ERDÉSZETI ÉS FAIPARI EGYETEM
FAIPARI MÉRNÖKI KAR

Dr. STASNEY ALBERT
egyetemi tanár

ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIA II.

1808
1958

JEGYZETSOKSZOROSÍTÓ RÉSZLEG

SOPRON, 1967

ERDÉSZETI ÉS FAIPARI EGYETEM
FAIPARIMÉRNÖKI KAR

Stasney Albert

ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIA II.

Kézirat

Sopron, 1967.

A kiadásért felelős az Erdészeti és Faipari Egyetem Rektora

Megrendelve: 1971. szeptember 15. Példányszám: 300

Készült rotatrint eljárással 216 oldalon 295 ábrával.

ERDÉSZETI ÉS FAIPARI EGYETEM JEGYZETSOKSZOROSITÓ RÉSZLEGE

Felelős: Dr. Pankotai Gábor

14. utánnyomás

Andrési Pál Ierth. II.cs. 12

Előszó.

Az "Ábrázoló geometria" 1. részében a téralakzatokat a képtengellyel megállapitott helyü és helyzetü képsikokon ábrázoltuk, még pedig elől és felülnézetben, s más irányu nézetet csak segédképként alkalmaztunk.

Az ábrázoló geometriára épülő müszaki rajzok tulnyomó többségénél azonban egyrészt nincs képtengely, s igy a képsikok helye sincs rögzitve, másrészt az elől- és oldalnézet /felülnézet/ kapcsolat sem ritkább, mint az elől-felülnézet. E körülményeket a tárgyunk második részében szem előtt tartjuk, s bevezetőül egynéhány alapfeladatot oldunk meg e szempontok szerint.

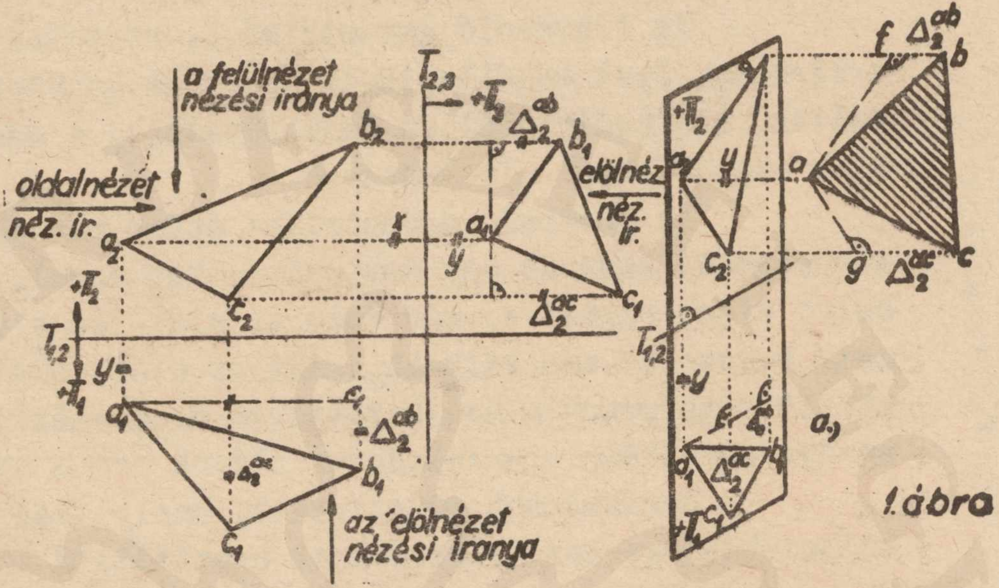
Megösmerünk módszereket, amelyekkel téralakzatoknak, különösképp szerkezeti részeknek szemléltető képét készithetjük el.

A görbe vonalakat a gyakorlatilag fontos görbe felületek taglalása követi.

A földmérésnél az egyre kiterjedtebben alkalmazott fényképmérés előkészitéséhez foglalkozunk a centrális perspektiva idevágó elemeivel.

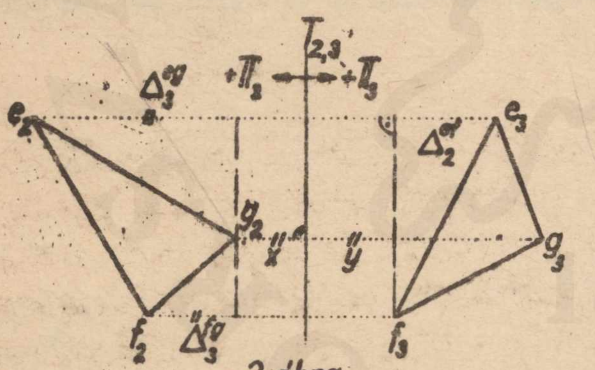
I. Ábrázolás képtengely nélkül.

1./ Az elöl-oldalnézet kapcsolatáról. Az 1. ábrán $a_1 b_1 c_1$ az abc háromszög felülnézete, $a_2 b_2 c_2$ az elölnézete és az ezekkel megszerkesztett $a_3 b_3 c_3$ az oldalnézete /oldalnézet balról/. Az egyes képek nézési irányának képe a kapcsolt képpár rendezőjével párhuzamos s a kép felé mutat. Igy az elöl-felülnézet kapcsolatban az elölnézet nézési iránya a függőleges rendező iránya, elöl-oldalnézetben pedig a vizszintes rendező.



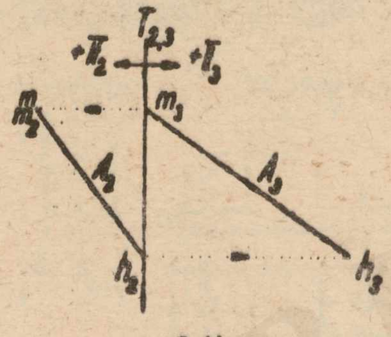
1.ábra

Az abc térbeli helyzete ugyanaz, ha azt az 1.2 vagy 2.3 kapcsolattal állapitjuk meg, mert az első és harmadik rendezők egyenlők. Ugyanezen rendezők mutatják, hogy az "a" csucs van Π_2-höz legközelebb, b csucs Δ_2^{ab}-vel, c meg Δ_2^{ac}-vel van távolabb mint az "a". Miért is a térbeli b csucsot ugy is megkaphatjuk, hogy b_2-ben Π_2-re állitott merőleges vetitősugárra /1. ábra/ a térbeli a-ból merőlegest állitunk, s az f metszésponttól kezdve Δ_2^{ac} távolságot Π_2-től távolodó, positiv értelemben felmérjük. A c csucs térbeli helyének megállapitásánál Δ_2^{ac} mérendő rá g metszésponttól a vetitősugárra.


2.ábra

Az előzőkből következik az egyébként már ismert tény, hogy az elöl-oldalnézet kapcsolt képpár a téralakzatot egyértelműen meghatározza. Ezen kapcsolat a müszaki rajzoknál éppen olyan gyakori, mint az elöl-felülnézet.

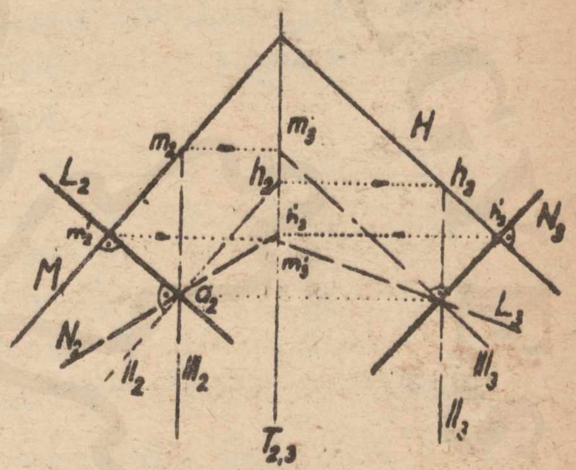
A 2. ábrában elöl-oldalnézetben megadott háromszög csúcsaának távolsága a Π_3-tól egyenlő a második rendeződarabokkal. Ezek különbsége, a végpontok harmadik differenciálja pl Δ_3^{eg}.



3.ábra

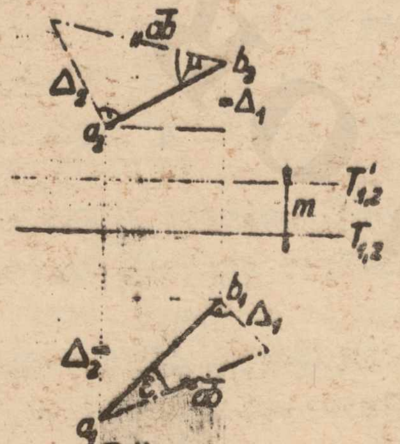
Az egyenesnek van második /m/, /3. ábra/, harmadik /h/ nyompontja, a siknak /4 ábra/ második /M/, és harmadik /H/ nyoma, s az ezekkel, illetve a képsikokkal párhuzamos második /II/, és harmadik /III/ fővonala. Az M-re, illetve II-re merőleges L második esésvonalnak a második képsikszöge a sik második képsikszöge is; a H-ra és III-ra merőleges N harmadik esésvonal harmadik képsikszöge a siké is stb.

2./ A képsik mozgatása. Szerkesszük meg az elől-felülnézetben megadott ab valódi nagyságát, képsikszögeit a két különbségi háromszöggel. /5. ábra/ Emeljük a Π_1-t m távolsággal feljebb, amikor is a képtengely $T'_{1,2}$ helyzetbe jut. Az emelés folytán a távolság pontjanak második rendezője, első távolsága, m-el megrövidül, első rendezője, tehát második távolsága m-el megnövekedik, azaz ab pontjai Π_2-től m-el távolabb jutottak.



4.ábra

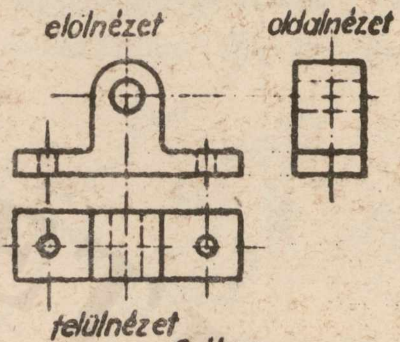
Ha a térbeli ab helyét nem változtatta, akkor Π_2 mozgott m-el hátrább, ha Π_2-t tételezzük fel mozdulatlannak, ugy ab távolodott a második vetitősugár irányában m-el előre. Mindkét értelmezés szerint bárhova is kerül a képtengely, a különbségi háromszögek alkotórésszeinek nagysága: a képhossz, és a rendezők különbsége nem változik meg, azaz ab pontjainak kölcsönös helyzete, valódi nagysága, a képsikirányokkal bezárt szögei változatlanok. Vagyis a téralakzat pontjainak kölcsönös helyzete független a képtengely, illetve a képsikok helyétől, s igy a képtengely el is hagyható, mint ahogy müszaki rajzoknál nincs



5.ábra

képtengely, s csak a képsikok helyzetét, tehát a nézés irányát ismerjük, a képsik helyét nem. Ez esetben nem egy képsikon levő képről beszélünk, hanem inkább azt mondjuk, hogy a függőleges, vizszintes stb. képsikirányra merőlegesen nézve milyennek látszik az alakzat, milyen az elől- felül- oldalnézete /6. ábra/

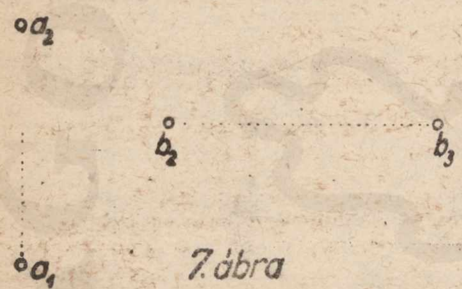
Elméleti és gyakorlati szerkesztések néha egyszerübbek, ha a képtengely felvételével a képsik helyét rögzitjük.



6. ábra

3./ Pont és egyenes nézetei. Egy pont elől- és felülnézete, elhagyott képtengely esetén is, függőleges, elől- és oldalnézete meg vizszintes rendezőn helyezkedik el /7. ábra/.

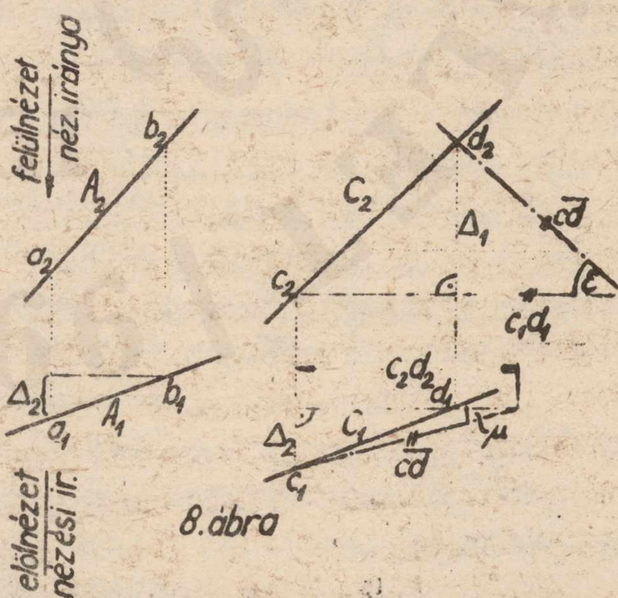
Az elől-felülnézetben megadott A egyenes /8. ábra/ térbeli helyzetének megállapitásához felvesszük a és b pontjait. b pont b_2-ben a függőlegesre állitott papir sikjára, Π_2 irányára állitott merőlegesen van, s ezen bárhol felvehető. /De ne vegyük távolabb, mint b_2b_1 rendező hossza/. A Δ_2-vel távolabb levő "a"-t megkapjuk, ha a-nak vetitősugarára a felvett b-ből állitott merőleges metszéspontjától Δ_2-t, a papirsiktól távolodó értelemben, felmérjük /lásd: 1. ábra a-t is/. Minden felvett b-nek csak egy "a" felel meg, s a megfelelőek összekötése A-nak egy-egy, egymással párhuzamos helyzete.



7. ábra

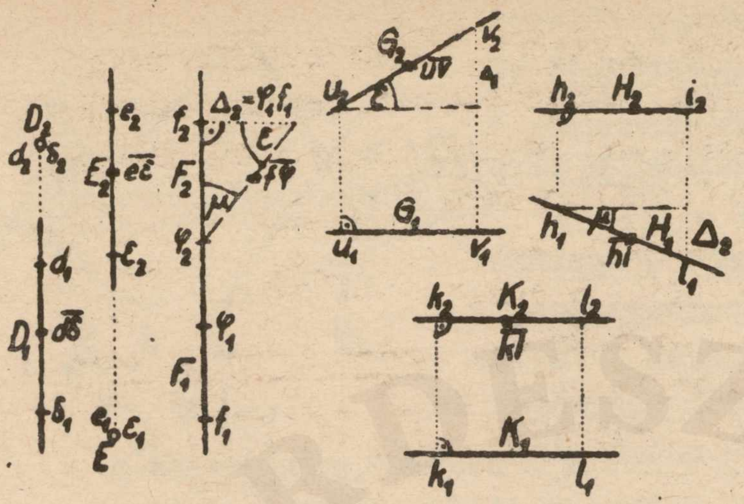
Ezek mindegyikének Π_2 és Π_1 irányokhoz azonos helyzete /képsikszögei/, s az ab távolságok valódi hosszai is egyenlők.

C egyenes képsikszögeit valamint cd szakaszának valódi nagyságát a két különbségi háromszög adja meg.

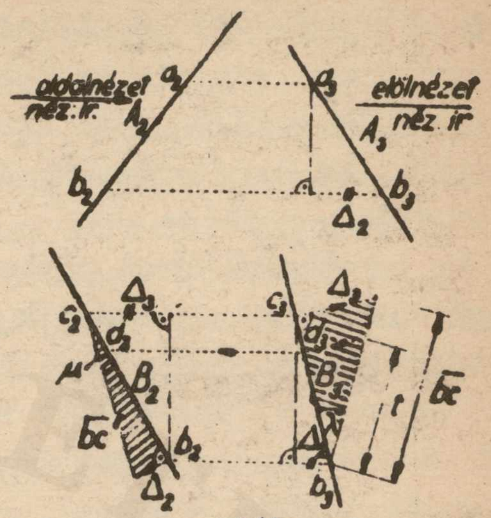


8. ábra

A 9. ábrán a Π_2 irányára merőleges D-nek az elölnézete pont. dδ darabja felülnézetben látszik valódi nagyságban; E egyenes függőleges; F_1 a Π_3



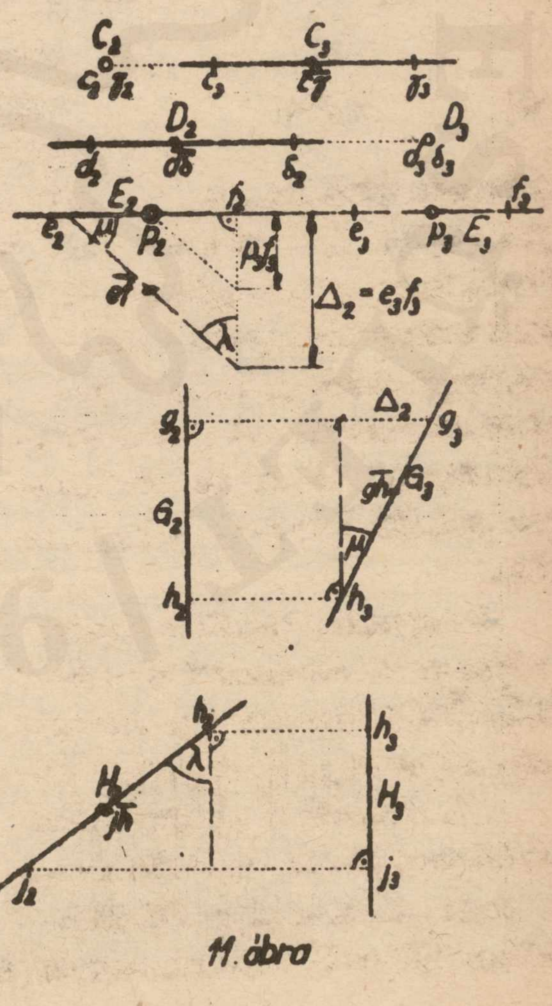
9.ábra



10.ábra

irányával párhuzamos profil egyenes; G az előlnézet sikjával párhuzamos, frontális egyenes; H a felülnézet sikjával párhuzamos vizszintes; K meg mindkettővel párhuzamos. Az egyenesek mindegyikének megállapitottuk képsikszögét s egy darabjának valódi nagyságát. Rekonstruáljuk az egyeneseket.

A 10. ábrában elől-oldalnézetben megadott A térbeli helyzetének megállapitásánál az előzők szerint felvett térbeli a-hoz viszonyitva, b pont az oldalnézetből megállapitott Δ_2-vel van a papir sikjától távolabb, a nézőhöz közelebb. Oldalról nézve b van a nézőhöz közelebb.



11.ábra

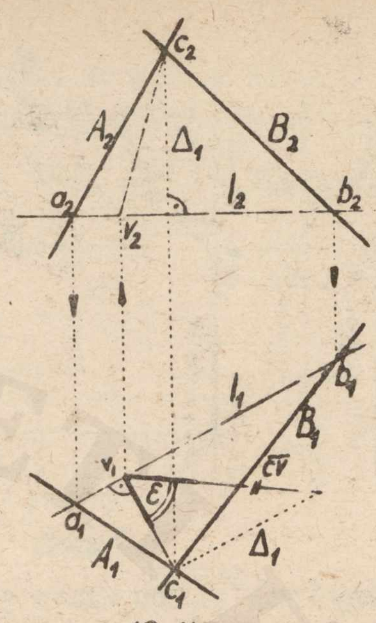
B egyenes μ második képsikszögét egy bc darabjának valódi nagyságát a második, λ harmadik képsikszögét meg a harmadik különbségi háromszögével szerkesztettük meg. Utóbbinak az egyik befogója b_3c_3, a másik meg egyenlő c_2 és b_2 rendezőinek Δ_3 különbségével, s az ezzel szemben levő szög λ. Az átfogó mindkét esetben bc valódi hossza. A bc darab harmadik különbségi háromszögének felhasználásával B-re b-től felmért t hosszuság végpontja d /d_3d_2/.

A 11. ábrán C az előlnézet,

D az oldalnézet képsikirányára merőleges egyenes. A vizszintes E képsikszögeit ef darabjának különbségi háromszöge adja. A p_3-nak az osztásviszony állandósága alapján megfelel p_2.

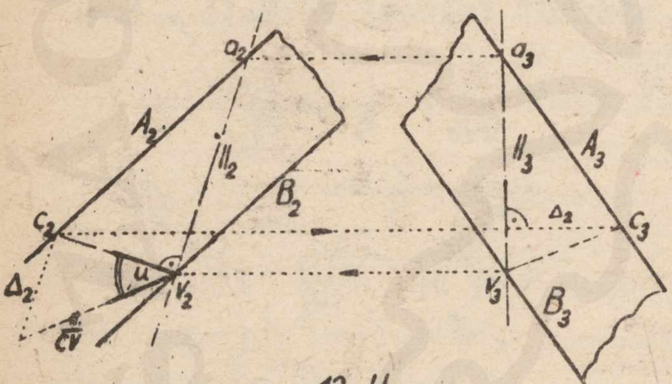
A II_3 irányával párhuzamos C egyenes gh darabjának és második képsikszögének tényleges nagysága oldalnézetben látszik. H egyenes hj darabjának valódi nagyságát és harmadik képsikszögét az elölnézet adja meg.

Állapitsuk meg az egyenesek térbeli helyzetét.



12. ábra

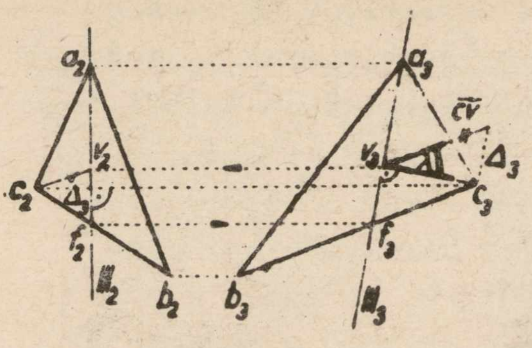
<u>4./ Sik, fővonal, esésvonal, képsikszög.</u> A nem rögzitett képsikok miatt sikot, metsződő, párhuzamos egyeneseivel adunk meg. A siknak egy-egy képsikiránnyal párhuzamos egyenesei az első, második, harmadik fővonalai. Az <u>első fővonalra merőleges sikbeli egyenesek az első esésvonalak;</u> a második fővonalakra a második, a harmadik fővonalakra a harmadik esésvonalak merőlegesek. Az első esésvonalnak az első képsikszöge a siknak is első képsikszöge, a másodiknak a második, a harmadiknak a harmadik képsikszöge a siknak is a második, illetve a harmadik képsikszöge.



13. ábra

Szerkesszük meg AB sik első képsikszögét /12. ábra/. Egy első fővonal I_2 elölnézete merőleges c rendezőjére, felülnézete I_1. Erre merőleges a cv esésvonal c_1v_1 felülnézete, rendezővel v_2. A cv első különbségi háromszögének $\triangle_1$ befogójával szemben levő szög az esésvonalnak és a siknak az első képsikszöge.

A 13. ábrán AB sik második képsikszögének megszerkesztéséhez II_3 merőleges a rendezőirányra, cv második esésvonal, c_2v_2 merőleges II_2-re. cv második különbségi háromszögében $\triangle_2$-vel szemben van a keresett μ.

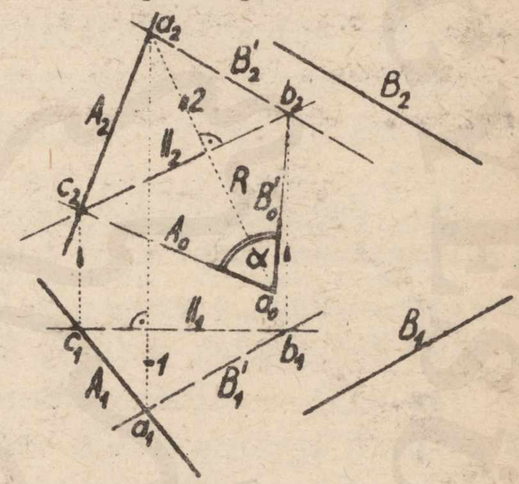


14.ábra

Az abc háromszög /14. ábra/ harmadik képsikszögét keresve, az "a" csucson átmenő harmadik fővonal III_2 elölnézete merőleges a rendezővonalra és $a_3f_3 = III_3$. Erre merőleges cv harmadik esésvonal c_3v_3 oldalnézete. cv harmadik különbségi háromszögének $\triangle_3$-al szemben levő szöge a λ harmadik képsikszög.

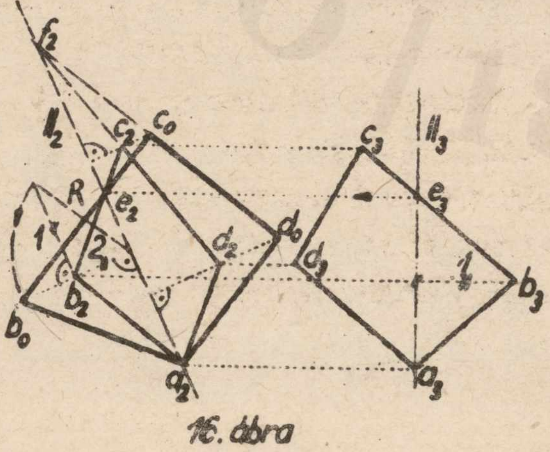
Mind a három esetben a különbségi háromszög átfogója a cv esésvonaldarabnak a valódi nagysága, s ez egyben c pontnak távolsága a fővonaltól, a képsikkal párhuzamos egyenestől. Ez a távolság átfogója oly derékszögü háromszögnek, amelynek két befogója egyenlő a pont és az egyenes egynevü nézeteinek egymástóli távolságával /pl. a 14. ábrán: $c_2III_2 = \triangle_3$ és $c_3III_3 = c_3v_3$ /.

5./ Sikforgatás képsikkal párhuzamos helyzetbe. A müvelet célja a sikbeli alakzatok nagyságának megállapitása, sikbeli szerkesztések egyszerü ábrázolása.



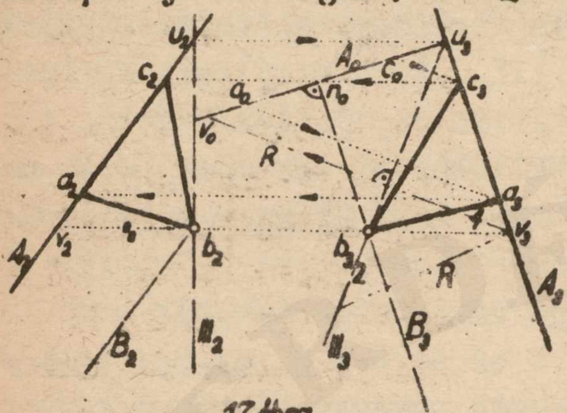
15.ábra

A kitérő A és B irányainak szöge /15. ábra/ egyenlő a B-vel párhuzamos B' és A metsződő egyenesek szögével. A szög meghatározásához B'A sikot pl. egy második fővonal körül az elölnézet sikjával párhuzamos helyzetbe forgatjuk, amikor is "a" pont körének R sugara egyenlő /"a" távolsága a II fővonaltól az előző pont szerint is T/ az 1 és 2 befogókból képezhető derékszögü háromszögnek az átfogójával. A_0 és B_0' szöge az A és B irányok szöge.



16.ábra

Az abcd trapéz /ad ∥ bc/ valódi nagyságának meghatározásához /16. ábra/ forgassuk a trapézt "a" második fővonala körül II_2 irányával párhuzamos helyzetbe. e és a állandó. B körének R sugara, b távolsága a fővonaltól, az 1 és 2 befogókkal az elölnézetben megszerkesztett derékszögü háromszög átfogója. b_oe_o-ra jut c_o ; $a_2d_o \parallel b_oc_o$; d_2c_2 és d_oc_o-nak f_2 metszéspontja a forgás /affin/ tengelyen van, $a_2b_oc_od_o$ a valódi nagyság.



17.ábra

A 17. ábrán ábrázolandó egyenlőszáru háromszög egy csucsa az adott b, az adott A-n levő alapja egyenlő a magasságával.

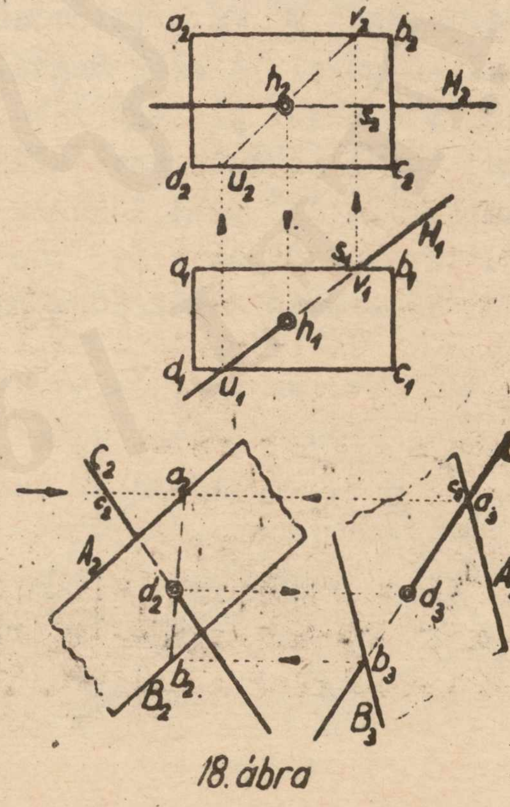
A szerkesztéshez bA sikot b-n átmenő harmadik fővonala körül az oldalnézet sikjával párhuzamos helyzetbe forgatjuk. b és u állandók, v-nek forgássugara 1 és 2-ből szerkesztve, R. Az u_3 és v_o összekötése A_o, az erre merőleges b_3n_o a háromszög magassága. Az a_oc_o alap egyenlő b_3n_o-al. Visszaállitással a_3c_3 ; rendezővel a_2c_2.

A háromszög b_3n_o magassága b pont távolsága A egyenestől, valamint A és b-n átmenő B párhuzamosak távolsága.

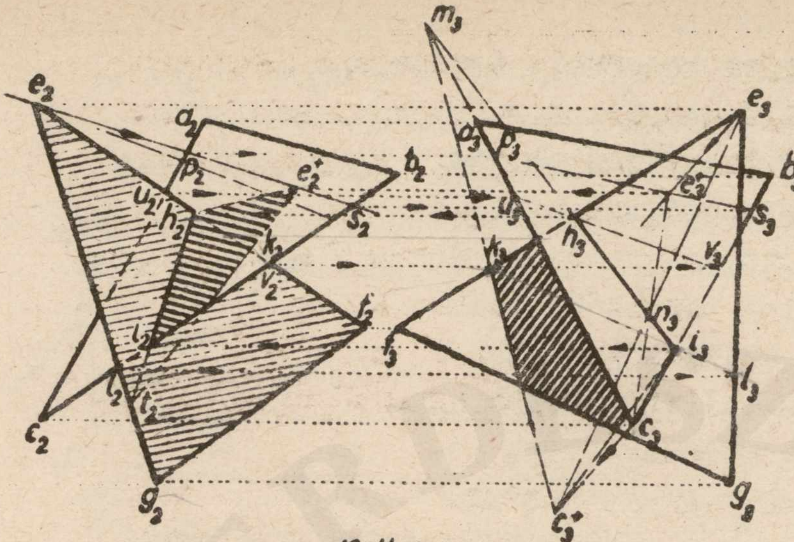
6./ Egyenes döfése sikkal, sikok metszőegyenese. Az elölfelülnézetben adott abcd téglalap /18. ábra/ és H döfésének megszerkesztésénél a segédsik függőleges. A láthatóság eldöntésénél az első fedőpontok s és v, felülnézetben v látható. A sik dült.

Az elől-oldalnézetben megadott AB sikot C egyenes d-ben döfi. A segédsik C harmadik vetitősikja. Az oldalnézetben a láthatóság eldöntésénél az a és c fedőpntok közül c van a nézőhöz közelebb, s igy az a_3d_3 egyenesdarab látható. AB sik feszitett, elölnézetben a láthatósága ellentétes.

Megszerkesztendő abc és efg háromszögek metszöegyenese /19.ábra/ Minden sikbeli egyenes a másik sikot a metszőegyenes egy pontjában döfi. ef oldal döfése abc sikkal h /h_3 ...h_2/, bc oldal döfése efg sikkal i /i_3...i_2/, s igy hi a metsző-



18. ábra



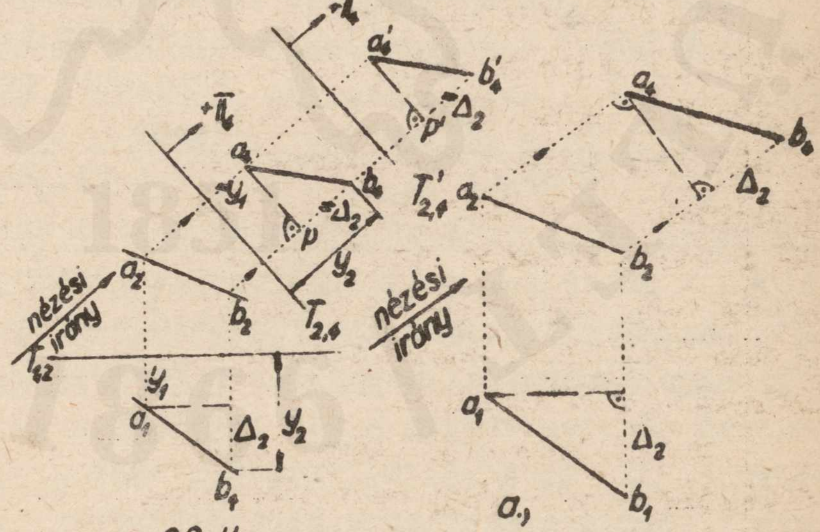
19. ábra

egyenes, s ennek meghosszabbitása eg oldalt t /t_2/ döféspontban metszi.

Az ac oldalon levő u és az ef oldalon levő második fedőpontokkal megállapithatjuk, hogy az előlnézetben he látható. S mert abc sikja dült, azért he oldalnézetben is látható. A további láthatóság ebből következik.

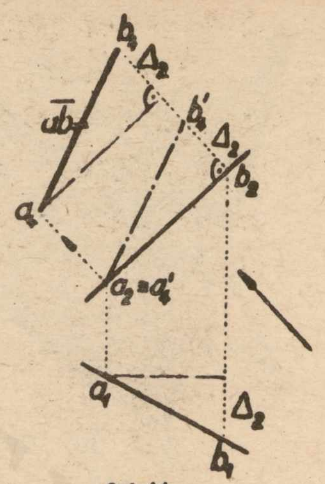
/Árnyékszerkesztés. e csucsnak abc sikjára vetett árnyéka e^* /e_3^*...e_2^*/, s igy eh darab vetett árnyékának előlnézete $h_2e_2^*$; eg oldal egy darabjának meg $e_2^*t_2$. Mivel az előlnézetben látható $h_2e_2t_2$ sikrész és ennek $h_2e_2^*t_2$ vetett árnyéka a h_2t_2 metszőegyenes ellenoldalán vannak, azért $a_2b_2c_2$ megvilágitott, $e_2f_2g_2$ önárnyékos.

ac oldalnak abc sikján levő döfésének oldalnézete m_3. Ebből indul ki ac-nek efg-re vetett árnyéka. Az affinitás szerint az abc sik $e_3^*n_3c_3$ egyenesének megfelel e_3n_3, s ezt c_3-ból huzott fénysugárkép a c_3-nak megfelelő c_3^* árnyékpontban metszi. $m_3c_3^*$ az ac-nek, $c_3^*i_3$ meg ci vetett árnyékának az oldalnézete/



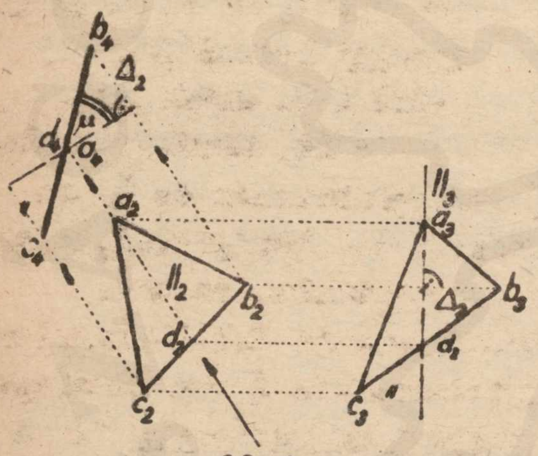
20. ábra

7./ Uj nézet szerkesztése. Szerkesszük meg az első és második képével megadott ab távolság /20. ábra/ negyedik képét a Π_2-re merőleges és az egymással párhuzamos Π_4 /tengely $T_{2,4}'$/ és Π_4' /tengely $T_{2,4}'$/ képsikokon. Az egymással párhuzamos a_4b_4 és $a_4'b_4'$ képeket megkapjuk, ha az uj tengelyektől felmérjük a és b elmaradó első rendezőit. De b negyedik képét ugy is nyerhetjük, hogy "a" negyedik rendezőjének hosszához hozzáadjuk az első rendezők Δ_2 különbségét, vagyis azt a hosszuságot, amennyivel b közelebb van a nézőhöz, mint a. E szerint eljárva, b negyedik rendezővonalára a_4 /a_4'/-ből állitott merőleges p /p'/ metszéspontjától távolodó, positiv értelemben rámérjük Δ_2 különbséget. Ha viszont b_4/b_4'/ felhasználásával állapitjuk meg a_4/a_4'/ helyét, akkor Δ_2 különbséget b negyedik rendezőjéből kivonjuk, vagyis a nézőhöz közeledő, negativ értelemben mérjük fel.



21.ábra

Ezek szerint az uj képek egymásnak az uj nézési iránnyal párhuzamos rendező iránybani eltolt helyzetei, aminek folytán minden a_4-nek megfelelő b_4 a nézőtől Δ_2-vel van távolabb, vagy minden b_4-nek megfelelő a_4 a nézőhöz Δ_2-vel van közelebb.

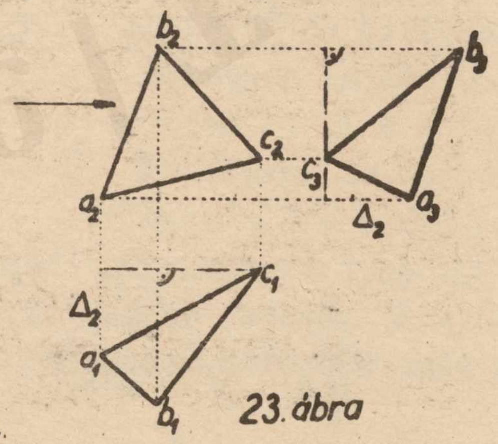


22.abra

Ezek alapján az uj nézési iránnyal párhuzamos rendezőn /20. ábra a./ az alakzat egyik, pl. a pontjának a_4 nézetét tetszőlegesen vehetjük fel, s ehhez viszonyitva b pont nézete a differenciával lesz távolabb. /Általában célszerü a nézőhöz legközelebbi, vagy legtávolabbi pont uj nézetét felvenni./

A 21. ábrán az a_2b_2-re merőleges nézési irányból a_4b_4-ben ab valódi nagyságát kapjuk meg. Ha $a_4' = a_2$, akkor a második különbségi háromszöghöz jutunk.

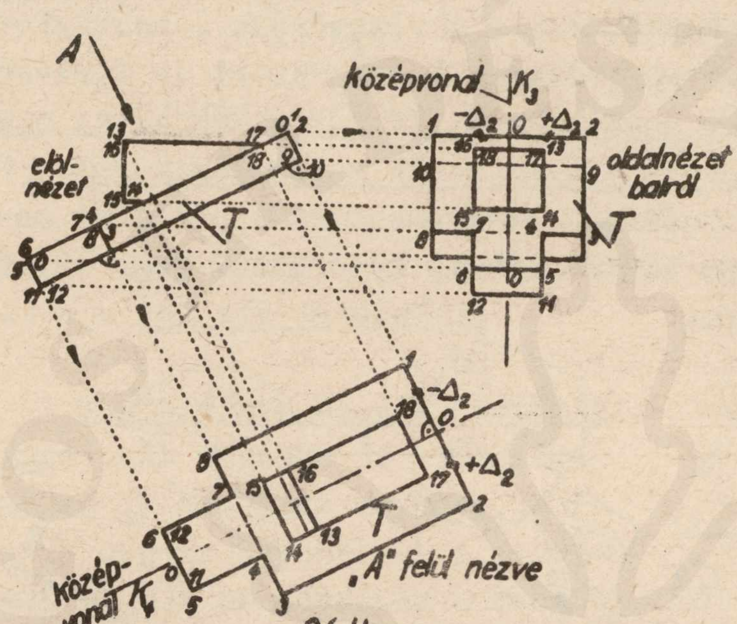
Megszerkesztendő abc háromszögnek az elölnézettel kapcsolt, egyenesbe eső nézete, vagyis a sik vetitővé teendő /22. ábra/. A háromszög a második fővonalára merőleges képsikirányra nézve vetitő; a nézési /rendező/ irányát az "a" csucson átmenő fővonal adja meg. Ezen a_4 tetszőleges, s mert a és d második távolságkülönbsége nulla, azért $a_4 = d_4 = I_4$. A b_4 a positiv Δ_2-vel van távolabb. b_4 és a_4 összekötésén



23.ábra

van c_4. /Az a-hoz viszonyitott differenciája negativ/. A negyedik nézet megadja a háromszögsik μ -jét.

Az elől-felülnézetben megadott abc háromszög oldalnézetének megszerkesztésénél /23. ábra/, a vízszintes rendezőn tetszőlegesen felvett c_3-hoz viszonyitva az a és b csucsok távolságkülönbsége positiv. /Megszerkesztendő az elől-oldalnézetből a felülnézet./



24.ábra

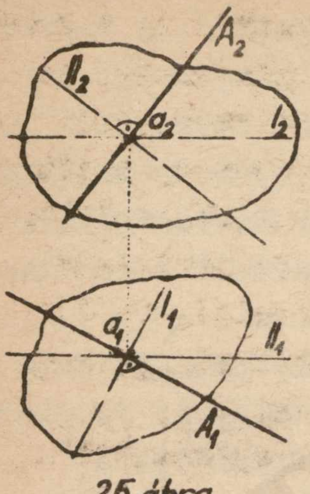
Ez a három nézetkapcsolat a müszaki rajzoknál a leggyakoribb.

Müszaki rajzoknál az uj nézet szerkesztésénél /az alakzat elkészitésénél is/ igen gyakran az alakzatoknak a képsikirányra merőleges szimmetrálsikjának egyenesbe eső képét, az u. n. középvonalat használjuk fel /lásd a 6. ábrát is/.

A 24. ábrában elől-oldalnézetben megadott alakzatnak Π_2 -vel párhuzamos és Π_3-ra merőleges szimmetrálsikjának oldalnézete a K_3 középvonal, s ez az 1, 2, 3, 4... sikidom kerületet o...o pontokban metszi.

A hasábos T talprész 1.2.3.4 második vetitő felső határlapjának valódi nagyságát a sikjával párhuzamos /és Π_2-re merőleges/ negyedik képsikra, s igy a határlap sikjára is merőleges "A" irányu nézet adja meg. Ez egyuttal a rendező iránya. Mivel K középvonal o és o pontjainak második differenciája Ø, azért K_4 a rendezőre merőleges. Az egyes csucsok uj nézetét a K /o...o/ középvonalhoz viszonyitott differenciákkal nyerjük. Igy az oldalnézetben 1 és 8, valamint 2 és 3 csucsok differenciája Δ_2, de 1 és 8 csucsoké $-\Delta_2$; 2 és 3 csucsoké $+\Delta_2$, miért is az uj nézetben 1 és 8 a k -tól az elölnézet felé kerül, 2 és 3 az ellenoldalra. Ugyancsak $+\Delta_2$ a 9-es, és $-\Delta_2$ a 10-es pont differenciája is. Hasonlóan positiv 4, 5,11 és negativ az azokéval egyenlő 7, 6, 12 csucsok differenciája stb.

/Szerkesszük meg az alakzatnak A iránnyal ellentétes nézetét, oldalnézetét jobbról, felülnézetét és figyeljük meg, hogy

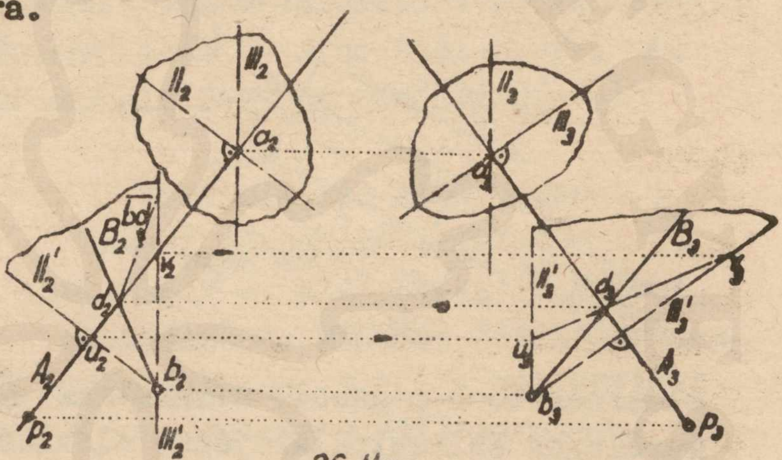


25. ábra

az alakzatnak elől, tehát felénk eső része a nézeteken hová kerül./

8./ Egymásra merőleges térelemek. Pont távolsága egyenestől, siktól. A 25. ábrán az előlnézet sikjával párhuzamos II egyenes II_2 előlnézete merőleges A_2-re, miért is A merőleges II-re; s a vizszintes I-nek I_1 felülnézete merőleges A_1-re, miért is $A \perp I$-re, s igy A merőleges I, II fővonalak által meghatározott sikra; a sik merőleges A-ra.

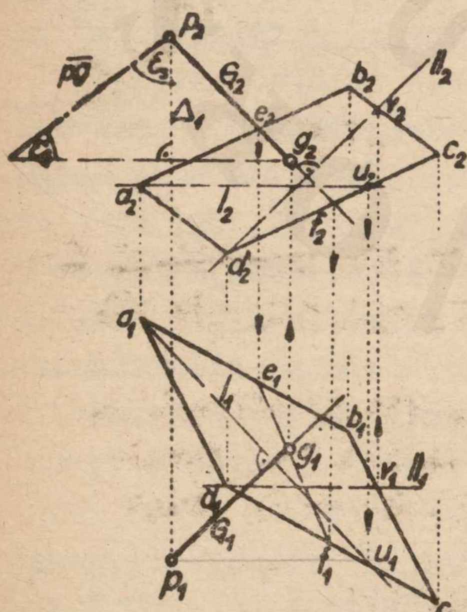
Az elől-oldalnézetben megadott A egyenest "a" pontjában merőlegesen metsző sikot II és III fővonalai határozzák meg /26. ábra/ $II_2 \perp A_2$-re és $III_3 \perp A_3$-ra.



26. ábra

b ponton át a II és III-al párhuzamosan huzott II' és III' egyenesek a II, III sikkal párhuzamos, s igy A-ra merőleges sikot határoznak meg.

II' és III' fővonalaival megadott siknak és A-nak d döfését b-vel összekötő B merőleges A-ra, s igy bd megadja b távolságát A-tól.



27. ábra

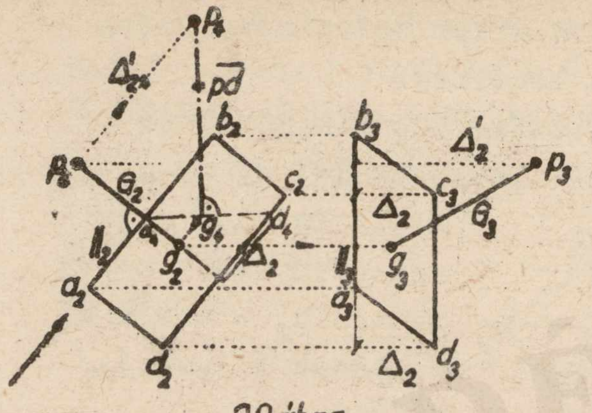
A 27. ábrán p távolsága abcd sikjától p-ből a sikra merőleges G-nek g döfése és p közötti darabja. /$\varepsilon_{abcd} = 90^{\circ} - \varepsilon_G$/.

A 26. ábrán p távolsága az II' III' fővonalak sikjától a reá merőleges A-nak pd szakasza.

Megszerkesztendő p távolsága abcd derékszögü négyszögtől uj nézettel /28. ábra/

A V_2-vel párhuzamos ab /dc/ második fővonal, s igy $G_2 \perp a_2b_2$-re.

Az ab a fővonal irányából nézve a sik egyenesnek látszik. A ren-



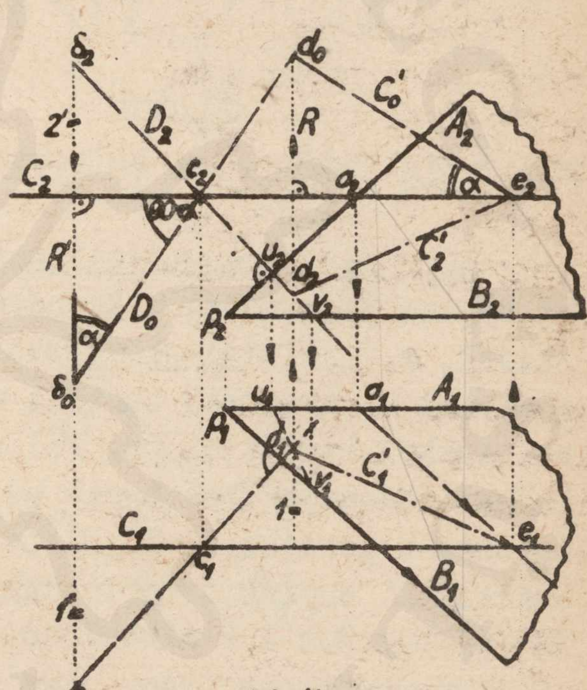
28.ábra

dező irány a_2b_2. Legyen a_4 a rendező és G_2 metszéspontjában, akkor a_4-hez viszonyitva Δ_2-vel távolabb lesz, d_4 és a_4d_4 a sik uj nézete. p_4 meg a Δ'_2-vel van távolabb. Az a_4d_4-re merőleges p_4g_4 a keresett távolság valódi nagysága. g_2 rendezővel, g_3 meg g_4g_2 differenciával.

/Alkalmazzunk uj nézetet a 27. ábra esetén/.

Ha a 27. és 28. ábrában p az abcd sikkal párhuzamos egyenesnek vagy siknak egy pontja, akkor pg az egyenes és sik, illetve a két sik távolsága.

9./ Egyenes és sik, két sik szöge. Az egyenes és sik szögének egyik szára az egyenes, a másik meg az egyenesnek a sikon levő merőleges képe. Ez a szög pótszöge az egyenes és egy pontjából a sikra állitott merőleges közötti szögnek.



29. ábra

A 29. ábrán AB a sik, és C az egyenes. A szöget közvetlenül keresve: C döfése AB-vel e /$e_1 \ldots e_2$ vizszintes segédsikkal/ c-ből AB sikra merőleges D-nek döfése d /$d_1 \ldots d_2$/. e és d összekötése C-nek merőleges képe AB sikon C'.

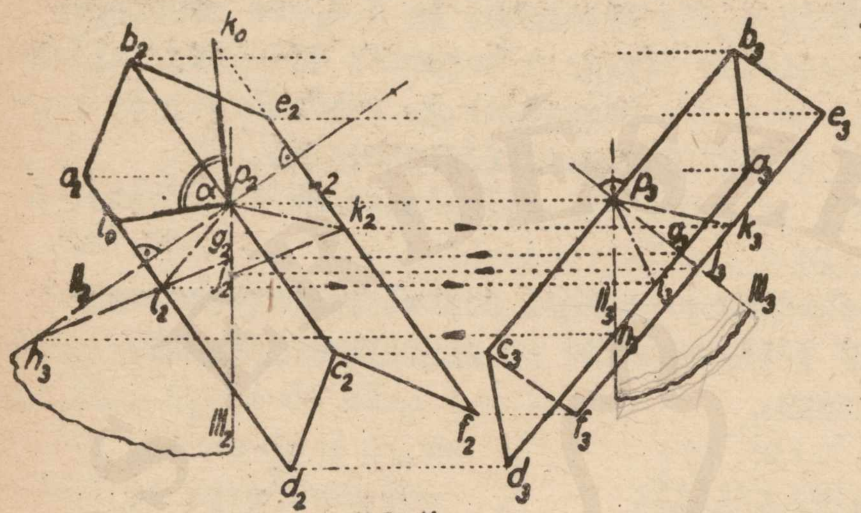
C és C' szögéhez: C forgatása G /CC' sik fővonala/ körül Π_2-vel párhuzamos helyzetbe. d pont d_0 -ba jut, $e_2d_0 = C'_0$ és CC'_0 szöge α.

A szög közvetett megszerkesztésénél: c-ből AB sikra D merőleges. C és D szögéhez: D forgatása C körül Π_2-vel parallel helyzetbe. δ pont δ_0-ba jut. $\delta_0 c_2 = D_0$; D_0 és C_2 szöge /$90^0 - \alpha$/, pótszöge α.

/D_0 merőlegesen metszi C'_0-t d_0-ban. Miért?/

__Két sik szöge__ az a szög, amelyet a sikok metszőegyenesére merőleges sikkal kimetszett egyenesek bezárnak.

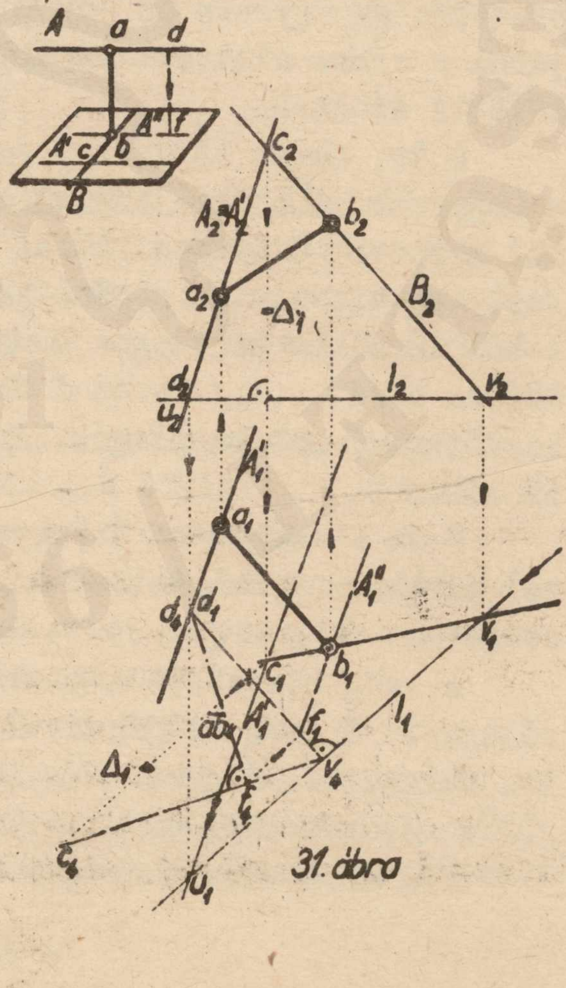
abcd és bcfe parallelogrammák metszőegyenese a közös bc oldal /30. ábra/. Erre p-ben merőleges sik fővonalai II és III. E sik és abcd metszőegyenesének egyik pontja p, a másik ad oldalnak $i/i_2 \ldots i_3/$ döfése.



30. ábra

ef döfése II, III sikkal $k/k_2..k_3/$, s igy bcfe és II, III metszésvonala pk. Az ipk szög a keresett. Valódi nagyságát a II körül Π_2-vel párhuzamos helyzetbe forgatott $i_0 p_2 k_0$ adja meg.

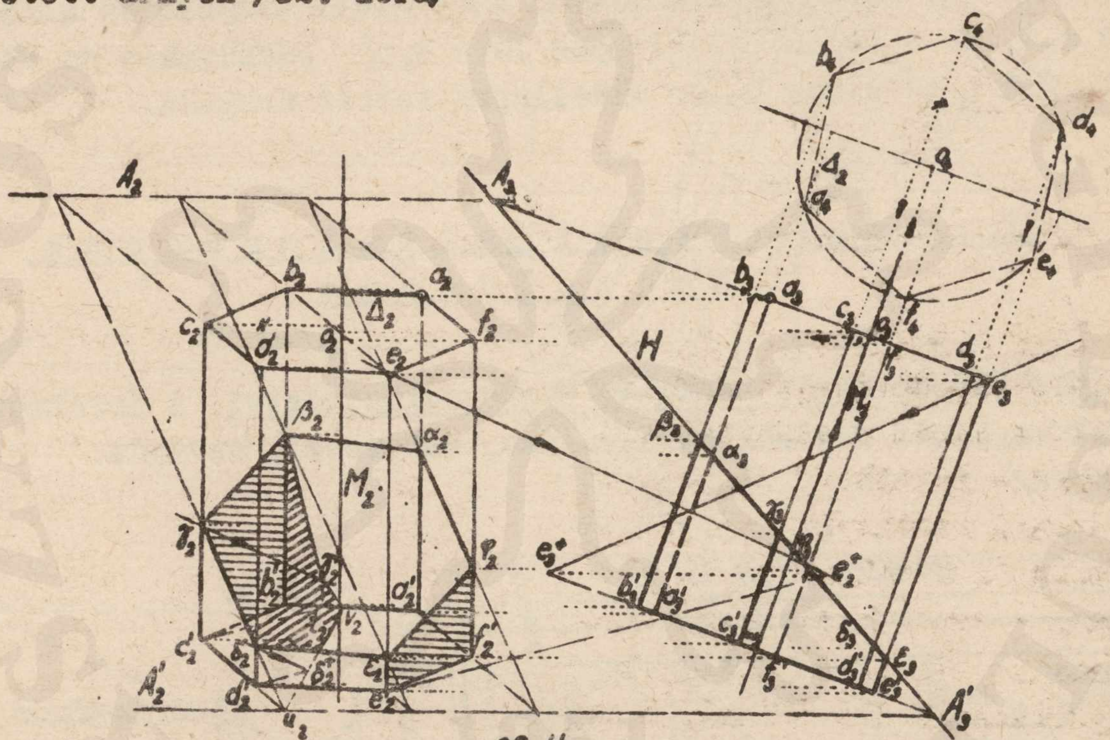
__10./ Kitérő egyenesek normál tranzverzálisa__. Mindkét kitérő egyenesre merőleges tranzverzálist, s ezzel a legközelebbi pontokat a következő térbeli müveletekkel kaphatjuk meg /31. ábra mellékábrája/: az egyik pl B egyenes c pontján át A-val párhuzamos A' egyenest fektetünk. "A" párhuzamos A'B sikkal, s igy az erre merőleges irány, ugy A-ra mint B-re merőleges __tranzverzális iránya__. A-nak egy d pontjából A'B sikra merőleges f döfésén átmenő A-val párhuzamos A" és B metszése b, ebből A'B sikra állitott merőleges A-t a-ban metszi. a és b a legközelebbi pontok. ab = df.



A 31. ábrán $A_2' = A_2$ és a c_1-en átmenő A_1' parallel A_1-el, Az $A'B$ sik egy első fővonala uv egyenes. A-nak d pontjából $/d_2 = v_2/$ az $A'B$ sikra állitott merőleges felülnézete merőleges $u_1v_1 = I_1$-re. A merőleges f döfésének megszerkesztéséhez a sikot I fővonal irányu nézettel vetitővé alakitjuk. Legyen v uj nézete v_4 igy c_4 távolabb van Δ_1-el, c_4v_4 a sik uj nézete. $d_4 = d_1$, mert v_2 és d_2 egyenlő magasságban vannak. v_4c_4 -re merőleges d_4f_4, rendezővel f_1, s az ezen átmenő és A_1-el párhuzamos A_1'' és B_1 metszése b_1; $b_1a_1 \parallel d_1f_1$-el. Rendezővel a_2 és b_2.

d_4f_4 valódi hossza df-nek s egyenlő ab-vel.

11./ Feladat. Hatoldalu oszlop fedőlapcsucsa "a", az M-n levő magassága 2 1/2 alapél, metszendő H harmadik vetitősikkal. Bevetett árnyék /32. ábra/



32. ábra

A fedőlap sikja az "a" ponton átmenő és M-re merőleges harmadik vetitősik, amelyet M a fedőlap $o/o_3 \ldots o_2/$középpontjában döf. A fedőhatszög ábrázolásához az oldalnézettel kapcsolt M irányu 4. nézet o_4 és a_4, s ezekkel $b_4c_4 \ldots$. Rendezéssel és differenciákkal, figyelemmel a szemben levő oldalak párhuzamosságára, a fedőlap elöl- és oldalnézete.

Az M-el párhuzamos oldalélek 3. nézete valódi nagyságu, amiből az alaplap ábrázolható. Elölnézetben a csucs látható.

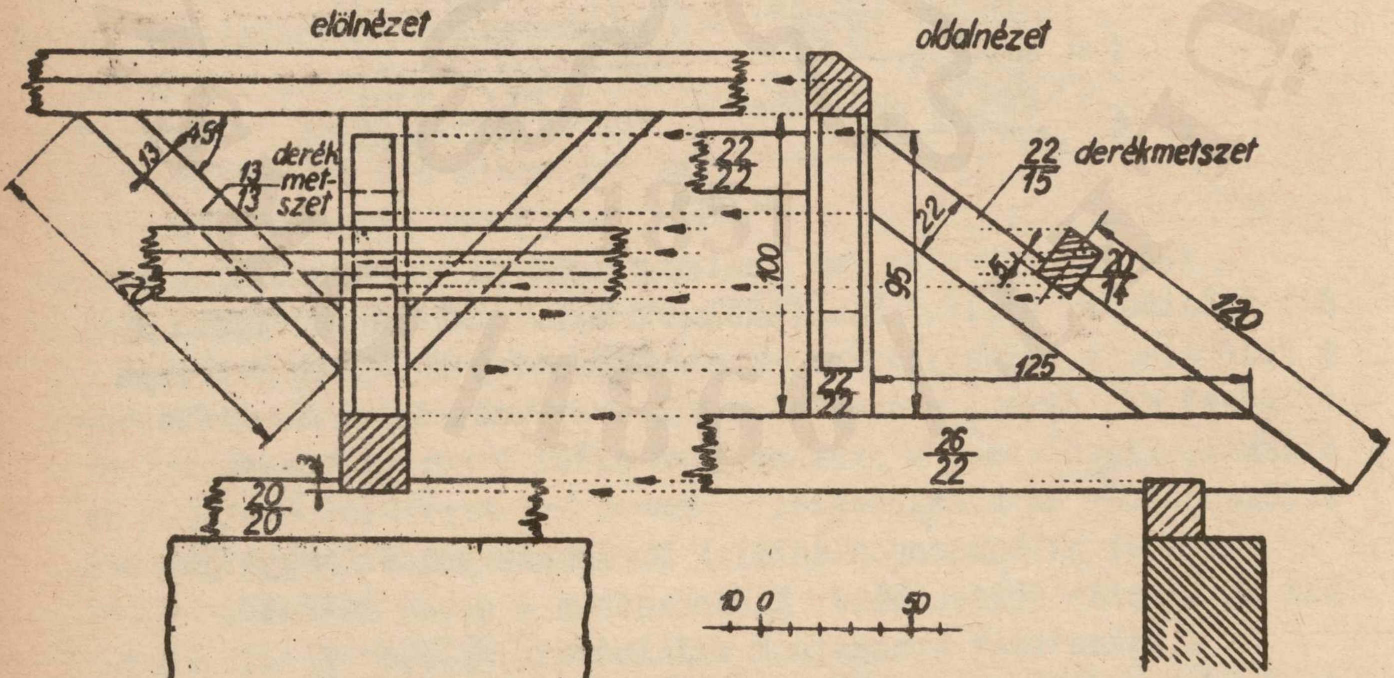
A H sikmetszet csucsainak oldalnézete α_3; β_3; ξ_3; ... Rendezéssel az elölnézet, ellenőrzésül a fedőlap és metszet, illetve alap és metszet persp. affinitása. Aff. tengely e sikok A illetve A' metsző egyenese. Láthatóság a metszősik feletti rész eltávolitása esetén.

Az önárnyékhatár és az önárnyékos lapok megállapitásához ee' oldalél vetett árnyéka az alapsikon. Ennek elölnézete e_2e_2', s ezzel párhuzamos egyenes még b_2'-ben surolja az alapot, miért is ee' és bb' az önárnyékhatároldalélek. A megvilágitott részen levő bb'cc', cd d'c', de e'd' oldallapok belső felülete önárnyékos, s igy árnyékot vethet $\epsilon\delta$; $\delta\gamma$ és $\gamma\beta$ oldal.

$d'\delta$-nek az alapsikra vetett árnyékának elölnézete az $e_2'e_2^*$-vel parallel $d_2'\delta_2^*$. A $\gamma\delta$ oldal az alapsikot u-ban döfi, azért $u_2\delta_2^*v_2$ egyenes $\delta\gamma$ egy darabjának árnyéka. $c'\gamma$ vetett árnyéka az alapsikon $c_2't_2$ és a bb'aa' oldallapon levő $t_2\gamma_2^*$ párhuzamos az oldaléllel. $\gamma_2^*\beta_2$ a $\gamma\beta$ élnek b'baa' oldallapra vetett árnyéka.

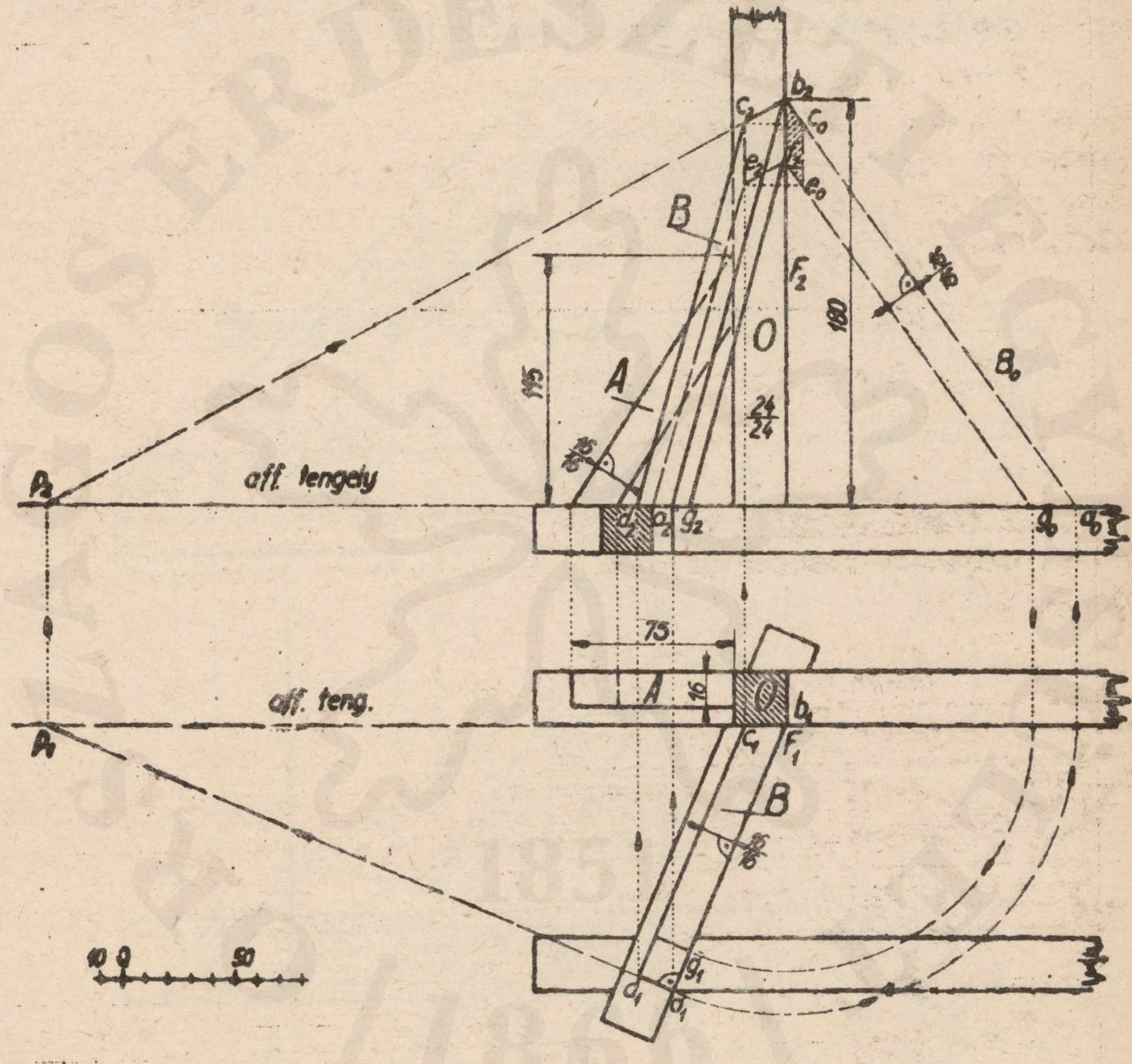
II. Gyakorlati alkalmazások
Rajzolvasás.

12./ Faszerkezeti részlet. Hasáb sikmetszetei. A derékmetszettel megadott hasábok berajzolása, metszetei, bevágás. /33. ábra/



33.ábra

13./ Faszerkezeti részlet. Hasáb sikmetszetei és valódi nagysága. /34. ábra/ Az O négyzetes oszlopot megtámasztó 16/16 derékmetszetü A és B hasábducok berajzolása és B oldaléleinek nagysága a kiszabáshoz.



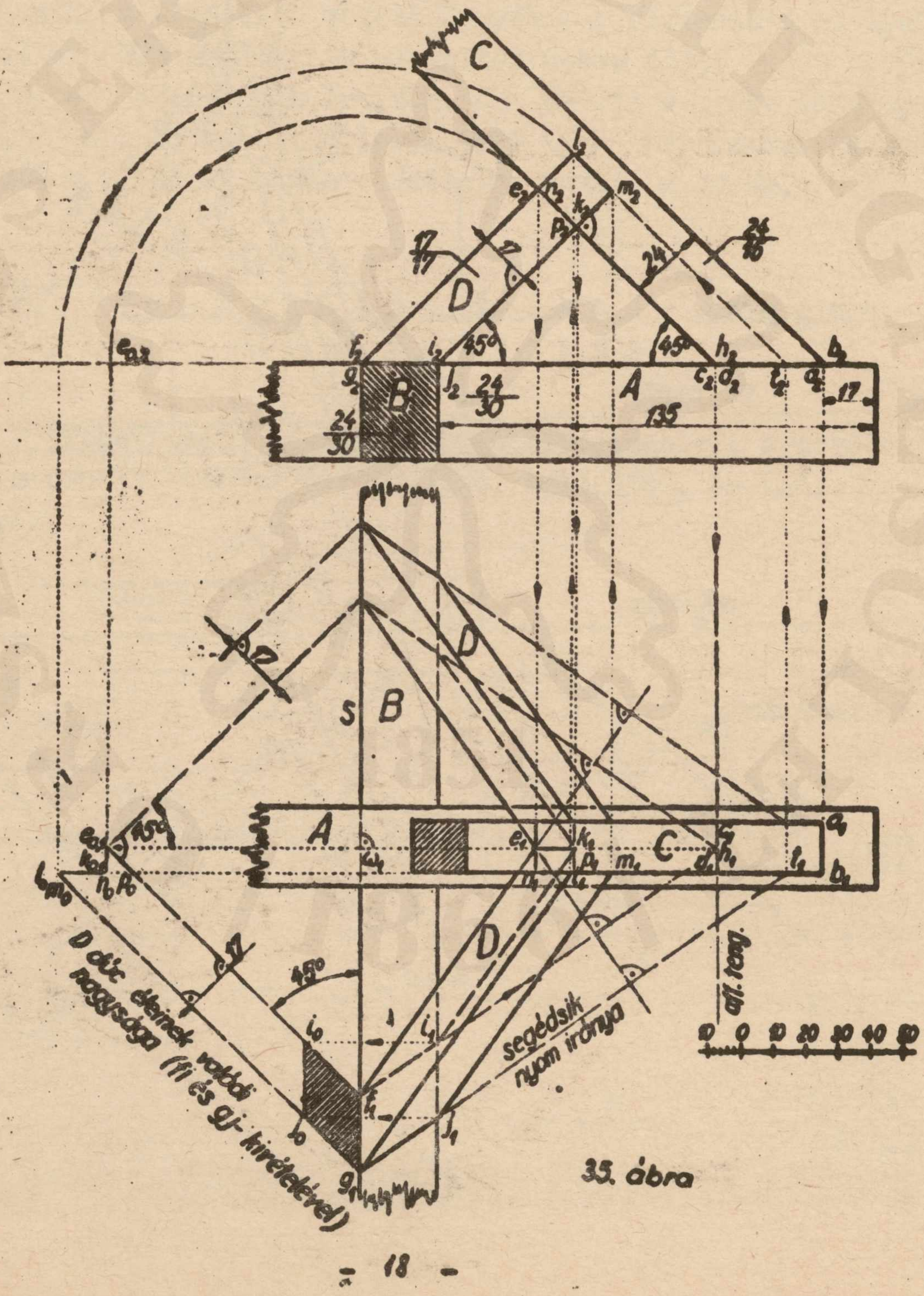
34. ábra

14./ Faszerkezeti részlet. Hasáb sikmetszete, hasábok metsződése. A és B gerendák $\frac{24}{30}$ derékmetszetü hasábok. C hasáb derékmetszete $\frac{24}{16}$. Sikmetszete abcd. D ducok $\frac{17}{17}$ derékmetszetü oszlopok; oldalélei egymásra és C hasáb oldaléleinek irányára is merőlegesek. Két oldallapjuknak ek metszése a C hasábnak a felülnézetben nem látható cd alapélén átmenő oldallapnak a középpalkotóján van.

D és C metsződése - két módon megállapitva - ekpmlne.

A párhuzamos helyzetbe forgatott D duc megadja a kissabáis méreteit. A forgástengely B hasáb S éle.

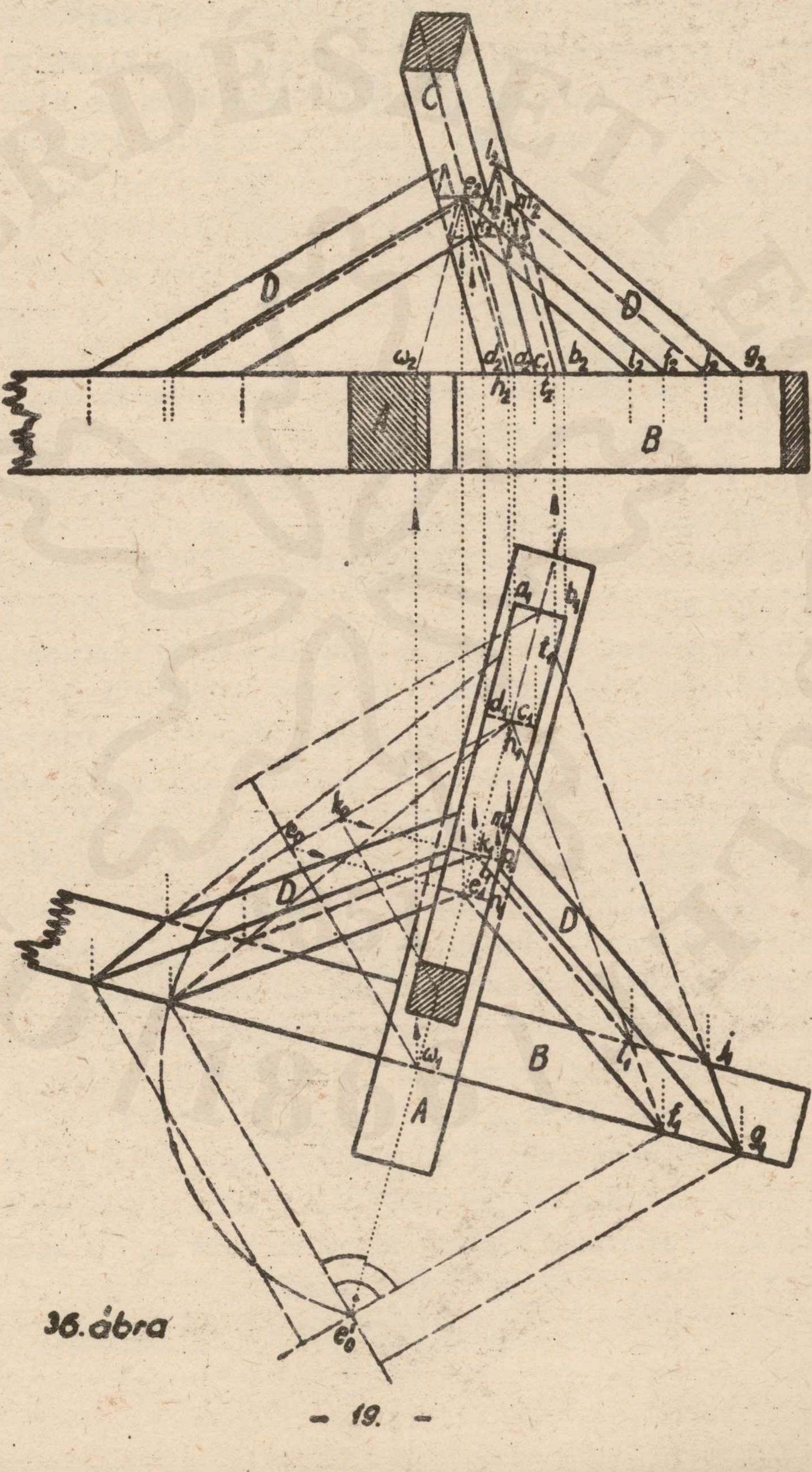
/Mely szerkesztések egyszerüsithetők ? /



35. ábra

15./ A 14.alatti faszerkezet 75°al elforgatott helyzetben.

/36.ábra./



36.ábra

III. A x o n o m e t r i a.

a./ M e r ő l e g e s a x o n o m e t r i a.

16./ Szemléltető nézet szerkesztése forgatással, transzformációval. A müszaki rajzoknál az alakzatot párhuzamos helyzetben ábrázolják, amikor is az élek a határidomok egy képsikiránnyal párhuzamosak, s igy a másik képsikirányra merőlegesek lesznek. Ennek folytán az egyes nézetekben az élek pontba, a határidomok meg egyenesbe esnek, a nézetek képiessége, szemléltetősége csökken, s az alakmilyenséget általában egynél több nézet alapján lehet megfelelő térszemlélettel elképzelni. Különleges okokból, a képiesség fokozásával gyakran ugy kell az alakot ábrázolni, hogy egy nézetből, képből az alakmilyenséget bárki megérthesse.

Ilyen szemléltető képet kaphatunk, ha az emlitett párhuzamos helyzetet megszüntetjük pl. oly módon, hogy az alakzatot egy forgástengely körül elforgatjuk, vagy a mozdulatlan alakot kétszer transzformáljuk.

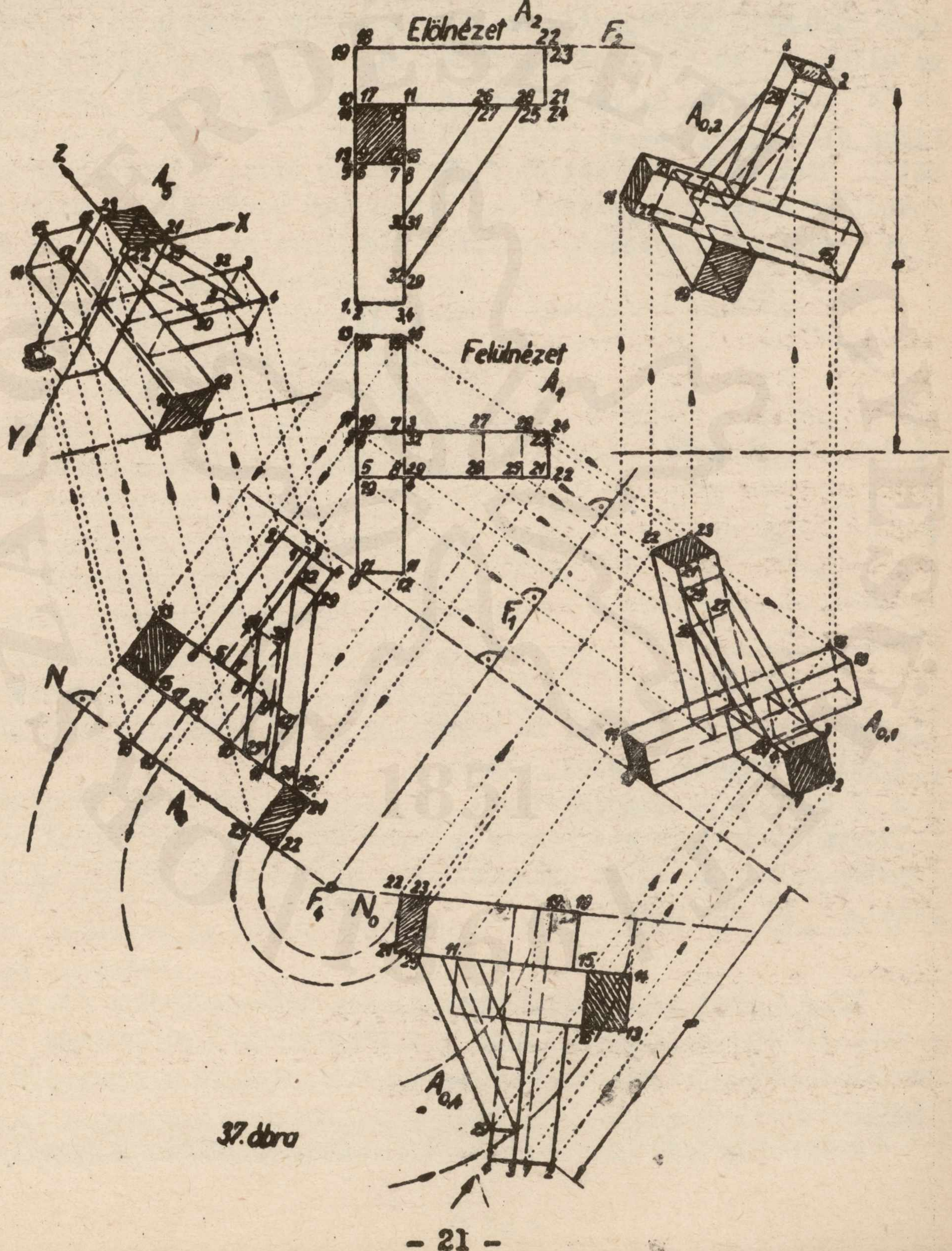
A 37. ábrán elöl-felülnézetben adott alakzatot a felső határlapjának sikjában levő F forgástengely körül forgattuk meg. A forgatást a felülnézet és az ezzel kapcsolt F irányu negyedik nézetben, amelyben F_4 pont, végeztük el. Az A_4 nézetet az F_4-en átmenő N egyeneshez kapcsolva forgattuk el F_4 körül az N_0, illetve az A_0 helyzetbe. Egy-egy csucs körivének felülnézete az F_1-re merőleges egyenest, s igy az A_{01}-nek pl. 22-es csucsa az a pont, amelyben az A_1-nek 22-es csucsából F_1-re merőleges körkép és A_{04}-nek 22-es csucsából F_1-el párhuzamosan huzott rendezőt metszi. Az élek párhuzamosságára figyelve, néhány csucs felhasználásával az elforgatott alakzat A_{01} felülnézete megrajzolható; a nézőhöz legközelebbi és nem képhatáron levő 4-es csucs látható.

Az A_{02} az elforgatott alakzat elölnézete az A_{04} és A_{01} nézetek felhasználásával megszerkesztve. 1-es csucs látható.

A 37. ábrán a kétszeres transzformációnál A_4 az első, az A_1 és A_4 felhasználásával szerkesztett A_5 a szemléltető második uj kép; a 22-es csucs látható.

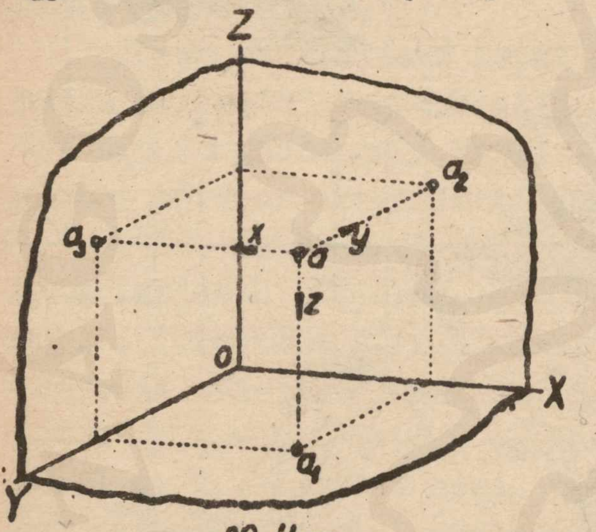
A szemléltető képnek à bemutatott két módon való megszerkesztése egyrészt körülményes, másrészt az alakzatnak nincs már álló jellege.

A szemléltető kép szerkesztésének egy kiterjedt módjánál a téralakzatot három, egymást egy pontban merőlegesen metsző térbeli tengelykereszthez kapcsoljuk /lásd: 37. ábra A_s-nek 22-es csucsa./ Ez a módszer az axonometria.



37. ábra

17./ A tengelykereszt és a pont kapcsolata. Az egymásra kölcsönösen merőleges térbeli tengelykereszt X, Y és Z tengelyeinek metszéspontja az o kezdőpont /38. ábra/ két-két tengelye által alkotott sik a koordináta sik; az XY sik az axonometrikus alaprajz /felülnézet/ sikja; XZ az elölnézet; ZY az oldalnézet sikja. A koordináta sikok egymásra merőlegesek, s egy koordináta sikra egy tengely merőleges. A téralakzat egy a pontjából az XY sikra állitott merőleges döféspontja az axonometrikus alaprajz a_1; a Z-vel parallel aa_1 az "a" pont z ordinátája. A ZX-re merőleleges aa_2 az "a" pont y-ja; a_2 az axonometrikus elölnézet; a_3 az axonometrikus oldalnézet; aa_3 az "a" pont x-e. x, y, z az "a" pont koordinátái. Ezek és kettőn-kettőn átmenő sikok által a koordináta sikokból kimetszett egyenesek egy derékszögü hasáb élei, amelynek egyik csucsa a kezdőpont, az ezzel átellenes az a pont, s az élek hossza egyenlő a pont koordinátáival. Egy pont koordinátáival egyértelmüen határozott, s a kezdőpontból kiindulva, a derékszögü hasáb élein haladva, többféle módon is eljuthatunk a ponthoz.



38. ábra

Ha a térbeli tengelykeresztet a hozzákapcsolt ponttal /alakzattal/ egy függőlegesnek képzelt képsikra, az u.n. axonometrikus képsikra merőlegesen vetitjük, merőleges /orthogonális/ axonometriát kapunk, ha a vetités ferde, akkor ferde /klinogonális/ axonometriához jutunk.

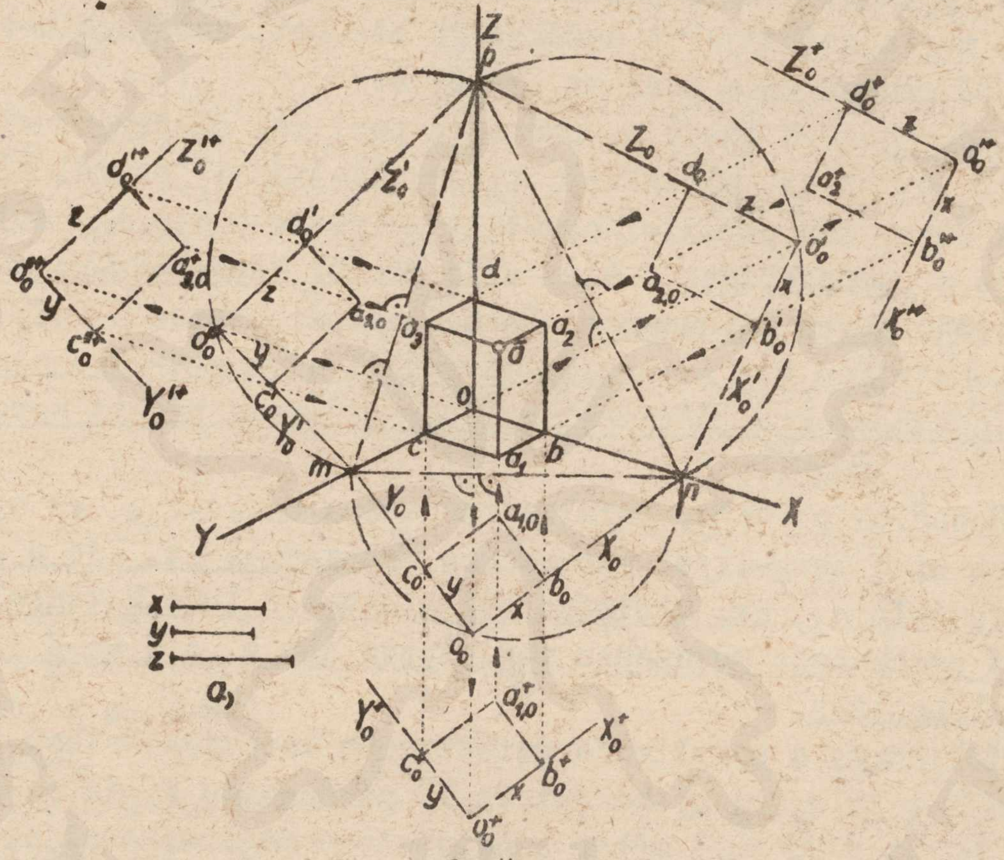
A pontnak a tengelykereszt, illetve a koordináták képeinek felhasználásával megszerkesztett képet axonometrikus képnek nevezzük, amikor is a_1 az axonometrikus alaprajz, a_2 az ax. elölnézet, a_3 az ax. oldalnézet.

18./ A pont axonometrikus képe. Megszerkesztéséhez ismernünk kell a tengelykereszt képét, a tengelyekkel párhuzamos koordináták nagyságát, ezeknek képhosszát, vagyis a megrövidülését.

A féltengelyek által alkotott derékszögü triédert képzeljük a függőleges képsik előtt ugy elhelyezve, hogy se tengely, se koordináta sik ne legyen képsikra merőleges, a triéderbe bele lássunk, s Z képe függőleges legyen. Igy a tengelykereszt képe az o-ból kiinduló három félsugár /39. ábra/

Adva van egy a pont három koordinátaja x, y, z, szerkesszük meg a' pont axonometrikus képét.

A tengelyképek felvétele szerint a tengelyek egyike sem párhuzamos a képsikkal, s igy a derékszögü hasáb megrajzolásához ösmerni kell a koordináták képhosszát a megrövidülést. Megszerkesztése a következő lehet; egy a képsikkal párhuzamos sik



39. ábra

az XY sikot egy fővonalban metszi, s ennek mn képe, mert Z tengely merőleges XY sikra, Z-re merőleges. Ugyanaz a sik ZX sikot az Y tengelyre merőleges np fővonalban, ZY sikot meg az X tengelyr re merőleges pm fővonalban metszi. mnp háromszöget nyomháromszögnek nevezzük.

Az mon háromszög o-nál derékszögü, s igy mn körül parallel forgatva o_o pont mn átmérőhöz rajzolt Thales körre kerül. o_om az Y tengely om darabjának, o_on meg az X tengely on darabjának valódi nagysága. Az a pont x ordinátáját X_o-ra o_o-tól b_o-ig felmérjük. b_o visszaállitás után b-be jut, tehát ob adja x-nek képhosszát. $o_0c_0 = y$, s ennek képhossza oc.

A "pon" derékszögü háromszög parallelforgatás után p_0n. Ha $o_0'd_0$ egyenlő a pont z-jével, akkor a visszaállitott od adja z-nek képhosszát. $o_0'b_0' = x$; b_0' visszaállitva a már meglevő b-be jut Ezzel már a térbeli a pont koordinátáinak képhosszai ob; oc és od ismeretesek.

Forgassuk pom koordinátasikot is mp körül a képsikkal párhuzamos helyzetbe, s a parallelforgatott Z_0' és Y_0' tengelyek segélyével is szerkesszük meg z, illetve y koordináták képhosszát, amikor is ismét d és c pontokhoz jutunk. Az ob, oc és od segélyével megrajzolhatjuk a derékszögü hasábot, amelynek o-val szemben levő csucsa az a pont ax. képe, $\bar{a}$.

A derékszögü hasáb a_1 csúcsa a pont ax. alaprajza /felülnézete/, a_2 az ax. elölnézet, a_3 az oldalnézet jobbról nézve.

A $boca_1$ lap parallelforgatott helyzete $b_0o_0c_0a_{1,0}$, amikor is $a_{1,0}$ és a_1 összekötése - mint a forgáskör képe - mn-re merőleges, tehát Z-vel párhuzamos. De $a_1\bar{a}$ is párhuzamos Z-vel, tehát $\bar{a}$ axonometrikus kép a parallelforgatott axonometrikus alaprajzból a szembenfekvő Z tengellyel párhuzamosan húzott egyenesen van.

Hasonlókép: $boda_2$ parallelforgatása $b_0'o_0'd_0a_{2,0}$, és $a_{2,0}a_2\bar{a}$ egyenes az Y tengellyel párhuzamos, azaz az $\bar{a}$ ax. kép a parallelforgatott $a_{2,0}$ ax. elölnézetből a szemben levő Y tengellyel huzott párhuzamos egyenesen van. Éppen igy $a_{3,0}a_3\bar{a}$ az X tengellyel párhuzamos.

Toljuk el a parallelforgatott mo_0n koordinátasikot Z irányba, amikor is o_0 pl o_0^+-ba jut és X_0^+ párhuzamos X_0-al és $Y_0^+ \parallel Y_0$-al. Ha az adott x és y-al ebben a helyzetben megszerkesztjük a parallelforgatott és eltolt $a_{1,0}^+$ alaprajzot, ugy az ebből Z-vel húzott párhuzamos egyenes áthalad $\bar{a}$ képén.

Hasonlóan a parallelforgatott Z_0 és X_0'-nak az Y irányu eltolt helyzete pl. Z_0^+ és $X_0'^+$, az itt megszerkesztett eltolt elölnézet a_2^+, s az ebből huzott Y irányu egyenes az $a_{1,0}^+$-ból huzott Z irányt az "a" pont axonometrikus képében $\bar{a}$-ban metszi.

