 év alatt a IL. sz. táblázat szerint alakult. A jövedelmet 1.000 forintban számitjuk. Meghatározandó a trendfüggvény az x'_i-re vonatkoztatva. Az idősor exponenciális függvényre utal. (39. sz. ábra).

$$\lg b = \frac{11,9189}{168} = 0,0709; \qquad \lg a = \frac{14,6701}{8} = 1,8338 \; ;$$

$$\lg Y = 1,83 + 0,07 \; x'$$

$$b = 1,177; \qquad a = 68,2$$

$$\underline{Y = 68,2 \; . \; 1,18^{x'}} \quad \text{a trendfüggvény.}$$

IL. sz. táblázat.

i.	x_i	y_i	x'_i	$x_i'^2$	lg y_i	x'_i lg y_i
1	1958	20	-7	49	1,3010	- 9,1070
2	1959	33	-5	25	1,5185	- 7,5925
3	1960	47	-3	9	1,6721	- 5,0163
4	1961	57	-1	1	1,7559	- 1,7559
5	1962	75	1	1	1,8751	1,8751
6	1963	98	3	9	1,9912	5,9736
7	1964	150	5	25	2,1761	10,8805
8	1965	240	7	49	2,3802	16,6614
Σ			0	168	14,6701	35,3906 -23,4717 11,9189

$$x_i' = \frac{x_i - Me}{0,5\ d}$$

Me = 1961,5

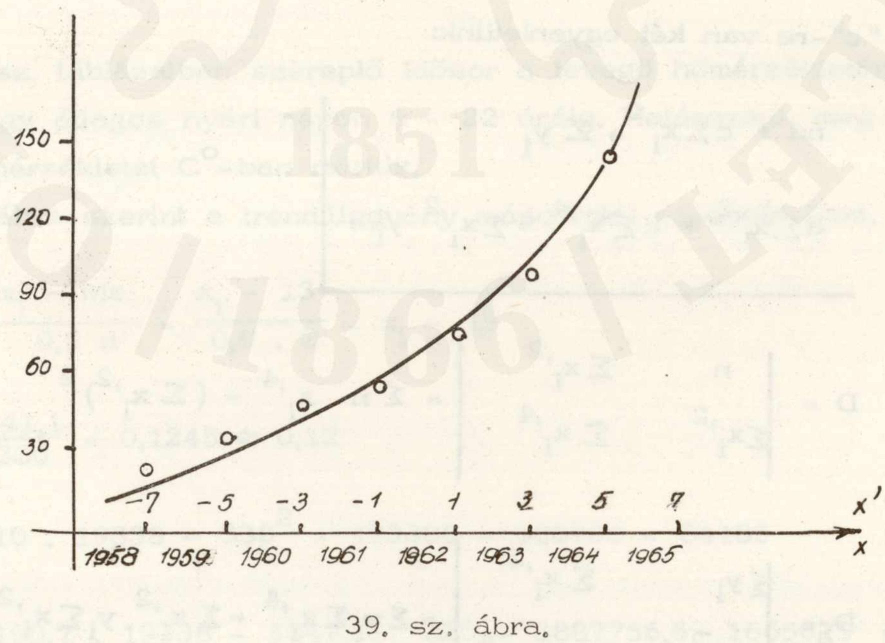
$$x'_i = \frac{x_i - 1961,5}{0,5}$$

A lg Y = 1,83 + 0,07 x egyenletből számitjuk a trendfüggvény értékeit az x'_i értékek behelyettesitésével:

x'_2 = -5 . . . lg Y_2 = 1,83 - 0,35 = 1,48 ; Y_2 = 30,2

x'_5 = 1 . . . lg Y_5 = 1,83 + 0,07 = 1,90 ; Y_5 = 79,5

x'_7 = 5 . . . lg Y_7 = 1,83 + 0,35 = 2,18 ; Y_7 = 151,4



39. sz. ábra.

Az Y = 68,2 . $1,18^{x'}$ egyenletü exponenciális trendfüggvény

Az exponenciális trendfügvénnyel jellemezzük az idősor tartós tendenciáját, ha az egyenletesen gyorsuló.

5,23 A parabolikus trendfüggvény

Ha az idősor tartós tendenciája sem nem egyenletesen változó, sem nem egyenletesen gyorsuló, de egyirányu görbületet mutat általában másodfoku parabolát választhatunk trendfüggvény gyanánt.

A parabolikus trendfüggvényt a regressziós parabola számitásához hasonlóan számitjuk ki. De az x_i-nek x_i'-vel való helyettesitése utján a számitás egyszerübbé válik. A (177)-es normál egyenletekbe a $\sum x_i' = 0$ és $\sum x_i'^3 = 0$ értékeket behelyettesitve azok a következőképpen alakulnak:

$$\left.\begin{aligned} na + c\sum x_i'^2 &= \sum y_i \\ b\sum x_i'^2 &= \sum x_i' y_i \\ a\sum x_i'^2 + c\sum x_i'^4 &= \sum x_i'^2 y_i \end{aligned}\right| \qquad (196)$$

ebből "b" közvetlenül kiszámitható:

$$b = \frac{\sum x_i' y_i}{\sum x_i'^2} \qquad (197)$$

"a" és "c"-re van két egyenletünk:

$$\left.\begin{aligned} na + c\sum x_i'^2 &= \sum y_i \\ a\sum x_i'^2 + c\sum x_i'^4 &= \sum x_i'^2 y_i \end{aligned}\right|$$

$$D = \begin{vmatrix} n & \sum x_i'^2 \\ \sum x_i'^2 & \sum x_i'^4 \end{vmatrix} = \sum n \; x_i'^4 - (\sum x_i'^2)^2$$

$$D_a = \begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i'^2 \\ \sum x_i'^2 y_i & \sum x_i'^4 \end{vmatrix} = \sum y_i \sum x_i'^4 - \sum x_i'^2 \; y_i \sum x_i'^2$$

$$D_c = \begin{vmatrix} n & \Sigma y_i \\ \Sigma x_i'^2 & \Sigma x_i'^2 \; y_i \end{vmatrix} = n \Sigma x_i'^2 \; y_i - \Sigma x_i'^2 \Sigma y_i$$

$$a = \frac{D_a}{D} = \frac{\Sigma y_i \Sigma x_i'^4 - \Sigma x_i'^2 \; y_i \Sigma x_i'^2}{n \Sigma x_i'^4 - (\Sigma x_i'^2)^2} \qquad (198)$$

$$c = \frac{D_c}{D} = \frac{n \Sigma x_i'^2 \; y_i - \Sigma x_i'^2 \Sigma y_i}{n \Sigma x_i'^4 - (\Sigma x_i'^2)^2} \qquad (199)$$

A parabolikus trendfüggvény egyenlete x_i-re nézve:

$$\underline{Y = a + b\,x' + c\,x'^2} \qquad (200)$$

és ha ebbe az egyenletbe behelyettesitjük x' (189) szerinti értékét, akkor megkapjuk a parabolikus trendfüggvényt az eredeti x_i változóra vonatkoztatva:

$$\underline{Y = a' + b'\,x + c\,x^2} \qquad (201)$$

A trendfüggvény értékeit kényelmesebb a(200)-as egyenlet alapján számitani.

<u>Példa:</u>

33. Az L. sz. táblázatban szereplő idősor a levegő hőmérsékletének változását mutatja egy átlagos nyári napon 6 - 22 óráig. Határozzuk meg a trendfüggvényt. A hőmérsékletet C^o-ban mértük.

A 40. sz. ábra szerint a trendfüggvény másodfoku parabola lesz.

$$x'_i = \frac{x_i - Me}{0{,}5\ d} = \frac{x_i - 13}{0{,}5\ .\ 2} = x_i - 13$$

$$b = \frac{41{,}1}{330} = 0{,}1245 \approx 0{,}12$$

$$D = 10\ .\ 19338 - 330^2 = 193380 - 108900 = 84480$$

$$D_a = 190{,}7\ .\ 19338 - 5047{,}5\ .\ 330 = 3887756{,}6 - 1665675 =$$

$$= 2022081{,}6$$

L. sz. táblázat.

i	x_i	y_i	x_i'	$x_i'^2$	$x_i'^4$	$x_i'y_i$	$x_i'^2 y_i$
1	4	12,3	- 9	81	6561	- 110,7	996,3
2	6	13,8	- 7	49	2401	- 96,6	676,2
3	8	18,8	- 5	25	625	- 94,0	470,0
4	10	22,4	- 3	9	81	- 67,2	201,6
5	12	25,0	- 1	1	1	- 25,0	25,0
6	14	25,1	1	1	1	25,1	25,1
7	16	23,5	3	9	81	70,5	211,5
8	18	19,4	5	25	625	97,0	485,0
9	20	15,8	7	49	2401	110,6	774,2
10	22	14,6	9	81	6561	131,4	1182,6
Σ		190,7	0	330	19338	434,6 -393,5 41,1	5047,5

$$D_c = 10 \cdot 5047{,}5 - 330 \cdot 190{,}7 = 50475 - 62931 = -12456$$

$$a = \frac{2022081{,}6}{84480} = 23{,}9356 \approx 23{,}94$$

$$c = -\frac{12\,456}{84\,480} = -0{,}1474 \approx -0{,}15$$

A (200)-as egyenlet szerint:

$$\underline{Y = 23{,}94 + 0{,}12\,x' - 0{,}15\,x'^2}$$

x' értékét a (189) szerint betéve ($x' = x-13$):

$$Y = 23{,}94 + 0{,}12\,(x-13) - 0{,}15\,(x-13)^2 =$$

$$= 23{,}94 + 0{,}12\,x - 1{,}56 - 0{,}15\,x^2 + 3{,}12\,x - 25{,}35 =$$

$$= -2{,}97 + 3{,}24\,x - 0{,}15\,x^2$$

$$\underline{Y = 2{,}97 + 3{,}24\,x - 0{,}15\,x^2}$$

A trendfüggvény értékeit kényelmesebben számithatjuk ki az $Y = 23{,}94 + 0{,}12\ x' - 0{,}15\ x'^2$ egyenletből.

Néhány értéket kiszámitunk:

$$x' = 0\ \ldots\ Y = 23{,}94$$

$$x'_3 = -5\ \ldots\ Y_3 = 23{,}94 - 0{,}12\ .\ 5 - 0{,}15\ .\ 25 = 19{,}59$$

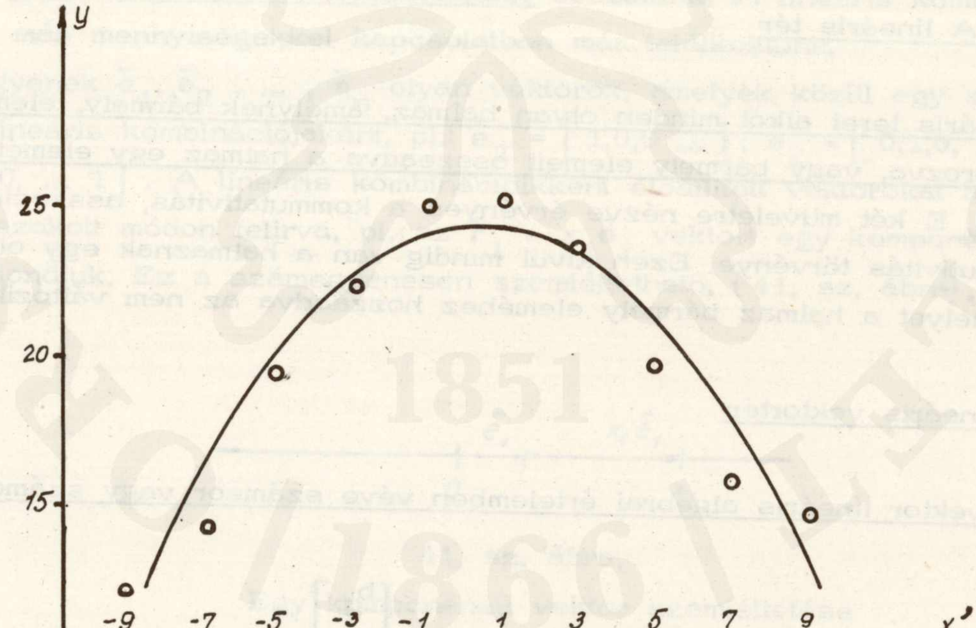
$$x'_8 = 5\ \ldots\ Y_8 = 23{,}94 + 0{,}12\ .\ 5 - 0{,}15\ .\ 25 = 20{,}79$$

Ezek mellé kiszámitjuk a maximum pontot is:

$$Y = 23{,}94 + 0{,}12\ x' - 0{,}15\ x'^2 \ ; \quad \frac{dY}{dx'} = 0{,}12 - 0{,}3\ x' = 0$$

$$x'_{max} = \frac{0{,}12}{0{,}3} = 0{,}4\ \ldots\ Y_{max} = 23{,}94 + 0{,}12\ 0{,}4 - 0{,}15\,.\,0{,}16 = 23{,}964$$

Végül ábrázoljuk az idősort és benne a másodfoku parabola trendfüggvényét. (40. sz. ábra).



40. sz. ábra.

Az $Y = -2{,}97 + 3{,}24\ x - 0{,}15\ x^2$ egyenletü trendfüggvény

II. Lineáris programozás alapjai

Bevezetés

A fagazdasági szakember gyakran kerül olyan feladattal szembe, hogy különböző lehetőségek halmazából a legjobb megoldást kell kiválasztania. Nem egészen egyszerü esetekben - rendelkezzék bár mégoly nagy szakértelemmel - érzés után nem valószinü, hogy sikerül a legjobb megoldást megtalálnia. Az optimális megoldás (optimális = legjobb) kiválasztásához azonban módjában van alkalmazni a matematikai programozás módszereit. Amennyiben az optimumszámitási feladat lineáris egyenlőtlenségrendszerrel felirható, lineáris programozásról beszélünk. A lineáris programozási feladat megoldásához az ut a lineáris algebrán át vezet.

1. Lineáris algebra

Lineáris algebrának nevezzük a matematikának azt az ágát, amely a lineáris terek vizsgálatával foglalkozik.

1.1 A lineáris tér

Lineáris teret alkot minden olyan halmaz, amelynek bármely elemét skalárral szorozva, vagy bármely elemeit összeadva a halmaz egy elemét kapjuk eredményül. E két müveletre nézve érvényes a kommutativitás, asszociativitás és a disztributivitás törvénye. Ezen kivül mindig van a halmaznak egy olyan zérus eleme, amelyet a halmaz bármely eleméhez hozzáadva az nem változik.

1.11 A lineáris vektortér

A vektor lineáris algebrai értelemben véve számsor vagy számoszlop:

$$\bar{a} = \left[a_1, a_2, \dots , a_n \right] \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

amelyre nézve az összeadás és a skalárral való szorzás müvelete definiálva van:

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \bar{a} + \bar{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n + b_n \end{bmatrix}.$$

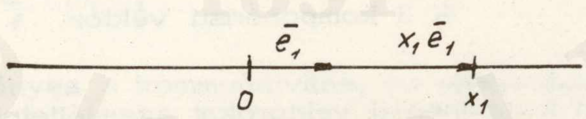
$$k.\bar{a} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ . \\ . \\ . \\ ka_n \end{bmatrix}$$

Megemlitjük, hogyha az adott $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ vektorokat $k_1, k_2, \ldots, k_n$ skalárokkal megszorozzuk és összegezzük:

$$k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + \ldots + k_n\bar{a}_n ,$$

az adott vektorok lineáris kombinációjáról beszélünk. A lineáris kombináció fogalmával más mennyiségekkel kapcsolatban már találkoztunk.

Legyenek $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ olyan vektorok, amelyek közül egy sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként, pl.: $\bar{e}_1 = [1,0,0 \ldots]$; $\bar{e}_2 = [0,1,0, \ldots]$, $\bar{e}_n = [0,0, \ldots 1]$. A lineáris kombinációikként előállitott vektorokat a geometriában megszokott módon felirva, pl. az $\bar{r}_1 = x_1\bar{e}_1$ vektort egy komponensü vektornak mondjuk. Ez a számegyenesen szemléltethető. (41. sz. ábra).

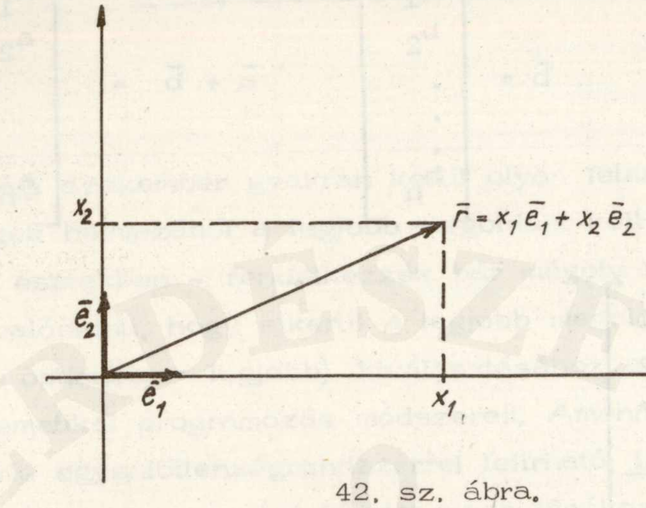


41. sz. ábra.

Egy komponensü vektor szemléltetése

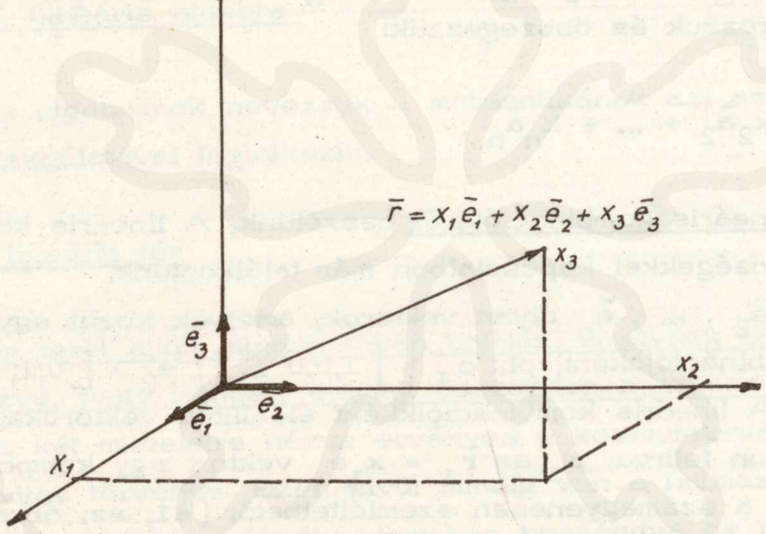
Az $\bar{r} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$ vektort két komponensü vektornak fogjuk nevezni, eddig sik vektor volt a neve. Szemléltethető a "sikbeli" koordinatarendszerben. (42. sz. ábra).

Az $\bar{r} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$ vektort, amelyet a vektoralgebrában térbeli vektornak neveztünk, ezután 3 komponensü vektornak mondjuk. Szemléltetése a "térbeli" koordinátarendszerben lehetséges: (43. sz. ábra).



42. sz. ábra.

A 2 komponensü vektor



43. sz. ábra.

A 3 komponensü vektor

A 4, 5, . . . , n komponensü vektorokat szemléltetni nem tudjuk, de az előzőkhöz hasonlóan irjuk fel. Igy általában az "n" komponensü vektor:

$$\bar{r} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n = \sum_1^n x_i\bar{e}_i \qquad (202)$$

Ennek abszolut értéke:

$$|\bar{r}| = \sqrt{\sum_1^n x_i^2}$$

Skalárral való szorzata:

$$k\,\bar{r} = k\sum_{1}^{n} x_i\,\bar{e}_i$$

Két "n" komponensü vektor:

$$\bar{r}_1 = \sum_{1}^{n} x_i\,\bar{e}_i \qquad \text{és} \qquad \bar{r}_2 = \sum_{1}^{n} y_i\,\bar{e}_i,$$

amelyek összege:

$$\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = \sum_{1}^{n} (x_i + y_i)\,\bar{e}_i$$

Példa:

34. Irjunk fel egy négy komponensü vektort és számitsuk ki az abszolut értékét:

$$\bar{r} = 2\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2 - 4\bar{e}_3 + 2\bar{e}_4$$

$$|\bar{r}| = \sqrt{\sum_{1}^{n} x_i^2} = \sqrt{4 + 25 + 16 + 4} = \sqrt{49} = 7$$

Az "n" komponensü vektorok halmaza lineáris teret alkot, mert ezek összege valamint skalárral való szorzatuk is "n" komponensü vektor:

$$\sum_{1}^{n} x_i\,\bar{e}_i + \sum_{1}^{n} y_i\,\bar{e}_i = \sum_{1}^{n} (x_i + y_i)\,\bar{e}_i$$

$$k\sum_{1}^{n} x_i\,\bar{e}_i = \sum_{1}^{n} k\,x_i\,\bar{e}_i$$

Ezen müveletekre érvényes a kommutativitás, az asszociativitás és a disztributivitás törvénye:

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_1 + \bar{r}_2 &= \bar{r}_2 + \bar{r}_1 \\ k\,\bar{r} &= \bar{r}\,k \end{aligned}\right\}\ \text{kommutativitás}$$

$$\left.\begin{aligned} (\bar{r}_1 + \bar{r}_2) + \bar{r}_3 &= \bar{r}_1 + (\bar{r}_2 + \bar{r}_3) \\ k\,(k^*\bar{r}) &= (k\,k^*)\,\bar{r} \end{aligned}\right\}\ \text{asszociativitás}$$

$$\left.\begin{aligned} (\bar{r}_1 + \bar{r}_2)\, k &= k\,\bar{r}_1 + k\,\bar{r}_2 \\ (k + k^*)\,\bar{r} &= k\,\bar{r} + k^*\,\bar{r} \end{aligned}\right\} \quad \text{disztributivitás}$$

És végül a halmazban létezik olyan zérus vektor, amelyet bármely vektorhoz hozzáadva az változatlan marad:

$$\bar{r} + \bar{o} = \bar{r}$$

Mint láttuk a fenti müveletek az összes "n" komponensü vektorokkal elvégezhetők, ezek tehát együtt alkotják a lineáris teret, amelyből kiválasztva az 1 komponensü, vagy a 2 komponensü, stb. vektorok halmazát, az a lineáris tér egy-egy részét jelenti, amelyet altérnek fogunk nevezni. Igy beszélhetünk az egy-, a két-, a három komponensü stb. vektorok alteréről. Az altérre is vonatkoznak ugyanazok a szabályok, amelyeket a lineáris térnél elmondottunk.

1.12 A lineárisan független vektorok

Válasszunk ki az "n" komponensü vektorok halmazából "m" db vektort:

$$\bar{r}_1,\ \bar{r}_2,\ \dots\ \bar{r}_m$$

Ha létezik nem mind zérus

$$k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_m \qquad \text{skalár,}$$

amelynek az $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_m$ vektorokkal képzett lineáris kombinációja a zérus vektort eredményezi:

$$k^2_1 + k^2_2 + \dots k^2_m \neq 0$$

$$k_1\,\bar{r}_1 + k_2\,\bar{r}_2 + \dots k_m\,\bar{r}_m = \bar{0}, \qquad (203)$$

és igy legalább az egyik vektor a többi lineáris kombinációjaként felirható (pl.):

$$\bar{r}_1 = -\frac{1}{k_1}\,(k_2\,\bar{r}_2 + \dots + k_m\,\bar{r}_m), \qquad (204)$$

akkor az $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_m$ vektorok lineárisan függő vektorok, azaz lineárisan függő vektorrendszert alkotnak.

Ha (203)-as reláció csak ugy állitható elő, hogy a "k" skalárok zéróval egyenlők:

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0, \tag{205}$$

akkor az $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_m$ vektorok lineárisan független vektorok, azaz lineárisan független rendszert alkotnak. Ebben nem fordulhat elő a zérusvektor.

Egy vektorrendszer vektorainak skalárkomponenseit vektoronként egy-egy oszlopba irva, a vektorrendszer mátrixát kapjuk:

$$\bar{a}_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + a_{31}\bar{e}_3 + s_{41}\bar{e}_4$$

$$\bar{a}_2 = a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + a_{42}\bar{e}_4$$

$$\bar{a}_3 = a_{13}\bar{e}_1 + a_{23}\bar{e}_2 + a_{33}\bar{e}_3 + a_{43}\bar{e}_4$$

$$\bar{a}_4 = a_{14}\bar{e}_1 + a_{24}\bar{e}_2 + a_{34}\bar{e}_3 + a_{44}\bar{e}_4$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \tag{206}$$

Egyszerüség kedvéért vizsgáljuk azt a speciális esetet, amikor az $\overline{A}$ matrix kvadratikus, ilyenkor felirhatjuk a matrix determinánsát, jelöljük ezt D-vel:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

A $D \neq 0$ mellett lineárisan független, $D = 0$ mellett lineárisan függő vektorrendszerrel van dolgunk.