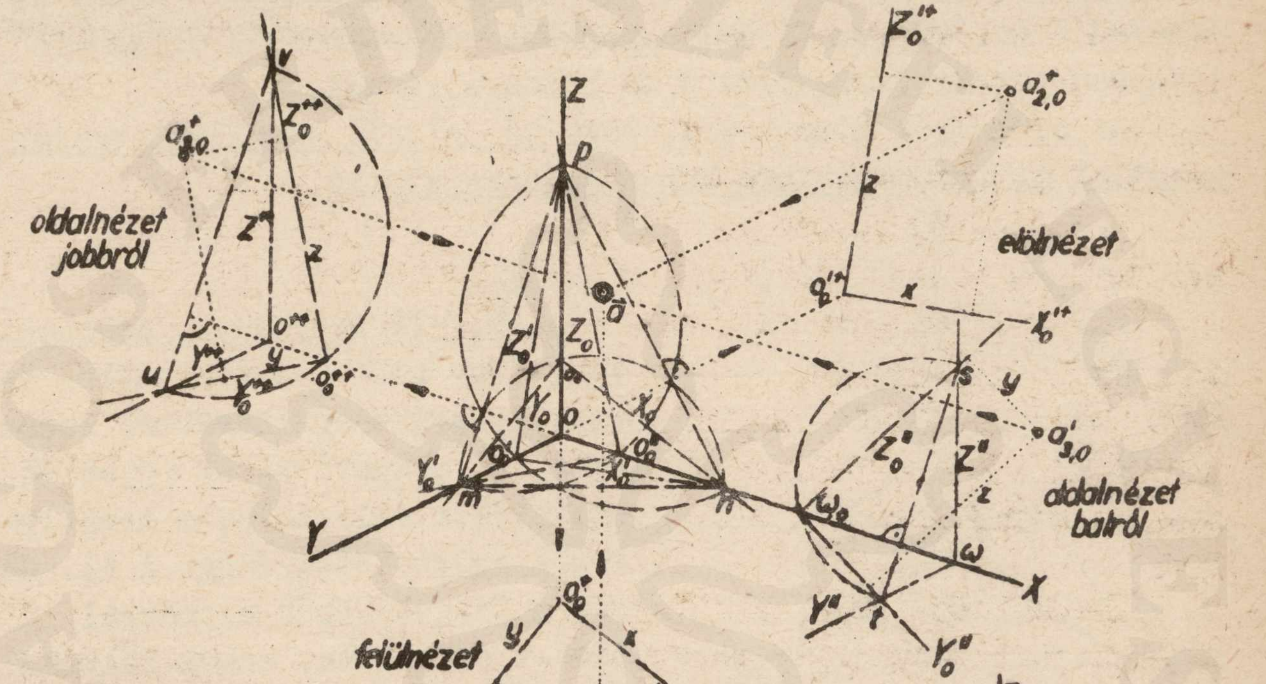
Éppen igy az eltolt helyzetben megrajzolt $a_{3,0}^+$ oldalnézeten áthaladó X irány $\bar{a}$ képen halad át.

Tehát: a pontnak parallelforgatott és eltolt nézeteiből a szemben levő tengellyel huzott párhuzamosak a pont ax.képében metszik egymást.

Ezen alapszik a <u>nézetmódszer</u> /metszésmódszer/ szerinti az. képszerkesztés.

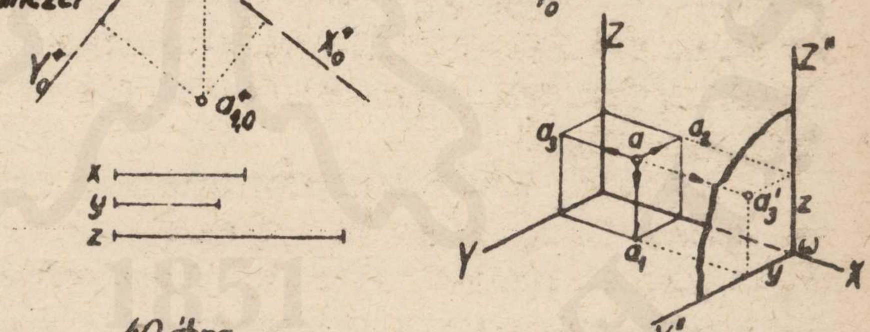
A 40. ábrán a koordinátasikokat a nyomháromszög mn; np; pm oldalai körül ellentétes irányban forgattuk, mint a 39. ábrán. Az XY siknak mn körüli parallelforgatottja $X_o o_o Y_o$, ennek Z irányu eltolt helyzete $X^+_o o^+_o Y^+_o$, az adott x és y-al kapjuk $a^+_{1,0}$ eltolt felülnézetét.

ZX sik parallelforgatottja $Z'_o o'_o X'_o$, ennek Y irányu eltolt



helyzete $Z''_o o''_o X''_o$ és $a^+_{2,0}$ az eltolt elölnézet, x és z-vel szerkesztve.

A ZY sik a parallelforgatáskor $Z_o o''_o Y'_o$ helyzetbe jut, X irányu eltoláskor $Z^{++}_o o^{++}_o Y''_o$-ba. Az y és z-vel nyert $a^+_{3,0}$ az eltolt oldalnézet jobbról.



40.ábra

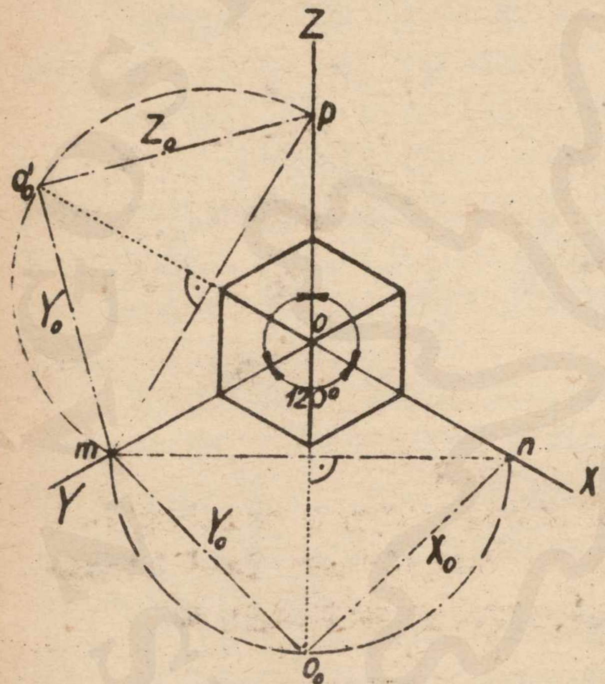
<u>Az $a^+_{1,0}$-ból huzott Z, az $a^+_{2,0}$-ből huzott Y s az $a^+_{3,0}$-ből huzott x irányok közös metszéspontja a-nak axonometrikus képe $\bar{a}$.</u>

A párhuzamos helyzetbe forgatott és eltolt nézetet egyébként ugy is megkaphatjuk, hogy a koordináta sikot toljuk el, s eltolt helyzetében forgatjuk párhuzamos helyzetbe. A 40. ábrán pl. ZY sikot X irányban $Z^{++} o^{++} Y^{++}$ helyzetbe toltuk, X-re merőleges irányu uv fővonal körül parallelforgatva kaptuk $Z^{++}_o o^{++}_o Y^{++}_o$-t, s ezzel

$a'_{3,0}$ nyerhető.

a_3 az a-nak X irányu vetülete a ZY sikon, az oldalnézet jobbról nézve /40. ábra mellékábrájá/. A ZY-al párhuzamos Z″Y″ sikon levő X irányu vetület a'_3 az oldalnézet balról, s a koordinátái ugyancsak z és y. Ha a tetszőleges helyen felvett Z″Y″ sikot /40. ábra/ az X-re merőleges ts fővonal körül párhuzamos $Z''_0 Y''_0$ helyzetbe forgatjuk, s itt z és y-al megrajzoljuk $a'_{3,0}$ parallelforgatott oldalnézetet, ugy az $a'_{3,0}$-ból huzott x irány is áthalad ā ax. képén. Z''_0 és Y''_0 egyébként párhuzamos az ellenkező irányban parallelforgatott Z és Y tengelyekkel.

Az előzőkből következik, hogy két eltolt parallelforgatott nézettel az axonometrikus kép megszerkeszthető.



41. ábra

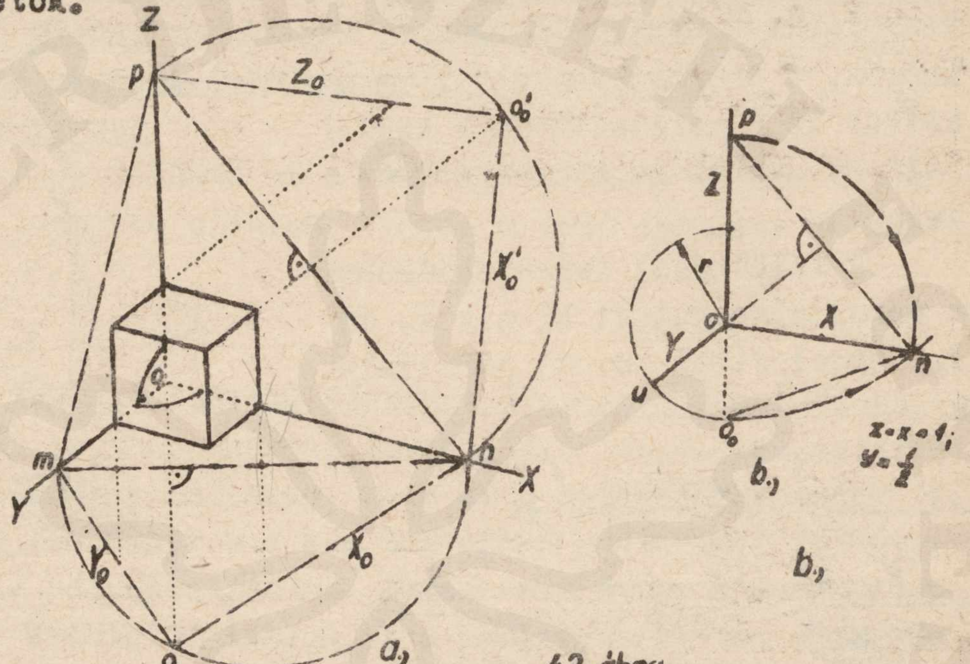
19./ Tengelyképek. Axonometriák. Egy pont koordinátáiból képezett derékszögü hasábból kocka lesz, ha a koordináták egyenlők. A kockaképek milyensége a tengelyképek helyzetétől függ. A 41. ábrán a tengelyképek egymással 120°-t zárnak be, ennek folytán a nyomháromszög egyenlő oldalu, s az mo, no, po tengelyképdarabok is egyenlők, valamint e daraboknak mo_0; no_0; po_0 valódi nagyságai. /A tengely[illegible] képsikszögei is egyenlők./

Azaz a tengelyekre felmért egyenlő darabok képhosszai egyenlők, egymértékü, izometrikus az axonometria. Izometrikus projekciónak is nevezzük. A könnyen rajzolható kockakép kevéssé torz, konturja szabályos hatszög.

A 42. ábra a./-nál Y felezi az X és Z tengelyképek szögét, a nyomháromszög egyenlőszáru, mn=mp, on = op és a valódi nagyság $o'_0 n = o'_0 p$. /X és Z képsikszöge egyenlő/ A tengelyekre felmért egyenlő darabok képhossza az X és Z tengelyképen egyenlő, az Y-on ettől eltérő, kétmértékü, dimetrikus az axonometria.

A müszaki gyakorlatban alkalmazott dimetrikus merőleges axonometriánál az X,Y,Z tengelyeken levő kocka élek képének hosszviszonya 1:1/2:1. Az ennek megfelelő tengelykeresztkép megszerkesztését a b./ ábra mutatja. /Bizonyitást mellőztük/

A függőleges Z-nek o pontjából tetszőleges r sugárral rajzolt félkör Z-t o_o-ban metszi; op = 2r. Az o-ból p-n át rajzolt körivnek és p-ből o_o-on át rajzolt köröknek metszéspontja n; no az X tengely. A pn-re merőleges ou az Y tengely. Az op = on és ou valódi nagysága $o_o n'$, aminek alapján a léptékek szerkeszthetők.



42. ábra

Ha a tengelyképek szögei különbözők, s igy a nyomháromszög általános háromszög /39. ábra/, a tengelyeken levő kockaélek képhosszai nem egyenlők, háromméretékü, trimetrikus az axonometria.

Mindezen esetben a kockának fedőlapja látható, miért is a képet felülnézeti axonometrikus képnek is nevezzük.

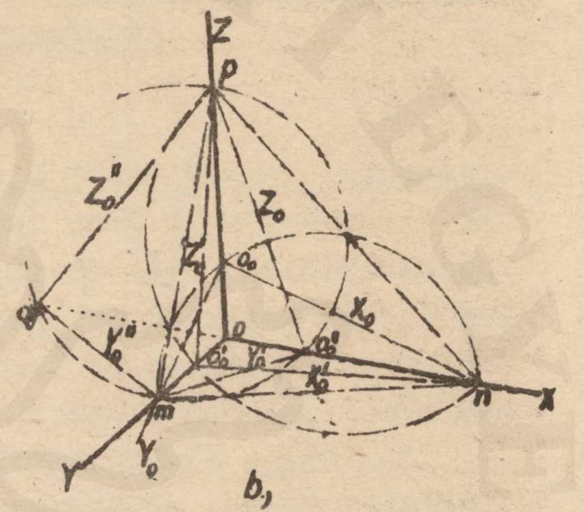
20./ Alakzat felülnézeti axonometrikus képe nézetmódszerrel. Ha feladatunk egy a méreteivel, nézeteivel megadott alakzatnak /43. ábra/ felülnézeti ax. képét megszerekszteni, akkor először a 19. pont figyelembevételével felvesszük a tengelykeresztképet /43. ábra. b./, megrajzoljuk a parallelforgatott koordinátasikokat, illetve tengelyeket.

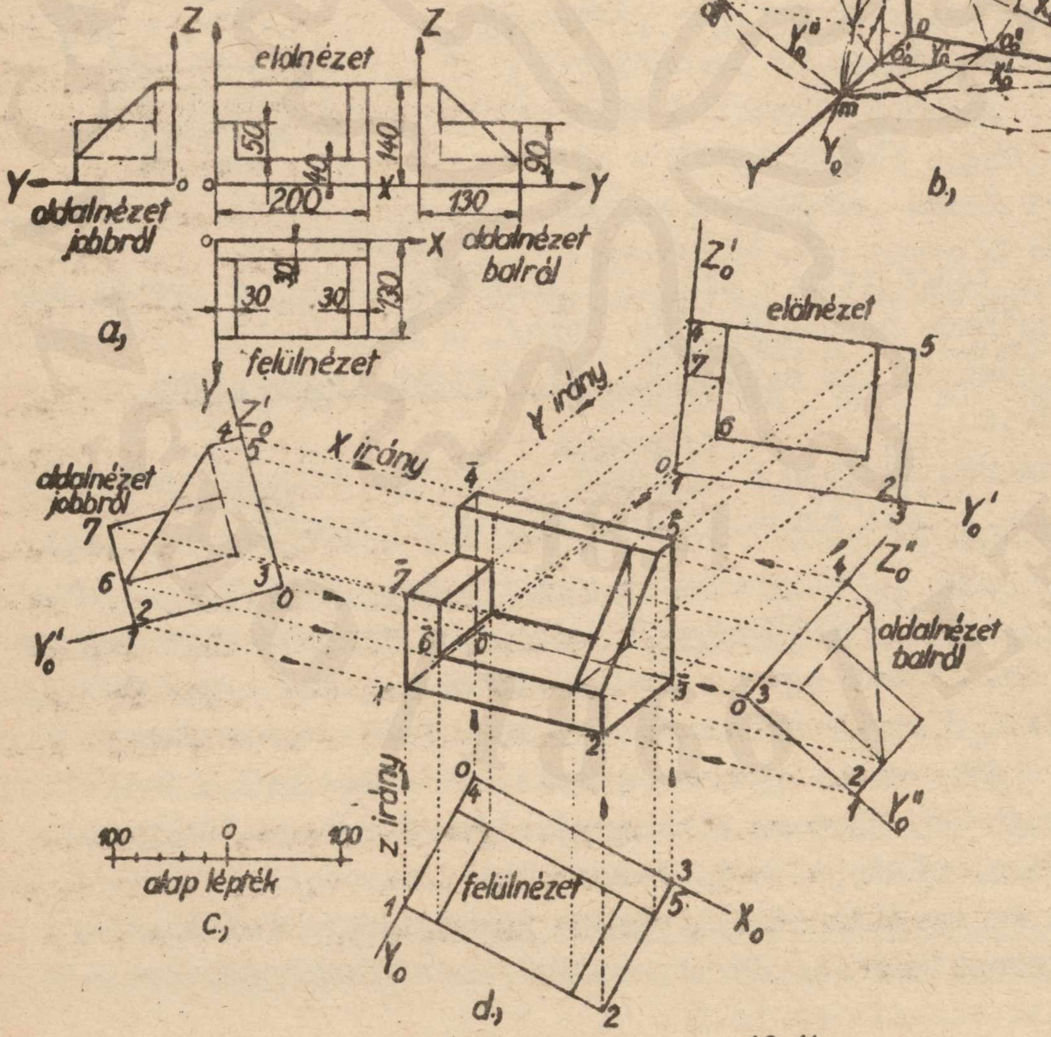
Azután megállapitjuk, miként kapcsoljuk az alakzatot a tengelykereszthez /a. ábra/, amikor is rendesen az alakzat hosszabbik vizszintes iránya az X irány.

A legtöbb esetben nagy kiterjedése miatt nem képzelhetjük az alakzatot valódi nagyságában a tengelykereszttel összekötve, hanem arányosan kisebbitve, azért az alakzatnak még feltüntetendő legkisebb részleteinek figyelembevételével, megállapitjuk a kisebbités mértékét /esetleg nagyitás/, s megrajzoljuk az ennek megfelelő léptéket, az u. n. alapléptéket. /43. ábra c./

Eldöntjük, hogy melyik nézetpárral szerkesztünk. Ha pl. az elől-felülnézettel, akkor a parallelforgatott ZX sik Z'_o és Y'_o tengelyeivel megfelelő helyen, egyébként bárhol, párhuzamosakat huzunk, s ezekhez rajzoljuk az a./-ban megadott elölnézetet, amikor is a méretszámoknak megfelelő hosszakat az alapléptékről vesszük.

A felülnézet felrajzolásához a parallelforgatott XY sik X_o és Y_o tengelyeivel huzott parallelek-





43. ábra

hez rajzoljuk az a./-ban megadott felülnézetet.

Az igy megrajzolt két nézetben azonositjuk a pontokat pl. o, o; 1, 1; 2, 2; ... stb, s az elölnézetből huzott Y és a felülnézetből huzott Z irányok metszéspontja a $\bar{o}$; $\bar{1}$; $\bar{2}$; .... ax. kép. A vetitések számát csökkenthetjük, ha az élek párhuzamosságára, egyenlőségére figyelünk.

Ha két nézettel szerkesztünk, ugy azok bárhol elhelyezhetők, de ha egy harmadik nézetet, pl. esetünkben az oldalnézetet is fel akarjuk használni, akkor az ugy helyezendő el, hogy annak egy pontjából pl. o, vagy 1, az X iránnyal párhuzamosan huzott vetitő egyenes az elől-felülnézettel megszerkesztett $\bar{o}$, vagy $\bar{1}$ ax. képpontba fusson.

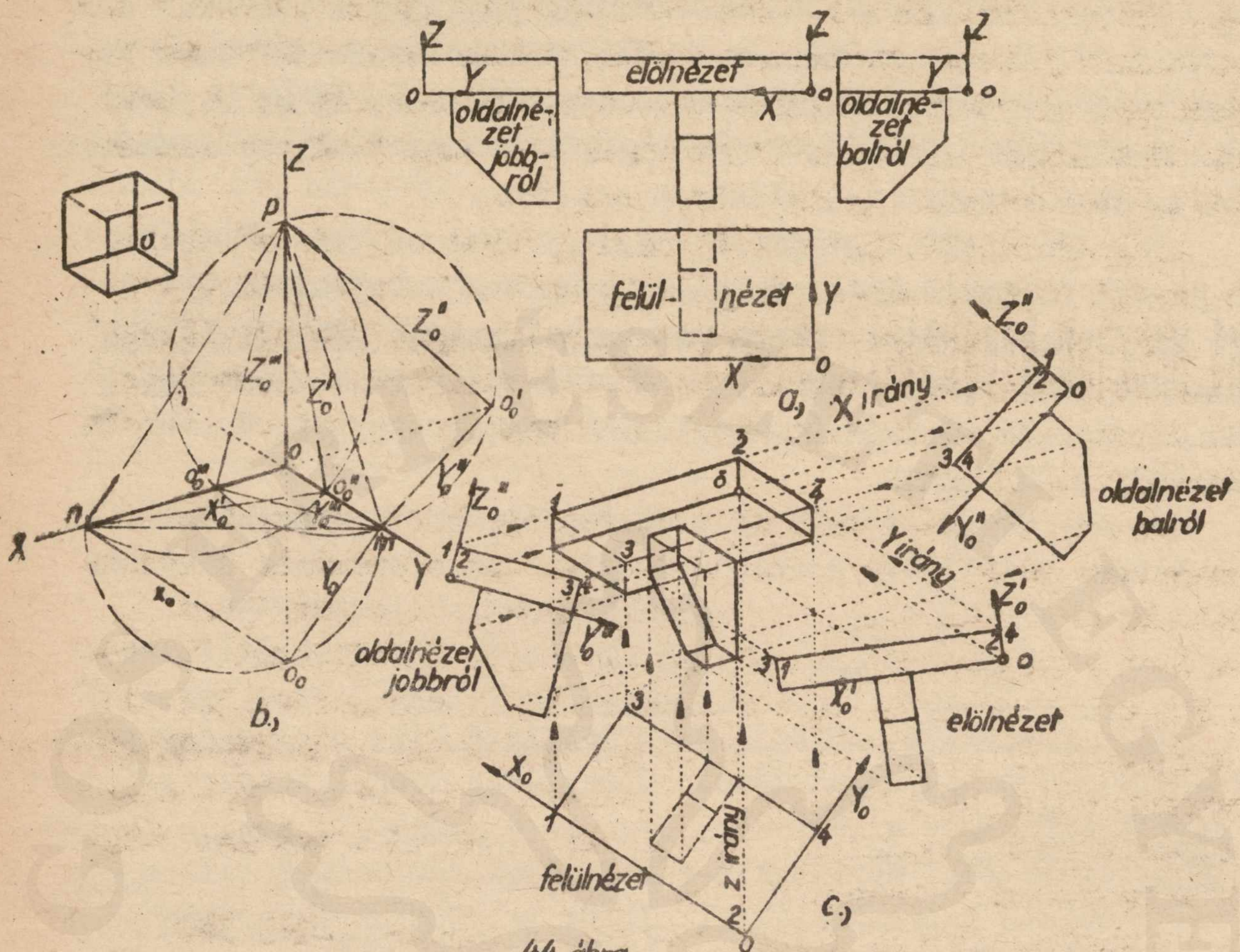
Az ax. képen látható az a csucs, él, amely a nézetekben az ax. képpel ellentétes oldalon, vagyis a néző széméhez közelebb van.

21./ Alakzat alulnézeti axonometrikus képe nézetmódszerrel. Alulnézeti kép szerkesztésénél képzeljük a tengelykereszttriédert a képsik előtt ugy elhelyezve, hogy az o kezdőpont hozzánk legközelebb legyen /44. ábra b./ s a legjobban rövidülő Y féltengely o-tól jobbfelé helyezkedjék el. Ilyen helyzetben a derékszögü triéder külső felületét látjuk, s a tengelyekkel összeeső élü kockának az o-val összeeső csucsát s igy az XY sikon levő alaplapját is látjuk /b. mellékábra/. A tengelykeresztre egyébként érvényesek a 19. pont alattiak.

A 44. ábra a./-ban megadott alakzat képének szerkesztéséhez felvesszük a tengelykeresztképet, s a b./ ábra szerint megrajzoljuk a parallelforgatott koordinátasikokat, illetve tengelyeket.

A továbbiakban a 20. pont szerint járunk el, s a szerkesztésekhez felhasználni kivánt nézeteket, általában kettőt, c./ szerint helyezzük el, mert egyrészt ez az elhelyezés felel meg a nyert ax. kép nézési irányainak, másrészt meg igy ismét az ax. képpel ellentétes oldalon van minden nézetben a szemlélőhöz legközelebbi, tehát látható pont, pl. o.

Esetünkben feltételeztük, hogy a szerkesztéshez felhasznált nézeteket nem rajzoltuk meg, hanem az a./-ban megadottakat egymástól külön választhattuk, s helyeztük el a c./ ábrában a szerkesztés kivánta helyre.



44. ábra

22./ Faszerkezeti részlet felülnézeti axonometrikus képe koordinátákkal. Árnyékszerkesztés. Az ábrázolandó szerkezet alakját és méreteit a 45. ábra a./ adja meg, valamint azt is, miként kapcsoljuk a térbeli tengelykereszthez.

Megrajzoljuk a tengelykereszttel kapcsolt alak kisebbitési arányának megfelelő alapléptéket.

A 19. pont figyelembevételével felvesszük a tengelykereszt-képeket /b. ábra/, s hogy az egyes pontok koordinátái képhosszának egyenkénti megszerkesztését elkerüljük, szerkesszünk mindhárom tengelyhez léptéket, vagyis állapitsuk meg a tengelyekre felmért alapléptékegységek képhosszát. E célból az mn. fővonal körül parallelforgatott X_o-ra o_o-tól felmért 40 alapléptékegység 40_o végpontját visszaállitva o40 darab lesz az X tengely léptékén 40 egység. Az Y_o tengelyen o_o30_o darab 30 alapegység, s igy o30 lesz az Y lépték 30 egysége.

A Z tengelyen a megrövidülést az eddigiektől eltérően, következőleg is megállapithatjuk: mivel Z merőleges az XY sikra, merőleges e síknak $o\omega$ esésvonalára is. Ennek valódi nagysága ωo_0. Fektessük Z és $o\omega$ közös vetitősikját az mn fővonalon átmenő s a képsikkal párhuzamos sikba, amikor is o a Z-re merőlegesre jut, és pedig ω-tól az ismét valódi nagyságban látható ωo_0 távolságra, s igy ω középpontu ωo_0 sugaru kör a merőlegest o_0-ban metszi. Z_0 merőleges $\omega o_0'$-ra.

A Z_0-ra o_0'-tól felmért 40 alaplépték egység 40_0 végpontja a visszaállitásnál 40-be jut, és igy o40 a Z lépték 40 egysége.

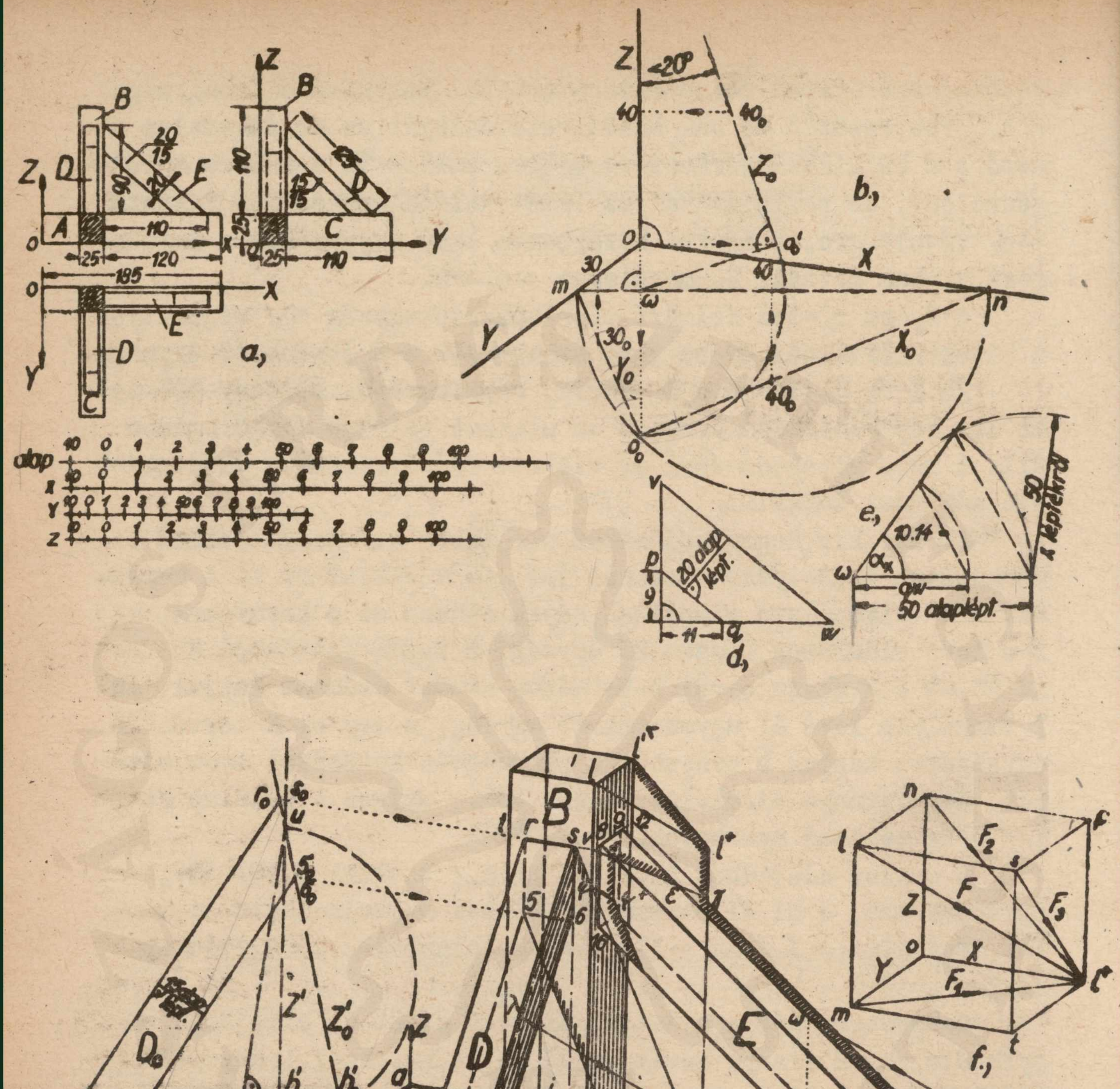
/A Z és Z_0 szöge a Z tengely képsikszöge. Mintegy 20^o-ig az ax. kép benyomása szerint az alakzat valóban függőlegesen áll. A szög növekedésével az alakzat felső részével mindinkább előredültnek látszik./

Az ax. kép megrajzolásához c./ ábrán b./ tengelyeivel párhuzamos tengelyeket veszünk fel. Az a./ szerint az A hasábnak a ZY sikon levő alapjának egyik csucsa az o kezdőpont, a Z-n levő oldalának hossza 25 egység, s igy Z léptékről 25, azaz 25_x-t c./ ábrán o-tól Z-re mérve az "a" csucsot kapjuk. Az Y tengelyen levő él ugyancsak 25 egység, s igy az Y lépték 25 egységével kapjuk b csucsot, s párhuzamos huzásával oacb alapot. Az X irányu oldalélek hossza 185_x, amivel a fedőlap /végfa/ defg csucsai nyerhetők.

B oszlop alapjának h csucsa az a./ szerint d-től 120_x egységre van, s hi él hossza 25_x. Ezzel megrajzolható hijk alap, valamint a Z irányu 110_z hosszu oldalélek és a fedőlap végfa.

C hasábgerenda A oldallapján levő 25x25-ös alapjának egyik éle ih, Z irányu másik kettő im és hn. Az Y irányu oldalélek hossza 110_y, és ezzel a fedlapvégfa megrajzolható.

A 15/15 derékmetszetü D hasábnak /ducnak/ B oszlop oldallapján levő metszetének X irányu rs felső éle ih-től 90 egységnyire van. hv = 90_x és vt párhuzamos X-el, rs = 15_x és tr = sv = 5_x vagy ts = sr = 20_x. A metszet két éle, – a./ szerint – s, illetve r-ből huzott Z irányu egyeneseken lesznek. Az első és ih élnek 7 metszéspontjából huzott Y irányu egyenesen lesz D hasáb és C hasáb metszésének egy éle. /Ugyanez áll az r-ből huzott irányra is./ A hasáb többi részét közvetett szerkesztéssel kell ábrázolni, mert a megadott méretek /125 és 15/ mérési iránya nem tengelyirányu. Alkalmazzunk pl. párhuzamos



45. ábra

helyzetbe forgatott X irányu oldalnézetet jobbról. hi él meghosszabbitásának egy tetszőleges h' pontján át Z' és Y' segédtengelyek sikját uu fővonala körül párhuzamos helyzetbe forgatjuk. Z_0'-on van rs élnek parallelforgatott képe $r_0 s_0$. /$r_0 h_0'$=alaplépték 90./ Az $r_0 1_0$ oldalél egyenlő 125 az alaplépték szerint. $r_0 1_0$-tól 15 távolságra van $5_0 3_0$ él. Visszavezetéssel megkapjuk 5.6 és 1.2 éleket. s.2, 6.4, r.1 és 5.3 a párhuzamos oldalélek.

A 20x15 derékmetszetü E duchasábnak B oszloplapon levő 8.9 éle trsv-vel egyenlő magasan, a v-ből huzott Y irányon van. 8.9 = 15_y vagy inkább v.9 = 12.8 = 20_y. Az A hasáblapján levő metszet 10.11 éle h-tól 110_x egységnyire van és 10.11 = 15_y vagy 13.11 = 20_y. A 8.10 és 9.11 párhuzamos oldalélek. A 10.14 és 11.15 él X, a 8.16 meg Z irányu, s a hosszuságuk megállapitásához a nem tengelyirányu 20 derékmetszetméret adott, s igy ugy, mint D-vel parallelforgatott elölnézetet alkalmazhatnánk. Vagy egy mellékábrán megrajzoljuk E elölnézetét az alaplépték szerint; s ott mérjük le 10.14 és 8.16 valódi nagyságát. De tekintettel arra, hogy a metszet oldalainak hossza nem változik, ha E hasábot önmagával párhuzamosan h-hoz közelebb toljuk, a d./ mellékábrán egy ilyen helyzetet rajzolunk meg. Az oldalél irányát megadja a függőleges Z-re felmért 90/10 = 9 és a vizszintesre felmért 110/10 = 11 tetszőleges egységek q és p végpontját összekötő egyenes. qw a 10.14, vp meg 8.16 él valódi nagyságával egyenlő. A képhosszat az ismert módokon kivül, <u>csökkentőszöggel</u> állapitjuk meg, pl. az X irányu qw képhosszát α_x csökkentőszöggel. Szerkesztését e./ ábra mutatja. qw-vel rajzolt ivnek a szögszárak közötti hurja megadja a qw-vel egyenlő X irányu daraboknak, s igy 10.14 élnek is a képhosszát. Ezzel E hasáb ábrázolása befejezhető.

Minden tengelyhez szerkeszthető csökkentőszög. Ezeket akkor lehet előnyösen felhasználni, ha az alakzat képei arányosan vannak megrajzolva, de a méretek hiányoznak.

<u>Árnyékszerkesztés diagonális fényiránynál.</u> Tételezzük fel, hogy a szerkezet XY vizszintes sikon áll és XZ sikra támaszkodik.

A tengelyekkel párhuzamos tetszőleges élhosszuságu kocka / f. ábrán 50 , 50 , 50 / F átlója a fénysugár ax. képe; az F alapátló a fénysugár ax. felülnézete; F lapátló az ax. elölnézet; F meg az oldalnézet.

Az 1 csucson átmenő F fénysugár a kocka három lapját 1^+-ben döfi, s igy vetett árnyéka e lapokon 1^+. A Z irányu lm él vetett árnyéka az XY alapsikon ml^+, vagyis F_1. Az Y irányu ln él vetett árnyéka a ZX hátlap sikján nl^+, vagyis F_2. Az X irányu ls él vetett árnyéka az XY-al párhuzamos oldallap sikján sl^+, vagyis F_3.

A kocka lm oldalélének az alapsikra vetett F_1 árnyékirányával párhuzamosak az alapot t és o-ban suroljék, igy ts és on az önárnyékhatároldalélek, s mert a fedőlap megvilágitott, $tspl^+$, pl^+on és mol^+t az önárnyékos lapok. Igy a szerkezetnek az e lapokkal párhuzamos és látható phn; hkl, defg és s.6.4.2. lapjai is önárnyékosak.

Árnyékot vetnek megvilágitott lapokra az önárnyéhatárok. B oszlop Z irányu lh önárnyékhatárélének az A felső lapjára vetett árnyéka az F irányu $h\beta$. A β-ban megtörő árnyék a hl-el párhuzamos falra fut és parallel hl-el. l vetett árnyéka l^+ s az Y irányu ll^+ vetett árnyéka az F_2-vel párhuzamos $l'l^+$. Az lh él árnyékát részben a fal előtti E ducra ejti. A szélesitett 8.9.10.11 hasáblap a falat a 8.9 él 12-es pontján átmenő és 9.10-el párhuzamosban metszi, s ez βl^+ vetett árnyékot γ-ban találja. lh él 8.9.10.11 sikját v-ben döfné, s igy a lapra vetett árnyéka v-ből indul ki, γ-ba fut, s onnan a falra. A vetett árnyék tényleges része $\delta\varepsilon$. A δ-ban megtörő árnyék az lh-val párhuzamos 8.10.14.16 lapon lh-val párhuzamos.

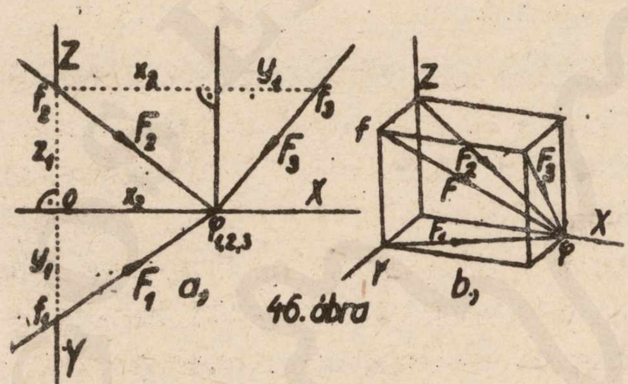
Az A hasáb gd élének F_1 irányu árnyéka gd^+, az F_2 irányu ed^+ meg ed-nek a vetett árnyéka.

A C hasáb pp' élének F_1 irányu vetett árnyéka $p'p^+$. A ph-val párhuzamos $p^+\varphi$ meg ph egy részének a vele parallel alapsikra vetett árnyéka. Az F_2 irányu $h\varphi$ az A hasáb oldallapjára vetett árnyéka.

D ferde hasáb önárnyékhatároldalélének megállapitásához megszerkesztjük pl. s2 élnek az 1.2.3.4 alapsikra vetett árnyékát. 2-es árnyéka önmaga. 2s élnek λ pontján átmenő Z irány az alapsikot 2.7-nek λ' pontjában döfi. $\lambda\lambda'$-nek az λ'-ből kiinduló F_1 irányu vetett árnyékát λ fénysugara λ^+-ben metszi. $2\lambda^+$ az oldalél vetett árnyéka az alapsikon. Az ezzel párhuzamosak 2 és 3-ban surolnak, s igy 2s és 3.5 az árnyékot vető önárnyékhatároldalélek. A $2\lambda^+$ árnyék megtörik az A hasáb élének ρ pontjában, és reá fut az rs5.6 alappal azonos siku hdgn lapra. Mivel 2s-nek e sikon a döfése s, azért $s\rho$ a vetett árnyék, s ez ω-ban megtörve, az alapsikon $2\lambda^{+}$ -el párhuzamos. A μ -ben megtörő árnyék a falon sφ-val parallel. Az s2 élnek az rs5.6 lapon levő árnyéka ψ -ben megszünik, s onnan lh-nak árnyékára ψ' -be ugorva E lapján s γ -vel párhuzamosan folytatódik.

Az 5.3 élnek $2\lambda^{+}$-el párhuzamos árnyéka τ -ban megtörve 5-be fut, illetve A-nak elülső lapjára. 5τ parallel sφ-val. Az s2 és 3.5 élek vetett árnyékai közötti pászta D ducnak a vetett árnyéka.

Az E hasáb 11.9 oldaléle 11ω darabjának az A ducra vetett árnyékhatáréle az alapot 11-es pontjában suroló 11ω , s ez π -ben megtörve a falon 11.9-el párhuzamosan halad $1^{+}\beta$ metszéséig. Az önárnyékhatáron levő 14.16 oldalélnek vetett árnyéka fedett.



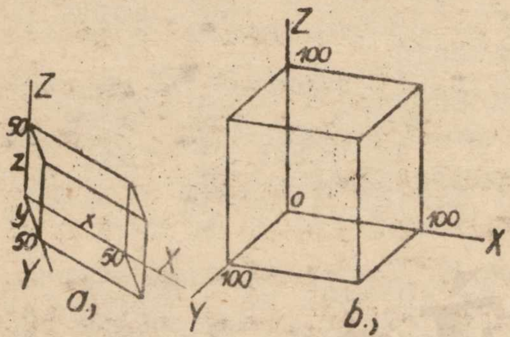
46. ábra

Ha nem diagonális fényiránynál a fénysugár elöl-felül- vagy elöl-oldalnézete adott /46. ábra a./, akkor a tetszőlegesen felvett f és az összeeső képpáru φ pontoknak a nézeti képből lemérjük x_2, y_1 és z_1 koordinátáit, megállapitjuk ezeknek képhosszát, s az ezekből alkotott derékszögü hasáb átlója a fénysugár ax. képe /b. ábra/.

b./ Ferde axonometria.

23./ Az általános ferde axonometria. Láttuk, hogy a merőleges ax.-nál a tengelykereszt képének felvételével a tengelyeken levő egyenlő egységeknek, - egy kocka éleinek - képhossza nem volt szabadon választható. Ha a térbeli tengelykeresztet a képsikra ferdén vetitjük /mint árnyékszerkesztésnél/, tehát ferde axonometriát müvelünk, akkor nem csak a tengelyképeket, hanem az azokon levő s egymással egyenlő daraboknak képhosszát - egy kocka éleit - is tetszőlegesen vehetjük fel. A ferde ax. alaptétele, a Pohlke-tétel* szerint mindig megállapitható az a ferde vetitési irány, amelynél egy sikon levő egy pontból kiinduló !

* a tétel bizonyitását lásd az I. részben megadott irodalomban



47. ábra

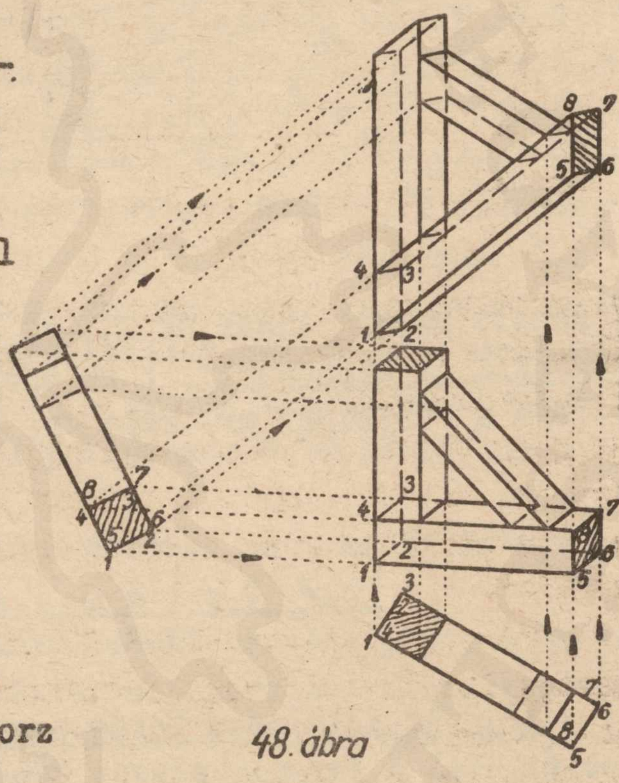
három tetszőleges távolság egy térbeli pontban egymást merőlegesen metsző egyenlő távolságoknak a ferde vetülete, de a négy végpont nem lehet egy egyenesen.

A torz képeket elkerüljük, ha az egyenlő egységek képnagyságait ugy választjuk meg, hogy a velük alkotott kocka, kocka benyomását tegye. /47. ábra á. és b./

A felvett egységekkel megrajzolt tengelyléptékek felhasználásával egy a méreteivel megadott alakzat ax. képének a megszerkesztése ugy történik, mint az orthogánális ax.-ban. Ezt a módszert leginkább szemléltető szabadkézi vázlatok készitésénél használják.+

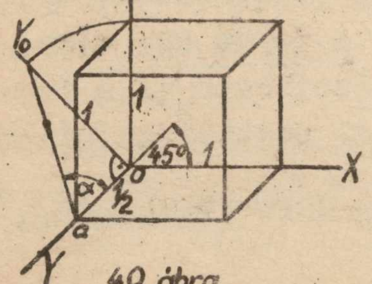
Készithetünk ferde ax. képet nézetmódszerrel is, amikor a tetszőlegesen elhelyezett nézetpár megfelelő pontjait tetszőleges irányba vetitve, a metszéspont az ax. kép.

Ez a módszer igen alkalmas a készerkesztésre, de könnyen torz képre vezet. /48. ábra/



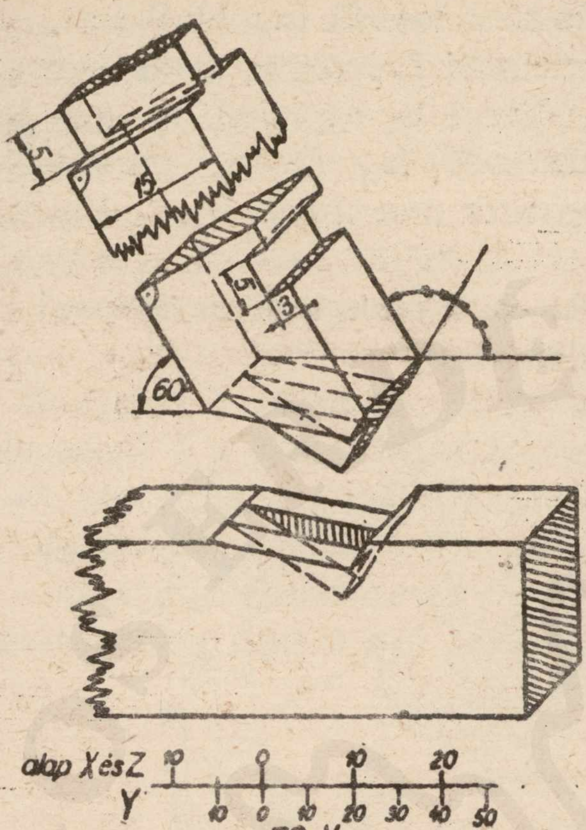
48. ábra

24./ A ferde axonometria két változata. Helyezzük a ZX sikot a függőleges képsikra, Z is függőleges legyen, akkor Y a képsikra merőleges. A Z és X tengelyek egységhosszának képe minden vetitési iránynál önmaga, mig az egységhosszu Y tengelykép a vetitési irány szerint változik. Ezek közül azt, amelynél Y tengely képe X-el 45^o-t zár be és az egységhosszának képe fele a valódi nagyságának, nevezik általában



49. ábra

+lásd: Stasney: "Vázolás minta nélkül"



50.ábra

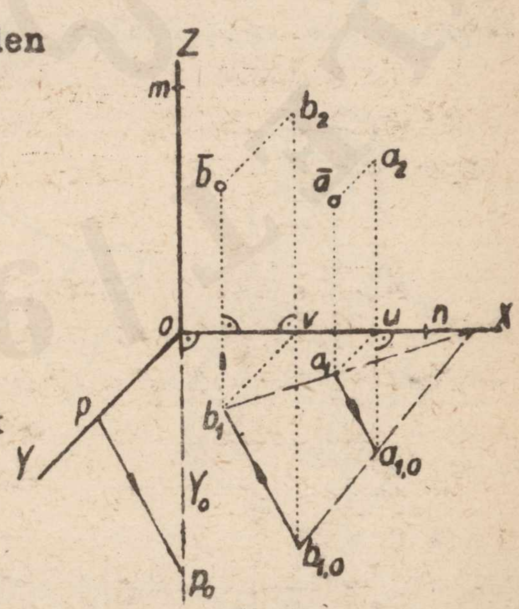
Kavalier perspektivának. A 49. ábra egy kockának a valóságnak megfelelő benyomást keltő, s könnyen rajzolható ilyen képe.

A vetitési irány térbeli helyzetét megkapjuk, ha o-ban a papir sikjára állitott merőlegesen álló térbeli Y-ra az o-tól felmért egységhossz végpontját összekötjük a-val. A vetitési irány α képsikszögét, vetitősikjának ledöntésével kapjuk meg.

A ZX és vele párhuzamos sikokban levő sikalakzatok képe valódi nagyságu; ilyeneken minden irányban végezhetünk méréseket a Z illetve X léptéke szerint, felezhetünk szögeket stb /50.ábra/

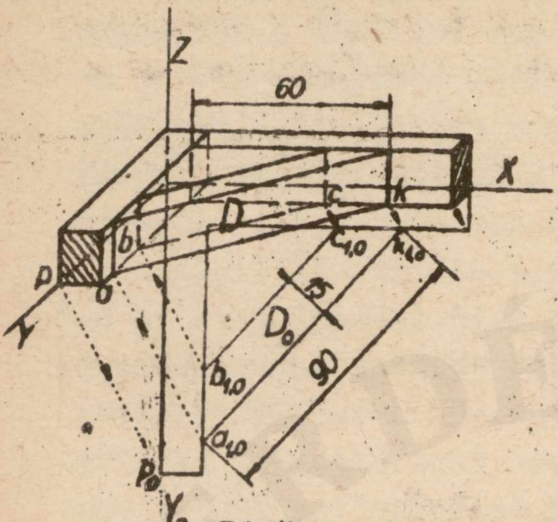
Ha az XY sikon kell nem tengelyirányu méréseket, mértékes szerkesztéseket végezni, akkor az XY sikot X körül forgatva a képsikra fektethetjük /51. ábra/. E leforgatásnál o-ban a papir sikjára merőleges térbeli Y tengely Y_o-ba jut. S ha az egységhossz Z tengelyen om; Y tengelyképen op, akkor a térbeli p pont p_o-ba jut, amikor is op_o = om és pp_o a lefektetésnél p által leirt negyedköriv hurjának ferde vetülete.

Mivel a leforgatásnál XY sik minden pontja által leirt negyedkörivek hurjai párhuzamosak, ferde vetületük párhuzamos pp_o-al. Igy a_1 a leforgatásnál az Y-al párhuzamos a_1u, az u-ból Y_o-al párhuzamosra kerül, s ezt az a_1-ből pp_o-al huzott párhuzamos $a_{1,0}$ -ban metszi.



51.ábra

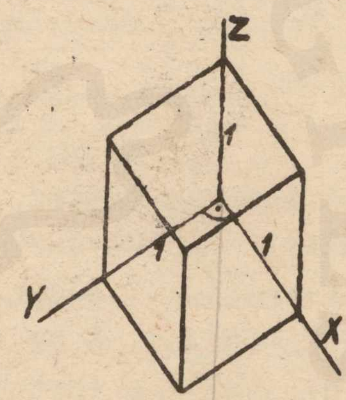
Ha a leforgatásban ösmert $b_{1,0}$-nak adott a z-je; akkor $b_{1,0}$ v párhuzamos Y_o-al, vb_2 egyenlő az adott z-vel v-ből Y-al huzott párhuzamost a $b_{1,0}$ -ból p_op-vel parallel b_1-ben metszi. A b_1-ből huzott Z és b_2-ből huzott Y irányok metszése $\bar{b}$. /Mivel b_2 egyuttal $b_{2,0}$-nak is tekinthető, $b_{2,0}$ és $b_{1,0}$ parallelforgatott nézetekből $\bar{b}$ ax. képet az orthogonális ax.-tól eltérően, $b_{1,0}\,b_1$ és $b_1\bar{b}$ megtört vetitéssel kapjuk meg/.



52.ábra

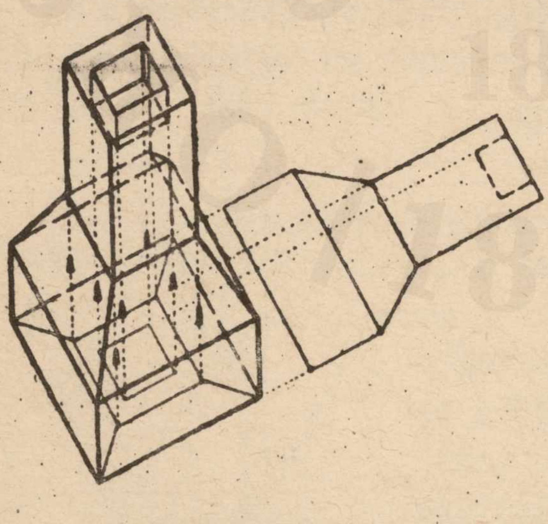
Az 52. ábrán az X irányu 60 mérettel kijelölhető a D duchasábk pontja. A parallelforgatott felülnézetben a nem tengelyirányu 15 és 90 méretekkel megrajzolhatók az $a_{1,0}$, $b_{1,0}$, és $c_{1,0}$ pontok, s ezeknek p_0p irányu vetitésével az ax. felülnézetek a, b, és c. Ezzel D élei megrajzolhatók.

A Kavalier perspektivát /dimetrikus ferde axonometria/ kiterjedten alkalmazzák szemléltető ábrák, valamint szabadkézi vázlatok készitésénél.



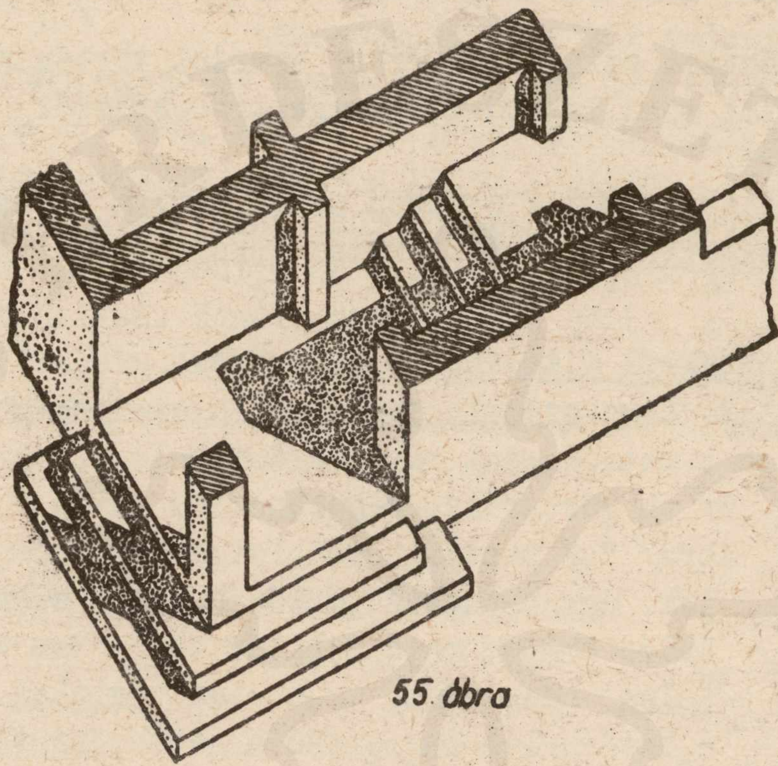
53.ábra

Ha az XY sikot vizszintes képsikra helyezzük, s a vetitési irány képsikszöge 45^0, akkor egyrészt a tengelyek egységdarabjának képhossza mindhárom tengelyképen egyenlő, másrészt az alakzatok ax. felülnézete változatlan, az XY sikkal párhuzamos sikalakzatok ax. képe valódi nagyságu. Ez az izometrikus ferde axonometria a <u>Katona-, vagy madárperspektiva</u>. Az 53. ábra egy üreges kocka ilyen képe.


54.ábra

A kissé valószerütlen kép megrajzolásánál célszerüen a felülnézetből indulunk ki, s a magassági méreteket is valódi nagyságban mérjük fel. /54. ábra/

Az 55. ábra egy épület bejárójának madártávlati képe. A szerkesztésnél a bejáró külső pihenőjének síkjában megrajzolt felülnézetből /alaprajzból/ indultunk ki. Az ábrán ezt az alaprajzot mellőztük.



55. ábra

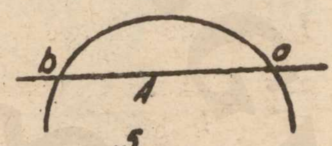
III. S i k g ö r b é k.

25./ A görbékről általában. Egy görbe vonal egy mozgó pont pályájának tekinthető. Az egymáshoz végtelen közel levő konsekutiv helyzeteik a görbe egy elemét adják. A görbe két pontja között folytonos, ha a görbén haladva egyik pontból a másikba eljutunk...

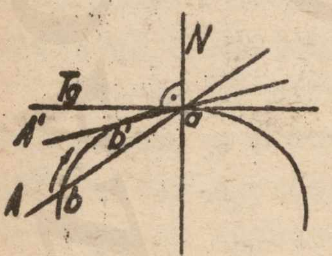
Ha a pont mozgása valamely törvény szerint történik, s igy helyzetei asszerint megállapithatók, megszerkeszthetők, a görbe vonal törvényszerü.

Ha a görbe minden pontja egyazon sikon van, a görbe egyszeresen görbült, sikgörbe, egyébként kétszeresen görbült térgörbe.

26./ A sikgörbékről általában. A sikgörbe két pontján áthaladó A metszőnek, szelőnek /56. ábra/ az a és b metszéspont közötti darabja a görbe hurja. Az ab görberész, a görbe ive. Ha A metszőt /57. ábra/ "a" pontja körül forgatjuk, ugy b pont a görbén haladva a-hoz közeledve b'-be, majd a határhelyzetben a-hoz végtelen közel jut, az ab hur végtelen kicsi, s a határhelyzetü metsző a görbe érintője a pontban. /E szerint az érintő az érintési pontnak s az ahhoz végtelen közeli pontnak az összekötő egyenese. Az érintő a sikgörbe sikjában van./

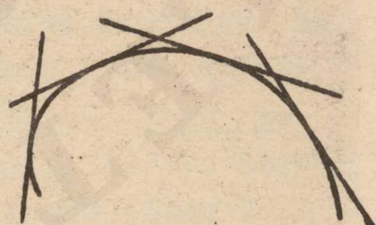


56. ábra



57. ábra

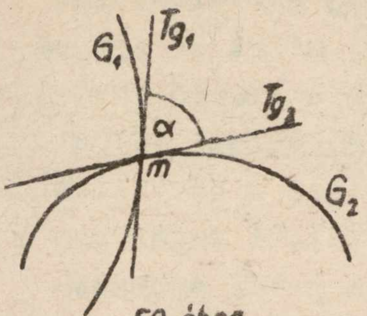
Az érintő elősegiti a görbe megrajzolását az érintési pont közelében. Egy érintősereg alapján a görbét mint burkoló görbét /enveloppe/ rajzolhatjuk meg /58. ábra./.


58. ábra

A görbe egy pontjában az érintőt kielégitő pontossággal megrajzolhatjuk, ha a vonalzót ugy helyezzük el, hogy a látható kis ivet a pont szemmérték szerint felezze, s kissé ferdén tartott irónnal huzzuk az érintőt.

Két görbe metszésszögét az m metszéspontbeli Tg_1 és Tg_2 érintők α szöge megadja /59. ábra/.

Az érintőt s igy a görbét is az érintési pontban merőlege-



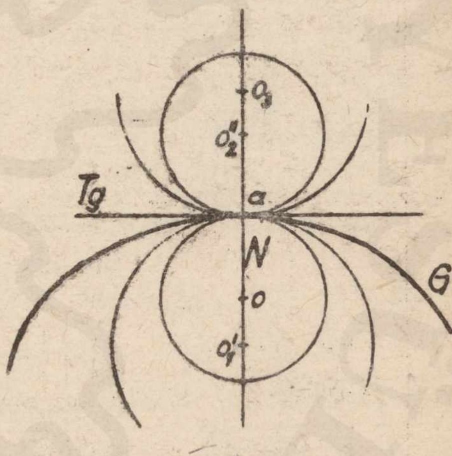
59. ábra

sen metsző egyenes a görbe normálisa N./57. ábra/.

Mindazon körök, amelyeknek középpontja a normálison van /60. ábra/ érintik a-ban Tg-t, s ezzel G görbét is. Az érintőköröknek közös pontjuk G-vel a, s az ehhez végtelen közel levő pont, s e két ponton végtelen sok kör rajzolható.

Három ponton át azonban csak egy kör rajzolható, s igy csak egy olyan kör van, amelyik a görbe három végtelen közeli pontján áthaladva érinti a görbét e három pontban. Ez a görbületi, vagy simuló kör. A görbületi kör középpontja két végtelen közel levő normális metszéspontjában van, s mutatja a görbe görbültségét a kérdéses helyen. Minél görbültebb a görbe, annál kisebb a görbületi kör sugara és viszont, miért is a görbületi kör ρ sugarának $\frac{1}{\rho}$ reciprok értékét a görbe görbültségének nevezzük.

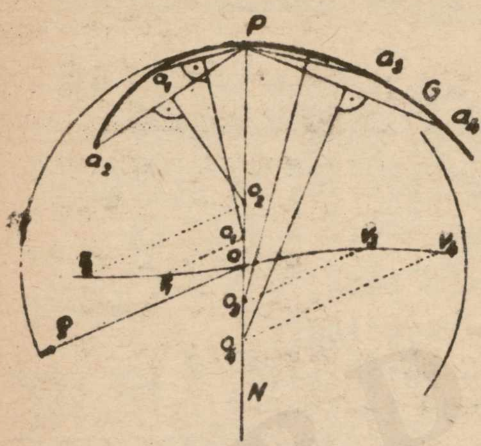
A görbületi kör előnyösen felhasználható a görbe megrajzolásánál.



60. ábra

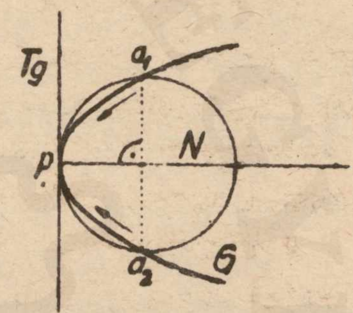
Megközelitőleg azonos azzal az érintő körrel, amelyik a kérdéses pont körüli iven leginkább simul a görbéhez Pontosabban szerkesztéssel kaphatjuk meg, amikor is következőleg járhatunk el /61. ábra/: G görbét p-ben érintő kör középpontja az N normálison van. Ha a szomszédos harmadik pont a_1, ugy a körközéppont pa_1-et merőlegesen felező egyenes és N-nek o_1 metszéspontja. Ha a_1 végtelen közel kerülne p-hez, akkor pa_1 hur is végtelen kicsi lenne, s igy a kijelölt helyzetében pa_1 hur az eltérés. Huzzunk o_1-ből tetszőleges irányu egyenest, s mérjük erre o_1-től az a_1p eltérést, kapjuk v_1 pontot, Hasonlóan kapjuk v_2 pontot, amikor is $o_2 v_2 \parallel o_1 v_1$-el. p ellenoldalán felvett a_3 és a_4 pontok hibáit N ellenoldalán felmérve a v_3 és v_4 pontokat nyerjük. $v_2 v_1 v_3 v_4$ hibagörbe N-t a hibátlan o-ban, a görbületi kör középpontjában metszi.

A 61. ábrán is láthatjuk, hogy a görbületi kör a görbét p-ben metszi is. Ugyanis p-től a_1 felé G görbültsége növekedik s igy p-vel szomszédos görbületi kör sugara kisebb op-nél, miért is ugy ez a kör, valamint G-nek a kisebb körrel összeeső iveleme op görbületi körön belül van. p-től a_3 felé G görbültsége csökkenvén, a görbületi sugár nagyobb op-nél, s igy a p-vel szomszédos görbületi kör, valamint G-nek ezzel összeeső iveleme az op körön kivül van.



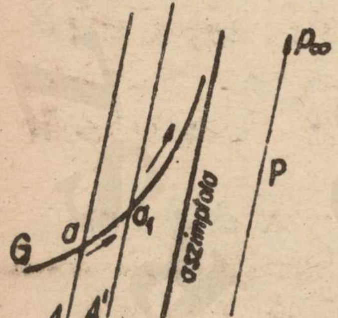
61 ábra

Ha a görbe p szomszédságában N-re orthogonálisan szimmetrikus /62. ábra/, amikor is p egy csúcs, akkor egy tetszőleges érintőkör G-t az N-hez szimmetrikus és p-től egyenlő távolságra levő a_1 és a_2 pontokban metszi, s igy ezek a kör sugarának változtatásával a határhelyzetben egyszerre jutnak p ivelemének két pontjához végtelen közel. A görbületi körnek G-vel négy végtelen közeli pontja közös, de azt nem metszi, G görbültsége p-ben legkisebb /vagy legnagyobb/.



62. ábra

Gyakorlatilag hosszu iven simul a görbéhez, kiválóan felhasználható a görbe megrajzolásánál.

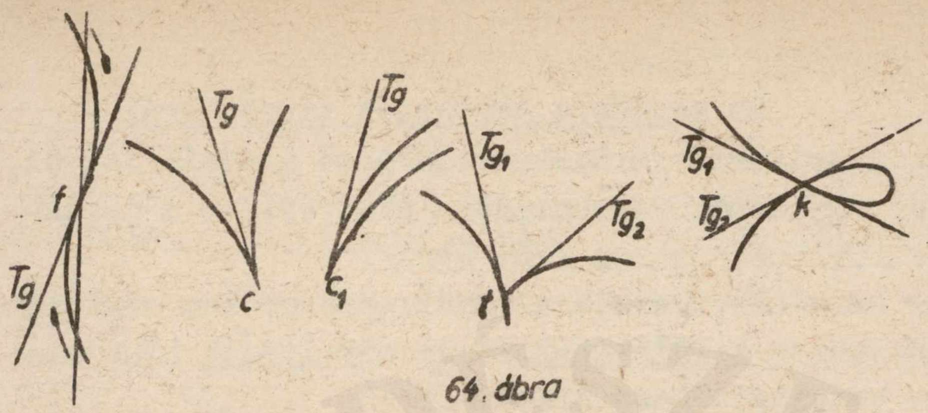


63. ábra

+G görbének a végtelenben levő p pontjában az érintő /63. ábra/ p_∞ és "a" pontokat összekötő A metszőnek az a helyzete, amelynél a görbén haladó a pont p-hez végtelen közel jut. Ezt az érintőt aszimptotának, végérintőnek nevezzük.

A görbének közönséges pontjain kivül lehetnek különleges /singuláris/ pontjai is. Ilyenek: a forduló /inflexiós/ pont /64 ábra f/, az érintő metszi is a görbét; visszatérő pont /c és c_1 ; c_1 csőrpont/ két összeeső érintővel, mig a töréspontban /t/ az érintők mérhető szöget alkotnak; kettős /többszörös, hurok/ pontban a görbe önmagát metszi.

+Az a pont amelyik a rajta áthaladó hurokat megfelezi, a görbe középpontja; s a felezett hurok az átmérők.



64. ábra

A görbéhez tartozó elszigetelt egyedüli pontot remete /isolált/ pontnak nevezzük. Pl. o középpontu R sugaru kör kerületétől R távolságra levő pontok összesége egy o középpontu 2R sugaru kör kerületének pontja és o mint remete pont.

A törvényszerü, azaz azok a sikgörbék, amelyeknek pontjai egy törvénynek megfelelően megszerkeszthetők, lehetnek algebraiak és transcendensek.

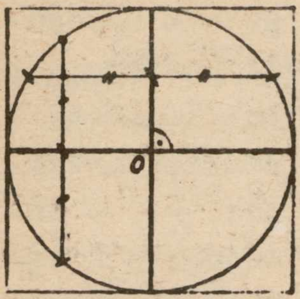
Az algebrai görbe rendszáma megadja, hogy egy egyenessel legfeljebb hány pontban metszhető. Pl. a kör, ellipszis, parabola, hyperbola másodrendü sikgörbék. A transcendens sikgörbék és egyenes metszéspontjainak száma nem korlátozott. Pl. a sinusvonal meneteinek számával változik a metszéspontok száma.

A sikgörbéknek vannak a párhuzamos vetületben is megmaradó sajátságai. Igy a pontonként folytonos sikgörbe képe is pontonként folytonos sikgörbe, különösképp a végesben zárt görbe képe is ugyanilyen. A középpont, az átmérő képe a képgörbe középpontja, átmérője.

Ha egy metsző a görbét n számu pontban találja, ugy a metsző képe a képgörbét az n pont képeiben metszi, ami azt jelenti, hogy a görbének és a képgörbének rendszáma egyenlő. A másodrendü sikgörbe képe másodrendü sikgörbe.

A görbe és az érintő végtelen közeli pontjainak képe ugyszintén végtelen közeli közös pontjai a képgörbének és az érintő képének. Vagyis az érintő képe a görbe képének az érintője. Ez a végérintőre is vonatkozik. A különleges pontok képe a képgörbe ugyanolyan pontjai.

26./ A kör. Másodrendü sikgörbe, pontjai egy ponttól, a középponttól egyenlő távolságra vannak. Görbültsége minden pontjában egyenlő, miért is önmagában eltolható /mint az egyenes./

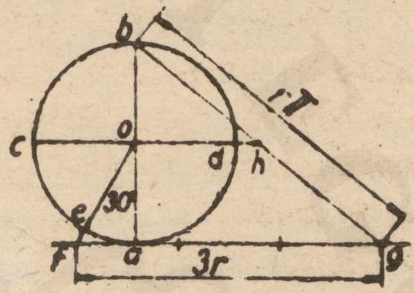


65. ábra

Az egymásra merőleges társátmérőinek egyikével párhuzamos hurokat a másik felezi, egyikének végpontjában a körérintő a másikkal párhuzamos /65. ábra/.

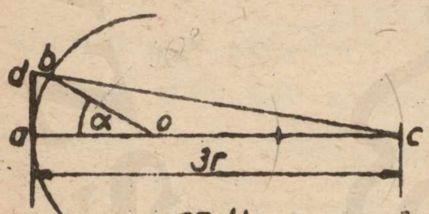
Szerkesztéseinknél gyakran van szükség a kör kerületének, vagy egy ivének kiegyenesitett hosszára.

A kör kerületének megközelitő hossza Kohánsky szerint a következőleg szerkeszthető meg /66. ábra/: megrajzoljuk ab és cd társátmérőket, a-ban a körérintőt, a kört c-ből körsugárral e-ben metszük, a 30^0-os szög oe szárának és az érintő f metszéspontjától az érintőre a sugarat háromszor felmérjük, a g végpontot b-vel összekötő távolság a félkör kerülete /gh = hb a negyedkör/. /E szerint π értéke 3·14159265 helyett 3·141533, ami 100 mm-es körátmérőnél 0·005965 mm. hibát jelent, s ez lényegesen a rajz pontossági határa alatt van./



66. ábra

Egy kör ab ivének kiegyenesitett hosszát Snellius /67. ábra/ szerint szerkesztve, a-ban megrajzoljuk a körérintőt, ao-ra o-tól a sugarat kétszer rámérjük, a nyert c és az iv b végpontjának összekötő egyenese az érintőt d-ben metszi, ad a kiegyenesitett iv. /Ha α központi szög 30^0, a hiba a sugár 0·0002 része./



67. ábra

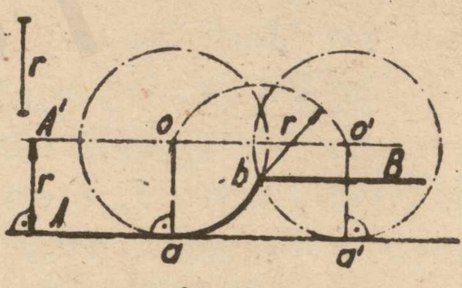
A körre vonatkozó néhány szerkesztés.

a./ A egyenest érintő, B-nek b pontján áthaladó r sugaru kör /körív/ /68. ábra/.

Az A-tól r távolságra levő A' és b-ből rajzolt r sugaru körnek o és o' metszéspontja a lehetséges két kör középpontja. Az érintési pontok a és a'.

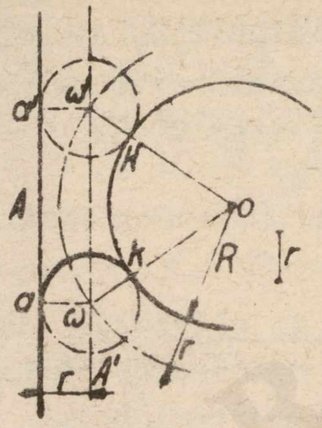
b./ A egyenest és az o középpontu R sugaru kört érintő r sugaru kör /körív// 69. ábra/.

A-tól r távolságra levő A' és az o középpontu R+r sugaru kör ω és ω' metszéspontjai a keresett körök közép-



68. ábra

pontjai. Az érintési pontok a és k , illetve a' és k'.



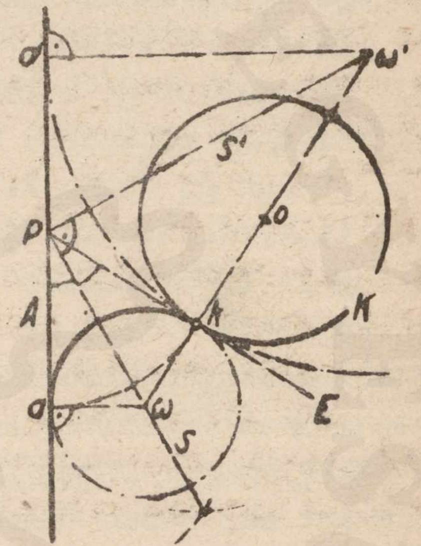
69. ábra

c./ "A" egyenest és az o középpontu K kört k-ban érintő kör /70. ábra/.

K kör k pontbeli E érintőjének és A-nak S szögfelezője az ok átmérő meghosszabbitását az egyik megoldás ω középpontjában, az S-re merőleges S' szögfelező meg a második megoldás ω' középpontjában metszi. Az érintési pontok k és a, illetve k' és a'

d./ o középpontu kört a-ban, valamint o' középpontut is érintő kör /71. ábra/.

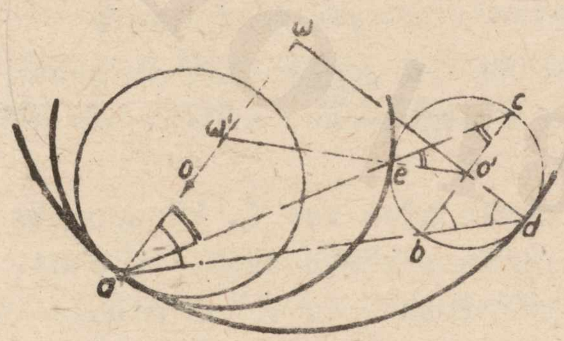
A keresett kör középpontja az ao átmérő egyenesen van. bo'c ∥ ao-val; a és b összekötése kimetszi d-t; do' meghosszabbitása ω középpontot. Az egy ívvel jelzett szögek egyenlősége miatt aωd háromszög egyenlőszáru és ωa = ωd. Hasonlóan: ac adja e-t; o'e kimetszi ω' középpontot, aω' = eω'.



70. ábra

e./ "a" ponton áthaladó B és C-t érintő kör /72. ábra/.

A kör középpontja C és B-nek S szögfelezőjén lesz és a-nak S-re nézve d tükörképe is körkerületi pont, da hur meghosszabbitása B-t e-ben metszi.

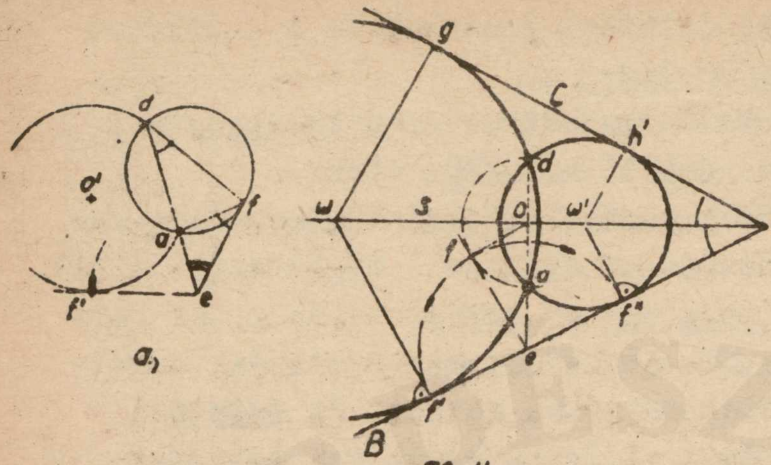


71. ábra

A 72. ábra a./-ban az ad huru körnek ef egy érintője, f az érintési pont. A jelzett szögek egyenlők, s igy edf és eaf háromszögek hasonlók, miért is:

ed : ef = ef : ea; ed.ea = ef²

Mivel az a és d pontokon átmenő minden körnél /pl. o'/ az ed.ea szorzat változatlan, az érintési pontok e-től mind ef távolságra vannak, ef' = ef

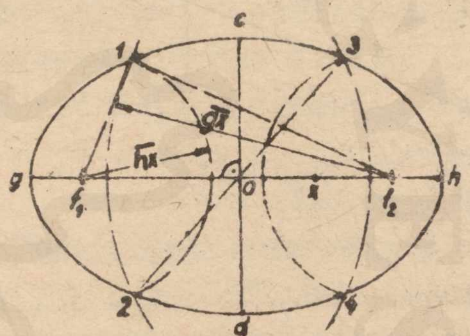


72. ábra

A 72. ábrán ad a segédkörnek az átmérője, érintője ef. B érintő érintési pontja f', vagy f" és ef' = ef" = ef .

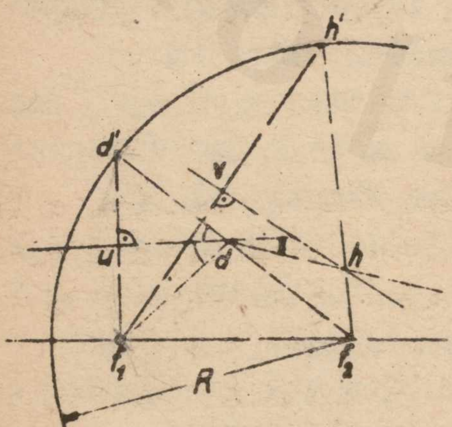
27./ Az ellipszis. Az ellipszis másodrendü görbe, ama pontok mértani helye, melyeknek két adott ponttól, a fókuszoktól mért távolságainak összege egy adott távolsággal egyenlő.

Ha gh a távolság, f_1 és f_2 a gyujtópontok /73. ábra/ és $gf_1 = hf_2$, akkor g /valamint h/ ellipszispont, mert $gf_1 + gf_2 = gf_1 + gf_1 + f_1 f_2 = gf_1 + hf_2 + f_1 f_1 = gh$.



73. ábra

gh-nak gx darabjával f_2 és f_1-ből rajzolt köröket az f_1 és f_2-ből rajzolt hx sugaru körök 1.2.3.4 ellipszispontokban metszik. $f_1$1 és $f_2$1 a vezérsugarak. A szerkesztésből következik, hogy az ellipszis merőlegesen szimmetrikus gh-ra, a nagytengelyre, valamint ezt o-ban merőlegesen felező egyenesre. Az ezen levő c és d ellipszispontok szerkesztésénél a fokuszokból rajzolt körök sugarai egyenlők a nagytengely felével, go-val. cd az ellipszis kistengelye. A tengelyek o metszéspontja a középpont, s ez a szerkesztésből folyólag felezi a rajta áthaladó hurokat, pl 2.3 ellipszis-átmérőt is.



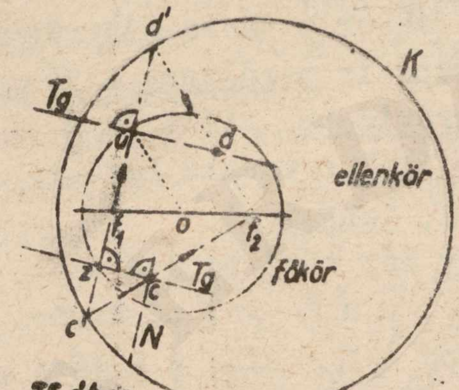
74. ábra

g, h, c és d, a csucsok; g és h-ban a görbültség a legkisebb, c és d-ben a legnagyobb.

A 74. ábrán adva van f_2 középpontu R sugaru kör, és a körön belül f_1 pont. Keressük a kört érintő és f_1-en áthaladó körök középpontjait.

A kört pl. d'-ben érintő kör középpontja a $d'f_2$ normálison van, másrészt a $d'f_1$ körhurt u-ban merőlegesen felező egyenes is, vagyis a kettő metszetében d-ben. A körsugár $dd' = df_1$. A d pont ellipszispont, mert: $df_2+df_1 = df_2+dd' = R$. f_1 és f_2 az ellipszis fókuszai, s a nagytengely hossza R.

Ha h egy további ellipszispont, ugy d és h összekötése ellipszis-metsző. Forgassuk dh metszőt d körül, akkor h közeledik d-hez, h' a d'-höz, v meg u-hoz, és ud és ah szöge csökken, s amikor h a d-be, s ugyanakkor h' a d'-be, v meg u-ba jut, a szög Ø, a dh metszőből ud-vel összeeső érintő lesz, s ez felezi a df_1 és df_2 vezérsugarak kiegészítő szögét. Mivel a vezérsugarak az érintővel egyenlő szöget zárnak be, az f_1-ből kiinduló fénysugár az ellipszis "d" pontjából f_2-be verődik vissza.



75. ábra

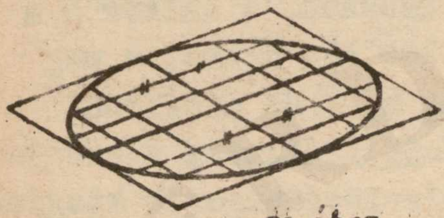
A 75. ábrán "d" az előzők szerint megszerkesztett ellipszis pont. Mivel u felezi $d'f'$-t, azért a $d'f_2$-vel parallel uo felezi o-ban, az ellipszis középpontjában f_1f_2-t, és uo félakkora, mint $d'f_2$, s az ezzel egyenlő nagytengely, vagyis u a nagytengely fölé rajzolható körnek, a <u>főkörnek</u> a kerületén van. Az f_2 középpontu s a nagytengellyel egyenlő sugaru K kör az <u>ellenkör</u>, és d' a d pont <u>ellenpontja</u>.

Ezek szerint, ha adott az ellipszis nagytengelye, fokuszai /vagy kistengelye/ ellipszis pontokat és azokban az érintőt a fő- és ellenkör felhasználásával a 75. ábra szerint szerkeszthetünk, amikor is $c'f'd'$ tetszőleges irányu egyenes a kapott d és c pontbeli érintőkre merőleges, s igy a normálisok ezzel párhuzamosak.

<u>Feladatok</u>: Megszerkesztendő tengelypárjával adott ellipszisnek: a./ Egyenessel párhuzamos érintői; b./ normálisai; c./ egy pontból huzható érintői.

<u>28./ Az ellipszis, mint merőleges körkép</u>. A kör merőleges képe végesben zárt másodrendü görbe, ellipszis. A körátmérők képei az ellipszis átmérői, mert a középpont képe az átmérőképeket felezi, s igy az ellipszisnek <u>középpontja</u>; körérintőnél ellipszisérintő, metszőből az ellipszist legfeljebb két pontban találó metsző lesz. A körnek egymásra merőleges társátmérője az ellipszis-

nek oly átmérőpárja lesz, amelyeknek egyike, a körnek megfelelően a másikkal párhuzamos hurokat megfelezik, s a végpontjaiban az érintő a másikkal párhuzamos, de az átmérők általában nem merőlegesek egymásra. Ezek az ellipszis társátmérői /76. ábra/. Ha azonban a körtársátmérők egyike síkjának fővonala, s így képe egyenlő a valódi nagyságával, akkor a társa síkesésvonal, s így képe is merőleges a fővonalra és legrövidebb, miért is a körkép-ellipszisnek egymásra merőleges társátmérői, tengelyei.



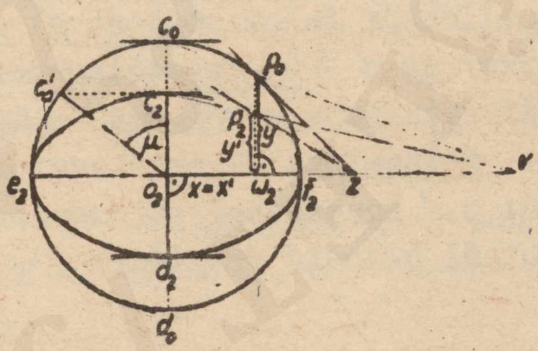
76. ábra

Legyen egy kör középpontjának második képe o_2, s a Π_2-vel párhuzamos /a papir síkján levő/ átmérőjének képe $e_2 f_2$ /=ef/, s a második esésvonalon levő társának képe az $e_2 f_2$-re merőleges $d_2 c_2$ /77. ábra/.

Forgassuk a kört ef átmérője körül Π_2-vel párhuzamos helyzetbe /a papír síkjába/, amikor is, mint $e_2 f_2$ fölé rajzolt kör valódi nagyságu, és c pont c_0-ba d meg d_0-ba jut. Mivel a síkidom képe és parallelforgatott helyzete persp. affinitásban vannak, a körkép és a kör affinitásában az aff. tengelye az $e_2 f_2$ forgástengely, sugárirány $c_2 c_0$, s az aff. állandó meg a kör síkja képsíkszögének cosinusa. A képsíkszöget nyerendő, forgassuk az oc esésvonal /körsugár/ vetítősíkját Π_2-vel párhuzamos helyzetbe /a papir síkjába/, amikor o maradó, c meg c_0'-ba jut. $c_0' o_2 c_2$ szög a μ képsíkszög.

$$\lambda = \cos\mu = \frac{o_2 c_2}{o_2 c_0'} = \frac{o_2 c_2}{o_2 c} = \frac{o_2 c_2}{o_2 e_2};$$

s ez a kör minden pontjának képére és parallelforgatott helyzetére fennáll.



77. ábra

Keressük p_0 megfelelőjét a körképen. $c_0 p_0 v$ metszőnek állandó pontja v, a visszaállitott metsző $c_2 v$ és ebből az $e_2 f_2$-re merőleges $p_0 \omega_2$ affinsugár kimetszi p_2 képpontot.

Legyen $e_2 f_2$ az X, $c_0 d_0$ az Y tengely; $o_2 f_2 = a$; $o_2 c_2 = b$; a parallelforgatott p_0 pontjának koordinátái: $o_2 \omega_2 = x$; $\omega_2 p_0 = y$, akkor az $o_2 \omega_2 p_0$ derékszögű háromszögben: $x^2 + y^2 = a^2$ a kör köponti egyenlete; a körkép p_2 pontjának koordinátái: $x' = x$ és y'

$\frac{y'}{y} = \cos\mu = \frac{O_2C_2}{O_2C_0} = \frac{b}{a}$; $y = y'\frac{a}{b}$ behelyettesitésével

$x'^2 + y'^2\frac{a^2}{b^2} = a^2$, amiből $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ az ellipszis központi egyenlete.

A kör merőleges képe e szerint valóban ellipszis, nagy tengelye a kör fővonal-átmérőjének, kis tengelye az esésvonal-átmérőjének a képe.

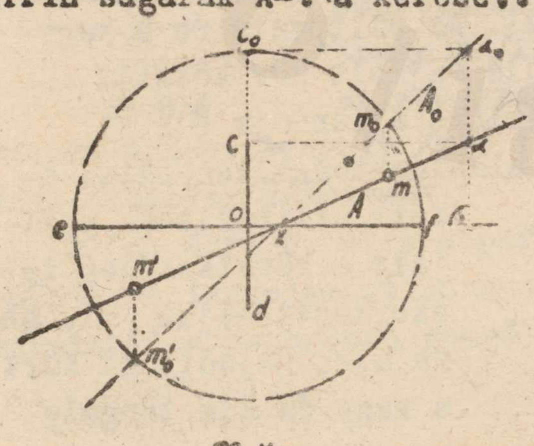
Az ellipszis affinitásban van nagy tengelye fölé rajzolt körrel, aff. tengely a nagy tengely, sugár iránya a kis tengely, affinitás állandó $\frac{b}{a}$.

Az ellipszis p_2-beli érintője a p_0z körérintőnek megfelelő p_2z; $c_2$és d_2-ben az érintő a nagytengellyel parallel, mert c_0 és d_0-ban a körérintő az aff. tengellyel párhuzamos; e_2 és f_2-ben, ugy a kör, mint az ellipszis érintője aff. sugár, azaz kistengely irányu.

A kör pontjainak vetitősugarai a kör sikjával hegyesszöget zárnak be, s igy egy ferde körhengernek alkotói, s ennek az alkotóra merőleges sikmetszete a körkép ellipszis.

29./ Szerkesztések merőleges affinitással. a./ Keresendő ef és cd tengelyei által adott ellipszis metszése A egyenessel. /78. ábra/

Megrajzoljuk az affin kört. c-nek megfelel az affinitásban c_0. Keressük A-nak megfelelőjét a kör rendszerben. Állandó pontja x. A c-beli érintő A-t α -ban metszi, az ezen átmenő affin sugár a c_0-beli körérintőt α_0 -ban találja. α_0 x összekötése adja A_0-t. Ennek a körrel való m_0 és m_0' metszéspontjaiból huzott affin sugarak A-t a keresett m és m' pontokban metszik.

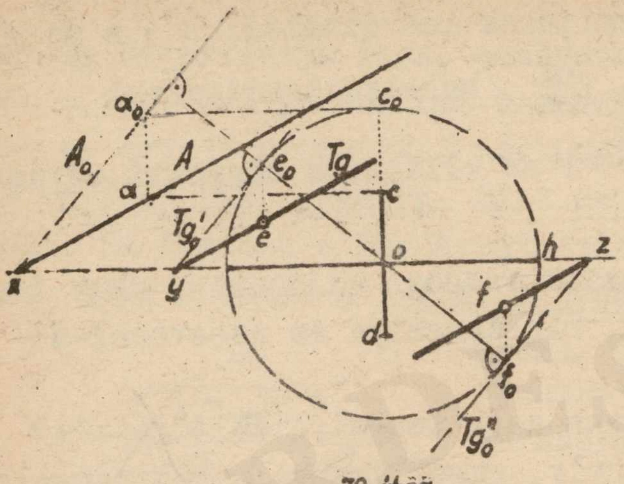


78. ábra

Ha A az o ponton halad át, akkor a metszéspontok közötti darab ellipszis-átmérő. Ennek a társátmérője, a körrendszerben A_0-ra merőleges átmérőnek megfelelője.

Az A metszőegyenes lehet a nagy- vagy kis-tengellyel is párhuzamos. Végezzük el a szerkesztéseket mindezen esetben.

b./ Tengelyeivel adott ellipszisnek adott egyenessel párhuzamos érintői /79. ábra/



79. ábra

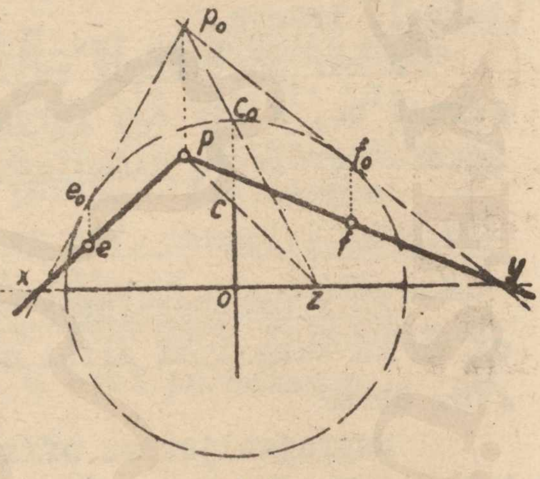
Megrajzoljuk az affin kört, c pontnak megfelelő c_0 és az A-nak megfelel A_0.

Megrajzoljuk a körnek A_0-al parallel érintőit, azaz A_0-ra merőleges körátmérő e_0 és f_0 végpontokhoz tartozó e_0y és f_0z körérintőket.

Az y, illetve z állandó pontokon át meghuzzuk az A-val parallel két érintőt, az érintési pontokat affin sugár irányában e és f-ben kapjuk.

Megjegyzendő, hogy mivel az érintők parallelek, azért e és f pontok összekötése átmérő.

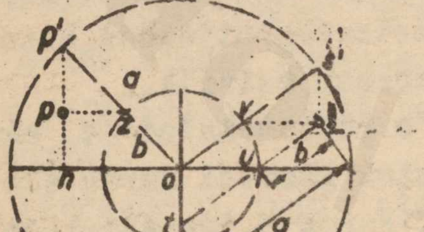
c./ Tengelyei által adott ellipszisnek p pontból huzható érintői /80. ábra/



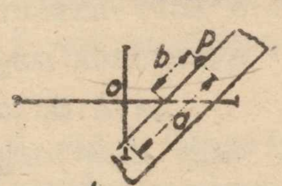
80. ábra

Megrajzoljuk az affin kört, c megfelelőjét c_0-t; majd p-nek a körrendszerbeli p_0 megfelelőjét pcz, illetve zc_0p_0 segédegyenessel. Azután p_0-ból megrajzoljuk a körnek p_0e_0x és p_0f_0y érintőit. Ezeknek megfelelői az ellipszis rendszerben px és py érintők, az érintési e és f pontok affin sugáron vannak.

30./ Szerkesztés két körrel, papirszalaggal. Az ellipszis és a nagytengelye fölé rajzolt kör közötti persp. affinitás állandója $\frac{b}{a}$



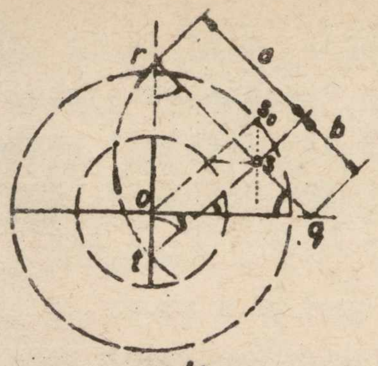
a.)



b.)

81. ábra

Ennek alapján tengelyei által adott ellipszisnek pontjait a következőleg is szerkeszthetjük /81. ábra a./: Rajzoljunk kört a nagy és kis tengely



81. ábra

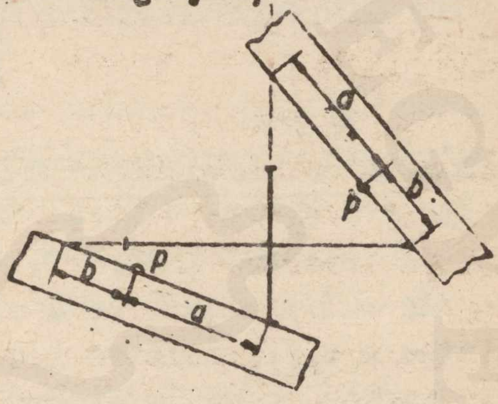
fölé. Huzzuk op′ tetszőleges sugarat. p′-ből a kis tengellyel, z-ből a nagy tengelylyel parallelt. A kettő metszéspontja p ellipszispont. Mert:

$$\frac{p\ n}{p'n} = \frac{b}{a}$$ az affinitás állandó.

Szerkesszünk meg egy s ellipszispontot. Huzzunk s-ből párhuzamosat os′ sugárral, akkor st = os′ = a nagy féltengely és su = vo = b kis féltengely. Ha egy papirszalagra rámérjük a nagy féltengelyt, s ebből kivonjuk a kis féltengely hosszát, azután a szalagot ugy helyezzük el, /81. ábra b./ hogy a nagy tengely szabad vége a kis tengelyen, a kis tengelyé meg a nagy tengelyen legyen, akkor a közös végpont leszurásával ellipszispontot kapunk.

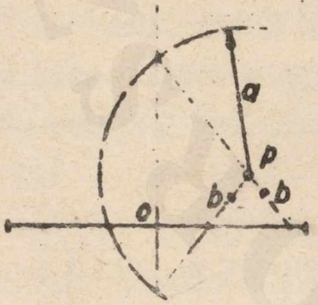
Ha a 81. ábrának megfelelő 82. ábrán s-ből st = a sugárral rajzolt körrel r-ben elmetszük a kis tengely irányát, akkor sr = a, és a jelzett szögek egyenlősége miatt, sq = b.

Ha tehát egy papirszalagra a két féltengely összegét mérjük fel /82. ábra a./ s a kis tengely szabad végét a nagy tengelyre helyezzük, a közös p pont ellipszis pont.



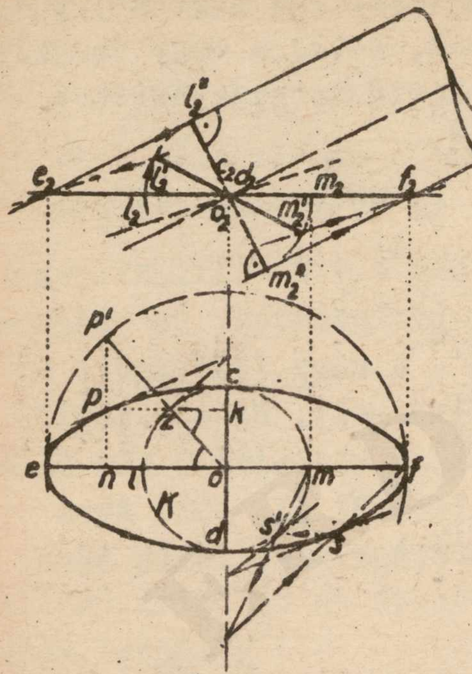
82. ábra a.)

Nagy tengelye /kis tengelye/ és egy pontja által adott ellipszisnek kis tengelyét /nagy tengelyét/ keresve /83. ábra/, megrajzoljuk a kis tengely irányát, s az ellipszispontból a nagy tengely /kis tengely/ félhosszával rajzolt körrel elmetszük a kis tengely /nagy tengely/ irányát. A metszéspontokat az ellipszisponttal összekötjük, s ezeknek az ellipszispont és a nagy tengely /kis tengely/ közötti darabja a kis tengely /nagy tengely/ félhossza.



83. ábra

A 81. ábra b. elve képezi alapját a legegyszerübb ellipszográfnak. A tengelyeket hornyok helyettesitik, a papirszalagot csuszkával a horonyban mozgó léc.



84.ábra

31./ Az ellipszis, mint ferde körkép. A 84. ábrán a vizszintes sikban levő ellipszis egy szerkesztett pontja p. A jelzett szögek egyenlők, onp' és ozk háromszögek hasonlók, s igy:

$$\frac{n\,o}{z\,k} = \frac{p\,k}{z\,k} = \frac{o\,p'}{o\,z} = \frac{a}{b},$$

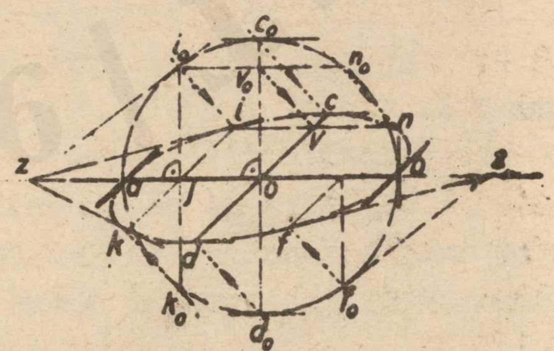
s ez a viszony az ellipszis és a kistengely fölé rajzolt kör minden megfelelő pontpárjára, mint p és z; e és l fennáll, azaz: az ellipszis merőleges affinitásban van kis tengelye fölé rajzolt körrel, affin tengely a kis tengely, sugárirány a nagy tengely.

Ez térbelileg azt jelenti, hogy az ellipszis cd átmérőjü oly körnek ferde párhuzamos vetülete, amelynek K kör a cd körül az ellipszis sikjába forgatott helyzete, s a vetitési iránya Π_2 -vel párhuzamos.

Az ellipszisnek és a sikjában levő K körnek elölnézete a vizszintes $e_2 o_2 f_2$, illetve $l_2 o_2 m_2$. Forgassuk K kört cd átmérője körül, amikor is az lm átmérő l és m végpontjai forgáskörének felülnézete a nagy tengelyen van, elölnézete meg $o_2 l_2$ sugaru kör. Ha l pont l'-be jut, akkor a K kör elölnézete $l_2' m_2'$ és a vetitési irány elölnézete $l_2' e_2$ illetve $m_2' f_2$. A Π_2 -vel párhuzamos vetitősugarak oly ferde körhengert alkotnak, amelynek a K kör l' m' helyzete a vezérköre. Az ellipszis a hengernek egy sikmetszete.

Ha l végpont l"-be jut, K kör elölnézete $l_2'' m_2''$, az $l_2'' e_2$ merőleges a körképre, a vetitési irány merőleges a körsikra, s igy a vetitősugarak egy egyenes körhengert alkotnak, amelynek az ellipszis egy sikmetszete. A sikmetszet cd kis tengelye egyenlő a henger átmérőjével.

Mindkét vetitésnél az elforgatott K kör cd és lm társátmérőpárjának képe a cd-n átmenő sikon, az ellipszis cd és ef tengelyeit adja, mert a vetitési irányok cd-re merőleges sikkal párhuzamosak.



85.ábra

Más irányu vetitésnél azonban a kapcsolt körátmérők - az osztásviszony állandóságának megfelelően - a képellipszisnek csak társátmérői lesznek, de kör és ellipszis, illetve parallelforgatott kör és ellipszis affin vonatkozása változatlanul fennáll.

A 85. ábrán ab egy körnek a papir sikján levő átmérője. Valamilyen irányu vetitésnél legyen az ab átmérő cd társa c, végpontjának képe c, akkor co = od és cd a c,d, társnak a ferde képe.

Forgassuk a kört ab átmérője körül a papir sikjába, akkor $c_o d_o$ az ab-re merőleges átmérő, ab az affin tengely, c és c_o illetve d és d_o megfelelő pontok, összekötésük az aff. sugár iránya.

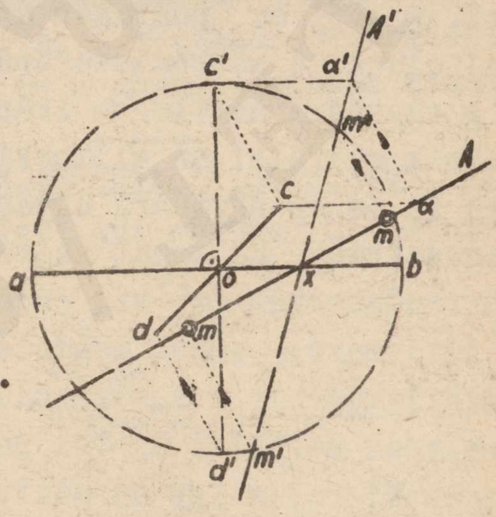
A kör $c_o d_o$ átmérőjének c_o és d_o végpontjában az érintők párhuzamosak ab-vel, s igy a nekik megfelelő c és d pontbeli ellipszisérintők is párhuzamosak ab átmérővel.

a és b pontokban a kör érintői $c_o d_o$ átmérővel párhuzamosak, s igy megfelelői a $c_o d_o$-nak megfelelő cd ellipszisátmérővel párhuzamosak.

A $c_o d_o$ átmérővel párhuzamos és j-ben felezett $i_o k_o$ körhurnak megfelel a j ponton átmenő és cd-vel parallel egyenesen az i_o és k_o-ból huzott affin sugarak által kimetszett ik ellipszishur, s ezt j felezi. Az ab-vel párhuzamos és v_o-ban felezett $i_o n_o$ körhurnak megfelel az ab-vel parallel és cd-nek v pontja által felezett in ellipszishur.

A kör $i_o z$ érintőjének megfelelője a zi ellipszisérintő.

Ezek szerint ab és cd az ellipszis konjugált átmérőpárja. cd a vetités iránya szerint rövidebb, vagy hosszabb lehet, mint ab, s igy mondhatjuk, hogy az ellipszis ferde affinitásban van a társátmérői egyike fölé rajzolt körrel, affin tengely ez az átmérő, az affin sugár irány a körtárs- és az ellipszisátmérők végpontjainak összekötése.

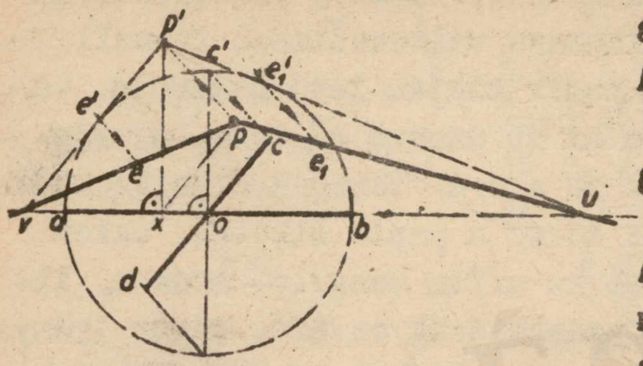


86. ábra

32./ Szerkesztések ferde affinitással. Tengelyszerkesztés.

a./ Keressük A egyenes metszését ab és cd társátmérővel adott ellipszissel /86. ábra/.

Megrajzoljuk ab fölé az affin kört. cod-nek megfelel az ab-re merőleges c' od' körátmérő. Aff. sugárirány cc', illetve dd'. Megszerkesztjük A-nak megfelelőjét a körrendszerben. Állandó pont x. Segédegyenes c-n át ab-vel parallel, ennek megfelel c'-ön



87. ábra

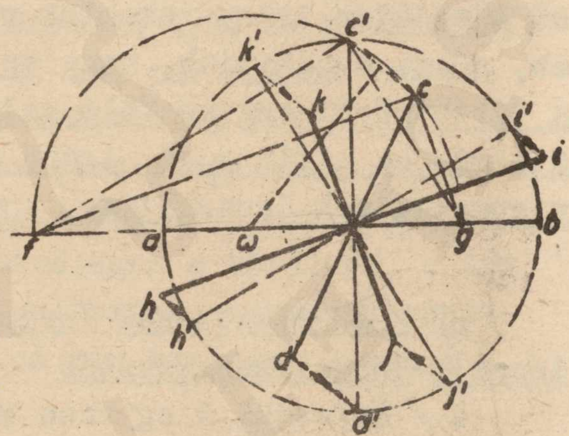
átmenő ab-vel párhuzamos egyenes. A segédegyenesnek az A-val való α metszéspontjának affinitás sugárirányban megfelel α'. Tehát α'x összekötése megadja A'-t. A'-nek a körrel való m' és m" metszéspontjait aff. irányban az A-ra vetitve, a keresett m metszéspontokat kapjuk.

b./ Megszerkesztendők ab és cd társátmérői által adott ellipszisnek p-ből vonható érintői /87. ábra/.

Megrajzoljuk az affin kört, megállapitjuk cc' affin sugárirányt. Az oc-vel párhuzamos px-nek megfelel az oc'-el parallel xp' és pp' affin sugárirány. p'-ből megrajzoljuk a kör p'v és p'u érintőit. Az érintési pontok e' és e,'. pv és pu a megfelelő ellipszisérintők, e és e, érintési pontok aff. sugárral.

c./ Megszereksztendők társátmérői által adott ellipszis tengelyei /88. ábra/. ab és cd társátmérők.

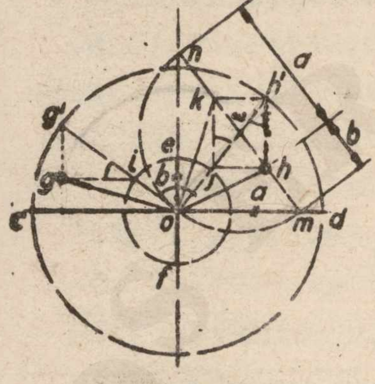
Megrajzoljuk az affin kört, megállapitjuk a cc' aff. irányt. A feladat megoldásának lényege: a kör rendszerben megállapitani olyan egymásra merőleges irányt, amelynek megfelelője az ellipszis rendszerben szintén merőleges egymásra. Alkalmazzuk a Thales kört. cc' darabot merőlegesen megfelező egyenes az aff. tengelyt ω-ban metszi. ω-ból cc' pontokon át félkört rajzolunk. A körrendszerben fc' és c'g egymásra merőleges irányok, ezeknek megfelel az ellipszisrendszerben fc és cg egymásra ugyancsak merőleges irány. Ha tehát felvesszük a körrendszerben fc'-vel párhuzamos



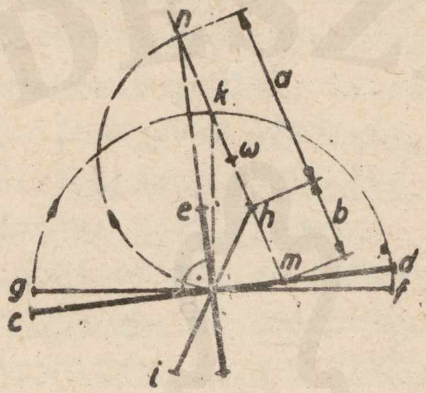
88. ábra

h'i' átmérőt, ennek megfelelője az ellipszisrendszerben az fc-vel párhuzamos hi; s a körrendszerben c'g-vel párhuzamos k'j' átmérőt, amelynek megfelel cg-vel párhuzamos kj. Az előzők szerint hi merőleges kj-re, s igy az ellipszis tengelyei.

33./ A Ritz-féle tengelyszerkesztés. A 89. ábra a./-ban cd = 2a az ellipszis nagy tengelye, ef = 2b a kis tengely. og' és oh' az affin körnek egymásra merőleges sugarai, g és h ellipszis-pontok, go és ho az ellipszis társátmérőinek a fele. Ha az oig'g alakzatot o körül 90^0-al elforgatjuk, ugy oig' az ojh'-re jut, g pont k-ba, go átmérőfél ok-ba jut és a jelzett szögek egyenlősége miatt, kh'hj egy derékszögü négyszög, középpontja ω . A meghosszabbitott kh négyszögátló az ellipszistengelyeket n és m-ben metszi. Akkor hn = h'o = a és hm = oj = b, valamint ωm = = oω = ωn, miért is ω-ból o-n át rajzolt kör áthalad m és n pontokon. Az og félátmérő elforgatott helyzete ok, és og merőleges ok-ra.



89. ábra a.)



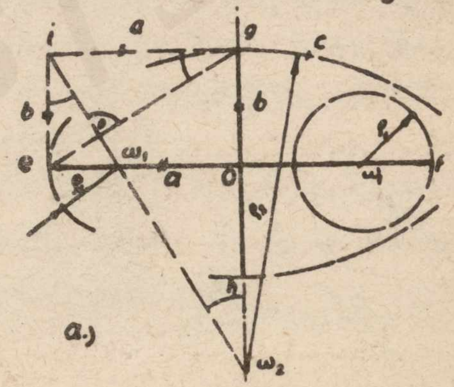
89. ábra b.)

gf és hi társátmérői által adott ellipszis tengelyeit a Ritz-féle eljárással a 89. ábra a. alapján a következőleg szerkesztjük meg /b. ábra/.

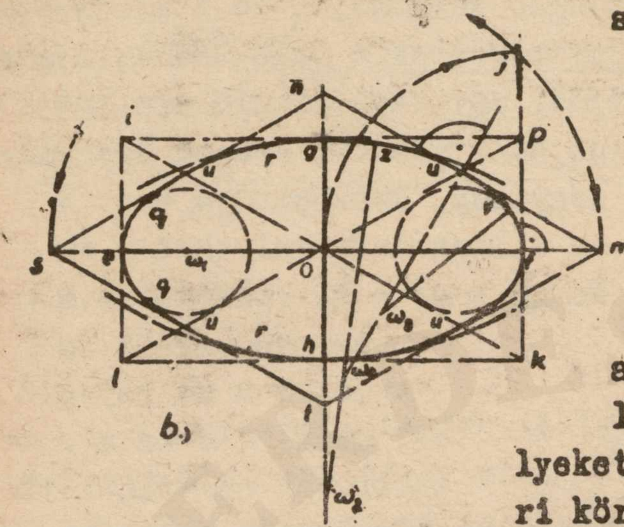
o-ban gf átmérőre merőlegest állitunk, s erre o-tól rámérjük og-t, kapjuk k pontot. A kh távolságot ω -ban megfelezzük, s ebből, mint középpontból o-n át kört rajzolunk. Ez hk egyenest n és m pontokban metszi. mo a nagy tengely iránya, félhossza hn; a kis tengely iránya on, félhossza hm.

34./ Az ellipszis görbületi körei, rajzolása. A 25. alatt megállapitottuk, hogy a csucsbeli görbületi köröknek gyakorlatilag nagy ivük közös a görbével, miért is a görbe megrajzolásánál előnyösen használhatók fel.

A sikanalitikából ismeretes /a későbbiekben igazoljuk/, hogy a nagy tengelyvégi főcsucsnál a görbületi kör sugara $\rho_1 = \frac{a^2}{b}$; a kis tengelyvégi csucsnál $\rho_2 = \frac{b^2}{a}$; ahol a = a nagy féltengely; b = a kis féltengely. Megszerkesztésük a következő /90. ábra a./: i pont a tengelyvégi gi és ei érintők metszéspontja. i-ből az eg hurra állitott merőleges a tengelyeket a görbületi körök ω_1 és ω_2 középpontjában metszi. ω_1e = ρ_1 , és



a.)



b.)

90. ábra

$\omega_2 g = \rho_2$. Ugyanis a jelzett szögek egyenlősége miatt:

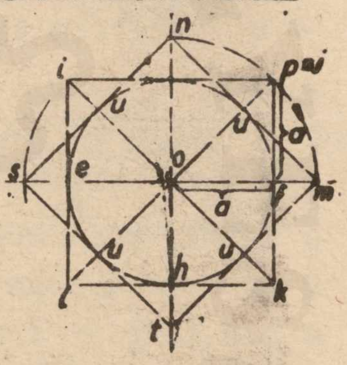
$ei\omega_1\Delta \sim eig\Delta$ -höz

$$\frac{\rho_1}{b} = \frac{b}{a} \qquad \rho_1 = \frac{b^2}{a}$$

$ig\omega_2\Delta \sim eig\Delta$ -höz

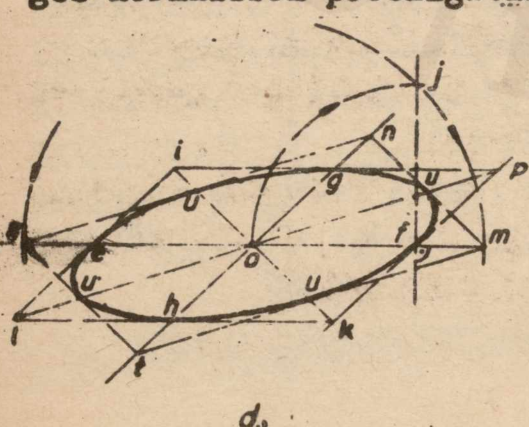
$$\frac{\rho_2}{a} = \frac{a}{b} \qquad \rho_2 = \frac{a^2}{b}$$

Az ellipszis rajzolásához az ösmertetett eljárások valamelyikével megszerkesztjük a tengelyeket, s ezekkel a csucsbeli görbületi köröket. Az átellenes csucsnál az egymás között egyenlő qeq; rgz iveket /b. ábra/ a görbületi körökkel helyettesitjük. Ezen körivek közötti ellipszisrészt görbevonalzónak <u>ugyanazon, még pedig olyan ivével rajzoljuk meg, amelyik a q, r csatlakozó pontokban érinti a köríveket</u>. Ezen görbe ivnek kiválasztását elősegiti az ilpk érintőnégyszög ik és lp átlóin levő u.u ellipszispontokban az érintők megrajzolása. Mivel az ellipszis oe sugaru kör képének tekinthető, azért az u pontok , az érintők m és s pontjai a kör szerint szerkeszthetők meg. /c. ábra/ A körnél om = os félátló egyenlő az "a" befogó hosszuságu egyenlőszáru derékszögü háromszög oj átfogójával, s az u-beli érintők párhuzamosak ik, illetve lp átlókkal. A b. és d. ábrákban ezek alapján szerkesztettük meg az u pontokat és ezekben az érintőket. A görbevonalzó iveket a rombusoldalak u-ban érintik.

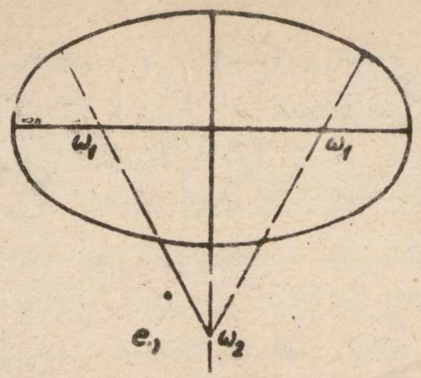


c.)

Türhető a hiba, ha a görbületi körök közötti iveket körivvel helyettesitjük /b. ábra jobb fele/. u-ban az um érintőre merőleges normálison próbálgatással megállapitjuk az ω_4 görbületi kört érintő körnek ω_3 középpontját. A köriv uv. Azután az u-beli normálison az ω_2 görbületi kört is érintő körnek ω_4 középpontját. Az iv uz. /A görbületi kör u-ban metszi az ellipszist, mert a görbültség z-től v-felé növekedik./

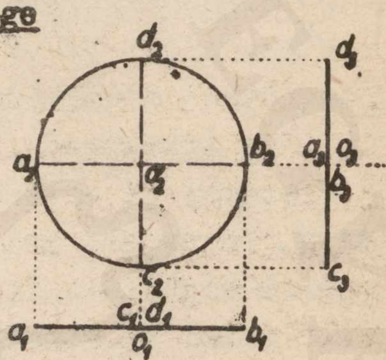


d.)



A gyakorlati alkalmazásoknál a kissé megnagyobbitott nagy-tengely végi és csökkentett kistengely végi görbületi kör sugarakkal megrajzolt görbe vonal kielégitően helyettesitheti az ellipszist /e. ábra/.

35./ A kör ábrázolása és vetett árnyéka. A képsikiránnyal párhuzamos áiku körnek a képe kör, a vele kapcsolatos kép átmérő hosszu távolság /91. ábra/. Ezen különleges helyzettől eltekintve,,a kör társátmérőpárjának képe a képellipszis tengelyei, vagy társátmérői, s ezekkel az ellipszis megszerkeszthető. A kör ábrázolásának lényege a kör társátmérőpárjának ábrázolása.

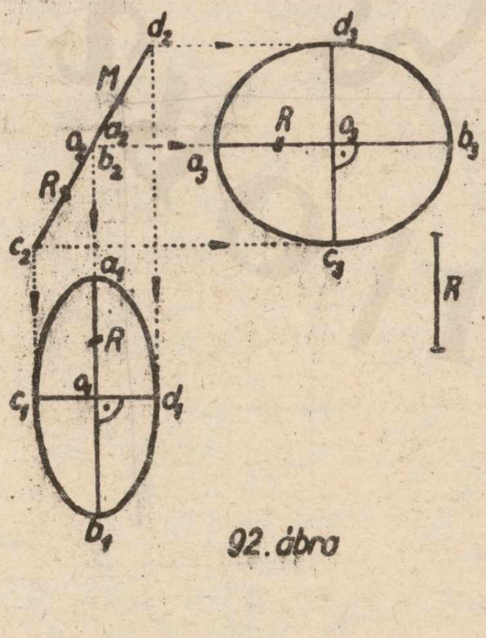


91. ábra

Ábrázoljuk az M második vetitősikban levő $o/o_1\ o_2\ o_3/$ középpontu R sugaru kört /92. ábra/.

A kör sikja első fővonalán levő ab átmérőjének elölnézete pont, felül- és oldalnézete valódi nagyság, 2R.

Ennek a körátmérőnek cd társa a körsiknak első esésvonala, ez egyuttal π_2 -vel párhuzamos, s igy c_2d_2 elölnézete valódi nagyság, 2R. c_1d_1 illetve c_3d_3 a rendezőkre merőleges. a_1b_1 és c_1d_1, illetve a_3b_3 és c_3d_3 a képellipszisnek tengelyei, az ellipszisek szerkeszthetők.



92. ábra

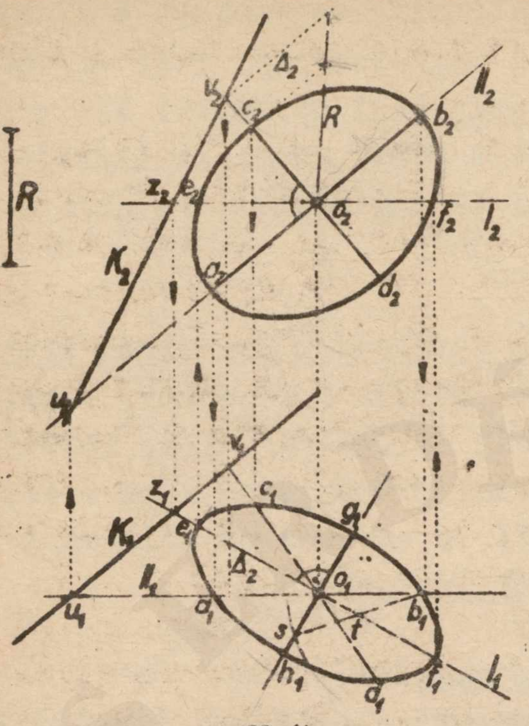
o a középpontja, R a sugara az oK sikban levő körnek /93. ábra/. Ábrázolandó a kör.

Az ou második fővonalon levő ab körátmérő a_2b_2 második képe valódi nagyság = 2R. a_1b_1 rendezővel.

ab-nek cd társa az ov $/o_2v_2 \ldots o_1v_1/$ második esésvonalon van. Erre R-t második diff. háromszöggel mértük rá. c_1d_1 rendezővel.

a_2b_2 és c_2d_2 a második képellipszis tengelyei, a_1b_1 és c_1d_1 az első képnek társátmérőpárja.

Az első képellipszis ef nagytengelye a körsiknak oz első fővonalán van. $e_1 o_1 = o_1 f_1 = R$. Rendezővel $e_2 f_2$. Az ef-nek hg társa első esésvonalon van. Végpontjai az előzők szerint diff. háromszöggel határozhatók meg. De mivel a_1; b_1; c_1; d_1 ellipszispontok, a kistengely félhossza a 83. ábra szerint egyszerübben is megszerkeszthető. E szerint pl. b_1 pontból a nagy féltengely $e_1 o_1 = R$ hosszával a kistengely irányát s-ben elmetszve, $b_1 s$-nek bt darabja a kis féltengely hossza, s igy $o_1 g_1 = o_1 h_1 - b_1 t$.

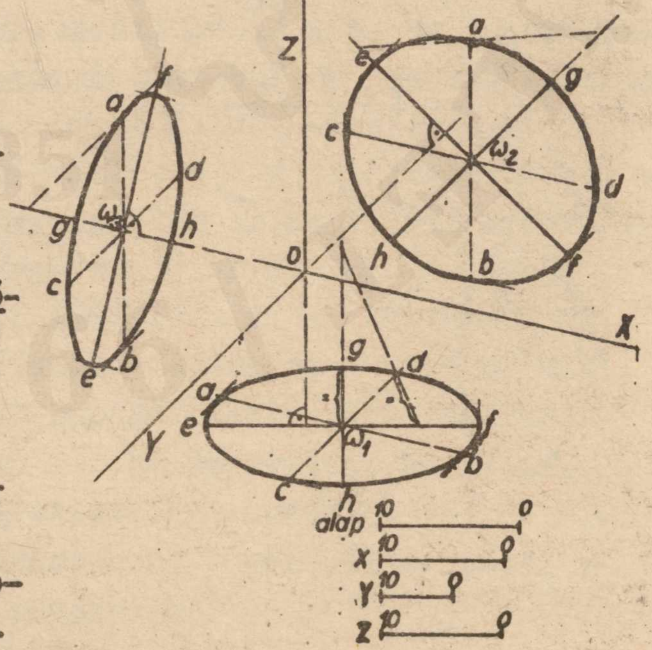


93. ábra

Ugyanigy szerkeszthető meg a diff. háromszög mellőzésével az $a_2 b_2$ nagytengely és e_2 vagy f_2 pontok alapján a fél kistengely $o_2 c_2$ hossza.

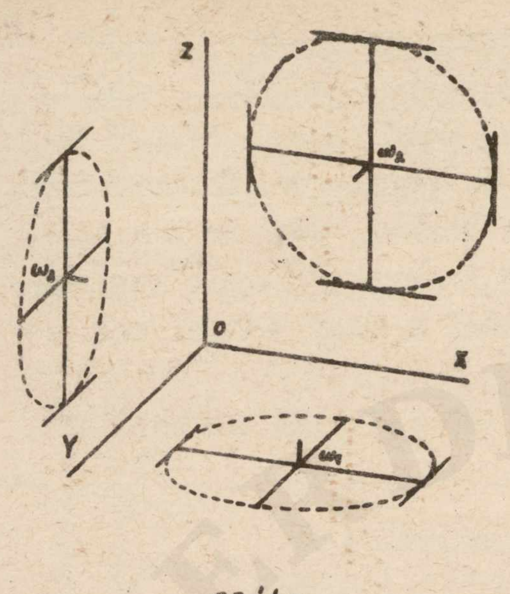
Amint az előzőkből tudjuk, ferde vetitésnél a kör társátmérőpárjának a képe a képellipszis társátmérőpárja lesz. Ha tehát egy kör vetett árnyékát keressük egy sikon, akkor megszerkesztjük a kör társátmérőpárjának vetett árnyékát a sikon /pl. 93. ábrán ab és cd-nek/, s ezek a vetett-árnyék-ellipszis társátmérői lesznek.

36./ A kör axonometrikus képe. A koordináta sikokban, vagy azokkal párhuzamos sikokban levő kör képe általában oly ellipszis, amelynek társátmérői a térben egymásra merőleges tengelykereszt tengelypárjainak képeivel párhuzamosak, s hosszuk akkora, mint a körátmérőnek szerkesztett, illetve választott képhossza.



94. ábra

A 94. ábrán merőleges axonometriában adott a tengelykereszt, valamint az ösmert módon



95. ábra

megszerkesztett tengelyirányu léptékek.

Az XY sikon levő ω_1 középpontu R = 10 sugaru körnek X-el párhuzamos átmérője ab, képhossza $2 \times 10_x$; az Y-al párhuzamos cd-nek hossza $2 \times 10_y$. A képellipszisnek ef nagytengelye az XY siknak Z-re merőleges fővonalán van és hossza 2×10 az alaplépték szerint. /valódi nagyság/ A Z irányu gh kistengely hossza az ef nagytengely és pl. d /vagy a; b; c/ felhasználásával ismert módon szerkeszthető. Tehát a képellipszis tengelyeihez egy koordináta tengelyirányu átmérő kell. /Egyébként gh hossza többek között az YX sik parallelforgatásával is megszerkeszthető./

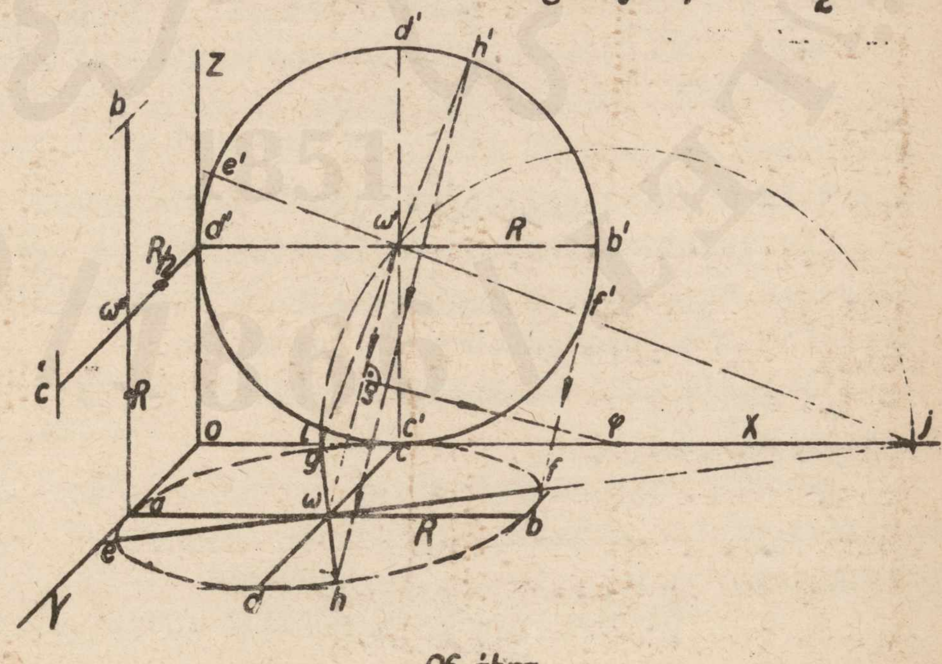
Az ábra a ZX és ZY sikokban levő R = 10 sugaru körök ax. képét is mutatja.

Általános ferde axonometriában /95. ábra/ a tengelyirányu körátmérőknek tetszőlegesen választott képhosszai a képellipszisnek társátmérői.[+] A tengelyek pl. Ritz-eljárással szerkeszthetők.

Kavalier perspektivában /96. ábra/ a ZX /vagy azzal parallel/ sikon levő ω' középpontu R sugaru kör képe kör.

Az XY sikon levő körnek ab = 2R az X tengellyel, cd = $\frac{1}{2}$.2R az Y tengellyel párhuzamos társátmérőinek a képe, s ezek az ellipszis társátmérői.

Az XZ sikbeli ω' kör ugy is tekinthető, mint az XY-beli körnek X körüli leforgatott helyzete, s igy a kettő persp. affini-



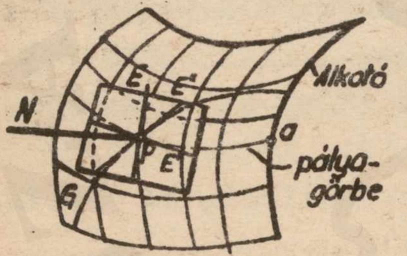
96. ábra

[+]Lásd: Stasney: "Vázolás minta nélkül" tásban van, aff. tengely az X, sugár irány ω' ...ω. Mindkét mezőben a megfelelő derékszöget Thales körrel kapjuk, ennek középpontját az $\omega\omega'$ távolságot ρ -ban merőlegesen felező egyenes metszi ki. X-ből. ρ -ből ω' és ω pontokon áthaladó kör X-et i és j-ben metszi, ω' i és ω' j a körben, ω i és ω j az ellipszisben egymásra merőleges átmérő irányok. h'-nek megfelelő h a kis tengelynek, f'-nek megfelelő f a nagy tengelynek egyik végpontja.

Ugyanigy megszerkeszthetők az ω' körrel a ZY sikbeli ω'' kör képének tengelyei is.

IV. G ö r b e l a p o k .

37./ A görbe lapokról általában. Valamely görbe mozgása által általában oly felület keletkezik, amelynek pontjai nincsenek egy sikban, egy görbe felület. A mozgó görbét, illetve annak mozgásközbeni helyzeteit a lap alkotóinak nevezzük /97. ábra/. Ezek a lapot boritó egyik görbesereget alkotják. Az alkotó minden pontja, pl. a, egy-egy pályagörbét ir le. E pályagörbék alkotják a lapot boritó második görbesereget.



97. ábra

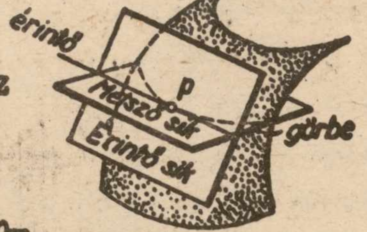
A lap bármely p pontján áthalad egy alkotó, s egy pályagörbe. E két görbének p-beli érintői a lapot is érintik, s az általuk meghatározott sik a lapnak p-beli érintősikja. Ez a sik tartalmazza a lap p közönséges pontján áthaladó összes lapgörbék érintőit is, miért is a sikot érintők sikjának is nevezzük.

Az érintési pontban az érintősikra, s igy a benne levő érintőkre is merőleges a lapnormális. A lapnormális az érintési ponton áthaladó lapgörbéknek is normálisa.

A lapnormálison áthaladó sikok a görbe lap normálsikjai.

Abból, hogy az érintősik tartalmazza az érintési ponton áthaladó lapgörbék érintőit, következik:

a./ Az érintősikot meghatározza az érintési ponton áthaladó két tetszőleges lapgörbe

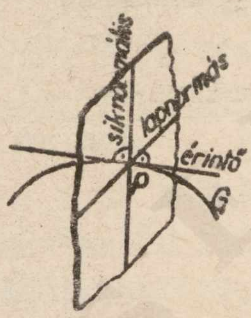


98. ábra

érintője.

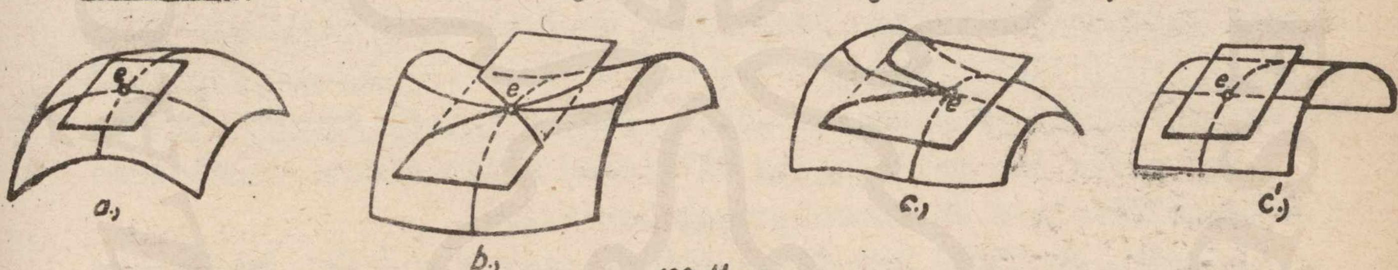
b./ Ha görbe lapot sikkal metszünk /98. ábra/, a metszet egy sikgörbe, s ennek p pontbeli érintője a metszősikban van. De a görbe lapgörbe is, s igy érintője a lapnak p-beli érintősikján is van; azaz az érintő a metszősik és lapérintősik metszőegyenese.

c./ A metszésgörbe érintője a következő megfontolással is nyerhető /99. ábra/. A lapérintősikban levő érintő merőleges a lapnormálisra, a metszősikban is levő érintő merőleges a siknormálisra is, azaz a metszésgörbe érintője merőleges az érintéspontbeli lapnormális és siknormális által meghatározott normál sikra.



99. ábra

Ha az érintősiknak az érintési pont szomszédságában nincs több közös pontja a felülettel /100. ábra a./, a lap e-ben tojásszerüen görbült, elliptikus pont; ha az érintősik egyuttal metszi a lapot oly görbében, melynek e kétszeres pontja /b/, a lap e-ben nyeregszerüen görbült, hyperbolikus pont; ha a kétszeres pont két érintője összeesik, s az érin-

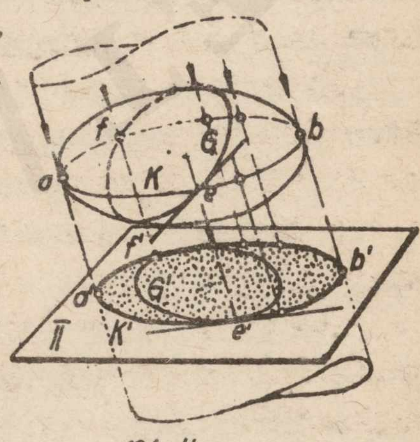


100. ábra

tősikkal kimetszett görbének "e" visszatérő pontja /c/, vagy a két görbe ág is összeesik /c'/, e pont parabolikus. Utóbbi esetben a sik egyenes alkotó mentén érinti a lapot.

Ha egy lapon elliptikus és hyperbolikus pontok is vannak, ugy vannak parabolikusak is, s ezek elválasztják a két elsők seregét.

A görbe lap vetitésénél /101. ábra/ a vetitősugarak egy serege érinti a lapot, pl. a, b, e-ben. Az érintőpontok összessége egy K lapgörbe, a kontur, s ez elválasztja a lapnak a nézési iránynál látható és fedett részét. Mivel a görbe lapot



101. ábra

K pontjaiban érintő sikban az érintő vetitősugár is benne van, s igy az érintősik vetitő, mondhatjuk, hogy a kontur a görbe lap ama pontjainak összessége, amelyben a lap érintője vetitősugár, s az érintősik vetitő.

A K menti érintő vetitősugarak, egy érintő-vetitőhengert adnak, s ennek a lap K menti érintő vetitősikjai ugyancsak érintősikjai. Egy képsik a vetitőhengert K kontur K' képében metszi, s mivel a lap minden pontjának vetitősugara a hengeren belül van, minden pont képe is K' képen belül lesz, vagyis a K kontur K' képe a képterület határa, képhatár, képkörrajz, képszél.

Egy G lapgörbe látható és fedett részét elválasztó e és f pontok K görbén vannak. Mivel G-nek e és f-beli érintői benne vannak a lapot e illetve f-ben érintő vetitősikban, azért G érintőjének a képe érintője K'-nek, G' érinti K'-t. Általában: a lapgörbék képe érinti a képhatárt; a képhatár a lapgörbék képeinek burkoló vonala.

Ha a vetitősugár fénysugár, akkor a K görbe a lap megvilágitott és önárnyékos részének elválasztó vonala, az önárnyékhatár, s ez a lap ama pontjainak összesége, amelyekben a lapérintő fénysugár, az érintősik fénysik. A K mentén érintő fényhenger metszése az árnyékfelfogó sikkal a sötét folt, a vetett árnyék határa.

Egy görbe lap sikmetszete általában a lap alkotó vonalainak a metszősikon levő döféspontjainak összesége.

Egyenes és görbe lap döféspontjai azok a pontok, amelyekben az egyenesen átfektetett segédsik által a lapból kimetszett görbe az egyenest találja.

Ha a görbe lapot leiró alkotó görbe valamint annak mozgása törvényszerü, a származott lap is törvényszerü. A törvényszerü lapok lehetnek algebraiak és transcendensek. Az a szám, amely megadja, hogy egy algebrai görbe lapot egyenessel legfeljebb hány pontban találhatunk, a lap rendszáma. Másodrendü lapot, mint a gömb, forgáshenger, forgáskup egyenessel legfeljebb két pontjában találhatjuk.

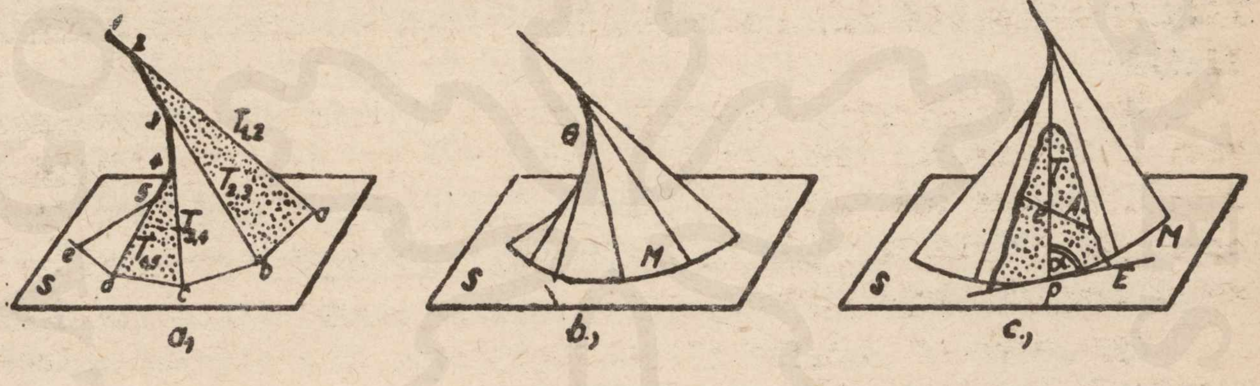
A görbe lap sikmetszetének rendszáma egyenlő a lap rendszámával. Igy másodrendü lap sikmetszete másodrendü sikgörbe, mert a sik bármely egyenese a lapot, s igy a metszetgörbét is legfeljebb két pontban metszheti.

A görbe lapok különféle szempontból osztályozhatók. Igy pl. a lapalkotó mozgása szerint osztályozva, vannak forgáslapok. Ezek az alkotónak egyenes körüli forgásából keletkeznek, a pályagörbék körök. Pl. gömb, forgáshenger. Az alkotónak tengelykörüli csavarmozgásából csavarlapok keletkeznek, a pályagörbék csavarvonalak.

Csoportosithatók a lapok az alkotók szerint, ez esetben, ha az alkotóvonal egyenes, a lap egyenesvonalu lap.

A 102. ábra a./-ban 1.2.3.4... egy térbeli tört vonal /csucsai nincsenek egy sikon/. Oldalainak $T_{1,2}$; $T_{2,3}$; $T_{3,4}$ ... meghosszabbitásai sikrészekből álló tört lapot adnak. A sikrészek alkotói /élei/ egymást metszik; $T_{1,2}$ és $T_{2,3}$ metszéspontja 2; $T_{2,3}$ és $T_{3,4}$ metszése 3 ... stb. A tört lapot S sik abcde tört vonalban metszi.

A törtlapnak $T_{1,2}$ és $T_{2,3}$ közötti sikrésze $T_{2,3}$ körül forgatva, a $T_{2,3}$ $T_{3,4}$ sikrész sikjába forgatható. Az igy egy sikba forgatott két sikrész $T_{3,4}$ körül forgatva $T_{3,4}$ $T_{4,5}$ sikrész sikjába hozható, stb. Vagyis az egész tört lap egy sikba teritható, sikbafejthető.



102. ábra

Ha az 1.2.3 törtvonal 1.2.3 ... csucsi egymáshoz közeledve határhelyzetben egymáshoz végtelen közel jutnak, s ugyanakkor $T_{1,2}$ és $T_{2,3}$; $T_{2,3}$ és $T_{3,4}$ közötti szög végtelen kicsi lesz, az 1.2.3 törtvonalból G térgörbe /b. ábra/, a $T_{1,2}$; $T_{2,3}$; $T_{3,4}$ ... élekből a G görbének egymást e határhelyzetben is metsző szomszédos érintői, egy görbe lapnak egyenes alkotói lesznek. Az egymást metsző szomszédos alkotók által képezett sikelemek a közös alkotó körül most is egymás sikjába forgathatók, a lap sikbafejthető.

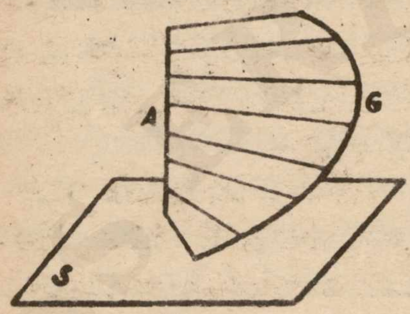
A sikelemet tartalmazó sik /c. ábra/ tetszőleges A egyenesének a lappal az a két végtelen közeli pontja közös, amelyekben A a sikelem két végtelen közeli alkotóját metszi. A tehát érinti a lapot e-ben, miért is a sik is érinti a lapot az alkotó bármely pontjában, azaz az alkotó teljes hosszában.

Összefoglalva: Az egyenesvonalu lap sikbafejthető, ha szomszédos alkotói egymást metszik; az érintősik a lapot az alkotó teljes hosszában érinti.

Ebből következik, hogy a sikbafejthető lap konturja egyenesek, alkotók. Sikbafejthetőek a kupok és hengerek.

A p ponton átmenő S sik a lapot M görbében, az érintősikot meg M-nek E érintőjében metszi. Ha a görbe lapot az ET érintősikba boritjuk, akkor ugy T alkotó, mint E érintő mozdulatlan, α szögük változatlan, s nem változtatja helyét M-nek E-n levő két végtelen közeli pontja sem, s igy E érintője marad a lappal együtt az érintősikra teritett M-nek is. Vagyis:

A lapgörbe érintőjének és az érintési ponton átmenő alkotónak szöge a kifejtésben nem változik.



103. ábra

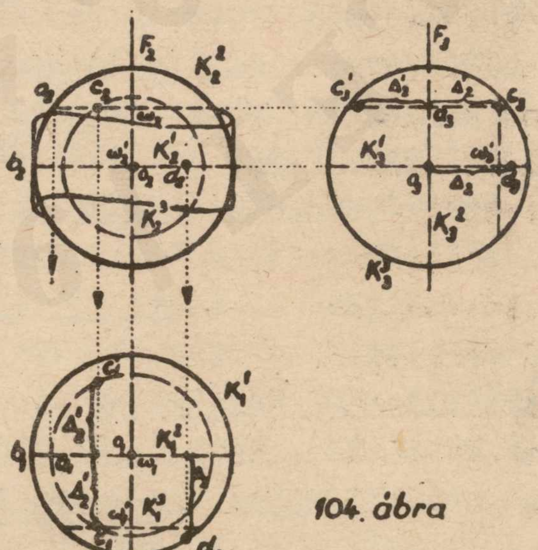
Ha a végtelen közeli alkotók kitérőek, s igy azokon át sik nem fektethető, a felület nem fejthető sikba, torzfelület. A 103. ábrán az S sikkal párhuzamos alkotók A-t és G-t metszik.

Osztályozhatók a lapok rendszám szerint is. A gyakorlati alkalmazás szempontjából legfontosabbak a másodrendü lapok, valamint egynéhány csavarlap.

V. A gömb+.

38./ A gömb ábrázolása. Pont a gömbön. Gömböt kapunk, ha egy kört egy átmérője körül megforgutunk. Legyen a kör sikja K_2 -vel párhuzamos /104. ábra/, második képe K_2^2, első képe a körátmérő hosszu K_1^2 távolság.

Ha e kört függőleges F átmérője körül forgatjuk, ugy a kör kerületének minden pontja, pl. "a" egy gömbi kört, u. n. párhuzamos kört ir le, ω középpontja F-en van és rádiusa aF, tehát a kör első képe valódi nagyság, második képe tá-


104. ábra

+Lásd: Ábr. geom. I. 53. pontot is.

volság.

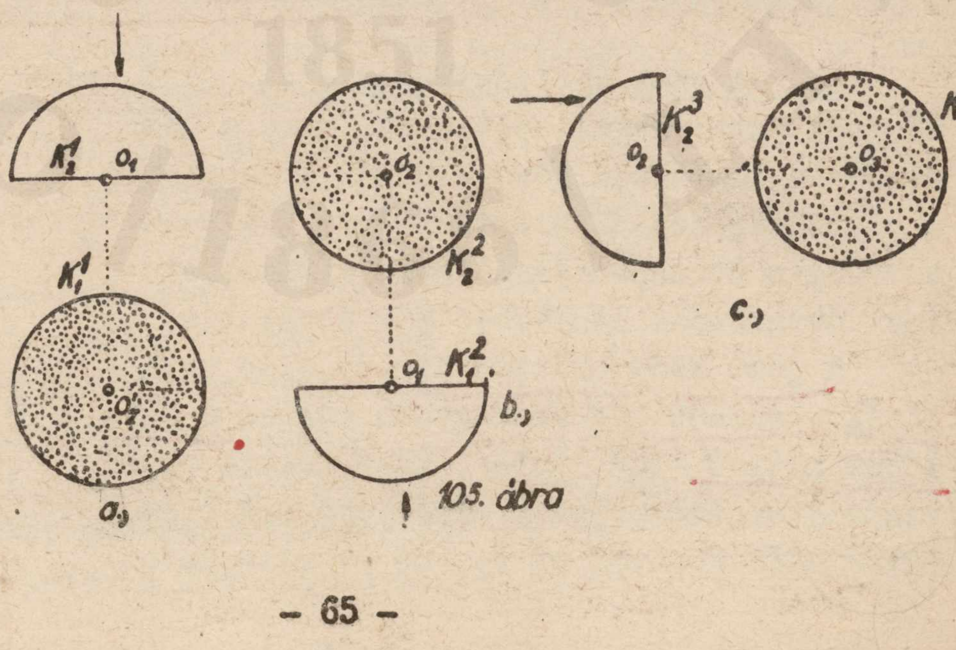
A legnagyobb kört a körátmérő b végpontja irja le. Jelöljük ezt a kört K^1-el. K_1^1 kör, K_2^1 átmérő hosszu távolság. b pontban az érintő függőleges, azaz első vetitősugár, s ilyen irányu marad a körnek a forgatása közben is. Azaz a "b" által leirt K^1 legnagyobb kör a gömbnek ama pontjait adja, amelyekben a gömbi érintők első vetitősugarak, illetve az érintősikok első vetitők, tehát a valóságos első kontur. E konturkör sikja merőleges az első vetitési iránnyal párhuzamos körátmérőre. Azaz egy egyenessel párhuzamos érintősikok érintési pontjainak összesége, vagyis <u>párhuzamos vetitésnél a kontur, vagy parallel megvilágitásnál az önárnyékhatár az a legnagyobb gömbi kör, főkör, melynek sikja a vetitési irányra, illetve a fényirányra merőleges</u>.

E szerint a gömb második konturja az a főkör, melynek sikja a gömb második vetitő átmérőjére merőleges, ez a K^2 kör. Harmadik konturkörének sikja merőleges a gömbnek harmadik vetitőátmérőjére. E szerint a gömb harmadik képe a középpont harmadik rendezőjén tetszőlegesen felvett o_3-ből gömbi sugárral rajzolt K_3^3 kör.

A konturok adják a láthatóság határát.

A K^1 első konturkör az egyenlitő /105. ábra/, felülnézetben adja meg a láthatóság határát. Azaz felülről nézve, tehát első képben látszik a K^1 egyenlitő feletti félgömb, s mindaz ami ezen van.

Elölről nézve /b./, tehát második képben látszik a K^2 kör előtti félgömb, s mindaz ami e félgömbön van. Oldalról nézve, tehát harmadik képben látszanak mindazok a pontok, amelyek K^3 körtől a balra levő félgömbön vannak. /lásd: 104 ábrát is/.



105. ábra

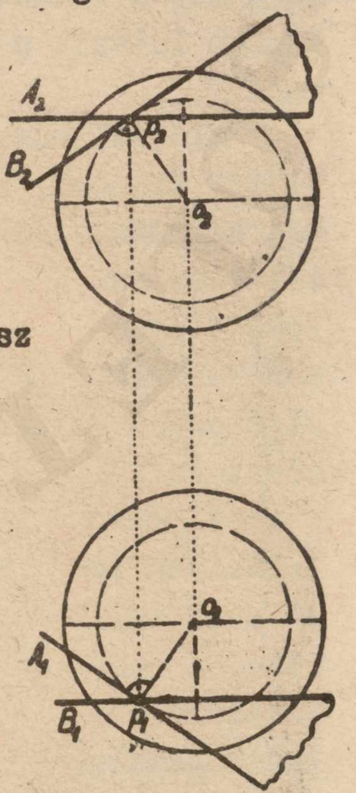
A gömb felszinén levő pont egyik képe, a konturkör területén belül, tetszőlegesen felvehető; a kapcsolt kép gömbi körök segélyével állapitható meg. Pl. a K^2 konturkörön levő a_2-höz a_1 és a_3. Az egyenlitőn levő d_1-ből d_2 és d_3, amikor is d_3 távolabb van Δ_2-vel mint o_3. A nem konturon fekvő c-nek c_2 elölnézete "a" párhuazmos körén van, s igy a felülnézet c_1 és c_1' lehet.

Felülről mindkettő látható, elölről c' fedett. c_3 és c_3' az o-hoz viszonyitott Δ_2'-vel nyerhető, oldalról mindkettő látható.

Ha a felülről látható c-nek c_1 képéhez kell c_2-t megállapitani, akkor c párhuzamos körének felülnézete ω_1 középpontu c_1-en átmenő kör, ennek a K^2 konturkörön levő "a" pontjának a_2 elölnézetén átmenő vizszintes körhur a párhuzamos kör elölnézete, s erre rendezzük c_2-t. Egyébként c_2 a Π_2-vel párhuzamos ω' /ω_1'/, középpontu $\omega_1's_1$ sugaru körrel is megkapható.

39./ A gömb érintősikja. Adva van a gömb p pontjának p_2 második képe, keressük az érintősikot p-ben /106. ábra/.

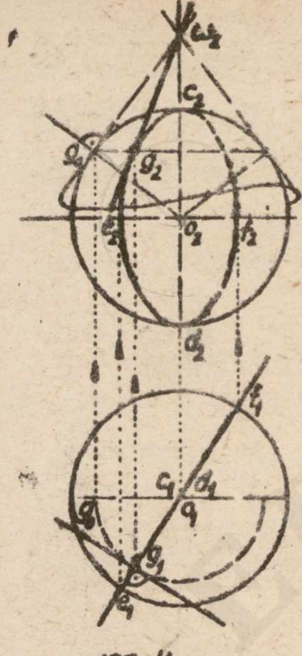
p_1-t megkeressük a gömb egy vizszintes parallel körével. Az általános elv szerint az érintősikot meghatározza a p-n áthaladó két lapgörbének p-beli érintője. Egyik görbe a vizszintes gömbi kör, ennek vizszintes érintője A /A_1A_2/. A másik görbe a Π_2-vel párhuzamos gömbi kör, s B /B_2B_1/ ennek érintője. A és B érintők, fővonalak, meghatározzák az érintősikot, s ez /amint már az I. rész 53.-nál megállapitottuk/ merőleges az érintési ponthoz tartozó gömbsugárra.



106.ábra

40./ A gömb vetitősikmetszetei. Az I. rész 53. pontjában megállapitottuk, hogy a gömb minden sikmetszete kör, s a kör középpontja a gömbközéppontból a metszősikra állitott merőleges döféspontja. A gömb sikmetszeteinek ábrázolása lényegben kör ábrázolás.

A gömb középpontján átmenő első vetitősik a gömböt egy legnagyobb körben a déllőben metszi /107. ábra/, középpontja o, ef vizszintes átmérőjének első képe e_1f_1, az egyenlitősikon van e_2f_2. Az ef vizszintes



107. ábra

átmérő függőleges cd társának első képe $c_1 d_1$ pont, második képben valódi nagyság, c_2 és d_2 a második konturkörön. $e_2 f_2$ és $c_2 d_2$ a körképellipszis tengelyei, az ellipszis szerkeszthető. Elölről nézve látható ced félív.

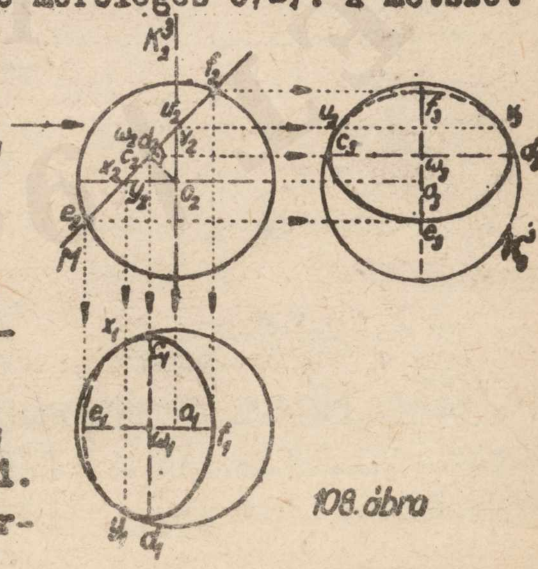
A metszet első képe g_1 pontjának megfelelő g_2-t párhuzamos körrel kapjuk. A g_2-beli érintő megrajzolásához forgassuk a délkört cd átmérője körül Π_2-vel parallel helyzetbe, amikor is a délkör a konturkörbe, g meg g_0-ba jut /affin kör/. A $g_0 \omega_2$ érintő visszaállitottja a $g_2 \omega_2$ érintő.

Az érintő első képe $e_1 f_1$-el összeesik. Ez g parallel körének g-beli vizszintes érintőjét derékszögben metszi, azaz a délló és parallel kör érintői egymásra merőlegesek, miért is a gömb egy pontján átmenő délló-kör és párhuzamos-kör egymást derékszögben metszik.

Ha a kimetszett déllőkört g-beli érintőjével együtt cd átmérő körül megforgatjuk, akkor a déllőkör a gömböt, g annak egy párhuzamos körét, az érintő meg egy olyan forgáskupot ir le, amely a gömböt g pont párhuzamos körében érinti. A kup alkotóinak az ω csúcs és a g párhuzamos körén levő érintési pontok közötti darabjai egyenlők.

Elöl- és felülnézetben megadott gömb metszése M második vetitősikkal /103. ábra/.

A körmetszet elölnézete egyenesbe esik. o-ből a síkra merőleges elölnézete az M-re merőleges $o_2 \omega_2$; felülnézete, mert o-ω párhuzamos Π_2-vel, a rendezőkre merőleges $o_1 \omega_1$. A metszet egyik átmérőjének elölnézete $e_2 f_2$; $e_1 f_1$ a második konturkörnek átmérőként jelentkező első képén van. $e_1 f_1$ mutatja, hogy ef a Π_2-vel párhuzamos, akkor ennek cd társa Π_2-re merőleges, s igy elölnézetben ω_2-be eső pont. $c_1 d_1$ átmérő első képe rendezőbe esik; s valódi nagyságban látszik, tehát $c_1 \omega = \omega_2 a_2 = r$. $e_1 f_1$ és $c_1 d_1$ a körkép ellipszis tengelyei.



108. ábra

Felülről nézve a kimetszett körnek az egyenlitőkör feletti félgömbön levő része látható. Az egyenlitőkörön levő elválasztó pontok elölnézete x_2 és y_2. Rendezővel x_1 és y_1, ezekben érinti az ellipszis az első kontur-kört, s a látható részen van c, f és d pont.

Ábrázoljuk a gömb oldalnézetét. Az elöl-felülnézetből megszerkesztjük ω_3 ; $e_3 f_3$ és $c_3 d_3$-at, amikor is ω, e és f-nek ohoz viszonyitott második differenciája Ø, és $\omega_3 c_3 = \omega_1 c_1 = r$ valódi nagyság. $e_3 f_3$ és $c_3 d_3$ a képellipszis tengelyei. A metszetnek az oldalnézetben látható ivének határpontjai a K^3 harmadik konturkörön levő u és v pontok. /$u_2 \ldots u_3$ és $v_2 \ldots v_3$/. A látható iv $u_3 c_3 e_3 d_3 v_3$, a képellipszis u_3 és v_3-ban érinti a K_3^3 kört.

41./ A görbültség változása a vetületben. Ha a 108. ábrában M sikot balfelé toljuk, akkor az első képellipszisnek és az első konturkörnek ugy az x_1, mint az y_1-beli végtelen közeli érintkezési pontjai egyre közelednek egymáshoz, s ha a 109. ábrán feltüntetett helyzetben e ellipsziscsuccsal összeesnek, K_1^1-el e_1-ben négy végtelen közeli pontjuk közös; K_1^1 a görbületi kör e_1-ben, a kis-tengely végpontjában.

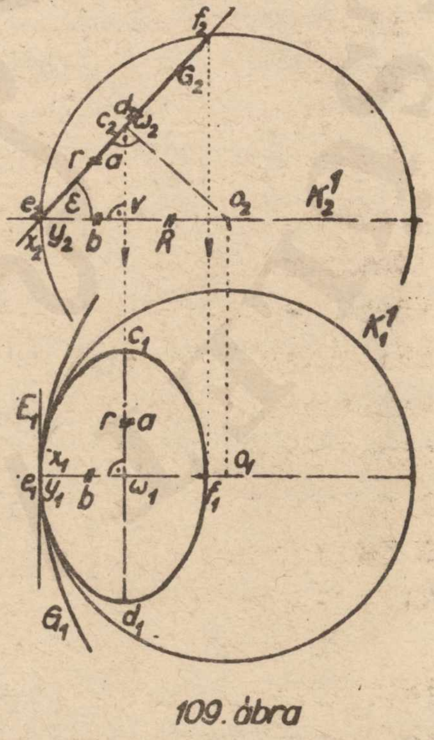
Az $e_2 o_2 \omega_2$ és $e_2 \omega_2 v$ hasonló derékszögü háromszögekből:

$$R : r = r : e_2 v; \quad R = \frac{r^2}{e_2 v} = \frac{a^2}{b} = \rho$$

ρ a görbületi kör sugara az ellipszis kistengelyének végpontjában.

Tegyük fel, hogy az ω középpontu r sugaru kör görbületi köre egy, a sikjában levő G görbének "e" csucsában. Akkor G_1 képnek a görbületi kör ellipszis képével e_1-ben továbbra is négy végtelen közeli pontja közös, s igy K_1^1 kör G_1-nek is görbületi köre. G-nek e-beli érintője a Π_1-el párhuzamos, második vetitő E egyenes, G sikjának első képsikszöge ε és az $e_2 \omega_2 o_2$ háromszögből:

$$R = \rho = \frac{r}{\cos \varepsilon}.$$

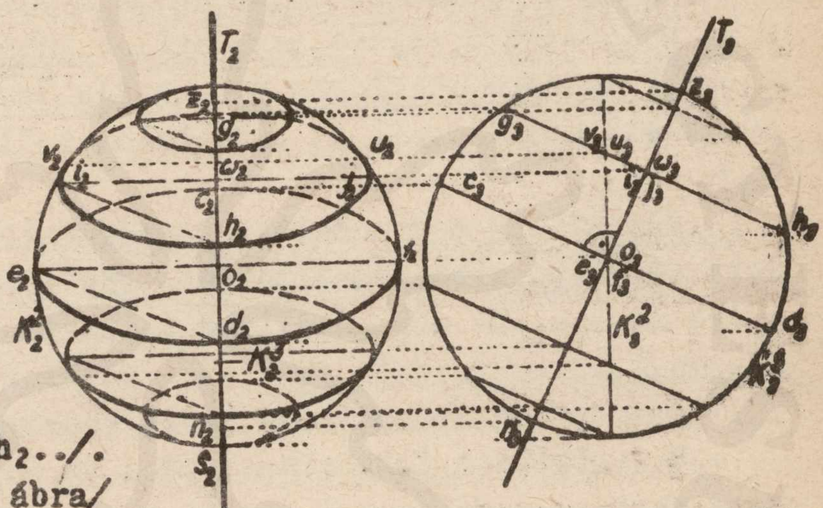


109. ábra

Azaz: ha egy görbét csucsérintőjével párhuzamos sikra merőlegesen vetitünk, akkor a képgörbe görbületi körének sugara a csucs képében $\rho = \frac{r}{\cos \varepsilon}$; ahol r a görbe görbületi körének sugara, ε meg a görbe sikjának képsikszöge.

<u>42./ Ferde tengelyü gömb párhuzamos és déllőkörei</u>. A Π_3 -al párhuzamos T tengelyü o középpontu /föld/ gömböt /110. ábra/ T-nek második vetitősikja K^3 konturkörben metszi; K_3^3 és T_3-nak z_3 és n_3 metszéspontjai T és a gömb döfésének harmadik képei; rendezővel z_2 és n_2. Látható z_2.

A T-re merőleges siku gömbi egyenlitő kör harmadik képe $c_3 d_3$ átmérő, a párhuzamos, vagy <u>szélességi</u> köröknek harmadik képei a K_3^3-nak T_3-ra merőleges hurjai. E köröknek o; ω középpontjai T-n vannak, s a Π_3 -ra merőleges, illetve a Π_3 -al párhuzamos ef és cd; ij és gh ... társátmérőinek elölnézetei, a körképeknek e_2f_2 és c_2d_2; i_2j_2 és g_2h_2... tengelyei. Az egyenlitő konturpontjai e és f, a párhuzamos köré u és v; d és h az elölnézetben látható félgömbön vannak.

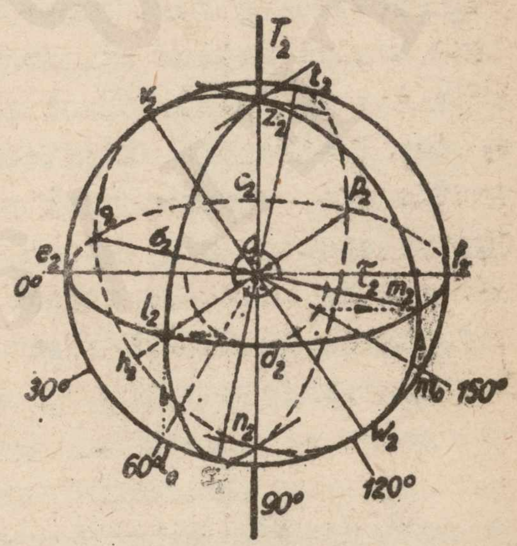


110. ábra

A szélességi körképek hasonló helyzetü és hasonló ellipszisek, s igy tengelyeinek aránya egyenlő /s igy $e_2d_2 \parallel i_2h_2$../.

Ha a gömböt /110. ábra/ K^3 déllőkörének T körüli forgásából származtatjuk, ugy minden déllőhelyzetnek egyik átmérője zn/z_3n_3/, társa meg cd/c_3d_3/ egyenlitő átmérő különböző helyzetei. T-nek harmadik vetitősikja által kimetszett déllőnek társátmérői zn /z_3n_3/ és ef /e_3f_3/; z_2n_2 és e_2f_2 e déllő ellipsziképének a tengelyei, /110. ábra a./ az ellipszis nincs megrajzolva.

Ha e déllőnek 30°-onként elforgatott helyzeteit kell ábrázolni, azaz eof egyenlitőátmérőnek elforgatott helyzeteit kell megrajzolni, ugy for-



110. ábra a.

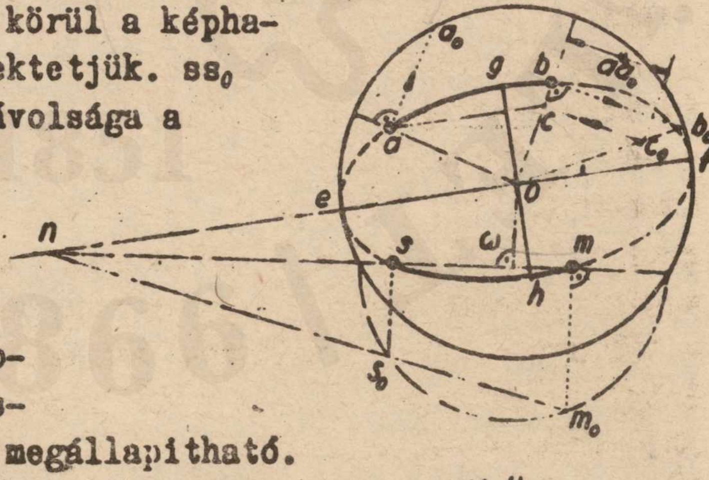
gassuk az egyenlitő kört ef körül a Π_2 -vel párhuzamos gömbkontur sikjába, amikor is az egyenlitőkör a gömbkonturra esik. Ezen jelöljük ki "e"-nek 30^o-onként elforgatott helyzeteit. 60^o-os elforgatásnál "e" pont l_o-ba, eo sugár $l_o o_2$-be jut. Az egyenlitőkör ellipszisképén l_o-nak megfelelő ellipszispont l_2 /kétkörös eljárással szerkesztve/; a déllőkör képellipszisének társátmérői $l_2 o_2 n_2$ és $z_2 o_2 n_2$. Az ellipszis és gömkontur érintési pontjait, a képellipszis nagytengelyét a következőleg kaphatjuk meg:

Az ol-re merőlege egyenlitősugár parallelforgatott helyzetben az $l_o o_2$-re merőleges $o_2 m_o$, s ennek képe /kétkörös eljárással/ $m_2 o_2$. Mivel mo merőleges ugy lo-ra, mint T-re, azért a déllősiknak o-n átmenő második fővonala az $o_2 m_2$-re merőleges $t_2 o_2 s_2$, s ezen a körátmérő valódi nagyságu, a képellipszis nagy tengelye $s_2 o_2 t_2$. Az erre merőleges $m_2 o_2$ a kis tengely iránya, s hossza papircsik módszerrel, l_2 pont felhasználásával megállapitva $\sigma_2 \tau_2$.

Ugyanilyen megfontolás alapján a 150^o-al elforgatott déllőhelyzet ellipszisképének társátmérői $z_2 o_2 n_2$ és $m_2 o_2 q_2$; nagytengelye az $l_2 o_2$-re merőleges $v_2 w_2$ s az $l_2 o_2$-re eső kistengely félhossza $h_2 o_2$.

A z_2 pontot tartalmazó félellipszisek elölnézetben láthatók.

Ha a látható félgömbön levő m és s ponton áthaladó főkört kell ábrázolni /m és s legrövidebb összekötése, geodéziai vonal/, /111. ábra/akkor az ms egyenes vetitősikja által kimetszett ω középpontu kört átmérője körül a képhatár-kör /a papir/ sikjába fektetjük. ss_o illetve mm_o a pontoknak a távolsága a főkör / a papir/ sikjától; ms és $m_o s_o$ egyeneseknek n metszéspontja a nyompont, no meg az smo főkörsiknak nyomvonala. ef a körképellipszisnek nagytengelye, gh kistengelye pl. papirszalaggal megállapitható.



111. ábra

Ha a pontok magasságkülönbsége kicsi, pl. a és b pontok, akkor n messze esik. Ilyenkor a következőleg járhatunk el: Az a-n átmenő vetitősikkal kimetszett főkört a rajz sikjába fektetve aa_o adja a magasságát. Hasonlóan bb_o meg b magasságát. Az abo sik bo egyenesén a ledöntésben megállapitjuk az a-val egyező magasságu c pontot /c_0 c/; ca egy fővonal, ezzel párhuzamos az o-n átmenő ef nyomvonal, s ez a főkör ellipszis képének nagy tengelye.

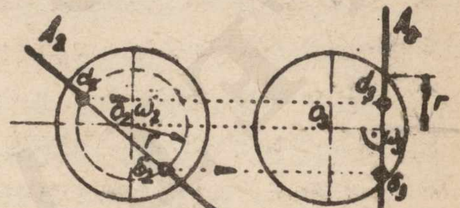
Az ellipszis két főkörnek összeeső vetülete.

43./ A gömb axonometrikus képe. Merőleges axonometriában a gömb képe a sugárral rajzolható kör. A 110. ábra a./- a gömb ax. képeként is értelmezhető, amikor is $o_2 z_2$ a Z tengelyen, $o_2 m_2$ az X tengelyen, $o_2 l_2$ az Y tengelyen levő gömbsugaraknak a megszerkesztett megrövidülésnek megfelelő képhosszai; s ezek a megrajzolt ellipszisnek, a koordinátasikokban levő főkörök képeinek féltársátmérői. Az ellipszis nagy tengelye merőleges a koordinátasikra merőleges ax. tengelyképre, pl. $s_2 t_2 \perp m_2 o_2$.

Ferde axonometriában, a gömb-képhatár ellipszis, s ez beburkolja a koordinátasikokban levő gömbi főkörök ax. képét.

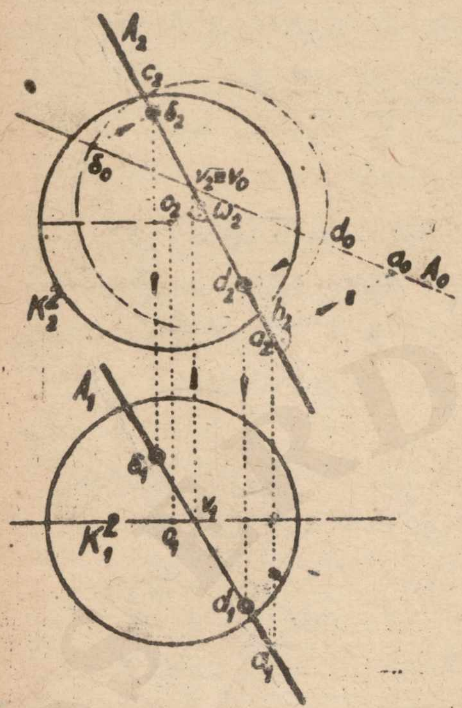
44./ Egyenes döfése gömbbel. Egyenes és gömb döféspontja az a két pont, amelyben az egyenesen átfektetett segédsikkal kimetszett gömbi kör az egyenest találja.

A 112. ábrában a segédsik a π_2 -vel párhuzamos A-nak harmadik vetitősikja. A kimetszett kör középpontja ω /ω_3 .. ω_2/, sugara a harmadik képből r, az ezzel rajzolt második körkép az A_2-nek d_2 és δ_2 metszése a döféspontok képe. Rendezővel d_3 és δ_3 Előlnézetben mindkettő látszik, oldalnézetben d.



112. ábra

Az általános helyzetü A egyenes döfésének megszerkesztésénél /113. ábra/ a segédsik A-nak második vetitősikja. A kimetszett kör középpontja ω /ω_2/, sugara $\omega_2 c_2$. E kör és A metszéspontjainak megállapitása végett, forgassuk a kört A-val együtt a K^2 konturkör sikjába, azaz π_2 -vel párhuzamos helyzetbe. Forgástengely a K^2 konturkör sikjában levő cd átmérő. A kör e helyzete az $\omega_2 c_2$ sugárral rajzolható kör. A-nak K^2 sikjában levő v/ $v_1 v_2$/ pontja maradó, "a" meg a_0-ba jutva $a_0 v_2$ adja A_0-t. d_0 és δ_0 a döféspontok parallelforgatott hely-



113. ábra

zetei, visszaállitással d_2 és δ_2, rendezővel d_1 és δ_1. δ az egyenlitő feletti, d az alatti félgömbön van, miért is felülnézetben δ és ezzel A is δ-ig látható. d-ben A kilép a gömbből, de csak a képhatártól látható.

d a K^2 konturkör előtti, δ az e mögötti félgömbön van, s igy elölnézetben A egyenes d-ig látható, majd ismét a konturtól.

45./ A gömb ön- és vetettárnyéka.

A 38-ban megállapitottuk, hogy az önárnyékhatár a fénysugárirányra merőleges főkör.

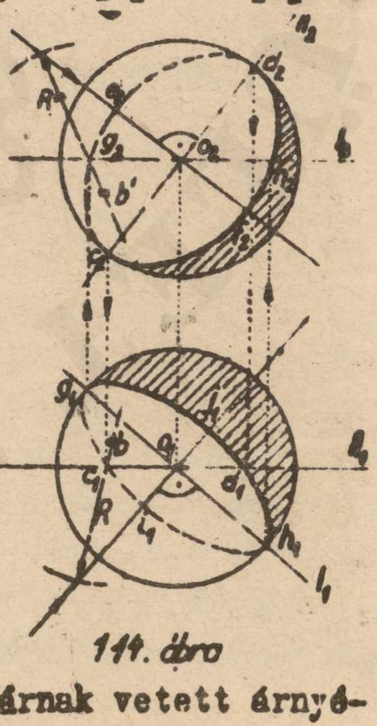
Az o középponton átmenő fénysugárra merőleges főkör sikjának fővonalai I és II /114. ábra./. Az első fővonalon levő gh körátmérő g_1h_1-ben a II. fővonalon meg c_2d_2-ben valódi nagyság, g_2h_2-t, illetve c_1d_1-t rendezőkkel kapjuk. Az önárnyékhatárkör második képellipszisének c_2d_2 a nagy tengelye, g_2h_2 ellipszispontok. Ezekkel a kistengely hossza megszerkeszthető. A második ellipsziskép tengelyei c_2d_2 és e_2f_2.

Az első képellipszisnek tengelye g_1h_1 és c_1d_1 ellipszispontok. Az ezekkel megszerkesztett kistengely i_1j_1.

h elölről látható, s igy $d_2h_2f_2c_2$ félellipszis látható; d felülről látható, s igy $g_1j_1d_1h_1$ iv is látható.

A fény haladási értelme miatt a bevonalazott gömbfél önárnyékos.

A gömbnek sikra vetett árnyéka az önárnyékhatár-főkörnek a vetett árnyéka. E főkör társátmérőpárjának vetett árnyéka az árnyékhatár-ellipszis társátmérőpárja. /esetleg tengelyei/ Adott esetben tehát megállapitjuk pl. e és f gömbfelületi pontoknak első képét, majd cd és ef társátmérőpárnak vetett árnyékát.

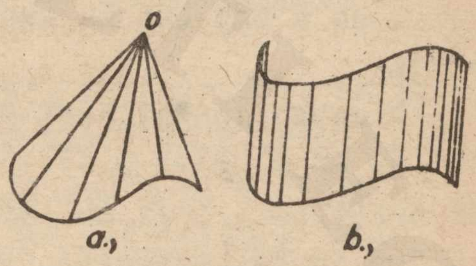


114. ábra

VI. A kúp és hengerfelületekről.

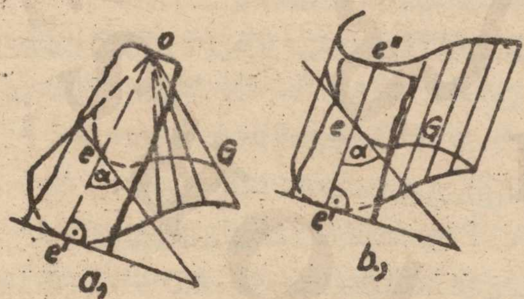
46./ A kúp és hengerfelületekről általában. Egy sikgörbét metsző és nem a sikjában levő állandó ponton áthaladó egyenesek összesége egy kupfelület. Az állandó pont a kup csúcsa /115. ábra a./ a görbe a kup vezérgörbéje, s az egyenesek a kup alkotói.

Ha a csúcs a végtelenben van, az alkotók párhuzamosak, hengerfelület keletkezik /b. ábra/ Minden Minden alkotót metsző vonal a felületek vezérvonalának tekinthető.



115. ábra

Mindkét egyenesvonalu felület sikbafejthető /37. pont/, mert a szomszédos alkotók egymást /végesben, végtelenben/ metszik, a lapok sikelemekből állanak, az érintősik a lapot az alkotó minden pontjában, az alkotó mentén érinti. /116. ábra/. Miért is minden lapgörbének az érintési alkotón levő pontjához tartozó érintő az érintősikban van; a kontur, vagy önárnyékhatár alkotókból áll; a lapgörbe érintőjének és az alkotónak szöge a sikbafejtésnél nem változik meg. Amikor a lapot az érintősikra teritjük, akkor a lapgörbének az érintési alkotón levő pontjához tartozó görbületi kör sugara úgy változik meg, mintha a görbének és a görbületi körnek végtelen közeli közös pontjait az érintősikra merőlegesen vetitettük volna /bizonyitást mellőztük/.



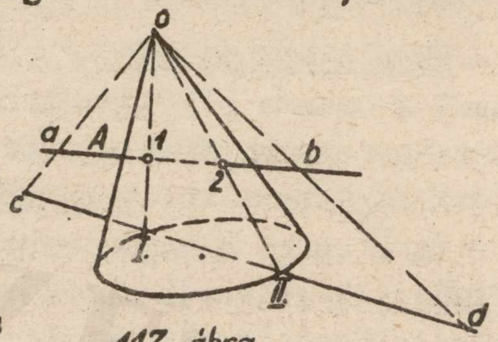
116. ábra

A kup érintősikjai áthaladnak a csúcson, a henger érintősikjai párhuzamosak a hengeralkotókkal, s érintik a vezérgörbét az érintési alkotó e' talppontjában.

A kúp és hengerfelület sikmetszetének pontjai általában az alkotóknak a sikkal való döféspontjai.

A kúpnak, mint végtelen sokoldalu gúlának két sikmetszete centrális kollineációban van; a végtelen sokoldalu hasábnak, a hengernek két sikmetszete persp. affinitásban van.

A kúp, illetve hengerfelület rendszáma egyenlő az algebrai síkvezérgörbe rendszámával. Ha a vezérgörbe másodrendű, a felületek is másodrendűek. Ugyanis a kúp csúcsán és egy egyenesen átmenő sík /117. ábra/ a vezérgörbét csak két pontban, a kúpot meg e két ponton átmenő két alkotóban metszi, s ezeknek az egyenessel közös két pontja az egyenes és a kúp két és csak két közös pontja.



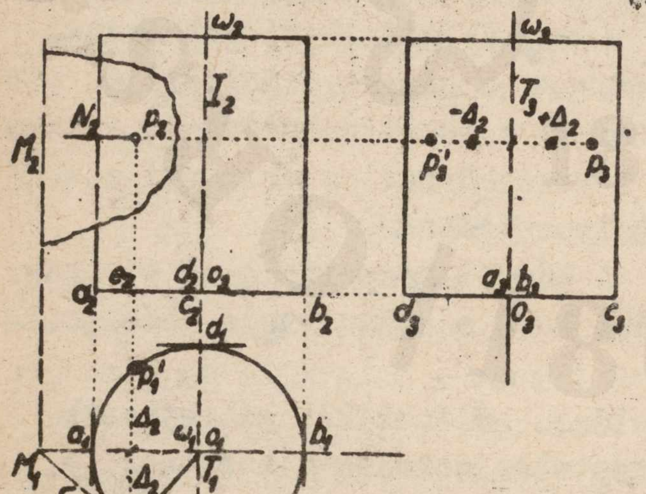
117. ábra

A gyakorlatilag fontos henger-kúp felületek vezérvonala kör. Ha az alkotók a körsíkra merőlegesek, akkor a henger egyenes körhenger, vagy forgáshenger, egyébként ferde körhenger. Ha a csucs és körközéppont összekötő egyenese a körsíkra merőleges, akkor a kúp egyenes körkúp, vagy forgáskúp, egyébként ferde körkúp.

VII. A forgáshenger.+

47./ Forgáshenger ábrázolása, felületi pontja, érintősíkja. Az egyenes körhenger-lap származik, ha az alkotót a körsíkra merőlegesen mozgatjuk, vagy ha két párhuzamos egyenesek egyikét a másik körül megforgatjuk. A felületnek az alkotókra merőleges két körlappal bezárt része az egyenes körhenger, vagy forgáshenger. Az alap és fedőlap középpontjait összekötő egyenes a tengely, a két középpont közötti darabja a magasság. A forgáshenger merőlegesen szimmetrikus a tengelyen átmenő minden síkra.

A forgáshenger tengelye irányában önmagában eltolható, tengelye körül önmagában elforgatható /el is csavarható/ azért kiterjedt a gyakorlati alkalmazása.


118. ábra

+látsd: "Ábrázoló geometria" I. 54. pontot is.

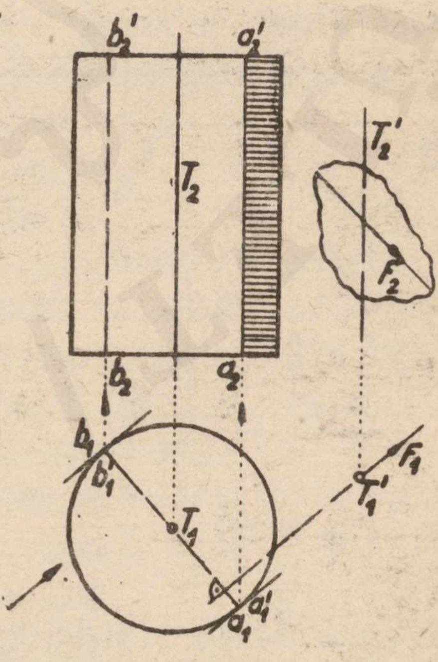
A 118. ábrán az o középpontu vizszintes alapkör elölnézete a_2b_2; oldalnézete d_3c_3; a függőleges alkotók felülnézete az alapkör kerületi pontjai, azaz az első vetitőhenger-palást felülnézete az alapkör kerülete, s a fedőkör kép is az alapkörbe, a T_1 meg $o_1 \equiv \omega_1$-be esik. T_2 és T_3 a függőleges tengelyképek. Az a és b pontokon átmenő alkotómenti hengerérintősikok második vetitők, az alkotók második konturalkotók és az acb az elölről látható félhenger, a c és d alkotómenti érintősikok harmadik vetitők, az alkotók harmadik konturalkotók és cad az oldalnézetben látható félhenger.

A hengerpaláston levő p pont p_2 képének megfelelő p_1 és p_1' mint a vetitőhenger-paláston levő minden pontnak felülnézete, a körképen van, p elölről látható, p' fedett; p_3 és p_3' a T-hez viszonyitott $\pm\Delta_x$-vel nyerhető. Oldalnézetben mindkettő látható.

A p-beli érintősik érinti a hengert p alkotója mentén, az alapkör sikján levő E nyoma érinti az alapkört az alkotó e talppontjában, a Π_2-vel párhuzamos szimmetrálsikon levő M /$M_1 M_2$/ nyoma párhuzamos az alkotókkal.

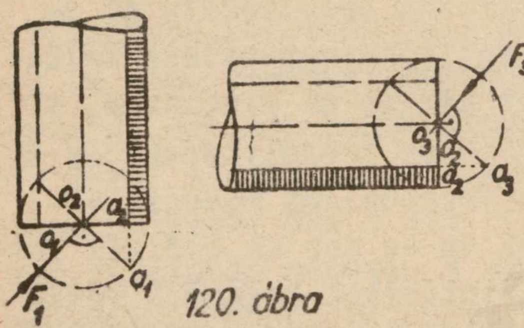
A p-hez tartozó hengersugár az érintősikra is merőleges N normális.

48./ Forgáshenger önárnyékhatára. Az önárnyékhatár alkotóiban a fénysugarak érintik a hengert, érintősik a fénysugárral párhuzamos fénysik. A T tengellyel is párhuzamos fénysikirányt meghatározza a T-vel párhuzamos T' és ezt metsző F fénysugár. /119. ábra/ Az ezzel párhuzamos érintősikok aa' és bb' alkotói mentén érintik a hengert, s ezek az önárnyékhatár-alkotók. A fényforrás felőli félhenger a megvilágitott, az önárnyékos félnek elölnézetben egy szalagja látható.



119. ábra

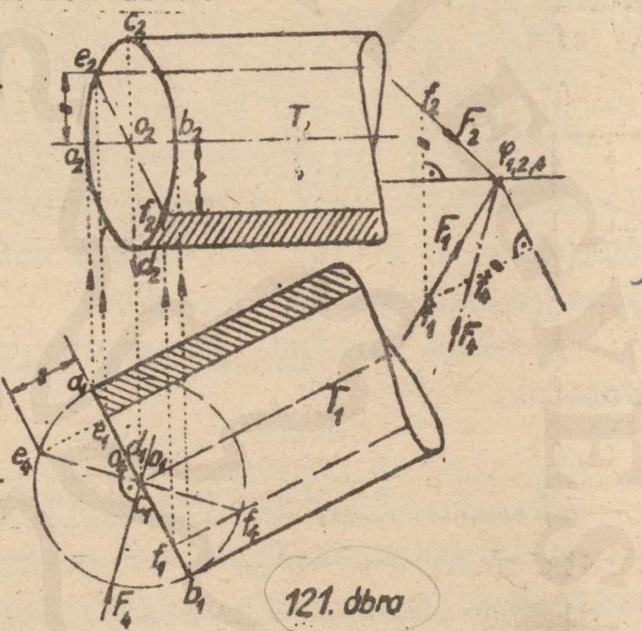
A henger önárnyékhatára: az aa' alkotó, a megvilágitott fedőlap jobboldali a'b' félköre, bb' alkotó, s az önárnyékos alapnak baloldali ba félköre. Ennek vetett árnyéka valamely sikon a henger vetett árnyéka.



120. ábra

F_1 a fénysugár merőleges vetülete a hengerkör sikján és $a_1 b_1$ átmérő merőleges F_1-re. A 120. ábra az önárnyékhatár-alkotók megállapitásának leegyszerüsitett módja; a nézetpárok össze vannak tolva.

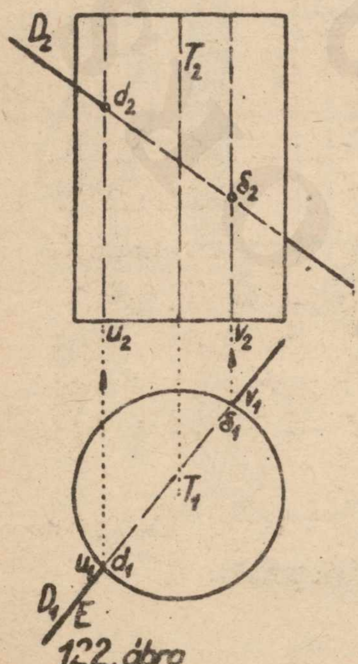
A 121. ábrán a vizszintes tengelyü T hengerdarab o középpontu alapkörének sikja a T-re merőleges első vetitősik. A kör társátmérői ab és cd. a és b alkotói az első, c és d alkotói a második konturok.



121. ábra

Az önárnyékhatár megállapitásához megszerkesztjük a hengernek T nézési iránynál a körképét; valamint F-nek F_4 képét és az 1 ...4 kapcsolatban a 120. ábra szerint járunk el. e és f az önárnyékhatáralkotók talppontjai.

<u>49./ Egyenes döfése forgáshengerrel</u>. A henger minden térbeli helyzetében érvényes elv szerint /lásd. 1. rész 221. ábra/, az egyenesen át a hengertengellyel párhuzamos sikot fektetünk, megkeressük nyomát az alapkör sikján, a nyom és a kör kerület metszéspontjaiból kiinduló alkotók az egyenest a döféspontban találják.