Szemléltetésképpen lássunk néhány példát:

35. Állapitsuk meg az alábbi vektorrendszerekről, hogy lineárisan függő vagy függetlenek-e.

a/ $\bar{a}_1 = 2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2$ $\qquad D = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$

$\bar{a}_2 = -6\bar{e}_1 + 9\bar{e}_2$

Lineárisan függő rendszerről van szó, hiszen:

$$\bar{a}_2 = 3\bar{a}_1$$

A két vektor hatásvonala megegyezik.

b/ $\bar{a}_1 = 2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2$ $\qquad D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$\bar{a}_2 = -3\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2$

A vektorrendszer lineárisan független.

c/ $\bar{a}_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3$ $\qquad \overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\bar{a}_2 = 2\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$

$\bar{a}_3 = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & 8 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -8 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

A vektorrendszer lineárisan függő, a rendszert alkotó három vektor egy sikba esik.

$$\underline{\bar{a}_3 = \bar{a}_1 + \bar{a}_2}$$

d/ $\bar{a}_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3$

$\bar{a}_2 = 2\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$ $\qquad \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\bar{a}_3 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4\ (2+4) = -24 \neq 0$$

A vektorrendszer független.

A vektorrendszerekkel kapcsolatban bizonyitás nélkül megemlitjük még,hogy az "n" komponensü vektorokból legfeljebb $k \leq n$ darab választható ki ugy, hogy lineárisan független rendszer jöjjön létre. Ha $k > n$-él, akkor legalább az egyik vektor kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, és igy már lineárisan függő rendszerről van szó. A vektorrendszerben felvehető lineárisan független vektorok maximális számát a vektorrendszer rangjának mondjuk. Jele legyen ϱ . A vektorrendszer rangja megegyezik a vektorrendszer mátrixának rangjával.

Példák:

36. Állapitsuk meg az alábbi vektorrendszerek rangját.

a/ $\bar{a}_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3$

$\bar{a}_2 = 2\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$; $\qquad \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\bar{a}_4 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$

A 35/ d példában láttuk, hogy a mátrix determinánsa $D \neq 0$, tehát a független vektorok maximális száma és igy a vektorrendszer rangja:

$$\varrho = 3$$

b/ $\bar{a}_1 = \bar{e}_1 - 6\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$

$\bar{a}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$ $\qquad \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ -6 & 1 & 5 & -1 \\ -5 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$\bar{a}_3 = 2\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3$

$\bar{a}_4 = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$

A mátrix nem kvadratikus, itt a rangszáma a zéróval nem egyenlő legmagasabb rendü aldetermináns rendszámával egyenlő.

$$D_1^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -6 & 1 & 5 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 7 \\ -7 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -1\,(-49 + 49) = 0$$

$$D_2^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -6 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & -3 \\ -7 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -1\,(21 - 21) = 0$$

$$D_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -6 & 5 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 & 8 & 0 \\ -6 & 5 & -1 \\ -11 & 8 & 0 \end{vmatrix} = (-88 + 88) = 0$$

$$D_4^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 0 \end{vmatrix} = (24 - 24) = 0$$

ϱ tehát kisebb 3-nál.

$$D_1^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7 \neq 0$$

Tehát a vektorrendszer rangja:

$\underline{\varrho = 2}$

1.13 A lineáris tér dimenziója

A kérdés most az, hogy az összes "n" komponensü vektorokat magában foglaló lineáris térben maximálisan hány lineárisan független vektor vehető fel? Ha a 2 komponensü vektorok alterét vizsgáljuk mint vektorrendszert, ott leg—

feljebb 2, a 3 komponensü vektorok alterében legfeljebb 3, következésképpen az "n" komponensü vektorok alkotta lineáris térben legfeljebb "n" lineárisan független vektor vehető fel. De mivel az "n" komponensü vektorok tere $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ ... $\bar{e}_n$ egységvektorainak lineáris kombinációjával csak ugy állitható elő a zérusvektor.

$$k_1 \bar{e}_1 + k_2 \bar{e}_2 + \dots k_n \bar{e}_n = \bar{0}$$

ha a $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$. Ebből következik, hogy mivel az egységvektorok független rendszert alkotnak, a független vektorok száma legalább "n". Tehát a lineáris térben felvehető lineárisan független vektorok maximális száma mindig megegyezik a lineáris teret képező vektorok komponenseinek számával. A <u>lineáris térben felvehető lineárisan független vektorok maximális számát a lineáris tér dimenziójának nevezzük.</u> A dimenzió a lineáris tér legfontosabb jellemzője.

1.14 A lineáris tér bázisa

Az "n" dimenziós lineáris tér vektorait eddig az $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ... , $\bar{e}_n$ egységvektorok és az x_1, x_2, ... , x_n skalárok lineáris kombinációjaként irtuk fel:

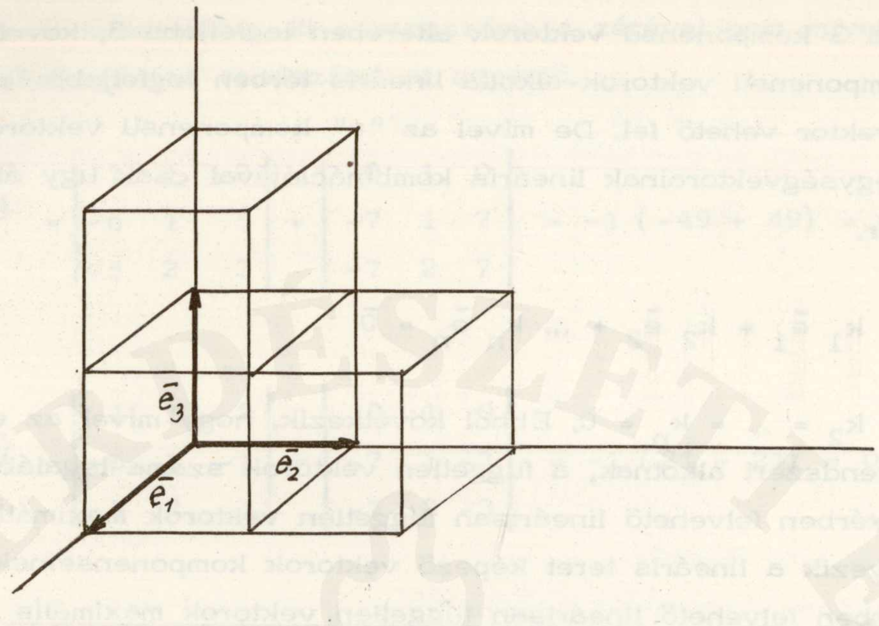
$$\bar{r} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n$$

más szóval az $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ... , $\bar{e}_n$ egységvektorokat választottuk az "n" dimenziós tér alapvektorainak vagy <u>bázisvektorainak.</u>

Igy például az $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, ($\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$) vektorhármas a 3 dimenziós lineáris tér triviális (közönséges) bázisa. Ez geometriai szempontból nézve annyit jelent, hogy a 3 dimenziós lineáris teret $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ élvektoru kockákból épitettük fel. (44. ábra).

Ez volt számunkra a legegyszerübb, legpraktikusabb, de nem az egyetlen lehetséges megoldás. Választhatjuk ugyanis a 3 dimenziós lineáris tér bázisául bármely $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ vektorokból álló vektorhármast, amely lineárisan független rendszert alkot. Minden 3 komponensü vektor felirható az $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ bázisvektorok és a rájuk vonatkozó y_1, y_2, y_3 lineáris kombinációjaként. Például az

$$\bar{r} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + x_3 \bar{e}_3 \quad \text{vektor az uj bázisban}$$

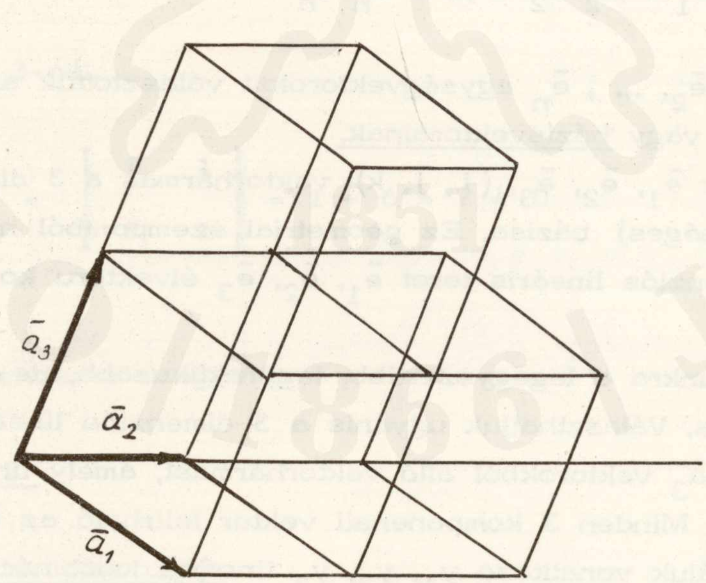


44. sz. ábra.

A 3 dimenziós lineáris teret $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ élvektoru kockákból épitettük fel

$$\bar{r} = y_1 \bar{a}_1 + y_2 \bar{a}_2 + y_3 \bar{a}_3$$

alakban irható fel. Az uj bázist geometriailag szemlélve, azt mondhatjuk, hogy a teret $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ élvektoru ferde hasábokból épitettük fel (45. sz. ábra).



45. sz. ábra.

A 3 dimenziós lineáris teret $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ élvektoru ferde hasábokból épitettük fel

A triviális bázis is és az uj bázis is szemléltethető még a 2 dimenziós lineáris térben, ahol a triviális bázis esetében a sikot $\bar{e}_1$ és $\bar{e}_2$ élvektoru négyzetekből, az uj bázis esetében pedig $\bar{a}_1$ és $\bar{a}_2$ élvektoru romboidokból épitjük fel. (46. sz. ábra).

Szemléltetés nélkül általánositva a fentieket az "n" dimenziós lineáris térre azt mondhatjuk, hogy ennek minden vektora egyértelmüen felirható a triviális bázison kivül az $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n$ lineárisan független uj bázisvektorok és a rájuk vonatkozó $y_1, y_2, \dots y_n$ saklárkomponensek lineáris kombinációjaként is:

$$\underline{\bar{r} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n = y_1\bar{a}_1 + \dots + y_n\bar{a}_n} \qquad (207)$$

ahol $\bar{a}_1 = a_{11}\,\bar{e}_1 + a_{21}\,\bar{e}_2 + \dots a_{n1}\,\bar{e}_n$

$$\bar{a}_2 = a_{12}\,\bar{e}_1 + a_{22}\,\bar{e}_2 + \dots a_{n2}\,\bar{e}_n$$

$$\vdots$$

$$\bar{a}_n = a_{1n}\,\bar{e}_1 + a_{2n}\,\bar{e}_2 + \dots a_{nn}\,\bar{e}_n$$

1.2 Elemi bázistranszformáció

<u>Azt az eljárást, amelynek során egy a triviális bázisban felirt "n" komponensü $\bar{r}$ vektor ($\bar{a}_1\ \bar{a}_2, \dots \bar{a}_n$) uj bázisvektorokra vonatkozó ($y_1, y_2 \dots y_n$) skalárkomponenseit meghatározzuk elemi bázistranszformációnak nevezzük.</u>
Egyszerüség kedvéért az elemi bázistranszformációt az

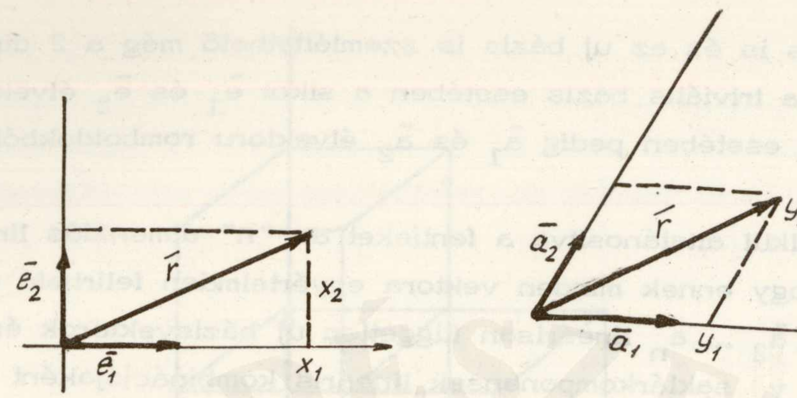
$$\bar{r} = x_1\,\bar{e}_1 + x_2\,\bar{e}_2 = y_1\,\bar{a}_1 + y_2\,\bar{a}_2$$

2 komponensü vektorral mutatjuk be. Ismerjük az $\bar{r}$ vektor ($\bar{e}_1, \bar{e}_2$) triviális bázisvektorokra vonatkozó x_1 és x_2 skalárkomponenseit, és meg kell határoznunk az

$$\bar{a}_1 = a_{11}\,\bar{e}_1 + a_{21}\,\bar{e}_2\,,$$

$$\bar{a}_2 = a_{12}\,\bar{e}_1 + a_{22}\,\bar{e}_2$$

uj bázisvektorokra vonatkozó y_1 és y_2 skalárkomponenseit. Ez ugy történik, hogy az $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ és $\bar{r}$ vektorokban az $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ triviális bázisvektorokat egymásután kicseréljük $\bar{a}_1$ és $\bar{a}_2$-vel.