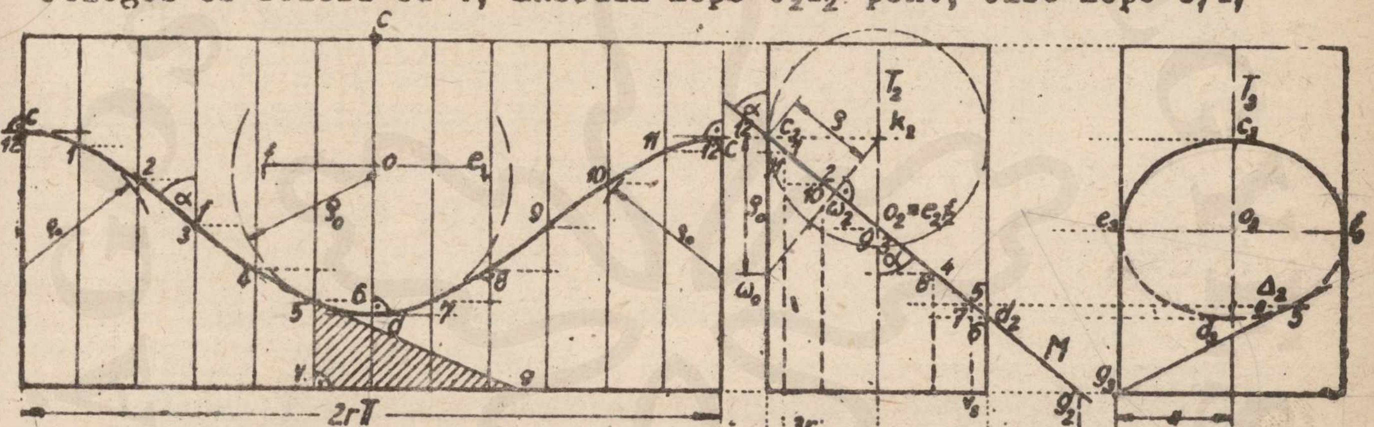


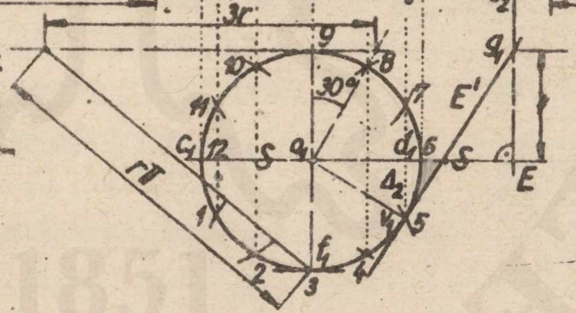
122. ábra

A 122. ábrán a T-vel párhuzamos első vetitősegédsiknak D_1-el összeeső E nyoma az alapkerületet u és v pontokban metszi, az alkotóképek és D_2 metszéspontjai a döféspontok d_2 és δ_2 előlnézetei; d látható, δ fedett. /Más értelmezés szerint: a döféspont D-n van, igy első képe <u>D_1-en</u>, a hengerpaláston is van, igy első képe a <u>képkörön</u>, vagyis a kettő metszete a döféspontok első képe./

__50./ Forgáshenger metszése vetitősikkal. Sikbafejtés.__ A 123. ábrán elől-felül-oldalnézetben adott forgáshengernek a tengelyére nem merőleges metszete az ME második vetitősikkal a 31. pont szerint ellipszis. /A másodrendü forgáshenger sikmetszete másodrendü görbe. A metszet felfogható, mint az alapkör párhuzamos vetülete a metsző sikon, s ez ellipszis./

Az ellipszis első képe az alapkör, második képe c_2d_2 távolság, c_1 és d_1 a körképen. Az ellipszismetszet c és d pontjaiban az érintők az általános elv szerint a __metsző második vetitősiknak__ és a c, illetve a b-beli második __vetitő hengerérintő-sikoknak__ a metsző egyenese, s ezek Π_2-re s egyuttal __cd-re is merőlegesek__, azért cd az ellipszis tengelye; s valódi nagysága c_2d_2. Az ef másik tengelye az érintőkkel párhuzamos, tehát Π_2-re merőleges és felezi cd-t, második képe e_2f_2 pont, első képe e_1f_1



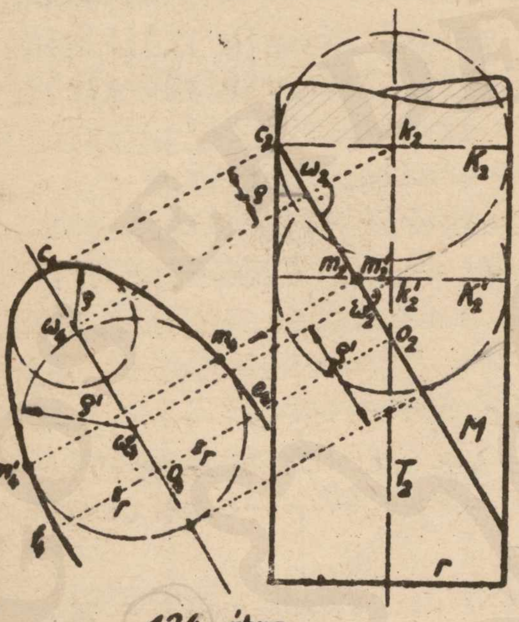


körátmérő, egyuttal a __valódi nagyság__. cd az ellipszis nagytengelye, ef a kistengelye, o a középpontja, cd nagytengely merőleges E-re. Ezek szerint; __a forgáshenger ellipszissikmetszetének középpontja a hengertengelyen van, nagytengelye merőleges a metsző siknak az alapkör /fedőkör/ sikján levő nyomára, az ezzel párhuzamos kistengelye hengerátmérő. A nagytengely a metszősikra merőleges S-S hengerszimmetrálsiknak és a metszősiknak metszőegyenesén van.__

e_3d_3 és e_3f_3 az ellipszistengelyeknek oldalnézetei s egyuttal a harmadik képellipszis tengelyei. $e_3c_3f_3$ a látható félív.

Állapitsuk meg a metszetellipszis görbületi körét nagytengelyének c végpontjában. A 124. ábrán a k′ középpontu gömb K′

körben érinti a hengert, s igy K' minden pontjában a hengernek és a gömbnek azonos az érintősikja. Ennek folytán az M sik által a hengerből kimetszett ellipszisnek és gömbből kimetszett ω' középpontu ϱ' sugaru körnek a K körön levő m és m′ pontjaiban közös az érintőjük /egyazon érintősik s ugyanazon metszősik metszőegyenese/, azaz a körmetszet m és m′-ben érinti az ellipszist. Az M metszősikra merőleges nézési iránynak megfelelő negyedik kép mutatja a helyzetet valódi nagyságban.



124. ábra

Ha a gömböt felfelé mozgatjuk K′ kör is emelkedik, s az ellipszis és a gömbi kör m és m′ érintkezési elemei közelednek c-hez, s amikor k′ gömbközéppont k-ba, K′ meg K-ba jut, az m és m′ c-ben összeesnek, a gömb ω középpontu, ϱ sugaru körmetszetének az ellipszissel négy végtelen közeli pontja közös, vagyis az ellipszis görbületi köre c-ben.

A K hengerkörnek, illetve gömbi egyenlitőkörnek a c-beli Π_2-re merőleges érintőjén átmenő bármely sik /pl. M/ a hengert ellipszisben, a gömböt meg az ellipszisnek c-beli görbületi körében metszi; a normálmetszetnek /K kör/ görbületi köre /K kör/ a gömb főköre. Ez a Meusnier gömb.

A $c_2\omega_2k_2$ és $c_2k_2o_2$ háromszögek hasonlók, s igy $c_2\omega_2 : c_2k_2 = c_2k_2 : c_2o_2$; $c_2\omega_2 = \varrho$; $c_2k_2 = r = b$ a fél kistengely; $c_2o_2 =$ a fél nagytengely, s igy $\varrho : b = b : a$

$$\varrho = \frac{b^2}{a}$$

A 123. ábrán a c-beli görbületi kör középpontja a Meusnier gömb k középpontjából az M-re állitott merőleș ω döfése, és $\omega_2 c_2 = \varrho$ a görbületi sugár.

Sikbafejtés. A sikbafejtésnél a hengert végtelen sokoldalu hasábnak tekintjük, amikor is az alapkör a henger-hasáb derékmetszete. Ennek kiegyenesitett hosszát Kohansky-eljárással kapjuk meg. Hasitsuk fel a hengerpalástot c pont alkotója mentén és sikbateritve, belsejével fektessük a papir sikjára, a 123.

ábra szerint. A teljes palást kifejtés derékszögű négyszög, oldalai $2r\pi$ és az előlnézetből vehető alkotó hossz.

A metszet berajzolásához osszuk az alapkört c-ből kiindulva 12 részre, ábrázoljuk az osztáspontokon átmenő alkotóknak páronként összeeső előlnézetét, valamint helyét a kifejtésben is / $2r\pi/12$/. Az alapkör és az 1.2.3.4...12 metszéspontok közötti alkotódarabok hosszát az előlnézetből vetitjük át a kifejtésbe. A pontok összekötésének helyességét támogassuk érintők, görbületi kör megrajzolásával.

Az ellipszis érintő és az alkotó közötti szög a kifejtésben nem változik. A c = 12, d = 6 pontokban az ellipszisérintő az alkotóra merőleges, ilyen a kifejtésben is. Az f = 3 és e = 9-ben a π_1-vel párhuzamos érintő az alkotóval α szöget képez.

Az 5. pontban az érintőt meghatározza az 5.V alkotómenti érintősik, nyoma E és a metszősiknak g5 metsző egyenese. Első képe $g_1 5$; második képe $g_2 5$, oldalnézete $g_3 5$. A g5 érintőnek az alkotóval bezárt szöge a V.5g derékszögü háromszögnek az 5 csucsánál levő szöge. Az 5V. befogó a kifejtésen valódi nagyság, $5g_1$ a másik befogó valódi hossza, ezzel egyenlő a kifejtésben V.g; g5 átfogó az érintő.

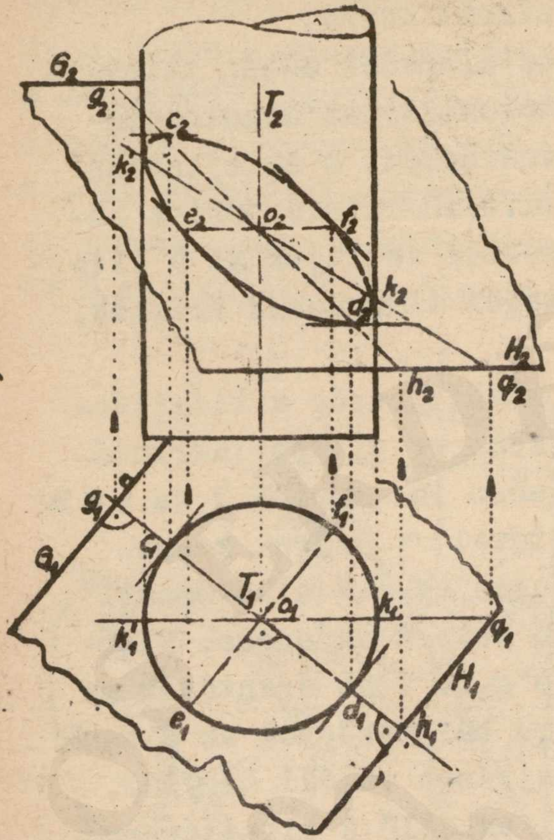
A c és d-beli ρ görbületi kör sugara a kifejtésnél a 46. pont szerint ugy változik meg, mintha az ellipszist az érintőjével párhuzamos hengerérintősikra merőlegesen vetitenők. Ez esetben a 41. pont szerint $\rho_o = \frac{\rho}{\cos\alpha}$, ahol α a metszősik és hengerérintősik szöge c és d-ben.

Mivel f = 3 és e = q-ban a metszősik merőleges a hengerérintősikra, cos $90^0 = \emptyset$; $\rho_o' = \infty$; a görbületi kör a kifejtésben az érintővel összeeső egyenes, s ez a görbét metszi is, a görbének inflexiós érintője.

Ezek alapján a kifejtett görbe biztonsággal megrajzolható.

50./ Forgáshenger általános sikmetszete. Összeillő metszetek. A henger tengelye függőleges, a metszősikot meghatározza G és H vizszintes egyenesek /125. ábra/.

Az ellipszismetszet első képe az alapkörbe esik, o középpontjának első képe o_1; nagytengelye merőleges a metszősiknak a henger valamely parallelkörsikján levő nyomára, ilyen G és H. Vagy: a nagytengely azon az egyenesen van, amelyet a metszősik-



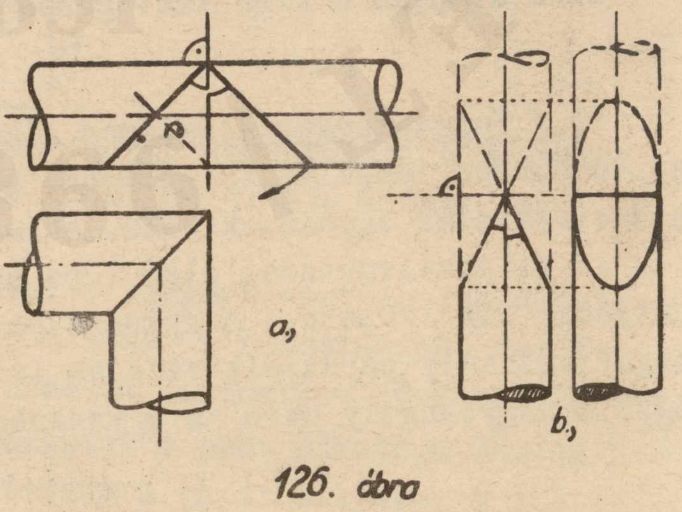
125. ábra

ra merőleges henger-szimmetrálsik a metszősikból kimetsz. Mindkét esetben a nagytengely gh egyenesen van, első képe g_1h_1; rendezővel g_2h_2. gh egyenes és a henger döféének első képe c_1d_1; rendezővel c_2 és d_2. A c és d pontokban a metszet érintője vizszintes, mert a metsző és hengerérintő sikok nyomai valamely vizszintes sikon egymással párhuzamosak. A kistengely az érintőkkel, illetve G és H-val parallel, tehát vizszintes körátmérő, első képe e_1f_1, rendezővel e_2f_2. Tehát megkaptuk a metszetellipszis második képének társátmérőit. Érintők a végpontokban.

Az elölnézetben látható ellipszisrész határpontja a képszél alkotóknak a GH sikkal való döféspontjai. Ezen alkotók függőleges segédsikja által a GH-ból kimetszett egyenes első képe o_1q_1; rendezővel q_2. A q_2o_2 kimetszi a k_2 és k_2' konturpontokat. e és d a látható ellipszisiven vannak.

Megjegyezzük, hogy az ellipszis első körképének bármely társátmérőpárja a metszetellipszis társátmérőinek a képe, s ezeknek második képét, mint a metszősikon levő egyenesekét szerkeszthetjük meg. Pl. $k_1'k_1$ és az erre merőleges körátmérő.

A forgáshengernek egymással párhuzamos, valamint a tengelyével egyenlő szöget bezáró metszetei összeillők /126. ábra/.



126. ábra

51./ Gyakorlati alkalmazás. Kettős ferde hajk. A fa döntésénél a fatörzsbe fejszével két ékszerü bemetszést, hajkot készitenek. Ezek nagyrészt szimmetrikusak és felső és alsó határuk a fatörzsnek egy-egy sikmetszési felülete.

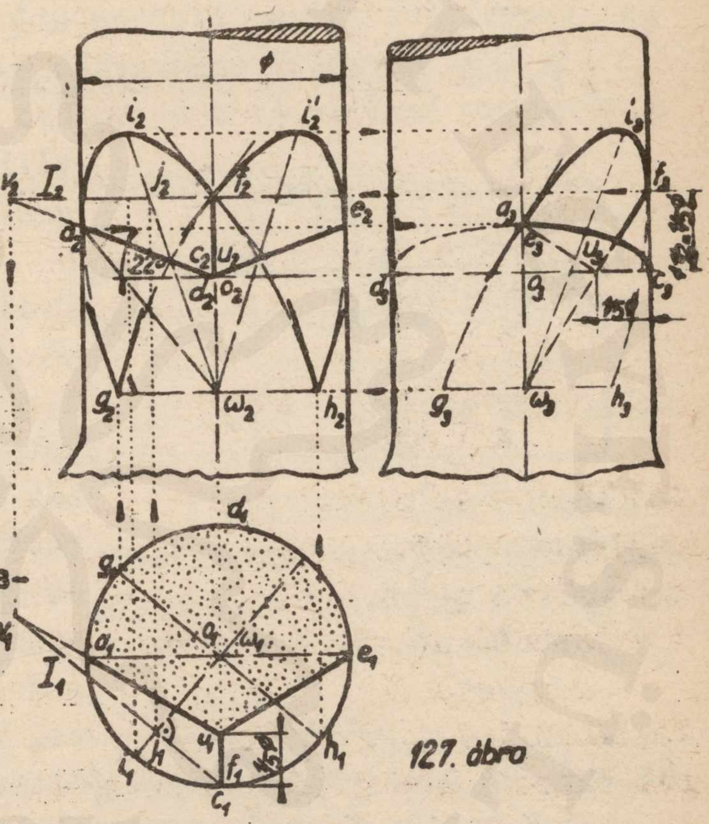
/127. ábra/ Megszerkesztésükhöz a fatörzset, a hajk kis magassága miatt, hengernek vesszük.

Az alsó határsikok egyikének a baloldali második képhatáralkotón levő pontja a /$a_2 a_1 a_3$/; a másiké az átellenes alkotón e /$e_2 e_1 e_3$/. E bemetszési sikok második vetitők, s a vizszintes sikhoz mintegy 22°-al lejtenek, előlnézetük $a_2 o_2$ és $e_2 o_2$.

Az ao sikmetszetellipszis felének előlnézete $a_2 o_2$, középpontja o /$o_2 o_1 o_3$/, fél nagytengelye ao /$a_2 o_2$; $a_3 o_3$; $a_1 o_1$/, kistengelye a Π_2-re merőleges cd /$c_2 d_2$; $c_1 d_1$; $c_3 d_3$/. A harmadik képellipszis tengelyei $o_3 a_3$ és $c_3 d_3$, felülnézete kör.

Az eo határsik ellipszis metszetének oldalnézete az előbbivel összeesik.

A két határsik metszőegyenese a Π_2-re merőleges co /$c_1 o_1$; $c_3 o_3$/. A két bemetszés mélysége c-nél a fatörzsátmérő ötöde /1/5 ø/; ez a hajk mélysége, $cu = c_1 u_1 = c_3 u_3 = \frac{c_1 d_1}{5}$



127. ábra

Az a és e pontokban a hajkmélység Ø, s igy az egyik bemetszésnek a határa a fatörzsben au /$a_1 u_1$; $a_2 u_2$; $a_3 u_3$/ és cu, a fatörzs felületén meg az ac /$a_3 c_3$/ ellipszisiv; a másiké eu és cu, illetve $e_3 c_3$ ellipszisiv.

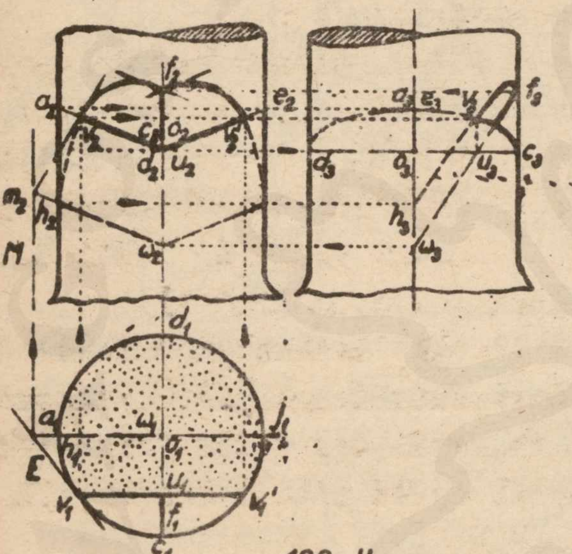
A felső határsikoknak a c ponton átmenő hengeralkotón levő f /$f_2 f_3$/ pontjának távolsága c-től $cf = c_3 f_3 = c_2 f_2$ a hajk magassága, s ez a hajkmélység 1~1·5-szerese. Az egyik felső sik az alsót au-ban, a másik meg eu-ban metszi, s igy fu /$f_1 u_1$; $f_2 u_2$; $f_3 u_3$/ a két felső határsik metszőegyenese. Az egyik felső metszősik határa a törzsben fu és au; a másiké meg fu és eu. A fatörzsön levő határvonal e sikoknak ellipszis metszetei.

A baloldali felső metszés sikját meghatározzák fu és au metsződő egyenesek. fu a hengertanegelyt ω-ban metszi /ω_3; ω_2; ω_1/. Sikja egy első fővonalának második képe $f_2 v_2$; rendezővel $v_1 f_1$. A kimetszett ellipszis fél nagytengelyének első képe az I_1-re merőleges $\omega_1 j_1 i_1$, rendezővel j_2; $\omega_2 j_2$, ezen i_2 és második differenciával i_3; $i_3\omega_3$. A vizszintes kistengely első képe az I_1-el párhuzamos g_1h_1, rendezővel g_2h_2 és differenciával g_3h_3. Ezzel megvannak a második és harmadik képellipszis társátmérői.

Az f alkotómenti hengerérintősik az $a\omega$-val párhuzamos egyenesben metszi a felső határsíkot, s igy f_2-ben az érintő $a_2\omega_2$-vel parallel. a_3-ban f_3u_3-al párhuzamos az érintő.

A jobboldali felső határsik metszetének elölnézete a henger tengelyére szimmetrikusan helyezkedik el.

A 128. ábrabeli egyszerübb hajknál az alsó bemetszéseknek a törzsben levő uv és u'v' határa Π_2-vel párhuzamos, s igy az ellipszisnek cv /c_3v_3/ ive a hengerfelületi határvonal.


128. ábra

A baloldali felső határsikot fuω/$f_3u_3\omega_3$; $f_2u_2\omega_2$; $f_1u_1\omega_1$/ és a Π_2-vel párhuzamos uv / u_1v_1 ; u_2v_2 ; u_3v_3/ határozzák meg. A sikmetszet ellipszis társátmérőpárjának első képe a körnek egymásra merőleges két átmérője pl. $h_1\omega_1j_1$ és $f_1\omega_1$. Mivel $h\omega$ a metszősik egyenese és $h_1\omega_1$ párhuzamos v_1u_1-el, azért $h_2\omega_2$ parallel u_2v_2. Rendezővel h_3. $h_2\omega_2$ és ω_2f_2, illetve $h_3\omega_3$ és ω_3f_3 az ellipszisképeknek féltársátmérői.

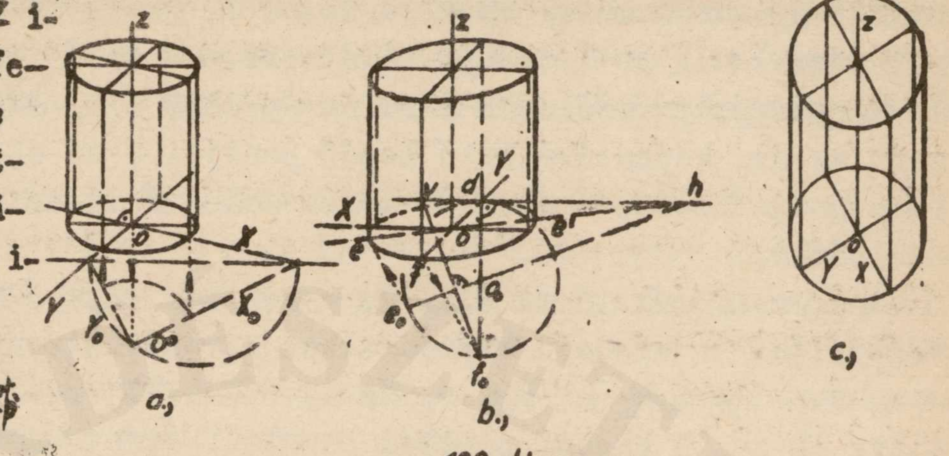
A v ponton átmenő hengeralkotómenti érintősik nyoma a Π_2-vel párhuzamos szimmetrálsikon M, a metszősik nyoma ωh /ω_2h_2/, s igy m_2v_2 az érintő v_2-ben.

52./ Forgáshenger axonometrikus képe. Gyakorlati alkalmazás.

A 129. ábrán függőleges tengelyü forgáshengernek a./ merőleges axonometrikus, b./ Kavalier, c./ madártávlati képe.

a./ esetben a képhatáralkotók a Z-re merőleges és valódi nagyságu körátmérő végpontjaiban érintik a képellipszist.

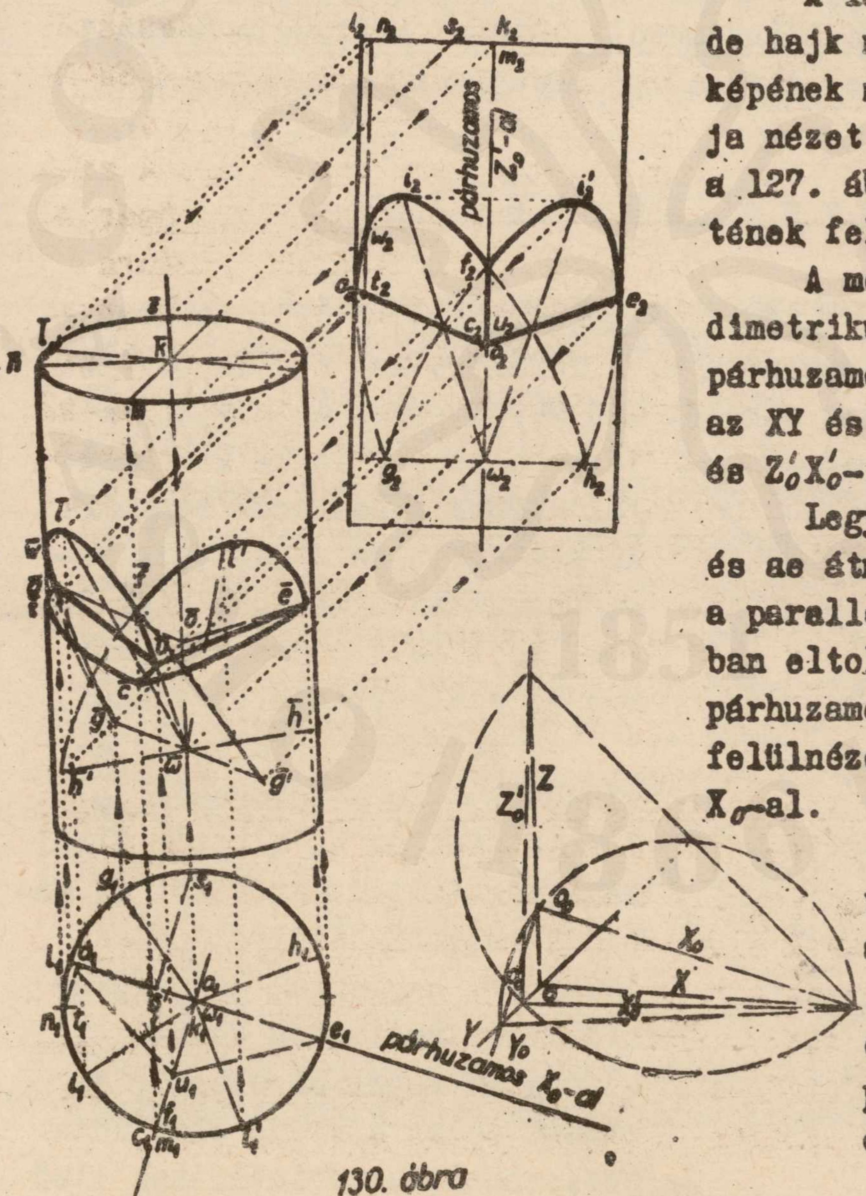
b./-ben az X és Y tengelyeken levő társátmérőpárral meghatározott ellipszisnek Z irányu érintőit affintitással szerkesztettük meg. Az X-el párhuzamos dh körül párhuzamos helyzetbe forgatott kör középpontja o_o, sugara egyenlő az X tengelyen levő félátmérővel. A Z irányu fv-nek megfelel v f_o. Az erre merőleges $h_o e_o$ átmérő e_o végpontjában az érintő vf_o irányu. $e_o o_o h$-nak visszaállitottja ho, s ezen van ff sugárirányban az



129. ábra

e_o-nak megfelelő e és eo = oe'. Mindkettőben az érintő fv-vel vagyis Z-vel párhuzamos.

A legvalószerübb a merőleges axonometrikus kép.



130. ábra

A 130. ábra a kettős ferde hajk merőleges axonometrikus képének megszerkesztését mutatja nézet /metszési/ módszerrel a 127. ábra elől- és felülnézetének felhasználásával.

A mellékábrában felvett dimetrikus tengelykeresztképen párhuzamos helyzetbe forgatjuk az XY és ZX sikot; kapjuk $X_o Y_o$ és $Z_o' X_o'$-t.

Legyen a hengertengely Z, és ae átmérő X irányu, akkor a parallelforgatott és Y irányban eltolt elölnézet tengelye párhuzamos Z_o'-el; az eltolt felülnézetben $a_1 e_1$ párhuzamos X_o-al.

Ezek figyelembevételével elhelyeztük a két nézetet.

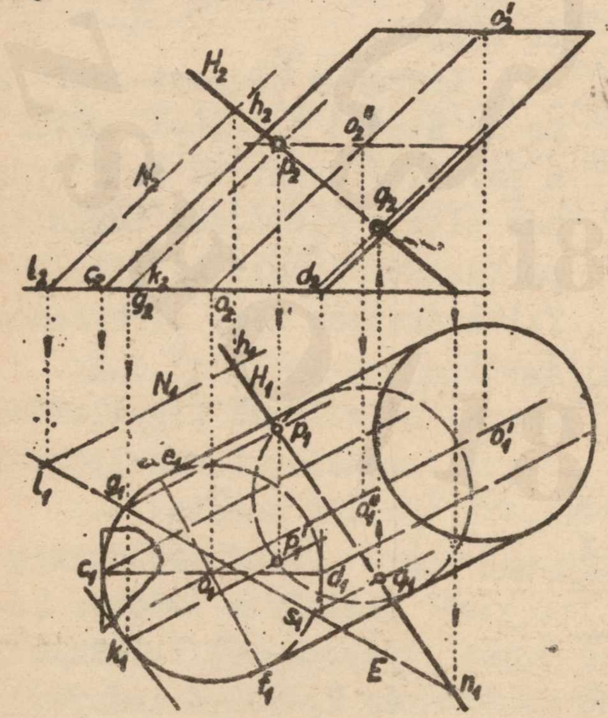
Szerkesszük meg először a fedőkör képét. k_2-ből Y irányu és k_1-ből Z irányu vetitőegyenesek metszéspontja $\bar{k}$. Az l_1 és l_2 vetitősugarainak metszése $\bar{l}$. $\overline{lk}$ az X irányu félátmérő. $\overline{mk}$ az Y irányu félátmérő. $\overline{kn}$ nagytengely merőleges Z-re és egyenlő n_1k_1 sugárral. Az $\bar{n}$ pont az ax. képhatáralkotó kezdő pontja. $\bar{n}$ az elölnézetbe vetitve megadja n_2-őt, s ezen át megrajzolható az ax. képhatáralkotó elölnézete.

Az n_1k_1-nek társa k_1s_1 és s-nek ax. képe a kistengely $\bar{s}$ végpontja. Az eredeti kapcsolatban a rendezőirány merőleges az a_1e_1-re; igy $s_2k_2 = s'k_1$; s_2 és s_1-ből vetitéssel $\bar{s}$. /Vagy s' vetitve $\overline{lk}$-ra, a kapott pontból huzott Y irány kimetszi $\bar{s}$-et/

$\overline{ao}$ és $\overline{co}$ a baloldali alsó metszetellipszis féltársátmérői; az ellipszis a t_2-ből vetitett $\bar{t}$-ben érinti a képhatáralkotót. $\overline{eo}$ és $\overline{co}$ a jobb alsó metszet féltársátmérői. Megszerkesztjük $\overline{fu\omega}$ egyenest, majd a jobb felső metszés $\overline{l'\omega}$ és $\overline{hh'}$ valamint a bal felsőnek $\overline{l\omega}$ és $\overline{gg'}$ társátmérőit. Utóbbi ellipszis $\bar{w}$-ben érinti az alkotót. $\overline{au}$ és $\overline{ue}$ a metsző egyenesek.

VIII. F e r d e k ö r h e n g e r.

53./ Ábrázolás, érintősik, felületi pont. A 131. ábrában a vizszintes alapkör középpontja o, a fedőköré meg o'. Az oo' tengely s a vele párhuzamos alkotók nem merőlegesek az alapkör sikjára, a henger ferde körhenger /általános másodrendü henger/. Az alapkör c és d pontjain átmenő alkotók a második képhatáron, az e és f pontok alkotói meg az első képhatáron vannak.


131.ábra

c és d-ben az alapkör érintők Π_2-re merőlegesek, s igy az ezek és az alkotók által meghatározott érintősikok is második vetitők. Elölről nézve látható a hengernek az alapkör cfd ivét tartalmazó része.

e és f-ben az alapkör érintők és az alkotók első képe összeesnek, az érintősikok első vetitők. Felülről nézve látható a hengernek az alapkör ecf ivét tartalmazó része.

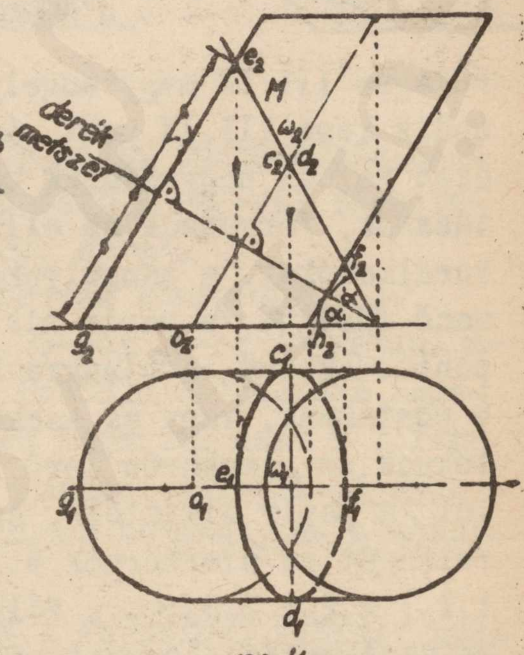
A henger /végtelen sokoldalu hasáb/ párhuzamos sikmetszetei összeillők /az affin tengely a végtelenben van/, az alapsikkal párhuzamos metszetei egyenlősugaru körök, középpontjaik oo′ tengelyen vannak.

A hengerpalást "p" pontja p_2 képének megfelelő p_1-et gp /g_2p_2, g_1/, illetve kp /k_2p_2; k_1/ alkotókkal, vagy o″ /$o_2''o_1''$/ középpontu körrel kaphatjuk meg. p_2' elölről, p_1 és p_1' meg felülről látható.

gp és kp′ alkotók a hengernek az alkotóival és tengelyével párhuzamos második vetitősikmetszete.

54./ Egyenes döfése hengerrel. A segédsikot meghatározza H és ezt h-ban metsző s a hengeralkotókkal párhuzamos N /131. ábra/. A hengeralapkörsikon levő E nyom az n és l nyompontokat összekötő egyenes. Ennek az alapkerülettel való g /g_1/ és s /s_1/ metszéspontjaiból kiinduló alkotók H-t a p és q döféspontok p_1 és q_1 képeiben metszik. p_1 látható, q_1 fedett. Rendezővel p_2 és q_2; p_2 fedett, q_2 látható.

55./ A ferde körhenger körmetszetei. A 132. ábrán a hengernek a tengelyét tartalmazó szimmetrálsikja, fősikja, párhuzamos Π_2-vel merőleges az alapkör sikjára. A henger tengelyére merőleges derékmetszet sikjával ugy az alapsik, mint a szimmetrálsikra merőleges M sik α szöget képez. Az M sikmetszet, mint a henger-hasábnak antiparallel sikmetszete, az alappal összeillő kör. A metszetnek egymásra merőleges társátmérői a Π_2-vel párhuzamos ef /e_2f_2 = = g_2h_2= 2r/ és a Π_2-re merőleges cd /c_1d_1 = 2r/. Felülnézetben ced a látható félkör.

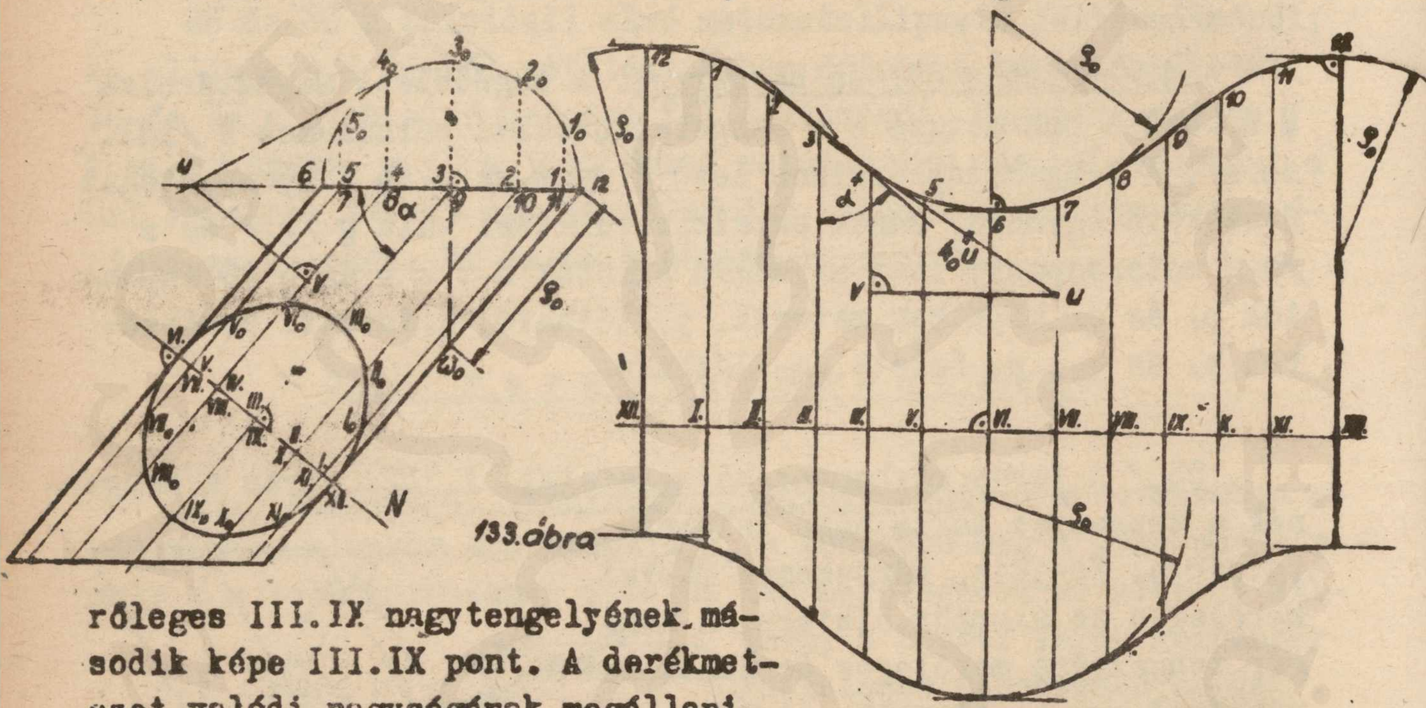


132. ábra

A körhengernek ugy az alapsikkal, valamint M sikkal párhuzamos metszetei körök. A tengelyével nem párhuzamos más irányu metszetei ellipszisek.

56./ Ferde körhenger sikbafejtése. A ferde körhenger tengelye Π_2-vel párhuzamos /133. ábra/. Ilyen kedvező helyzet transzformációval mindig elérhető. A palástot, mint a hasábnál, a derékmetszet felhasználásával fejtjük sikba. A derékmetszet megadja a hasáb kerülstének hosszát az alkotókra merőlegesen mérve. A sikbafejtés megközelitő.

A tetszőleges helyen felvett második vetitő N derékmetszet ellipszisnek második képe VI.XII távolság, s ez egyuttal Π_2-vel párhuzamos kistengelyének valódi nagysága. /Az érintő VI. és XII.-ben, két vetitősik metszete; Π_2-re merőleges./ A Π_2-re me-



133.ábra

rőleges III.IX nagytengelyének második képe III.IX pont. A derékmetszet valódi nagyságának megállapitásához, forgassuk az ellipszist VI.XII tengelye körül, a konturalkotókat, a tengelyeket és az alapkör 6.12 átmérőjét tartalmazó fősikba /a papir sikjába/. E forgatásnál az I, II, III ... pontok akkora távolságra kerülnek VI.XII átmérőtől, mint amekkora e pontoknak, vagy az azokon átmenő alkotóknak, illetve az alkotóknak az alapkörön levő 1,2,3 ... pontjainak távolsága a fősiktól /a papir sikjától/. Az alapkör 1.2.3 ... pontjainak ezen távolságát az alapkörnek 6.12 átmérő körüli parallelforgatással 1.1_0; 2.2_0; 3.3_0; ... félhurok adják meg. E félhurokat a derékmetszet megfelelő pontjai leforgatásánál, a szimmetrikus helyzet miatt, két irányban felmérve, /$I.I_0 = XI.XI_0 = 1.1_0$; $II.II_0 = X.X_0 = 2.2_0$/Az I_0; II_0; III_0... pontok a derékmetszetellipszis valódi nagyságának pontjai.

Hasitsuk fel a palástot 12.XII alkotó mentén, s teritsük belsejével a papirra. Egy egyenesre VI.-tól kezdve felmérjük a $VI.V_0$=$VI.VII_0$..., $V.IV_0$=$VII.VIII_0$... iveket helyettesitő hurokat, kapjuk a derékmetszet megközelitő kiegyenesitett hosszát. Erre az osztáspontokban állitott merőleges alkotókra felmérjük az alkotóknak a derékmetszettől az alapkörig terjedő darabjainak a képből vett VI.6; VII.7=V.5 ... valódi hosszát, majd a kifejtésben igy megkapott 12.1.2 ... pontoktól az alkotóknak a képből vett egyenlő valódi nagyságát.

A 12. és 6. pontokban a fedőkörérintő az alkotókra merőleges, a kifejtésben is merőleges; 3 és 9-ben az érintő az alkotóval α szöget alkot, inflexiós érintő; a kör 4-es pontjábani érintő az alkotóval bezárt szögét a 4.u.v derékszögü háromszöggel visszük át a kifejtésbe. 4.v az alkotódarab befogó valódi nagysága a képben és a kifejtésben 4_0u az átfogó érintődarabnak a valódi nagysága, ezzel egyenlő 4u a kifejtésben.

Az alapkör görbületi sugara a 6 és 12 pontokban a kifejtésben a forgáshengernél is ismertetett elv szerint változik és ϱ_0 lesz.

IX. Forgáskúp.+

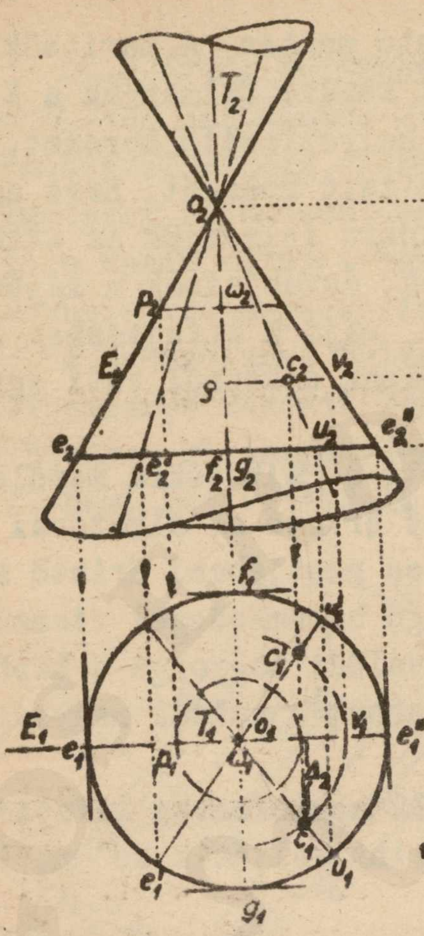
57./ Származás, felületi pont, érintősik. Forgáskúpfelület keletkezik, ha a függőleges T-t o-ban metsző s Π_2-vel párhuzamos E egyenest T körül megforgatjuk /134. ábra/.

E egyenes bármely p pontja pályakörének középpontja ω, sugara ωp távolság. E kör első képe ω_1-ből p_1-en át rajzolható kör, elölnézete átmérőnyi távolság. Hasonló helyzetü E egyenes "e" pontjának pályaköre, s igy ennek képei is. Ezek a T forgástengelyre merőleges siku körök a forgáskupfelületek párhuzamos körei. Ha a kupfelület pl. e párhuzamos körével, az alapkörrel határoljuk, kupot kapunk.

A származtatásból következik, hogy a kuppalást bármely pontján át párhuzamos kör és alkotó halad át.

Az e és e" pontokban az érintősikot meghatározza az alkotó

+lásd: Ábr. geom. I. 56. pontot is.



és a párhuzamos kör érintője. Mivel utóbbi Π_2-re merőleges, azért e két alkotómenti érintősik is vetítő, azaz ez a két érintési alkotó a második kontur. E két alkotó közötti felénk levő kuppalást elölnézetben látható.

Az fo és go alkotómenti érintősikok harmadik vetítők, ezek a harmadik konturalkotók, az feg félkört tartalmazó félkup látható az oldalnézetben. Felülnézetben a teljes kuppalást látható.

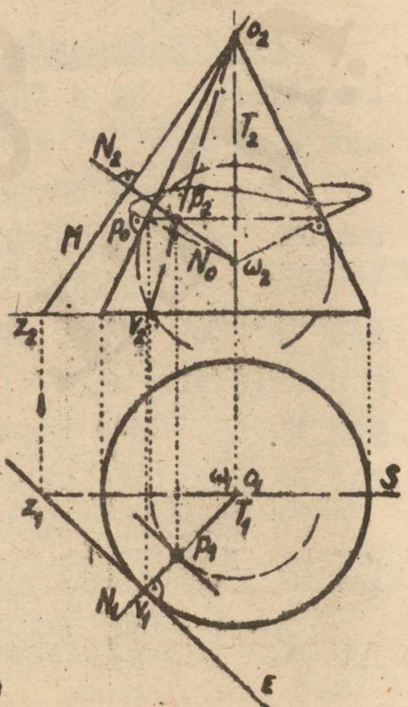
134. ábra

A kuppaláston levő c pont c_2-jének c_1-ét parallelkör, vagy alkotó segélyével nyerhetjük. A parallelkör sugara $v_2 g$, ennek felülnézetén van c_1 illetve c_1'. Az alkotó második képének u_2 pontja első képben az alapkörön u_1 és u_1'-ben van, s ezen c_1 és c_1'.

Ha c_1-ből c_2-t keressük, akkor c parallelkörének a konturalkotón levő v_1 pontját rendezzük az alkotókra v_2-be, ezen át rajzoljuk az egyenesként jelentkező parallelkört. Az alkotónál u_1- u_2 a szerkesztés menete. c_3 és c_3' a második differenciával nyerhető.

Az uo és u'o kúpalkotók egy a kúp csúcsán átmenő sikot határoznak meg, s ez a kúpot két alkotóban metszi.

Abból, hogy az alkotó felülnézete körsugár, a körérintő meg vizszintes, következik, hogy az alkotók a párhuzamos köröket merőlegesen metszik.



135. ábra

A forgáskúpot /135. ábra/ p-ben, illetve op alkotóban az érintősikot meghatározza az alkotó és a párhuzamos kör, illetve az alapkör E érintője v-ben. E az érintősik nyoma az alapkör sikján.

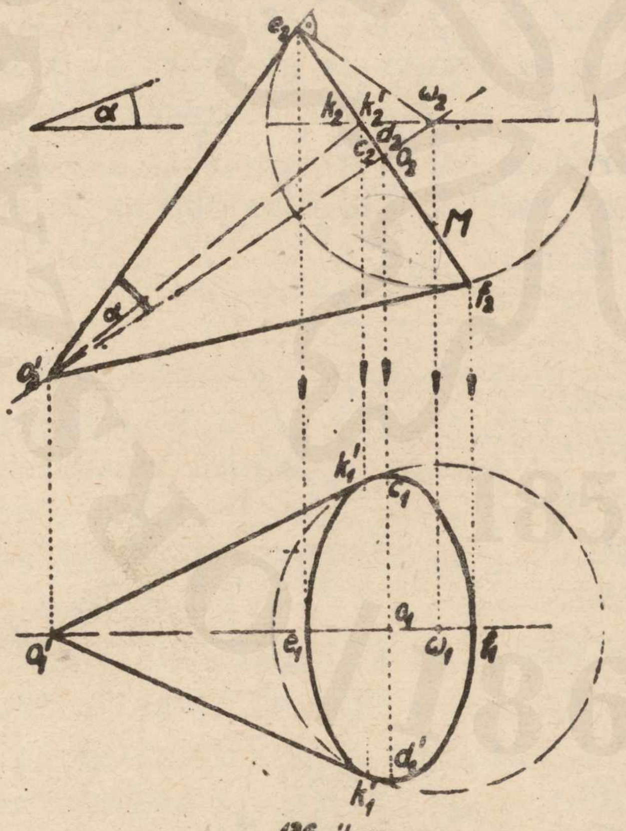
Az érintősik nyomát a második konturalkotók sikján, az S szimmetrálsikon megadja az érintési alkotónak o és az E nyom z döféspontjának összekötése. $o_2 z_2 = M$.

p-ben az érintősikra merőleges az N kúpnormális. Az E nyomra merőleges N_1 az alkotó képével összeesik; N_2 merőleges az M második fővonalra. N merőleges ov alkotóra és ω-ban metszi a kúptengelyt. Ha az alkotót s az N normálist a kúptengely körül megforgatjuk, akkor az alkotó a kúpot, a normális meg p parallelkörének egyes pontjaihoz tartozó normálisokat irja le, s ezeknek összesége ugyancsak egy forgás-kúp, az eredetinek a normál-kúpja.

$\omega_2 p_0$ a kupot p párhuzamos körében érintő gömbnek a sugara.

58./ Ferde tengelyü forgáskúp ábrázolása. oo′ a kúp magassága, o′ a csúcsa. α a kúp félnyilása /136. ábra/.

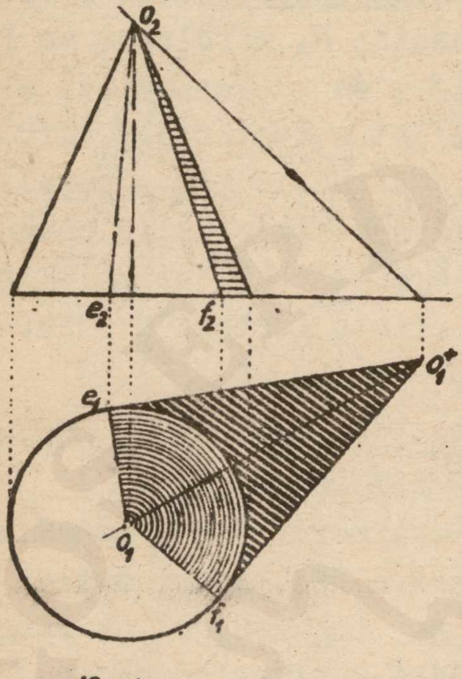
Az alapkör sikja az o-n átmenő oo′-re merőleges M második vetitősik. A körkúp elölnézete egyenlőszáru háromszög, szárai az oo′ magassággal α szöget bezáró konturalkotók. $e_2 f_2$ az alapkör második képe. ef és cd az alapkör társátmérőpárja, $e_1 f_1$ és $c_1 d_1$ a képellipszis tengelyei.



136. ábra

Az első képhatáralkotók azok, amelyek mentén a kúp érintősikja első vetitő. Megállapitásukhoz ábrázoljuk a kúpot az alapkörében érintő gömböt. Ennek középpontja a kúptengelyen ω /ω_2 ω_1/, s rádiusa $e_2 \omega_2$. A kupalapkör egyuttal gömbi kör is.

E közös kör egy-egy pontjához tartozó gömbi érintősik a kúpnak is érintősikja, s ha a gömbi érintősik első vetitő, ugy ez a kúpot az első konturalkotó mentén érinti. Az első vetitő érintősikok a gömböt az egyenlitő pontjaiban érintik. Az egyenlitőkör második képe a közös kúpalapkört k_2 és k_2' pontokban metszi, tehát k és k' pontokban a gömb és kúp közös érintősikja első vetitő. k_2o_2' és $k_2'o_2'$ az első konturalkotók második képe. k_1 és k_1' a gömbi egyenlitő első képén van, $o_1'k_1$ és $o_1'k_1'$ az első képhatáralkotók. Az ellipszis, az egyenlitőkör és a konturalkotók k_1 és k_1'-ben érintkeznek.

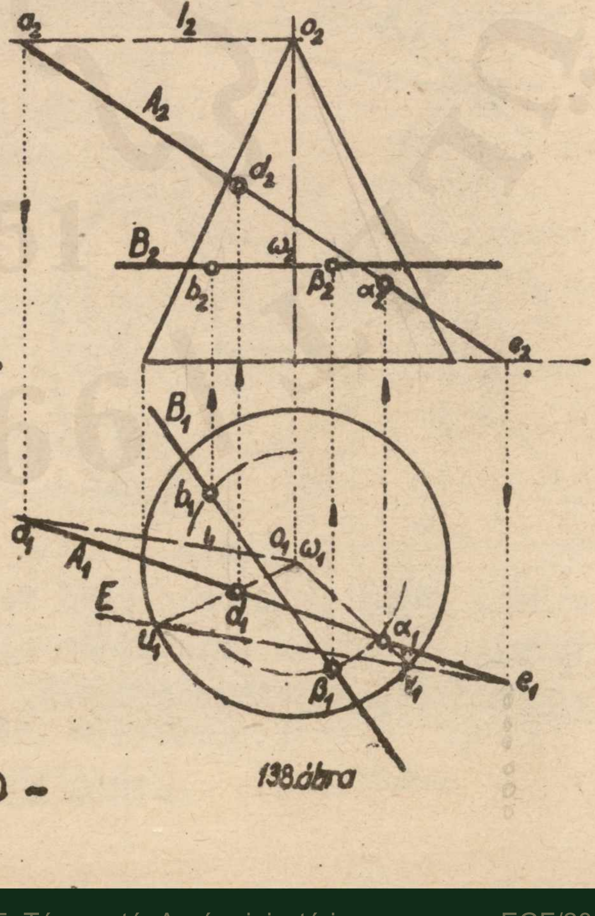


137.ábra

59./ A kúp önárnyékhatára. Az önárnyékhatáralkotómenti érintősikok a fényiránnyal párhuzamos fénysikok. /137. ábra/. Ezek az érintősikok áthaladnak a kúp csúcsán, s tartalmazniok kell a fénysugárral párhuzamos egyenest. Ez az egyenes a csúcson átmenő fénysugár, s az ezen áthaladó fénysikoknak az alapkör sikján levő nyoma e fénysugárnak az alapkör sikjával való o_1^+ döfésén és érinti az alapkört e_1 illetve f_1-ben. e_1o_1 és f_1o_1 illetve e_2o_2 és f_2o_2 az önárnyékhatáralkotók képei. A fény haladási értelme miatt a nagyobbik kúppalást a megvilágitott. Az önárnyékos részből előlnézetben az fo és a második kontur közötti rész látható. $e_1o_1^+f_1$ és e_1f_1 kisebbik iv által határolt terület a kúpnak az alapsikra vetett árnyéka.

A kúp önrányékhatáralkotóit e szerint megkapjuk, ha a csúcsnak az alapsikra vetett árnyékából érintőket huzunk az alapkörhöz, az érintési ponton átmenő alkotók az önárnyékhatár-alkotók.

A kúp vetett árnyéka valamely sikon az önárnyékhatáralkotók és a közöttük levő önárnyékhatár körivnek /körnek/ a vetett árnyéka által bezárt terület.



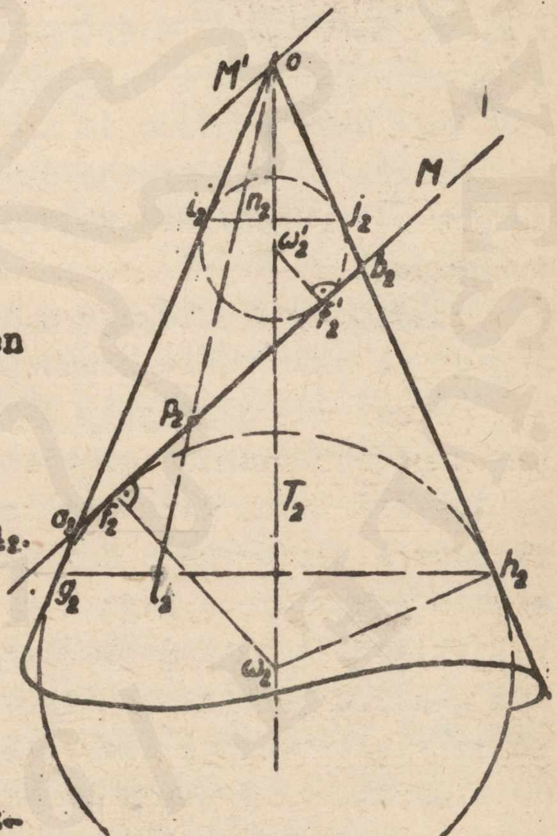
138.ábra

60./ Egyenes döfése forgáskúppal. A vizszintes B döfésének megszerkesztésénél /138. ábra/ a segédsik B-nek vizszintes vetitősikja. Ez a kúpot ω középpontu körben metszi; b_1 és β_1 a döféspontok első képe, rendezővel b_2 és β_2. Felülről mindkettő, elölről β látható.

"A" döfésének megszerkesztésénél a segédsik az o csúcson halad át. Az o-n átmenő I. fővonal A-t a-ban metszi, $o_1a_1 = l_1$; s ezzel párhuzamos az alapsikon levő É nyom és egy pontja A-nak e nyompontja. A segédsikkal kimetszett alkotók u_1o_1 és v_1o_1 első képei A_1-et a döféspontok d_1 és α_1 képeiben metszik. Rendezővel d_2 és α_2. Mindkettő látható.

DANDELIN – gömb

61./ A forgáskúp ellipszismetszetéről. A 139. ábrán a π_2-vel párhuzamos tengelyü forgáskúpfelület M második vetitősikmetszetének második képe M-nek a konturalkotók közötti a_2b_2 darabja. Az ω középpontu gömb a kupot gh körben, M sikot f-ben érinti; az ω' középpontu gömb érintési köre ij és f'-ben érinti az M sikot. A sikmetszet egy p pontján átmenő kúpalkotó a gömböket n illetve l-ben érinti, s az nl alkotó darabnak, vagyis p-ből a két gömbhöz huzott érintő darabok összegének a valódi nagysága ig = i_2g_2, illetve jh = j_2h_2.



139.ábra

Ismert, hogy egy pontból a gömbhöz huzott érintőknek a pont és az érintési pont közötti darabjai egyenlők.

E szerint p-ből az ω gömbhöz huzott pf és pl érintők valódi hossza egyenlő; ugyancsak egyenlő p-ből az ω' gömbhöz huzott pf' és pn érintők valódi hossza. Mivel pl + pn = ig, azért pf + pf' = ig.

S mert p a metszetnek tetszőlegesen választott pontja, ez az összefüggés a metszet minden pontjára vonatkozik, azaz a metszésgörbe pontjainak két állandó ponttól, f és f', mért távolságainak összege egyenlő; a metszésgörbe ellipszis.

Az M metszősik nem merőleges a kúp tengelyére, minden alkotót végesben metsz, a csúcson átmenő s a metszősikkal párhuzamos M' siknak csak a csúcs közös pontja a kuppal, sikmetszet ellipszis.

A forgáskúpot párhuzamos körben, a metszősikot a sikmetszet fokuszában érintő ω és ω' gömbök a Dandelin-gömbök.

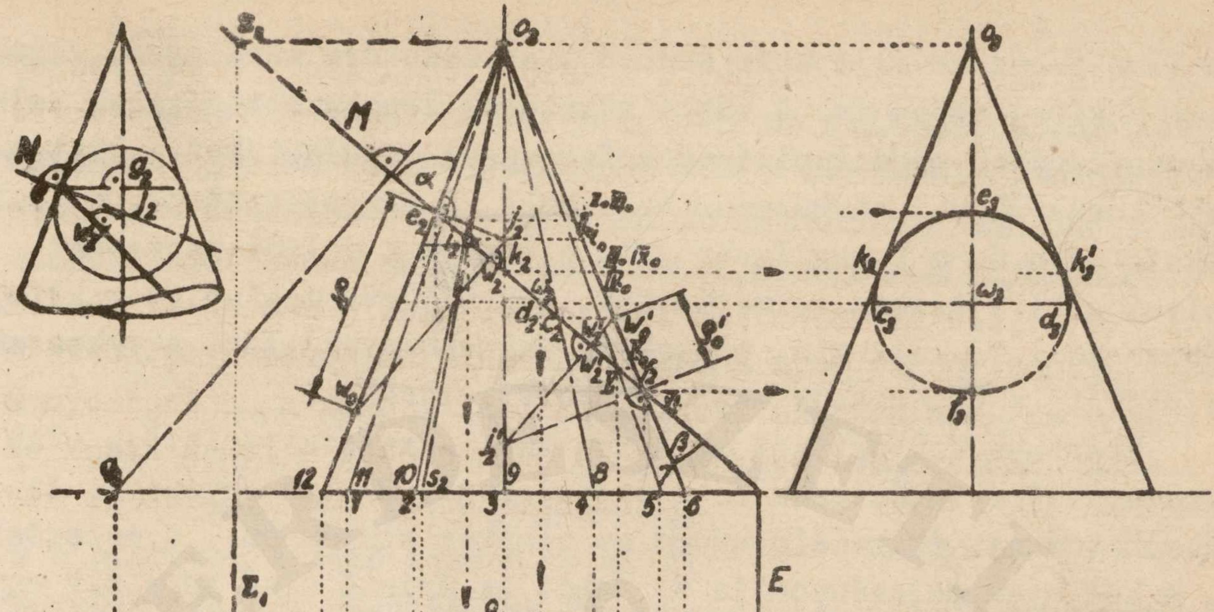
62./ Vetitősik-ellipszismetszet ábrázolása, sikbafejtés.

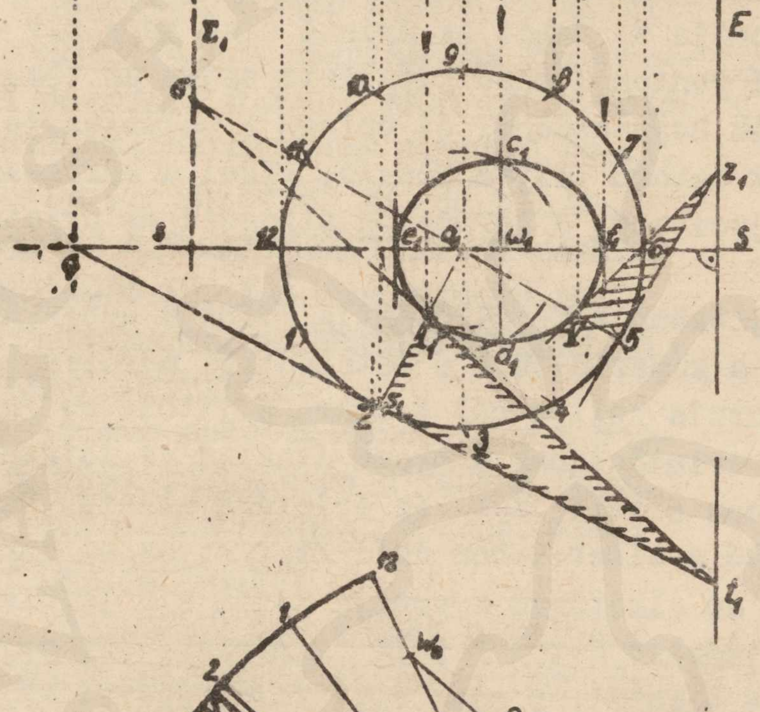
A három nézetében megadott kúp ME vetitősik ellipszismetszetének /140. ábra/ M-be eső elölnézete e_2f_2, rendezővel e_1 és f_1 a konturalkotók első képein; ef párhuzamos π_2-vel. Mindkét pontban a metszet érintője, mint a második vetitő metsző és az érintősik metszőegyenese, egymással parallel és ef-re merőleges, /π_2-re merőleges/ azért ef a metszet egyik tengelye. ω felezési pontjában π_2-re merőlegesen áll a másik tengely, elölnézetben $\omega_2 - c_2d_2$ pont. c és d kúppaláston levő pontok, c_1 és d_1 párhuzamos körrel nyerhetők. e_2f_2 a metszet nagytengelyének, c_1d_1 a kistengelyének valódi hossza. e_1f_1 és c_1d_1 képellipszis tengelyei.

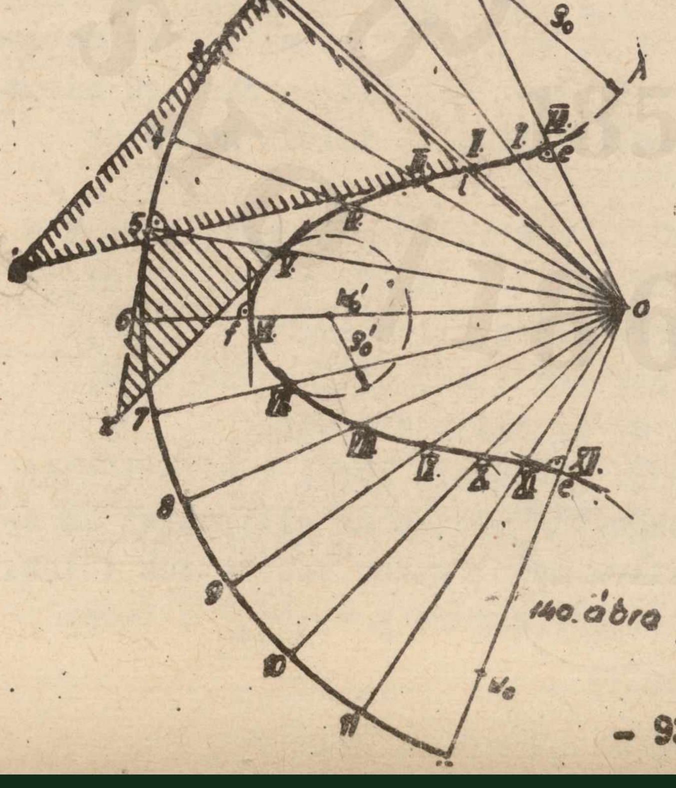
Oldalnézetben $c_3d_3 = c_1d_1$; az elölnézet középalkotóján levő k pont az oldalnézet konturpontja. Látható a kek' iv.

A metszet görbületi köreit e és f pontokban az ezen pontokhoz tartozó Meusnier gömbökkel nyerhetjük /mellék ábra/. Az "e" pontbeli érintőn és normálison átmenő N normálmetszet második vetitősik. Ezen van a Meusnier gömb középpontja. De az e ponton átmenő kúpkör is a kúpnak az érintőn átmenő metszete; ennek görbületi köre önmaga és ez is a gömbi kör. A gömb középpontja tehát g-ben a párhuzamos kúpkör sikjára állitott merőlegesnek a normálsikkal való j döféspontjában van és sugara je. Az e-beli érintőn átmenő M sik a gömböt az ellipszisnek e-beli görbületi körében metszi, középpontja w. Az f-hez tartozó Meusnier-gömb középpontja j', a görbületi körének középpontja w'.

A kúppalást megközelitő sikbafejtéséhez osszuk fel az alapkört pl. 12 részre. Minden alkotó az alapkör érintőjére merőleges, s ez a derékszög a kifejtésben is megmarad. S mert az alkotók egyenlő hosszuak, az alapkör a palást kifejtésben is körív, mégpedig az alkotó $O_2 12$ vagy $O_2 6$ valódi nagyságával rajzolható körnek az alapkör kerülettel egyenlő ive. Ha a 12-es al-







140. ábra

kotója mentén felhasitott és sikbaterített kuppalástot belső felületével fektetjük a papirra, akkor a számozás az ábra szerinti, s a kifejtésben az ivdarabok hurjai az alapkör tizenkettedének hurjával egyenlők /Snellius eljárásával 67. ábra a pontosság fokozható/.

Hogy a metszetet a palást kifejtésében megrajzolhassuk, ábrázoljuk a 12 alkotónak páronként összeeső előlnézetét, s rajzoljuk meg azokat a kifejtésben is. Ezekre rámérendő a sikkal lemetszett darabok hossza. Előlnézetben az 1.o alkotó döfése a sikkal I. 2.o alkotóé II... stb. Az o.XII és o.VI darabok második képe egyben valódi nagyság, s ezek a paláston felmérhetők. XII = e és VI = f-ben az ellipszis érintője az alkotóra merőleges, ilyen lesz a kifejtésben is. A többi alkotóból lemetszett darabok valódi nagyságának megállapitásához forgassuk az alkotókat a kúptengely körül T_1-vel párhuzamos helyzetbe. E forgatásnál pl. az o.5 alkotó az o.6-ra V meg V_0-ba jut. o_2V adja a valódi nagyságot, melyet a kifejtésben felmérhetünk. Igy eljárva megkapjuk a kifejtésben az I.II.III. stb. pontokat. Összekötésük előtt szerkesszünk érintőket, s állapitsuk meg a görbületi köröket.

Szerkesszünk érintőt az V pontban. A metszet érintője oV.5 alkotómenti érintősiknak és a metszősiknak metsző egyenese. Az o5 alkotómenti érintősik nyoma az alapkör sikján $5z_1$, a metszősiké E, a két nyom metszéspontja z_1 tehát az érintő első képe z_1V egyenes. z_1V érintő és az V ponton átmenő kúpalkotó szöge az $V5z_1$ derékszögü háromszög egyik hegyesszöge. 5V befogó a paláston valódi nagyság. $5z_1$ a másik befogó teljes hossza, ezzel a háromszög a palástkifejtésben rajzolható, a háromszög átfogója az érintő V-ben.

A görbének a kifejtésben a <u>fordulópontja</u> /mint a hengernél/ ott van, amely pontban a kúpérintősik a metszősikra merőleges. Ennek a siknak tartalmaznia kell o-ból a sikra állitott oq /o_2q_2, o_1q_1/ merőlegest, s az érintősiknak a nyoma áthalad q_1 döfésponton, s az alapkört s_1-ben érinti; s_1o_1 az érintési alkotó. Rendezővel s_2. Az so alkotó a sikot i-ben döfi /i_2i_1/; az oi darab valódi hossza o_2i_0. Az so alkotónak s pontja 2-től s_12 távolságra van, amelyet a kifejtésben 2-től 3 felé felmérünk. Igy megkapjuk a kifejtésben os alkotót, s ezen o_2i_0 felmérésével az i fordulópontot. Ebben az érintőt az érintősik és metszősik metszete adja meg. i_1t_1 a metszet első képe. Ezt ist derékszögü háromszög segélyével vihetjük át, amikor is s_1t_1 valódi hossz és s-nél van a derékszög.

Az alap és a metszet közötti centrális kollineácioban E a koll. tengelye, ε az ellentengely. Az alapkör $q_1s_1t_1$ érintője végtelenben levő pontjának megfelel az ellentengely σ_1 pontja; s igy σ_1t_1 a $q_1s_1t_1$ körérintőnek megfelelő ellipszisérintő, ennek metszése s_1o_1 alkotóval az i_1 ellipszispont.

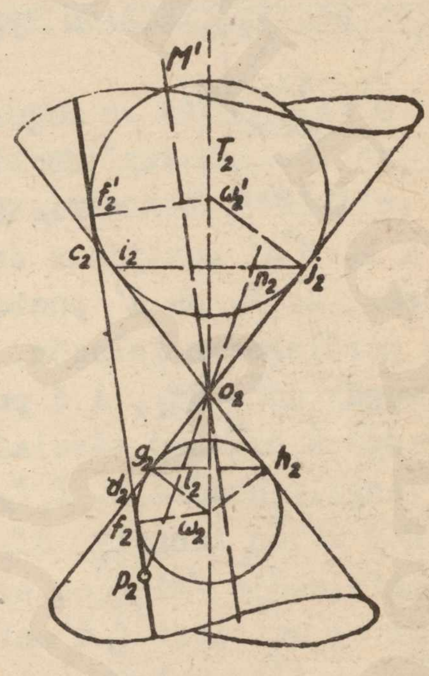
Az ellipszisnek e és f-beli görbületi körei a kifejtésben ugy változnak meg / lásd a hengert / mintha az ellipszist az érintőjével párhuzamos érintősikra merőlegesen vetitettük volna. e-ben a kifejtésben a görbületi kör sugara $\rho_0 = \frac{\rho}{\cos\alpha}$; f-ben

$\varrho_0' = \frac{\varrho'}{\cos\beta}$.

Végezetül megállapithatjuk, hogy az ellipszismetszet ef nagytengelye merőleges a metszősiknak a párhuzamos /alap/ kör sikján levő E nyomára, s azon az egyenesen van, amelyben a metszősikra merőleges S-S szimmetrálsik a metszősikot metszi.

63./ A forgáskúp hyperbola metszetéről. A 141. ábrán az ω és ω' középpontu Dandelin gömbök a metszősikot f, illetve f'-ben, a kúpot gh, illetve ij párhuzamos körben érintik.

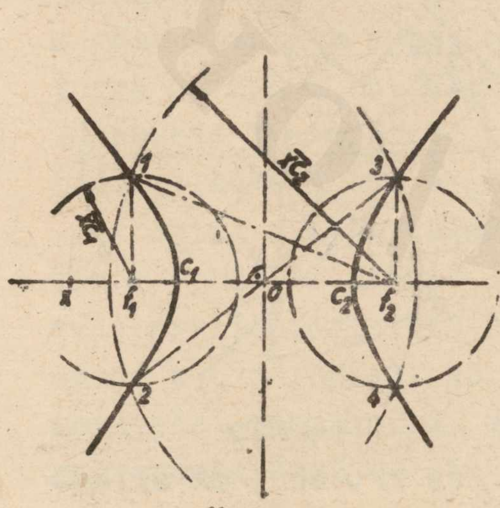
A metszet egy p pontján átmenő, s a gömböket érintő alkotó pn és pl darabjai valódi nagyságának különbsége pn - pl = $h_2 i_2$. S mert pf' érintődarab valódi nagysága egyenlő pn-el, pf meg pl-el; azért $pf' - pf = h_2 i_2$. vagyis: a metszetgörbe tetszőleges pontjának két állandó ponttól mért távolságainak különbsége egyenlő, a metszet hyperbola.



141.ábra

A kúp csúcsán áthaladó s a metszősikkal párhuzamos M' sik a kúpot két alkotóban metszi, s a metszősik ezekkel párhuzamos.

Két alkotóval párhuzamos sik a kupot hyperbolában metszi, a két alkotó a sikot a hyperbola két végtelenben levő pontjában döfi.



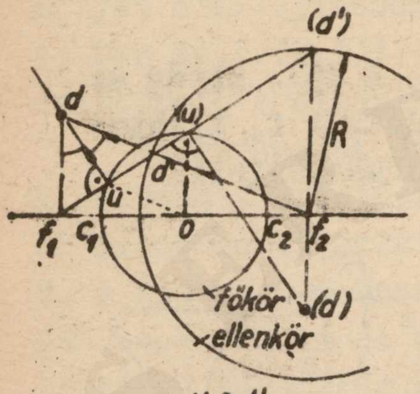
142.ábra

64./ A hyperbola. Az előbbi meghatározás szerint a hyperbola azon pontok mértani helye, amelyeknek két adott ponttól, a gyujtópontoktól mért távolságainak különbsége egyenlő az adott távolsággal.

Ha cc_1 a távolság, f_1 és f_2 a gyujtópontok /142. ábra/ és $f_1 c_1 = f_2 c_2$ akkor c_1 és c_2 hyperbola pontok, mert $f_2 c_1 - f_1 c_1 = f_2 c_1 \quad f_2 c_2 = c_1 c_2$ állandó távolság.

Az egyik fokuszból rajzolt xc_1 sugarú kört a másikból rajzolt xc_2 sugaru kör hyperbola pontokban metszi, mert pl. $f_2 1 - f_1 1 = xc_2 - xc_1 = c_1 c_2$. S igy 1, 2, 3, 4 hyperbola pontok, $f_2 1$ és $f_1 1$ a vezérsugarak.

A hyperbola pontok symetrikusan helyezkednek el a hyperbolát c_1 és c_2 csúcsaiban metsző $f_1 f_2$ egyenesre, ez a valós tengely, valamint ezt o felezési pontjában merőlegesen metsző képzetes tengelyre. A hyperbola o középpontja felezi a rajta átmenő hurokat, pl. 2.3-at a hyperbola átmérőit.



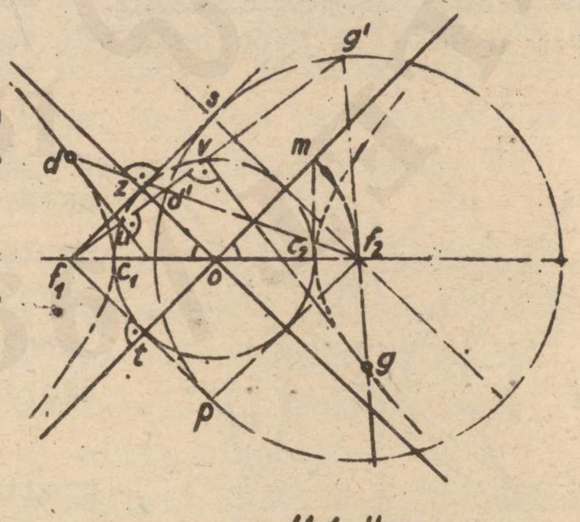
143.ábra

A 143. ábrán adott f_2 középpontu R sugaru kör és körön kivüli f_1 pont. Szerkesztendők az f_1-en áthaladó s a kört érintő körök középpontjai.

A kört d′ pontjában érintő kör középpontja $f_2 d'$ centrálison lesz, az f_1 és d′ pontokon átmenő kör középpontja meg $f_1 d'$-t u-ban merőlegesen felezőn, vagyis a két egyenes d metszésében. A körsugár $dd' = df_1$, A d pont hyperbola pont, mert $df_2 - df_1 = df_2 - dd' = R$ állandó távolsággal; f_2 és f_1 a gyujtópontok, a reális tengely hossza R, $f_1 f_2$ távolságot felező o a középpont, $c_1 c_2 = R$ a valós tengely, df_1 és df_2 a vezérsugarak, s ezeknek du szögfelezője /mint az ellipszisnél/ az érintő d-ben.

Mivel u felezi $f_1 d'$-et o meg $f_1 f_2$-őt, következik, hogy uo párhuzamos $d' f_2$-vel és fele annak, azaz u pont a valós tengely fölé rajzolt főkörön van. Az egyik fokuszból a valós tengely hosszával rajzolt kör az ellenkör, az ezen levő d′ ellenpontja d-nek.

Valós tengelye $/c_1 c_2/$ és gyujtópontjai által adott hyperbola pontjait az előző szerint a következőleg szerkeszthetjük meg. /144. ábra/



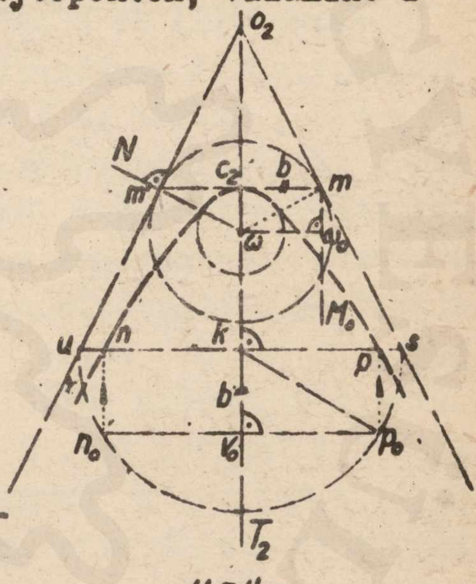
144.ábra

Megrajzoljuk a főkört $c_1 c_2$ fölé, s egyik pl. f_2 fokuszból az ellenkört. A másik fokuszból, f_1-ből huzott tetszőleges egyenes a főkört u /és v/ -ben, az ellenkört d′/és g′/ -ben metszi. u /v/-ben az egyenesre állitott merőleges az érintő, az ellenkör f_2 középpontjának és $d'/g'/$ -nek összekötése kimetszi d /g/ érintési pontot, a hyperbola pontot.

d és g-ben az érintők párhuzamosak, s igy d és g összekötése egy az o középponton átmenő <u>átmérő</u>, társa az érintőkkel párhuzamos.

Ha az u és v metszéspontok z érintési pontban összeesnek, akkor d' és g' is összeesik s-ben, z-ben f_1z-re állitott merőleges hyperbola érintő o-n halad át, és az ezzel párhuzamos f_2s a <u>végtelenben levő érintési</u> pontban metszi oz-t, miért is oz a hyperbola egyik <u>végérintője</u>, asymptotája. A másik az f_1t főkörérintőre merőleges ot. E szerint <u>a hyperbolának két pontja van a végtelenben</u>.

c_2-ben c_1c_2-re merőleges csúcsérintő az asymptotát m-ben metszi. Az oc_2m és ozf_1 derékszögü háromszögek összeillők, az átfogók egyenlők, om = of_1. Vagyis a gyujtópontok, valamint a csúcsérintő és asymptota metszéspontja a középponttól egyenlő távolságra vannak, s igy o-ból om sugárral rajzolt kör a valóstengelyt f_1 és f_2 fokuszokban metszi. De a főkör és asymtota z metszéspontjából az asymptotára állitott merőleges is kimetszi a fokuszt. c_2m-el egyenlő a képzetes tengely félhossza /146. ábra is/.



145.ábra

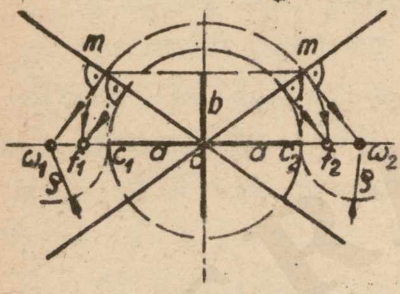
A 145. ábrán az m ponton átmenő Π_2 -re merőleges kúpérintőn átmenő sikmetszetek m-beli görbületi köreit tartalmazó Meusnier gömb középpontja ω, a gömb érinti a kúpot mm' körében. Az m-en átmenő és Π_2-re merőleges M_0 sik a kúpnak két alkotójával párhuzamos, s igy ezek elölnézete T_2-re esik, a sik a kúpot hyperbolában metszi. Az m-beli görbületi kör a gömbnek ω_0 középpontu ω_0m sugaru köre.

Ezzel a hyperbolával összeillő az a hyperbola, amelyet mm' kör c_2 pontján átmenő Π_2-vel párhuzamos sik /M_0-nak T körül Π_2-vel parallelforgatott helyzete/ kimetsz. E hyperbola képének csucs c_2, görbületi körének középpontja ω, s a konturalkotók, amelyeket a metszősik végtelenben talál, az asymptotái; m'cm meg csúcsérintője.

E szerint a <u>csúcsérintő és asymptota m metszéséből az asymp-</u>

totára állitott merőleges a reális tengelyt a csúcsbeli görbületi kör ω középontjában metszi.

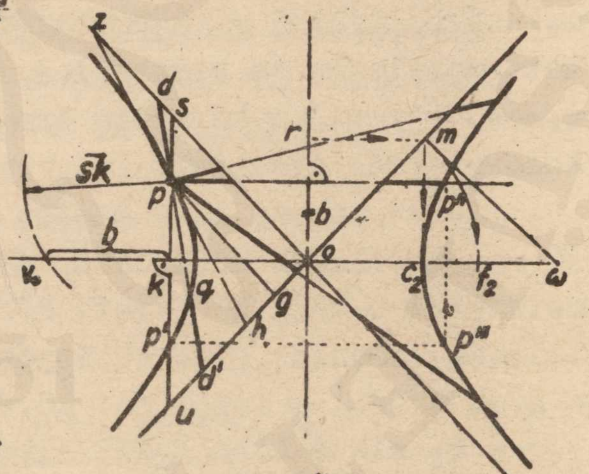
A Π-vel párhuzamos T-től $c_2m = b$ képzetes féltengely hossz távolságra levő sik a k középpontu párhuzamos kört uks átmérőtől b távolságra levő hurban metszi. Ennek us körüli parallelforgatott helyzete $n_0v_0p_0$; $kv_0 = b$ és n_0 és p_0 az n és p hyperbola pontok parallelforgatott helyzetei. A kv_0p_0 derékszögü háromszög felhasználásával szerkeszthető p hyperbola pont, illetve megszerkeszthető az asymptota s pontja, megállapitható b hossza.



146.ábra

A 146. ábra a valós és képzetes tengelyei által adott hyperbola asymptotái, fokuszai, görbületi körei középpontjainak megszerkesztését mutatja az eddigiek alapján.

Asymptotái és p pontja által adott hyperbola /147. ábra/ tengelyirányai a szögfelezők, s ezekhez szimmetrikusak p′, p″ és p‴ pontok, amikor is a metszőknek a hyperbola és asymptota közötti darabjai egyenlők, pl. ps = p′u. Ez a tétel nemcsak a tengelyekkel párhuzamos, hanem minden metszőre érvényes, s igy p-n át huzott tetszőleges irányu dpqd′ metszővel q hyperbola pontot kapunk, ha pd = d′q /Hyperbolánk H′ térbeli hyperbola parallel vetületeként fogható fel. H′-ön megfelel p-nek p′; H′ asymptotáinak képe a vetület hyperbola asymptotái, tengelyeinek képe azonban nem tengelyei, hanem társátmérői a képhyperbolának, igy H′-nek p′-en átmenő s H′ tengelyeivel párhuzamos metszőinek képe sem párhuzamosak a képhyperbola tengelyeivel, de az asymptoták által lemetszett egyenlő darabok képe egyenlő marad.



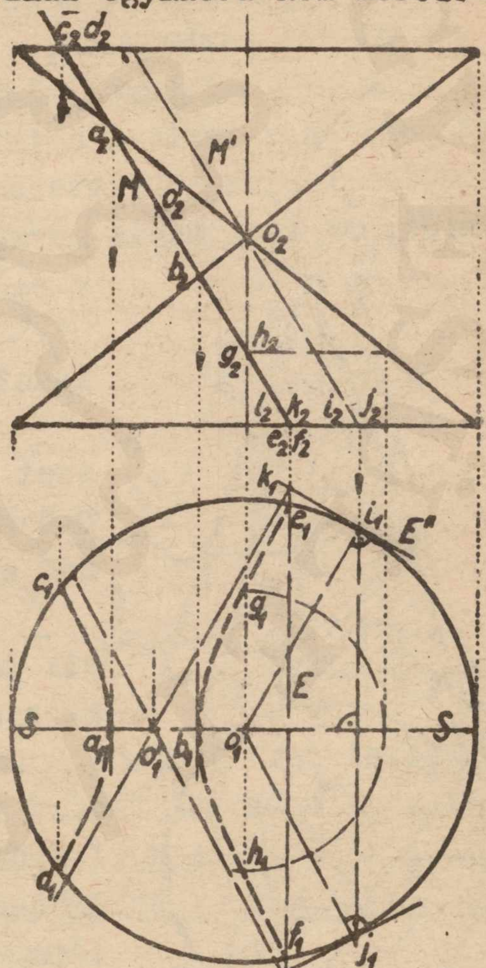
147.ábra

H′ hyperbola vetitőhengerét, illetve asymptotáinak vetitő sikját egy sikkal metszve, H″ hyperbolát kapunk; H″ és képhyperbolánk között is az előbbi kapcsolat áll fenn, aminek folyamánya, hogy p-n átmenő, s az előzőtől eltérő irányu metszőnek is egyenlők a hyperbola és az asymptota közötti darabjai. További sikmetszettel ismét más irányu metszőt kapunk. S ez vég nélkül folytatható/.

Ha dpqd' metszőt p körül forgatjuk, q közeledik p-hez. Határhelyzetben a metszőből hpz érintő lesz, de ekkor is zp = ph, s igy zh érintő darabnak az egyik asymptotán levő másik asymptota irányu ho vetületét p-nek g vetülete felezi /pg ∥ oz és go = gh/.

A hyperbola csúcsát nyerendő, megszerkesztjük a 145. ábra szerint kv_0p háromszög felhasználásával a képzetes tengely b hosszát, amihez p-ből sk = uk sugárral v_0-ban elmetszük a valós tengelyt, kv_0 = b a képzetes tengely félhossza, ezzel egyenlő or; ebből m és c_2 csúcs, f_2 és ω .

Párhuzamos vetitésnél a hyperbola középpontja és asymptotája a képhyperbola középpontja és asympototája lesz, tengelyeinek képe azomban általában a hyperbolának egymásra nem merőleges társátmérői lesznek.



148. ábra

Feladatok: a./ Valós tengelye és gyujtópontjaival adott hyperbolának megszerkesztendők: 1./ egy pontból kiinduló, 2./ egyenessel párhuzamos érintői.

b./ Megrajzolva adott hyperbola tengelyei, fokuszai, asymptotái.

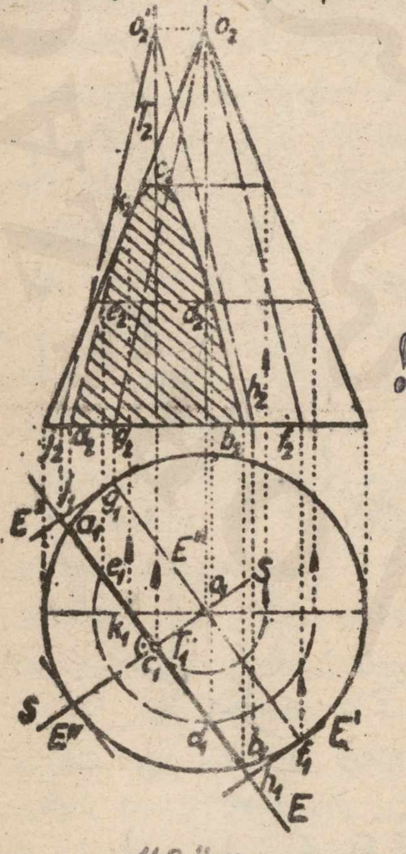
c./ Adva képzetes tengelye és egy hyperbola pont.

! 65./ A forgáskúp vetitőaik hyperbola metszetének ábrázolása. Az ME második vetitő metszősik párhuzamos a csúcson átmenő ME sikkal kimetszett io és jo alkotópárral /148. ábra/. A kimetszett hyperbolaágak elölnézete az ábrázolt kúpon és a kiegészitőjén $a_2c_2d_2$ és $b_2e_2f_2$ egyenes darabok. a_1 és b_1 a képhatáralkotó első képén van, a Π_2-vel párhuzamos ab-nek a és b végpontjaiban a hyperbolaérintő, mint a második vetitő metsző és érintő sikok metszete, Π_2-re és ab-re merőleges, miért is ab a hyperbola valós tengelye. S mert az érintők első képe a_1b_1-re merőleges, azért a_1b_1 a képhyperbola valós tengelye.

A felső és alsó kúp határkörök sugara egyenlő, felülnézetük összeesik. Az e körök elölnézetén levő c_2d_2-nek megfelelő c_1 és d_1-et, valamint e_2 és f_2-nek megfelelő e_1 és f_1-et rendezővel kapjuk.

A g_2 és h_2-nek megfelelő g_1 és h_1-et párhuzamos körrel állapitjuk meg.

A metszősikkal párhuzamos io alkotó az EM sikot végtelenben döfi, s ez a hyperbola egyik végtelenben levő pontja. Ezen ponthoz tartozó hyperbola érintő az oi-menti kúpérintősiknak - nyoma az alapsikon E"- és a metszősiknak - nyoma E - metsző egyenese. Ennek egyik pontja E és E"-nek k /k_1/ metszéspontja. Mivel EM sik oi-vel párhuzamos, a metszőegyenes is párhuzamos oi-vel, vagyis az o_1i_1-el parallel k_1o_1' a hyperbola egyik végtelenben levő pontjához tartozó érintőjének, az asymptotának az első képe. Hasonlóan kapjuk jo végtelenben levő hyperbola ponthoz tartozó érintőt, az l_1o_1' másik asymptotát. Az asymptoták elölnézete az M élbe esik.



149.ábra

Mindkét hyperbolaág felülről nézve fedett.

Ismét megállapithatjuk, hogy a metszet tengelye a metszősikra merőleges S-S kupszimmetrálsik és a metszősik metsző egyenese.

A 149. ábrán a függőleges E metszősik párhuzamos fo és go alkotókkal; a metszet hyperbolaág.

A hyperbola tengelye a metszősik és a rá merőleges S-S kupszimmetrálsiknak függőleges helyzetü T /T_1, T_2/ metsző egyenese. A T_1-el összeeső c_1-nek megfelelő c_2-őt párhuzamos körrel kapjuk. c-ben az érintő vizszintes, mert az oc /o_1c_1/ alkotómenti kupérintősik E"' nyoma az alapkör sikján és E egymással párhuzamosak, s igy metszőegyenesük vizszintes.

Az érintő c-ben merőleges T-re,

c a csúcs.

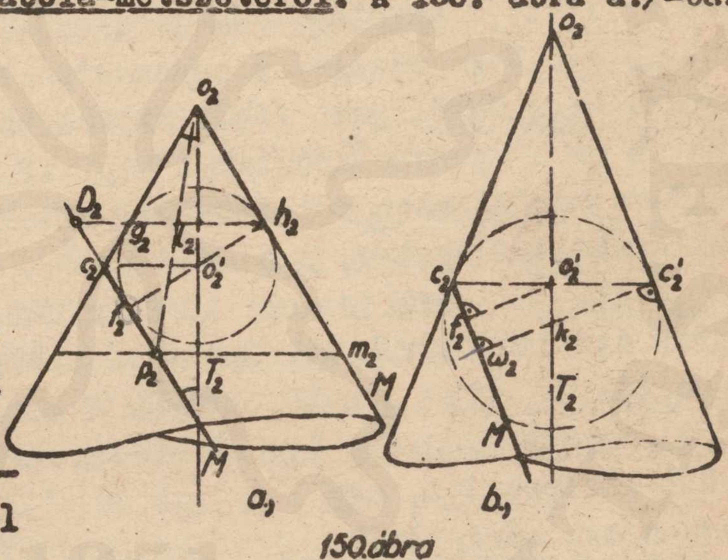
Az alapkör felülnézetén van a_1 és b_1 s egy párhuzamos körön c_1 és d_1; elölnézetük rendezővel. A második képhatáralkotó első képén van k_1, rendezővel k_2. Ebben érinti a konturalkotó a hyperbola képet.