46. sz. ábra.

$\bar{r}$ vektor a triviális és uj bázisban

Hogy szemléltetőbb legyen a feladat, az $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ és $\bar{r}$ vektorok $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ triviális bázisvektorokra vonatkozó skalárkomponenseit táblázatban foglaljuk. Ez lesz az <u>induló táblázat</u> (I. táblázat).

bázis	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{r}$
$\bar{e}_1$	$\boxed{a_{11}}$	a_{21}	x_1
$\bar{e}_2$	a_{12}	a_{22}	x_2

I.

Először az $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ triviális bázisban $\bar{e}_1$ vektort cseréljük ki $\bar{a}_1$-el és igy egy átmeneti uj bázishoz jutottunk. A vektorcsere az I. táblázat a_{11} elem felett történik, ezért ezt az elemet uj bázist létesitő "<u>generáló elemnek</u>" nevezzük és bekeretezéssel jelöljük meg. Ugyanis a generáló elemnek a numerikus számitásoknál szerepe lesz.

A jelzett vektorcserét ugy végezzük, hogy az $\bar{a}_1$ vektorból kifejezzük az $\bar{e}_1$ vektort:

$$\bar{a}_1 = a_{11}\,\bar{e}_1 + a_{21}\,\bar{e}_2$$

$$a_{11}\,\bar{e}_1 = \bar{a}_1 - a_{21}\,\bar{e}_2$$

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{a_{11}}\,\bar{a}_1 - \frac{1}{a_{11}}\,a_{21}\,\bar{e}_2$$

Majd $\bar{e}_1$ értékét behelyettesitjük az $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ és $\bar{r}$ vektorokba, és igy ezen vektorokat az $\bar{a}_1$, $\bar{e}_2$ bázisban kapjuk meg.

$$\bar{a}_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 = a_{11}\left(\frac{1}{a_{11}}\bar{a}_1 - \frac{1}{a_{11}}a_{21}\bar{e}_2\right) + a_{21}\bar{e}_2 =$$

$$= \bar{a}_1 - a_{21}\bar{e}_2 + a_{21}\bar{e}_2 = \underline{1\,\bar{a}_1 + 0\,\bar{e}_2}$$

$$\bar{a}_2 = a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 = a_{12}\left(\frac{1}{a_{11}}\bar{a}_1 - \frac{1}{a_{11}}a_{21}\bar{e}_2\right) + a_{22}\bar{e}_2 =$$

$$= \frac{a_{12}}{a_{11}}\bar{a}_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}\bar{e}_2 + a_{22}\bar{e}_2 =$$

$$= \underline{\frac{a_{12}}{a_{11}}\bar{a}_1 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}\right)\bar{e}_2}$$

$$\bar{r} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 = x_1\left(\frac{1}{a_{11}}\bar{a}_1 - \frac{1}{a_{11}}a_{21}\bar{e}_2\right) + x_2\bar{e}_2 =$$

$$= \frac{x_1}{a_{11}}\bar{a}_1 - \frac{x_1}{a_{11}}a_{21}\bar{e}_2 + x_2\bar{e}_2 =$$

$$= \underline{\frac{x_1}{a_{11}}\bar{a}_1 + \left(x_2 - \frac{x_1}{a_{11}}a_{21}\right)\bar{e}_2}$$

Az $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ és $\bar{r}$ vektorok $\bar{a}_1$, $\bar{e}_2$ bázisvektorokra vonatkozó skalárkomponenseit táblázatban foglalva képezzük a II. sz. táblázatot:

bázis	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{r}$
$\bar{a}_1$	1	$\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$\frac{x_1}{a_{11}}$
$\bar{e}_2$	0	$a_{22}-\frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}$	$x_2 - \frac{x_1}{a_{11}}a_{21}$

II.

Hogy a számitás áttekinthetőbb legyen, a II. sz. táblázat bonyolult elemeit az egyes számu táblázat azonos helyén álló egy vonással jelzett elemeivel jelöljük (II'. táblázat):

bázis	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{r}$
$\bar{a}_1$	1	a'_{12}	x'_1
$\bar{e}_2$	0	$\boxed{a'_{22}}$	x'_2

II'.

Ezután az $\bar{a}_1$, $\bar{e}_2$ bázis $\bar{e}_2$ vektorát cseréljük ki $\bar{a}_2$ vektorral. A vektorcsere az a'_{22} elem felett történik, tehát ez a generáló elem. Az $\bar{a}_1$, $\bar{e}_2$ bázisban felirt $\bar{a}_2$ vektorból kifejezzük $\bar{e}_2$-őt:

$$\bar{a}_2 = a'_{12}\,\bar{a}_1 + a'_{22}\,\bar{e}_2$$

$$a'_{22}\,\bar{e}_2 = \bar{a}_2 - a'_{12}\,\bar{a}_1$$

$$\bar{e}_2 = \frac{1}{a'_{22}}\,\bar{a}_2 - \frac{1}{a'_{22}}\,a'_{12}\,\bar{a}_1$$

$\bar{e}_2$ értékét behelyettesitjük az $\bar{a}_1$, $\bar{e}_2$ bázisban felirt $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ és $\bar{r}$ vektorokba és igy ezen vektorokat már a $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ uj bázisban irjuk fel:

$$\bar{a}_1 = 1\,\bar{a}_1 + 0\,\bar{e}_2 = \underline{1\,\bar{a}_1 + 0\,\bar{e}_2}$$

Az $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ és $\bar{r}$ vektorok $\bar{a}_1$ és $\bar{a}_2$ uj bázisvektorokra vonatkozó skalárkomponenseit vektoronként egy-egy oszlopba foglalva képezzük a III. sz. táblázatot:

bázis	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{r}$
$\bar{a}_1$	1	0	$x'_1 - \dfrac{x'_2}{a'_{22}}\,a'_{12} = y_1$
$\bar{a}_2$	0	1	$\dfrac{x'_2}{a'_{22}} = y_2$

III.

A harmadik számu táblázat utolsó oszlopa már a kivánt eredményt, az $\bar{r}$ vektornak az $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ uj bázisvektorokra vonatkozó skalárkomponenseit tartalmazza:

$$\bar{r} = y_1\,\bar{a}_1 + y_2\,\bar{a}_2$$

Numerikus számitást a táblázatok segitségével végezzük el. A számitást még egyszerübbé tehetjük azáltal, hogy a vektorcserénél a táblázatba belépő egységvektorokat elhagyjuk, ezek ugyanis az $\bar{r}$ vektor skalárkomponenseinek számitásában nem játszanak szerepet, a táblázatokat összevonjuk, és a triviális bázis vektorai helyébe mindjárt az uj bázis vektorait irjuk:

bázis	I.			II.		III.
	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{r}$	a_2	$\bar{r}$	$\bar{r}$
$\bar{a}_1$	$\boxed{a_{11}}$	a_{12}	x_1	a'_{12}	x'_1	y_1
$\bar{a}_2$	a_{21}	a_{22}	x_2	$\boxed{a'_{22}}$	x'_2	y_2

Az elemi bázistranszformációt 2 komponensü vektor segitségével mutattuk be. Pontosan ugyanugy végeztük el "n" komponensü vektor esetében is, csak természetesen ebben az esetben mind a triviális mind az uj bázist "n" vektor létesiti, és ennek megfelelően "n" vektorcserét kell végezni, ezért a táblázatok száma (n+1) lesz:

táblázat	I.		II.		....	(n+1)
bázis	$\bar{a}_1\ a_2\ \dots\ \bar{a}_n$	$\bar{r}$	$\bar{a}_2\ \dots\ \bar{a}_n$	$\bar{r}$	....	$\bar{r}$
$\bar{a}_1$	$\boxed{a_{11}}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n}$	x_1	$a'_{12}\ \dots\ a_{1n}$	x'_1	....	y_1
a_2	$a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n}$	x_2	$\boxed{a'_{22}}\ \dots\ a_{2n}$	x'_2	....	y_2
$\vdots$	$\vdots\ \ \vdots\ \ \ \vdots$		$\vdots\ \ \ \vdots$			$\vdots$
$\bar{a}_n$	$a_{n1}\ a_{n2}\ \dots\ a_{nn}$	x_n	$a'_{n2}\ \dots\ a'_{nn}$	x'_n	....	y_n

(208)

Egy tetszésszerinti I táblázatból egy következő J táblázatra való áttérésnél a generáló elemet bekeretezzük. A generáló elemet tartalmazó oszlop elemeit elmaradó elemeknek nevezzük, mert ezek a J táblázatban már nem szerepelnek. A 3. táblázat azon sorát, amelyik az I. táblázat generáló elemet tartalmazó sora helyén van ugy képezzük, hogy az I. táblázat megfelelő elemeit a generáló elem reciprokával megszorozzuk. Ebben a sorban lesznek a hányadosok. A J. táblázat összes többi elemét ugy számitjuk ki, hogy az I. táblázat megfelelő eleméből kivonjuk az illető elem oszlopában lévő "hányadosnak" az illető elem sorának "elmaradó elemével" képzett szorzatát.

37. Adott az $\bar{r} = 7\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2$ vektor a triviális bázisban, és az $\bar{a}_1 = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$, $\bar{a}_2 = 5\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$ uj bázisvektorok. Végezzük el az elemi bázistranszformációt.

bázis	I.			II.		III.
	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{r}$	$\bar{a}_2$	$\bar{r}$	$\bar{r}$
$\bar{a}_1$	$\boxed{1}$	5	7	5	7	2
$\bar{a}_2$	3	-2	4	$\boxed{-17}$	-17	1

II.

$$a'_{12} = 5\,\frac{1}{1} = 5 \qquad a'_{22} = -2 - 5.3 = -17$$

$$x'_1 = 7\,\frac{1}{1} = 7 \qquad x'_2 = 4 - 7.3 = -17$$

III.

$$y_2 = -17\,\frac{1}{-17} = 1 \qquad y_1 = 7 - 1{,}5 = 2$$

Tehát az $\bar{r}$ vektor az $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ uj bázisban:

$$\underline{\bar{r} = 2\bar{a}_1 + \bar{a}_2}$$

38. Adott az $\bar{r} = 6\bar{e}_1 - 9\,\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3$ vektor a triviális bázisban, és az $\bar{a}_1 = -2\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$

$\bar{a}_2 = 3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{a}_3 = 4\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3$ uj bázisvektorok. Irjuk fel az $\bar{r}$ vektort az $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ uj bázisban.

bázis	I.				II.			III.		IV.
	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{r}$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{r}$	$\bar{a}_3$	$\bar{r}$	$\bar{r}$
$\bar{a}_1$	$\boxed{-2}$	3	4	6	$-\frac{3}{2}$	-2	-3	$\frac{1}{19}$	$-\frac{39}{19}$	-2
$\bar{a}_2$	5	2	3	-9	$\boxed{\frac{19}{2}}$	13	6	$\frac{26}{19}$	$\frac{12}{19}$	2
$\bar{a}_3$	3	1	-2	-2	$\frac{11}{2}$	4	7	$\boxed{-\frac{67}{19}}$	$\frac{67}{19}$	-1

II.