Az fo és go menti kupérintősikok és E siknak fo, illetve go-val párhuzamos ho' és jo' metszőegyenesei /$h_2o_2 \parallel f_2o_2$ és $j_2'o_2' \parallel g_2o_2$/ a hyperbola végérintői. Az o'/o_2'/ hyperbolaközéppont és o /o_2/ vizszintes egyenesen vannak.

A látható félkupon levő bdck iv lenne az elölről látható hyperbolarész. Az ábrán a sikkal lemetszett kúprészt eltávolitottuk.

A hyperbola valódi nagyságát megkapjuk, ha sikját E nyom körül az alapsikba, vagy T körül Π_2-vel párhuzamos helyzetbe forgatjuk; a_1b_1; c_1d_1 a huroknak valódi nagyságai.

<u>66./ A forgáskúp parabola-metszetéről</u>. A 150. ábra a./-ban az M vetitő metszősik párhuzamos az ohm képhatáralkotóval.



150.ábra

A Dandelin gömb a sikot f-ben, a kúpot gh párhuzamos körben érinti. E körsiknak és a metszősiknak <u>Π_2-re merőleges</u> D metsző egyenesének második képe D_2 pont. A metszet egy p pontjának D-től való távolsága párhuzamos Π_2 -vel, s igy valódi nagysága p_2D_2, s ezzel egyenlő m_2h_2. p-ből a gömbhöz vont és egymás között egyenlő pf és pl érintődarabok valódi nagysága egyenlő m_2h_2. Vagyis pD = pf. <u>Tehát a metszetgörbe pontjai egy állandó f ponttól és egy D egyenestől egyenlő távolságra vannak, a metszet parabola</u>; f a gyujtópont, D az irányvonal.

A metszősikkal párhuzamos és a csúcson átmenő sik érinti a kupot az ohm alkotó mentén.

<u>Egy alkotóval párhuzamos sik a kúpot parabolában metszi.</u> Ezen alkotónak a metszősikkal való döfése, a parabolának végtelenben levő pontja.

A jelzett szögek egyenlősége miatt o′ középpont c_2-ből T_2-re állitott merőlegesen van, és $f_2D_2 = 2 \times c_2f_2$.

A b./ ábrán o_2' a Dandelin, k_2 a Meusnier gömb középpontja, f_2 a parabola fokusza, ω_2 a göbületi kör középpontja és a sugár $\omega_2c_2 = 2 \times c_2f_2 =$ az előzők szerint f_2D_2. Vagyis a c-beli görbületi körsugár akkora, mint a fokusz távolsága az irányvonaltól /fél paraméter/.

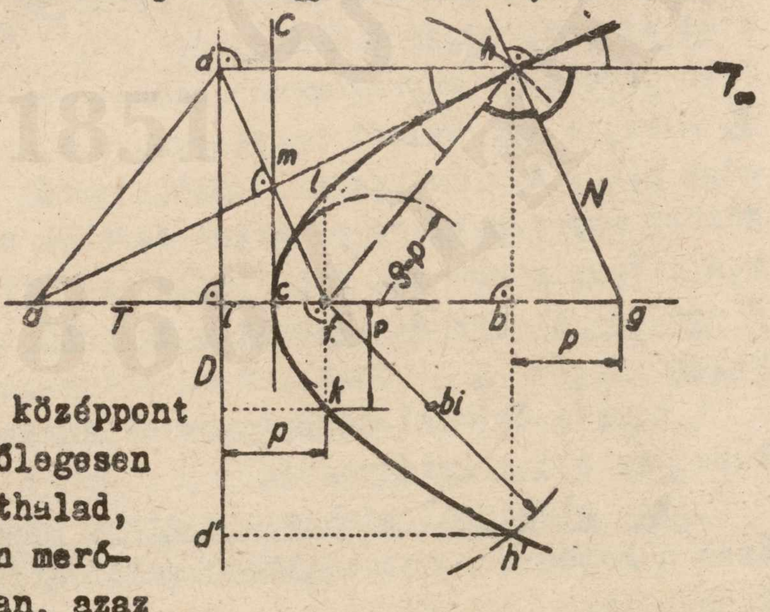
A kör, ellipszis, parabola és hyperbola a kupnak sikmetszetei, ezért kupszeleteknek is nevezzük.

67./ A parabola. A parabola pontjai egy ponttól, a gyujtóponttól, s egy egyenestől, az irányvonaltól, egyenlő távolságra vannak.

E meghatározásnak megfelelően szerkesszünk parabola pontokat, ha adott D irányvonal és f gyujtópont /151. ábra/. f-ből D-re állitott T merőlegesnek fi darabját felező c egy parabolapont. b-ben T-re merőleges egyenes pontjai T-től bi távolságra vannak. Ha e merőlegest f-ből rajzolt bi sugaru körrel elmetszük, h és h′ parabolapontokat kapjuk. Az igy szerkesztett pontok T-re merőlegesen szimmetrikusan helyezkednek el, miért is T a parabola tengelye, c a csúcsa.

A 27. szerint egy kört érintő és a körön belül levő ponton áthaladó körök középpontjai ellipszis pontok, a kör középpontja az egyik gyujtópont. Ha a kör sugara végtelen nagy, a körből egyenes lesz, s igy az ellipszis egyik fokusza, s ezzel együtt középpontja, egy csucs a csucsérintővel együtt a végtelenbe jut, oly körök középpontjait kapjuk, amelyek egy ponton áthaladva, egy egyenest érintenek.

D az egyenes, f a pont. D-t d-ben érintő kör középpontja d-ben D-re állitott merőlegesen lesz, s ha a kör f-en is áthalad, ugy középpontja df-et m-ben merőlegesen felező egyenesen van, azaz a kettő h metszetében. A kör sugara



151. ábra

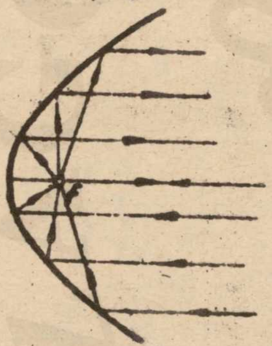
hd = hf és igy h parabola pont.

Az f-en átmenő és a tengelyre merőleges hur fk félhossza a p paraméter, s ez egyenlő fi-vel. Ugyanekkora a c-beli görbületi kör sugara. hf az egyik, a T-vel parallel hf_{∞} a másik vezérsugár s egyben átmérő is. A vezérsugarak kiegészitő szögét felező hm, mint az ellipszisnél, a parabola h-beli érintője. Mert c felezi if-et, ezért fd-nek m felezőpontja a csucsérintőn van. hdaf rombusnak egymást merőlegesen felező átlói df és ha. Ezekből következik, hogy:

az érintőnek az érintési pont és a tengely közötti ha darabját, az érintőt, felezi a csucsérintő. E szerint l és k-ban az érintők il és ik.

Az m felező pontban az érintőre állitott merőleges a fokuszon halad át.

A fokuszból az érintőre merőleges egyenes m metszéspontján áthalad a csucsérintő, a kétszeres távolság d végpontján az irányvonal és az érintési ponton áthaladó átmérő.



152.ábra

A ha érintődarabnak a parabola tengelyén levő merőleges vetületét, az ab subtangenst felezi a csúcs.

Ha egy hmf derékszöget ugy mozgatunk, hogy m csúcsa a csúcsérintőn haladjon, s egyik szára a fokuszon menjen át, akkor a másik szárnak helyzetei a parabolát beburkoló érintők.

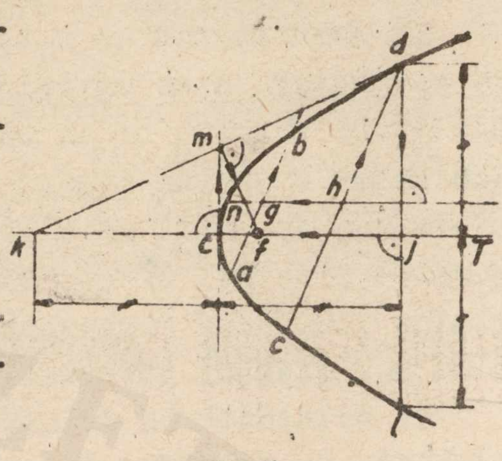
h-ban az érintőre merőleges N a normális, hg darabjának gb vetülete a subnormális. A bgh és ifd háromszögek összeillők és igy bg = if = p.

A parabola minden subnormálisának hossza egyenlő a paraméterrel.

Az N normálisnak a hf és hf'_{∞} vezérsugarakkal bezárt szögei egyenlők, amiből következik: hogy a fokuszból kiinduló fénysugarak, a paraboláról visszaverődve, a tengelyének irányában haladnak, illetve a tengellyel párhuzamos fénysugarak a fokuszba verődnek vissza. /152. ábra. fényszórók/

Ha egy megrajzolva adott parabola tengelyét, fokuszát, stb. kell megszerkeszteni /153. ábra/, akkor az előzők szerint eljárva: ab és cd tetszőleges párhuzamos hurok g és h felezőpontjait összekötő egyenes a parabola tengelyével párhuzamos átmérő /ennek végpontjában az érintő párhuzamos a hurokkal./.

Az átmérőre merőleges di húr j felezőpontján halad át a T tengely és párhuzamos gh-val, s ez kimetszi a c csúcsot. Ha kc = jc, ugy kd az érintő d-ben, s erre m-ben állitott merőleges kimetszi az f fokuszt.

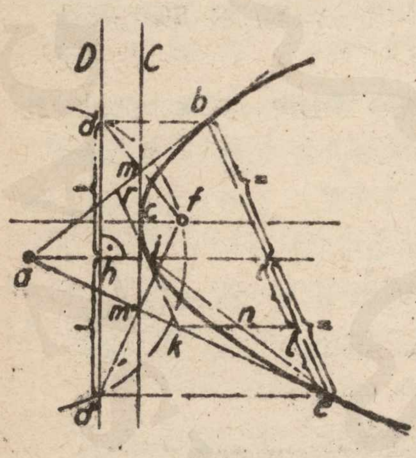


153.ábra

Gyujtópontja, irányvonala, csúcsérintője, tengelye által adott parabolának /154. ábra/ egy "a" pontból kiinduló érintőit a 153. ábra szerint szerkesztjük meg.

a-ból f-en át rajzolt körnek és D-nek d és d′ metszéspontjait f-el összekötő hurokat C csucsérintő m és m′ pontokban metszi. am és am′ az érintők, a tengellyel párhuzamos db és de kimetszik b és e érintési pontokat.

a-ból dd′ körhurra merőleges parabolaátmérő dd′-et h-ban, be hurt meg i-ben felezi.

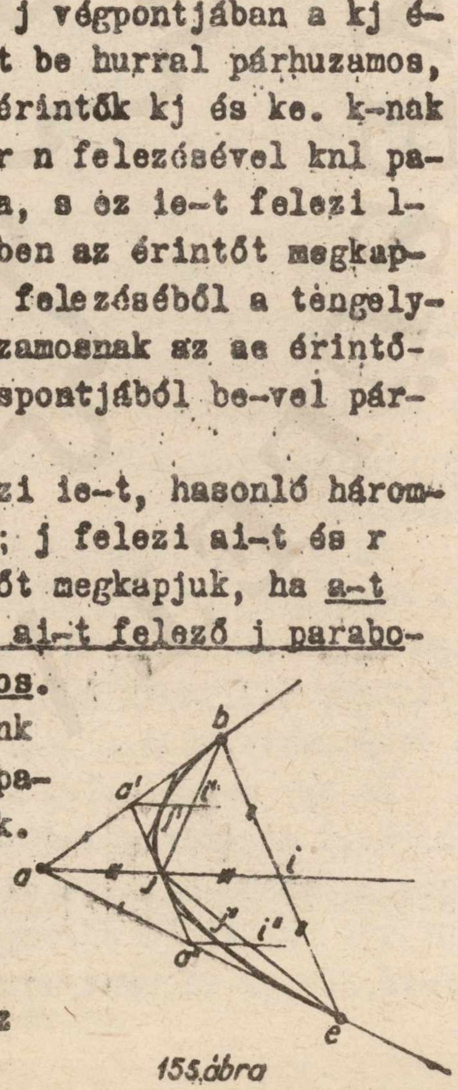


154.ábra

Az ai átmérő j végpontjában a kj érintője a felezett be hurral párhuzamos, s igy k-ból vont érintők kj és ke. k-nak összekötése je hur n felezésével knl parabolaátmérőt adja, s ez ie-t felezi l-ben. Igy tehát j-ben az érintőt megkapjuk , ha ie-nek l felezéséből a tengelylyel huzott párhuzamosnak az ae érintővel való k metszéspontjából be-vel párhuzamosat huzunk.

Mivel l felezi ie-t, hasonló háromszögekből következik, hogy k felezi ae-t; j felezi ai-t és r meg ab-t. E szerint j pontot és az érintőt megkapjuk, ha a-t összekötjük be hur i felezőpontjával, az ai-t felező j parabola pont, j-ben az érintő be-vel párhuzamos.

Ennek megismétlésével szerkeszthetünk parabolapontokat érintőkkal, ha adott a parabola két érintője és az érintési pontok. /155. ábra/.



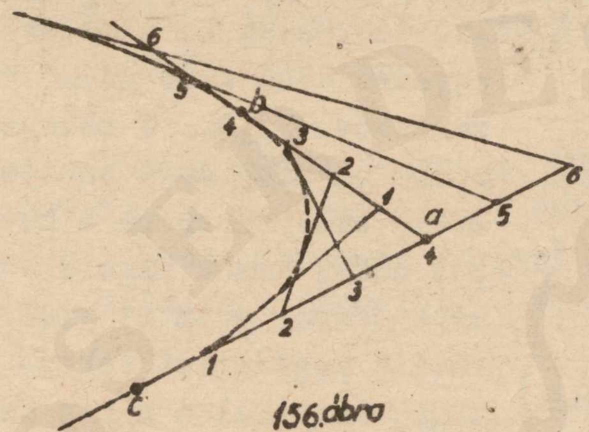
155.ábra

Ebből a szerkesztésből következik a parabolának az alkalmazásokban gyakori szerkesztése, ha adott két érintője és az érintési pontok /156. ábra/.

A parabolát mint érintőinek burkológörbéjét kapjuk. Szerkesztés az ábrából leolvasható.

<u>Feladatok</u>: a./ keressük tengelyé, csucsa, gyujtópontjával adott parabolának egy egyenessel párhuzamos érintőjét.

b./ Fokusza és két érintőjével adott parabolának keresendő tengelye, csúcsa, irányvonala, s az érintési pontok.



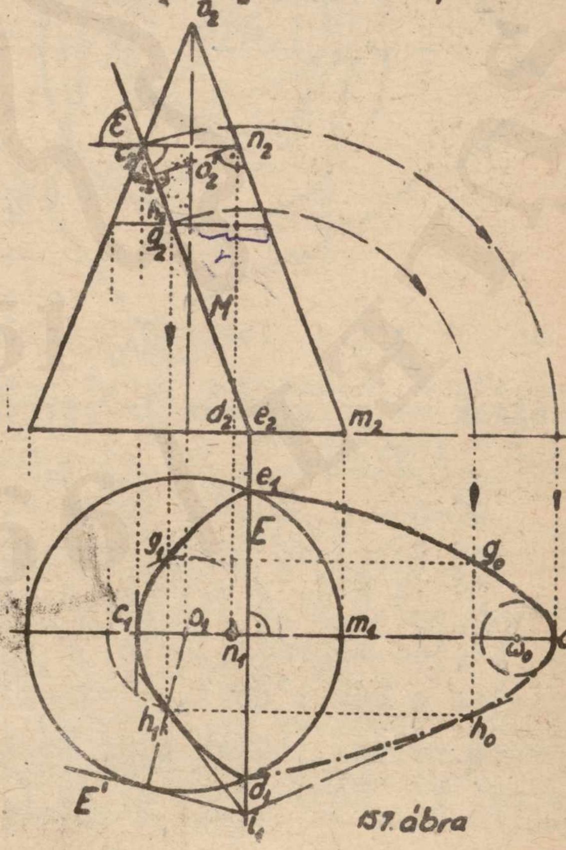
156. ábra

<u>68./ A kúp parabolametszetének ábrázolása.</u> Az om képhatáralkotóival párhuzamos második vetitő ME sik parabolametszetének előlnézete az M-be eső $c_2d_2e_2$ /157. ábra/. c-nek c_1 képe a képhatáralkotón van, c-ben az érintő Π_2-re merőleges. d_1 és e_1 az alapkörön vannak; h_2 és g_2-nek megfelelő h_1 és g_1-et párhuzamos körrel kaphatjuk meg.

A szimmetrikus helyzetből következik, hogy c_1m_1 a képparabola tengelye. h_1-ben az érintő, mint a metsző és érintősik metsző egyenese, az E és E' nyomok i_1 metszéspontjának és h_1-nek az összekötése.

A meg nem rajzolt Meusnier gömb középpontja o'/o_2'/, a c-beli görbületi kör középpontja ω /ω_2/, sugara ωc/$\omega_2 c_2$/.

A Π_1 irány párhuzamos a parabola c-beli érintőjével, és a parabola sikjával ε szöget alkot, s igy a képparabola görbületi köre c_1-ben, a 41. szerint, $\varrho_1 = \frac{\varrho}{\cos\varepsilon} = \frac{\omega_2 c_2}{\cos\varepsilon}$, s ez a $c_2\omega_2 n_2$ derékszögü háromszögből $= o_2n_2$ átmérő $= c_1n_1 =$ = p paraméter nagyságával. S mivel o_1 felezi c_1n_1-et, azért o_1 a képparabola fokusza. /ugyanigy az ellipszis és hyperbola metszetnél/

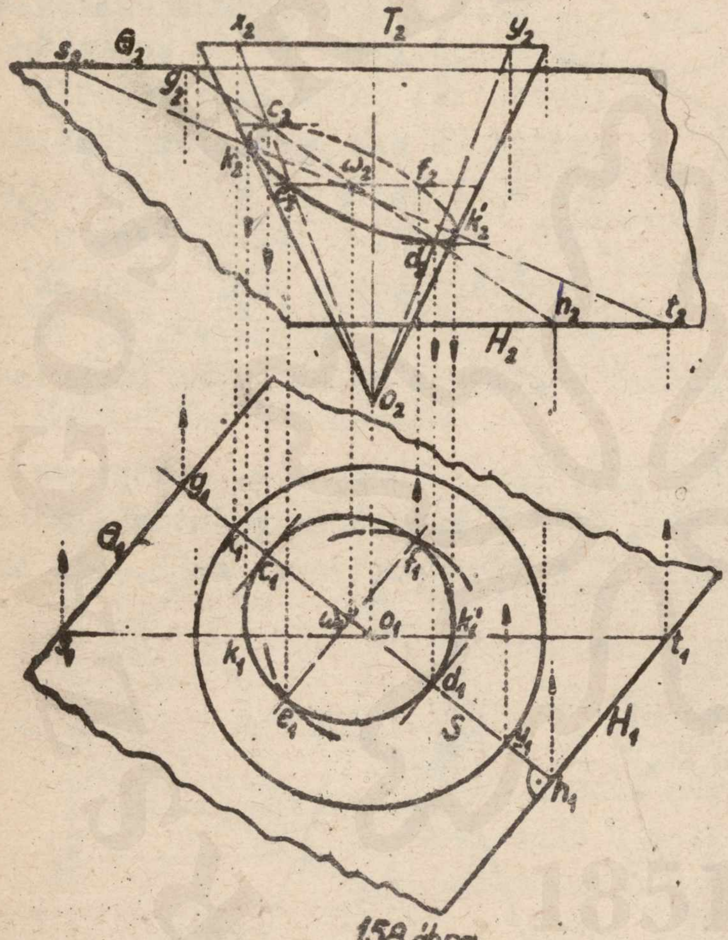


157. ábra

Az ábra a parabola E körüli ledöntött helyzetét, valódi nagyságát is mutatja.

<u>69./ Forgáskúp metszése általános síkkal</u>. A kúp tengelye függőleges, a sík adott T_1-el párhuzamos G és H egyenesekkel /158. ábra/.

A metszet tengelye minden esetben a metszősíkra merőleges S-S kúp szimmetrálsíknak és metszősíknak metszőegyenesén van. Az S sík felülnézete merőleges G_1 és H_1 első fővonalakra. A metsző-egyenes első képe g_1h_1, rendezővel g_2h_2. A metszetgörbének ezen levő pontjai azok, amelyekben gh a kúpot döfi. Ennek megszerkesztéséhez gh-n át első vetítő segédsíkot fektetünk, ez áthalad a kúp csúcsán, s így a kúpot xo /x_1o_1, x_2o_2/, illetve yo /y_1o_1, y_2o_2/ alkotókban metszi. A második képek g_2h_2-t a c és d döféspontok c_2 és d_2 második képében metszik. Rendezővel c_1 és d_1. Mindkét pontban az érintő G illetve H-val párhuzamos, mert az ox, illetve oy alkotómenti érintősík nyoma, bármely párhuzamos kör síkján G fővonallal párhuzamos, s így



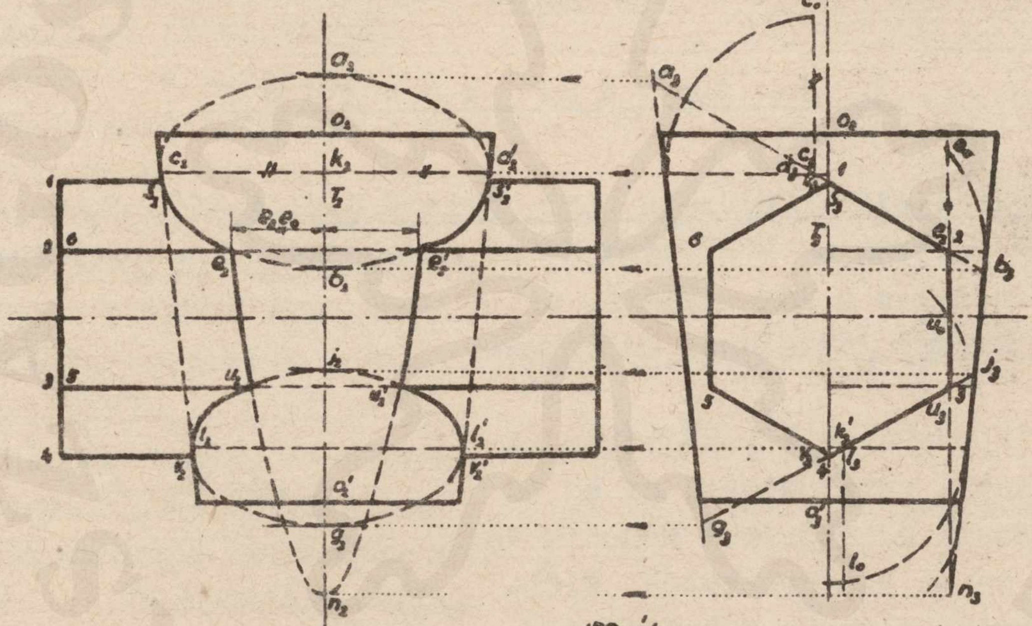
158.ábra

e síkok metszésvonala is párhuzamos G-vel, vízszintes s egyben cd-re merőleges, s így cd a metszet tengelye.

cd-nek ω /ω_2, ω_1/ felezési pontja a metszet középpontja, s az ezen áthaladó másik tengely cd végpontjaihoz tartozó érintőkkel, s így G és H-val párhuzamos, tehát vízszintes. Iránya mindkét képben megrajzolható. A végpontok azok, amelyekben ez a vízszintes a kúpot döfi. A vízszintes segédsík a kúpot párhuzamos körben metszi, ennek első képe az e_1 és f_1 döféspont képeket metszi ki. Rendezővel e_2 és f_2. c_1d_1 és e_1f_1 az első képellipszis tengelyei, fokusza o_1; c_2d_2 és e_2f_2 a második képellipszis társátmérő párja.

Előlnézetben a látható részt a fedettől elválasztják a második képhatáralkotón levő pontok, vagyis ezen az alkotóknak a döféspontjai GH sikkal. A segédsik az alkotók első vetitő sikja, ez GH sikot st $/s_1t_1$, $s_2t_2/$ egyenesben metszi. s_2t_2 a konturalkotókat a határpontok k_2 és k_2' képeiben metszik. Rendezővel k_1 és k_1'. Elölről látható az e és d pontokat tartalmazó iv. Felülről a kúpba beleláthatunk.

Gyakorlati alkalmazás. Gázcsapház. A 159. ábrában valódi nagyságban megadott csapháznak a csapforgó befogadására szolgáló része egy csonka forgáskúp, a két elágazása hatoldalu oszlop. A belső kialakitást elhagytuk. Az 1.2 alapélein átmenő és



159.ábra

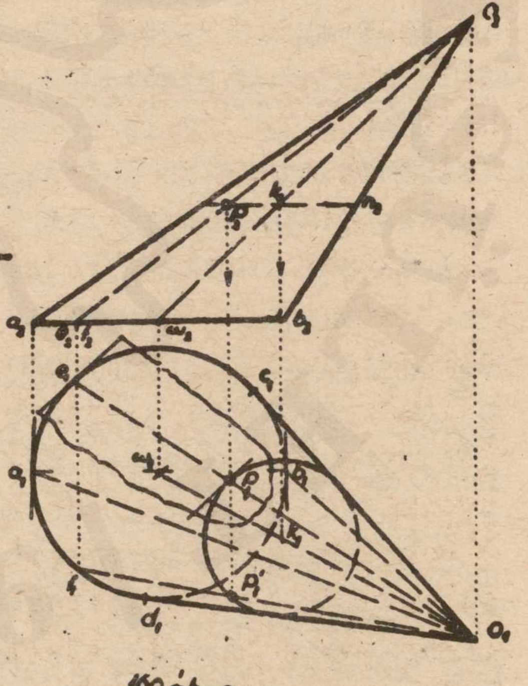
Π_3-ra merőleges oldallap sikja által kimetszett ellipszisnek és egyben nagytengelyének harmadik képe a_3b_3, rendezővel a középalkotókon a_2b_2. Mindkét pontban az érintő Π_3-ra merőleges. A k felezőpont a középpont $/k_3$ $k_2/$. A Π_3-ra merőleges cd kistengely harmadik képe k_3-al összeeső c_3d_3. A Π_3-al párhuzamos helyzetbe forgatott párhuzamos kör c_0k_3 félhurja megadja a kistengely felének hosszát, amelyet a második képen k_2-től a rendezőirányra felmérve, a képellipszis c_2d_2 nagytengelyét kapjuk. Az 1-es csucson átmenő oldalél a kúpot s és s' $/s_2$ $s_2'/$-ben, az ellipszis pontjaiban döfi. A 2-es oldalélnek a kúppal való döféspontjainak képe az oldalélnek 2-es pontképével összeeső e_3 $/e_3'/$. Az ezen átmenő kúpkört Π_3-al párhuzamos helyzetbe forgatva, e_0e_3 adja e-nek a Π_3-al párhuzamos kúpszimmetrálistól való távolságát; ezzel megkapjuk e_2 és e_2' képeket. Az ellipszisnek az 1 és 2 oldalélek közötti s_2e_2 és $s_2'e_2'$ íve érvényes. Ezzel összeesik az 1.6 oldallap kúpmetszetének az elölnézete.

Azonos módon szerkesztjük meg 3.4 oldallap ellipszismetszetét. Második képellipszisónek u_2 és u_2' pontjai vannak az 5-ös oldalélen.

A 2.3 oldallapsikja párhuzamos a második kúphatáralkotókkal, s igy a metszet hyperbola, s ennek a 2 és 3 oldaléleken levő e /e_2 e_3/; e'/e_2' e_3'/; u /u_2 u_3/; u'/u_2' u_3'/ ugyancsak pontjai. A hyperbola harmadik képe $e_3u_3n_3$; n a csúcs; rendezővel n_2. A képhyperbola asymptotái a második képhatáralkotók. Érvényes íve e_2u_3 és $e_2'u_2'$.

X. A ferde körkúp.

70./ Ábrázolás, felületi pont, érintő sik. A 160. ábrán a vizszintes alapkör ω középpontját az o csuccsal összekötő egyenes nem merőleges a kör sikjára, a kúp ferde körkúp /általános másodrendű kúp/.



160.ábra

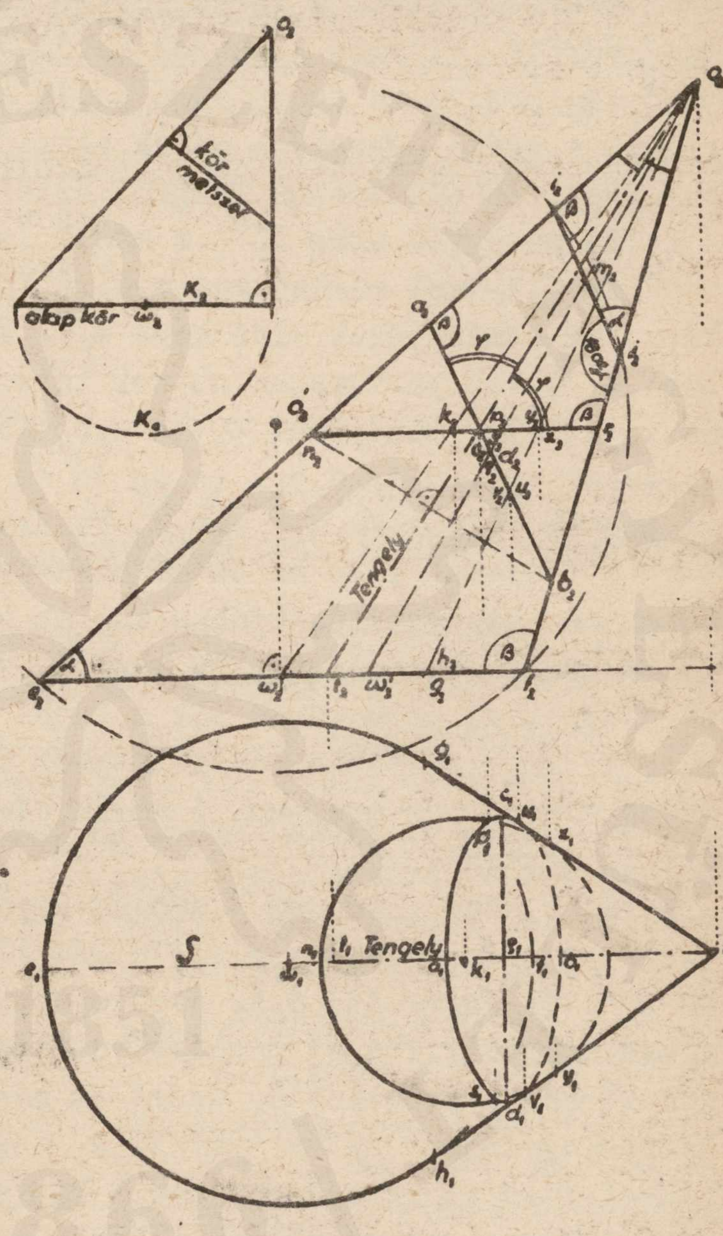
Az alapkör a és b pontjaiban az érintő második vetitősugár, az ao és bo alkotómenti érintősikok második vetitők, ao és bo konturalkotók. Elölről látható az alapkör adb ivét tartalmazó kúppalást rész. Az oc és od alkotómenti kúpérintősikok első vetitők, oc és od első képhatáralkotók. Felülről nézve látható az oc és od alkotók által elválasztott kúppalástnak az oa alkotót tartalmazó része.

Legyen a kúppalást p pontjának elölnézete p_2, ha p elölről nem látható, akkor az oe alkotóval megszerkesztett felülnézete p_1; ha elölről látható, akkor az of alkotón van és felülnézete p_1', Felülnézetben p és p' látható.

De megszerkeszthető az első kép kúpkörrel is. Ugyanis a kúpnak, mint végtelen sokoldalu gulának, sikmetszetei centrális kollineácicban vannak, s igy párhuzamos sikmetszetei hasonlók, s a megfelelő pontok a csucsbafutó koll. sugarakon vannak. E szerint a ferde körkúpnak az alapjával párhuzamos metszetei az alaphoz hasonlók, körök, s ezek középpontja az ωo egyenesen van.

A p ponton átmenő kör középpontja k /k_2 k_1/, sugara k_2n_2, s az első képhatáralkotókat is érintő körképen van p_1 és p_1'.

Az epo alkotómenti érintősik nyomai érintik a kupköröket e_1 illetve p_1-ben, elölnézeteik az egyenes körképbe esnek.



161.ábra

71./ A ferde körkup körmetszete, tengélye. A ferde körkúp nemcsak az alapsikkal párhuzamos irányban metszhető körben.

A 161. ábrán a ferde körkúpnak magasságát és az alapkör középpontját tartalmazó S szimmetrálsikja, fősikja Π_1-vel párhuzamos és függőleges. Sikja kimetszi a két második konturalkotót.

A 79. pontban /180. ábra/ igazoljuk, hogy az a gömb, amelynek az alapkör ugyancsak köre, a kúpot mégegy körben metszi. A gömb középpontja ω-ban az alapkör sikra állitott merőlegesen bárhol felvehető. Legyen ez o /o_2/ a gömbkontur a szakadozottan rajzolt s ugyancsak az S fősikban levő kör. E körnek és a kúpkonturalkotóknak i és j /i_2 j_2/ metszéspontjai a gömb és kúp metszésének pontjai. S mert az S fősikra ugy a kúp, mint a gömb merőlegesen szimmetrikusak, ezért második metszéskörüknek sikja, ugy mint az alapköré, ugyancsak S-re merőleges második vetitősik s igy második képe i_2j_2 távolság /első képe nincs megrajzolva/, s középpontjának második képe i_2j_2 felezési pontja m_2. Ez a kör a kúp alapkörének is tekinthető, s a sikjával párhuzamos metszetei ugyancsak körök, s középpontjaik az $o m \omega'$ /$o_2 m_2 \omega_2'$; $o_1 \omega_1'$ az S-be esik/ egyenesen vannak.

$e_2 f_2 j_2 i_2$ egy körnégyszög, miért is az e_2 és j_2 csúcsu szögek egymásnak kiegészitői, $\alpha = \alpha$ valamint $\beta = \beta$.

Összefoglalva: a ferde körkúp két irányu siksereggel metszhető körben. Mindkét siksereg merőleges a kúp magasságát tartalmazó fősikra; s az ebben levő egyik alkotónak s az egyik sikseregnek a szöge egyenlő a másik alkotónak s a másik sikseregnek szögével, de ellentétes forgási értelemben.

Ha az egyik szög 90^0, a másik is derékszög /mellékábra/.

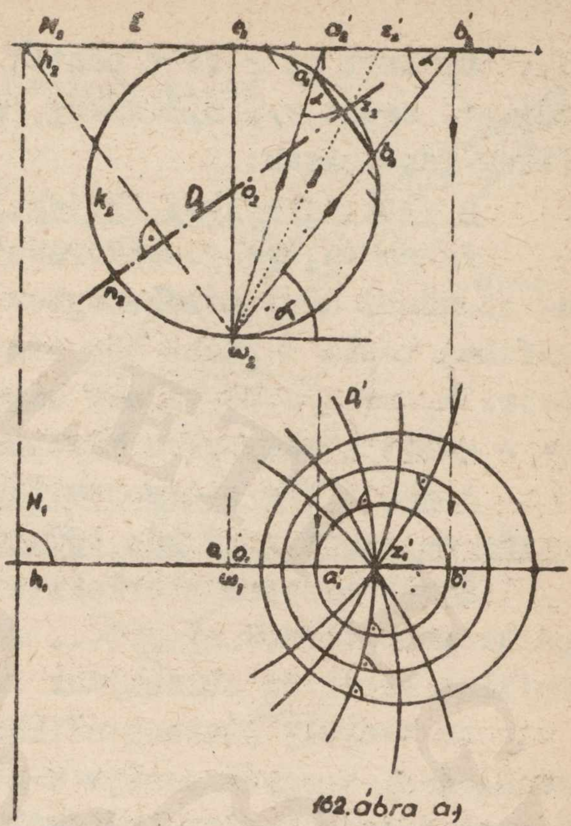
Az i_2j_2-vel párhuzamos a_2b_2 a kúp körmetszetének második képe, ab átmérőjének első képe e_1o_1 illetve f_1o_1 alkotóképeken van. A Π_2-vel párhuzamos ab-nek társa a Π_2-re merőleges cd. c_2d_2 és egyuttal ϱ középpont ϱ_2-je a_2b_2 felezőpontja, s ez az $o_2\omega_2'$ egyenesen van. $c_1d_1 = a_2b_2$. Az og és oh első képhatáralkotókon levő pontok u és v /u_2u_1; v_2v_1/. Felülnézetben látható az ucadv iv.

A fősikban levő oe és of alkotók szögfelezője ot /o_2t_2; o_1t_1/, ennek második vetitősikjában van ab körnek p és s /p_2, s_2/ pontja, s ezek a kúppaláston is vannak. A p és s pontokon átmenő, s az alapsikkal párhuzamos sik a kúpot p és s pontokat is tartalmazó nr /n_2r_2/ körben metszi. Ennek k /k_2/ középpontja $o\omega$ egyenesen van; k_1 az ω_1o_1-en. A körkerületi p_1 és s_1 a képellipszisnek is pontjai.

Az a_2 és r_2 csúcsu β szögek egyenlőségéből következik, hogy $a_2p_2 = p_2r_2$; $\varphi = \varphi$; $a_2b_2 = n_2r_2$; a két kör átmérője egyenlő; $n_2p_2 = p_2b_2$ és n_2b_2-őt /a_2r_2-őt/ o_2t_2 merőlegesen felezi, a két kör merőlegesen szimmetrikus ot második vetitősikjára nézve. Mivel ez minden körpárra vonatkozik, azért ot második vetitősikja a kúpfelületnek ugyancsak szimmetrálsikja, fősikja, s igy ennek az S fősikkal való ot metszőegyenese a kúpfelületnek a tengelye.

A körmetszetek sikjai a kúptengellyel egyenlő szöget zárnak be.

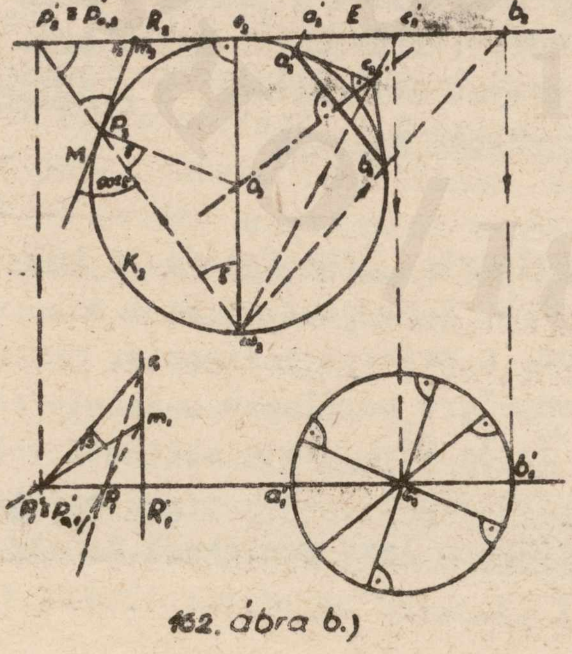
72./ A stereografikus projekció. A 162. ábrán a II_2-vel párhuzamos nz /n_2z_2/ a földgömb tengelye, K_2 a második konturköre. Az nz tengelyre merőleges párhuzamos körök, /valamint az uz-n átmenő délkörök/ sikbeli ábrázolásánál a képsik a gömböt "e" pontjában érintő második vetitősik az "e" ponton átmenő átmérő ω végpontja, a vetités középpontja.


162.ábra a.)

A második vetitő ab /a_2b_2/ gömbi kör vetitősugarai ω /ω_2/ csúcsu ferde körkúp alkotói. Ezt a kupot E képsik az ab kör a'b' stereografikus projekciójában metszi.

Az ab kör sikja ωa alkotóval az ωb ivre támaszkodó α kerületi szöget képez. Ugyancsak α az ωb alkotónak a gömböt ω-ban érintő sikkal bezárt szöge /ωb ivre támaszkodó kerületi szög/, s ezzel együtt E siknak is ωb alkotóval bezárt szöge is, s igy az előzők szerint az a'b' metszet kör. Vagyis a gömb stereografikus projekciójánál a gömbi körök képe kör.

A 162. ábra b-ben K főkör p /p_2p_1/ pontjának ster. projekciója p'/$p_2'p_1'$/. A p-beli gömbi M érintősiknak nyoma az E ster. képsikon a II_2-re merőleges R /R_2R_1/. A γ szögek egyenlők, a jelzett három szög mindegyike /$90^\circ - \gamma$/, /mint csúcsszög, illetve mint $\omega_2e_2p_2'$ derékszögü háromszög szöge/ miért is $p_2p_2'R_2$ háromszög egyenlőszáru, s igy p_2R_2=$p_2'R_2$. Vagyis, ha p pontot R körül E sikba forgatjuk, akkor p'-be jut s igy p_0 összeesik p'-el.


162. ábra b.)

Ha a gömb p pontján átmenő két körének /görbéjének/ p-beli érintője az MR sikon levő pr és pm, /p_1r_1 ; p_1m_1 és M-be esik p_2r_2 és p_2m_2/ s ha ezeket R körül E-be forgatjuk, akkor $r_1p_1'm_1\angle = \beta$ szög, a két érintő szögének, vagyis a két kör metszési szögének valódi nagysága.

De mert az r és m pontok stereografikus képe önmaga, p-nek meg p', azért $r_1 p_1' m_1 \measuredangle = \beta$ szög, egyben rpm$\measuredangle = \beta$ szögnek stereografikus képe. Azaz:

a stereografikus projekció szögtartó /konform/.

Az ab /$a_2 b_2$/ gömbikörmenti c /c_2/ csúcsu érintőkúp alkotói az ab gömbi kört derékszögben metszik, s igy az alkotók stereografikus képei a gömbi kör stereografikus képét is derékszögben metszik, azaz a körképnek sugarai, miért is c-nek c' /$c_2' c_1$/ képe a gömbi körképnek a középpontja.

A gömbi kör stereografikus körképének középpontja a gömböt a kör mentén érintő kúp csúcsának stereografikus képe.

Ennek alapján szerkesztettük meg a 162. ábra a./-ban az ab párhuzamos körnek a_1' b_1'.... és még két párhuzamos körnek stereografikus képét és ábrázoltuk felülnézetét.

zn tengely stereografikus képe a felülnézetben x_1 tengelyre merőleges, s egyik pontja z-nek z' /z_2' z_1'/ ster. képe. Az n-en átmenő délkörök ster. képének egy pontja z_1'.

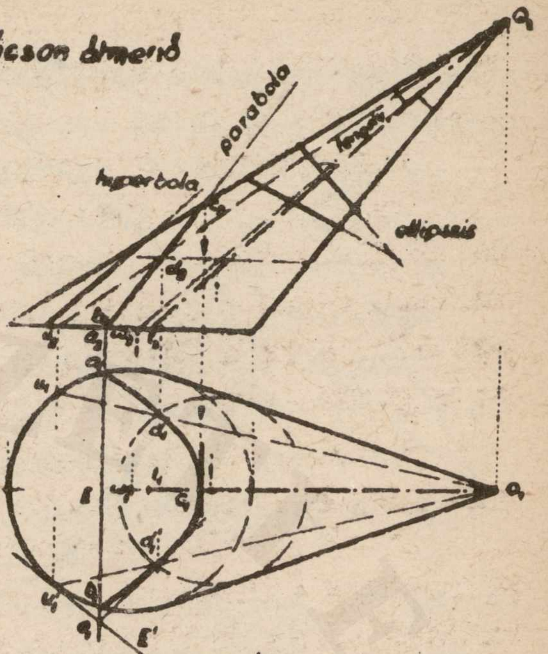
A K délló ster. képe b'd'o egyenes. Az nz gömbtengely második vetitősikjában levő D déllőnek ster. képe ugyancsak kör, s ennek középpontja a D menti gömbi érintő /kúp, ill./ henger végtelenben levő csúcsának ster. képe, vagyis ω-ból D sikjára merőleges hengeralkotó iránynak E sikján levő h /h_2 h_1/ döfése. D_1' tehát h_1-ből z_1'-en át rajzolt kör.

Mivel Π_2-vel párhuzamos nz az ezen átmenő délkörök sikjainak második fővonala, azért ω-ból e sikokra állitott merőlegesek második képe összeesik $\omega_2 h_2$-vel, s igy E képsikot h ponton átmenő Π_2-re merőleges H egyenes pontjaiban döfik. A délkörök ster. körképeinek középpontjai H_1-en vannak hányat ábrázoltunk, s a déllő és párhuzamos körképek egymást derékszögben metszik.

73./ A ferde körkúp további sikmetszete. Sikbafejtés. A kúp egyéb sikmetszetei is másodrendü vonalak, kúpszeletek. Ha a sik minden alkotót véges távolságban metsz, a metszet ellipszis. /163. ábra, a sikok vetitők/ Pl. a tengelyre merőleges metszet is ellipszis, s ezzel a metszettel a ferde körkup átalakitható egyenes elliptikus kuppá. Első kép megszerkesztéséhez megkeressük társátmérői végpontjainak, mint kúppaláston levő pontoknak az előzők szerint a felülnézetét.

Egy alkotóval parallel metszet parabola, /a metszősikkal parallel, csúcson átmenő sik érinti a kúpot/ két alkotóval parallel metszet hyperbola /a metszősikkal parallel, s a csúcson átmenő sik két alkotót metsz ki a kúpból. Ez a metszet egyébként egy elfajult hyperbola, szétesés 2 egyenesre, rendszáma 1 + 1 = 2 /.

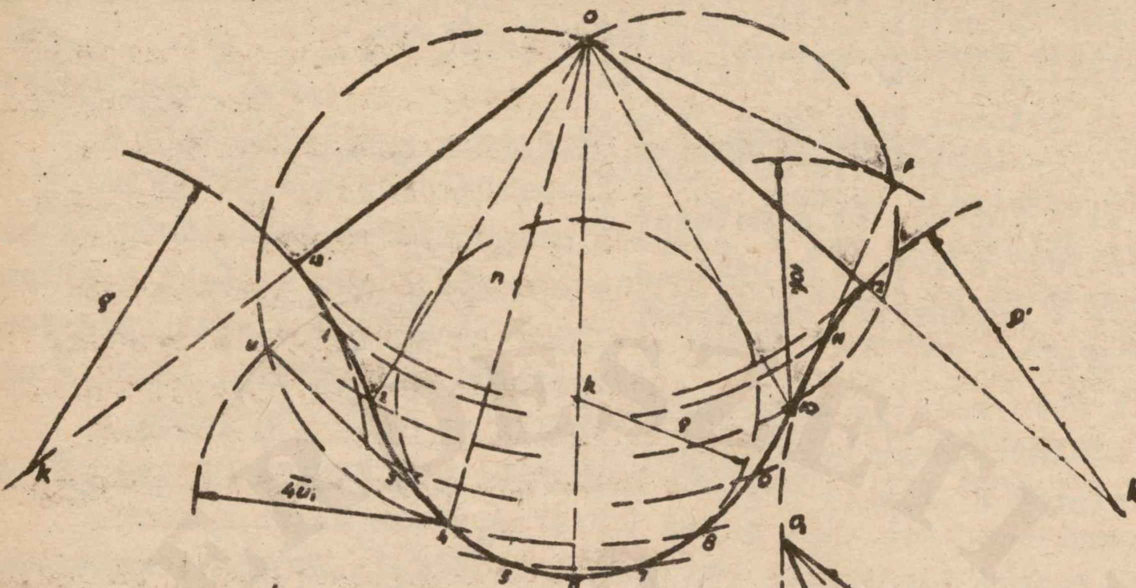
Az ábra mutatja a parabolametszet felülnézetének megszerkesztését, s az érintőt d′-ben.



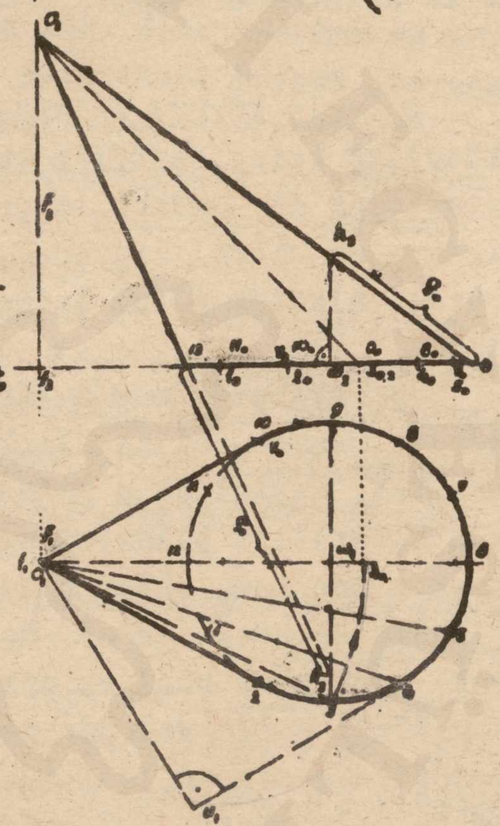
163.ábra

<u>A ferde körkúp palástjának megközelitő kifejtésénél</u> a kupot gulává alakitjuk át, amikor is az alapkört részekre osztjuk ugy, hogy az ivdarabok hurral legyenek helyettesithetők, s ezek végpontjaiból huzott alkotók által határolt gula oldullapokat egymásmellé teritjük.

Szerkesszük meg a 164. ábrán megadott ferde körkúp sikbafejtését. Osszuk fel az alapkört 12 részre, s számozzuk meg az ábra szerint. Képzeljük a palástot a 12-es alkotó mentén felhasitva, s a kiteritett palástot ugy a papirra helyezve, hogy belseje legyen a papiron, akkor a két kúppalástfél a 0.6 alkotóhoz szimmetrikusan helyezkedik el. Hogy az emlitett gulalapokat megrajzolhassuk, ismernünk kell az osztáspontokon átmenő alkotók hosszát. Ezek közül a II_2-vel párhuzamos 0.6 és 0.12 alkotók elölnézetben valódi nagyságban láthatók, s az 0.6 a kifejtésben megrajzolható és felmérhető. A 6-os pontban az alapkör kifejtésének az érintője az alkotóra merőleges, mert a valóságban is az. A többi alkotó valódi nagyságának meghatározása végett forgassuk az <u>alkotókat egyenként</u> a kup F magassága, mint forgástengely körül II_2-vel párhuzamos helyzetbe. Pl. 0.3 alkotó forgatásánál 0 maradó, 3 meg az $o_1 3$ sugaru körön haladva 3_{a1} be jut, ennek elölnézete az egyenes körképen 3_{a2}, $0_2 . 3_{a2}$ adja az alkotó tényleges hosszát. Mivel $0_1 3_1 = 0_1 3_{a1} = f_2 3_{a2}$ azaz az alkotó első képhosszával, azért az ivrajzolást, rendezést elhagyjuk, s az alkotó első képhosszát pl. $0_1 4$-et f_2-től felmérjük az alapegyenesre 4_0-ig és $0_2 4_0$ adja az alkotó tényleges hosszát. Ilyeténképp eljárva, az elölnézet



104. ábra



alapegyenesen kapjuk a páronként összeeső 1_0, 11_0; 2_0, 10_0; 3_0, 9_0; 4_0, 8_0; 5_0, 7_0 pontokat, amelyeknek 0_2-től mért távolsága az alkotók tényleges hossza.

Most már megszerkeszthetjük a paláston az alapkör egyes pontjait. Pl. 5-ös pontot az említett gula 0.6.5 oldallapjával. Ezek közül 0.6 már megvan, 0.5 valódi nagysága $0_2 5_0$; ezzel a kifejtésben 0-ból körívet rajzolunk, s ezt a harmadik oldal 6.5 alapkör húrhosszával 6-ból elmetszük.

Az 0,7 alkotó egyenlő 0.5-el, azért 0-ból 0.5 sugárral rajzolt ívet a 6.5 = 6.7 alapkör húrral elmetszve, 7-es pontot kapjuk meg. Figyelemmel arra, hogy a szerkesztendő háromszögek egyik oldala, a körhúr, minden háromszögnél ugyanakkora, a kifejtésben 0-ból egymásután megrajzoljuk $0.4_0 = 0.8_0$; $0.3_0 = 0.9_0$; $0.2_0 = 0.10_0$; $0.1_0 = 0.11_0$ és végül 0.12 sugárral a köríveket, s ezeket a már megszerkesztett 5, illetve 7 pontból kiindulva, az alapkör 12-ted ívének húrjával sorozatosan elmetszve rendben a, 4, 3, 2, 1, 12, illetve a 8, 9, 10, 11, 12 pontokat kapjuk a kifejtésben. A pontok összekötése előtt érintőket, illetve görbületi köröket szerkesztünk.

A 12-es pontban az érintő, mint 6-nál, az alkotóra merőleges. Az alapkör 4-es pontjában az érintő u4. Ez az 0.4 alkotóval egy a kifejtésben is megmaradó szöget zár be. Ezt a szöget az 0.4 u derékszögü háromszög segélyével vihetjük át, a palást kifejtésébe. A háromszög átfogója az 0.4 alkotó, egyik befogója 0-ból a körérintőre állitott ou merőleges, s ez felülnézetben merőleges az u 4 érintőre, u4 a másik befogó valódi nagysága. Ezt a derékszögü háromszöget a kifejtésben is megrajzoljuk. 0.4 alkotó fölé, mint átmérő fölé félkört rajzolunk, s ezt 4-ből 4u sugárral metszük, az u metszéspont és 4 összekötése az érintő befogó /a másik u.o. lenne/.

Az alapkör kifejtésében az a fordulópont amelyben a kupérintősik a metszősikra /az alapkör sikra/ merőleges. Ezek az első konturalkotóknak éppén 2 és 10-el összeeső érintési pontjai.

Az alkotó és a körnek 10-beli érintője közötti szöget az 0.10 alkotó első vetitősikjában levő 0.10.f derékszögü háromszöggel visszük át. Az 0.10 alkotó fölé félkört rajzolunk a kifejtésben, s ezt 10-ből a valódi nagyság $10.f_1$ befogóval elmetszük. f.10 adja az inflexiós érintőt.

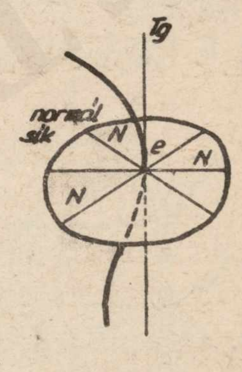
A görbületi köröket nyerendő, állitsunk ω -ban merőlegest a kör sikjára, ez a 6.0 alkotót k_2-ben metszi. $k_2 6 = \rho$. a görbületi kör sugara a kifejtés 6-os pontjában. Hasonlóan a 12-es ponthoz tartozó görbületi kör sugara

XI. A térgörbék.

74./ A térgörbékről általában. Ha a görbét leiró mozgó pont helyzeteinek összessége nincs egy sikon a származott vonal térgörbe. A térgörbét két pontjában találó metszőjének az a helyzete, amelyben a két metszéspont egymáshoz végtelen közel jut, a görbe érintője. Az érintőn áthaladó minden sik a görbe érintősikja, s ennek a görbével két végtelen közeli pontja közös.

Az érintési pontban az érintőre merőleges egyenesek a normálisok; összességük a normálsik. /165.ábra/.

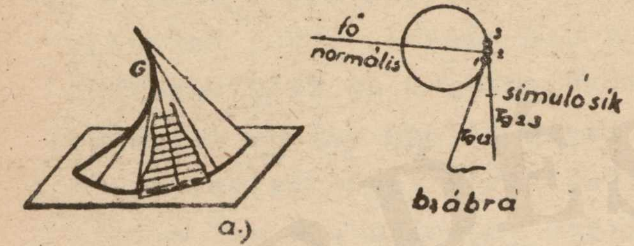
A 37. pontban megállapitottuk, hogy a térgörbe érintői egy sikbafejthető felületnek az



165.ábra.

alkotói /166. ábra a./ Az egymást metsző szomszédos érintők a felületnek egy sikelemét tartalmazzák, s e sikelem sikja alkotó mentén érinti a felületet.

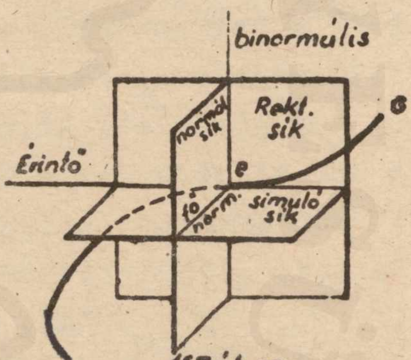
A $Tg_{1,2}$ és $Tg_{2,3}$ /durva nagyitásban 166. ábra b./ két szomszédos érintő. Sikjukban a görbének 1,2,3 végtelen közeli pontja van, ez a simuló sik. A simuló sik a görbét érinti és metszi is.



166. ábra

A simuló sikon levő három végtelen közeli ponton átmenő kör a térgörbe görbületi köre, középpontja a simuló sikon levő főnormálison van. A görbületi /simuló/ kör sugarának reciprok értéke az első görbültség. Két konsekutiv simuló sik szöge mértéke a második görbültségnek, a torziónak.

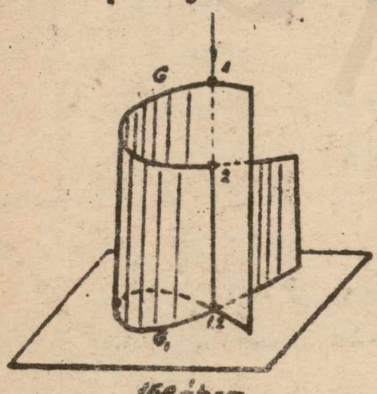
A simuló sikra is merőleges a binormális /167. ábra/. Az érintő és binormális sikja a rektifikáló sik. Egy ponthoz tartozó érintő, főnormális és binormális egymásra kölcsönösen merőlegesek, s egy a görbe minden pontjában más-más helyzetü kisérő derékszögü triéder három élét alkotják.



167. ábra

Ha a térgörbét leiró pont mozgása törvényszerü, a térgörbe törvényszerü. Az a szám amely mutatja, hogy egy algebrai térgörbét sikkal legfeljebb hány pontban lehet metszeni, a térgörbe rendszáma. Ha ez a szám határozatlan, a térgörbe transcendens.

Az n-ed rendü algebrai térgörbe vetülete egy sikon n-ed rendü sikgörbe. Ugyanis a képsik bármely egyenesén átmenő vetitősik a térgörbét legfeljebb n pontban találja, s igy a sik nyomán csak ezen n pontjának a képe lehet. Pl. negyedrendü térgörbe képe negyedrendü sikgörbe.

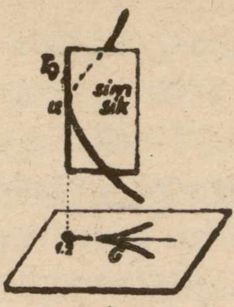


168. ábra

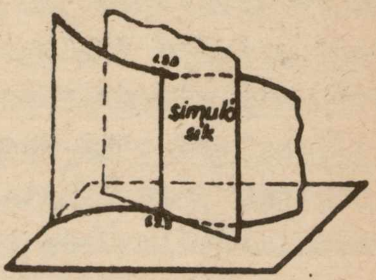
A térgörbe kétszeres pontjának képe a képgörbének is kétszeres pontja. De kétszeres pontja van a képgörbének akkor is /168. ábra/, ha kétszeres metszője vetitősugár, amikor is az 1 és 2 metszéspont képe 1.2-ben összeesik.

Ha az érintő, s ezzel együtt a simulósik vetitő /169. ábra/, akkor a képgörbének visszatérő pontja van, s ebben az érintő a simulósiknak a vetülete.

Ha a simulósik vetitő ugyan, de az érintő nem /170. ábra/, akkor a képgörbének fordulópontja van, s ebben az



169. ábra

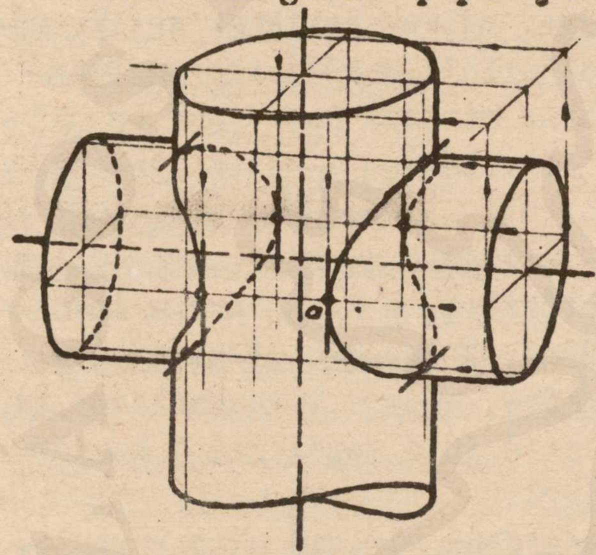


170. ábra

érintő simulósik nyoma, a simulósikon levő 1.2.3 térgörbe pontnak vetülete a nyomon van.

/A sikgörbe simulósikja minden pontjában ugyanaz, éspedig a görbe sikja./

Ha a térgörbét p pontjának érintőjével párhuzamos sikra merőlegesen vetitjük, akkor ha a p-beli görbületi körének sugara ρ, és a p-beli simulósikjának képsikszöge α, ugy a képgörbe görbületi körének sugara /mint a sikgörbéknél, 41. pont/ $\rho_o = \frac{\rho}{\cos\alpha}$; ha a főnormálisával párhuzamos sikra vetitjük: $\rho_o' = \rho \cos\alpha$

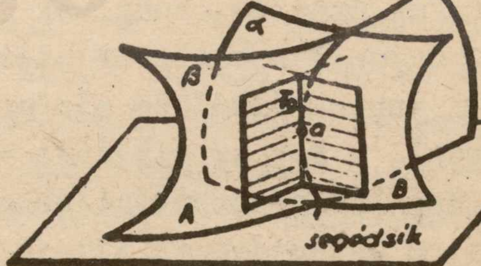


171. ábra

XII. Kup, henger, gömb kölcsönös metsződése.

75./ Görbe lapok áthatásáról általában. Két görbe lap metsződési vonala általában térgörbe, térgörbék. /171. ábra két forgáshenger áthatásának ált. ferde axonometrikus képe/

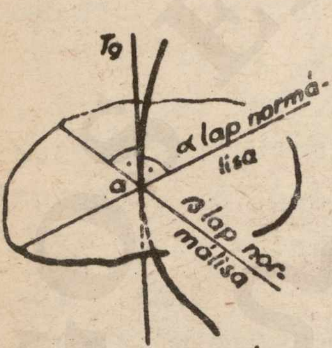
Az áthatási vonalat általában pontonként szerkesztjük meg. /172. ábra/, amikor is metszük a felületeket egy segédsikkal /felülettel/, ez az α felületet A, β felületet B vonalban metszi, A és B-nek 1 metszéspontja mindkét felületnek, s igy metsződési



172. ábra

vonalnak is pontja. A segédsikot /felületet/ ugy választjuk meg, hogy azzal a felületekből kimetszett vonalak könnyen felkereshetők és pontosan ábrázolhatók legyenek /egyenes, kör/. Az áthatási vonal pontjai megszerkesztésének lényege, a segédsiknak /felületnek/, az áthatásban résztvevő felületektől és azok térbeli, valamint kölcsönös helyzetétől függő megfelelő megválasztása.

Az áthatási görbe helyes megrajzolását az érintői biztosítják. A mindkét görbelapon levő áthatási vonalnak "a" pontbeli érintője benne van az α lapot a-ban érintő sikban, valamint β lapot ugyancsak a-ban érintő sikban is, vagyis a két érintősik metsző egyenese.



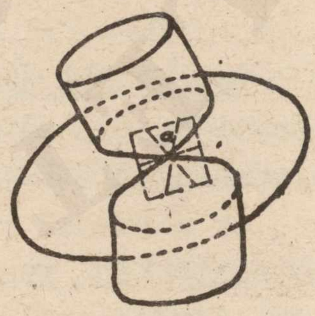
173. ábra

Az áthatási vonal érintője ama két érintősik metsző egyenese, melyek egyike az egyik, másika a másik lapot érinti a kérdéses pontban.

/Pl. 171. ábrán mindkét hengernek az "a"-beli érintősikja függőleges, a metszésvonaluk is függőleges./

Másrészt az α lapnak a-beli lapnormálisa merőleges az érintősikra, s igy a benne levő érintőre /173. ábra/, β lap a-beli normálisa ugyancsak merőleges a bennelevő érintőre, azaz a lapnormálisok az áthatási vonal normálisai, miért is az érintő merőleges a lapnormálisok által meghatározott normálsikra.

Az áthatási vonal valamely p pontjához tartozó első görbületi kör sugara akkora, mint a p-beli simulósik által az egyik /vagy másik/ lapból kimetszett görbének p-beli görbületi köre. /Az áthatási vonal p-beli simulósikja a sikmetszetgörbének is simulósikja./



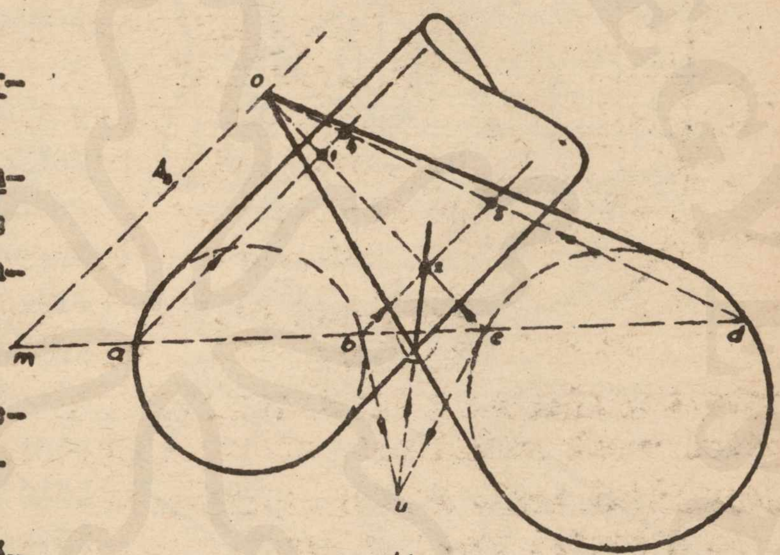
174. ábra

Az áthatási vonal milyensége a felületek kölcsönös helyzetétől is függ. Igy, ha a két lapnak egy "a" pontjában /174. ábra/ közös érintősikja van, azaz a lapok egymást a-ban érintik, az áthatási vonalnak "a" kétszeres pontja. Ugyanis a közös érintősikban levő s az érintési ponton áthaladó minden egyenesnek mindkét lappal, s igy az áthatási vonallal is két összeeső pontja közös, s igy "a" az áthatási vonalnak kétszeres pontja.

Ami a láthatóságot illeti, mivel az áthatási vonal mindkét lapon van, azért csak az a része látható, amely mindkét lap látható részén van.

Ha az áthatásban résztvevő felületek törvényszerűek, az áthatási vonal is az. Éspedig, ha a felületek egyike n-ed, másika p-ed rendü, az áthatási vonal n x p-ed rendü. Igy két másodrendü felület áthatási vonala általában 2x2= negyedrendü térgörbe. Ugyanis egy tetszőleges sik mindkét felületet egy-egy másodrendü sikgörbében, pl. két ellipszisben metszi, a két ellipszis négy metszéspontja az áthatási vonal négy pontja, s ezek a tetszőleges segédsiknak és az áthatási görbének közös pontjai.

Az n-ed rendü áthatási vonal szét is eshet alacsonyabb rendü vonalakra, de ezek rendszámainak összege egyenlő n-el. Igy a másodrendü felületek negyedrendü áthatási vonala széteshet két másodrendü, egy első és egy harmadrendü, vagy négy elsőrendü vonalra.



175.ábra

76./ Kup- és hengerfelületek áthatásairól általában. Két forgáshenger áthatása. A kupok és hengerek áthatási pontjainak megszerkesztésénél a segédsikok általában ugyanazok, mint amilyeneket gulák és hasábok áthatásának az élmódszer szerinti megszerkesztésénél alkalmaztunk.

Kup-henger esetén a segédsikok áthaladnak a kup csucsán átmenő s a hengeralkotókkal párhuzamos A egyenesen. /175. ábra/ A-nak a közös alapsikon levő m döféspontján átmenő E nyomnak az alapkerületekkel való a, b, c, d pontjain átmenő alkotók 1, 2, 3, 4 metszéspontjai áthatási pontok. A 2b, illetve 2c alkotómenti érintősikok nyomainak metszéspontja u. Az áthatási vonal 2-beli érintője 2.u.

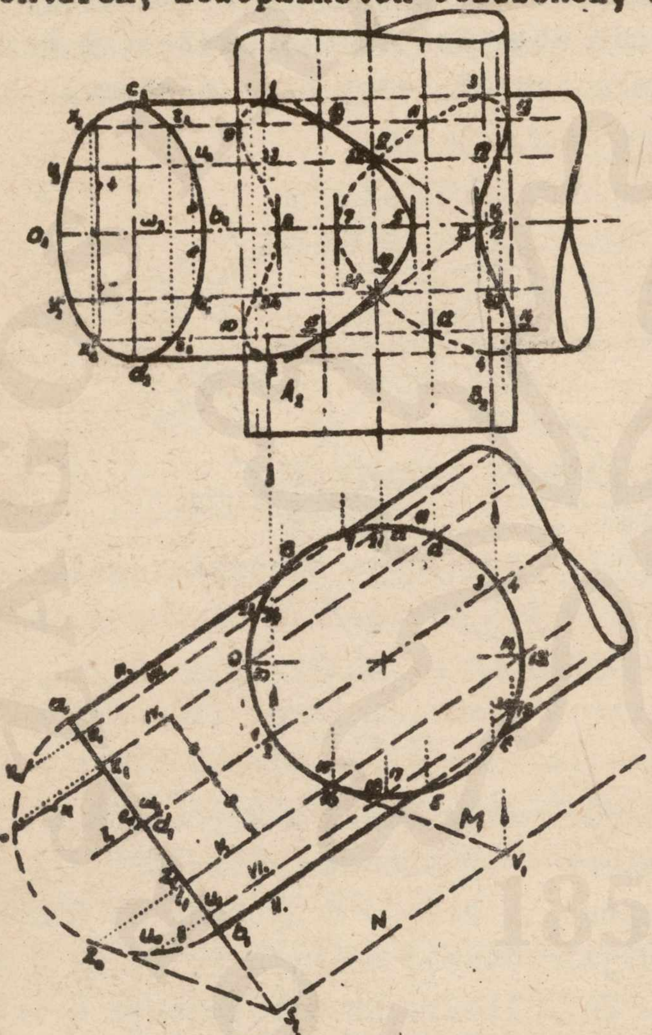
Két-kup esetén a segédsikok áthaladnak a két csucsot összekötő csucsegyenesen. E sikok mindkét kupot alkotósikban metszik.

Két henger esetén a segédsikok párhuzamosak mindkét henger alkotóival, s ezek a hengereket alkotókban metszik.

A müszaki alkalmazásban leggyakoriabbak a forgásalakok, kölcsönös helyzetük is egyszerü. A továbbiakban néhány ilyen jellegzetes esettel foglalkozunk.

A 176. ábrán a két forgáshenger egyikének tengelye függőleges, a másik vizszintes, a két tengely metszi egymást. Mindkét felület másodrendü, az áthatási vonal egy negyedrendü térgörbe. A segédsikok mindkét henger alkotóival, tengelyeivel párhuzamosak, ezek irányát a tengelyeken áthaladó első vetitősik adja.

Minden esetben először az áthatási vonal lényeges pontjait, azaz azokat szerkesztjük meg, amelyek a már megrajzolt alkotón, konturon, középalkotón fekszenek, s csak amennyiben ezek, s érintőik nem nyujtanak elegendő támpontot a vonal megrajzolásához, szerkesztünk további pontokat.



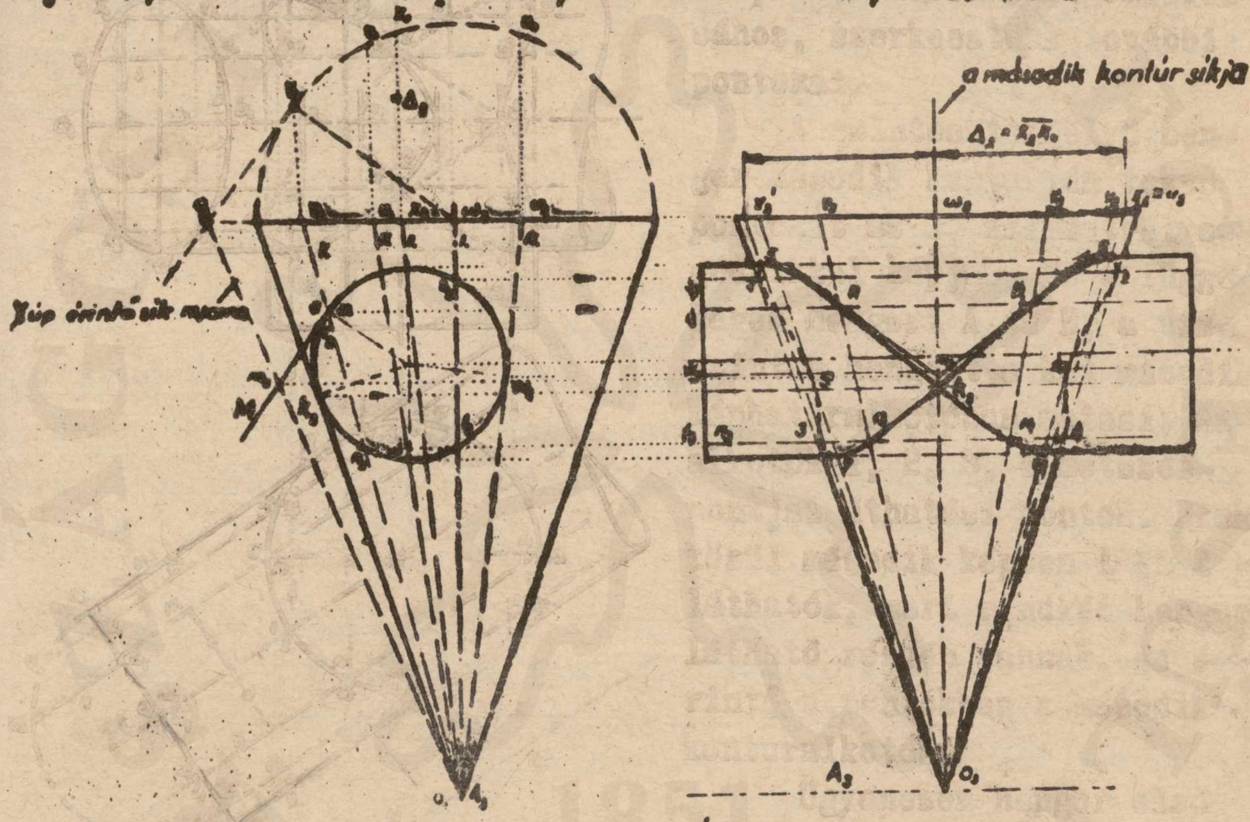
176. ábra

A szintes tengelyü henger második konturján fekvő pontokat az I. szimmetrál segédsikkal kapjuk. Ez a függőleges hengert A és B, a vizszintes hengert a két második képhatáralkotóban metszi; Az alkotók 1, 2, 3, 4 metszéspontjai áthatási pontok. Ezek közül második képben 1 és 2 láthatók, mert mindkét henger látható részén vannak. Az érintő e pontokban a második konturalkotók.

Ugyanezen henger első konturján fekvő 5, 6, 7, 8 pontokat a II. és III. segédsikokkal nyerjük. E pontokban a hengerek érintősikjai első vetitők s igy azok metszetei, az érintők is első vetitő egyenesek. Láthatóak a második képben 5. és 6.

A függőleges henger baloldali második konturján fekvő pontokat a IV. segédsikkal nyerjük. Hogy a vizszintes hengerből kimetszett alkotókat pontosan ábrázolhassuk, forgassuk az alapkört ab körül vizszintes helyzetbe. X_1X_0 adja X-nek /X′-nek/ ab feletti /alatti/ magasságát. 9, 10 és 11, 12 az áthatási pontok.

tes pontokat keresve, fektessük az I. segédsikot a kup 3-ik konturalkotóin át. Ez metszi a hengert az s és t pontokon átmenő alkotókban, amelyek a kupkonturból az oldalnózetben fedett 1, 2, 3, 4 pontokat metszik ki. A II. segédsik a henger felső konturalkotóján halad át. Ez a kup alapkörét x és x′ pontokban metszi, ezeknek ω -hoz viszonyitott differenciáját az alapkör parallelforgatásával $x_2 x_0$-ban kapjuk. Az $x_3 o_3$ és $x_3' o_3$ képalkotók a hengerkonturt a látható 5 és 6 pontokban metszik. A henger alsó konturján átmenő III. segédsikkal kimetszett y_0 alkotóval a 7. és 8. látható pontokat kapjuk. A IV. segédsik érinti a hengert w alkotójában, s metszi a kupot uo, u′o alkotókban, ezek metszése a



177. ábra

fedett 9. és 10. pontok. A 9. és 10 pontokban az áthatási vonal érintője a kupalkotó, mert a henger 2-ik vetitő érintősikja a kup érintősikjából az alkotókat metszi ki. /Ezek a pontok jellegzetesebbek, mint a hátsó középalkotón fekvő pont./ Az elülső középalkotón fekvő pont felkeresését a tulzsufoltság miatt elhagyva, nem jellegzetes pontot keresünk az V. segédsikkal. Ez a hengert r és n pontokon átmenő alkotókban, a kupot meg v és v′ alapkör pontokon átmenő alkotókban metszi, az alkotók látható metszéspontjai 11, 12, 13, és 14 az áthatás pontjai.

Szerkesszünk érintőt a 11 és 12 pontokban, melyeknek máso-

Az V. sikkal kimetszett z és z' alkotók magassága egyenlő X és X'alkotókéval; az áthatási pontok 13, 14 és 15, 16.

A VI. segédsikkal az elülső középalkotón levő 17. 18 és 19, 20 pontokat kapjuk.

A VII. sik az előbbiekkel egyenlő magasságu 21, 22 és 23, 24 pontokat adja.

Mivel a nyert pontok a görbe megrajzolásához elegendők, többet nem keresünk.

Szerkesszünk érintőt a 15. és 16. pontokban. Az érintő a két henger 15 /16/ -beli érintősikjainak metsző egyenese. Ennek megszerkesztéséhez megállapitandó a két érintősik nyoma valamely sikon, pl. a vizszintes henger első konturalkotóinak sikján. A vizszintes hengert 15.z /16.z'/ alkotója mentén érintő sik nyoma a parallelforgatott alapsikon $z_o s_1$; a nyom a konturalkotók sikján N.

A függőleges hengert érintő sik nyoma ugyanezen sikon M. A kettő v metszéspontja a két sik metszésének egy további pontja. v az emlitett szintes sikon van, tehát második képe v_2, igy v_2.16, illetve v_2.15 adja a két érintőt.

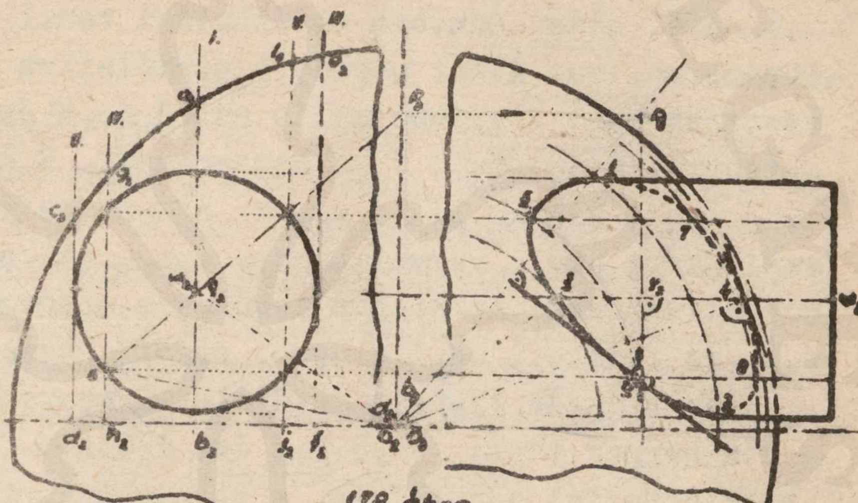
Ezek után az áthatási vonal, figyelemmel a láthatóságra és érintőkre, s a pontok sorrendjére /lásd első képben is/ megrajzolható. Nemkülönben a hengerek konturalkotóinak látható áthatási pontból kiinduló látható, illetve fedett áthatási pontból kiinduló fedett részei is.

Az áthatási vonal első képe az alapkör képébe esik s igy a szerkesztés ugy is értelmezhető, hogy az 1, 2, 3 ... áthatási pontok a vizszintes henger alkotóinak a függőleges hengerrel való, s a felülnézetben nyerhető döféspontjai.

<u>77./ Forgáskúp és henger áthatása</u>. Megszerkesztendő elöl- és oldalnézetben megadott forgáskup és forgáshenger áthatása. /177. ábra/ A forgáskup és henger k pontban érintkeznek, k-t tartalmazó alkotókmenti érintősikok azonosak.

Az áthatási negyedrendü térgörbének k pont a kétszeres pontja. A segédsikok áthaladnak az o csucson átmenő s a hengeralkotókkal párhuzamos A egyenesen. Ezek a második vetitősikok ugy a kupot - mert áthaladnak a kup csucsán - valamint a hengert - mert parallelek a hengeralkotókkal - lapalkotókban metszik. Jeliegzedik képe összeesik r_2-vel. Az érintő a kup és henger érintősikjainak metsző egyenese. Szerkesszük meg a két érintősik nyomát ugyazon sikon pl. a kup második konturalkotóinak sikján. A henger 12.11.r alkotómenti érintősikjának M nyoma r_2-ben érinti az alapkört. A kupot o.11.v alkotója mentén érintő sik nyoma az alapkör sikján érinti az alapkört v-ben, s ez a parallelforgatásban $v_0 q_2$. A q pont ennek az érintőnek a nyompontja s igy $q_2 o_2$ a kup-érintősik nyoma. A két nyom m_2-ben metszi egymást, m_3 a középsikon; $m_3$11 illetve $m_3$12 a két érintő.

Az áthatásból látszik az a rész, amely a hengeren és kupon is látható részen van, ez az oldalnézetben az 5.11.k.14.8 illetve 6.12.k.13.7 ivrész. A látható 5,6 és 7,8 pontokból kiinduló hengeralkotó is látható, a kupkontur csak a hengerkonturtól. Ha az adott helyzetben elöl-felülnézettel szerkesztünk, akkor vizszintes segédsikok célszerübbek. Ezek a kupból köröket metszenek ki, melyeknek felülnézete kör.



178. ábra

78./ Gömb és forgáshenger áthatása. Adva elöl-oldalnézetben egy gömbrész és henger /178. ábra/. Másodrendü felületek, az áthatás negyedrendü térgörbe.

A segédsikirány a hengeralkotókkal illetve az oldalnézet képsikjával parallel. Ilyen irányu sikok által a gömbből kimetszett körök elölnézetben egyenesek, oldalnézetben körök.

Az I. segédsik áthalad a henger harmadik konturalkotóin, s metszi a gömböt b középpontu, b_2a_2 sugaru körben. b_3 összeesik o_3-al, ebből b_2a_2 sugárral rajzolt kör a konturalkotókból kimetszi 1 és 2 pontokat.

A II. segédsik érinti a hengert a baloldali középalkotóban, a gömbből kimetszett kör sugara d_2o_2, ezt oldalnézetben megrajzolva, 3-as pontot kapjuk. E pontban az áthatási vonal érintője a gömbikör érintője, mert a Π_3-al párhuzamos henger érintősik /II/ a gömb érintősikjából az ebben levő gömbi parallelkör-érintőt metszi ki.

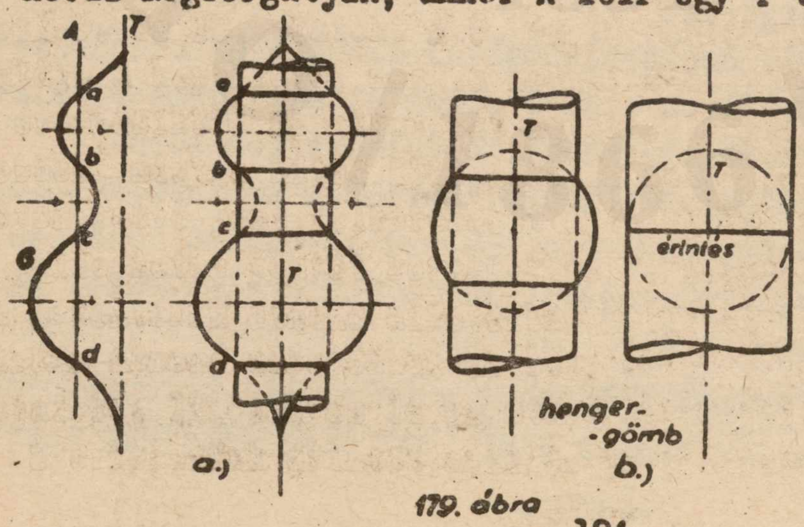
A III. segédsik a hátsó középalkotón levő 4-es pontot adja, amely pontban az áthatási vonal érintője ismét a gömbi kör érintője. Ezzel a lényeges pontokat megszerkesztettük, további pontokat nyerendő, felvesszük a henger tengelyétől balra és jobbra egyenlő távolságra IV és V sikokat, mert az általuk kimetszett hengeralkotók oldalnézetben páronként összeesnek. A IV sikkal 5 és 6 V-el meg a 7 és 8 pontokat kapjuk. Hasonlóan eljárva további pontokhoz juthatunk.

A 6. számu pontban az áthatási vonal érintőjét, mint a két lap normálisai által megadott normálsikra merőleges egyenest szerkesztjük meg. A gömbnormális az o6 /$o_2$6 és $o_3$6/ gömbsugár; a hengernormális 6ϱ /6ϱ_2, 6ϱ_3/ hengersugár. E két normális által meghatározott siknak pl. o ponton átmenő harmadik fővonalának második képe o_2p_2, harmadik képe o_3p_3, amikor is p_3 a 6ϱ_3 hengernormálison van. Az érintő merőleges a normálsikra, tehát 6-ból p_3o_3-ra állitott merőleges az érintő harmadik képe.

Az érintők figyelembevételével megrajzoljuk a görbét, amelynek a henger miatt 1.5.3.6.2 ive látható. A megszerkesztett görbe az áthatási vonal fele, a behatolási görbe.

Felül-elölnézet kapcsolatban a segédsikok vizszintesek.

<u>79./ Közös tengelyü forgásfelületek áthatása</u>. A Π_2-vel párhuzamos sikon van T, A és G görbe /179. ábra a./. Ha A-t és G-t T körül megforgatjuk, akkor A leir egy T tengelyü forgáshengert, G meg T tengelyü forgásfelületet, s a közös a, b, c, d pontok a henger és a forgásfelület közös párhuzamos köreit. További eseteket a 179. ábra mutat.

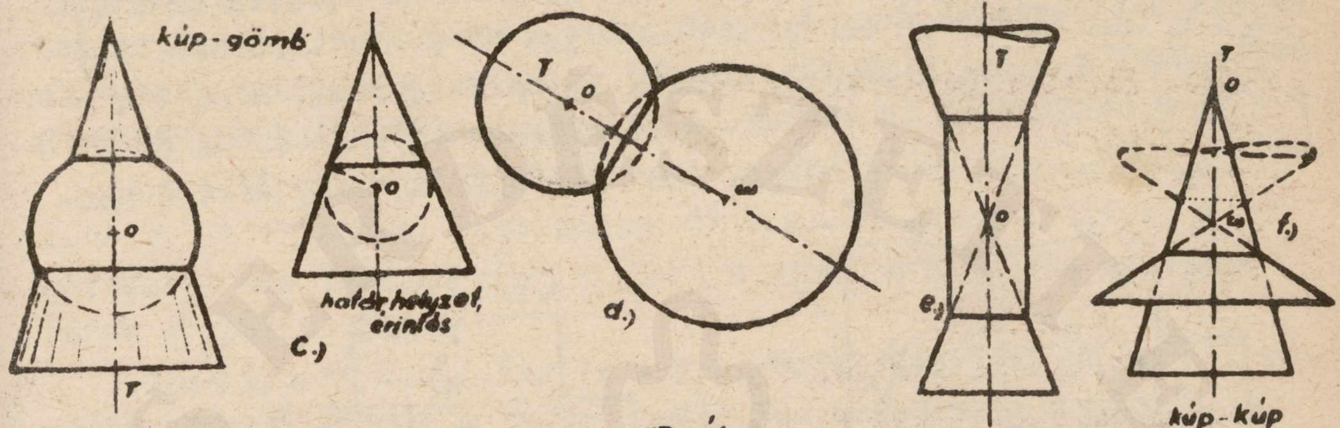


179. ábra

<u>Közös tengelyü forgásfelületek pár-</u>

huzamos körökben metszik egymást. Ha a forgásfelületek másodrendüek, akkor az áthatás két kör /2 + 2 = 4/.

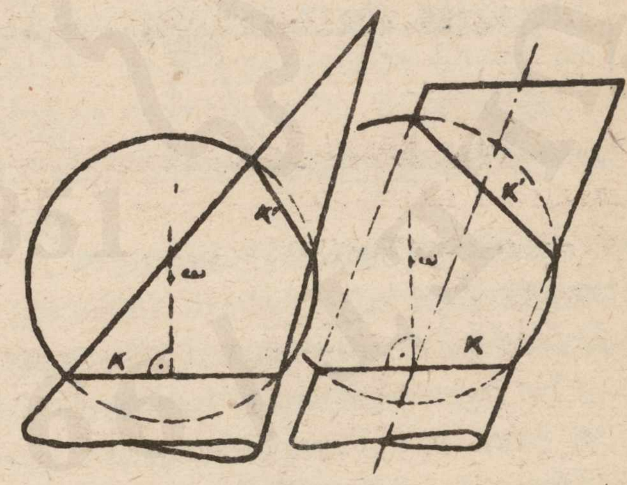
A negyedrendü áthatási vonalnak két körre való szétesése más esetben is bekövetkezhet. A 180. ábrán a ferde körkup /henger fősikja párhuzamos Π_2-vel. K közös köre a kupnak /hengernek/ és



179.ábra

az ω középpontu gömbnek. Mivel az áthatási vonal negyedrendü, a másik résznek is másodrendünek kell lenni, s ez a gömb miatt csak kör lehet, mégpedig a két felület szimmetrikus helyzete miatt K'.

Az előzők alapján a gömböt segédfelületként alkalmazhatjuk az áthatási vonal pontjainak szerkesztésénél, különösen ha a metsződő felületek forgásfelületek, s a gömb által kimetszett körök körnek, vagy egyenesnek látszanak. Ez általában akkor következik be, amikor a forgásfelületek tengelyei egymást metszik, s a forgástengelyeken átmenő közös szimmetrálsik a képsik iránnyal párhuzamos. A legtöbb gyakorlati eset ilyen.



180.ábra

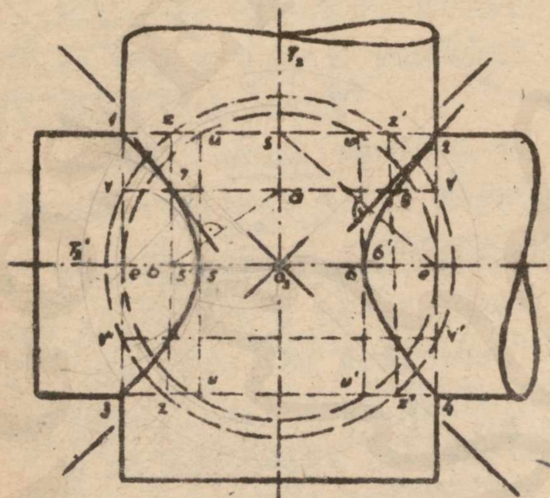
80./ Metsződő tengelyü forgáshengerek áthatása. /181. ábra/

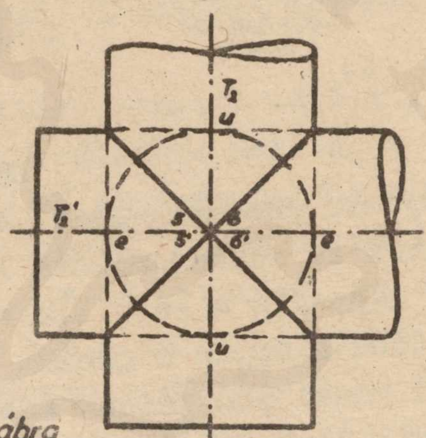
A metsződő T és T' tengelyek sikjára merőlegesen szimmetrikus a két henger, s igy azoknak áthatási negyedrendü vonala is. S mert a szimmetrálsik Π_2-vel párhuzamos, az áthatási vonal két-két pontjának elöl nézete összeesik, kettős vetület, a negyedrendü vonal képe másodrendü lesz. A szerkesztést a második képben végezzük el.

A közös szimmetrál segédsík a második konturalkotókat metszi ki, az 1, 2, 3, 4 metszéspontjuk az áthatás négy pontja.

További pontokat oly segédgömbökkel kaphatunk, amelyeknek középpontja mindkét henger tengelyén, azaz a tengelyek 0 metszéspontjában van.