$a'_{12} = 3\,\frac{1}{-2} = -\frac{3}{2}$ $\quad a'_{22} = 2 - \left(-\frac{3}{2}\right) 5 = \frac{19}{2}$ $\quad a'_{32} = 1 - \left(-\frac{3}{2}\right) 3 = \frac{11}{2}$

$a'_{13} = 4\,\frac{1}{-2} = -2$ $\quad a'_{23} = 3 - (-2)\,5 = 13$ $\quad a'_{33} = -2 - (-2)\,3 = 4$

$x'_1 = 6\,\frac{1}{-2} = -3$ $\quad x'_2 = -9 - (-3)\,5 = 6$ $\quad x'_3 = -2 - (-3)\,3 = 7$

III.

$a''_{23} = 13\,\frac{2}{19} = \frac{26}{19}$ $\quad a''_{13} = -2 - \frac{26}{19}\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{19}$ $\quad a''_{33} = 4 - \frac{26}{19} \cdot \frac{11}{2} = -\frac{67}{19}$

$x''_2 = 6 \cdot \frac{2}{19} = \frac{12}{19}$ $\quad x''_1 = -3 - \frac{12}{19}\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{39}{19}$ $\quad x''_3 = 7 - \frac{12}{19} \cdot \frac{11}{2} = \frac{67}{19}$

IV.

$y_3 = \frac{67}{19}\left(-\frac{19}{67}\right) = -1$ $\quad y_1 = -\frac{33}{19} - (-1)\,\frac{1}{19} = -2$ $\quad y_2 = \frac{12}{19} - (-1)\,\frac{26}{19} = 2$

$$\underline{\bar{r} = -2\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 - \bar{a}_3}$$

1.21 Az affin transzformáció

Az $\overline{A}\,\overline{B}$ mátrix szorzat egy speciális esete, amikor a $\overline{B}$ mátrix helyén vektor áll. Bár a müvelet az ismert módon minden további nélkül elvégezhető, geometriai jelentése miatt külön is foglalkozunk vele. Legyen a két dimenziós lineáris térben egy

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ vektorrendszerünk } \begin{matrix} \bar{a}_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 \text{ és} \\ \bar{a}_2 = a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 \end{matrix}$$

vektorokkal, valamint $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\,\bar{e}_1 + x_2\,\bar{e}_2$ vektorunk,

akkor az $\overline{A}\,\overline{x}$ szorzat egy $\bar{y}$ vektort eredményez:

$$\overline{A}\overline{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & x_1 + a_{12} & x_2 \\ a_{21} & x_1 + a_{22} & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \bar{y}$$

A 2 és 3 dimenziós lineáris térben ha $\overline{A}$ kvadratikus mátrix, az

$$\overline{A}\overline{x} = \bar{y} \tag{209}$$

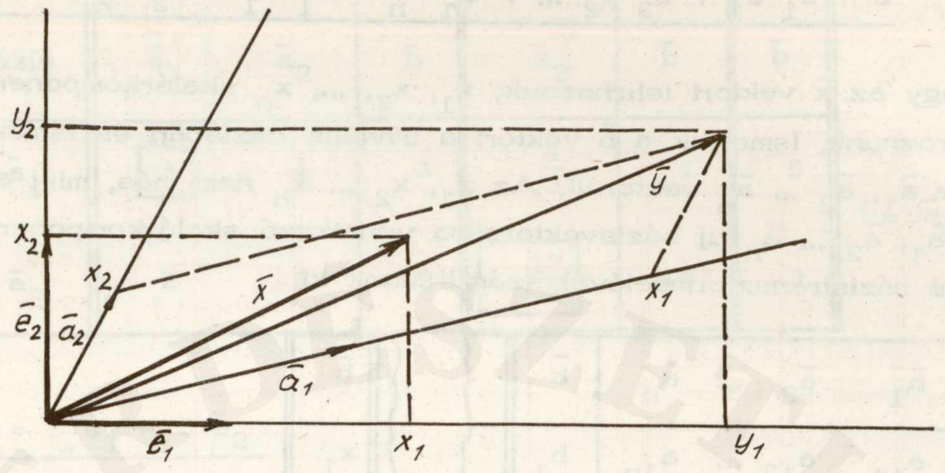
müveletnek jól szemléltethető geometriai jelentése van:

A müvelet során $\bar{A}$ vektorrendszer hatására a triviális bázis az $\bar{A}$ vektorai által létesitett uj bázisba megy át, miközben az $\bar{x}$ tárgyvektor $\bar{y}$ képvektorrá alakul. A leképzés érdekessége, hogy $\bar{x} = x_1\;\bar{e}_1 + x_2\;\bar{e}_2$ tárgyvektor skalárkomponensei változatlanul mennek át $\bar{y} = x_1\;\bar{a}_1 + x_2\;\bar{a}_2$ tárgyvektorba. Ezért a müveletet aránytartó leképzésnek, affin transzformációnak nevezték el. (47. sz. ábra).

Példák:

39. Számitsuk ki az alábbi $\overline{A}\overline{x}$ szorzatok értékét.

$$\bar{y} = \bar{A}\,.\,\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 + 7\,(-2) \\ 3.5 - 4\,(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 23 \end{bmatrix} = -\,4\,\bar{e}_1 + 23\,\bar{e}_2$$



47. sz. ábra.
Affin transzformáció.

A képvektor: $\bar{y} = x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 = y_1 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2$

$$\bar{y} = \bar{A}x = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ -2 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 + 3(-2) & -7.6 \\ -2.4 + 5(-2) & +4.6 \\ 6.4 + 1(-2) & +3.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 6 & -42 \\ -8 & -10 +24 \\ 24 - 2 & +18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -44 \\ 6 \\ 40 \end{bmatrix}$$

1.22 Az $\bar{A}\bar{x} = \bar{b}$ speicális mátrix-egyenlet

Ha az $\bar{A}\bar{x} = \bar{y}$ összefüggésben a képvektor lenne ismert és a tárgyvektor az ismeretlen (megkülönböztethetés végett jelöljük az ismert képvektort $\bar{b}$-vel) a feladatot

$$\bar{A}\bar{x} = \bar{b} \qquad (210)$$

speciális mátrix-egyenlettel fogalmazhatnánk meg. Legyen adva:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ és } \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \text{ és } \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = ?$$

A $\bar{b}$ vektort (képvektor) két bázisban irhatjuk fel:

$$\bar{b} = b_1 \bar{e}_1 + b_2 \bar{e}_2 \dots + b_n \bar{e}_n = x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + \dots x_n \bar{a}_n$$

Hogy az $\bar{x}$ vektort felirhassuk, $x_1, x_2, \dots, x_n$ skalárkomponenseket kell meghatároznunk. Ismerjük a $\bar{b}$ vektort a triviális bázisban és ismerjük az $\bar{A}$ rendszer $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n$ vektorait. Az $x_1, x_2 \dots x_n$ nem más, mint a $\bar{b}$ vektornak az $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n$ uj bázisvektorokra vonatkozó skalárkomponensei, amelyeket elemi bázistranszformációval számithatunk ki:

B	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	...	$\bar{a}_n$	$\bar{b}$		$\bar{b}$
$\bar{a}_1$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1		x_1
$\bar{a}_2$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2		x_2
.	.	.		.	.		.
.	.	.		.	.		.
.	.	.		.	.		.
$\bar{a}_n$	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}	b_n		x_n

$$\bar{b} = x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 \dots x_n \bar{a}_n$$

Ezek ismeretében már felirható az $\bar{x}$ vektor

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n$$

A müvelet helyességét az $\bar{A}\,\bar{x}$ szorzat elvégzésével ellenőrizhetjük, ha $\bar{b}$-t kapunk a számitás jó:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (211)$$

Például:

40. Oldjuk meg

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Speciális mátrix-egyenletet.

bázis	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{b}$	$\bar{a}_2$	$\bar{b}$	$\bar{b}$
$\bar{a}_1$	$\boxed{3}$	4	3	$\frac{4}{3}$	1	5
$\bar{a}_2$	2	-3	19	$\boxed{-\frac{17}{3}}$	17	-3

$\bar{b} = 5\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2$

$\bar{x} = 5\,\bar{e}_1 - 3\,\bar{e}_2$

Ellenőrzés:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 - 12 \\ 10 + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 19 \end{bmatrix}$$

visszakaptuk $\bar{b}$-t a számitás jó.

1.23 A mátrix inverze

Az $\bar{A}$ mátrix inverze alatt azt az $\bar{X}$ mátrixot, értjük, amellyel képzett szorzata kommutativ, és az $\bar{E}$ egységmágmátrixot eredményezi:

$$\bar{A}\,\bar{X} = \bar{X}\,\bar{A} = \bar{E}\ ; \qquad \bar{X} = A^{-1} \tag{212}$$

Az $\bar{A}$, $\bar{X}$, és $\bar{E}$ azonos tipusu kvadratikus mátrixok.
Az $\bar{X}$ tehát az inverzmátrix, bár helyesebb reciprokmátrixnak nevezni. A reciprok vagy inverzmátrix kiszámitását az $\bar{A}\ \bar{x} = \bar{b}$ speciális mátrixegyenlet megoldásához hasonlóan elemi bázistranszformációval végezzük el. Az eltérés itt csupán az, hogy $\bar{b}$ vektor helyett $\bar{E}$ egységmátrix szerepel az induló táblázatban és eredményül $\bar{x}$ vektor helyett $\bar{X}$ mátrixot kapjuk:

bázis	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n$	$\bar{e}_1$	$\bar{e}_2 \ldots \bar{e}_n$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$
$\bar{a}_1$	a_{11}	$a_{12} \ldots a_{1n}$	1	0 ... 0	x_{11}	$x_{12} \ldots x_{1n}$
$\bar{a}_2$	a_{21}	$a_{22} \ldots a_{2n}$	0	1 ... 0	x_{21}	$x_{22} \ldots x_{2n}$
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\bar{a}_3$	a_{n1}	$a_{n2} \ldots a_{nn}$	0	0 ... 1		

Itt az ellenőrzés az $\bar{A}\ \bar{X}$ szorzat elvégzése, amely $\bar{E}$-t kell eredményezzen:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

41. példa

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{e}_1$	$\bar{e}_2$	$\bar{a}_2$	$\bar{e}_1$	$\bar{e}_2$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$
$\bar{a}_1$	$\boxed{1}$	-2	1	0	-2	1	0	-5	2
$\bar{a}_2$	3	-5	0	1	$\boxed{1}$	-3	1	-3	1

$-5 + 2.3 = 1 \qquad 1 + 3\,(-2) = -5$

$0 - 1.3 = -3 \qquad 0 - 1\,(-2) = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5+6 & 2-2 \\ -15+15 & 6-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3 Lineáris egyenletrendszerek

A három ismeretlenes egyenletrendszerek még viszonylag könnyen megoldhatók determinánssal. De 4 vagy annál több általában "n" ismeretlenes egyenletrendszereknél gyorsabban jutunk a megoldáshoz, ha az egyenletrendszert $\bar{A}\,\bar{x} = \bar{b}$ mátrixegyenlettel helyettesitjük. Ugyanis mindig akad olyan

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

mátrixegyenlet, amelyet ugyanazok az $x_1, x_2 \dots x_n$ skalárok elégitenek ki, mint az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

"n" ismeretlenes lineáris egyenletrendszert. Tehát a lineáris egyenletrendszert a megfelelő mátrixegyenlettel helyettesitjük és az ismeretleneket elemi bázistranszformáció segitségével kiszámitjuk.

Példa:

42. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ \quad\quad\;\; x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 13 \\ -x_1 + 3x_2 \quad\quad\quad + 2x_4 = 8 \end{array}$$

ezt a lineáris egyenletrendszert az alábbi $\bar{A}\;\bar{x} = \bar{b}$ mátrixegyenlettel behelyettesitjük:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 20 \\ 11 \\ -9 \end{bmatrix}$$

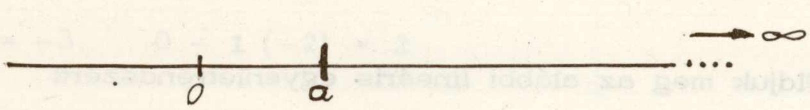
Az x_1, x_2, x_3 és x_4 skalárokat elemi bázistranszformációval számitjuk ki.

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$	x_3	x_4	$\bar{b}$	x_4	$\bar{b}$	$\bar{x}$
x_1	$\boxed{2}$	1	-1	3	-6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-3	$-\frac{1}{7}$	$\frac{8}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{126}{133}$	$\frac{2}{19}$	2
x_2	4	-5	3	1	20	$\boxed{-7}$	5	-5	32	$-\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$	$-\frac{32}{7}$	$-\frac{35}{133}$	$-\frac{9}{19}$	-1
x_3	0	1	2	-3	11	1	2	-3	11	$\boxed{\frac{19}{7}}$	$-\frac{26}{7}$	$\frac{109}{7}$	$-\frac{26}{19}$	$\frac{109}{19}$	3
x_4	-1	3	0	2	-9	$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	-12	2	1	4	$\boxed{\frac{71}{19}}$	$-\frac{142}{19}$	-2

$$x_1 = 2\;;\; x_2 = -1\;;\; x_3 = 3\;;\; x_4 = -2$$

1.4 Lineáris egyenlőtlenségrendszerek

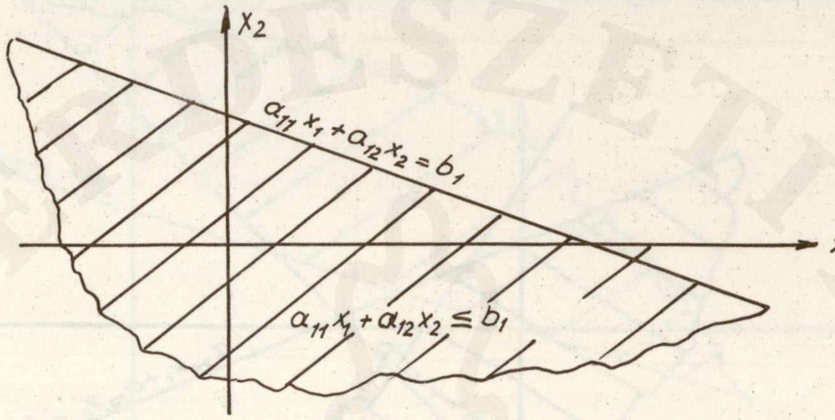
Az $x > a$ egyenlőtlenség a számegyenes "a"-tól jobbra eső szakaszával szemléltethető (48. sz. ábra).



48. sz. ábra.
Az $x > a$ egyenlőtlenség

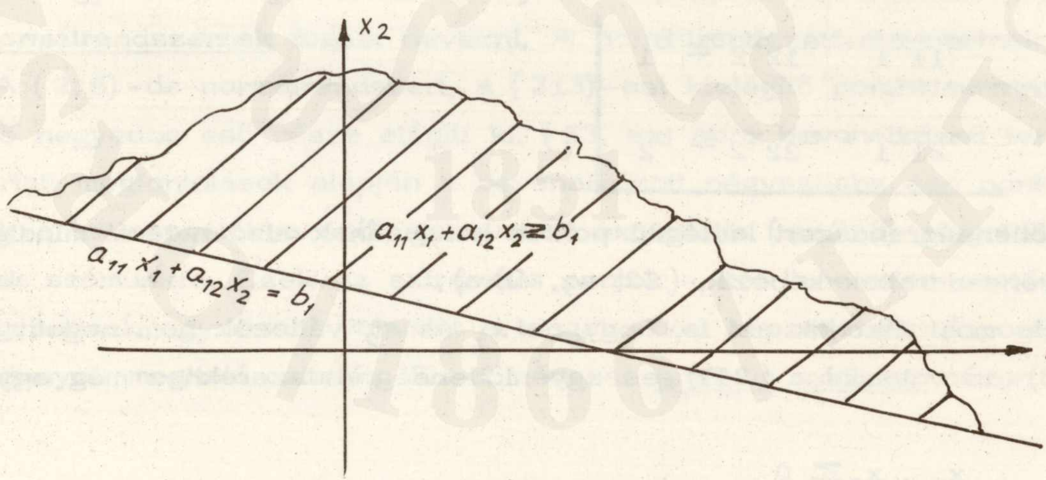
Az $x < a$ a számegyenes "a"-tól balra eső szakaszát jelenti, az $x \quad a$ szakaszban az "a" is benne van.

Az $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$ egyenlőtlenséget kielégitik az $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ határegyenes pontjai és az egyenes alatt elhelyezkedő összes pontok. (49. sz. ábra).



49. sz. ábra.
Az $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$ egyenlőtlenség jelentése

Az $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$ egyenlőtlenség a határegyenes és a felette lévő pontok összességét jelenti (50. sz. ábra).

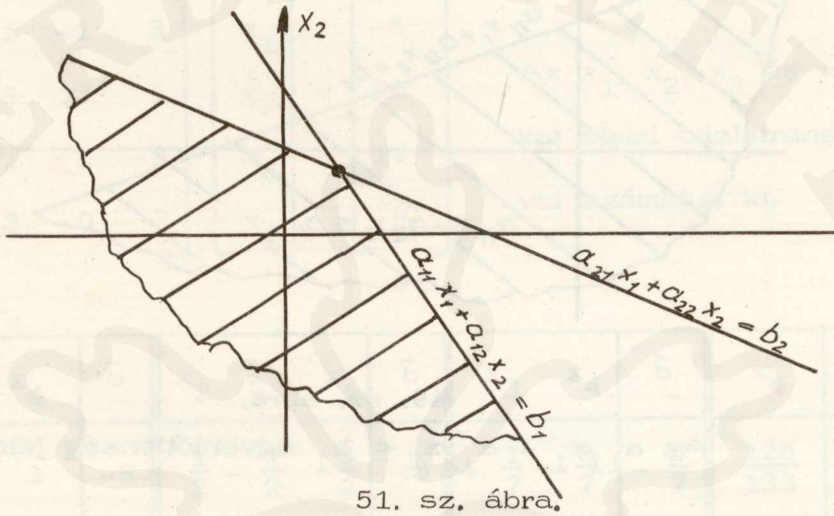


50. sz. ábra.
Az $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$ egyenlőtlenség jelentése

Az előbbiekből következik, hogy az

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \end{array}\right| \qquad (213)$$

egyenlőtlenségrendszert kielégitő pontok halmazának felső határai az alacsonyabban elhelyezkedő egyenesdarabok lesznek (51. sz. ábra).



51. sz. ábra.

A (213)-as egyenlőtlenségrendszer jelentése

Viszont az

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2 \end{array}\right| \qquad (214)$$

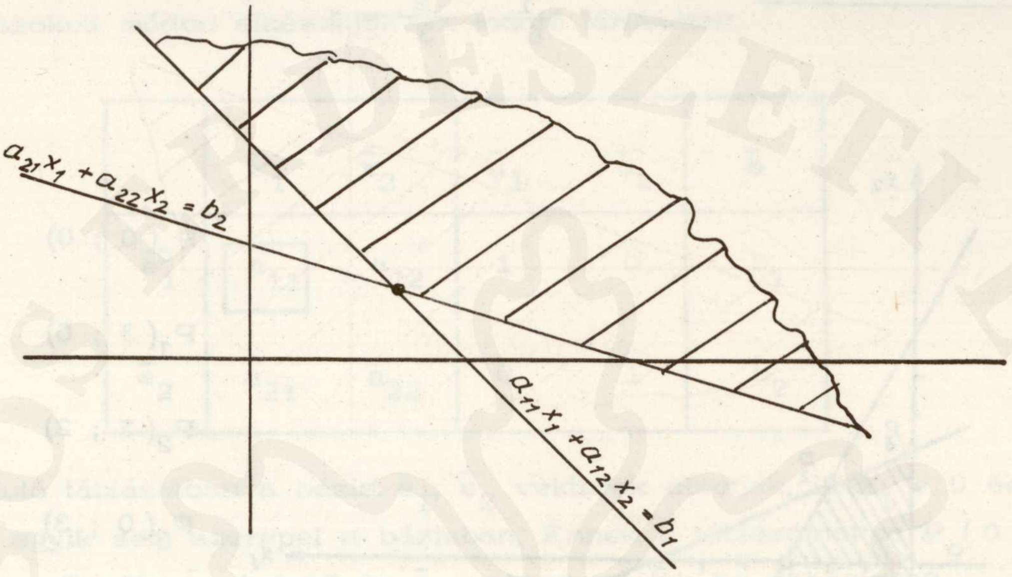
egyenlőtlenségrendszert kielégitő pontok halmazának alsó határát mindig a felső egyenesdarabok képezik. (52. sz. ábra).

Ha most kikötjük azt is, hogy az x_1 és x_2 változók nem negativ számok, a (213)-as valamint a (241)-es egyenlőtlenségrendszerekhez még egy

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

egyenlőtlenség járul. Vegyük például a (213)-as egyenlőtlenségrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x_1, x_2 &\geq 0 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq b_2 \end{aligned}\right. \qquad (215)$$



52. sz. ábra.
A (214) -es egyenlőtlenségrendszer jelentése

Az ilyen egyenlőtlenségrendszert amelynek alapegyenlőtlenségeiben (213) $\leq$ jel van, normálrendszernek fogjuk nevezni. A normálrendszert alapesetnek tekintjük.

A (215) -ös normálrendszert, a (213) -ast kielégítő ponthalmaznak csak az első negyedbe eső része elégíti ki. (53. sz. ábra bevonalkázott területe). Gyakorlati megfontolások alapján a bevonalkázott négyszögbe eső pontok közül is csak a csucspontokba eső ugynevezett extremális (szélső) megoldások érdekesek számunkra. Ezek az extremális pontok - két ismeretlen esetén - a határegyenesek egymással valamint a tengelyekkel képzett metszéspontjai gyanánt könnyen meghatározhatók. Ez a módszer grafikus módszer néven ismert.

Példa

43. Határozzuk meg az alábbi normálrendszer extremális megoldásait grafikus módszerrel.

$$x_1, x_2 \geq 0$$

a

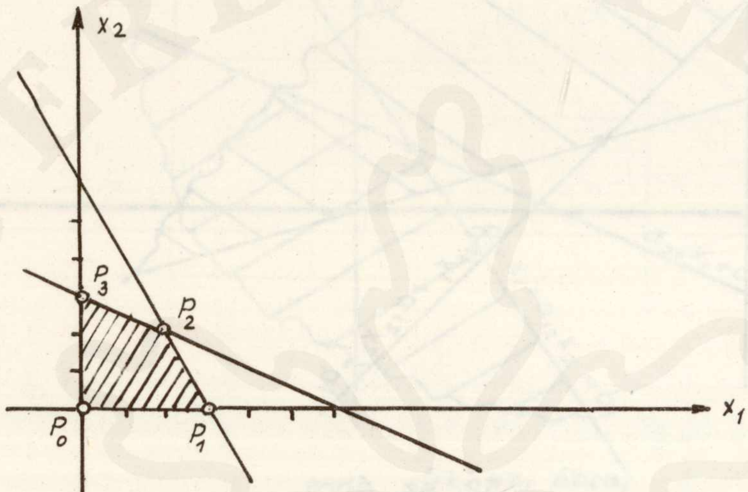
$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

a határegyenesek szerkesztési alakban:

$$\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{6} = 1$$

$$\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{3} = 1$$



$P_o(0 ; 0)$

$P_1(3 ; 0)$

$P_2(2 ; 2)$

$P_3(0 ; 3)$

53. sz. ábra.
A 43. példa extremális megoldásai

Ha az ismeretlenek száma kettőnél több, a grafikus módszer nem alkalmazható. Ebben az esetben a normálrendszer alapegyenlőtlenségeit u_1, u_2, ..., u_n ugynevezett duális változók hozzáadásával egyenletekké alakitjuk, majd elemi bázistranszformációval előállitjuk a lehetséges bázismegoldásokat. Egyszerüség kedvéért ezt az eljárást is a két ismeretlenes normálrendszerrel mutatjuk be.

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

$$x_1,\ x_2,\ u_1,\ u_2 \geq 0$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + u_1 + 0u_2 = b_1 \qquad (216)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + 0u_1 + u_2 = b_2$$

A megszokott módon elkészitjük az induló táblázatot:

I.

	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{u}_1$	$\bar{u}_2$	$\bar{b}$
$\bar{e}_1$	$\boxed{a_{11}}$	a_{12}	1	0	b_1
$\bar{e}_2$	a_{21}	a_{22}	0	1	b_2

Az induló táblázatban a bázist $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ vektorok alkotják, itt $x_1 = 0$ és $x_2 = 0$, hiszen egyik sem szerepel a bázisban. Ennek a táblázatnak a $P_o(0\ ;\ 0)$ pont felel meg. Ezután $\bar{e}_1$ helyett az $\bar{x}_1$ vektort vonjuk be a bázisba:

II.