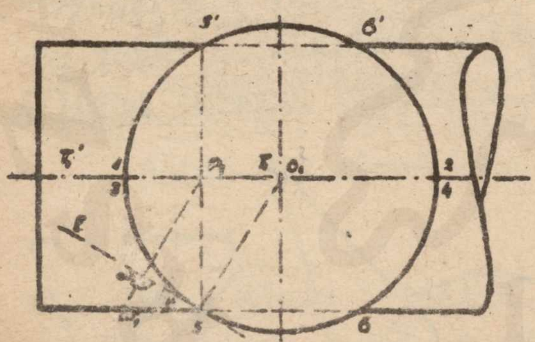
Az a gömb, amelyik a függőleges hengert ee körében érinti, metszi a vizszintes tengelyü hengert u–u és u′– u′ körökben. Ugy ezek, mint e–e kör a gömbön vannak, metszik egymást, s ezek a pontok a hengereken is vannak. A metszéspontok elől 5. és 6, hátul 5′ és 6′. E pontokban az érintők függőlegesek, mert a hen-





181. ábra

a.



gerek érintősikjai függőlegesek, 5, 6–ra merőlegesek, s igy 5.6 egyenes a képhyperbola valós tengelye.

Egy másik segédgömb a függőleges tengelyű hengert v–v és v′–v′ körökben, a vizszintes tengelyüt meg z–z és z′–z′ körökben metszi. Ezeknek metszéspontjai 7 /7′/; 8 /8′/; 9 /9′/; 10 /10′/ az áthatás pontjai.

Érintőt bármely pontban kedvezően a lapnormálisokkal kaphatunk. Pl. 7–es pontban a hengerek normálisa 7a, illetve 7b sugár. Az ezek által meghatározott normálsik ab egyenese egy második fővonal, s igy 7–ből erre állitott merőleges a sikra merőleges egyenesnek, az érintőnek a második képe. 2–ben az érintő ee–re merőleges.

Az áthatási vonal felülnézete 5.5′ és 6.6′ körivek, kettős vetületek.

/Szerkesszük meg a képhyperbola görbületi körét 5-ben, mint az áthatási görbe 5-beli görbületi körének vetületét. Az 5-beli görbületi kör a simulósikban van. Ez tartalmazza az 5-beli függőleges érintőt, s ennek szomszédosát. Előbbi első képe pont, utóbbié az áthatási vonal első körképének 5-beli érintője, s ez egyben a simulósík első képe E. "E" sik a T′ hengert ellipszisben metszi. Az E sikon s egyben T′ hengeren levő áthatási pontok ellipszis pontok is, s igy az 5-beli ellipszis görbületi kör az áthatási görbe görbületi köre is.

Az ellipszis görbületi körnek sugara 5-ben /Meusnier-gömb/ $5.\omega_1 = \varrho$. Az érintővel párhuzamos sikra merőlegesen vetitve, a görbületi kör lesz $\varrho_2 = \frac{\varrho}{\cos\mu} = 5.\omega_1'$; s ekkor a képgörbe hyperbolának görbületi köre.

$5\omega_1 = p_1 o_1 = 5.o_2$,.Vagyis a hyperbola csucsbeli görbületi körének sugara egyenlő a valóstengely fél hosszával, a hyperbola egyenlőszáru, asymptotái egymásra merőlegesek./

A képhyperbolákat a gyakorlati esetekben gyakran körivvel helyettesitik. A kör sugara egyenlő a T henger sugarával, s középpontja T_2-ön van. A körív áthalad 5 ponton is, mert e.5 = l.u.

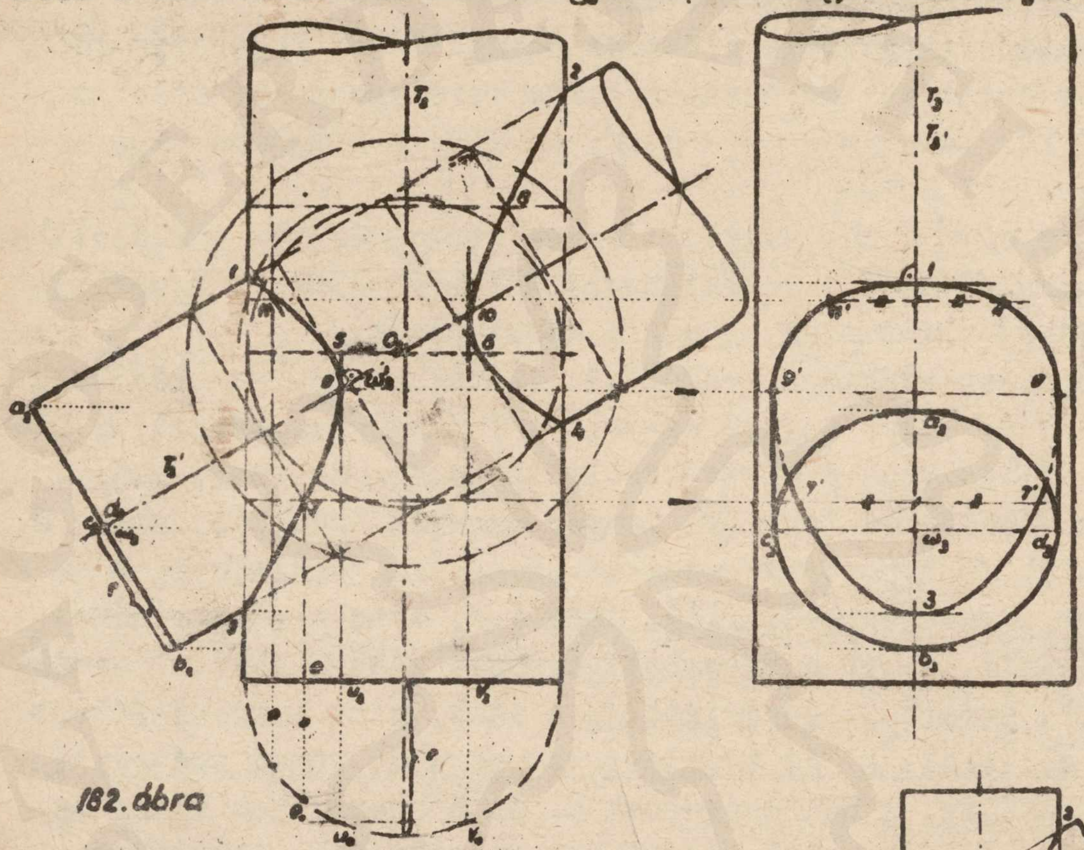
Ha a vizszintes tengelyü henger sugarát növeljük, akkor 5. és 6. pontok /a hyperbola csucsai/ egymáshoz közelednek, s ha a két henger sugara egyenlő /181. ábra a./, azaz a gömb mindkét hengert érinti, akkor a hyperbola egymást metsző kettős egyenessé fajul /a hyperbola végérintői/, s ezek, mint hengerfelületi vonalak, ellipszisek. Az áthatási negyedrendü vonal szétesett két másodrendüre. A két hengernek 5. és 5′ pontokban közös az érintősikja, a hengerek 5. és 5′-ben érintkeznek. Általában: ha két másodrendü lap két pontban érintkezik, áthatási vonaluk két másodrendü vonal.

A 182. ábrán a hegyesszögben metsződő tengelyeken átmenő szimmetrálsikkal az 1, 2, 3, 4 pontokat kaptuk. Segédgömbökkel az 5, 6, 7, 8, 11 pontokat. 5-ben a két hengernormális ω' és O pontjainak összekötése sikjuknak második fővonala, s igy az érintő $5\omega_2$.

Az oldalnézetben a T′ hengernek csak a látható része van ábrázolva, a hengerbe belelátni. Az alapkör átmérőpárja ab és d.

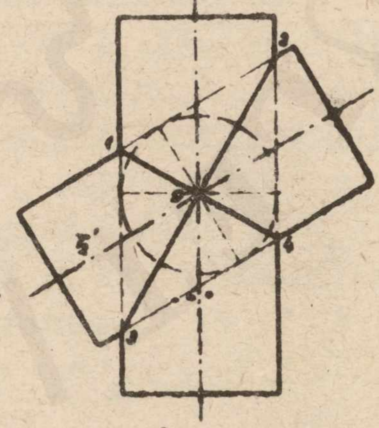
Az áthatási vonal 1. és 3. pontjaiban az érintő Π_2-re és az alkotóra merőleges. A 7, 7′/11, 11′/ pontok harmadik képének megállapításához szükséges ezeknek a simmetrálsiktól való távolsága. Ezzel egyenlő a 7. hengeralkotó e talppontjának távolsága, amelyet az alapkör parallelforgatásával ee_0-ban kapunk meg.

A c és d harmadik képszélalkotókon levő 9, 9′ és 10 pontokat a T′ hengert ezen alkotó mentén érintő sikkal kaptuk. E sik nyoma a T henger parallelforgatott alapkörén u_0v_0. Az u_2 és v_2-ből kiinduló hengeralkotóképek kimetszik 9. és 10 pontokat; ezekben a két érintősik metszőegyenese T henger alkotója.



182. ábra

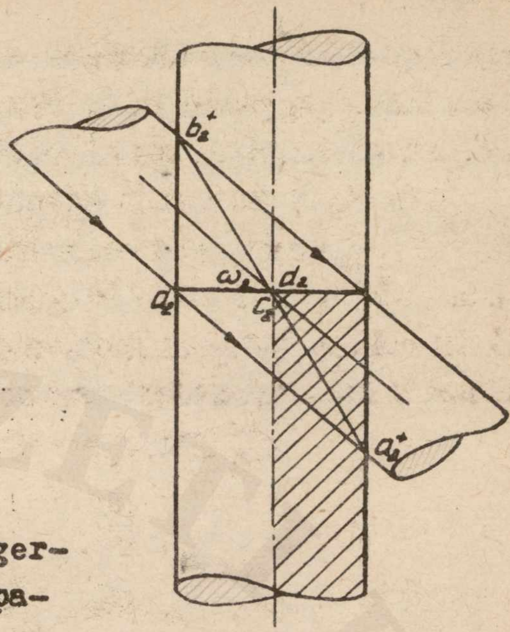
Egyébként, ha a hengerek sikbafejtését is meg kell szerkeszteni, akkor célszerűbb az áthatást, mint 9. és 10-nél, a szimmetrálsikkal párhuzamos segédsikokkal megszerkeszteni, amikor is a segédsiknak a párhuzamos helyzetbe forgatott alapkörökön levő nyoma megadja a kimetszett alkotók talppontját.



a.)

A 182. ábra a./-ban a hengerek 9 és 9′-ben érintkeznek, az áthatás két ellipszis.

Az áthatási negyedrendű vonal ilyen szétesése következik be akkor is, amikor egy másodrendű felület sikmetszetének a felületre vetett árnyéka keletkezik. A sikmetszet ugyanis vezető vonala egy másodrendü fényhengernek, s ennek áthatása a felülettel a metszet vetett árnyéka. De mivel a metszet másodrendü görbe, s ez közös vonala a felületnek és a fényhengernek, az áthatás további része csak másodrendü lehet.



183.ábra.

Egy másodrendü felület sikmetszetének a felületre vetett árnyéka másodrendü sikgörbe.

Egy függőleges tengelyü forgáshengernek egy köre abcd /183.ábra/. π_2 -vel parallel fényirány esetében önárnyékhatára c és d pontokon átmenő két alkotó. Az abcd kör vezérköre a ferde fényhengernek, s ez a forgáshengert cd kistengelyü és $a_2^+b_2^+$ nagytengelyü ellipszisben metszi. A belülről önárnyékos félhenger cad határ félkörének vetett árnyéka ca^+ d félellipszis. A két henger egymást c és d pontokban érinti, mert mindkét hengernek közös fénysik az érintősikja.

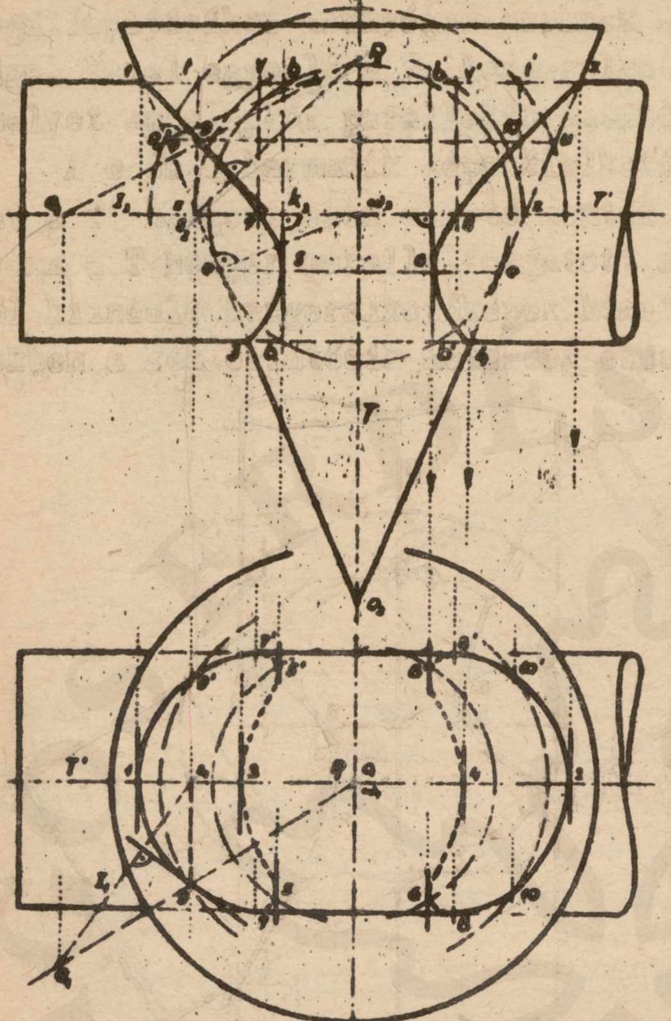
81./ Metsződő tengelyü forgáskup és henger áthatása. Tengelyeik egymást ω -ban metszik, szimmetrálsikjuk π_2 -vel párhuzamos. Az áthatás negyedrendü, elölnézete másodrendü, felülnézete negyedrendü sikgörbe /183.ábra/.

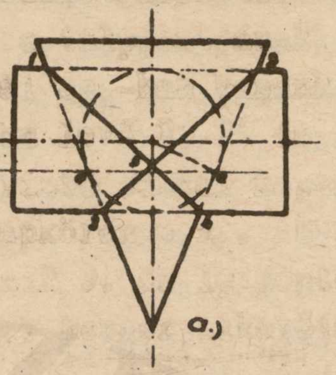
A szimmetrálsikkal kimetszett második képhatáralkotók 1,2, 3,4 metszései áthatási pontok. Rendezővel a felülnézetek. Az ezeken átmenő alkotókmenti érintősikok π_2 -re merőlegesek, a metszőegyenesek az érintők is vetitők.

A segédgömbök középpontja a tengelyek metszéspontja. A kupot e-e körben érintő gömb metszi a hengert b-b és b' - b' körben. Metszéspontjaik 5/5'/ és 6/6'/. Az első képeket e-e kupkörrel kapjuk meg.

Az 5-höz tartozó hengernormális 5.k; a kupnormális 5. ω Ugy ω, mint k a henger tengelyén van, a hengertengely a normálsik első és második fővonala, az erre merőleges 5.beli érintő két képe rendezőirányu. Ugyanez vonatkozik 5', 6 és 6' pontokra.

A második segédgömb a kupot a henger első képhatáralkotóinak második képével összeső, z-z körben, a hengert meg v és





v′ körökben metszi. Közös pontjaik 7 /7′/ és 8 /8′/; első képeik a henger első képhatáralkotóin vannak. Ezzel a lényeges pontok megvannak.

Egy további gömb a kupot u–u körben, a hengert t és t′ körökben metszi. A nyert pontok 9 /9′/, 10 /10′/. Ezek első képét a kup u–u parallel körével kapjuk.

Az érintőt pl. 9-es pontban a normálisokkal szerkeszthetjük meg. A hengernormális $9.s_2$ illetve $9.s_1$ sugár. A kupnormális megállapitásához a 9-es pontot a konturra 9_0-ba forgatjuk, az ott meghuzott normális a tengelyt p_2-ben metszi, a visszaforgatott normális $p_2 9$, illetve $p_1 9$. A normálisok által meghatározott normálsik egy második fővonalának első képe $p_1 s$, második képe $p_2 s_2$. Az érintő második képe tehát 9-ből $s_2 p_2$-re állitott merőleges. A normálsik egy első fővonalának második képe $s_2 e_2$; az e_2 pont $p_2 9$ meghosszabbitásán van. e_1 és s_1 összekötése az I_1; s erre merőleges az érintő első képe.

184.ábra

A lemezkupba felülről belelátni.

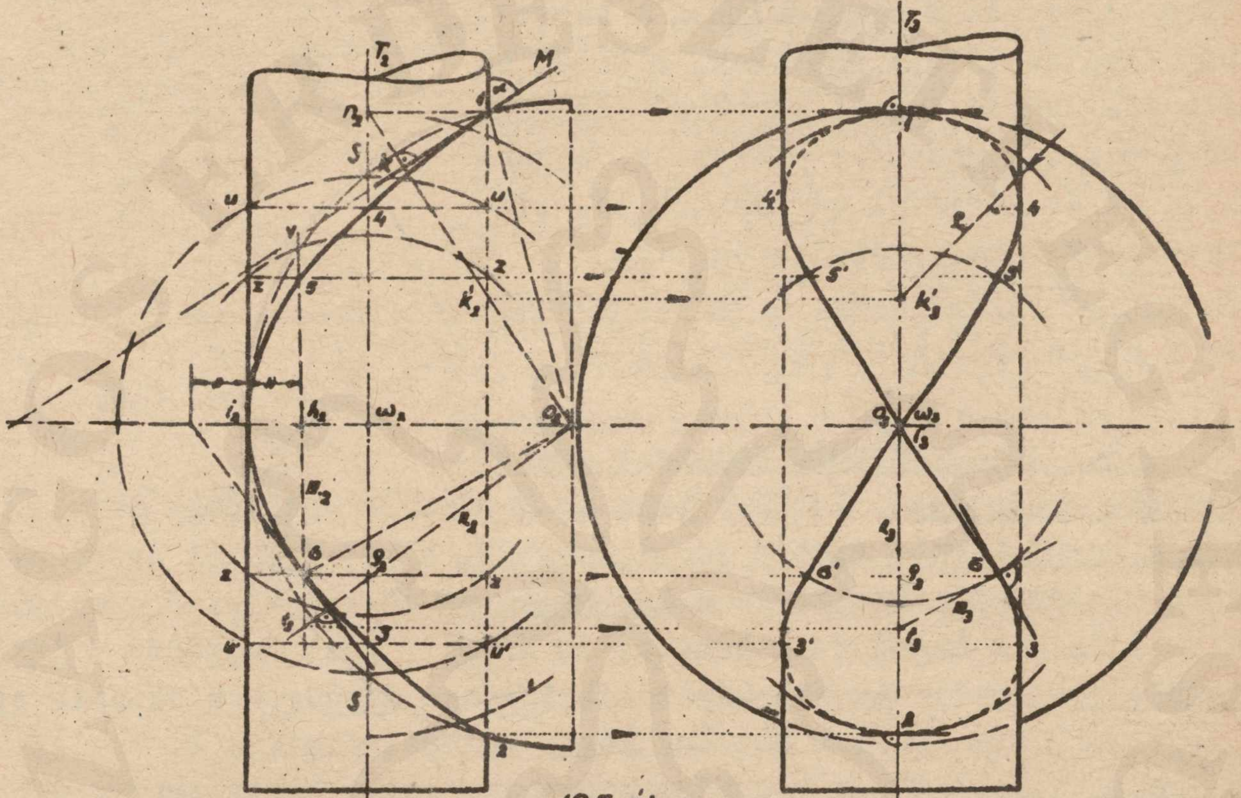
A 184. ábra a-ban a kup és henger 5 és 5′-ben érintik egymást, közös az érintősikjuk, az áthatási vonal két ellipszis.

<u>82./ Henger-gömb áthatás kettős ponttal</u>. A 185. ábrán elől- és oldalnézetben megadott gömbnek és forgáshengernek i-ben közös az érintősikja, az áthatási negyedrendü vonalnak i kétszeres pontja. Az áthatási vonal második képe másodrendü, mégpedig parabola,

mert a két felületnek Π_2-vel párhuzamos közös szimmetrálsikja van.

A szimmetrálsik a gömbből és a hengerből a második képhatárkört, illetve alkotókat metszi ki, s ezek 1, 2, i metszéspontjai áthatási pontok. Rendezővel a harmadik képek. 1 és 2-ben az érintő, mint a két második vetitő érintősikok metszete, merőleges Π_2-re és a henger alkotóira.

A továbbiakban alkalmazandó segédgömbök középpontja a hen-



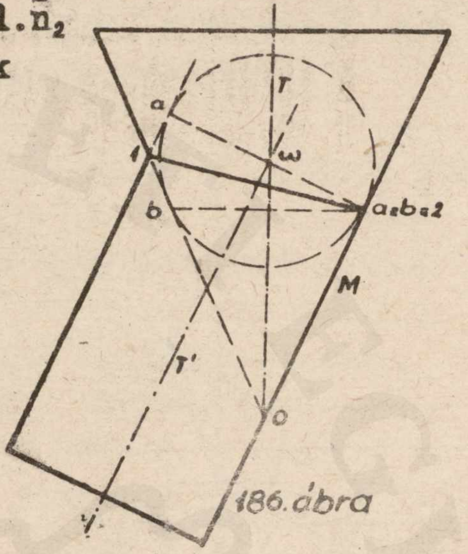
185. ábra

ger tengelyén bárhol lehet, mert az a gömb középpontjával összekötve, a gömb forgástengelyéül tekinthető. Legyen ez ω pont. Az első segédgömb a gömböt s–s körben, a hengert u–u és u'–u' körökben metszi. A közös pontjuk 4 /4'/ és 3 /3'/, a henger harmadik képhatáralkotóin vannak. Ezzel a jellegzetes pontok megvannak. A következő gömb a hengerből z–z és z'–z' köröket, a gömbből v–v kört metszi ki, közös pontjaik 5 /5'/ és 6 /6'/, ezek oldalnézetét a gömbi v–v körrel kapjuk meg.

Az érintőt 6-ban a 6.o /6.o_2/ gömbnormális és 6.ϱ /6.ϱ_2; 6ϱ_3/ hengernormális által megadott sikra merőleges egyenes adja. A normálisok sikja, egy második fővonalának harmadik képe $O_3\varrho_3$, második képe $O_2\varrho_2$, s igy 6-ból erre huzott merőleges az érintő második képe. Ez a parabolatengelyt i_2 csucstól i_2h_2 távolságra metszi.

A normálsik egy harmadik fővonalának második képe $6.t_2$; t_3 a II_3 fővonalképen, $t_3 6$ a 3-ik fővonal oldalnézete, erre merőlegesaaz érintő harmadik képe.

Szerkesszük meg az áthatási görbe harmadik képének 1 /2/ pontjában a görbületi kört. 1-ben a térgörbe érintője merőleges II_2-re, azért a simulósik második vetitő és M nyoma érinti a képparabolát. Az M érintő merőleges az $1.\bar{n}_2$ és $1.O_2$ normálisok sikjának $n_2 O_2$ második fővonalára. Az M simulósikkal a hengerből kimetszett ellipszisnek, s ezzel az áthatási görbe 1-beli görbületi körének középpontja, Meusnier szerint k, sugara k.1. Az érintőjével párhuzamos II_3 sikra vetitve, ha a képsikszög α; $\varrho_o = \frac{\varrho}{\cos\alpha} = \frac{k.1}{\cos\alpha} = 1.k_2'$. S igy k_3'-ból az 1-en át rajzolt kör a görbületi kör.



186. ábra

83./ A negyedrendü áthatási vonal további szétesései. A 186. ábrán az M második vetitősik érinti ugy a forgáskupot, mint a forgáshengert, a két felület egész alkotó mentén érintkezik. Az a két végtelen közeli alkotó, amelyben M vetitősik a kupot és a hengert is érinti, közös alkotói a két felületnek s igy az áthatás további része másodrendü éspedig ellipszis. Sikja, mert a két lap közös szimmetrálsikja Π_2-vel párhuzamos, vetitősik, s igy képe egyenesbe esik. Egyik pontja a képhatáralkotók 1. metszéspontja.

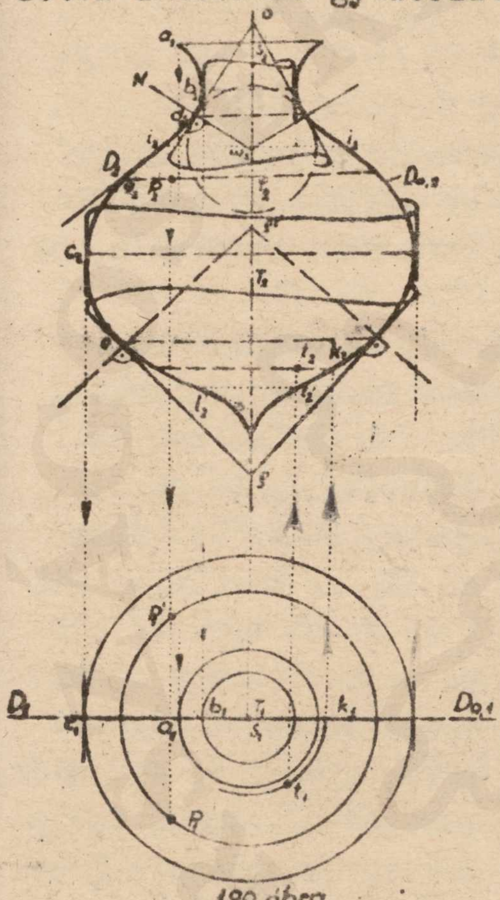
187. ábra

A segédgömb középpontja ω; a gömb érinti a hengert a-a, a kupot b-b körben, ezeknek közös 2 pontja áthatási pont. Az áthatási ellipszis képe 1-2 távolság, s ez egyuttal a nagytengelye. A gömb mindkét felületnek 2-höz tartozó Meusnier-gömbje, s hengerből kialakitott villát mutat.

Oldalnézetben csak az alak fele van ábrázolva. Metsződő és kitérő tengelyü forgáshengerek áthatásairól van szó. Az alaphengert átható hengereket vékony vonallal jelöltük.

XIII. Forgásfelületek.

84./ Származtatás, ábrázolás, felületi pont. A forgásfelületek a müszaki gyakorlat legfontosabb felületcsoportja. Forgásfelület legegyszerübben ugy származtatható, hogy egyik sikgörbét sikjának egyenese körül forgatunk.



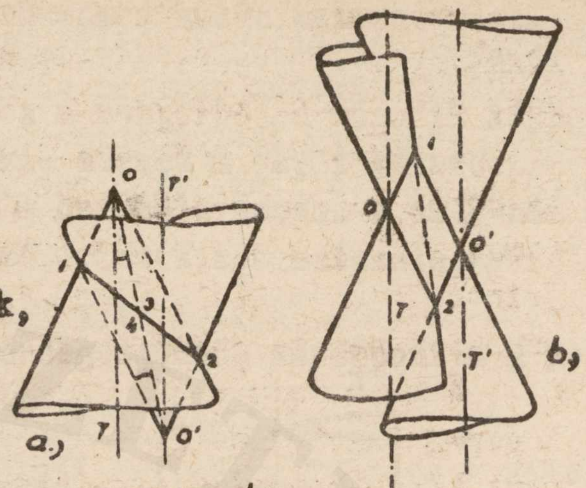
190. ábra

A 190. ábrán a T forgástengely függőleges, s a D görbe sikja a II_2-vel párhuzamos, amikor is D_1 felülnézete egyenesbe esik, s D_2 előlnézete a valódi alakot mutatja. A forgásnál a D görbe - a fődéllő - minden pontja, pl. "a", a_2 kép D_2-ön, rendezővel D_1-en a_1, T-re merőleges u. n. párhuzamos kört ir le, ennek előlnézete T_2-re merőleges egyenesbe esik, s középpontja T-n van, s_2 kép T_2-ön; $s_1 = T_1$. A kör felülnézete s_1-ből a_1-en át rajzolható $s_1a_1 = s_2a_2$ sugaru kör. Igy ábrázolhatók b; c ... pontok körei is.

Amikor a D déllőt 180^0-al megforgattuk, akkor ismét II_2-vel párhuzamos D_0/D_{01} $D_{02}/$ helyzetbe jut, innét fődéllő lesz. A forgó déllőnek c-beli függőleges, T-vel párhuzamos érintője, a déllővel együtt forog, mindig érinti a felületet c parallelkörének pontjaiban. Helyzeteinek összesége egy, a forgásfelületet c körének mentén érintő forgáshenger. E kör szomszédságában levő párhuzamos körök kisebb sugaruak, a kört egyenlitőnek nevezzük. Az egyenlitő mentén a forgásfelület /és henger/ érintősikjai első vetitők, azért az egy első konturkör /képhatárkör/.

b párhuzamos köre mentén a felületet ugyancsak forgáshenger érinti, de a szomszédos parallelkörök mind nagyobb sugaruak;

igy 1.2 ellipszisnek, mint a kup- vagy hengerfelületen levő görbének 2-beli görbületi körsugara ugyanaz, s igy a kistengelye is ugyanakkora, miért is valóban közös ellipszisük.

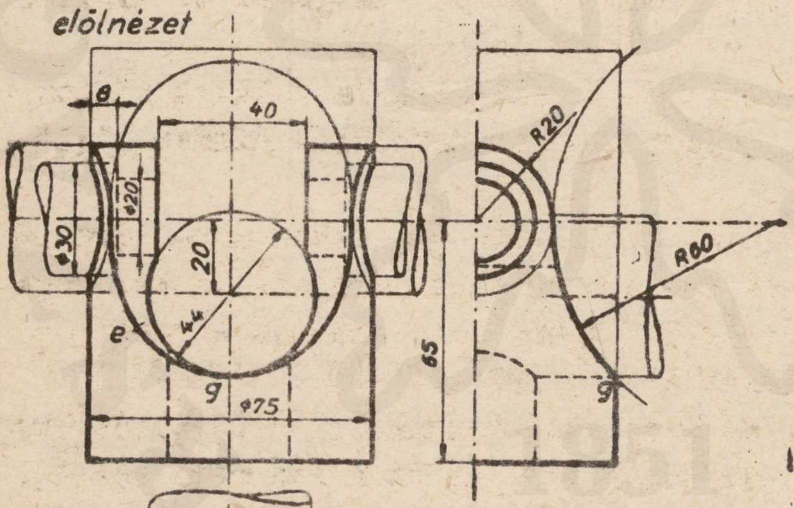


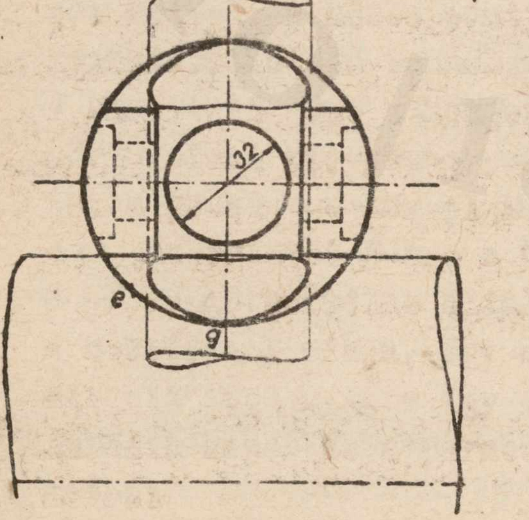
186. ábra

Ha a kupok csucsai egybeesnek, illetve a hengerek alkotói párhuzamosak /187. ábra/, akkor az egyazon sikon levő kör és ellipszis, vagy ellipszis és ellipszis alapgörbéik egymást négy pontban metszhetik s ezek a négy közös alkotónak talppontjai.

Párhuzamos tengelyü összeillő forgáskupok metsződése egy másodrendü vonal, /a másik képzetes/. S ez ellipszis, ha a kupok csucsai egymáson belül vannak /186. ábra a./; hyperbola, ha egymáson kivül vannak. /b/

A TT' szimmetrálsik II_2-vel párhuzamos, az áthatás második képe kettős vetület. 1. és 2.-ben az érintők II_2-re merőlegesek. Az oo'-en átmenő II_2-re merőleges sik T és T'-el egyenlő szöget alkot, s igy az ezzel kimetszett alkotópárok szögei is egyenlők, rombust alkotnak, amelynek egyik átlója a II_2-vel párhuzamos oo', s a II_2-re merőleges másik átlójának második képe az oo' távolságot felező pont, s ez az olo'2 parallelogramma 1.2 és oo' átlóinak 3.4 metszéspontja. 3 és 4 a két kup metszésének további pontjai. 1.2 és 3.4 az áthatási ellipszis tengelyei.





84./ Gyakorlati példa. A 189. ábra rajzolvasási gyakorlatul egy átfurt torokkörnek nevezzük. Ennek mentén is első vetitők az érintő sikok, ez is alsó konturkör.

A fődéllő d pontbeli érintője a forgástengelyt o-ban metszi. Ez az érintő a déllő megforgatásakor a forgásfelületet d párhuzamos köre mentén érintő forgáskupot ir le. A forgáskup egy-egy érintősikja érinti a forgásfelületet is abban a pontban, amelyben az érintési kupalkotó a párhuzamos kört metszi.

A kupnak, s ezzel együtt a forgásfelületnek d-hez tartozó N normálisa T-t metszi ω-ban. A forgatásnál az N normális d pont körének pontjaihoz tartozó normálisok összesége egy normálkupot ad. A normál kupnak ω csucsa egyben középpontja azon gömbnek, amelyik a kupot és a forgásfelületet d párhuzamos köre mentén érinti. Az e párhuzamos kör mentén érintő kup csucsa ϱ ; az érintő gömb középpontja ϱ'.

A párhuzamos köröknek a fődéllőn levő a; b; c; d ... pontjaiban az érintők egyben forgásfelületi érintők, Π_2-re merőlegesek, s igy a felületi érintősikok is második vetitők, tehát a fődéllő a második képhatár, kontur. Ez választja el az elölről látható félfelület részt az elölről fedettől.

A lap származtatásából következik, hogy a felület minden pontján át kör és déllő halad, s a forgásfelület minden déllősikra szimmetrikus.

E szerint ha pl. p pont elölnézete p_2, akkor a p-n átmenő párhuzamos kör elölnézete T_2-re merőleges távolság. A kör sugara $g_2/2$. A kör felülnézete $g_2/2$ sugaru kör, ezen és a rendezőn van p_1 és p_1'. p elölről látható p′ fedett.

Vagy: t_1 képen átmenő körkép k_1-ben metszi a fődéllőt, rendezővel k_2; s ezen menő egyenes körképen és a rendezőn van t_2.

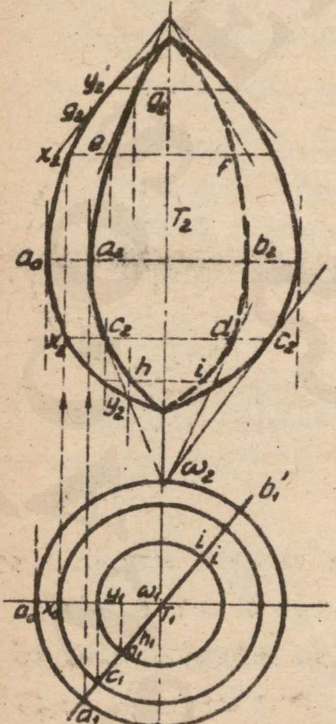
A D déllőnek i és i′-ben fordulópontja van. Az i-i és i′-i′ párhuzamos körök között a forgásfelület elliptikusan, tojásszerüen görbült. Az i-i kör feletti és i′-i′ kör alatti részen hyperbolikusan, nyeregszerüen görbült. Az i-i és i′-i′ párhuzamos kör pontjaiban a felület parabolikusan görbült.

A forgásfelület oldalnézetének ~~képhatára~~ az elölnézettel összeillő, s az oldalnézet sikjával párhuzamos déllő.

85./ Déllő-metszet, érintősik. A forgásfelületet a tengelyén átmenő sik déllőben /meridián/ metszi. Ábrázoljuk az E sik által kimetszett déllőt /191. ábra/.

A metszet első képe E-be esik. Egyes pontjainak második képét, mint felületi pontokét keressük meg. Pl. a és b az egyenlítőkörön vannak. Ennek második képe a fődéllőnek a T_2 -vel párhuzamos érintőjének a_0 érintési pontján megy át. Rendezővel a_2 és b_2 c_1 és e_1 pontokon áthaladó körképek x_1- ben metszik a fődéllő képét, ebből rendezővel x_2 és x_2'. Az egyenes körképen rendezőivel c_2 és e_2 stb.

Érintőt bármely pontban ugy kapunk, hogy a déllőt T_2 körül a fődéllőre forgatjuk, ott megrajzoljuk az érintőt, s azt a déllővel együtt visszaforgatjuk. Pl. "a" pont a_0 -ba jut, ott az érintő függőleges /egyenlitő kör/, tehát a_2 -ban is függőleges. c pont c_0 -ba jut, c_0 -ban a fődéllő érintője a tengelyt ω -ban metszi, ω_2 c_2 az érintő. g pont a forgatásnál g_0-ba jut, o_2 a kup csucsa, o_2 g_2 az érintő.



<u>Az érintők első képe E képbe esik.</u>

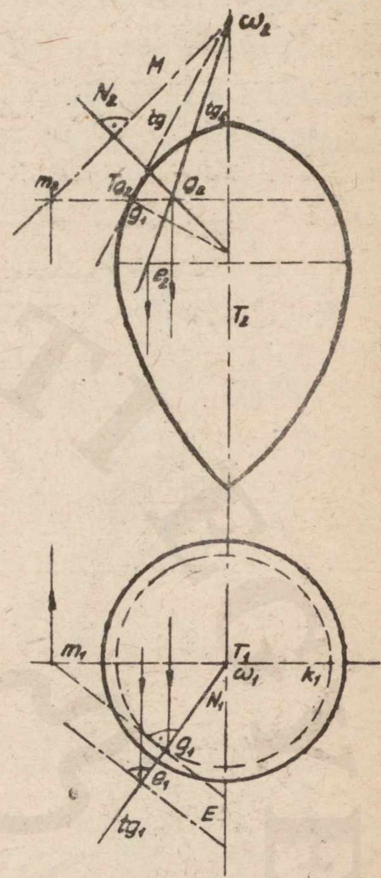
<u>Érintősik.</u> A forgásfelület valamely pontjában az érintősikot, az általános elv szerint, meghatározza a kérdéses ponton áthaladó két tetszőleges lapgörbe érintője. <u>Forgásfelületnél az egyik görbe a párhuzamos kör, a másik a déllő.</u>

Szerkesszük meg a forgásfelület g pontjában az érintősikot /192. ábra./

A g ponton átmenő párhuzamos kör kör érintője Tg_1 illetve Tg_2. A g ponton áthaladó déllő érintője a fődéllő sikjában forgatva tg; visszaállitva tg_2, illetve tg_1. <u>Tg és tg meghatározzák az érintősikot</u>. Ennek Tg első fővonala, tg meg első esésvonala. Az érintősik E nyoma az egyenlitő sikján tg-nek e sikon levő e /e_2 e_1/ döfésén halad át és párhuzamos Tg_1-el, mert ugy tg, mint az egyenlitőn levő E nyom is első fővonalak.

A fődéllő sikján levő nyom Tg és tg-nek e sikon levő nyompontjait összekötő egyenes. Tg. a fődéllő sikját m-ben döfi; első kép m_1, rendezővel m_2. A tg déllőérintő ω -ban döfi a fődéllő sikját, tehát ω_2 és m_2 összekötése az M nyom a fődéllő sikján. g_2 -ből M-re állitott merőleges a g-beli normálisnak második képe, első képe tg_1 -be esik.

A tg és Tg szöge a g ponton átmenő déllő és párhuzamos kör metszési szöge, s ez derékszög, mert tg esésvonal, Tg meg fővonal. <u>A déllők a párhuzamos köröket derékszögben metszik.</u>

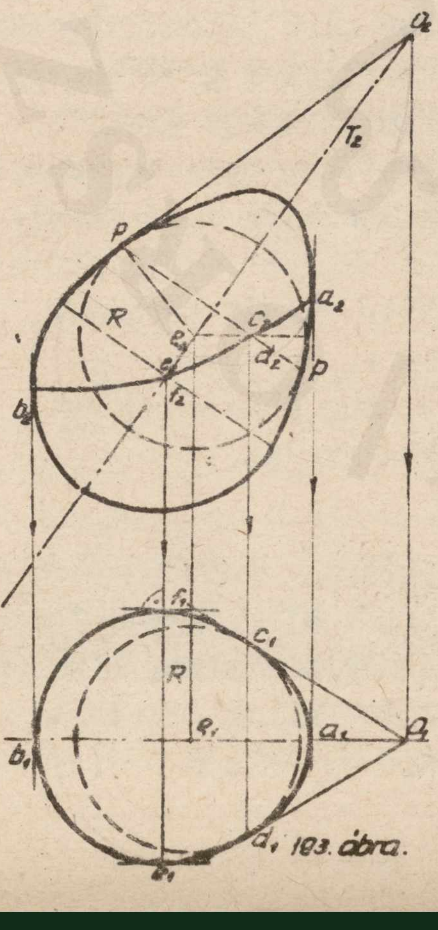


192. ábra.

<u>86./ Ferdetengelyű forgásfelület képhatárgörbéje.</u> A 193. ábrán a forgásfelület T tengelye II_2-vel párhuzamos. Az elnézet határgörbéje a megadott második fődéllő, s ennek <u>első képe a T_1-be esik</u>.

Az első képhatár ama pontok összessége, amelyekben a lapérintősik első vetitő. A fődéllő "a" és b pontjában az érintő első vetitő egyenes, s igy az érintősik is az, képe T_1-re merőleges és érinti a képhatárt a_1 és b_1-ben.

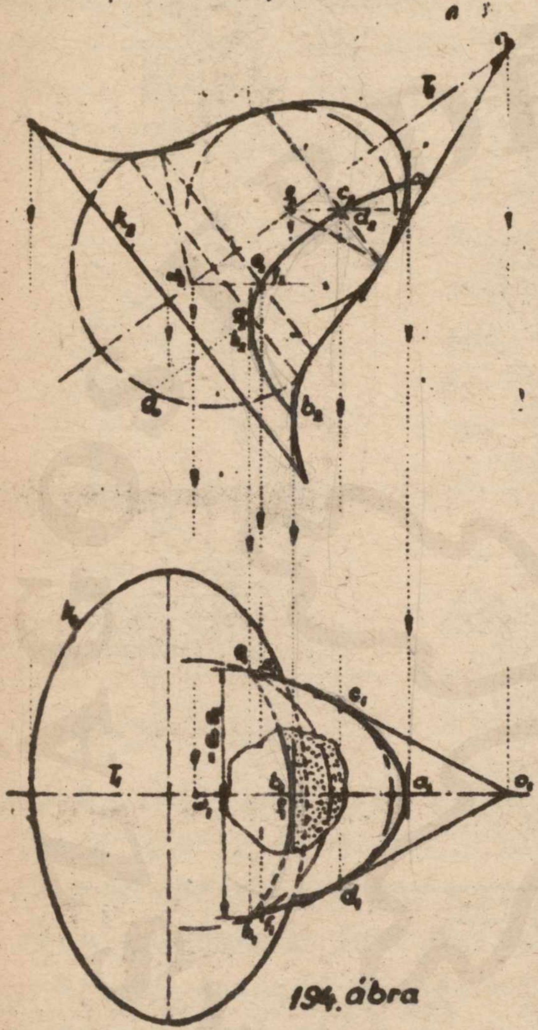
Az egyenlitőkörben érintő hengernek e és f pontjain áthaladó hengeralkotók mentén az érintősik II_2-vel párhuzamos, tehát első vetitő, s igy e_1 és f_1-ben a képhatárérintők a rendezőre merőlegesek.



193. ábra.

Valamely p-p párhuzamos körnek azt a pontját, amelyben az érintősik első vetitő, a párhuzamos kör mentén érintő kup- gömb segitségével határozzuk meg. A forgásfelületet p-p körében érintő kup csucsa o /o_2 o_1/. Az érintő gömb középpontja ρ /ρ_2 ρ_1 /, sugara ρ_2 p. A p-p párhuzamos kör pontjaiban a gömbnek, kupnak és forgásfeluletnek közös és érintősikja, tehát amely pontban a gömb érintősikja első vetitő, ott a kupé és a forgásfelületé is az.

A gömbnek a középpontján átmenő egyenlitőkörének pontjaiban első vetitő az érintősik. Az egyenlitőkön második képe ρ_2 -őn átmenő vizszintes. Az egyenlitő kör p-p kört o és d /o_2 d_2/ pontokban metszi, tehát c és d-ben a kupnak és a forgásfelületnek is első vetitő az érintősikja. c_1 és d_1-et a ϱ-ből rajzolt gömbi egyenlitőkörön kapjuk. A c_1 és d_1 pontokhoz huzható o_1c_1 és o_1d_1 kupalkotók az érintőkup első konturalkotói, tehát ezek a forgásfelület első képhatárgörbéjének is érintői. Igy tovább eljárva, megkapjuk az első képhatár térgörbe pontjainak második és első képét. Az első képek összekötése figyelemmel az érintőkre, adja az első kép határvonalát. A második kép kettős vetület. Felülről nézve látható a felületnek acfbed görbe feletti része.


194. ábra

A 194. ábrán a forgásfelületet K párhuzamos köre határolja, s igy annak K_1 első képe is képterülethatár. a, b, c, d, e, f az első képhatárnak az előzők szerint megszerkesztett pontjai. E pontok második képein át megrajzoljuk az első konturgörbének második képét, s megállapitjuk, hogy ennek $g_2/h_2/$-ben rendező az érintője, miért is g és h pontokban a görbének függőleges az érintője s igy a görbe első képének g_1 és h_1 visszatérő pontja. A g és h pontokon átmenő párhuzamos kör parallelforgatott helyzetében g_2g_0 megadja a második fődéllősiktól való távolságot, s ezzel g_1 és h_1 kijelölhető.

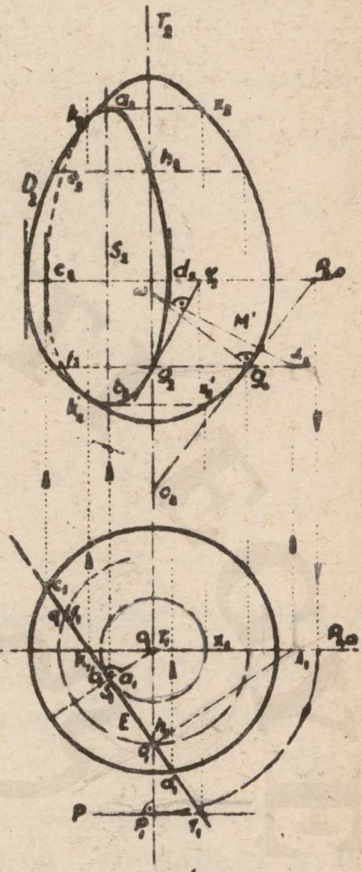
A felülről nem látható gbh iv csak akkor valódi képhatár, ha a felületből egy darabot eltávolitunk.

Párhuzamos körben érintő gömb, henger, kup alkalmazásával szerkeszthető meg a forgásfelület önárnyékhatára is.

87./ Metszés a tengellyel párhuzamos sikkal. Metszendő a forgásfelület E első vetitősikkal /195. ábra/. Mivel ugy a felület, mint a sik szimmetrikus a forgástengelyen átmenő, s a metszősikra merőleges sikra, azért a metszet szimmetriatengelye e két siknak Π_2-re merőleges S metsző egyenese.

A metszetnek felülnézete egyenes, s az S_1 szimmetriatengelyen van a_1 és b_1; a_2 és b_2 párhuzamos körrel nyerhető. Ezekben a metszet érintője vízszintes, mert az érintő és a metszősikok nyoma pl. az egyenlitősikon práhozamos lenne. b a legalsó, a a legfelső pont.

Az egyenlitőkörön levő c /c_1 c_2/ és d /d_1 d_2/ pontokban az érintő függőleges, mert a metsző és érintő sikok első vetitők. Első képben tetszőlegesen felvett párhuzamos kör kettős vetület, s ezen vannak $e_1 f_1$ és $g_1 h_1$ pontok. Rendezővel $e_2 f_2 g_2 h_2$.

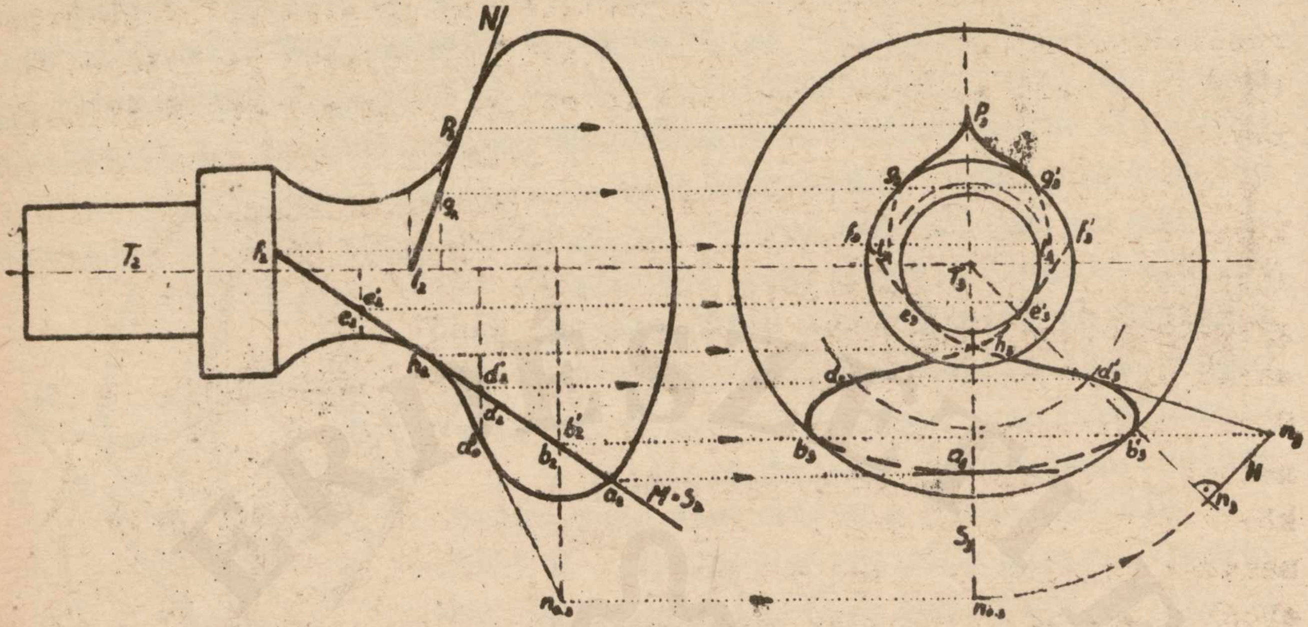

195. ábra

Elölről nézve a metszetnek az a része látható, amely a forgásfelületnek a D fődélló előtti felén van. A D-n levő k és k′ határpontok első képe D és E-nek k_1 és k_1' metszése. Rendezővel D_2-őn k_2 és k_2'. A látható iv kahdgbk.

g-ben az érintő a g-beli lapérintősiknak és a metszősiknak a metsző egyenese. Az érintősik nyoma az egyenlitősikon: g-n átmenő délló érintőjének első képe $g_1 T_1$; parallelforgatott helyzetének előlnézete $o_2 g_0$, ennek nyompontja az egyenlitősikon p_0/p_{02} p_{01}/, visszaforgatottja p_1. Az érintősiknak ezen átmenő P nyoma merőleges a délló érintőjének első képére.

E és P nyomok f_1 metszését az egyenlitőre rendezve f_2 és g_2 összekötése a képgörbe érintője. /Az ábra mutatja az érintő szerkesztését azon tétel alapján is, hogy az érintő merőleges a felületi $g\omega$ és $g\lambda$ siknormálisok sikjára./

88./ Metszés érintősikkal. Az elöl- oldalnézetben megadott forgásfelület T tengelye merőleges II_3-ra /196. ábra/. A második vetitő M sik h /h_2 h_3/-ban érinti a felületet. A metszet szimmetriatengelye az M sikra merőleges fődéllősiknak és M-nek S /S_2 S_3/ metsző egyenese. A metszet második képe M-be esik, pontjainak harmadik képeit, mint felületi pontokat keressük meg. A fődéllőn levő a_3-ban az érintő vetitősugár. Az egyenlitőkörön van b és b′. További megszerkesztett pontok d és d′; e és e′; f és f′; amely pontok képei S_3-ra szimmetrikusan helyezkednek el. h pont



196. ábra.

a metszet kétszéres pontja, h hyperbolikus felületi pont. Az érintő d′-ben az érintő- és metszősik metsző egyenese. Az érintősik nyoma az egyenlitősikon H, a metszősiké meg b_3b_3'. Az érintő n_3d_3'.

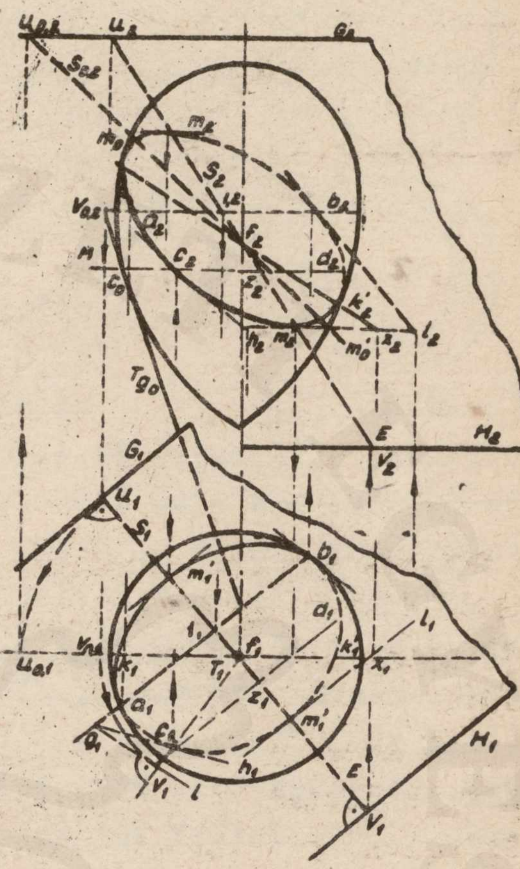
N második vetitősik p-ben, a fődéllő fordulópontjában érinti a felületet. A metszet darab pl részének a harmadik képe van ábrázolva. A görbének p visszatérő pontja, p parabolikus lappont. p_3-ban az érintő S_3.

p párhuzamos körének pontjai parabolikusak, az ettől jobbra levők elliptikusak, a balra levők f körig hyperbolikusak.

89./ Metszés általános sikkal. A metsző sik adott a vizszintes G és H egyenesekkel /197. ábra/. A metszet szimmetria tengelye a G.H sikra merőleges déllősik és GH metsző egyenese. A déllősik első képe G_1 és H_1-re merőleges S_1, s ez egyben a szimmetriatengely első képe. u és v pontjainak második képei G_2 illetve H_2-őn vannak.

S-nek a forgásfelülettel való döféspontjai a metszet legmagasabb és legalacsonyabb pontjai. S első vetitősikja által a felületből kimetszett déllő S-et a döféspontokban metszi. E pontok megállapitása végett forgassuk S vetitősikját T körül II_2-vel párhuzamos helyzetbe. A déllő a második fődéllőbe jut; S-nek f pontja állandó, u meg u_0/u_{01}; u_{02}/-ba jut; u_{02} és f_2 összekötése S_{02}, Ez a fődéllőt az m és m′ döféspontok m_0 és m_0' elforgatott helyzeteiben metszi. Visszaállitással kapjuk m_2 és m_2'-őt, rendezéssel m_1 és m_1'-et. Mindkét pontban az érintő párhuzamos G és H-val, mert az érintősik első fővonalai párhuzamosak G és H-val.

További pontokat párhuzamos körmódszerrel kaphatunk. Az egyenlitősikja a forgásfelületet az egyenlitőkörben, GH sikot meg az S esésvonalnak 1-es pontján átmenő G-vel párhuzamos első fővonalban metszi. A fővonal és az egyenlitőkör a és b metszéspontjai a sik metszet pontjai. 1_2 rendezve 1, ebből G_1-el párhuzamos egyenes kimetszi az egyenlitőből a_1 és b_1-et Rendezővel az egyenlitőn a_2 és b_2 A metszet érintője b-ben az érintő és metszősik metsző egyenese. Az érintősik első vetitő, felülnézete az egyenlitő érintője b_1-ben. Ez metszi a G.H siknak pl. m_1' ponton átmenő első fővonalát l_1-ben; rendezve l_2 és $l_2 b_2$ az érintő.

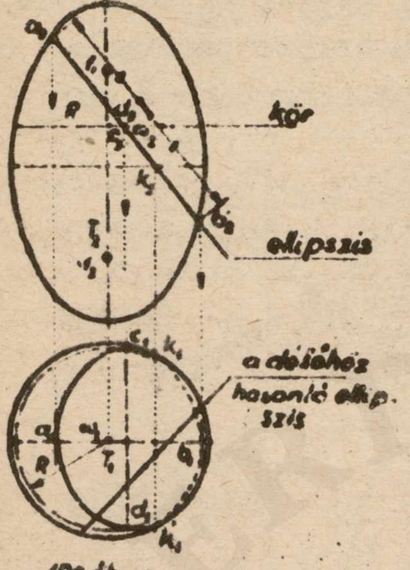


197. ábra.

A tetszőleges M vizszintes sikkal G.H-ból kimetszett z ponton átmenő első fővonal és a felületből kimetszett kör c és d metszéspontja a metszet további pontjai. Érintő c-ben. A metszősik nyoma az egyenlitő sikján az ab fővonal. Az érintősik nyomát ugyanezen sikon keresve, a parallelforgatott délkör érintője c_0-ban Tg_0, ennek nyompontja az egyenlitő sikján $v_{0.2}$, rendezve $v_{0.1}$, ez visszaforgatás után v_1-be jut; az $f_1 v_1$-re merőleges L_1 nyom és az $a_1 b_1$-nek g_1 metszéspontjának és c_1-nek összekötése az érintő első képe. $g_1 c_1$-nek az m_1' első fővonalán levő h_1-et rendezve $h_2 c_2$ az érintő második képe.

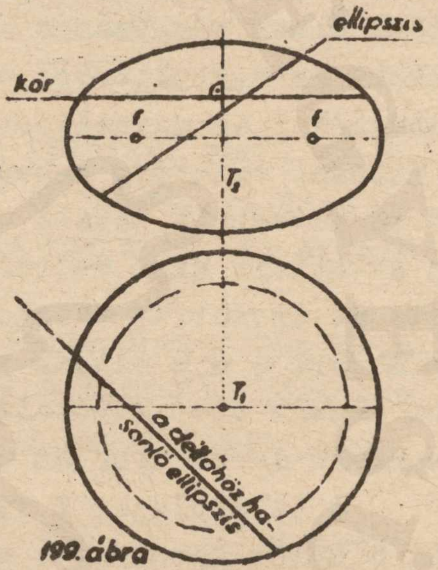
Láthatóság. Felülről nézve látható az egyenlitő feletti oma iv. Elölről nézve, a födélló előtti rész, a határpontok a födéllón vannak. A födélló sikja a felületet a födéllóben, a sikot xf $/x_1 f_1$; $x_2 f_2/$ egyenesben metszi. $x_2 f_2$ a födéllót k_2 és k_2' határpontokban metszi. A látható részen vannak a, c és m' pontok.

90./ Másodrendü forgásfelületek származnak, ha másodrendü vonalakat /s azok elfajult alakjait/ tengelyük körül forgatjuk. Már ismeretesek a kör, két metsződő egyenes /elfajult hyperbola, tengely a szögfelező/, két párhuzamos egyenes /elfajult ellipszis, tengely a távolságfelező/ forgásakor keletkező gömb; forgáskup és forgáshenger.



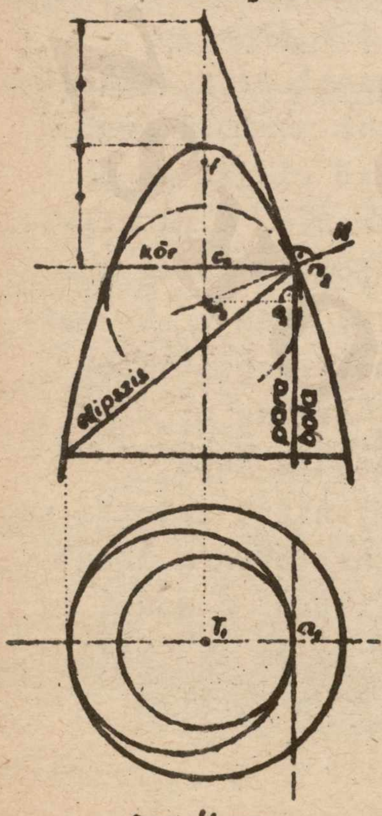
198.ábra

a./ A nagytengelye körül megforgatott ellipszis a nyujtott forgásellipszoidot adja /198. ábra/. A déllők gyujtópontjai az ellipszoid gyujtópontjai is. Sikmetszetei: kör, ellipszis. Az ábrán egy vetitősik metszetének első képe is látható. A szerkesztés menete az ábrán leolvasható.



199.ábra

Ha az ellipszis kistengelye körül forog, a nyomott forgásellipszoid /sferoid, lencse alaku/ származik. /199. ábra/ Déllőinek gyujtópontja az ellipszoid gyujtóköre. Sikmetszetei: kör, ellipszis. Az ábrán a metszősikok vetitők. /A déllőhöz hasonló ellipszis metszetének elölnézete kör is lehet./



200.ábra

b./ A forgásparaboloid keletkezik a parabola forgatásakor /200. ábra/. A végtelenbe terjedő lapot párhuzamos körrel határoljuk. A déllők gyujtópontja a paraboloid gyujtópontja.

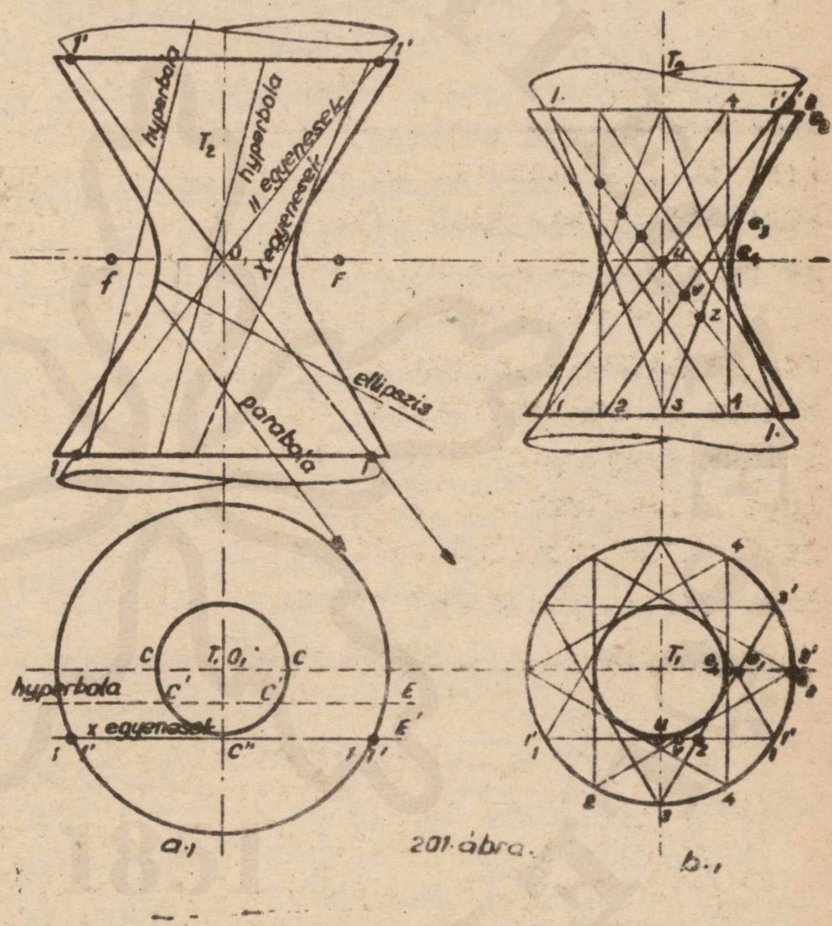
Az f-ből kiinduló fénysugarak a déllők átmérőivel, a paraboloid tengelyével párhuzamosan verődnek vissza /paraboloid fényszórók/. Sikmetszetei: kör, ellipszis, parabola. Ugy a kör, mint az ellipszis metszetének a tengelyére merőleges sikon kör a vetülete.

A forgástengelyével párhuzamos metszetei a déllővel összeillő parabolák. Ugyanis az "a" ponton átmenő profilsikkal kimetszett parabola a-beli görbületi körének sugara, Meusnier-gömbbel szerkesztve, $a_2 o_2 = c_2 \omega_2$ = a paraméter. De $c_2 \omega_2$ a födélló parabola subnormálisa, s ez egyenlő a déllőparabola paraméterével. A paraméterek egyenlők, a parabolák összeillők.

A paraboloid és ellipszoidok felületi pontjai elliptikusak.

c./ Képzotes tengelye körül megforgatott hyperbola egyköpenyü forgáshyperboloidot ir le./201.ábra/ A forgó asymptota a déllőhyperbolák végérintőinek összeségét, a hyperboloidnak asymptotás kupját adja, s ez a hyperboloidot a végtelenbe levő párhuzamos körében érinti. Az ábrán a hyperboloidot két egyenlősugaru párhuzamos körrel határoltuk. A hyperbola csucsa a torokkört, fokusza a gyujtókört irja le.

A födéllősikkal párhuzamos E metszete a födéllőhöz hasonló hyperbolák. Ha E sik T tengelytől távolodik, a hyperbola c′csucsai egymáshoz közelednek, de asymptotáinak szöge változatlan, s amikor a metszősik E helyzetbe jutva érinti a hyperboloidot a torokkör c″pontjában, a csucsok összeesnek, a hyperbolából egymást c″-ben metsző 1.1′ és II′ egyenes lesz, s ezeknek második képe a födéllőhyperbola asymptotái. A két egyenes a tengelyhez kitérő, a legkisebb távolságuk a torokkörnek c″-hez tartozó sugara. Minden párhuzamos kört metszenek, s igy a hyperboloidot egyiknek, vagy másiknak a tengely körüli forgásával is származtathatjuk.



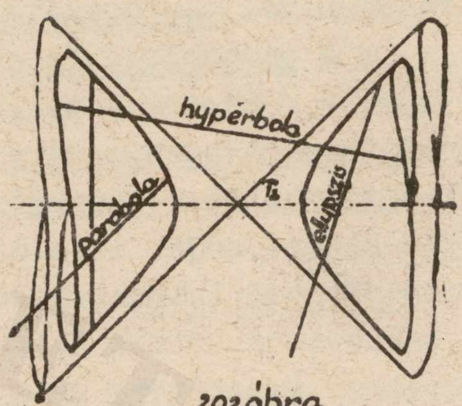
201.ábra.

A 201.ábra b./-bon a forgó 1.1′ egyenes 2.2′ 3.3′... helyzetei egymáshoz kitérőok, s a felületen levő egyenesek egyik seregét alkotják. E sereg minden egyenese metszi az I.1′ forgatásakor keletkező másik sereg minden egyenesét. Az ábrán az

M.3147

utóbbi sereg egy eleme I.1'– van feltüntetve; a metszéspontok u, v, z ...

E szerint a hyperboloid bármely z pontján a két sereg egy-egy alkotója halad át, s ezek felületi vonalak, önmaguknak érintői, s igy a hyperboloid érintősikját határozzák meg. Az érintősik egyben metszi is a hyperboloidot a z érintési ponton kétszer áthaladó vonalban, a két egyenes alkotóban, miért is z, s igy minden lappont hyperbolikus.



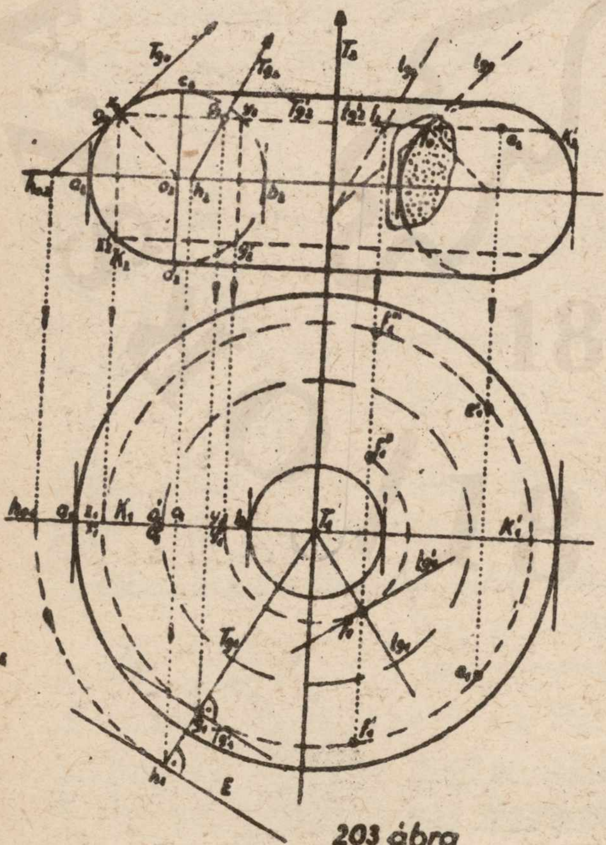
202.ábra

A 2.2'; 3.3'; 4.4'... alkotóknak a fődéllősikkal való e_2; e_3; e_4 döféspontjai a képhatárhyperbola pontjai, s az alkotóképek a hyperbola érintői.

Mivel az egy seregbeli szomszédos alkotók kitérőek, s igy a felület nem fejthető sikba, azért az egyköpenyü forgáshyperboloid az egyenesvonalu torzfelületek csoportjába is tartozik.

A hyperbolának minden déllősik szimmetrálsikja, igy van az 1.1' alkotóval párhuzamos alkotója is, s ez a másik sereghez tartozik.

A hyperboloid sikmetszetei: ellipszis /kör/, parabola, hyperbola, párhuzamos és metsződő egyenespár.


203 ábra

A valóstengelye körül megforgatot hyperbola kétköpenyü forgáshyperboloidot ir le, az asymptota meg az asymptotás kupot /202. ábra/. Sikmetszetei egyezőek az asymptotás kup metszeteivel: ellipszis, kör, parabola, hyperbola.

91./ A körgyürü. A körgyürülap, vagy torus keletkezik, ha kört sikjában fekvő, de a középpontját nem tartalmazó egyenes körül megforgatunk. Aszerint, amint a forgástengely a kört nem metszi, metszi, vagy érinti, a felület háromféle lehet. A müszaki alakzatokon leggyakoribb az első. A körgyürü-felület negyedrendü.

A 203. ábrán a K leiró kör Π_2-vel párhuzamos és T forgástengely függőleges. A kör megforgatásánál "a" pont a legnagyobb kört, az <u>egyenlitőkört,</u> b pont a legkisebbet, a <u>torokkört</u> irja le. E két körmenti érintősikok első vetitők, /összeségük forgáshenger/ ezek tehát első <u>képhatárkörök</u>.

K fődéllőkör c és d pontjai o-val egyenlősugaru kört irnak le. K-nak pl. x és x′ pontjai párhuzamos köreinek egyenlő a sugara. E körök vizszintes sikjában vannak y és y′ pontok által leirt körök is. Ezek a belső u. n. <u>torokrészen vannak</u>.

A párhuzamos köröknek a K és K′ fődéllőkön levő c, x, a, x′, y′, b ... pontjaiban az érintők második vetitőegyenesek, s igy a torus érintő-sikjai is második vetitők.

Ugyanilyenek a gyürülapot c és d párhuzamos körének teljes hosszában érintő sikok is. E szerint a fődéllőkörök és c és d párhuzamos körei a <u>második képhatárt</u> adják. Ennek nem a teljes része érvényesül. Ha a torus teljes, akkor az érvényes rész a K K′ körök külső félköre, valamint c és d parallelkörének felénk eső domboru ive. Ami ezek között van, az látszik elölről.

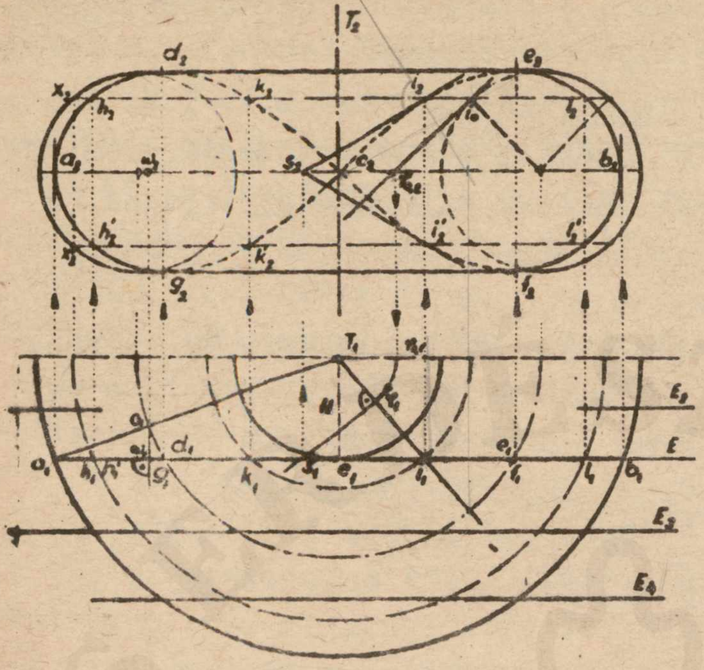
Ha e látható felületnek egy darabját az ábra szerint eltávolitjuk, akkor a K′ körnek torokrésze is részben érvényre jut.

A gyürülap felületi pontjai párhuzamos körön vannak. Pl. e_2 az x párhuzamos körén van, s igy felülnézete e_1 és e_1' lehet. e elölről, e és e′ felülről látható. f_2-nek megfelelő első kép ugy az x, mint az y párhuzamos körén f_1; f_1'; f_1''; f_1''' lehet. A második vetitősugár négy pontban döfi a gyürülapot, a lap negyedrendü.

Érintősik x párhuzamos körén levő <u>g /g_2 g_1/ pontban</u>. A parallelkör érintője Tg'/Tg_1' Tg_2'/. g déllőjének érintője a fődéllőbe forgatva Tg_0, visszaforgatás után Tg_2 és Tg_1. Nyompontja az egyenlitő sikján h /$h_{0,2}$; $h_{0,1}$; h_1; h_2/. h_1-en át Tg_1-re merőleges az E nyom az egyenlitő sikján.

A torokrészen levő f-ben is a déllőkör tg és a párhuzamos kör tg′ határozzák meg az érintősikot. tg a lapon kivül, tg′ a lapon belül van, az érintősik egyuttal metszi is a gyürülapot. f a metszet kettős pontja. /A metszet pontjai párhuzamoskör módszerrel szerkeszthetők meg./

A cad déllőfélkör által leirt felületrész pontjai <u>elliptikusak</u>; cbd félkör által leirt torokrész pontjai <u>hyperbolikusak</u>, a két felületrészt elválasztja c és d párhuzamos köre.

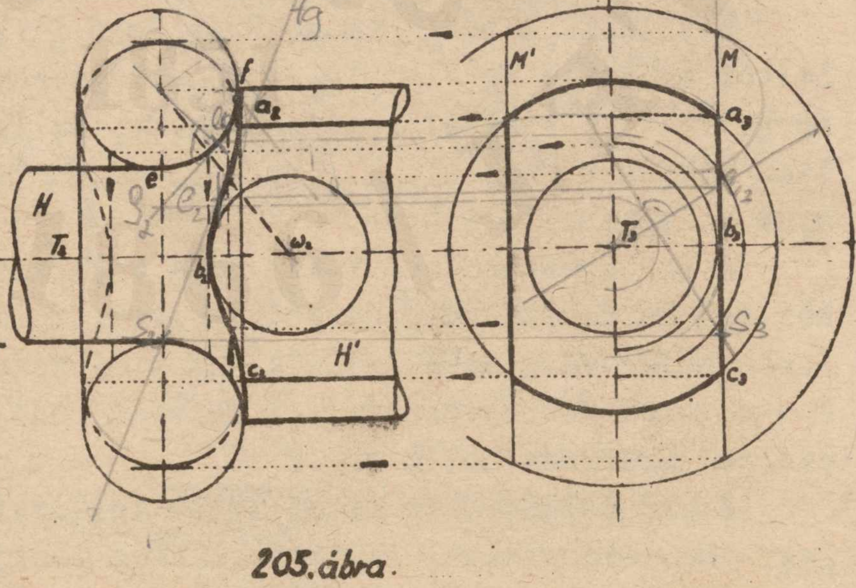


204. ábra

<u>Sikmetszetei</u> negyedrendü vonalak. Ugy a tengelyére merőleges, mint azon átmenő metszete két kör /2+2= 4/.

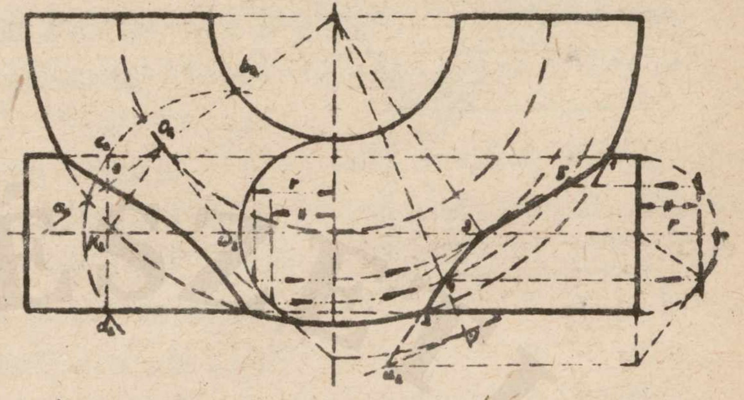
A tengelyével párhuzamos sikmetszetei Cassini-féle vonalak, s ezek <u>kétrészüek</u>, ha a sik távolsága a forgástengelytől kisebb, mint a torokkör sugara /204. ábra E_2 sik/; <u>egyrészü</u>, ha távolsága nagyobb r-nél, /E_3 E_4 sikok/ amikor is a sikmetszet piskótaszerü /E_3/, illetve oválisszerü /E_4/. Ha a sik távolsága egyenlő r-el, amikor is E sik érinti is a torust c-ben, ugy c a <u>metszet kettős pontja</u>, s ha a délkörök és a torokkör sugara egyenlő, akkor ez a metszet a Bernoulli-féle <u>lemniskáta</u>. Az ábra ezt az esetet mutatja. A metszetnek E-be eső első képe kettős vetület. A pontok elölnézetét párhuzamos körökkel keressük fel. Először a megrajzolt körökön levő jellegzetes pontokat szerkesszük meg. c a torokkörön, a és b az egyenlitőn vannak. a és b-ben az érintők függőlegesek. A legalsó és legfelső körön vannak g, d és e, f. Az egyenlitősiktól egyenlő távolságra levő s első képben páronként összeeső körökön vannak h_1; h_1'; l_1; l_1'; k_1; k_1'; és i_1; i_1'. A második képek rendezővel.

A metszet érintője i-ben. Ehhez az i-beli érintősik nyoma az egyenlitő sikján. Az i parallelforgatott déllőjének érintője f_0-ban /f_{02} f_{01}/ metszi az egyenlitő sikját. Visszaforgatás utáni első képe f_1. Ezen át megy az é-



205. ábra

rintőre merőleges H nyom. A metszősik első nyoma az egyenlítő-síkon E-be esik. H és E-nek s_1 metszéspontját az egyenlítősikra rendezve, $s_2 i_2$ az érintő.



206.ábra.

Görbületikör a-ban. - A normálmetszet görbületi köre s egyben a Meusnier-gömb főköre az "a" ponthoz tartozó déllőkör. Középpontja o /o_1/. A gömböt az E metszősik ω_1 középpont' $a_1 \omega_1$ sugaru körben metszi, s ez az elölnézetben valódi nagyságban látszik, s igy ω_2-ből $\omega_2 a_2$ sugárral rajzolt kör a görbületi kör.

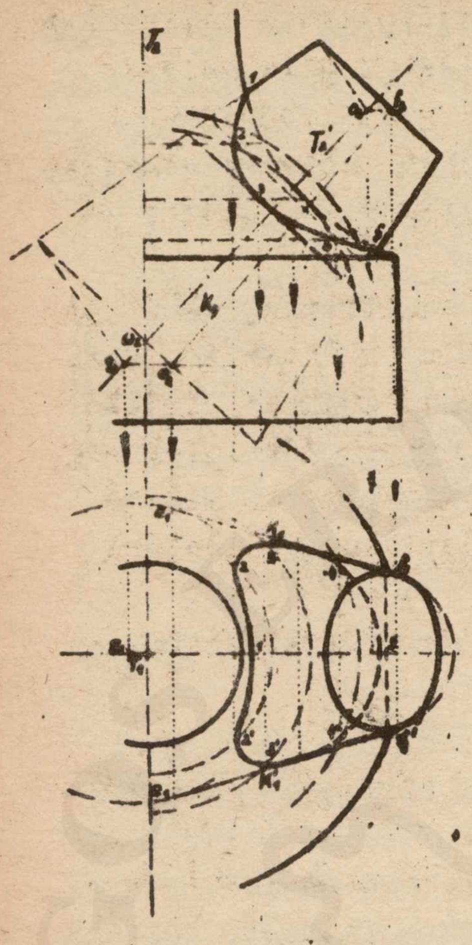
A gyürülap részeit kiterjedten alkalmazzák be- és kiugró körélek legömbölyitésénél is. A 205. ábrán H hengernek H' henger fedőlapján levő beugró alapkör éle, a velük közös tengelyü gyürülap ef féltorokrészével van legömbölyitve. Az igy keletkezett alak M és M' sikokkal van lemetszve. A teljes torusmetszetnek abc része érvényes. b_1-ben a görbületi kör középpontja ω .

Az emlitett körmetszeteken kivül két körben metszi a torust oly sik is, amely egy déllősikban levő két déllőkör torokrészi közös E érintőjén áthalad, s a déllőkör sikjára merőleges. A sik is érinti a gyürülapot E érintési pontjaiban, s ezek a kimetszett körök metszéspontjai.

92./ Forgásfelületek áthatása. Az áthatási vonal pontjait a 75. és 79. alatti általános elvek alapján szerkesztjük meg. A 206. ábrán a gyürülap és forgáshenger tengelyei kitérők, de közös szimmetrálsikjuk a képsikiránnyal párhuzamos.

Az ábra jobbfelén a segédsikok a szimmetrálsikkal párhuzamosak. Az általuk kimetszett hengeralkotók, illetve torus-párhuzamoskörök ábrázolásához a henger alapkörét és egy torus déllőkört a szimmetrálsikba forgattuk. A két felületnek 4-beli érintősikjainak a szimmetrálsikon levő nyomai u-ban metszik egymást. u.4 az érintő.

A baloldalon a gyürülap o középpontu ab déllőkörén átmenő gömbnek ω középpontja a henger tengelyén van. A gömb metszi a



207. ábra

hengert k középpontu c.d körben. A két kör 6. metszése áthatási pont. Az érintő a 6.d és 6.k normálisok által meghatározott normálsik $o_2 k_2$ fővonalára merőleges.

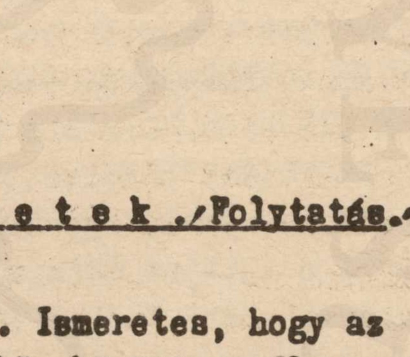
A 207. ábrán a forgáskup és forgásfelület /csak egy része van ábrázolva/ tengelyei metszik egymást, sikjuk T_2-vel párhuzamos. A kup ef első képhatáralkotóit érintőgömbbel állapitottuk meg.

A segédgömbök középpontja ω . 3_2-ben az érintő T_2'-re merőleges.

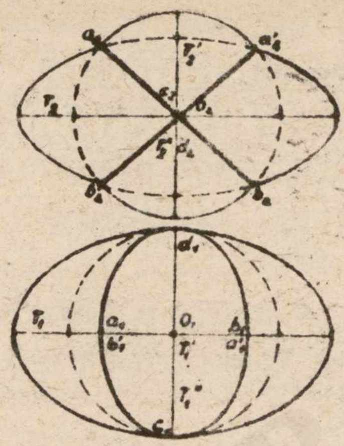
XIV. Másodrendü felületek. /Folytatás./

91./ Elliptikus másodrendü felületek. Ismeretes, hogy az ellipszis és a nagytengelye fölé rajzolt kör között merőleges affinitásban a kistengellyel párhuzamos megfelelő ellipszis és körfélhurok hosszának viszonya, /pl. 1/2 / minden hurpárra állandó. A kör hurjait ezzel az állandó számmal szorozva /208. ábra/ az affin ellipszis pontjait kapjuk.

Legyen T_1 a rajz sikjára merőleges tengelyü forgásfelület tengelyének a felülnézete. Akkor D-D a felületnek függőleges délősikja. Ha a felület párhuzamos körei pontjainak D-D déllősikjától mért távolságát az állandó számmal /pl. 1/2 / megszorozzuk, akkor a párhuzamos körök azonos tengelyarányu, hasonló helyzetü és hasonló ellipszisekké lesznek.



208. ábra

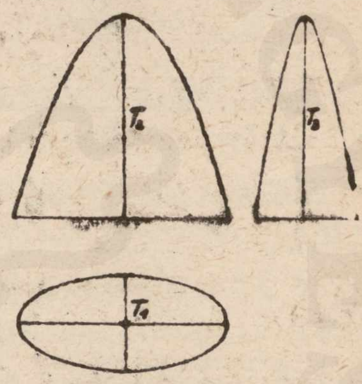


209. ábra

A forgásfelületből oly elliptikus felület lesz, amelynek ugy az ellipszisek nagytengelyeit tartalmazó D–D, valamint a kistengelyeknek D′–D′ sikja szimmetrálsikja, s igy ezeknek T metsző egyenese az elliptikus felületnek ugyancsak tengelye.

Ha a forgásfelület másodrendü, akkor elliptikus másodrendü felület keletkezik, mert a forgásfelület minden pontjának az elliptikus felület egy és csak egy pontja felel meg, s igy a forgásfelületet két pontban metsző egyenesek affin megfelelő egyenesén az elliptikus felületnek csak két pontja lehet.

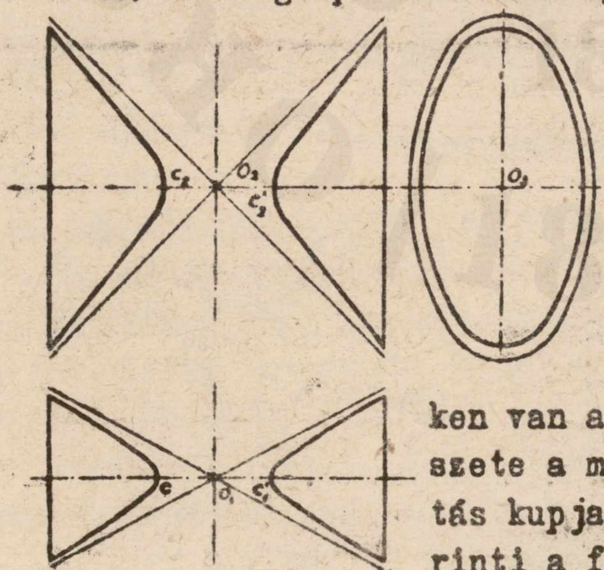
Az ismert másodrendü forgásfelületből származott elliptikus felületek a következők: a forgáskúpból, illetve hengerből T tengelyü /208. ábra/ elliptikus kúp, illetve henger lesz. Ezek azonosak a már megismert ferde körkúp, illetve hengerrel. A gömbből a már ugyancsak ismert forgásellipszoid lesz.



210. ábra

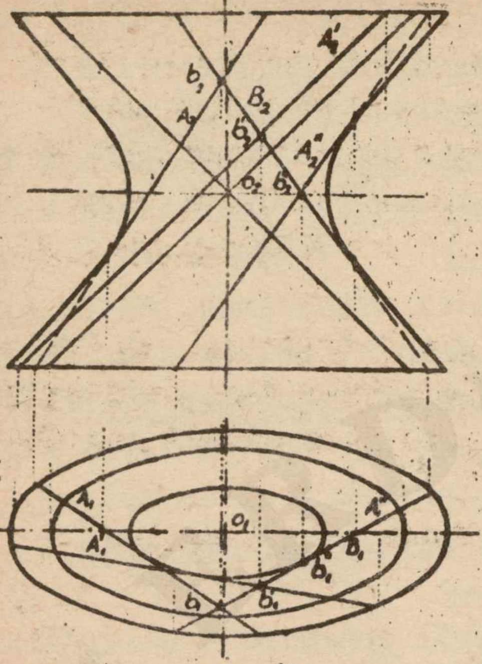
a./ A forgásellipszoidból a háromtengelyü ellipszoid /209. ábra/ keletkezik. Ellipszismetszetein kivül, mint minden másodrendü elliptikus lap, körben is metszhető. Ugyanis az ellipszoidot d és c pontjaiban érintő gömb az abcd és a′ b′ c′ d′ körben metszi. Az ezekkel párhuzamos sikok metszetei ugyancsak körök.

b./ A forgásparaboloidból elliptikus paraboloid lesz. /210. ábra/ Van két fősikja, egy tengelye. Sikmetszetei: ellipszis, kör, parabola.



211. ábra

c./ A forgás kétköpenyü hyperboloidból keletkezett kétköpenyü elliptikus hyperboloidnak /211. ábra/ három tengelyének metszéspontja a középpont, egyiken van a csucs. Két fősik hyperbola metszete a második és első képhatár. Asymptotás kupja a végtelen távoli metszetben érinti a felületet. Pontjai elliptikusak.



212. ábra

Az egyköpenyü forgáshyperboloid származéka az egyköpenyü elliptikus hyperboloid /212. ábra/. Két fősikjának metszete hyperbola, ezek asymptotái az asymptotás kupból kimetszett alkotók. A harmadik fősikjának metszete a torokellipszis. A három egymásra kölcsönösen merőleges tengelyének metszése az o középpont.

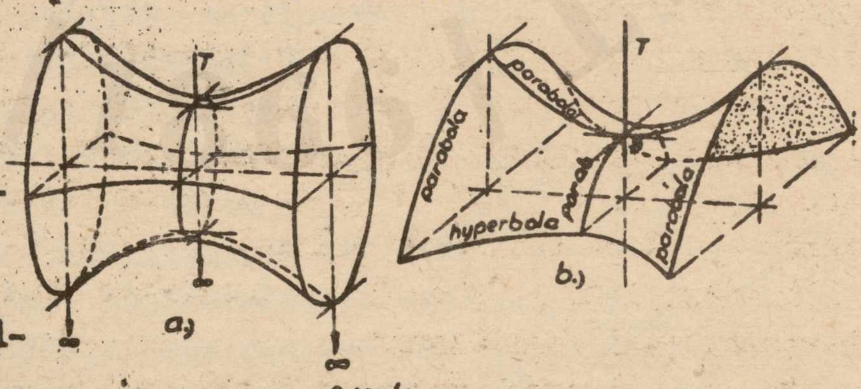
Az affin átalakitásnál a forgáshyperboloid két seregbeli alkotói az elliptikus hyperboloidnak ugyancsak két seregét adják. Az egy seregbeliek egymáshoz itt is kitérőek és metszik a másik seregbelieket, de az egy seregbeliek egymásnak nem a tengely körül elforgatott helyzetei.

A hyperboloidokat három egy seregbeli alkotó meghatározza. A forgáshyperboloidnál a három alkotó egymásnak egy tengely körül elforgatott helyzetei; az elliptikus hyperboloidnál tetszőleges kitérő egyenesek. A három alkotó tranzverzálisai a másik sereg alkotói. Az egy seregbeli A; A' ; A'' három alkotót a másikbeli B alkotó b; b' ; b'' pontokban metszi. /B_1= A'_1/ b-ben az érintősikot meghatározza B és A, b' -ben B és A' . A torokellipszis "b" pontjában B és A' és ez a sik első vetitő. B alkotón b-től b'' -felé haladva, az érintősik B körül forog, az érintősik nem érint egy alkotó mentén, s igy a felület az egyenesvonalu torzfelületekhez is tartozik.

Az érintősik a felületet két alkotóban metszi, a lappontok hyperbolikusak.

Sikkal minden kupszeletben metszhető.

92./ További másodrendü felületek. a./ Ha az egyköpenyü elliptikus hyperboloid fősikjával párhuzamos ellipsziseinek egyik csucsa mindinkább távolodva a végte-



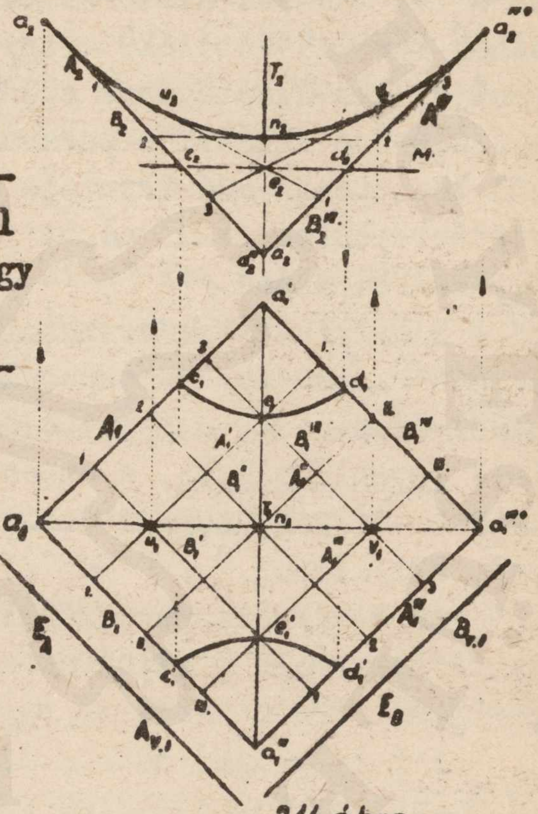
213. ábra

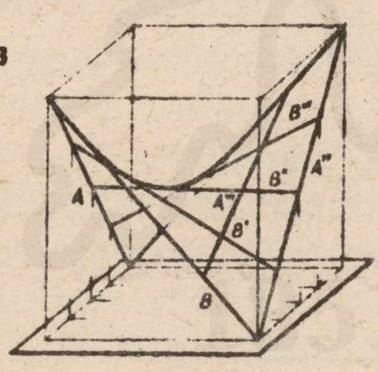
lenbe jutnak /213. ábra a./ és b./, az ellipszisekből parabolák lesznek. S mert a lap középpontja is a végtelenbe jut, a délló-hyperbolák sikjai a megmaradó fősikkal lesznek párhuzamosak, s a hyperbolák helyébe parabolák lépnek. A lapot továbbra is az alkotók két serege boritja be. A származott lap a <u>hyperbolás paraboloid</u>.