	$\bar{e}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{u}_1$	$\bar{u}_2$	$\bar{b}$
$\bar{x}_1$	1	a'_{12}	$\frac{1}{a_{11}}$	0	b'_1
$\bar{e}_2$	0	$\boxed{a'_{22}}$	$\frac{a_{21}}{a_{11}}$	1	b'_2

A II. táblázatban $\bar{x}_1$ és $\bar{e}_2$ vektorok alkotják a bázist, itt $x_1 = b'_1$ és $x_2 = 0$. A táblázatban szereplő bázismegoldás a $P_1(b'_1\ ;\ 0)$ pontnak felel meg. A III. táblázatot az $\bar{x}_2$ vektor bázisba vonása utján kapjuk:

	$\bar{e}_1$	$\bar{e}_2$	$\bar{u}_1$	$\bar{u}_2$	$\bar{b}$
$\bar{x}_1$	1	0	a''_{11}	$\frac{a'_{12}}{a'_{22}}$	b''_1
$\bar{x}_2$	0	1	a''_{21}	$\frac{1}{a'_{22}}$	b''_2

III.

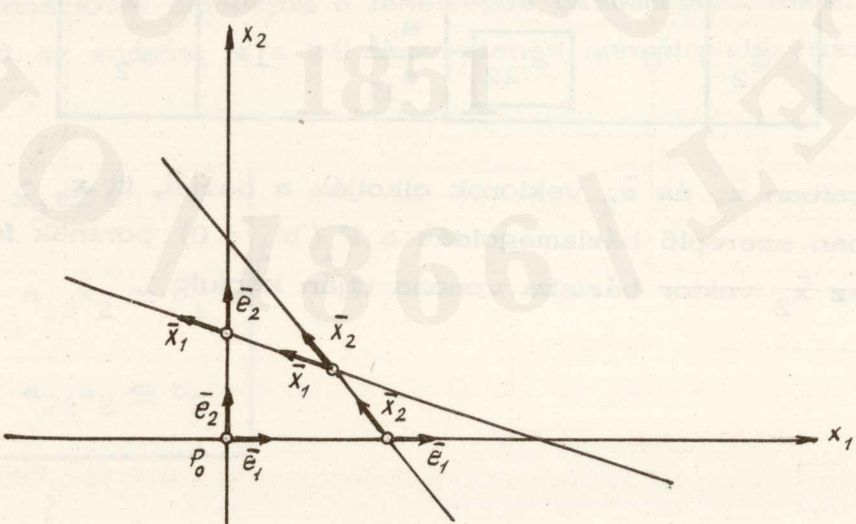
A III. táblázatban $\bar{x}_1$ és $\bar{x}_2$ vektorok képezik a bázist, igy $x_1 = b''_1$ és $x_2 = b''_2$. Ez a bázismegoldás a $P_2/ b''_1 \; ; b''_2/$ pontnak felel meg.

A következő és egyben utolsó bázismegoldáshoz két uton is eljuthatunk. A III. táblázat bázisába $\bar{x}_1$ helyébe $\bar{u}_1$-et hozzuk be, vagy az I. táblázat $\bar{e}_2$-bázisvektora helyett hozzuk be $\bar{x}_2$-öt. Ez utóbbi rendszerint egyszerűbb. Egyébként mindkét megoldásnak $x_1 = 0$ és $x_2 = b_2'''$ koordinátákkal a $P_3/ 0 \; ; b_2'''/$ pont felel meg.

	$\bar{x}_1$	$\bar{e}_2$	$\bar{u}_1$	$\bar{u}_2$	$\bar{b}$
$\bar{e}_1$	a'''_{11}	0	1	$-\frac{a_{12}}{a_{22}}$	b_1'''
$\bar{x}_1$	a'''_{21}	1	0	$\frac{1}{a_{12}}$	b_2'''

IV.

A négy bázis megoldás geometriailag jól szemléltethető (54. ábra).



54. sz. ábra.

A (216)-os egyenletrendszer bázismegoldásai

Egyszerübbé válik a számitás, ha az induló táblázatból az $\bar{u}_1$ és $\bar{u}_2$ oszlopot elhagyjuk, és az $\bar{e}_1$ és $\bar{e}_2$ bázisvektorok helyébe az u_1 és u_2 duális változókat irjuk. Igy a II. táblázatban az $\bar{e}_1$ oszlopa helyébe az $\bar{u}_1$ oszlopa kerül, $\bar{e}_1$ és $\bar{u}_2$ oszlopa pedig elmarad. A számitás menete a megszokott eljáráshoz képest tehát azzal módosul, hogy az elmaradó oszlop helyére uj oszlop kerül. Ennek a generáló elem helyén lévő eleme a generáló elem reciproka lesz, a többi elemét pedig ugy kapjuk, hogy az előző táblázat megfelelő elemét megszorozzuk a generáló elem negativ reciprokával.

	x_1	x_2	b
u_1	$\boxed{a_{11}}$	a_{12}	b_1
u_2	a_{21}	a_{22}	b_2

	u_1	x_2	b
x_1	$\frac{1}{a_{11}}$	$\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$\frac{b_1}{a_{11}}$
u_2	$-\frac{a_{21}}{a_{11}}$	a'_{22}	b'_2

Hogy egy megoldást szolgáltató táblázat után - bonyolultabb esetben is - ugyanilyenhez jussunk, a generáló elem megválasztásakor szem előtt kell tartanunk a 2,2 pont a/, b/, és c/ megkötéseit.

<u>Példa</u>

44. Határozzuk meg a 43. példában szereplő egyenlőtlenségrendszer extremális megoldásait elemi bázistranszformációval.

$$\left.\begin{array}{l} x_1, x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \end{array}\right| \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1, x_2, u_1, u_2, \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 + u_1 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + u_2 = 6 \end{array}\right|$$

I.

	x_1	x_2	b
u_1	$\boxed{2}$	1	6
u_2	1	2	6

$\frac{6}{2} < \frac{6}{1}$, a generáló elem az első sorban lévő 2-es lesz.

II.

	u_1	x_2	b
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
u_2	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{3}{2}}$	3

$x_1 = 3$; $x_2 = 0$; P(3;0) (43. Pl.)

$\frac{3}{\frac{3}{2}} < \frac{3}{\frac{1}{2}}$; a generáló elem a $\frac{3}{2}$ lesz.

III.

	u_1	u_2	b
x_1	$\boxed{\frac{2}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	2

$x_1 = 2$; $x_2 = 2$; P(2;2)

$\frac{2}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}}$; bármelyik $\frac{2}{3}$ lehetne

generáló elem.

IV.

	x_1	u_2	b
u_1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3
x_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3

$x_1 = 0$; $x_2 = 3$; P_3(0;3)

2. Lineáris programozás

2.1 A grafikus módszer

Két ismeretlen esetén, ugyanugy mint az egyenlőtlenségrendszerek megoldásánál, alkalmazható a grafikus módszer. Ez most annyival módosul, hogy itt az extremális megoldások közül ki kell választanunk az optimális megoldást.

2.11 A normál maximum feladat

Egy üzemrész, amely rendelkezik megmunkáló és festő mühellyel, kétféle terméket gyárt. Állapitsuk meg, hogy hány darabot (x_1) kell késziteni az első termékből, és hány darabot (x_2) a másodikból, hogy a legnagyobb jövedelmet

(f_{max}) szolgáltassa. A gyártásra vonatkozó adatokat az alábbi táblázat tartalmazza:

LI. táblázat.

mühely		termék db.		időkapacitás
	időszükséglet	x_1	x_2	
megmunkáló		a_{11}	a_{12}	b_1
festő		a_{21}	a_{22}	b_2
hozam		f_1	f_2	–

A feladatot matematikailag egy egyenlőtlenségrendszerrel fogalmazhatjuk meg:

a/ A keresett darabszámok x_1 és x_2 csak pozitiv számok lehetnek, ezt igy irjuk fel:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

b/ A megmunkáló mühelyre felirhatunk egy egyenlőtlenséget, ugyanis az első termék időszükséglete szorozva a darabszámával plusz a második termék időszükséglete szorozva a darabszámával kisebb kell legyen vagy legfeljebb egyenlő a mühelyben rendelkezésre álló idővel (időkapacitás):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

Az időkapacitást órában számoljuk és egy müszakra vonatkoztatjuk.

c/ A festőmühelyre az előbbihez hasonlóan a következő egyenlőtlenséget irhatjuk fel:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

d/ Végül kikötjük, hogy az első termék hozama szorozva a darabszámával plusz a másik termék hozama szorozva a darabszámával maximális legyen:

$$f_1x_1 + f_2x_2 = f_{max}$$

Ezt az egyenletet <u>célfüggvénynek</u> nevezzük. A hozamot valamilyen pénzegységben adjuk meg.

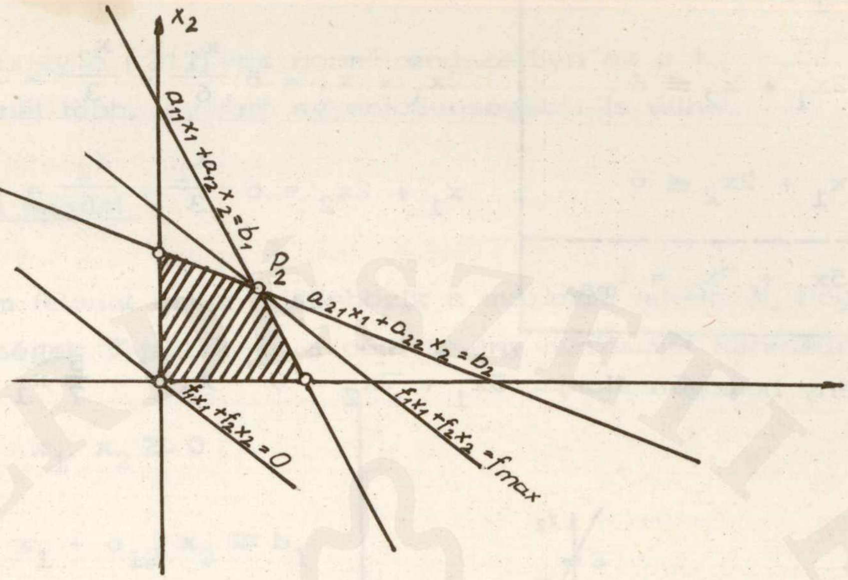
Az a/, b/, c/, és d/ pontokban leirt képleteket összefoglalva:

$$\left.\begin{array}{ll} a/ \; \ldots\ldots & x_1 , x_2 \geq 1 \\ b/ \; \ldots\ldots & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ c/ \; \ldots\ldots & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ d/ \; \ldots\ldots & f_1x_1 + f_2x_2 = f_{max} \end{array}\right\} \qquad (217)$$

matematikailag megfogalmaztuk a fent vázolt feladatot. A problémát lineáris egyenlőtlenségrendszerrel irtuk le tehát ez a feladat a lineáris programozás körébe tartozik. És mivel a célfüggvény maximumát keressük, ezen kivül normálrendszerrel van dolgunk, <u>normál maximum feladatról</u> beszélünk. Az optimális programot azon x_1 és x_2 darabszámok szolgáltatják, amelyek mellett a célfüggvény maximális.

A b/ és c/ egyenlőtlenségek alkotta rendszer megoldását az 51. ábra illusztrálja. Az a/ egyenlőtlenséget és hozzávéve az extremális megoldásokat az 53. sz. ábra mutatja. Ezek P_1, P_2, P_3, amelyek közül az optimális megoldást a célfüggvény (d) segitségével választhatjuk ki. A célfüggvény $f_1x + f_2x = 0$ homogén alakja az origon áthaladó egyenes. A jobboldalon bármilyen f_{max} érték álljon és a <u>célegyenes</u> mindig párhuzamos lesz a homogén alakkal. Az az extremális megoldás jelenti az optimális megoldást, amelynek megfelelő ponton állandó célegyenes az origótól a legtávolabb van, (lásd az 55. ábrát). Ha a célegyenes a bevonalkázott sokszög felső konturjának egy egyenesdarabjával egybeesik, akkor ennek az egyenesdarabnak minden pontja optimális megoldást szolgáltat.

Megjegyezzük, hogy ugyanazon feladatnál a célfüggvényt több szempontnak megfelelően is felirhatjuk, - és az igy kapott optimális megoldások nem feltétlen esnek egybe.



55. sz. ábra.