A két fősikjának metsző egyenese a lap T <u>tengelye</u>, döféspontja az n <u>nyeregpont</u> /járompont/. Az n pontbeli T-re merőleges érintősik a lapot a két sereg egy-egy alkotójában metszi /az ábrán nincsenek berajzolva/.

T tengely a két fősikmetszet parabolának is a tengelye. E paraboláknak T-n levő másik pontjuk a végtelenben van. Az ezekhez tartozó végtelenben levő érintők egyuttal a lap érintői is, a végtelenben levő sikon vannak, miért is a <u>végtelen távoli sik érinti a felületet</u>. De mivel az érintősikot a két seregbeli egy-egy alkotó határozza meg, azért mindkét seregnek <u>egy-egy alkotója a végtelenben van</u>. Helyzetüket az <u>iránysik</u> adja meg.

A hyperbolás paraboloidot is meghatározza egy seregbeli három alkotó. A 214. ábrában A /A_1A_2/ A''''/A_1'''', A_2''''/ és E_A függőleges iránysik <u>végtelenben levő A_v</u> egyenese a harmadik. $A_{v,1} \equiv E_A$.

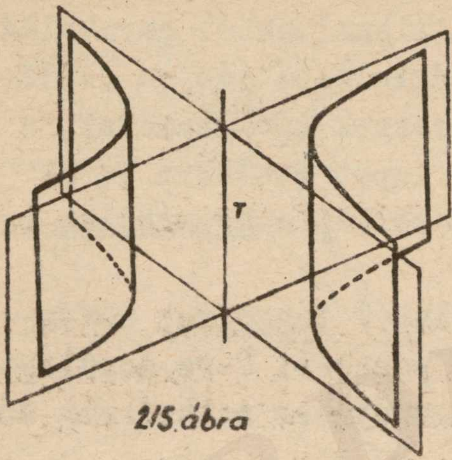




214.ábra

A másik seregbeli B alkotóknak, hogy A_v-t is messék, pár<u>huzamosaknak kell lenniök E_A sikkal</u>. Igy B_1 párhuzamos E_A-val, metszi A_1-et a_1-ben, A_1''''-et a_1''''-ben. Rendezőkkel a_2 és a_2''''. Összekötésük B_2. Négy további B helyzet B'; B''; B''' és B''''. Ezek A_1 és A_1'''' alkotókat 1 és 1_1 2 és 2 ... pontokban metszik. Második képek rendezéssel /osztással/.

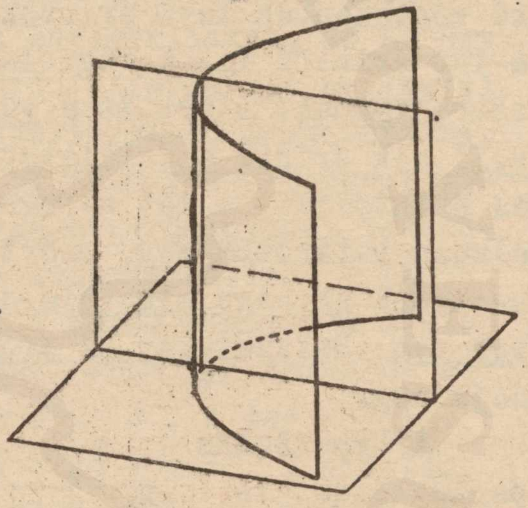
De az A seregnek metszeniök kell a végtelenben levő B_v-t, miért is B_v az A és A'''' egyenesekkel párhuzamos E_B első vetítő



215.ábra

iránysiknak végtelenben levő egyenese. Az A sereg alkotói E_B iránysikkal párhuzamosak. Az A sereg további három helyzete A'; A''; A'''. Előlnézetben a már megrajzolt B-kel összeesnek.

Az a' és a'', valamint az a és a''' pontokon átmenő függőleges sikokra a lap szimmetrikus, ezek a fősikok; függőleges metsző egyenesük a T tengely, s ezen u nyeregpont. Az $a.a'''$ fősik parabolametszetének a; u /u_1, u_2/; n /n_1, n_2/; v /v_1, v_2/; a'''... pontjain átmenő A és B; A' és B'; A'' és B''... alkotók előlnézetben összeesnek, miért is a lapérintősikok második vetitők, s igy a; u; n; v; a''' a képhatárparabola pontjai. Az alkotóképek a_2; u_2; n_2; v_2; a_2'''-ben érintik a parabolát. /Ebből következik két érintője és az érintési pontok által adott parabola egy szerkesztése./



216.ábra

A helyzetből következik, hogy az az $a'a''$ fősikmetszetparabola az előbbivel összeillő, a hyperbolás paraboloid egyenlő oldalu, s ennek az $aa'a'''a''$ térnégyszöggel határolt részét ábrázoltuk.

Az M második vetitősikkal kimetszett hyperbola pontjai az alkotók és M siknak c, e, d ... döféspontjai. 2.2 és II.II az egyenlőszáru képhyperbola asymptotái.

A T tengelyen és A_v, illetve B_v alkotókon átmenő, azaz E_A és E_B-vel párhuzamos első vetitősikok a felület asymptotikus sikjai. Képeik 2.2 és II.11.

A hyperbolás paraboloid az egyenesvonalu torzfelületekhez is tartozik.

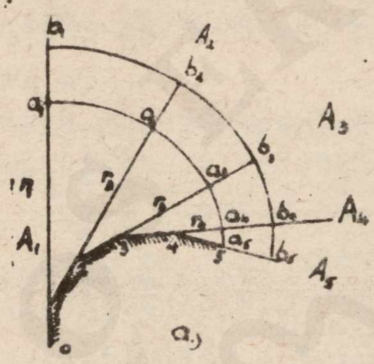
b./ Ha az egy-, vagy kétköpenyü elliptikus hyperboloid fősikjával párhuzamos ellipszisek mindinkább megnyulva, végül párhuzamos egyenesekké fajulnak, a hyperbolás henger keletkezik. /215. ábra/ Asymptotasikjait valamely sik a kimetszett hyperbola asymptotáiban metszi.

c./ A 216. ábra parabolás henger szemléltető képe. Származik, ha a forgáshenger párhuzamos körei ellipszisbe, s ezek parabolába mennek át.

Síkkal parabolában, párhuzamos egyenespárban metszhető.

XV. A körevolvensek.

92./ Evolvens, evoluta, párhuzamos görbe. A 217. ábra a./-ban A_1 egyenes az o.1.2.3.4.5 törtvonal o.1 oldalának meghosszabbítása. Ha A_1 egyenes a törtvonalon csuszás nélkül /döcögve/ legördül, akkor az 1-es csucs körül forogva 1.2-re jut, amikor is

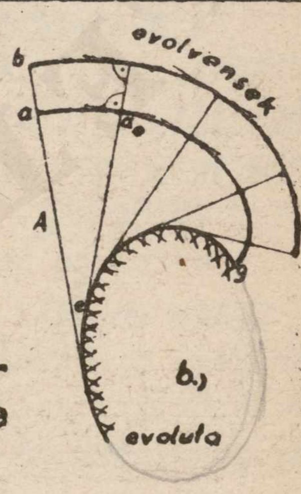


A_1-nek a_1 pontja 1 középpontu, $1.a_1 = r_1$ sugaru körivet ir le. Majd tovább 2 körül 2.3-ra forog és a_1 pályája 2 középpontu $2.a_2$ sugaru köriv. Végül 4 körüli forgással 4.5-re jut és "a" ivének sugara 4.5. $r_4 = 5.4$;
$r_3 = r_4 + 3.4 = 5.4 + 4.3$ ....
$r_1 = 5.4 + 4.3 + 3.2 + 2.1$. S igy ha A-t az A_5 helyzetéből kiindulva visszagördítjük, a_5 az előbbivel azonos görbét irja le, s a görbe görbületi köreinek sugarai egyenlők a legördült törtvonaldarabok összegével.

b_1 és a_1 pályagörbéje közös normálisu, koncentrikus körivrészek, párhuzamos görbék.

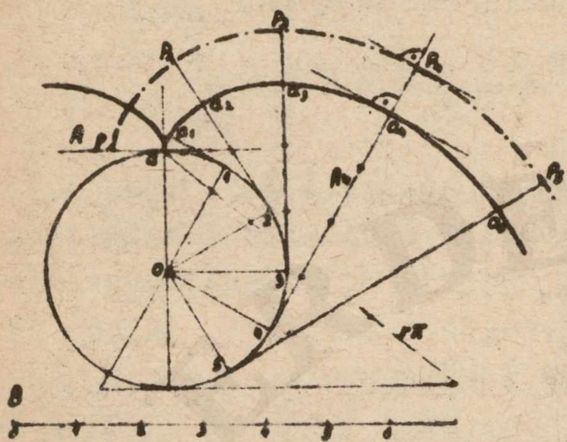
Ha a törtvonal o.1.2 pontjai egymáshoz közeledve, végtelen közeli szomszédosak lesznek, a törtvonalból G görbe lesz /b. ábra/, az $A_1 A_2 A_3$... helyzetek a G görbének végtelen kis szöget bezáró, szomszédos érintői lesznek. S ha A egyenes G görbén csuszás nélkül legördül, ugy "a" pontja pályagörbéjének normálisai G-nek érintői; görbületi köreinek középpontjai G-n vannak, s a görbületi körök sugara egyenlő a legördülésnél már érintett iv hosszával. G alapgörbe az evoluta, "a" pályagörbéje az alapgörbe evolvense.

"A" legördülésénél annak bármely b pontja "a" evolvenssel párhuzamos görbét ir le, közös normálison levő pontjai egymástól egyenlő távolságra vannak. b pont pályája ugyancsak evolvense G-nek. E szerint egy evolutához az evolvensek végtelen serege tartozik, s mindezek párhuzamos görbék.



217 ábra

Az evolvens a_e pontjában a görbületi kör sugara egyenlő az evolutának az egyenes legördülésénél már érintett eg ivének kiegyenesitett hosszával.



218. ábra.

93./ A körevolvens. Egy alapkörön legördülő A egyenes "a" pontjának pályagörbéje körevolvens. /218. ábra/ Szerkesztéséhez osszuk a kör kerületét 12 részre, Kohánsky szerint állapitsuk meg $R\pi$ -t, s ezt B-re felmérve, oszszuk 6 részre.

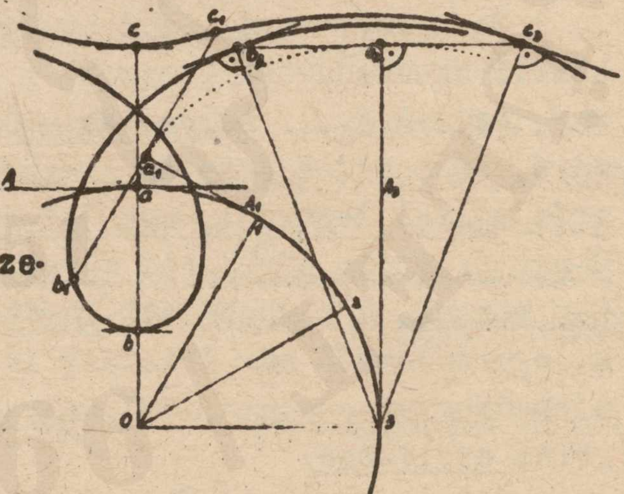
A kör 4-es pontjában az érintő A-nak A_4 helyzete. Az eddig érintett iv az alapkör 4.1/12 része, s igy a_4-es helyzet 4-től 4/12 köriv kiegyenesitett hossznak a távolságára van; ez B-ről lemérhető. Igy $5.a_5$ egyenlő B-nek 0.5; $3.a_3$ meg 0.3 darabjával.

Az alapkörérintők az evolvens normálisai, s a görbületi körök középpontjai az alapkörön vannak. Pl. a_4-belié 4.

Ha A az alapkörön ellenkező irányban gördül le, ugy a keletkezett evolvens az előbbinek tükörképe és oa átmérő a két ág érintője "a" csucsban. /visszatérő pont/

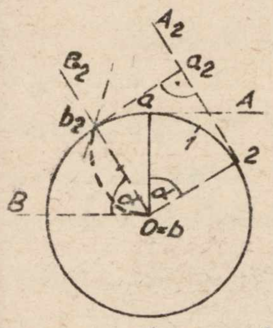
p pályagörbéje a körnek egy másik, az előbbivel párhuzamos evolvense. A kettő összeillő, s egyik a másiknak o körüli elforgatott helyzete.

A gördülő A-val mereven összekötött, s az o felé eső b pont hurkolt, az ellenoldali c meg nyujtott körevolvenst ir le A legördülésénél. /219. ábra/



219. ábra.

Mivel bc az A-t a-ban merőlegesen metszi, s ez a kölcsönös helyzet a gördülésnél nem változik meg, azért b és c bármely pl. 3-ik helyzetét megkapjuk, ha a /pontozottan rajzolt/ evolvens a_3 pontjában az A_3-ra állitott merőlegesre a_3-tól felmérjük az ab, illetve ac távolságot. $b_3.3$, illetve $c_3.3$ a hurkolt, illetve nyujtott evolvens nosmálisai.



Ha b leiró pont a kör középpontja, ugy az előző szerint megszerkesztett 2-ik helyzete b_2 /220. ábra/, amikor is a_2 b_2 egyenlő a körsugárral, miért is 0 és b_2- őt összekötő B_2 párhuzamos A_2 -vel és $ob_2 = a_2 \cdot 2 = 2.1/12$ körív hossz. Az ao-ra merőleges B és B_2 szöge α egyenlő az ao2 $= \alpha$ szöggel, s ez $2x30^o$.

Az a_2 b_2- őt ugy is megkapjuk, ha B-t o körül $2x30^o$-kal B_2 helyzetbe forgatjuk, s erre 0-tól az 1/12 iv hosszát 2-szer felmérjük. 3-szor 30^o-os elfordulásnak az 1/12 ivhossz 3-szor mérendő fel stb.

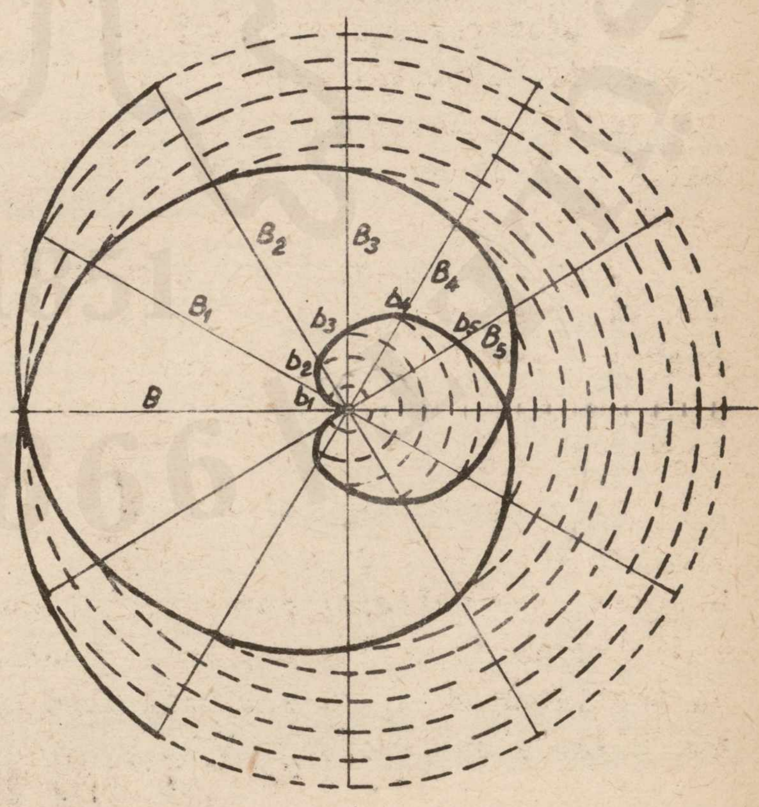
b pont pályagörbéje tehát akkor keletkezik, ha egy /B / egyenes egy /o/ pontja körül forog, s az egyenesnek egy /b/ pontja az egyenesen ugy halad, hogy megtett utdarabja az elforgatási szöggel arányosak. /Egyenletes forgatás, egyenletes haladás./ Ez a görbe az Archimedesi spirális. /csigavonal/.

A csigavonalnak ezen meghatározás szerinti szerkesztéséhez /221. ábra/ megrajzoljuk a forgó B-nek 12 helyzetét, valamint a kezdőponttól kiindulva a 30^o-os elfordulásnak megfelelő haladás mértékével növekedő köröket. B_1 és az első kör, B_2 és a második kör.....metszéspontja a spirális b_1; b_2 .... pontjai.

A spirálisnak B mindkét irányu forgásánál végtelen sok menete van.

Ha egy merev sikgörbe sikjának egy görbéjén legördül, akkor a gördülő görbe, vagy azzal mereven összekötő pont pályagörbéje ruletta. B szerint a körevolvensek,a spirális, ruletták.

Ha egyenes alapvonalon kör gördül le, a pontok pályagörbéje közönséges cikloisok. Epi-



5540226

cikloisok keletkeznek, ha kör körön kivül; hypocikloisok, ha kör körön belül gördül le. Ha az egyenest végtelen sugaru körnek tekintjük, akkor a körevolvensek epicikloisok.

XVI. Az egyenesvonalu felületekről.

94./ Kifejtő-, torzfelületek, konoidok. Összefoglalás. Egy mozgó egyenes helyzeteinek összesége egy egyenesvonalu felület. Jellegzetessége, hogy minden pontján át teljes hosszában a felületen fekvő egyenes alkotó halad át. Az egyenes mozgása szabályozható, ha azt a feltételt szabjuk, hogy minden helyzetében három, nem egy sikon levő L_1; L_2; L_3 vezetővonalat metszenie kell. A felület alkotói, a három vezetővonal tranzverzálisai. Ezek általában közös csucsu két kupfelület metszési alkotói; a csucs pl. L_1-en l_1 s a két kup vezérvonala L_2 és L_3. A közös alkotók a tranzverzálisok.

Ha a szomszédos tranzverzális alkotók egymást metszik, sikelemet alkotnak, a felület sikbafejthető felület. Az érintősik alkotó mentén érinti a felületet. A kitérő szomszédos alkotók között torz felületelem van, a felület torz. Az érintősik az alkotó minden pontjában más.

A torzfelület tulajdonságai a vezetővonalaktól függenek. Ha ezek törvényszerüek, még pedig m_1; m_2; m_3 rendü algebrai görbék, akkor a torzfelület is algebrai és rendszáma $2 \times m_1 \times m_2 \times m_3$. Ha az egyik vezetővonal transzcendens, a felület is az.

A legegyszerübb algebrai torzfelületek vezető vonalai egyenesek, a származott felület, az egyenesek kölcsönös helyzete szerint a már ismert forgás-, vagy elliptikus hyperboloid.

Ha két vezetővonal egyenes, s ezek egyike egy siknak, az iránysiknak végtelenben levő egyenese, akkor a felület alkotói egy sikkal párhuzamosak, s egy egyenest és még egy más vonalat metszenek, a felületet konoidnak nevezzük. Ha a vezető egyenes az iránysikra merőleges, a konoid egyenes, egyébként ferde. A már ismert hyperbolás paraboloidnak mindkét egyenes vezetővonala az iránysikhoz ferde, ferde konoid.

A körkonoidok egyik vezetővonala kör.

XVII. C s a v a r v o n a l a k

95./ A csavarvonal és sikbafejthető felülete. Egy pont F egyenes körül forog, s F irányában eltolódik, s e két mozgás sebességének a viszonya állandó, akkor a pont F egyenes körül csavarmozgást végzett. A pont pályája az F tengelyü forgáshengerfelületen elhelyezkedő közönséges csavarvonal. F a csavarvonal tengelye. Egy teljes körülforgás alatti F irányu eltolódás a csavarvonal menetmagassága, jele h..

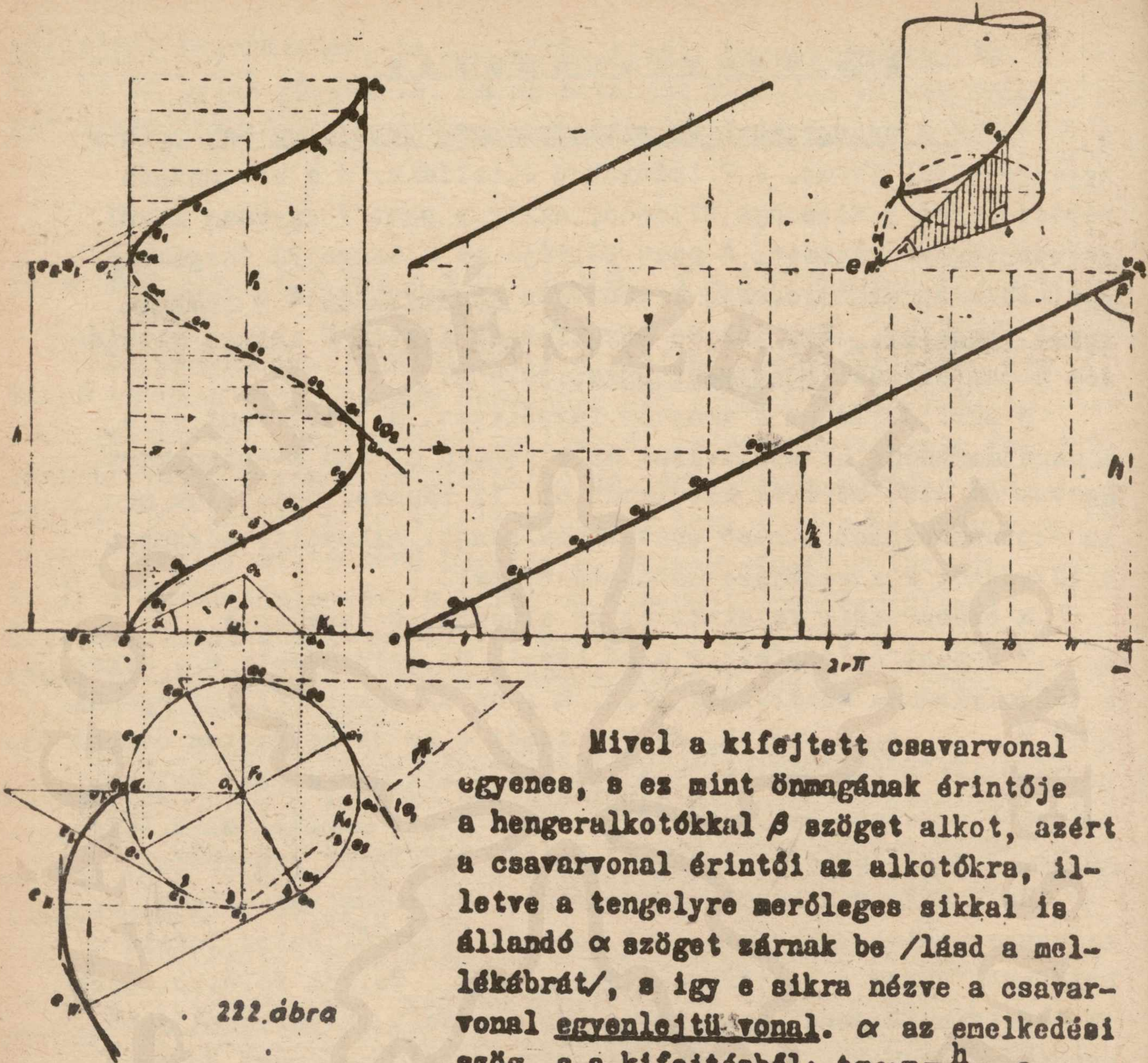
A 222. ábrán az F tengely függőleges, a leiró pont e, s a menetmagasság h. Ábrázoljuk az e ponton átmenő K hengerkört, gszuk az első képének kerületét pl. 12 részre. Rajzoljuk meg az osztáspontokon átmenő csavarvonalhenger alkotóit, mérjük a h/12 részét e alkotójára sorozatosan fel.

A csavarvonal felülnézete az alapkör, s ezen e; e_1, e_2, e_3 ... e pont helyzeteinek első képei. Ha felülnézete e_1, akkor a tengelyirányu eltolódása 1/12. h , ha e_2 akkor 2/12.h; e_3-nál 3/12.h.......e_{12} - nél h, amikor ismét a kezdethelyzeten átmenő alkotóra jut, s egy menetet irt le. Ennek alapján e pont helyzeteinek elölnézete kijelölhető. A csavarvonal transcendens térgörbe. az elölnézete ilyen helyzetben általános sinusvonal.

Ha a hengeren kivül, a tengellyel párhuzamosan állunk, s a csavarvpnalon végigfutó pont jobbról felülről balra lefelé haladhat, akkor a csavarvonal jobbmenetü. Balról felülről jobbra lefelé haladásnál balmenetü. Az ábrázolt csavarvonal jobbmenetü, a gyakorlatban alkalmazottak is tulnyomórészt jobbmenetüek.

Fejtsük sikba a hengerpalástot, s a Kohánsky szerint kiegyenesitett K alapkört 12 részre osztva, az 1, 2, 3 .....osztáspontokon át rajzoljuk meg az alkotókat.

Az e_1 helyzet a kifejtésben az 1-es alkotón van az alapvonaltól 1/12.h. e helyzet a 2-es alkotón 2/12. h. e_6-os 6/12.h e_{12}meg h magasságban van, miért is e pontok összekötése egyenes és e.e_{12} a csavarvonal egy menetének hosszát adja.. A kifejtésben pl. e_2 e_6 darab a két pontnak a hengerpaláston haladó legrövidebb összekötésének a hossza. Két felületi pontnak a felületen végigfutó legrövidebb összekötő vonala, a felület geodéziai vonala. A csavarvonal a hengerfelület geodéziai vonala.



Mivel a kifejtett csavarvonal egyenes, s ez mint önmagának érintője a hengeralkotókkal β szöget alkot, azért a csavarvonal érintői az alkotókra, illetve a tengelyre merőleges síkkal is állandó α szöget zárnak be /lásd a mellékábrát/, s így e síkra nézve a csavarvonal egyenlejtű vonal. α az emelkedési szög, s a kifejtésből: $tg\alpha = \frac{h}{2r\pi}$ a csavarvonal emelkedése.

a./ Érintőszerkesztés nyompontokkal. A csavarvonal a hengerfelületen van, így az érintője a henger érintősíkjában van. A csavarvonal első képe az alapkör, s így az érintő első képe pl. e_4-ben a kör érintője. Az érintőnek e_4 és az alapsík közötti darabjának első különbségi háromszöge a kifejtésben $e.e_4 4$ /lásd mellékábrát is/, $e.e_4$ az érintődarab hossza, e.4 ennek képhossza, $e_4 4$ az első differencia. Ha tehát a kifejtésből e.4 egyenlő az első képben $e_4 e_{IV}$, akkor e_{IV} az érintő nyompontja az alapkör síkján. Rendezővel e_{IV} és $e_{IV} e_4$ az érintő második képe. Hasonlóan kapjuk felülnézetben e_I-et, amikor is $e_1 e_I$ egyenlő a kifejtésből e.1-el; $e_2 e_{II} = e.2$; $e_3 e_{III} = e.3$ stb. Rendezéssel nyerhető az előlnézetben: e_{I} ; e_{II} ; e_{III} ... s ezzel az érintők második képe ábrázolható. e_3 és e_9 -ben az érintő Π_2 -vel párhuzamos, s igy az érintő második képe az alkotóval β , az alapsikkal α szöget zár be.

e_{I} , e_{II} , e_{III} , e_{IV} ... az alapkör e pontja által leirt körevolvens pontjai.

b/ A kifejthető felület. A csavarvonal érintői a sikbafejthető felületének alkotói /72.pont/, a körevolvens a felületnek a tengelyére merőleges metszete.

Az evolvens valamelyik pl. e_{IV} pontbeli érintőjének az evolvenssel közös két végtelen közeli pontján két szomszédos csavarvonal érintő halad át. Ezek sikja a kifejthető felület érintősikja, s a csavarvonalnak meg simulósikja. A csavarvonal érintő a simulósik esésvonala, s mert az érintő képsikszöge α, azért a simulósikok az alapsikhoz α szöggel hajlanak, s a simulósikbeli főnormális hengersugár. e_3 és e_9-ban a simulósik Π_2 -re merőleges, a csavarvonalképnek e_3 és e_9 fordulópontja.

c/ Érintőszerkesztés iránykuppal. Paraméter. A csavarvonal érintői a tengelyére merőleges sikhoz α szöggel hajlanak. Egy pontból a csavarvonal érintőivel huzott párhuzamosuk egy oly forgáskup alkotói, amelynek tengelye párhuzamos a csavarvonal tengelyével, a félcsucszöge /90°- α/ Ez a kup a csavarvonal iránykupja.

A 222. ábrában az iránykup alapköre a henger K köre, akkor e-ből az alapsikhoz α szöggel hajló második kup-konturalkotó a csavarvonal tengelyt a kup o csucsában metszi. o_1 az F_1 - be esik.

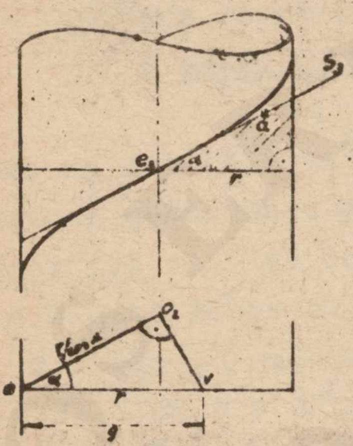
Szerkesszünk érintőt az e_7 pontban. Az érintő tg_1 első képe a kör érintője. Lejtési irányát a nyil mutatja. Az ezzel párhuzamos, tehát vele egyirányban lejtő kupalkotó első képe $o_1 u_1$ Rendezővel u_2 ; o_2 u_2 az alkotó második képe, s ezzel párhuzamos az érintő tg_2 második képe.

Az iránykup egy-egy érintősikja párhuzamos a csavarfelület érintősikjával, illetve a csavarvonal simulósikjával. Pl. az o.l kupalkotómenti kupérintősik és az e_4 -beli simulósikkal azonos e_4 e_{IV} menti lapérintősik, parallelek.

Legyen az iránykup magassága p; akkor $tg\,\alpha = \frac{p}{r} = \frac{h}{2r\pi}$
ahol p a csavarvonal, illetve a csavarmozgás paraméter vagy ne-

dukált menetmagassága /r iv hosszuságu elfordulásnak megfelelő eltolódás/.

d./ A csavarvonal görbületi köre. Az első görbületi kör a simulósikban van. Megállapitottuk, hogy a simulósikok a csavartengelyre merőleges sikkal α szöget alkotnak, s igy a csavarvonal hengerét összeillő ellipszisekben metszik. Egy ilyen ellipszisnek három végtelen közeli pontja közös a csavarvonalnak a simulósikon levő három pontjával, s igy görbületi körük azonos.

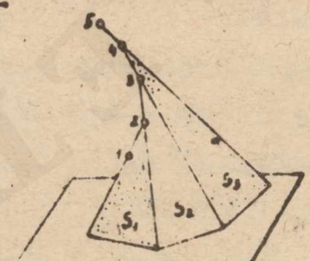

223.ábra

Az e_3 pontban /223. ábra egy része a 222.-nek/ az S_3 simulósik Π_2-re merőleges. A kimetszett ellipszis kistengelye : körátmérő, $b = r$; a fél nagytengelye: $a = \frac{r}{\cos\alpha}$.

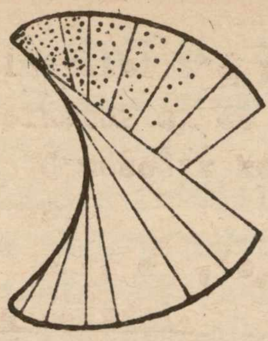
Az ellipszisnek és a csavarvonalnak az ellipszis kistengelye e_3 végpontjában azonos göbületi körének sugara: $\varrho = \frac{a^2}{b} = \frac{r^2}{r.\cos^2\alpha} = \frac{r}{\cos^2\alpha}$. Ekkora egyben a csavarvonal görbületi körének sugara e_3-ban és minden pontjában, mert a simulósikokkal a hengerből kimetszett ellipszisek összeillők.

A 223. ábrán az iránykup csucsa o, az alkotó hossza $\frac{r}{\cos\alpha}$ és az ev átfogó $\frac{r}{\cos\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{r}{\cos^2\alpha} = \varrho$, a görbületi kör sugara. e_3-ban a görbületi kör középpontja az e_3-hoz tartozó hengersugárral összeeső főnormálison van. /A görbületi körök középpontjai egy azonos tengelyü csavarvonalon vannak./

A sikbeli görbültség /és a torzió/ azonossága miatt a csavarvonal önmagában eltolható, mint az egyenes és a kör /amelyek egyebekben a csavarvonal különös alakjaiként foghatók fel, $\alpha = 90^0$ és $\alpha = 0^0$/, s e tulajdonsága miatt kiterjedt gyakorlati alkalmazása.


224. ábra

e./ A csavarfelület sikbafejtése. A csavarvonal érintői, a kifejthető csavarfelület alkotói végtelen hosszu egyenesek, s igy a felület is a végtelenbe terjedő. A 225. ábra a felület egy részének szemléltető képe. A felületnek két köpenye van, a kettő egymást "e" csavarvonalában metszi, s a tengelyére merőleges sikmetszete oly csucsos körevolvens, amelynek visszatérő /csucs/ pontja "e" csavarvonalán van, ez a felület visszatérő görbéje. A lapot egy-egy alkotója mentén érintő sikjá-

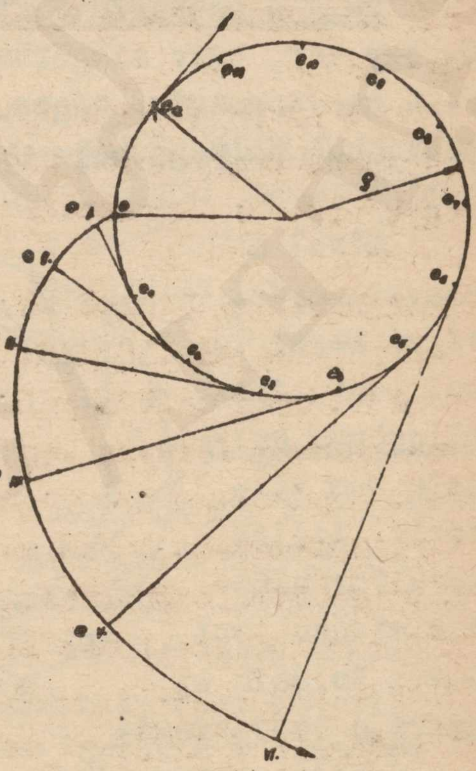


225. ábra.

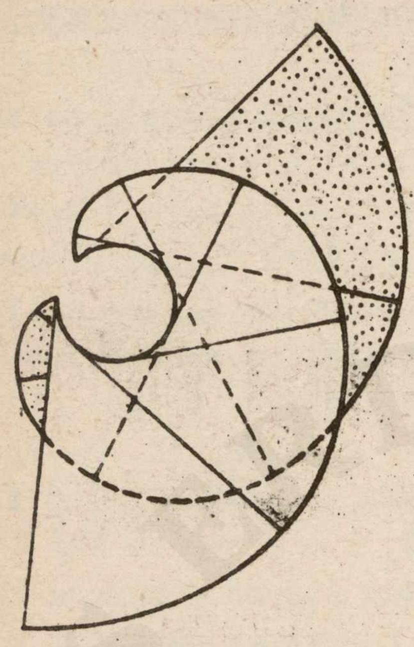
nak első képsikszöge α, a lap egyenlejtű, rézsülan. A 222. ábrában a felületnek csakkis részét ábrázoltuk.

Szerkesszük meg az "e" csavarvonala és az e_I, e_{II}, e_{III}... evolvensmetszet közötti köpeny egy menetének sikbafejtését. A sikbafejtésnél a szomszédos érintősikokban levő felületelemeket a közös alkotó körül forgatva egymás sikjába hozzuk. Minden érintősikban, a csavarvonal simulósikjában egy-egy ϱ sugaru görbületi kör van. A 224. /durva nagyitásu/ ábrában S_1; S_2; S_3 szomszédos simulósikok. S_1-ben 1, 2, 3 végtelen közeli csavarvonal pont van, s ezeken halad át a ϱ sugaru görbületi kör. S_2-ben levő 2, 3, 4 a ϱ sugaru kör pontjai. Amikor S_1 sikot az 1, 2, 3 pontokon átmenő ϱ sugaru körrel együtt a közös 2.3 érintő körül S_2-be forgattuk, akkor a kör ebben a helyzetében is áthalad a mozdulatlan 2, 3 pontokon, s igy összeesik a 2, 3, 4 pontokon átmenő ϱ sugaru körrel. Ezen, s igy az S_2 sikon lesz a csavarvonalnak 1, 2, 3, 4 pontja. Az egyesitett S_1 S_2 sikot S_3-ba forgatva, a simulókörök ismét egybe esnek, s most ezen és az S_3 sikon lesz a csavarvonal 1, 2, 3, 4, 5 pontja, s az egysikba forgatott érintők a simuló körnek továbbra is érintői maradnak. Azaz: a csavarfelület sikbafejtésekor a csavarvonal ϱ sugaru köriv lesz, a lapalkotók meg ennek érintői.

Ha a felület egy menetét teritjük sikba, akkor a ϱ sugaru körnek ivhossza egyenlő a csavarvonal egy menetének hosszával, s ha ennek a hengerpalást kifejtéséből vett 1/12 részét, vagyis ee_1 darabot, a ϱ kör kerületére 12-szer felmérjük /226. ábra/, megkapjuk a csavarvonal kiteritését. Az egyes osztáspontokból rajzolt érintőkre az érintési ponttól reámérjük az alkotóknak, a csavarvonal érintőinek, a kifejtésből vett ee_1; ee_2; ee_3... hosszát, a végpontok az e_I; e_{II}; e_{III}... metszetpontok kiteritései, s ezek a ϱ



226. ábra.



226 ábra a)

kör evolvenséhek pontjai. Az ábrán a csavarlap 1/2 menetének kiteritését látjuk.

A 226. ábra a./ a felület mindkét köpenye egy menetének sikbafejtését mutatja 1/3 kisebbitésben. A két palást részben fedi egymást, a kipontozott az alsónak látható része.

A 227. ábrán "e" pont csavarvonalának paramétere p; iránykupjának csucsa o; félemelkedése h/2, félmenete ab; pontjai 1, 2, 3 ... Érintőit, a felületi alkotókat, az iránykuppal ábrázolták.

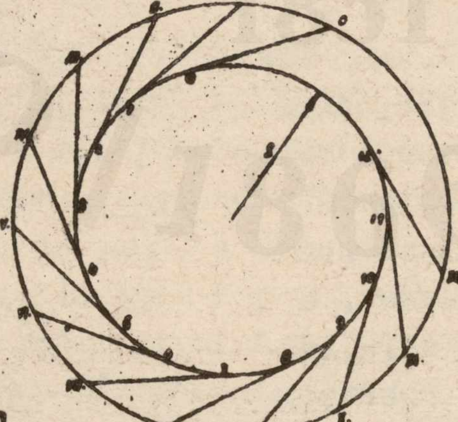
Egy T tengelyü forgáshengerrel kimetszett csavarvonal pontjai I, II, III ... az alkotókon vannak /III, IX, Y /. e csavarvonala görbületi körének sugara ϱ. A kifejtésben az I, II ... csavarvonal ugyancsak kör; az alkotódarabok valódi hossza az elölnézetből veo.

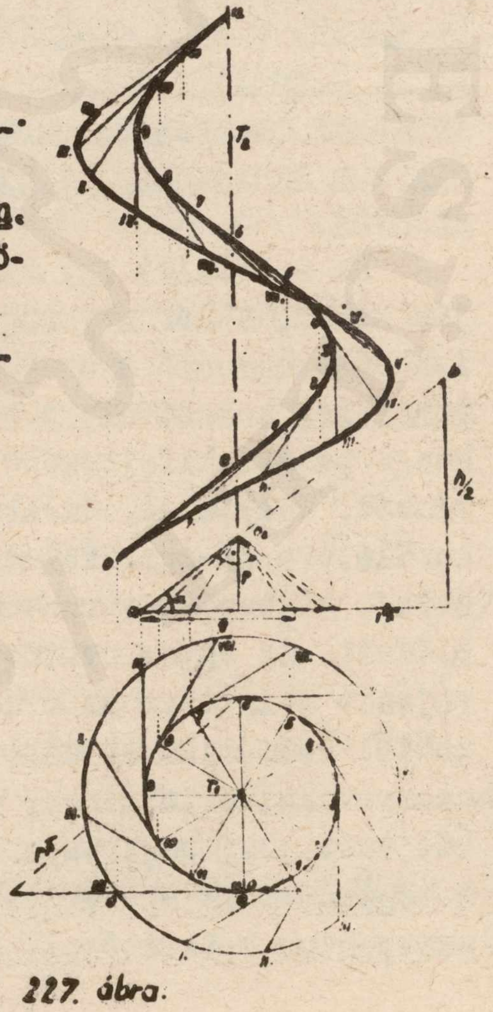
XVIII. Csavarfelületek.

96./ A csavarfelületekről általában.

Ha egy tér, vagy sikgörbe egy tengely körüli csavarmozgást végez, akkor minden pontjának pályagörbéje egy-egy csavarvonal.

Mivel a csavarmozgást végző merev vonal pontjainak kölcsönös helyzete nem változik, teljes körülforduláskor minden pont h-val tolódik el, azért a csavarvonalak menetmagassága /h/,





227. ábra

s ezzel a redukált menetmagasság /p $\frac{h}{2\pi}$ / is egyenlő, s ez a <u>csavarmozgás p paramétere</u>. A paraméter felhasználásával a pontok csavarvonalainak egymástól <u>eltérő emelkedési szögei</u> megállapithatók. Minél közelebb van a pont a tengelyhez, annál meredekebb a csavarvonal.

A felületi csavarvonalak önmagukban mind eltolhatók, a csavarlap is <u>önmagában eltolható</u>, e miatt kiterjedt gyakorlati alkalmazásuk.

Ha a csavarmozgást végző vonal a tengelyt metszi, akkor a metszéspont által leirt elfajult csavarvonal a tengely, s ez teljes hosszában a lapon van, a <u>csavarlap zárt</u>, ellenkező esetben <u>nyitott</u>, amikor is a tengelyhez legközelebbi pont a <u>torokcsavarvonalat</u> irja le.

A csavarlap tengelyére merőleges metszete a <u>normálmetszet</u>, a tengelyen átmenő sikmetszet a <u>délló</u> /meridián/. Ugyanazon csoportbeliek egymásközött összeillők. A lapot általában e metszetek egyikének csavarmozgásából származtatjuk, s ez a lap alkotója. Az <u>egyenesvonalu csavarfelületek</u> alkotója egyenes. S ezek lehetnek <u>zártak</u>, vagy <u>nyitottak</u>, <u>egyenesek</u>, vagy <u>ferdék</u> aszerint, amint az egyenes alkotó a tengelyre <u>merőleges</u>, vagy <u>nem</u>. A lehető felületek:

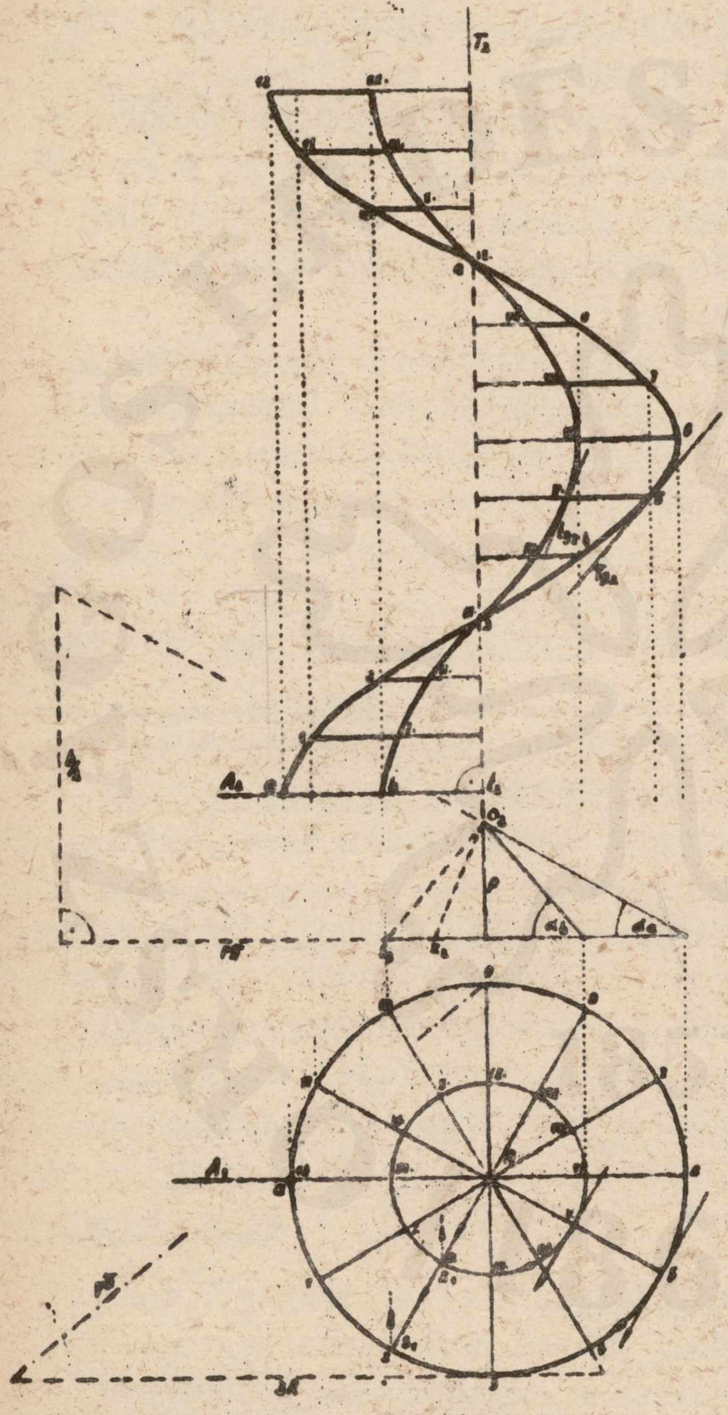
a./ zárt egyenes, vagy laposmenetü, vagy derékcsavarlap
b./ zárt ferde, vagy éles csavarlap
c./ nyitott egyenes
d./ nyitott ferde.

A d-be tartozik a már ismert, s <u>egyedül sikbafejthető</u> egyenesvonalu csavarfelület, amelynél a torokcsavarvonal emelkedési szöge akkora, mint az egyenesnek a tengelyre merőleges sikkal alkotott szöge. A többi egyenes vonala csavarfelület <u>torzlap</u>.

Gyakorlatilag legfontosabbak a zárt egyenes és ferde csavarfelület.

<u>97./ A zárt egyenes csavarfelület</u>. A csavarmozgás T tengelyét merőlegesen metsző alkotónak Π_2-vel párhuzamos helyzete A /A_2 A_1/, a paraméter p, /228. ábra/ a csavarmozgás jobbmenetü.

A végtelenbe terjedő lapnak ábrázoljuk az "a" pont által leirt csavar-vonal és T közötti részét. A-nak helyzetei átmennek "a" csavarvonalának pontjain és merőlegesen metszik a tengelyt a pont csavarvonalának első képe kör, s ez egyben az iránykup első képe. A kör sugarai A helyzeteinek első képei. A kup második képhatáralkotójának az alapkör síkjával bezárt szöge "a" csavarvonalának α_a emelkedési szöge. Ezzel és $r\pi$-vel megkapjuk a fél menetmagasságot h/2-et. Ennek hatodát A_2 és T_2 metszéspontjától T_2-re 12-szer felmérjük, ábrázolhatjuk a és ezzel A 12 helyzetének második képeit. A-nak 3-ik és 9-ik helyzete Π_2-re merőleges.



228. ábra.

A-nak valamely b pontja által leírt csarvonal első képe kör, pontjai I, II, III ... A második képek A helyzetein vannak. Iránykupjának magassága p, emelkedési szöge α_b és ez nagyobb, mint α_a. b csavarvonala tulajdonkép T tengelyü forgáshengerek metszése a csavarlappal.

Ha a leirópont A és T-nek t metszéspontja, akkor az emelkedési szög $90°$, a csavarvonal T egyenes.

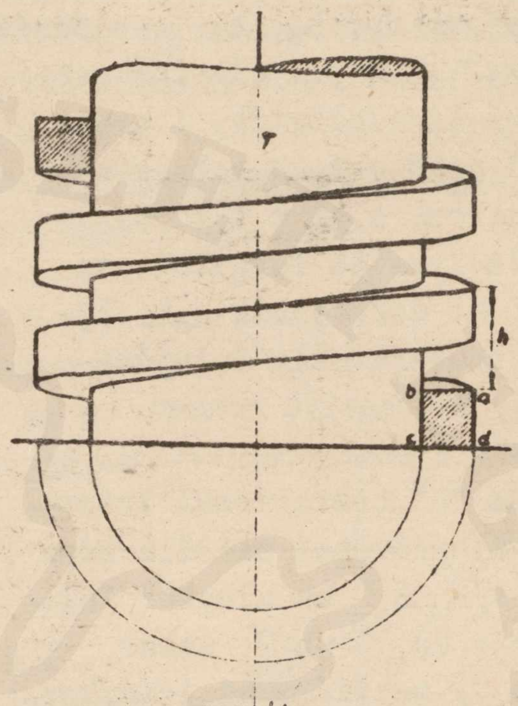
A felület 5 pontjában az érintősikot meghatározza az egyenes alkotó, mint önmagának és a csavarvonalnak érintője, Utóbbi az iránykup os alkotójával párhuzamos; Tg_2 parallel o_2s_2. Az alkotó az érintősik fővonala, Tg meg az esésvonala.

V-ben a csavarlap érintősikjának az esésvonala b csavarvonalának tg érintője. tg_2 párhuzamos z_2o_2-vel. Mivel Tg és tg nem párhuzamosak, az érintősik nem érinti a lapot alkotómentén, a lap torzlap. Az alkotón 5-től V felé haladva, az érintősik az alkotó körül forogva meredekebb lesz, s amikor az érintési pont T-re jut, az érintősik T-n halad át.

A lap ugy is származik, hogy A egyenes mozgása közben az "a" csavarvonalat és T egyenest metszi és T-re merőleges sikkal párhuzamos. Eszerint a csavarlap egyenes konoid, asymptotás sikja T-re merőleges.

Sikmetszetének pontjai az egyens alkotók és a sik döféspontjai. Normál és déllő metszetei egyenesek.

Gyakorlati alkalmazás. A 229. ábrán egy egymenetü laposmenetü csavarorsó két és fél menete látható. Az abcd négyzet a csavarmenet szelvénye /profil, meridián/, a csavarmozgás emelkedése 2.ad; ab és cd oldalak egy-egy derékcsavarlap-szalagot irnak le.



229. ábra

98./ Zárt, ferde csavarfelület /éles csavarlap/. A csavarmozgást végző A /A_2 A_1/ Π_2-vel párhuzamos kezdő helyzetében a T tengelyt o-ban γ szög alatt metszi. Ábrázoljuk a végtelenbe terjedő lapnak A-nak "a" pontja által leirt csavarvonala és a T tengely közötti részét. A menetmagasság h; a csavarlap jobbmenetü /230. ábra/.

Először ábrázoljuk ismert módon "a" pont csavarvonalának 12 pontját. A körsugarak A helyzeteinek felülnézetei. Mivel egy teljes menet alatt A-nak minden pontja h-val tolódik el, azért mérjünk fel A és T-nek o metszéspontjától h/12 darabokat sorozatosan, az osztáspontok 1, 2, 3 ... 12.

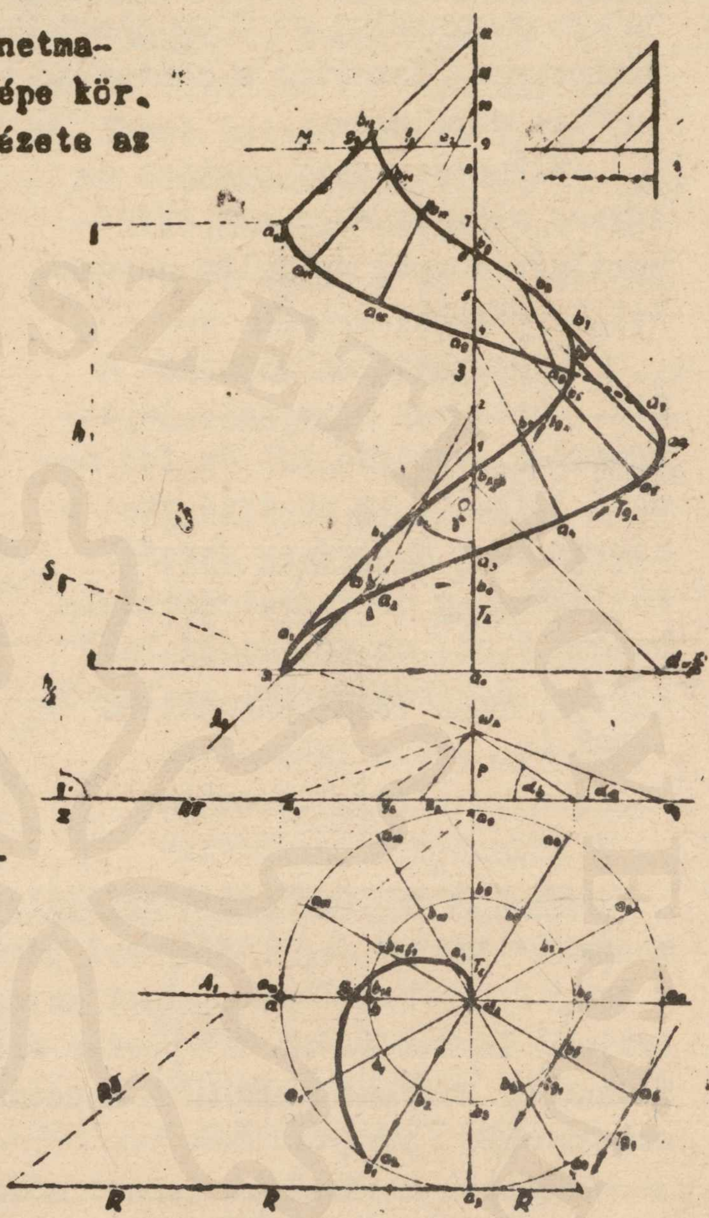
Az 1 és a_1 összekötése A első, 2 és a_2 összekötése a második, stb. helyzetének az elölnézete. Az $a_3$3 és $a_9$9 elölnézete a T-re esik. A képhatár az alkotók burkológörbéje. Pl. jobb oldalon 9 kiindulási pontban érinti az $a_9$9, majd $a_8$8, $a_7$7 alkotókat és a csavarvonalat. /A konturpontok megszerkeszthetők. A vonal nincs berajzolva./

Az alkotók felülnézete "a" csavarvonal körképének sugarai.

Az A alkotó b pontja h menetmagasságu csavarvonalának első képe kör. Pontjainak b_1; b_2; b_4... elölnézete az $a_1 1$; $a_2 2$; $a_4 4$ ... alkotón rendezővel kijelölhetők. A profilhelyzetü $a_3b_3 = a_9b_9$ hossza ugyanakkora, mint a T körül profilhelyzetbe forgatott ao alkotó ab darabjának a_0b_0 képe. b csavarvonala tulajdonkép egy T tengelyü henger metszése a csavarfelülettel.

Ha "a" csavarvonal iránykupja alapkörének második képe u_2v_2; $v_2z = R\pi$ az alapkör félkerülete és $zs = h/2$; akkor sv_2 és T_2 metszése az iránykup ω_2 csucsa, p a csavarmozgás paramétere, α_a és α_b a két csavarvonal emelkedési szöge.

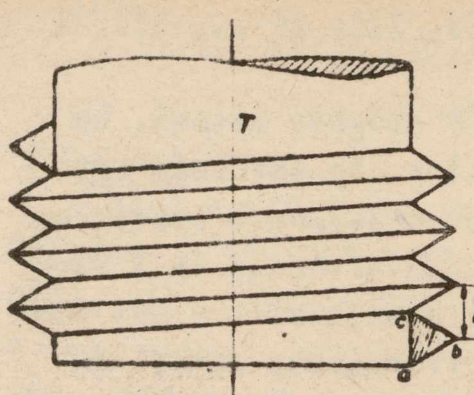
A csavarfelület érintősikját a_5-ben meghatározza $a_5 5$ alkotó és a csavarvonal Tg érintője. A Tg_1-el párhuzamos iránykupalkotó $\omega_1 y_1$, az $\omega_2 y_2$-vel párhuzamos Tg_2.



230.ábra.

b_5-ben az érintősikot ugyancsak az $a_5 5$ alkotó és a csavarvonalnak az iránykup ωx alkotójával párhuzamos tg határozzák meg. $\omega_1 x_1 \parallel tg_1$-el és $tg_2 \parallel \omega_2 x_2$-vel. Mivel Tg és tg nem párhuzamosak, a két érintősik nem azonos, az alkotón a_5-től a tengely felé haladva az érintősik az alkotó körül forog, meredekebb lesz, 5-ben függőleges és T és $5.a_5$ határozzák meg. A csavarfelület torz.

A felület délllőmetszete az egyenes alkotó. Másirányu metszetének pontjai az alkotóknak a sikon levő döféspontjai. Igy az M második vetitő normálsik az $a_9 9$ alkotót 9-ben, az $a_{10} 10$ alkotót e-ben /e_2 rendezővel e_1/; az $a_{11} 11$-et f /f_2 f_1/-ben; $a_{12} 12$-őt g /g_2 g_1/-ben találja A 9; e_1; f_1; g_1... pontok összekötése adja



231. ábra

a metszet tényleges alakját, s ez archimédesi spirális. Ugyanis a tengelyt ugyanazon szögben metsző alkotók h/12-nyi emelkedésével az M síkkal való döféspont mindig ugyanannyival távolodik a tengelytől /mellékábra/, azaz $\omega_1 f_1 = 2\omega_1 e_1$; $\omega_1 g_1 = 3\omega_1 e_1 \ldots$ stb. A zárt éles csavarlap tengelyére merőleges metszete archimedesi spirális.

Az éles csavarlap alkotói a tengellyel γ szöget alkotnak, s így a T-vel párhuzamos tengelyű és γ félcsucsszögű forgáskup alkotóival párhuzamosak. Ez a kup a csavarfelület alkotóinak iránykupja. A lap és kup alkotói egymást a végtelenben metszik.

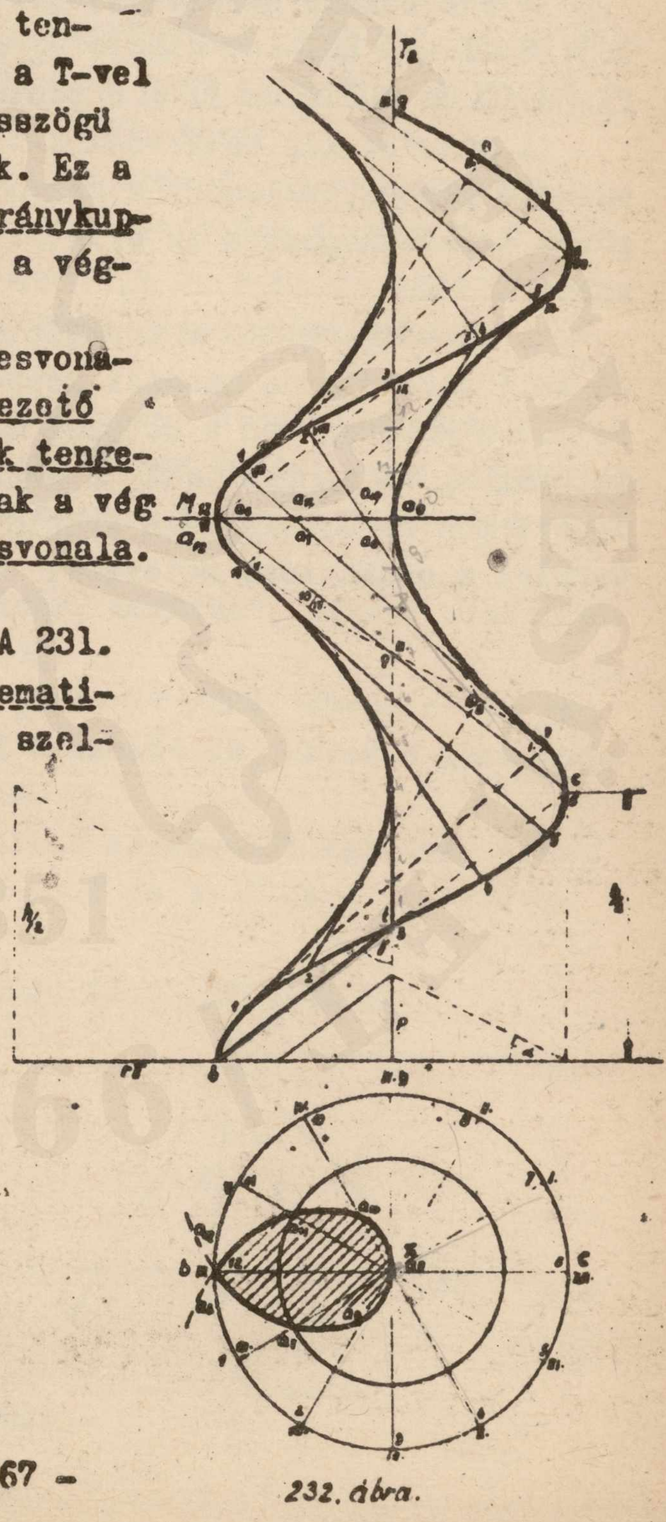
Az éles csavarlap oly egyenesvonalu torzfelület, amelynek egyik vezető vonala csavarvonal, a másik ennek tengelye, a harmadik meg az iránykupnak a végtelenben levő síkkal való metszésvonala.

Gyakorlati alkalmazások.

a./ élesmenetű csavarorsó. A 231. ábra egy élesmenetű csavarorsó sematikus rajza. A csavarmenetet leiró szelvény abc egyenlőszáru háromszög; bc és ba oldalak egy-egy zárt éles csavarlap szalagjait írják le.

b./ A dugóhuzó. A 232. ábrán T a csavarmozgás tengelye, p a paramétere. A b pont jobbmenetű csavarvonalának emelkedési szöge α, a félmenetmagasság h/2, pontjai 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... 12, 1, 2, ... 9.

Jelöljük h/2 emelkedéskor elért 6 helyzetét c-vel. c pont p paraméter szerinti csavarvona-



232. ábra

la azonos t csavarvonalával, pontjai I, II, III, IV ... XII, I II, III.

b és c összekötése T tengelyt t-ben γ szögben metszi. bc távolság mozgásakor t pont a tengelyen halad. bc távolság egy <u>éles</u> csavarlapot ir le, még pedig bt darab a lapnak b csavarvonala és T közötti részét, tc meg annak c csavarvonala és T közötti részét. Mivel b és c csavarvonal ugyanaz, azért a két felületrész, vagyis a csavarfelület b csavarvonalában metszi önmagát, s egy zárt csavartest keletkezik.

A btc alkotó helyzetei: 1.I; 2.II; 3.III; 4.IV ... 12.XII; 1.I; 2.II ... Két-két alkotó egymást a csavarvonalban metszi. Pl. 2.II és 8.VIII a II = 8 pontban.

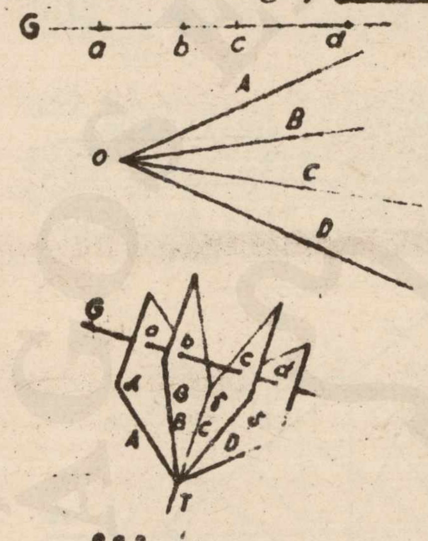
A második kép határvonalait az alkotók és a csavarvonal burkoló görbéi, valamint a csavarvonal egy ive adja. A burkoló görbe érintési pontja az érintett alkotó látható részének határpontja.

A második vetitő M normálsik a 9.IX alkotót a_9-ben, 8.VIII és 10.X alkotókat a második képben összeeső a_8 és a_{10}-ben; 7.VII és 5.V alkotókon van a metszet a_7 és a_5; 6.VI és 12.XII adják a metszet a_6 és a_{12} pontjait. A megfelelő alkotók első képeire rendezett pontok összekötése archimedesi csigavonal, s a bezárt terület a csavartest metszete.

XIX. A projektiv geometria elemeiből.

<u>99./ A projektiv geometria elsőfoku alapalakzatai. Perspektivitás</u>. A projektiv geometria a térelemekből /pont, egyenes(sugár), sik/ alapalakzatokat alakit, megállapitja ezeknek azokat a sajátságait, amelyek a velük végzett egyszerü müveletek, <u>vetités</u> /összekötés/, <u>metszés</u> során jelentkeznek, valamint meghatározza a müveletek folytán származott alakzatok tulajdonságait.

Az <u>egyenes</u>, mint pontjai egymásutánjának, egy gyöngysor szemeinek sokasága, <u>pontsor</u>. Az egyenes a pont <u>sorozója</u>, a pontok a sor elemei /233. ábra/.



233. ábra

Egy ponton átmenő, s egyazon sikban fekvő egyenesek összesége <u>sugársor</u>. A sugársor középpontja o, s ettől egyirányban terjedő sugarakat félsugaraknak nevezzük /233. ábra/.

Egy T egyenesen áthaladó sikok összesége, mint egy könyv lapjai, egy <u>siksor</u>; T egyenes a siksor tengelye, sorozója /233. ábra/.

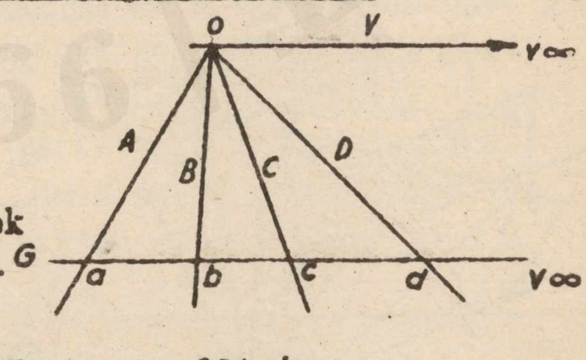
A pontsor, sugársor, siksor elsőfoku alapalakzatok.

Ha G pontsor a, b, c, d ... pontjait /234. ábra/ o-ból <u>vetitjük</u>, azaz G-nek pontjait o-val összekötjük, akkor o középpontu A, B, C, D ... sugársort kapunk.

G pontsor a, b, c ... pontjait T egyenesről vetitve, siksort kapunk, ennek sikelemei T és a; T és b; T és c ... összekötő sikja /233. ábra/.

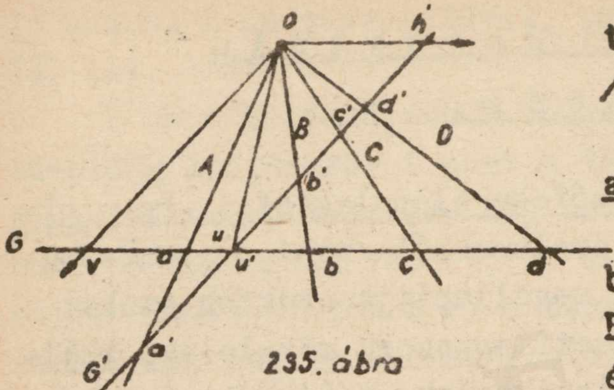
Vagyis: <u>az alapalakzat vetitése alapalakzatot ad</u>.

ABCD...sugársor G-vel <u>metszve</u> abcd ... pontsort ad /234. ábra/. T tengelyü siksort T-hez kitérő G-vel metszve, pontsort kapunk /233. ábra/. A pontsor elemei G-nek a siksor sikjaival való döféspontjai.



234. ábra

T tengelyü siksort T-t nem tar-



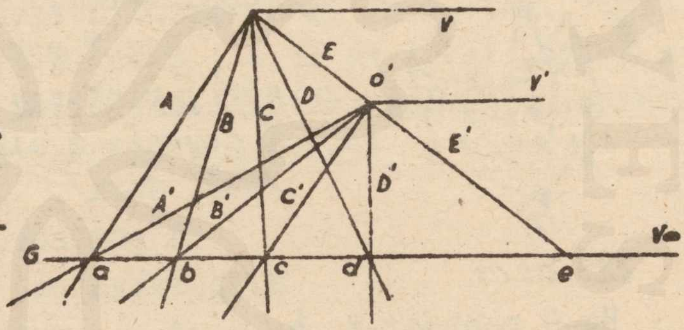
235. ábra

talmazó sik sugársorban metszi /233. ábra/.

Vagyis: alapalakzat metszése alapalakzatot ad.

Ha a 234. ábrán G pontsor a, b, c ... pontjainak a sugársor A, B, C ... sugarait feleltetjük meg és viszont, akkor a pontsor és sugársor kölcsönös vonatkozása egyértelmü; minden pontnak egy sugár, s minden sugárnak egy pont felel meg, amikor is G végtelenben levő v pontjának megfelel a G-vel párhuzamos V sugár. Azt mondjuk, hogy a pontsor és sugársor perspektiv helyzetben van.

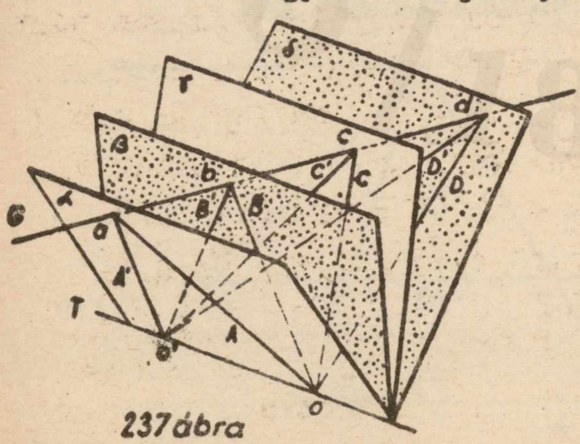
Altalában két elsőfoku alapalakzat perspektiv helyzetben van, ha egyik a másiknak vetitése, vagy metszése által keletkezett, vagy ha mindkettő egyazon alakzat vetitése, vagy metszése által származott.



236. ábra

Igy G pontsor pontjait o-ból G′-re vetitve /235. ábra/ abcd ... és a′b′c′d′... pontsorok perspektivek. G végtelenbeli pontjának megfelelője h′; G′-ének meg v. G és G′ metszéspontja önmaguknak megfelelő u és u′ pontok; a megfelelő a és a′; b és b′; c és c′... pontok összekötései egy pontban, a perspektivitás centrumában metszik egymást. Ezek a perspektiv pontsor jellegzetességei.

Az ábra ugy is értelmezhető, hogy az o /A, B, C .../ sugársort G és G′ egyenesek perspektiv pontsorokban metszik.



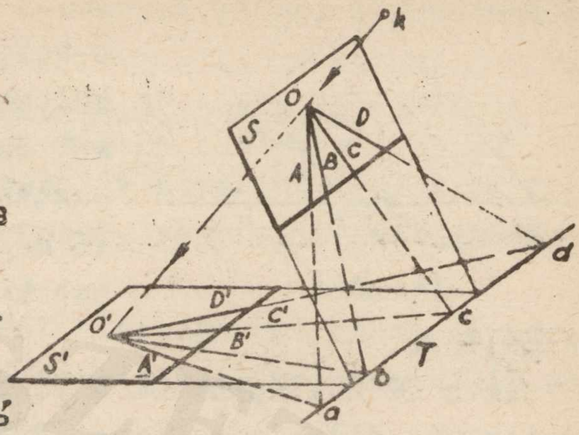
237 ábra

G pontsort o és o′ középpontból vetitve /236. ábra/ a perspektiv o /A, B, C, D .../ és o′/A′, B′, C′, D′.../ sugársort kapjuk, amikor is e pont E és E′ vetitősugara az o és o′ összekötésébe esik.

Vagyis: két perspektiv sugársor /A és A′; B és B′.../ megfelelő sugarainak metszéspontjai egy egyenesen, a perspektivitás /G/ tengelyén vannak, s a centrumokat összekötő egyenes önmaguknak megfelelő sugarak.

T /α, β, γ, δ.../ siksor és G-vel kimetszett a, b, c, d ... pontsor perspektivek /237. ábra/.

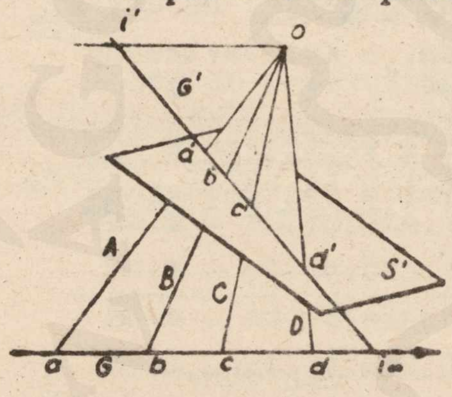
T tengelyü siksort egy sik o /A, B, C, D .../, egy másik meg o'/A', B', C', D'.../ sugársorban metszi, s ezek perspektivek, sikjaik G metsző egyenese a perspektivitás tengelye.



238. ábra

Ha o /A, B, C, D .../ sugársort nem a sikjában levő k pontból S' sikra vetitjük /238. ábra/, akkor az o és o' centrumu sugársorok perspektivek, mert a megfelelő sugárpárok egymást a két sik T metszőegyenesének pontjaiban metszik.

G pontsort o pontból S' sikra vetitve G-vel perspektiv G' pontsort kapunk, s ez oG és S' sikok metszőegyenese /239. ábra/.

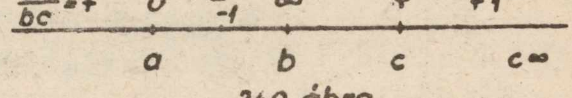


139. ábra

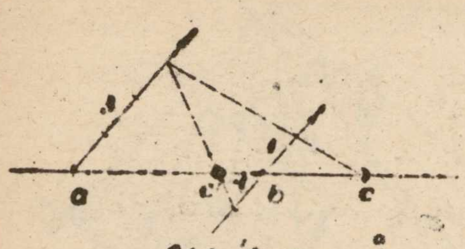
Az ábr. geom. I. részben a gúla sikmetszetével kapcsolatban megismerkedtünk a sikalakzatok perspektiv kollineációjával /centrál kollineáció/. Kivánatos az ott megállapitott tételek felelevenitése.

<u>100./ Osztásviszony, kettősviszony</u>. Egy egyenes a és b pontja egy <u>szakaszt</u> állapit meg. Legyen az a-tól b felé mutató szakasz <u>positiv</u> irányitásu, akkor az ellentétes ba <u>negativ</u> irányitásu /240. ábra/.

Ha a és b egy pontsor <u>alappontjai</u> és c egy tetszőleges pont, akkor ac és bc irányitott szakasznagyságok hányadosa c pont <u>osztásviszonya</u>. Jelképe [abc] ; $\lambda = [abc] = \frac{ac}{bc}$. <u>Positiv</u> az osztásviszony, ha c az ab szakaszon kivül van, amikor is mindkét szakasz egyenlő előjelü; negativ, ha c az ab szakaszon belül van, amikor is a két szakasz ellentétes előjelü. <u>+1, ha c a végtelenben van, -1, ha c felezi ab szakaszt</u>; ∞, ha c összeesik



240. ábra



241. ábra

b-vel; Ø, ha a-val összeeső. c minden helyzetének egy osztásviszony felel meg és forditva. A 241. ábrában c pont osztásviszonya $[abc] = \frac{ac}{bc} = -\frac{1}{3}$; c' ponté meg $-\frac{1}{3}$. Az ábrából leolvasható szerkesztésnél hasonló háromszögeket használtunk.

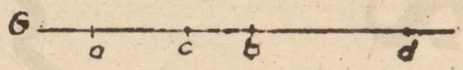
Az a és b alappontok G pontsor c és d pontjaival két osztásviszonyt állapitanak meg /242. ábra/ és pedig $[abc] = \frac{ac}{bc}$ és $[abd] = \frac{ad}{bd}$. E két osztásviszony hányadosa az a, b, c, d sorrendben felsorolt pontnégyes <u>kettősviszonya</u>. Jelképe [abcd].

$$\delta = [abcd] = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} ,$$

amely kifejezésben minden szakasz, illetve osztásviszony előjele figyelembe veendő.

Ha az ab és cd szakaszok egymást elválasztják, azaz c, vagy d az ab szakaszon van, akkor a kettősviszony <u>negativ</u>, ha ugy c, mint d az ab szakaszon kivül, vagy belül van, a kettősviszony <u>positiv</u>.

Ha <u>a pontnégyes egyik eleme</u> pl. d pont <u>a végtelenben van</u>, <u>akkor</u> $\frac{ad_\infty}{bd_\infty} = 1$ és igy $\delta = [abcd_\infty] = \frac{ac}{bc} : 1$; azaz <u>a kettősviszony egyenlő a három elem osztásviszonyával</u>.

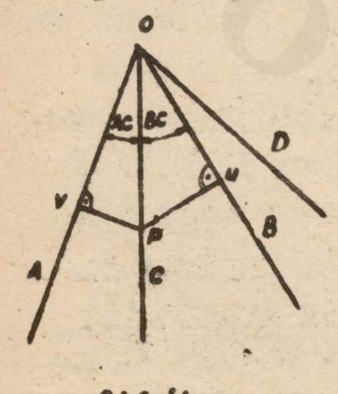


242. ábra

/Négy pontból, ha azok bármelyik párját alappontnak tekintjük, 24 kettősviszony alakitható, s ezek közül négyenként egyenlőek azok, amelyeket a párok, vagy azokon belül a tagok <u>egyidejü</u> felcserélésével alakithatunk. Igy pl:

$[abcd] = [badc] = [cdab] = [dcba]$ Viszont: $[bacd] = \frac{1}{[abcd]}$ és igy

$[bacd] = [abcd] = [cdba] = [dcab] = \frac{1}{[abcd]}$



243.ábra

Legyen pl. ac = 3; bc = -2; ad = 8, akkor bd = 3

$$[abcd] = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = -\frac{3}{2} : \frac{8}{3} = -\frac{9}{16} ,$$
$$[bacd] = \frac{bc}{ac} : \frac{bd}{ad} = -\frac{2}{3} : \frac{3}{8} = -\frac{16}{9} .$$

Őrizzük ellen a kettősviszonyok egyenlőségét./

Egy sugársor egy C sugarának az A és B alapsugarakhoz viszonyitott helyzetét, a sugár osztásviszonyát /243. ábra/ C valamely p pontjának A és B sugaraktól mért távolságainak, illetve az A és C, valamint B és C sugarak szögei sinusainak a viszonya adja meg.

$$\lambda = [ABC] = \frac{AC}{BC} = \frac{pv}{pu} = \frac{op.\ sin.AC}{op.\ sin.BC} = \frac{sin.AC}{sin.BC},$$

amikor is a sinus positiv, vagy negativ aszerint, amint az o körüli AC és BC forgásirányok azonosak, vagy mint esetünkben, ellentétesek.

Egy sugársor két sugarának két alapsugárral képezett osztásviszonyának a hányadosa a sugárnégyes kettősviszonya/243.ábra/

$$\delta = [ABCD] = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{sin.AC}{sin.BC} : \frac{sin.AD}{sin.BD},$$

s ez a kettősviszony negativ, ha a sugárpárok egymást elválasztják.

101./ A kettősviszony állandósága vetitésnél, metszésnél. Az o középpontu sugársor A, B, C, D sugarát G egyenes a perspektiv helyzetü a, b, c, d pontnégyesben metszi. Állapitsuk meg ezen megfelelő elemnégyesek kettősviszonyának értékét /244. ábra/.

Legyen o távolsága G-től m. Az oac, obc, oad, obd háromszögek kétszeres területei kétféleképp számithatók ki /alap x magasság; sinus tétellel/:

$$ac.m = oa.oc.sin.AC\measuredangle$$
$$bc.m = ob.oc.sin.BC\measuredangle$$
$$ad.m = oa.od.sin.AD\measuredangle$$
$$bd.m = ob.od.sin.BD\measuredangle$$

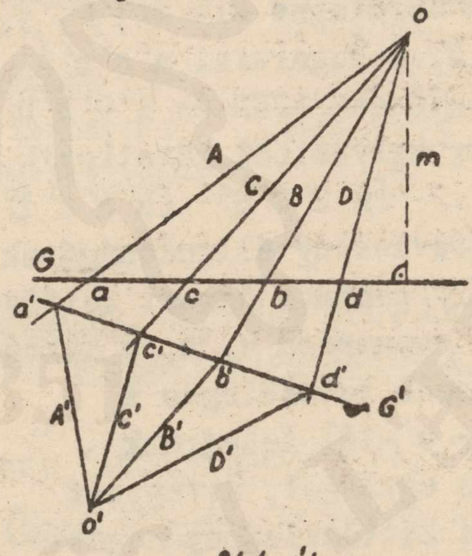
elosztva:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{oa.sin.AC\measuredangle}{ob.sin.BC\measuredangle}$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{oa.sin.AD\measuredangle}{ob.sin.BD\measuredangle}$$

A két tört hányadosa:

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{sin.AC}{sin.BC} : \frac{sin.AD}{sin.BD}$$



244. ábra

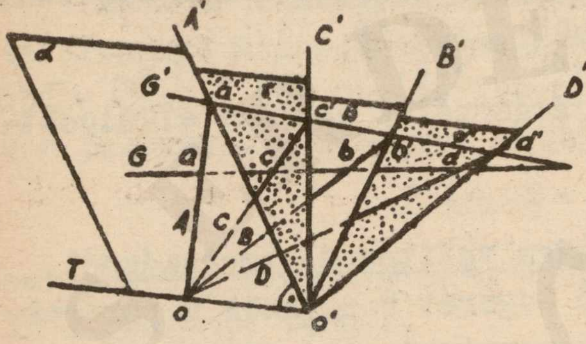
A baloldali kifejezés az abcd pontnégyes, a jobboldali meg az ABCD sugárnégyes kettősviszonya, azaz: [abcd] = [ABCD]. S mert G egy tetszőleges egyenes, mondhatjuk: egy sugársor négy sugarának kettősviszonya egyenlő a sugarakból bármely egyenessel kimetszett négy pontnak megfelelően képezett kettősviszonyával.

Az ABCD sugárnégyest G'-el metszve [ABCD] = [a'b'c'd'], s igy [abcd] = [a'b'c'd']; azaz egy egyenes abcd négy pontjának kettősviszonya a centrális vetitéssel változatlan.

Az a' b' c' d' pontnégyest o'-ból A' B' C' D' sugarakkal vetitve [ABCD]=[a' b' c' d']=[A' B' C' D'].

Mivel mindezek a perspektiv helyzetek vetités, illetve metszéssel keletkeztek, mondhatjuk: vetités, vagy metszés sorozata által a kettősviszony nem változik meg.

Egy siksor négy sikjának kettősviszonyán értjük, a tengelyére merőleges sikkal kimetszett sugarak kettősviszonyát./245. ábra/


245. ábra

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = [A' B' C' D'] = \frac{\sin.A'C'}{\sin.B'C'} : \frac{\sin.A'D'}{\sin.B'D'}$$

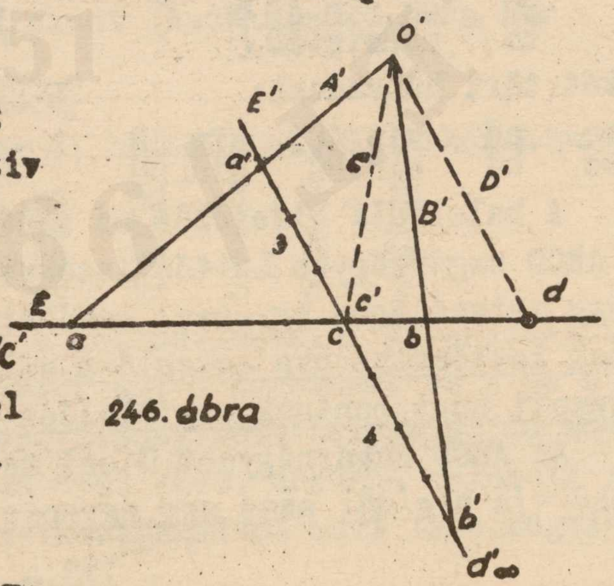
Ez a kettősviszony egyenlő bármely egyenesnek a sikokkal való négy döféspontjának, vagy bármely sikkal kimetszett négy sugárnak kettősviszonyával.

Ugyanis G egyenes döféspontjai a, c, b, d,; oG sik a sikelemeket az a, c, b ... pontokon átmenő A, C, B, D sugarakban metszi. o'-ben T-re merőleges sik α, γ, β, δ sikokat A'C'B'D' sugarakban, A, C, B, D sugarakat a' c' b' d' pontokban metszi, ezeknek G' összekötő egyenese ACBD és A' C' B' D' sikjainak metsző egyenese. A perspektiv helyzetből következik, hogy:

[A' B' C' D'] = [a' b' c' d'] = [ABCD] = [abcd]

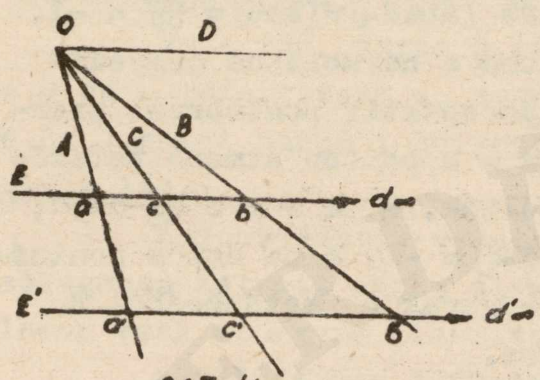
A kettősviszony állandóságának alapján megszerkeszthető megadott bármely ponthoz ösmert kettősviszonynak megfelelő negyedik.

Adva E egyenesen a, b, c keresendő d; $[abcd] = -\frac{3}{4}$ /246. ábra/ c ponton átmenő tetszőleges E' egyenesre c = c'-től felmérünk 3 valamilyen egységet, a végpont a'. S mert a kettősviszony negativ az ellenirányban 4 egységet, a végpont b'. Legyen d'_∞, aa' és bb' egyenesek metszése o'. Az o' centrumu sugárnégyes sugarai A'B'C' és d'_∞-hez futó, tehát E'-el párhuzamos D'. D' kimetszi E-ből a keresett d pontot. Ugyanis a perspektiv helyzetü pontsorok


246. ábra

és sugársorok miatt:

$$[abcd] = [A'B'C'D'] = [a'b'c'd'_\infty] = [a'b'c'] = \frac{a'c'}{b'c'} = -\frac{3}{4}$$



247. ábra

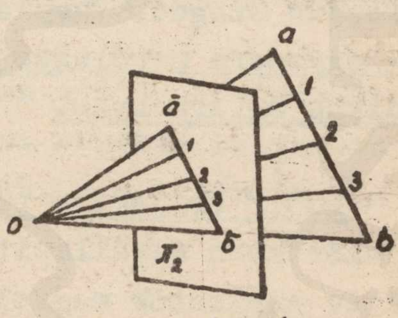
Ha $A'B'C'$ sugárhármas adott, akkor metszük $A'B'C'$ sugarakat E-vel abc-ben, megszerkesztjük az előző szerint E-n a negyedik d pontot és ezen halad át a keresett D'.

Az o centrumu sugárnégyest /247. ábra/ a D sugárral párhuzamos E egyenes $abcd_\infty$ pontokban, E meg $a'b'c'd'_\infty$ pontokban metszi. A perspektiv E és E' pontsoroknak a végtelenben levő d_∞ és d'_∞ pontjai megfelelő pontok

$$[abcd_\infty] = [a'b'c'd'_\infty] \quad \text{s mert} \quad \frac{ad_\infty}{bd_\infty} = \frac{a'd'_\infty}{b'd'_\infty} = 1, \text{ azért}$$

$$\underline{\underline{\frac{ac}{bc} = \frac{a'c'}{b'c'}}} \quad \text{helycserével} \quad \underline{\underline{\frac{ac}{a'c'} \quad \frac{bc}{b'c'}}}$$

Azaz a két pontsor megfelelő szakaszainak viszonya egyenlő, a két <u>pontsor hasonló</u>.



248. ábra

<u>Egy sugársort párhuzamos egyenesek hasonló pontsorokban metszenek</u>.

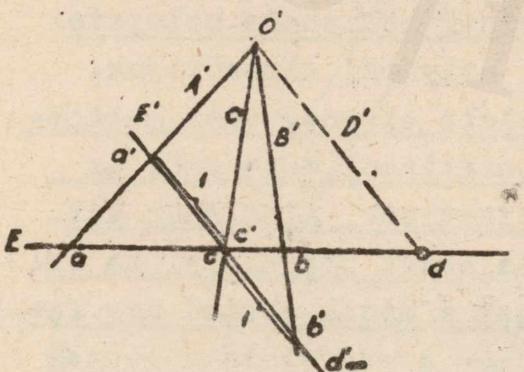
Miért is a képsikkal párhuzamos távolság központi képének osztásviszonya egyenlő a térbeli távolság osztásviszonyával /248. ábra/.

<u>102./ Harmonikus pontok, sugarak</u>. Ha négy pont kettősviszonya $[abcd] = -1$, akkor a pontpárok <u>egymást elválasztják</u>, azt mondjuk, a pontok <u>harmonikusak</u>.

A 101. pont szerint egyrészt $\underline{[abcd] = [badc] = -1}$, másrészt

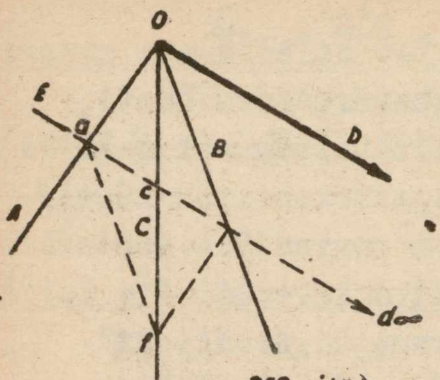
$$[bacd] = \frac{1}{[abcd]} = \frac{1}{-1} = -1,$$

tehát $\underline{[abcd] = [bacd] = -1}$.



249. ábra

Azaz: a harmonikus kettősviszony nem változik meg, ha akár a párokat, akár <u>egy</u> párban a tagokat felcseréljük. Miért is négy tagból alakitható 24 kettősviszonyból <u>nyolc</u>nak az értéke -1.

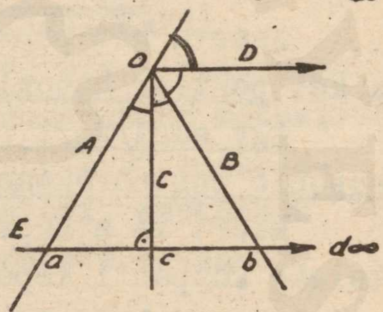


250. ábra

Egy egyenes ab szakaszának c felezőpontja és a végtelenben levő d_∞ pontja harmonikusak, mert $[abcd_\infty] = [abc] = \frac{ac}{bc} = -1$. Az adott abc pontok d harmonikus negyedikét /249. ábra/ perspektiv pontsorral szerkesztjük meg. A c ≡ c' ponton átmenő tetszőleges E'-et rajzolunk. a' c' = c' b' és d'_∞, akkor $[a'\ b'\ c'\ d'_\infty] = -1$, s ha ezt a pontnégyest aa' és bb' sugarak o' metszéséből E-re vetitjük, akkor abcd hamonikus négyes.

Ha ABC sugarakhoz a harmónikus D-t kell megszerkezteni /250. ábra/ akkor pl. a következően járhatunk el: oafb parallelogramma ab átlójának c felezőpontja és d harmonikus pontnégyes és ezt o-ból vetitve, harmonikus sugárnégyest kapunk. D párhuzamos E-vel.

Ha C sugár AB szögének felezője /251. ábra/ akkor abc, s igy D is merőleges O sugárra és felezi AB kiegészitő szögét. Vagyis két sugár és ezeknek egymásra merőleges két szögfelezője harmonikus sugárnégyes.

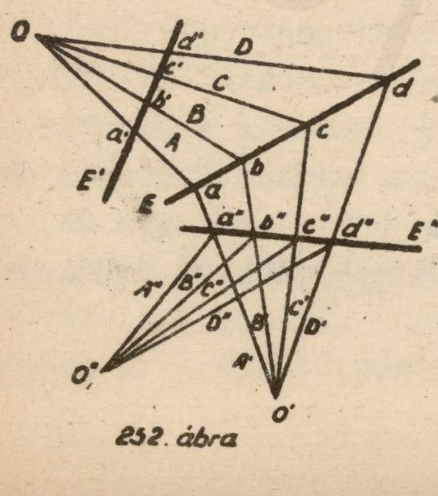


251. ábra

103./ Projektiv pont és sugársorok.

Az előzőkben megállapitottuk, hogy perspektiv alakzatok megfelelő elemnégyesének kettősviszonya egyenlő. A perspektivitás a két alakzat kölcsönös helyzetét jelenti, a kettősviszony egy-egy alakzat elemnégyesének egymásra vonatkozó kölcsönös helyzetének mértékes megállapitása.

Ha a perspektiv helyzetet megbontjuk az által, hogy az egyik alakzatot, a nélkül azonban, hogy elemeinek kölcsönös helyzete megváltoznék, helyéről elmozditjuk, akkor a megfelelő elemnégyesek kettősviszonya változatlanul megmarad, az alakzatok projektivek. Általában két elsőfoku alapalakzat projektiv, ha az egyik elemeinek a másik elemei ugy felelnek meg, hogy a megfelelő négyesek kettősviszonya egyenlő.