Az optimális megoldás a P_2 pontban lesz

Példa

45. Oldjuk meg grafikus módszerrel az alábbi normál feladatot:

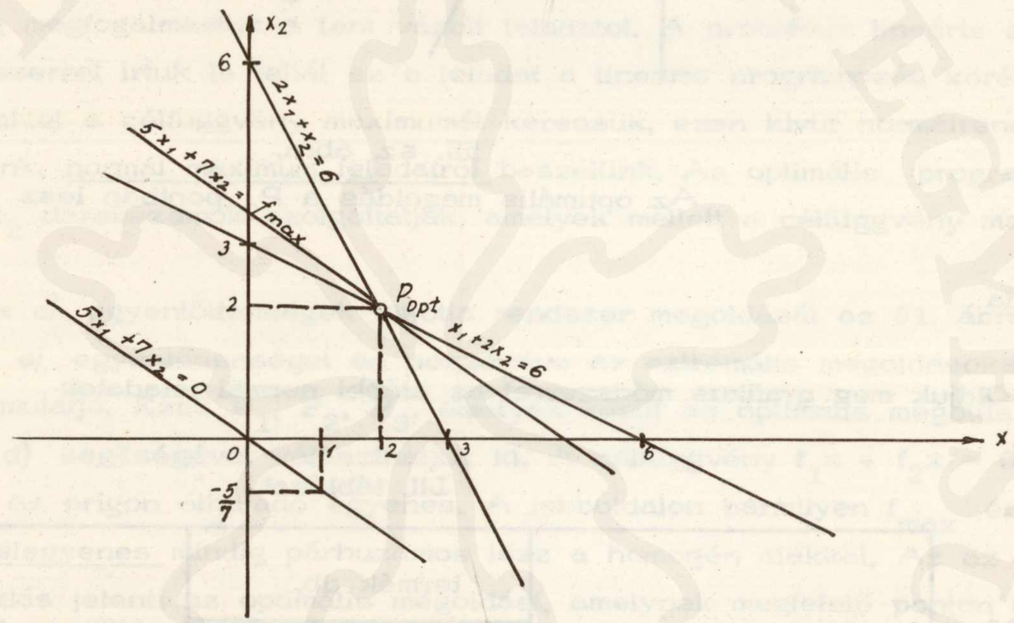
LII. táblázat

műhely		termék db.		időkapacitás*
		x_1	x_2	
megmunkáló	idő-szükséglet	2	1	6
festő		1	2	6
hozam		5	7	-

A feladatnak megfelelő egyenlőtlenségrendszer:

$x_1, x_2 \geq 0$	a határegyenesek:
$2x_1 + x_2 \leq 6$	$2x_1 + x_2 = 6 \quad \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{3} = 1$
$x_1 + 2x_2 \leq 6$	$x_1 + 2x_2 = 6 \quad \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{6} = 1$
$5x_1 + 7x_2 = f_{max}$	

A célfüggvény homogén alakja: $5x_1 + 7x_2 = 0 \quad x_2 = -\frac{5}{7}x_1$



56. sz. ábra.

Az origotól legtávolabbra eső célegyenes kijelöli a P_{opt}-ot.

A P_{opt} pont koordinátái milliméterpapiron leolvashatók. Ellenőrzésképpen a két egyenes metszéspontjaként adódó P_{opt} koordinátái számítással:

$$2x_1 + x_2 = 6$$

$$-2x_1 - 4x_2 = 12$$

$$-3x_2 = -6$$

$$\underline{x_2 = 2}$$

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

$$x_1 = 6 - 2x_2 = 6 - 4$$

$$\underline{x_1 = 2}$$

$$\underline{f_{max} = 5x_1 + 7x_2 = 10 + 14 = 24 \text{ pénzegység}}$$

Megjegyezzük, hogy a (217)-es normálrendszerben az a b./ - c./ egyenlőtlenségrendszer 2-nél több, igy "n" egyenlőtlenségéből is állhat.

2.12 A minimum feladat

A minimum feladat abban különbözik a maximum feladattól, hogy a b./ - c./ egyenlőtlenségek $\geq$ jelüek és a célfüggvény minimumát keressük:

$$\left.\begin{array}{l}
x_1, x_2 \geq 0 \\
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \geq b_1 \\
a_{21} xx_1 + a_{22} x_2 \geq b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 \geq b_n \\
\hline
f_1 x_2 + f_2 x_2 = f_{min}
\end{array}\right\} \qquad (218)$$

Példa

46. Kétféle takarmány áll a vadgazdaság rendelkezésére, amelynek mindegyike A, B, C tápanyagokat tartalmaz. Egy-egy adagba "A" tápanyagból 6, "B"-ből 12 és "C"-ből 4 sulyegységre van szükség. Hány sulyegységet kell venni a kétféle takarmányból, hogy a fenti feltételeket teljesitsük és az önköltség minimális legyen. Az első takarmány önköltsége sulyegységenként 5, a másodiké 6 pénzegység. Az adatokat táblázatba foglalva:

LIII. táblázat.

tápanyag	takarmány		minimális mennyiség
	x_1	x_2	
A	2	1	6
B	2	4	12
C	0	4	4
önköltség	5	6	-

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

$$2x_1 + x_2 \geq 6$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$4x_2 \geq 4$$

$$5x_1 + 6x_2 = f_{min}$$

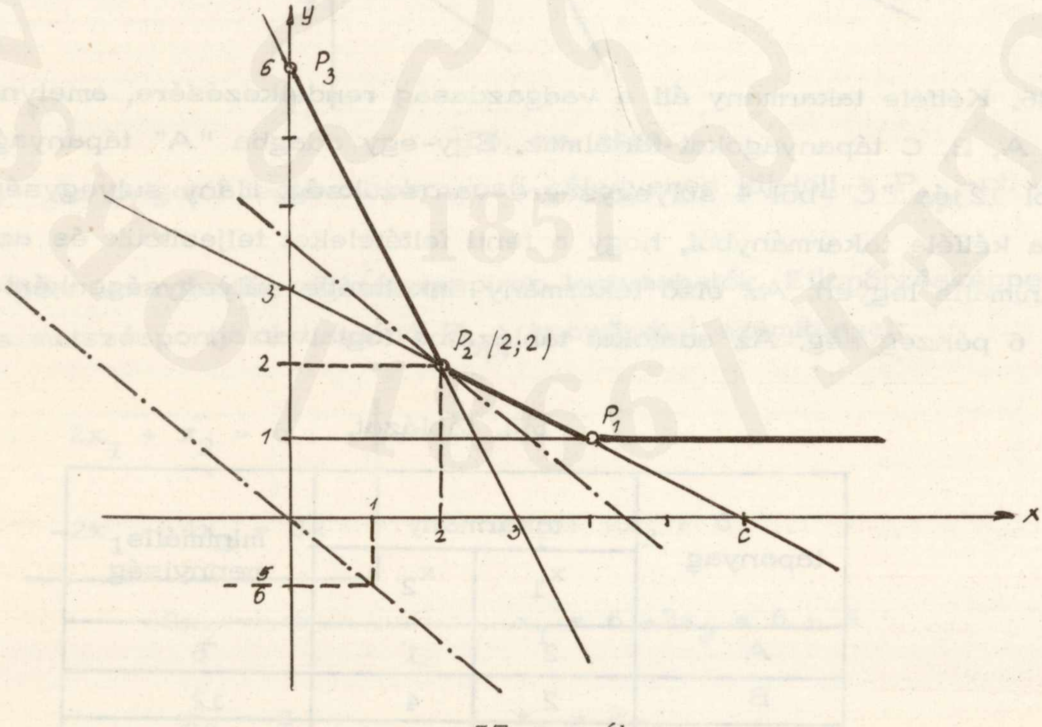
Itt 3 határegyenes lesz, ezeket és a célegyenest megszerkesztjük (lásd az 52. ábrát):

$$2x + y = 6 \longrightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$$

$$2x + 4y = 12 \longrightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$$

$$4y = 4 \longrightarrow \frac{y}{1} = 1$$

$$5x + 6y = 0 \longrightarrow y = -\frac{5}{6}x$$



57. sz. ábra.

A minimum feladat megoldása

Az extremális megoldásokat a P_1, P_2 és P_3 pontok képezik. Amelyik ponton átfektetett célegyenes az origóhoz legközelebb van, az a pont jelenti a célfüggvény minimumát, vagyis az optimális programot. Ez a pont a P_2 (2;2), tehát a keresett takarmány sulyegységek: x = 2 és y = 2. Ezen értékeket a célfüggvénybe helyettesitve:

$$f_{min} = 5.2 + 6.2 = 22 \text{ pénzegység.}$$

A P_1 és P_3-ban magasabb lenne az önköltség. Behelyettesitéssel ellenőrizhetjük. A pontok koordinátáit itt is természetesen a megfelelő egyenesek metszéspontjai szolgáltatják.

2.2 A szimplex módszer

Ha az ismeretlenek száma 2-nél több, a grafikus megoldást nem lehet alkalmazni. Normálrendszernél elemi bázistranszformációval képezzük a bázismegoldásokat, a (216)-os rendszernél alkalmazott módon, de most a célfüggvényt is a rendszerhez adjuk és jól konstruált megkötések segitségével a bázismegoldások közül kiválasztjuk az optimális megoldást.

$$x_1, x_2, \dots x_n \geq 0$$

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
\vdots \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k \\
\hline
f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n = f_{max}
\end{array}$$

Hogy a közbeeső bázismegoldásokon keresztül eljussunk az optimális programhoz, a generáló elem megválasztásában az egyenlőtlenségrendszereknél emlitett 3 megkötéshez még egyet be kell tartanunk, nevezzük itt ezeket korlátozó feltételeknek:

I.

	x_1	x_2	...	x_n	b
u_1	$\boxed{a_{11}}$	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
u_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
u_k	a_{k1}	a_{k2}	...	a_{kn}	b_k
	f_1	f_2	...	f_n	0

d/ Csak abban az oszlopban választhatunk generáló elemet, amely legalsó eleme pozitiv, vagyis csak az a termék vonható be a programba amelyik jövedelmező, és lehetőleg amelyik a legnagyobb jövedelmet hozza.

Tegyük fel, hogy:

a/ a_{11} pozitiv szám (szerepel ezen üzemrészben)

b/ b_1 és pozitiv (van szabad kapacitás)

c/ $\frac{b_1}{a_{11}}$ az első oszlopra nézve a legkisebb hányados (legszükebb keresztmetszet.

d/ f_1 pozitiv és az f értékek között a legmagasabb, (jövedelmez, méghozzá a legnagyobb jövedelmet biztositja).

A fentiek értelmében a_{11} lesz a generáló elem és igy a második táblázat:

	x_1	x_2	...	x_n	b
x_1	$\frac{1}{a_{11}}$	a'_{12}		a'_{1n}	b'_1
u_1	$\frac{a_{21}}{a_{11}}$	a'_{22}		a'_{2n}	b'_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
u_k	$\frac{a_{k1}}{a_{11}}$	a'_{k2}		a'_{kn}	b'_k
$-f$	$\frac{f_1}{a_{11}}$	f'_2	...	f'_n	$-\frac{b_1}{a_{11}} f_1$

A második táblázatról áttérünk a harmadikra stb, addig amig az utolsó sorban az f_i elemek negativvá nem válnak. (Mikor ezek mind negativak már nincs olyan termék amely jövedelmezően bevonható lenne a programba) . Ezen utolsó táblázat "b" oszlopa szolgáltatja a keresett optimális programhoz tartozó x_1, x_2 . . . x_n és f_{max} értékeket. Az f_{max}-t mindig negativ előjellel kapjuk meg. A bemutatott módszert simplex módszernek nevezték el.

Példa:

47. Oldjuk meg a 45. példát simplex módszerrel.

$$x_1 \; ; \; x_2 \geq 0$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$5x_1 + 7x_2 = f_{max}$$

$x_1 = ?$

$x_2 = ?$

$f_{max} = ?$

	x_1	x_2	$\bar{b}$		x_1	u_2	$\bar{b}$		u_1	u_2	
u_1	2	1	6	u_1	$\boxed{\frac{3}{2}}$	$-\frac{1}{2}$	3	x_1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
u_2	1	$\boxed{2}$	6	x_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3	x_2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	2
$-f$	5	7	0	$-f$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	-21	$-f_{max}$	-1	-3	-24

$x_1 = 2$

$x_2 = 2$

$f_{max} = 24$

- o -

Ajánlott irodalom

Éltető Ö. - Ziermann M.: Matematikai statisztika

Prékopa A.: Valószinüségelmélet

Sváb J.: Biometriai módszerek

Farkas V.: Lineáris programozás matematikai alapjai

Krekó B.: Lineáris programozás