252. ábra

A 252. ábrán:

E és E' pontsorok, valamint E és E'' perspektivek, E és E'' projektive
O és O' sugársorok, -"- O' és O'' -" - O és O'' -"-

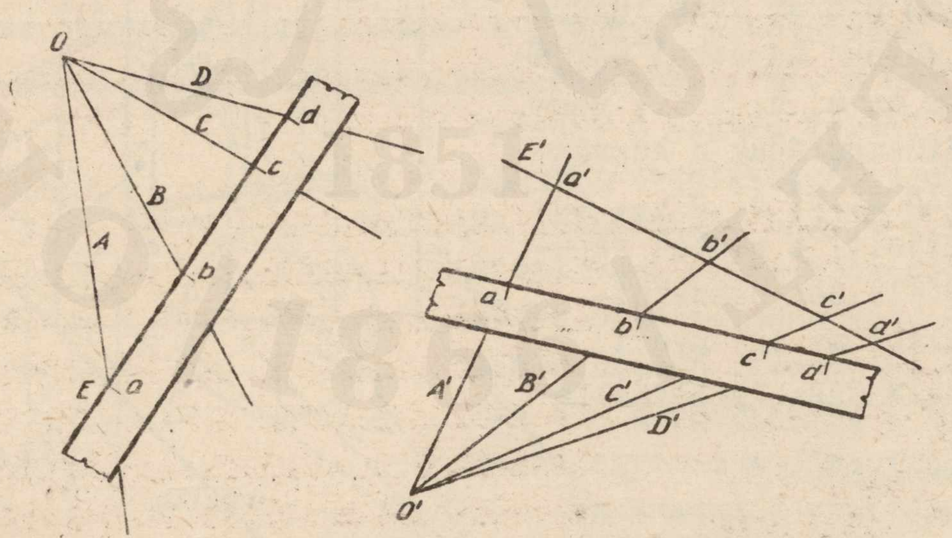
Ha a 238. ábrán S síkot T körül S' síkba forgatjuk, akkor az O' és a leforgatott $o_{,}$ sugársor továbbra is <u>perspektiv</u> marad, de ha S síkot másként helyezzük S síkra, a két sugárnégyes <u>projektiv</u> lesz .

Egy projektiv vonatkozás határozott, ha a két alakzat tetszőlegesen felvett három elemét feleltetjük meg egymásnak, további elemek csak az egyik alakzaton vehetők fel tetszőlegesen.

A 253. ábrán ABCD és A'B'C' projektivek, megszerkesztendő D' . Az ABCD-re helyezétt papirszalagnak E egyenest jelentő szélén megjelöljük a sugaraknak a, b, c, d metszéspontjait. [ABCD] = [abcd]. A papirszalagot azután próbálgatással ugy helyezzük el, hogy a papirszél a, b, c pontja A'B'C' sugarakra essék. d ponton át huzott sugár a keresett D'. [abcd]= [A'B'C'D'] .

Ha ABCD és E' pontsorokon a' b' c' adott, akkor a tetszőlegesen felvett o ponton át meghuzzuk A'B'C' sugarakat, s az előbbi módon megállapitott D' kimetszi d' pontot.

Ha E egyenesen abcd pontok E' egyenesen a' b' c' adottak, akkor o'-ből megrajzoljuk A'B'C' sugarakat, az E mellé helyezett papirszalag szélén kijelöljük az abcd pontokat, s a továbbiakban az első eset szerint járunk el.

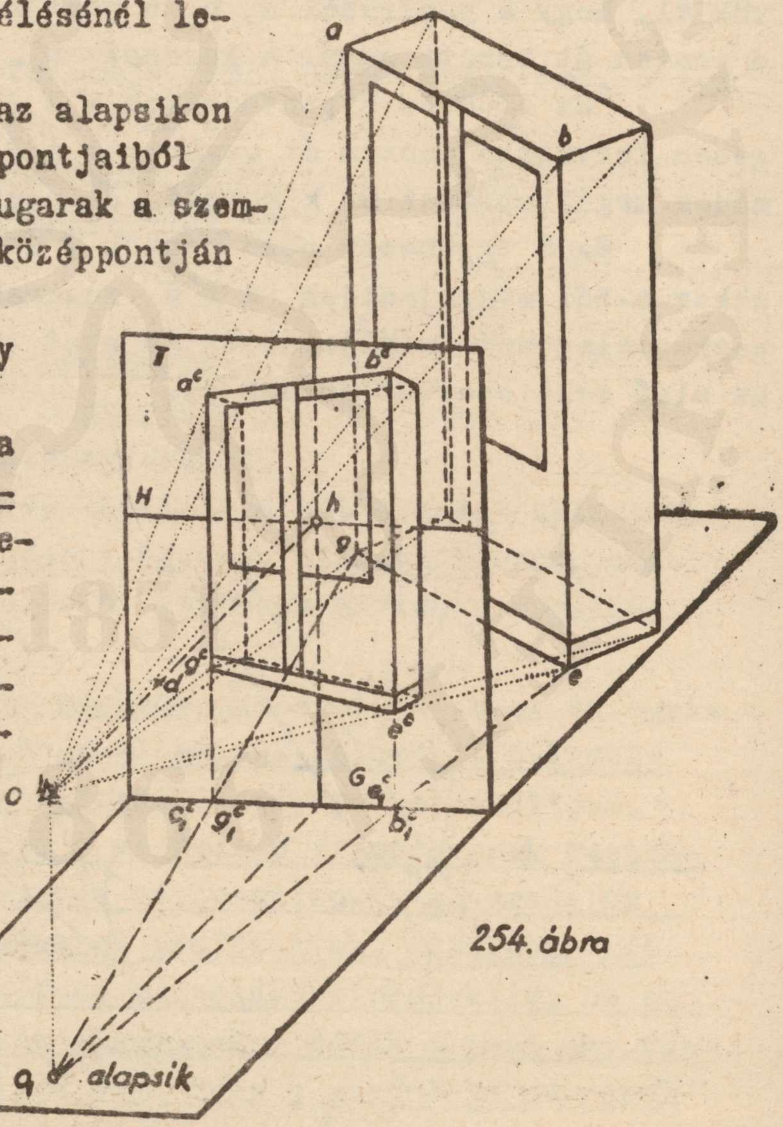


253. ábra

XX. Központi vetités.

104./ Alapfogalmak. Az eddigiekig tulnyomórészt alkalmazott merőleges vetitésnél, a képsikirányok megfelelő megválasztásával, az alakzat kevéssé szemléltető, de olyan képét kapjuk, amelyről az alakzat méretei közvetlenül, vagy egyszerü segédszerkesztéssel megállapithatók. Az axonometrikus képek szemléltetőbbek ugyan, de minél nagyobb az ábrázolt tárgy, illetve a kép, annál feltünőbb az axonometrikus kép és a tárgy megtekintésénél a szemben keletkező kép közötti külömbség. Igy tudjuk, hogy az ax. képpel szemben a párhuzamosak, mint a sinpárok, épületek eresze és párkányélei, összefutóknak látszanak. Ha, főcélunk szemléltető, eleven, valószerü képeket szerkeszteni, akkor azt a folyamatot kell alapul venni, amely az alakzatnak /egyenlőre/ egy szemmel való szemlélésénél lejátszódik.

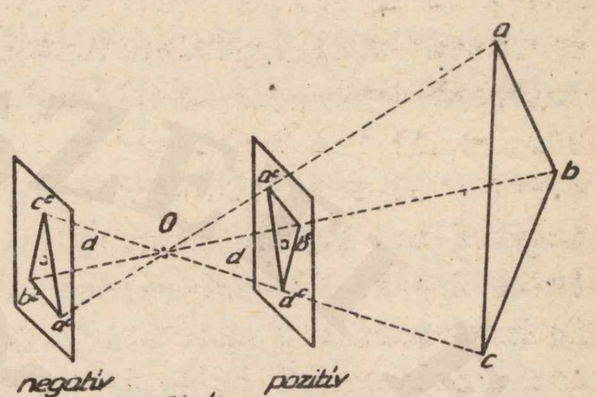
A látás folyamatánál az alapsikon álló tárgy a, b, e, g ... pontjaiból /254. ábra/ kiinduló fénysugarak a szemnek az o-ban levő optikai középpontján áthaladva, a recehártyán ingert okoznak, amit az agy képpé alakit. o a vetités középpontja, centruma. Ha a tárgy és a szem közé függőleges /üveg/ képsikot helyezünk és az a, b, e ... pontok látósugarának a képsikkal való a^c, b^c, e^c, g^c... döféspontjait, a pontok képeit megfelelően összekötjük, akkor az igy nyert centrális kép, perspektiva



254. ábra

egyes pontjaiból az o szembe jutó látósugarak összeesnek a tárgy megfelelő pontjaiból kiinduló fénysugarakkal, s igy a szem recehártyájára geometriailag ugyanazt a hatást gyakorolják, mint az eltávolitott tárgy fénysugarai gyakoroltak. Miért is a központi vetités alkalmas térhatásu képek szerkesztésére.

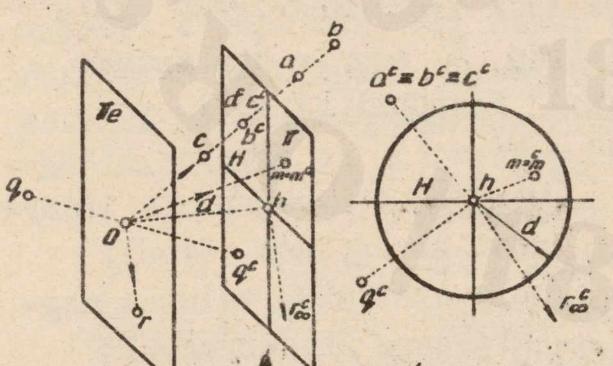
Mindjárt megállapithatjuk, hogy állandó helyzetü o és tárgy esetén a kép nő, ha π képsikot helyzetével párhuzamosan a tárgy felé, esetleg mögé tologatjuk, kisebbedik a kép, ha π az o-hoz közeledik. A képek azonban hasonlóak, mert az egyes képek a vetitősugarak által alkotott egyazon gulás lapnak párhuzamos sikmetszetei. Ebből következik, hogy a képsikkal párhuzamos sikidom és központi képe hasonlóak.



254. ábra a_1

Központi / centrális / forditott állásu képet rajzol a fényképezőgép lencséje a lemez / film/ fényérzékeny sikjára, a képsikra / 254. ábra a./ A vetités középpontja a lencsének a kép felöli csomópontja, a tárgy és a képsik a centrum ellenoldalán vannak. A negativról készült pozitiv másolat lényegében azon a képsikon levő képpel azonos, amely a centrumtól ugyanakkora távolságban van, mint a negativ.

A képsik, a papir sikja, függőleges. O-nak π képsikon levő merőleges vetülete / 255. ábra/ h főpont. o távolsága π - től, azaz oh a szemtávolság, képtávolság, distanc / d/, s ezt h-ból rajzolt d sugaru körrel, distanckör/szemtávkör/ adjuk meg, Ha feltesszük, hogy o a képsik előtt van, akkor h és d-vel o helye egyértelmüen határozott. A h-n átmenő vizszintes egyenes a H képhorizont; a függőleges egyenes a fővertikális.

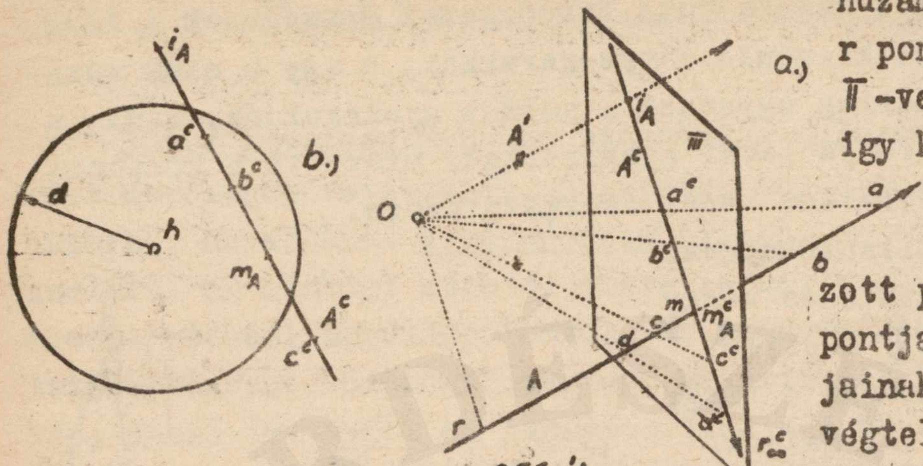


255. ábra

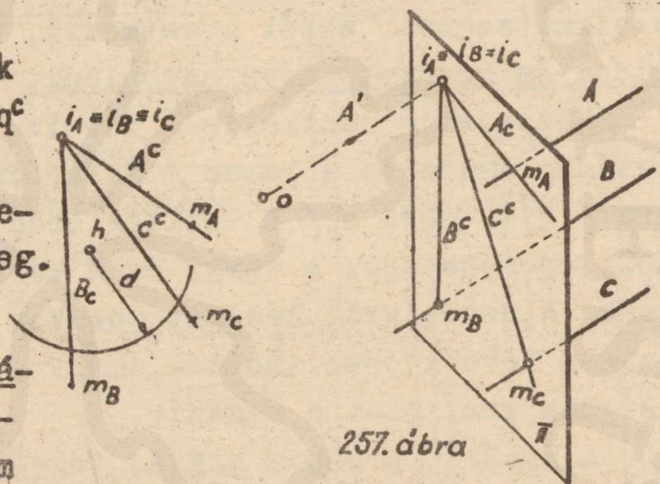
Ugyanazon a vetitősugáron levő a, b, c ... pontok központi képe az összeeső a^c, b^c, c^c ..... / ha egyenes a vetitősugár merőleges képe a képsikon/. A képsikon evő m és h képe önmaga. Az o központon áthaladó π - vel pár-

CK.

huzamos Π_e sikon levő r pont vetitősugara Π-vel párhuzamos, s igy képe a végtelenben van és pedig h-ból or-rel huzott párhuzamosnak r^c_∞ pontja. Π_e összes pontjainak képe eltünik a végtelenbe, Π_e az eltünési sik. Az eltünési sik által kettéosztott térnek Π képsikot is tartalmazó részében levő pontok o-ból valóban láthatók, ezen belátható térrészben levő pontok – akár a képsik előtt, akár mögötte vannak – képei ténylegesek /a és a^c az o-nak egy oldalán vannak/. Π_e ellenoldalán levő q pont o-ból nem látható, s igy q^c képe csak geometriai, virtuális. /q és q^c o-nak ellenoldalán van/ Egyedül a kép alapján a pont térbeli helyzete nem állapitható meg.

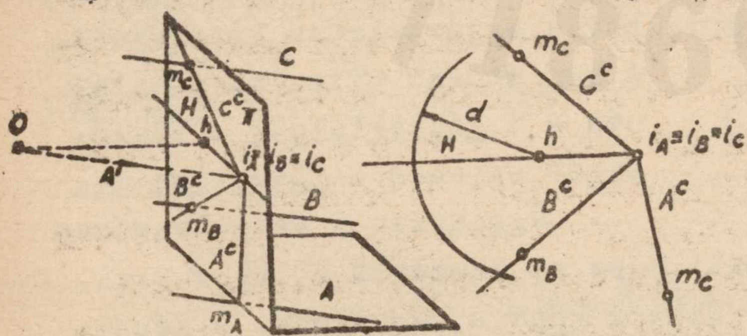


256. ábra



257. ábra

105./ Az egyenes ábrázolása, iránypont. Az egyenes központi képe általában a centrum és az egyenes által meghatározott vetitősik metszete a képsikkal. A képsikhoz általános helyzetü A egyenes vetitősikját meghatározza A és ezzel o-ból párhuzamosan huzott A' iránysugár /256. ábra a./. A egyenes Π képsikot m_A nyompontban, A' meg i_A-ban metszi, s igy $m_A \equiv m^c_A$ és i_A összekötése A-nak A^c központi képe. i_A pont A egyenes végtelenben levő pontjának a képe; i_A az egyenes iránypontja. A nyompont és iránypont az egyenes térbeli helyzetét egyértelmüen meghatározza /b. ábra/. "A" térbeli helyzetének megállapitásánál állitsunk h-ban a papirsikra merőlegest, erre h-tól d-t

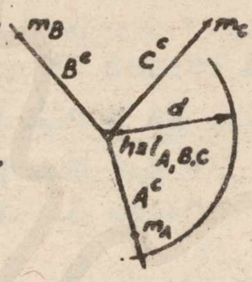


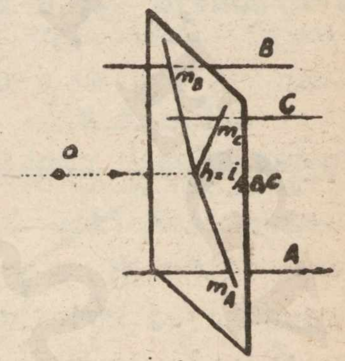
258. ábra

felmérve, kapjuk o helyzetét, o és i_A összekötése az A′ irányegyenes, ezzel párhuzamos az m_A nyomponton áthaladó térbeli A.

Az A-n levő és a képsik mögötti a és b pontok képe i_A és m_A közé esik, Π és Π_e közötti pontok képe, mint c és d, A^c-nek m_A-nél kezdődő, s a végtelenig terjedő részén vannak. Az eltünési sikban levő r ponttól kezdődő nem látható pontjainak virtuális képei az i_A-tól a végtelenig terjedő A^c képrészen vannak. S mindeme pontok térbeli helyzete A rekonstrukciójával egyértelmüen megállapitható. Miért is a pontot, mint egy rajta áthaladó egyenes pontját adjuk meg.

A és A^c perspektiv helyzetüek, a perspektivitás középpontja o.





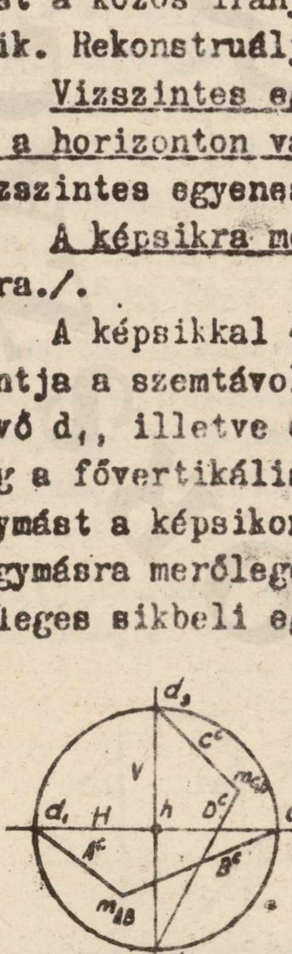
259. ábra

Az iránypont lényegéből következik, hogy párhuzamos egyeneseknek azonos az iránypontjuk. A 257. ábrán A, B és C párhuzamos egyenesek A^c B^c és C^c centr. képei egymást a közös iránypontjukban metszik. Rekonstruáljuk őket.

Vizszintes egyenes iránypontja a horizonton van. A 258. ábrán A, B és C egymással párhuzamos vizszintes egyenesek.

A képsikra merőleges egyenesek iránypontja a főpont /259. ábra./.

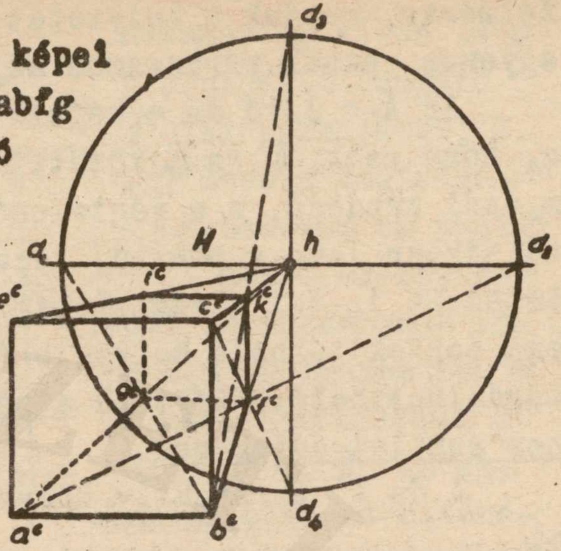
A képsikkal 45°-os szöget bezáró minden egyenesnek az iránypontja a szemtávolsági körön van. A vizszinteseké a horizonton levő d_1, illetve d_2 distancpontok, a függőleges sikban levőké meg a fővertikális d_3, illetve d_4 pontja. A 260. ábrán A és B egymást a képsikon, m_{AB} közös nyompontjukban metsző vizszintes /egymásra merőleges/ egyenesek; C és D meg m_{CD}-ben metsződő függőleges sikbeli egyenesek. /Rekonstruáljuk az egyeneseket./



260. ábra

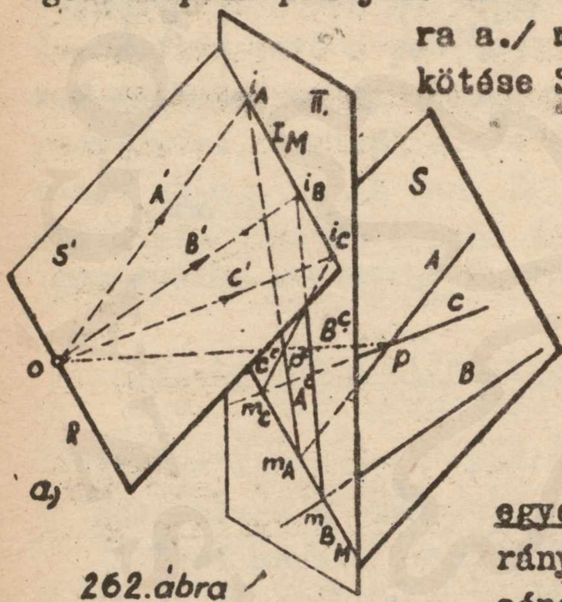
A képsikkal párhuzamos egyenesek nyom- és iránypontjuk a végtelenbeli pontjuk, képük önmagával párhuzamos. Különösképp: vizszintesek képe a horizonttal, a függőlegeseké a fővertikálissal párhuzamos.

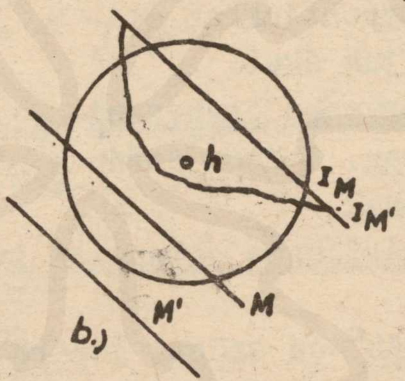
Az előző két tétel alapján ábrázoltunk a 261. ábrában egy kockát, amelynek abce lapja a képsikon van. A képsikra merőleges éleinek iránypontja h, s így ezeknek képei $a^c h$; $b^c h$ ... egyeneseken vannak. Az abfg alapnégyes átlói Π -vel 45^o-ot alkotó vizszintes egyenesek, s igy iránypontjaik d_1, illetve d_2, képeik $a^c d_2$, illetve $b^c d_1$ egyenesen vannak. $a^c h$ és $b^c d_1$ metszése g^c alapcsucs. f^c meg $a^c d_2$ és $b^c h$ metszése. Ezzel $g^c f^c h^c l^c$ négyzet rajzolható. Egyébként bfkc oldallap $b^c k^c$ átlójának iránypontja d_3; $c^c f^c$-é meg d_4.



261.ábra

__106./ A sik__. A szemen át nem haladó sik pontjainak képei az egész képsik pontjai. Az S sik A, B, C ... egyeneseinek /262. ábra a./ m_A, m_B, m_C ... nyompontjainak összekötése S sik és Π képsik M metsző egyenese, __nyoma__. Az A, B, C egyenesek i_A, i_B, i_C iránypontjainak összekötése az __o ponton átmenő S-el párhuzamos√ i_M metsző egyenese, az S sik irányvonala__. Az i_M irányvonal S sik végtelenben levő egyenesének a képe. Az o-n átmenő i_M-el párhuzamos R az S sik eltünési egyenese.



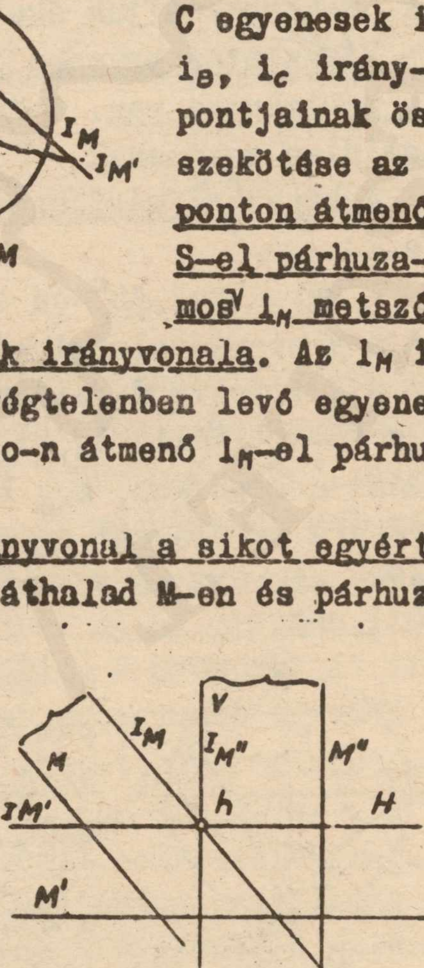


262.ábra

Az __egymással párhuzamos nyom- és irányvonal a sikot egyértelműen meghatározza__ /262. ábra b./. A sik áthalad M-en és párhuzamos az i_M és o szemen áthaladó sikkal.

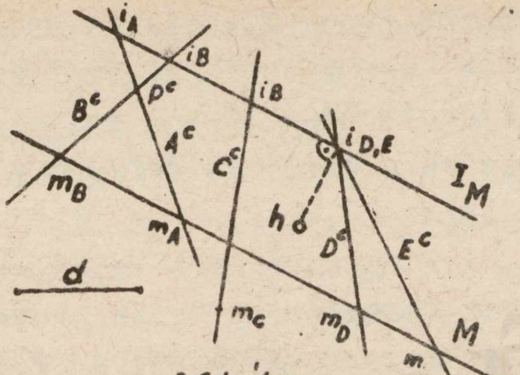
Az irányvonal meghatározásából következik, hogy __párhuzamos sikoknak egy irányvonaluk van__ és nyomaik párhuzamosak /$i_M = i_{M'}$ és M ∥ M'. 262. ábra b./

A képsikra merőleges sikok irányvonala a főponton halad át /263. ábra/. Mégpedig: vizszintes-/alap-/ sik irány-



263.ábra

√S' siknak és Π -nek M -el párhuzamos



264.ábra

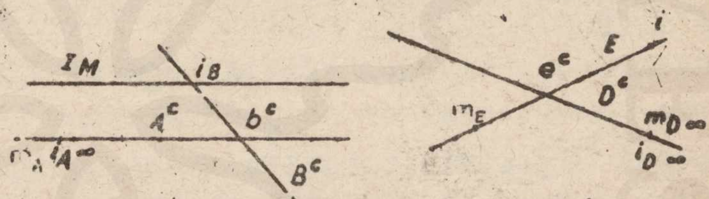
vonala a H horizont; függőlegesé a V fővertikális.

A főponton átmenő sikok nyom- és irányvonala összeesik.

107./ Helyzetfeladatok megoldása nyom- és irányelemekkel. A 262. ábra a./-ból leolvashatjuk, hogy a sikbeli egyenes nyompontja a sik nyomán, iránypontja a sik irányvonalán van. E szerint a 264. ábrán A és B az MI_M sikon levő egyenesek. Mivel egysikbeli egyenesek egymást metszik, azért A és B egymást p-ben metsző egyenesek /l: 262. ábra a. is/.

Vagyis: két egyenes metszi egymást, ha nyom- és iránypontjaikat összekötő egyenespárok párhuzamosak, ezek sikjuknak nyom- és irányvonalai.

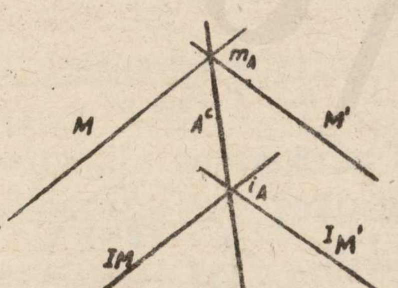
A közös i_{DE} iránypontu D és E sikbeli párhuzamos egyenesek mégpedig ,-ból i_M-re merőlegessel párhuzamos esésvonalak. C egyenes a sikkal párhuzamos, mert m_C nincs az M nyomon. /A rekonstrukciókhoz adott d is./



265.ábra

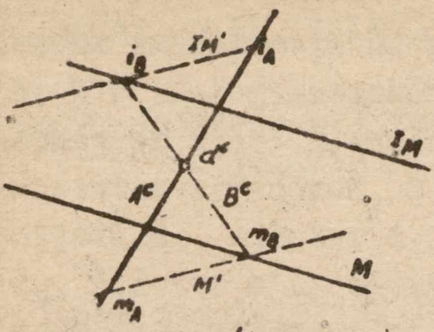
A 265. ábrán A egyenes MI_M siknak fővonala, egy a képsikkal párhuzamos egyenes, nyom- és iránypontja a végtelenben van; a sikbeli B-t b-ben metszi.

E-t e-ben metsző D ugyancsak $\overline{I}$-vel párhuzamos egyenes. /A helyzetfeladatok elvi megoldása általában független a főponttól és szemtávolságtól, s igy az ábrákon elhagytuk. Az egyenes és sik térbeli helyzetének ekként előálló többértelmüségét h és d felvételével szüntetjük meg. Rekonstrukcióhoz is felvendők./



266.ábra

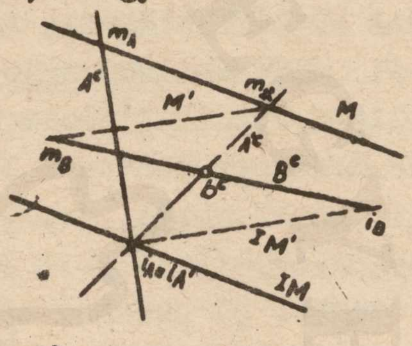
Két sik metsző egyenese mindkét sikon van, igy nyompontja mindkét nyomon, iránypontja mindkét irányvonalon van, azaz azok metszéspontja /266. ábra/.



267. ábra

A 267. ábrán A-nak MI_M síkkal való döféséit keresve, A-n át $M'I_M$ síkot fektetjük, ez az adott síkot B-ben metszi, B^c és A^c metszése a keresett döféspont d^c centrális képe.

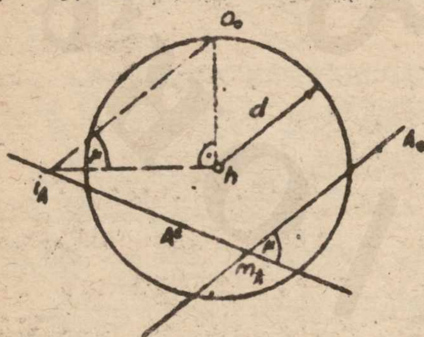
Az A $/m_A\ i_A/$ egyenes és B $/m_B\ i_B/$-nek b pontjával meghatározott sík nyomát és irányvonalát keresve /268. ábra/ fektessünk b-n át A-val párhuzamos A'-et. A és A' meghatározzák a síkot. Az i_A és b^c összekötése A'^c. A' nyompontjának megszerkesztéséhez meggondoljuk, hogy b-ben metsződő A' és B síkot határoznak meg, s így i_A és i_B összekötése a sík $I_{M'}$ irányvonala, s az ezzel m_B-ből huzott párhuzamos M' meg a nyomvonala, s így M' és A'^c metszéspontja $m_{A'}$ nyompont. m_A és $m_{A'}$ összekötése a keresett M és I_M párhuzamos M-el.



268. ábra

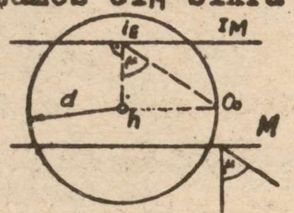
108./ Méretes feladatok. Képsíkszög, sík és egyenes merőlegessége. Az <u>A $/m_A\ i_A/$ egyenes képsíkszöge</u> egyenlő az A-val párhuzamos oi_A egyenes képsíkszögével /269. ábra/. Fektessük az ohi_A derékszögü háromszöget hi_A körül forgatva Π-be, akkor o szem o_o-ba jut és az $o_o i_A h$ szög egyenlő A képsíkszögével. Az m_A nyomponton átmenő A_o párhuzamos $o_o i_A$-val.

M nyomával és I_M irányvonalával adott <u>sík képsíkszöge</u> /270. ábra/ egyenlő a vele párhuzamos oI_M sík képsíkszögével. E síknak egy esésvonala oi_E /merőleges képe hi_E/. Az $i_E h$ körül ledöntött $o_o i_E$ és $i_E h$ szöge a keresett. Az i_E pont iránypontja ugy az adott, mint a vele párhuzamos síkok esésvonalainak.



269. ábra

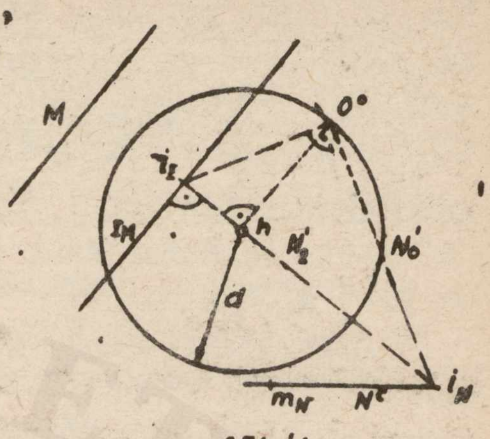
Az MI_M <u>síkra merőleges egyenesek iránypontja</u> az a pont, /271. ábra/ amelyben az adott síkkal párhuzamos oI_M síkra o-ból állitott merőleges N' iránysugár Π képsíkot metszi. N'-nek N'_2 orthogonális képe h-ból I_N-re állitott merőleges, s mivel N' egyenes o-ban merőlegesen metszi oi_E esésvonalat, azért az N'_2 körül Π-be döntött N'_o merőleges o_o-ban $i_E o_o$-ra.



270. ábra

N_0' és N_2' metszéspontja N' döfése Π-vel, az adott sikra merőleges, tehát egymással párhuzamos egyeneseknek i_N iránypontja. Igy i_N és m_N pontokkal megadott N^c egy ilyen merőlegesnek centrális képe.

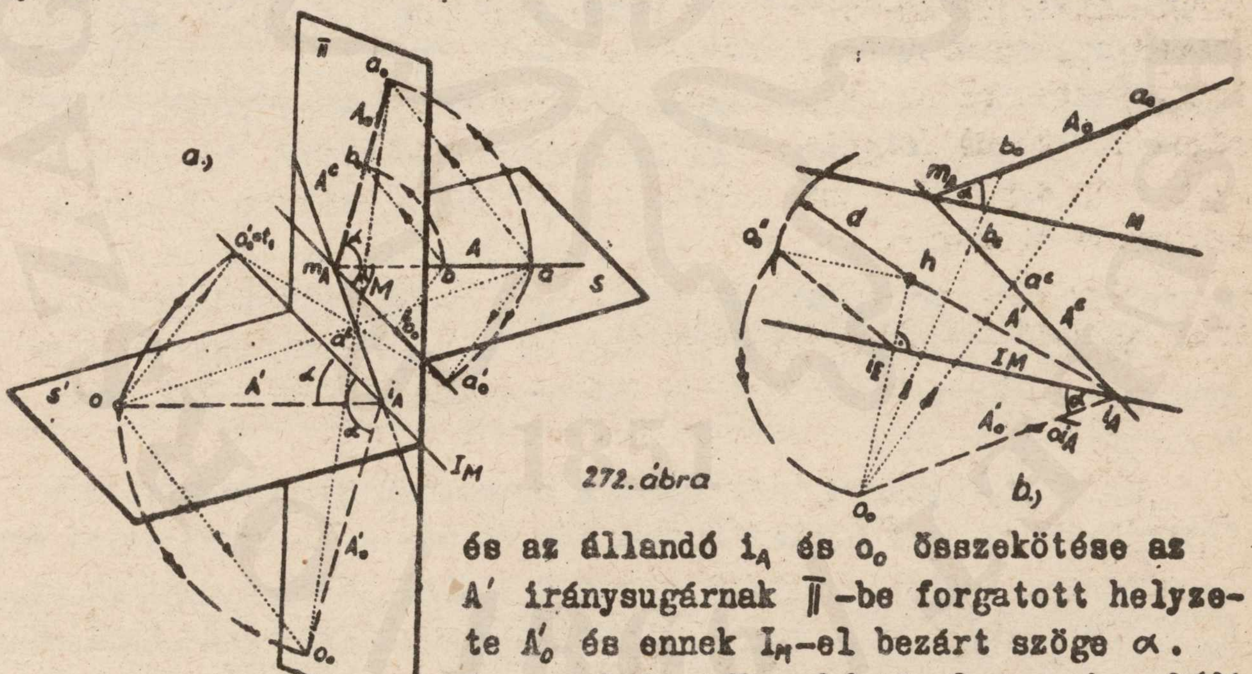
Az N /$m_N i_N$/ <u>egyenesre merőleges sikok</u> I_M irányvonalát az ábra szerint forditott sorrendben szerkesztjük meg.



271. ábra

<u>109./ Távolság valódi nagysága. Távolság felmérés</u>. A 272. a./ szemléltető ábrában o a szempont, S sik nyoma M, irányvonala I_M. A sikbeli A egyenes iránysugara A', nyompontja m_A, iránypontja i_A, képe A^c, s ezen a^c. Az A és M közötti α szög egyenlő A' és I_M szögével. Állapitsuk meg A egyenes am_A darabjának valódi hosszát.

Forgassuk az o; A'; I_M elemeket tartalmazó S' sikot az I_M irányvonal körül a Π képsikba, amikor is az o centrum o_0-ba jut



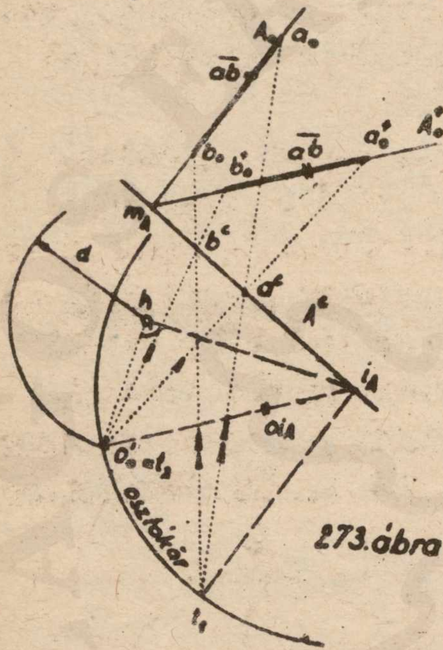
272. ábra

és az állandó i_A és o_0 összekötése az A' iránysugárnak Π-be forgatott helyzete A_0' és ennek I_M-el bezárt szöge α. Az o-nak i_A-tól való távolságának valódi nagysága $o_0 i_A$.

Forgassuk az A-t tartalmazó S sikot M körül Π-be, akkor, mivel az S' és S sikok, I_M és M, A és A' párhuzamosak azért az <u>m_A állandó ponton átmenő A_0 M-el α szöget alkot és párhuzamos A_0'-al. $m_A a_0$ az am_A darabnak a valódi nagysága</u>.

Az S sik, s ezzel A egyenes pontjai által leirt körivek hurjai, mint pl. aa_0; bb_0; egymással párhuzamosak, miért is a forgatás a forgáshurokkal párhuzamos irányu vetitésnek is minősithető. <u>A forgáshurok iránypontja</u> az aa_0; bb_0... forgáshurokkal párhuzamos oo_0-nak Π-vel való o_0 döféspontja, azaz <u>az o szemnek i_M irányvonal körüli leforgatottja</u>. Ennek folytán pl. "a" pont forgáshurjának centrális képe a_0 és a^c összekötése, s ez A_0-t a_0-ban metszi.

/Mivel vetitésnél a perspektivitás nem szünik meg, az o centrumu A és A^c közötti perspektivitás átmegy az A_0 és A^c közötti o_0 centrumu perspektivitásba. A megfelelő a^c és a_0; b^c és b_0 ... o_0-ból kiinduló sugarakon vannak./



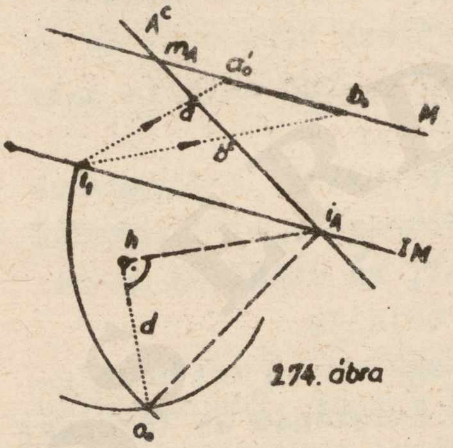
273.ábra

A 272. ábra b./-ben o szemnek i_M irányvonal körüli leforgatásánál a forgássugár az oi_E esésvonaldarab, ennek valódi nagysága $i_E o_0'' = i_E o_0$. o_0 az M sik forgáshurjainak az iránypontja. Az o_0 és i_A összekötése az A egyenes A' iránysugarának I_M körüli leforgatott helyzete. A-nak m_A nyompontjából A_0'-al huzott párhuzamos A-nak M körüli leforgatott helyzete, A_0. Az o_0a^c, illetve o_0b^c az a, illetve b pontok által leirt körivek centrális képe, s ezek A_0-t a_0 és b_0-ban metszik. a_0b_0 az ab valódi nagysága.

Az o_0i_A távolság akkora, mint az o szem távolsága az A egyenes i_A iránypontjától és A_0 párhuzamos o_0i_A-val /272. ábra b./.

Az ab távolságot tartalmazó A egyenesen át számtalan sik fektethető, s ezek mindegyikének más és más o_0 helyzet felel meg, de mindezek <u>i_A-tól akkora távolságra vannak, mint o centrum az i_A irányponttól, azaz egy i_A középpontu oi_A sugaru kör kerületi pontjai</u>. Egy-egy körkerületi ponthoz tartozó körsugár meg egy-egy A_0' helyzet, amellyel az m nyompontból huzott párhuzamos egy-egy A_0 helyzet, s erre a körkerületi pontból, az o_0 helyzetből, a^c és b^c reá vetithető.

Az előzők szerint A /m_Ai_A/ egyenes ab darabja valódi nagyságának megszerkesztéséhez /273. ábra/ megállapitjuk oi_A /merőleges képe hi_A/ valódi nagyságát vetitősikjának ledöntésével, amikor is o pont hi_A-ra merőlegesen h-tól d távolságra $o_0' \equiv t_2$-be jut és $o_0' i_A$ az oi_A távolság hossza. i_A-ból tetszőleges irányba huzott egyenesre i_A-tól felmérjük $i_A o$ valódi nagyságát $o_0' i_A$-t, a végpont t_1. m_A-ból a választott iránnyal huzott párhuzamos az A_0, s erre t_1-ből reávetitjük a^c és b^c pontokat. $a_0 b_0$ adja ab valódi hosszát.

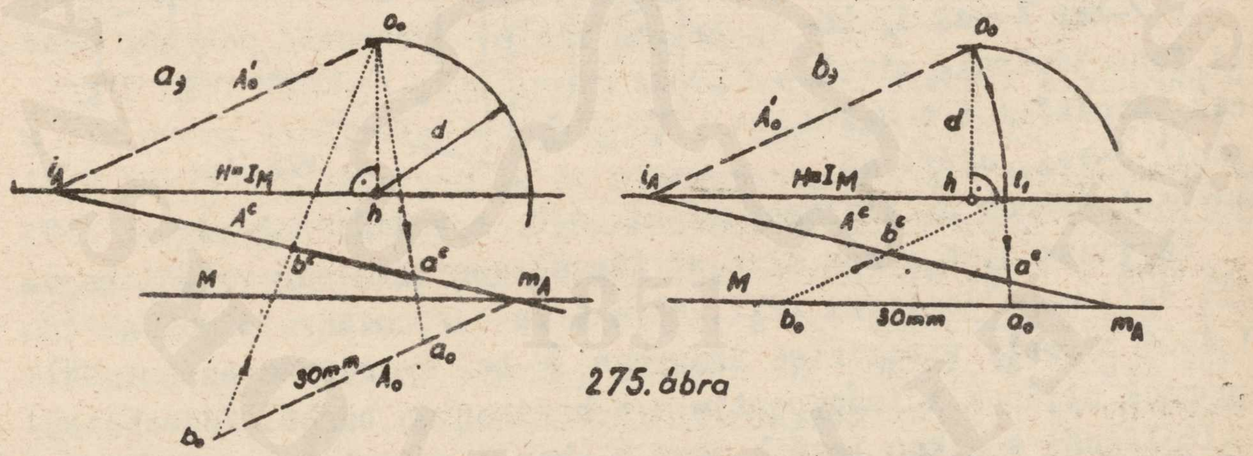


274. ábra

A körkerületi pont természetesen $o_0' \equiv t_2$ is lehet, amikor is $A_0^+ \parallel o_0' i_A$ és a^c és b^c pontokat $o_0' \equiv t_2$-ből vetitve, $a_0^+ b_0^+$ lesz a valódi nagyság.

A t_1, t_2 ... pontokat osztáspontoknak, mérőpontoknak az osztáspontok körét osztókörnek nevezzük.

Legyen A az MI_M siknak egyenese /274. ábra/. Ha az osztókör sugarának $oi_A = o_0 i_A$ hosszát i_A-tól az I_M sikirányvonalra mérjük, azaz t_1 osztópont I_M-en van, akkor m_A-ból $t_1 i_A$-val huzott párhuzamos az M nyom, s igy az ac darabnak $a_0' b_0'$ valódi hosszát a sik M nyomán kapjuk meg. Ez térbelileg azt jelenti, /lásd 272. ábra a.-t is/ hogy A egyenest S /MI_M/ sikban m_A nyompont körül M-re forgattuk, amikor is aa_0'; bb_0';.. forgáshurok i-



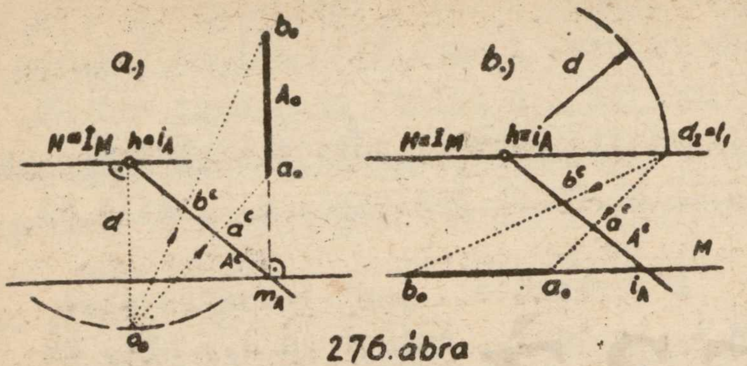
275. ábra

ránypontja, a t_1 osztópont I_M-en van és az egyenes iránypontjától akkora távolságra van, mint az egyenes iránypontja a szemtől.

Ugyanezen szerkesztésekkel állapitjuk meg egy egyenesre felmért hossznak centrális képét is.

A 275. ábrán M egy vizszintes sik /alapsik/ nyoma, irányvonala H horizontba esik. E sikon levő A /$m_A i_A$/ egyenes "a" pontjából felmérendő 30 mm.

Az a./ ábrán A egyenest M körül T-be forgattuk. Az A-val



276. ábra

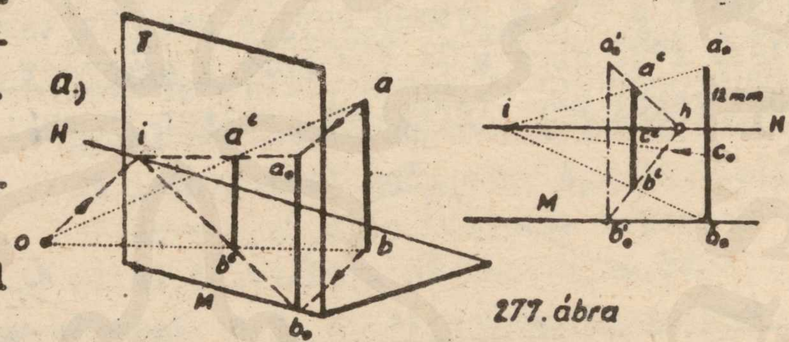
párhuzamos oi_A /A'/-nak I_H /H/ körüli leforgatottja A'_0; ezzel párhuzamos A_0. o_0 az M sikbeli A forgáshurjainak az iránypontja, s igy "a" pont forgási hurjának képe o_0a^c és ez A_0-t a_0-ban metszi. a_0b_0 = 30 mm. b_0o_0 hurkép kimetszi b^c végpontot.

A b./ ábrán A egyenest m_A körül M-be forgattuk. A forgáshurok t_1 iránypontjának, az osztáspontnak távolsága i_A-tól egyenlő $oi_A = i_Ao_0$. A t_1a^c hurkép kimetszi M-ből a_0-t, az ettől 30 mm-re levő b_0-ból huzott b_0t_1 hurkép A^c-t b^c-ben találja.

A 276. ábrában a vizszintes sikbeli A egyenes Π-re merőleges, nyompontja m_A, i_A iránypontja h főpont. Keresendő ab távolság hossza.

a./-ban az M nyom körüli forgáshurok iránypontja az i_H körül leforgatott o_0. Az o_0i_A a leforgatott A'_0, ezzel parallel A_0 merőleges M-re. a_0b_0 a valódi nagyság.

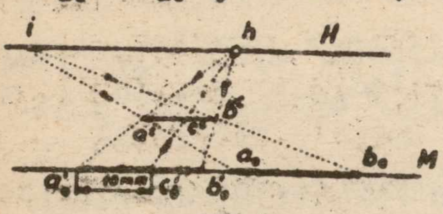
b./-ben A-nak i_A körüli forgatásánál, mivel o-nak távolsága i_A = h-tól egyenlő d-vel, azért az iránypont azonos d_1 distancponttal. a_0b_0 a valódi nagyság.



277. ábra

Ha vizszintes sikon álló ab függőleges távolság valódi nagyságát kell megállapitani /277. ábra a és b./, akkor toljuk ab távolságot bármely vizszintes irányban Π-be, amikor is az a és b végpontok utjának i iránypontja a H horizonton bárhol felvehető. Az eltolásnál a sikon levő b pont b_0-ban M-re jut és a valódi hosszal egyenlő b_0a_0 párhuzamos b^ca^c-vel. Ha az eltolás iránypontja a h főpont, az eltolás a képsikra merőlegesen történt.

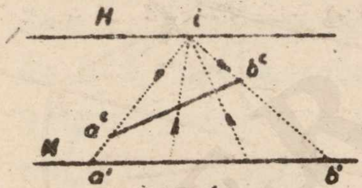
Ugyanigy járunk el, ha ilyen távolságon egy megadott darab képhosszát kell kijelölni, pl. ha a_0c_0 = 12 mm, akkor c pont a-tól 12 mm. távolságra van.



278. ábra

Párhuzamos eltolással szerkesztjük meg Π-vel párhuzamos vizszintes távolság hosszát, vagy mérünk reá egy megadott darabot. /278. ábra/ Az ab távolság valódi hossza $a_o b_o = a'_o b'_o$. A 10 mm. ac távolság képhossza $a^c c^c$.

Egy sikbeli távolságot valódi nagyságának megszerkesztése nélkül is kivánt számu egyenlő részekre oszthatunk oly módon, hogy a távolságot sikjának valamely egyenesével párhuzamos irányban a nyomra vetitjük. A vetület és távolság osztásviszonya egyenlő. A 279. ábrán a vizszintes sikon levő ab távolságot osszuk 3 részre. A horizont tetszőleges i pontja, a vizszintes vetitési irány iránypontja a', b'; a vetületet 3 részre osztjuk, s az osztáspontokat i-ből $a^c b^c$-re vetitjük.



279. ábra

A képsikkal párhuzamos távolság és centrális képe egymással párhuzamosak, vagyis hasonló pontsort alkotnak, miért is a centrális kép részekre osztása a térbeli távolság megfelelő részekre osztását jelenti.

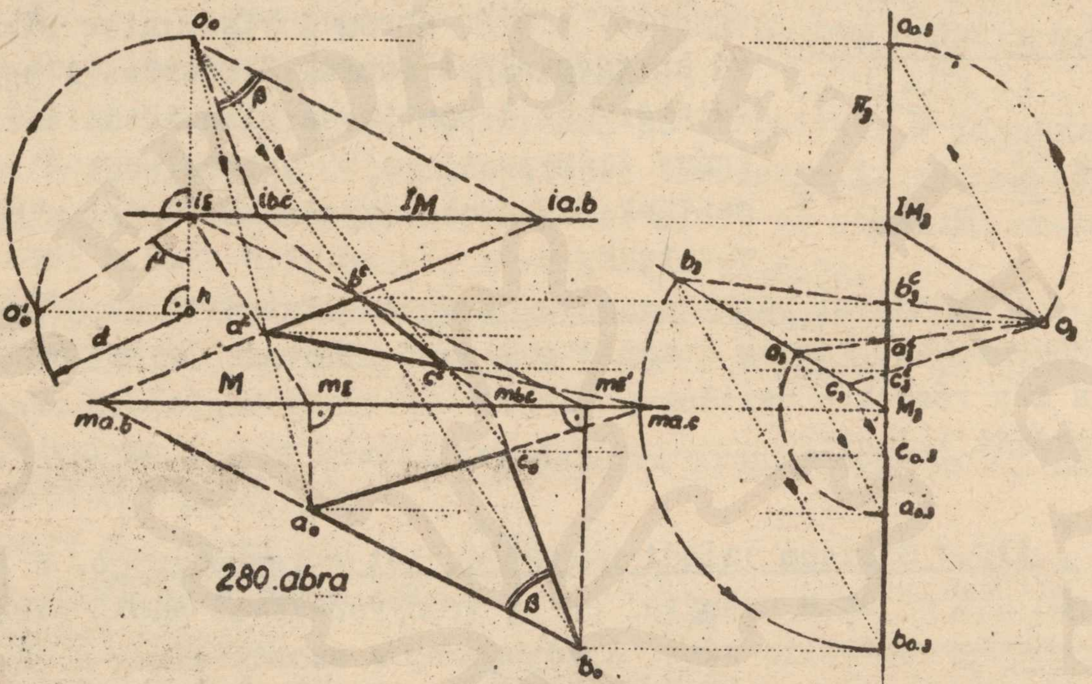
110./ Sikidom valódi nagysága. Két egyenes szöge. A 280. ábrán $a^c b^c c^c$ az M nyomával és i_M irányvonalával adott sikbeli háromszög centrális képe. A főpont h, a szemtávolság d. Szerkesszük meg abc háromszög valódi nagyságát.

A 272. ábrából megállapitottuk, hogy a sikbeli egyeneseknek a sik nyoma körüli leforgatásánál a forgó pontok által leirt körivek hurjainak iránypontja az o szempontnak a sik irányvonala körüli leforgatott helyzete. Ennek ujabb igazolására a 280. ábrán az adatokat oldalnézetben ábrázoltuk, amikor is ugy a Π képsik, mint abc sikja harmadik vetitősikok, s igy egyenesbe esnek, a siknyom és irányvonal meg M_3, illetve i_{M_3} pontok. M körüli forgatásnál az a, b, c ... pontok valódi nagyságban látható köriveinek $a_3 a_{o3}$; $b_3 b_{o3}$; $c_3 c_{o3}$ ... hurjai egymással párhuzamosak. Az o-ból ezekkel huzott párhuzamos a Π képsikot o_{o3}-ban döfi, s ez a pont o_3-nak i_{M_3} körüli leforgatottja, miért is o_o a sik pontjai forgáshurjai centrális képének iránypontja.

A centrális képen o_o az i_M-től $i_z o'_o$ átfogó távolságra kerül. Az ab oldal iránysugara oi_{ab}, merőleges képe hi_{ab} lenne, Π-be forgatottja $o_o i_{ab}$, ezzel m_{ab} nyompontból huzott párhuzamos egyenest az $o_o a^c$, illetve $a_o b^c$ körhurképek a_o és b_o-ban metszik. Hasonlóan: bc oldal iránypontja i_{bc}, nyompontja m_{bc}. Az $o_o i_{bc}$-vel

m_{bc}-ből huzott párhuzamos egyenes áthalad b_0-on, ezt az o_0c^c hurkép c_0-ban metszi. ac oldal nyompontja m_{ac}, ezen kell áthaladni a_0c_0 meghosszabbitásának. $a_0b_0c_0$ a háromszög valódi nagysága.

Az $a^cb^cc^c$ ... és $a_0b_0c_0$ ... közötti vonatkozás a már ismert kollineáció perspektiv helyzetben; o_0 a koll. középpontja, M a tengelye és i_M meg az $a_0b_0c_0$ ... rendszer végtelenben levő pontjainak megfelelőit tartalmazó ellentengely. /Az oldalnézet mutat-



280.abra

ja, hogy abc ... és $a^cb^cc^c$ ... egy o csucsu gula két sikmetszete, a kollieneáció tengelye M, ellentengelye i_M. A forgáshurirányu párhuzamos vetitésnél a térbeli centr. kollineációból a változatlan $a^cb^cc^c$ ... és $a_0'b_0c_0$ ... közötti sikbeli centr. koll. lesz./

A leforgatott helyzet megszerkesztésénél felhasználhatók az egyes pontokon átmenő sikesévonalak is. A sik esésvonalainak iránypontja i_E. Az "a" ponton átmenő esésvonal centr. képe i_Ea^c, nyompontja m_E. A Π-be forgatott esésvonal m_E-ben M-re merőleges egyenes, s ezt az o_0a^c sugár a_0-ban metszi. b-n átmenő esésvonal képe i_Eb^c, nyompontja m_E' és $m_E'b_0$ merőleges M-re.

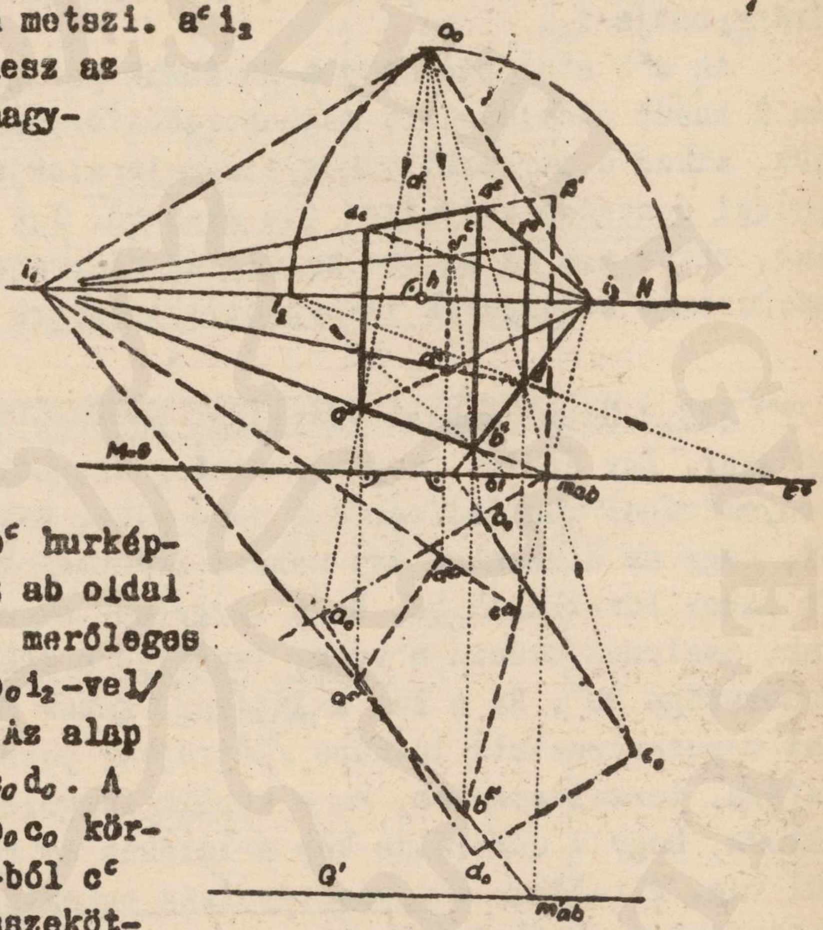
Az ab és bc oldalak szögének valódi nagysága az $a_0b_0c_0$ szög. Ezzel egyenlő az ab, illetve bc oldalakkal párhuzamos oi_{ab} és oi_{bc} iránysugarak szöge, amelynek valódi nagysága az i_M körül leforgatott $i_{ab}o_0i_{bc}$ szög.

Két egyenes szöge egyenlő az egyenesek iránysugarainak szögével, azaz azzal a szöggel, amelyet a szem és az egyenesek iránypontjait összekötő egyenesek bezárnak.

111./ Derékszögü hasáb szerkesztése. Süllyesztett persp. alaprajz. A vizszintes alapsik nyoma, alapvonala G, irányvonal H. Egy derékszögü hasáb e sikon levő alapjának egyik alapéle az adott ab /$a^c b^c$/; bc alapél, valamint az oldalélek hossza 1·5 ab. A főpont h, a szemtávolság d /281. ábra/.

Az ab-vel párhuzamos oi iránysugárnak H körüli leforgatott helyzete $i_1 o_0$, az erre o_0-ban állitott merőleges az ab-re merőleges oldalak iránysugarának leforgatottja, s ez H-t ezen oldalak i_2 iránypontjában metszi. $a^c i_2$ és $b^c i_2$ egyeneseken lesz az alapnégyszög 1·5 ab nagyságu két oldala.

Az alapnégyszög megszerkesztéséhez forgassuk az alapsikot G körül Π-be. $m_{ab} b_0 a_0$ párhuzamos $i_1 o_0$-al. Az a_0 pontot kimetszi az $o_0 a^c$ körhurkép, b_0 meg $o_0 b^c$ hurképpel nyerhető. $a_0 b_0$ az ab oldal valódi nagysága. $b_0 c_0$ merőleges $a_0 b_0$-ra /párhuzamos $o_0 i_2$-vel/ és egyenlő 1·5 $a_0 b_0$. Az alap valódi nagysága $a_0 b_0 c_0 d_0$. A visszaállitásnál az $o_0 c_0$ körhurkép kimetszi $b^c i_2$-ből c^c pontot, s ez i_1-el összekötve d^c csucsképet adja.



281. ábra

De eljárhatunk a következőkép: /A szerkesztés az ábrán nincs meg./ ab / $a^c b^c i_1$/ egyenesnek H-n levő t_1 osztás- mérőpontja i_1-től $i_1 o_0$ távolságra van. $i_1 a^c$ sugár G-t a^{++}-ben; $i_1 b^c$ sugár meg b^{++}-ben metszi. $a^{++} b^{++}$ az ab oldal valódi nagysága. Ez felmérendő $b^c i_2$-re.

/A $b^c i_2$ egyenes t_2 osztó- mérőpontja i_2-től $i_2 o_0$ távolságra van. $t_2 b^c$ sugárnak G-vel való b^+ metszésétől 1·5 $a_0 b_0$ hosszat felmérve, a nyert c^+ és t_2 összekötése $b^c i_2$-őt c^c-ben metszi. Megjegyezzük, hogy az alapnégyszöget G körül ellentétes értelemben is forgathatjuk a képsikba, amikor is $a_0b_0c_0d_0$ G fölé kerül, s ugyanakkor o_0 meg H alá jut. Kisebb lesz a helyszükséglet, de tömörebb az ábra./

Az a^cb^c... alapcsucsokon áthaladó függőlegeseken vannak a fedőlap csucsok. Az oldalél hosszának felméréséhez toljuk b^c csucs oldalélét a^cb^c irányban a képsikba, amikor is b^c az m_{ab}-be jut. $m_{ab}\beta' = 1{\cdot}5\ a_0b_0$. Az ab éllel párhuzamos $\beta\alpha$ fedőél iránypontja i_1 és igy $\beta' i_1$ kimetszi β^c és α^c csucsképeket. Az $\alpha\delta$ és $\beta\gamma$ iránypontja i_2.

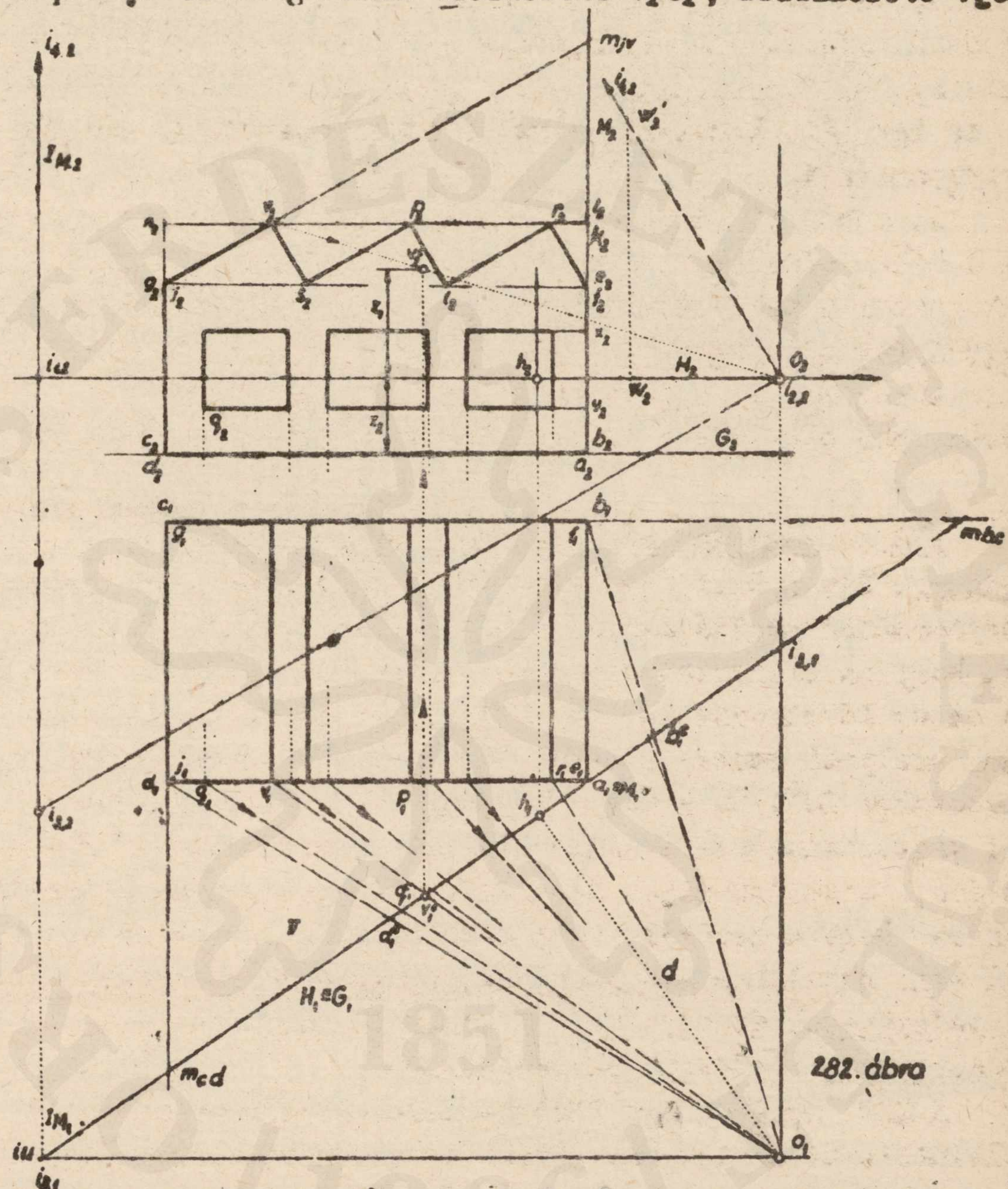
Az $a^cb^cc^cd^c$ négyszög a hasábnak perspektivikus alaprajza. Ha a hasáb oldaléleinek meghosszabbitásával az alapsikot süllyesztjük, akkor a perspektivikus alaprajz alakja más lesz ugyan, de valódi nagysága változást nem szenved. Igy, ha G alapvonal G'-be jut, akkor m_{ab} az m_{ab}'-be kerül, az alaprajz $a^{c'}b^{c'}c^{c'}d^{c'}$ lesz, s a párhuzamos oldalpárok iránypontja továbbra is i_1 illetve i_2.

112./ Üzemi épület látrajza, perspektivája. Pont-egyenes módszer. Egy épület, egy vizszintes alapsikon álló alakzat összbenyomásának megitélésénél a néző olyan távolságra helyezkedik el, hogy az alakzatot egy nézési iránynál teljesen áttekinthesse. Ez akkor következik be, ha a tárgy egy olyan forgáskupon belül van, amelynek csucsa a szem, tengelye a főnézési irány, a félcsucsszöge 30°. Ez a kup a látókup. Ennek megfelelően a téralakzat megszerkesztett látképe /látrajza, perspektivája/ kedvező hatásu, torzulásmentes, ha a képsik függőleges és a szemtávolság akkora, hogy a centrális kép a látókup és képsik metszéskörén belül van. Altalában a d szemtávolság egyenlő a látókup és képsik metszéskörének átmérőjével. A szemlélő szemmagassága, a vetités középpontja, rendesen embermagasság.

A 282. ábrában egy fürész-/sed-/ fedelü üzemi épület elől-felülnézettel adott. Az előzők figyelembevételével legyen az o szem felülnézete o_1, amikor is az o_1d_1 és o_1b_1 sugarak közötti szög kisebb 60°-nál. Az o_2 az alapsik felett embermagasságban van. A függőleges Π képsik általában közel merőleges a legszélső o_1d_1 és o_1b_1 sugarak szögfelezőjére. Az ábrán Π áthalad az ae élen. Az alapsik és Π képsik metszőegyenesének a G alapvonalnak G_1 első képe Π-be esik, elölnézete G_2. Az o-ból Π-re merőleges fősugár Π képsikot h főpontban döfi. Felülnézete h_1; elölnézete h_2. Az o_2 és h_2 összekötése H horizont H_2 elölnézete, felülnézete H_1.

Π-be esik. o_1h_1 a szemtávolság d. A főponton átmenő fővertikális felülnézete h_1-be esik.

Az alakzat egy-egy pontjának központi képe az a pont, amelyben a pontot a szemmel összekötő látósugár Π képsikot döfi. Igy a fedél v pontja látósugarának elölnézete v_2o_2, felülnézete v_1o_1,



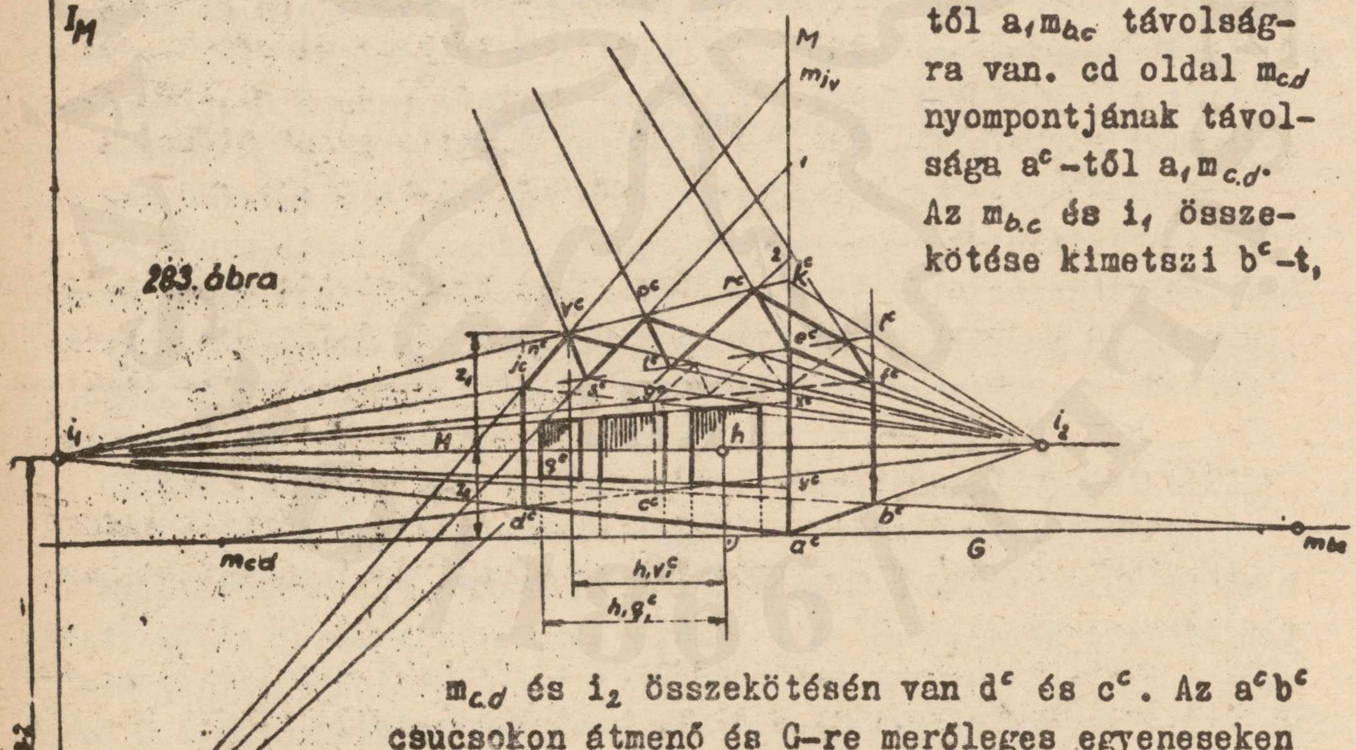
282. ábra

s ez az első vetitő Π képsikot a v^c központi kép v_1^c első képében metszi. Rendezővel o_2v_2-ön v_2^c. Hogy az ily módon megszerkesztett pontképek összekötése által a látképet valódi nagyságában nyerjük, fektessük Π képsikot ugy a papir sikjára, hogy a H horizont vizszintes legyen /283. ábra/. Ezen kijelölt h főponton át rajzoljuk meg a függőleges fővertikálist. H-val párhuzamos G alapvonal egymástóli távolsága egyenlő H_2 és G_2 távolságával. A v pont v^c képének kijelöléséhez a felülnézetből vett $h_1v_1^c$ távolságot mérjük a fővertikálistól kezdve G alapvonalra /283. ábra/, s a végpontban az alapvonalra állitott merőlegesre mérjük reá H-tól kezdve az elölnézetből vett z_1-et, vagy G-től kezdve $z_1 + z_2$ távolságot. A végpont v^c.

Ezzel a pontmódszerrel a képszerkesztés hosszadalmas. Hamarább jutunk célhoz az egyenes-módszerrel, amikor is az alakzat egyeneseinek szerkesztjük meg a központi képét annak figyelembevételével, hogy ezt a képet a nyompont és iránypont határozzák meg.

Ugy az ad, valamint az ezzel párhuzamos vizszintes élek iránypontja /282. ábra/ az o-ból ad-vel párhuzamos iránysugárnak a Π képsikkal való döféspontja. Ez a H-n levő i_1 /$i_{1,1}$ $i_{1,2}$/. Az $i_{1,1} h_1$ távolságot a 283. ábrán h-tól H-ra felmérve, i_1 iránypontot kapjuk. Az ad nyompontja "a" csucs, s ez egyben a^c is. Távolsága a fővertikálistól egyenlő $h_1 a_1$. Az $a^c i_1$ egyenesen lesz d^c is.

Az ab éllel párhuzamosak iránypontja H-n levő i_2, amikor is $hi_2 = h_1 i_{2,1}$ a 282. ábrából. $a^c i_2$ egyenesen lesz b^c is. bc oldal $m_{b.c}$ nyompontja G alapvonalon van és a^c-től $a_1 m_{b.c}$ távolságra van. cd oldal $m_{c.d}$ nyompontjának távolsága a^c-től $a_1 m_{c.d}$. Az $m_{b.c}$ és i_1 összekötése kimetszi b^c-t,



283. ábra

$m_{c.d}$ és i_2 összekötésén van d^c és c^c. Az $a^c b^c$ csucsokon átmenő és G-re merőleges egyeneseken vannak az épület sarokélei. Az ae sarokél a képsikban van, s igy $a^c e^c = a_2 e_2$ az elölnézetből. e^c és i_1, valamint i_2 felhasználásával megrajzolható $e^c f^c g^c j^c$ négyszög, amelyen az s és t pontokon átmenő vápaélek képei lesznek. A v, p, r pontokon átmenő vizszintes tetőélek sikja az efgj sik felett az előlnézetben lemérhető e_2k_2 távolságra van; $e^c k^c = e_2 k_2$. Az igy nyert k^c alapján i_1 és i_2 felhasználásával megrajzolható v, p, r csucsokon átmenő vizszintes tetőélek sikjának központi képe.

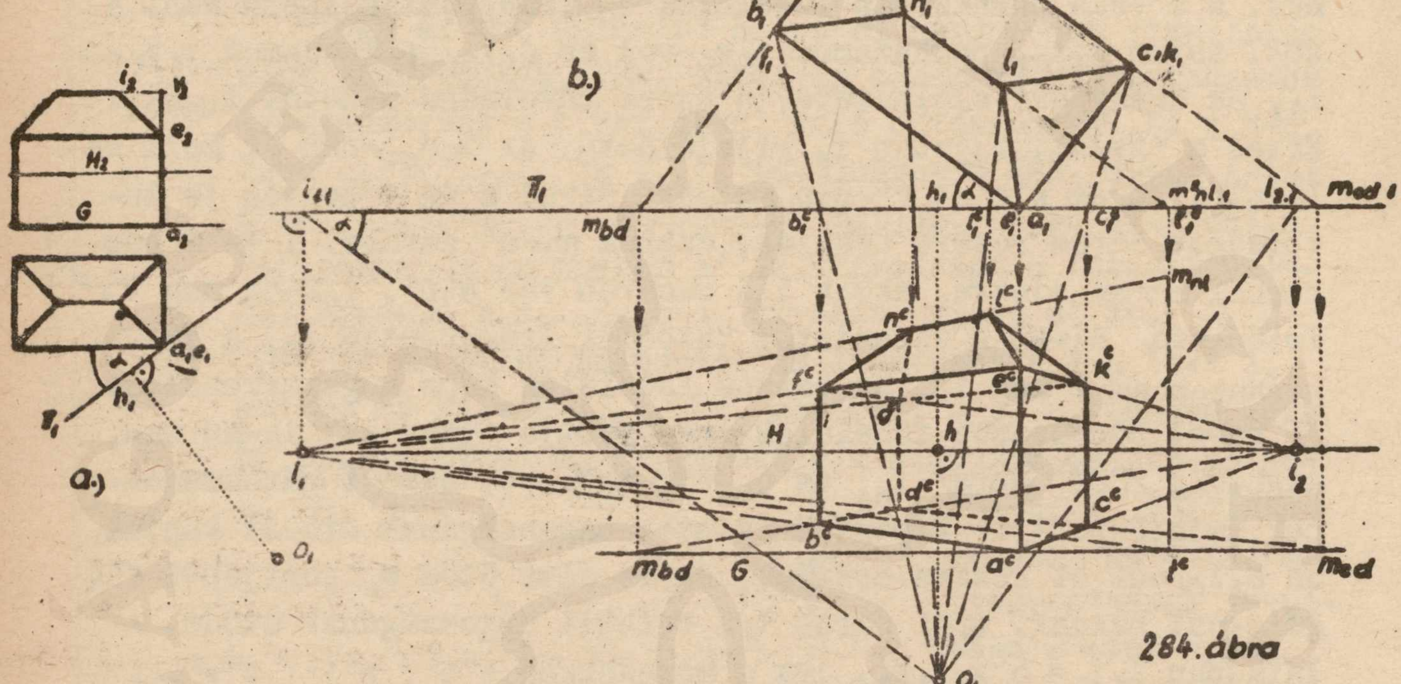
Az épület homloksikjának M nyomvonala $a^c e^c$; irányvonala /egyben a hátsó falsiké is/ az i_1 iránypopton átmenő M-el párhuzamos I_M/lásd 282. ábrát is/. A homloksikon levő jv élnek az M-en levő m_{jv} nyompontja e-től $e_2 m_{jv} = e^c m_{jv}$ távolságra van. jv-nek, s a vele párhuzamos fedélélek i_3 iránypontja I_M-en van. A 282. ábrán $o_2 i_{3.2}$ párhuzamos $j_2 v_2$-vel és $o_1 i_{3.1}$ párhuzamos $j_1 v_1$-el. $i_{3.2}$ az iránypont előlnézete, s ennek távolsága a H-tól $i_{1.2} i_{3.2}$. Ezzel a távlati rajzban i_3 kijelölhető. Az $i_3 m_{jv}$-nek át kell haladni j^c-n és $k^c n^c$-t v^c-ben metszi. Mivel s és t pontok je távolságot három részre osztják, osszuk $m_{jv} e^c$ darabot 1 és 2 pontokkal három részre, akkor $i_3 1$ sugáron van $s^c p^c$, $i_3 2$-őn meg $t^c r^c$ tetőélkép. Mivel a vizszintes tetőélek iránypontja i_2, a jv-vel párhuzamosaké meg i_3, az összes fedélélek képe megszerkeszthető. /A vs-el párhuzamos fedélélek iránypontja ugyancsak I_M-en van, mégpedig /282. ábra/ $i_{M.2}$ és o_2-ből $v_2 s_2$-vel huzott párhuzamosnak metszéspontja. E pont H feletti magasságának ötödét kapjuk, ha $o_2 i_{1.2}$-őt öt részre osztjuk, és az első ötöd w_2 pontjából függőlegest huzunk. $w_2 w_2'$ darab i_4 H feletti magasságának ötöde. A látképen $i_1 i_4^H = 5 \times w_2 w_2'$. Igy a meredekebb $v^c s^c$; $p^c t^c$; $r^c e^c$... fedélélek i_4-en haladnak át./

Az ablakok felső és alsó éleinek meghosszabbitása a képsikban levő ae sarokélt x és y-ban metszik. $a^c y^c = a_2 y_2$; $y^c x^c = y_2 x_2$. iránypont i_1. Az ablaksarkokat pontmódszerrel kaptuk. Pl. /282. ábra/ q_2-nek megfelelő q_1 és o_1 összekötése kimetszi q_1^c-et. Ezt ösmert módon visszük át a látképbe.

Az előbbiben megismert metszési módszernél a mérések számát csökkenthetjük, ha az alaprajzot a perspektivával közvetlen kapcsolatba hozzuk.

A megadott nézeti képek alapján, az általános elvek figyelembevételével megállapitjuk a szem, a képsik és képhorizont helyét. /284. ábra a./ A képsik áthalad ae sarokélen és a ház homlokfalával α szöget alkot. A nézeti alaprajzot ugy rajzoljuk meg, /b. ábra/ hogy a képsik Π_1 képe a horizontvonallal párhuzamos legyen, azaz a rajzsin élére essen. /Az ábrán az alaprajz a megadottnak kétszerese./ Esetleg a nézeti képek rajzlapját helyezzük igy el. Kijelöljük h_1 és o_1 pontokat, amikor is b./ ábrán $a_1h_1 = 2 \times a_1h_1$ az a./ ábrán és h_1o_1 is kétszerese az a./ ábrabeli h_1o_1-nek. Megrajzoljuk tetszőleges helyen a képhorizontot, valamint a G alapvonalat. /A szemmagasság mintegy 3·5/. o_1h_1 metszése H-val h főpont.

A vizszintes ab, cd ... élek iránypontjának első képe az az i_{11} pont, amelyben o_1-ből a_1b_1-el pár-



284.ábra

huzamosan huzott iránysugár Π_1-et metszi. i_1 iránypont H-n h-tól h_1i_{11} távolságra van, azaz i_{11}-ben Π_1-re /H-ra/ állitott merőleges H-t i_1-ben metszi. Hasonlóan i_2 a vizszintes és egymással párhuzamos ac, bd ... élek iránypontja.

Az a csucs centr. képe az alapvonalon a^c. Az ab él képe a^ci_1 egyenesen van. Az o_1b_1 sugár Π_1-et b csucs b^c első képében b_1^c-ben metszi. b_1^c-ből H-ra merőleges a^ci_1-et b^c-ben találja o_1c_1 és Π_1-nek c_1^c metszését a fővertikális irányában a^ci_2-re vetitve, c^c csucsképet kapjuk. c^ci_1 és b^ci_2 metszéspontja d^c csucskép. m_{bd} és m_{cd} nyompontok az $a^cb^cd^cc^c$ megrajzolásánál ellenőrzésül felhasználhatók.

Az ae él a képsikban van, igy a^ce^c kétszerese az a./ ábrából vett a_2e_2-nek. e^c-vel megrajzolható $e^ch^cg^cf^c$ négyszög; iránypontok i_1 és i_2.

Az nl tetőél m_{nl} nyompontjának felülnézete m_{ln_1}. Az m_{nl} nyompontnak az alapsik feletti magassága $t^cm_{nl} = 2 \times a_2v_2$ az a./ ábrából. $i_1 m_{nl}$ egyenesen van n^c és 1^c. Az $o_1 1_1$ sugár Π_1-et 1_1^c-ban metszi, ezt H-ra merőlegesen m_{nl} i_1-re vetitve 1^c csucsot kapjuk. Hasonlóan kapjuk n^c fedéltaréjcsucsot.

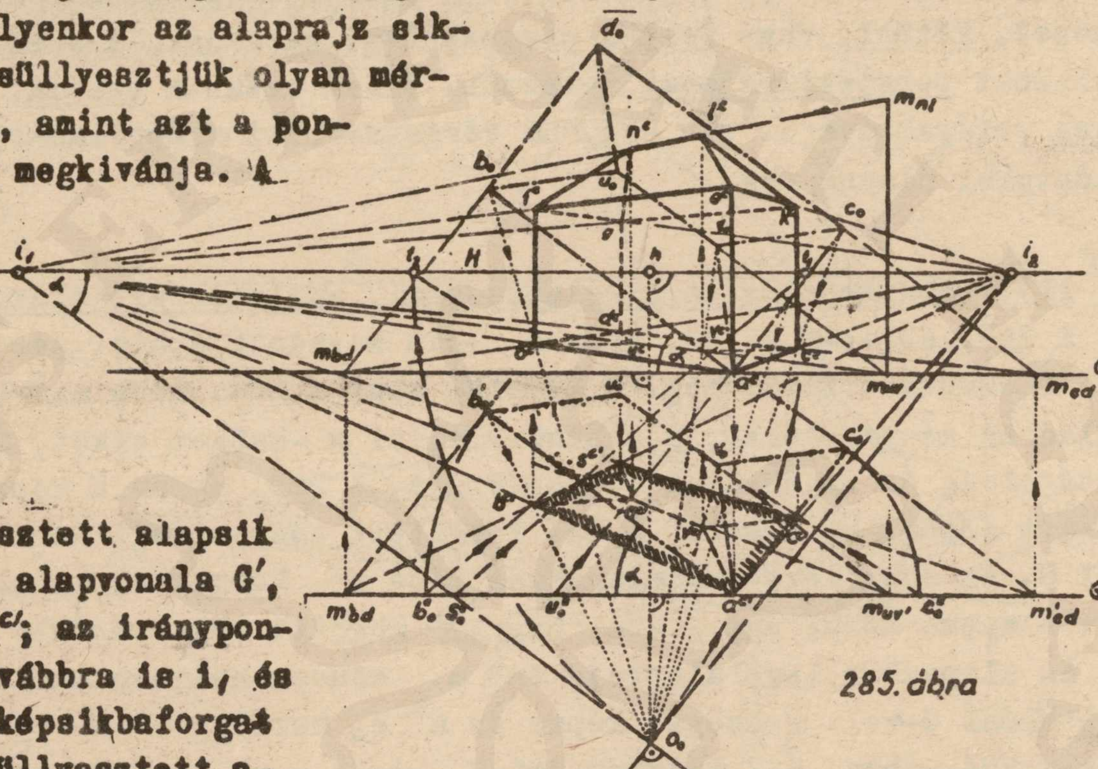
Ebben a pontban egy alapsikon álló, nézeteivel megadott téralakzatnak központi képét szerkesztettük meg. A 281. ábrában az alapsikon álló hasáb alakját szóval adtuk meg. Mindezen esetekben a központi kép szerkesztésénél az alapsikon levő felülnézetet használtuk fel. Ha ilyen adottság esetén szerkesztünk központi képet, kötött, vagy festői perspektivát müvelünk, s a képet az alakzat perspektivájának nevezzük. Ezzel szemben szabad, független perspektiváról van szó, ha térgeometriai alapfeladatokat, feladatokat oldunk meg.

113./ Szerkesztés pers. alaprajzzal, süllyesztett alaprajzzal. A 285. ábrában a 284. ábra a./-ban megadott épület perspektiváját szerkesztettük meg. A képsik, mint a 284. ábra a./-ban, áthalad az ae sarokélen, s a homlokfallal α-szöget alkot, a szemtávolság és magasság is ugyanakkora. A 285. ábrán H képhorizonton a főpont h, H körül Π-be forgatott centrum o_0. Az alapvonal G. Az ezen levő "a" alapcsucs képe a^c. Forgassuk az alapsikot G nyoma körül ugy Π-be, hogy Π mögötti része G fölé jusson. Az alapsikon levő alaprajz "a" a csucsa helyben maradó, az $a^c b_0$ oldal G-vel α szöget képez és $a^c o_0$ merőleges $a^c b_0$-ra. A méretek a 284. ábra a./ kétszeresei.

o_0-ból $a^c b_0$-al párhuzamosan huzott és H-val ugyancsak α szöget alkotó iránysugár H-t az ab; cd ... egyenesek i_1 iránypontjában metszi. $o_0 i_2$ párhuzamos $a^c o_0^c$-val /merőleges $o_0 i_1$-re/. i_2 az ac és bd iránypontja. Az o_0 az alapsik pontjai forgáshurjainak iránypontja lévén; $o_0 b_0$ hurkép $a^c i_1$-et b^c-ben, $o_0 c_0$ meg $a^c i_2$-t e^c-ben metszi. Az $m_{c.d}$ nyompont és i_1 összekötése áthalad c^c-n, az $m_{b.d}$ és i_2 meg b^c-n és a két egyenes d^c-ben metszi egymást. Az alapsikon feltételezett uv-nek nyompontja m_{uv}, iránypontja i_1. Az $m_{u.v} i_1$-ből $o_0 v_0$ kimetszi v^c-t, $o_0 u_0$ meg u^c pontot. Ezzel a perspektivikus alaprajzot megszerkesztettük.

$a^c e^c$ egyenlő $2 \times a_2 e_2$; ezzel $e^c f^c g^c k^c$ rajzolható. Ha az 1 fedélcsucsnak az alapsik feletti lv magasságát $i_1 v$ irányban Π-be toljuk, akkor v talppont $m_{U.V}$-be 1 meg m_{nl} nyompontba jut és $m_{uv} m_{nl}$ egyenlő a nl taréjnak az alapsik feletti magasságával. Ez a nézeti képből lemérhető. A persp. alaprajz v^c, illetve u^c pontjaiból huzott függőlegesek m_{nl} i_1 egyenest l^c, illetve n^c pontokban metszik.

A szemmagasság csökkentésével H és G egymástól való távolsága kisebbedik, a perspektivikus alaprajz megkeskenyedik, az oldalak metszési szöge igen kicsi, a metszéspontok bizonytalanok. A rajz a képsikra forgatott alaprajz miatt tulzsufolt lehet. Ilyenkor az alaprajz sikját lesüllyesztjük olyan mértékben, amint azt a pontosság megkivánja. A



285. ábra

süllyesztett alapsik nyom-, alapvonala G', ezen $a^{c'}$; az iránypontok továbbra is i_1 és i_2. A képsikbaforgatott süllyesztett alaprajz $a^{c'}b'_0c'_0u'_0v'_0$, amikor is $a^{c'}b'_0$ párhuzamos o_0i_1-el. A süllyesztett persp. alaprajz $a^{c'}b^{c'}c^{c'}d^{c'}$ ... határvonalai vonalkázással vannak kiemelve. Eppen ugy szerkeszthető, mint az eredeti persp. alaprajz, tehát b'_0o_0 kimetszi $a^{c'}i_1$-ből $b^{c'}$-et és $m'_{b.d}$ nyompont és i_2 összekötése $b^{c'}$-ön halad át, stb. Az igy megszerkesztett süllyesztett alaprajz csucsait, segédpontjait függőleges irányban átvisszük az eredeti alapsikra. Igy m'_{bd} nyompont m_{bd}-be jut. m_{bd} és i_2 összekötését $b^{c'}$ és $d^{c'}$-ből huzott függőleges b^c, illetve d^c-ben metszi. $m_{uv'}$ nyompont G-re m_{uv}-be jut, ezen átmenő függőlegesen van m_{nl} nyompont. A $v^{c'}$, illetve $u^{c'}$ süllyesztett pontokból huzott függőlegesek m_{nl} i_1-et l^c és n^c csucsokban metszik, stb.

A perspektivikus alaprajzok a képsikba forgatott alaprajz nélkül is megszerkeszthetők. Pl. a süllyesztett persp. alaprajz megszerkesztéséhez a^ci_1-re felmérendő az $a^cb'_0$ oldallal egyenlő darab. A felmérést az $a^{c'}i_1$ egyenes osztópontjának felhasználásával végezhetjük el. A H-n levő t_1 osztópont i_1-től i_1o_0 távolsága ra van. $i_1 t_1 = i_1 o_0$. A G'-re $a^{c'}$-től b_0''-ig felmért darab egyenlő $a^{c'}b_0'$-el, illetve a 283. ábra a./-ból vett élhossz kétszeresével. $t_1 b_0''$ kimetszi $a^{c'}i_1$-ből $b^{c'}$ csucsot. Az ac oldalegyenes t_2 osztáspontja i_2-től $i_2 o_0$ távolságra van. $a^{c'}c_0''$ egyenlő ac valódi hosszával a 283. ábra a./-ból. $t_2 c_0''$ kimetszi $a^{c'}i_2$-ből $c^{c'}$ csucsképet. $b^{c'}i_2$ és $c^{c'}i_1$ metszése $d^{c'}$. Az $i_1 d^{c'} c^{c'}$ meghosszabbitása G'-et $m_{c,d'}$-ben metszi. $m_{uv'}$ felezi $a^{c'}m_{c.d'}$ távolságot, s igy $i_1 m_{v'}$ összekötése ugy $a^{c'}c^{c'}$ mint $b^{c'}d^{c'}$ távolságok felezési pontjain halad át. Ezen van $u^{c'}$ és $v^{c'}$. A $b^{c'}d^{c'}$ felezési pontjának képe $s^{c'}$. Az u pont távolsága s-től akkora, mint bd-nek fele. A felméréshez: $t_1 s^c$ sugár G'-et s_0''-ban metszi, $s_0 u_0'' = \frac{bd}{2}$ alapél a 283. ábra a./-ból. $u_0'' t_1$ sugár kimetszi $u^{c'}$ pontot. Hasonlóan kapjuk $v^{c'}$ pontot is meg.

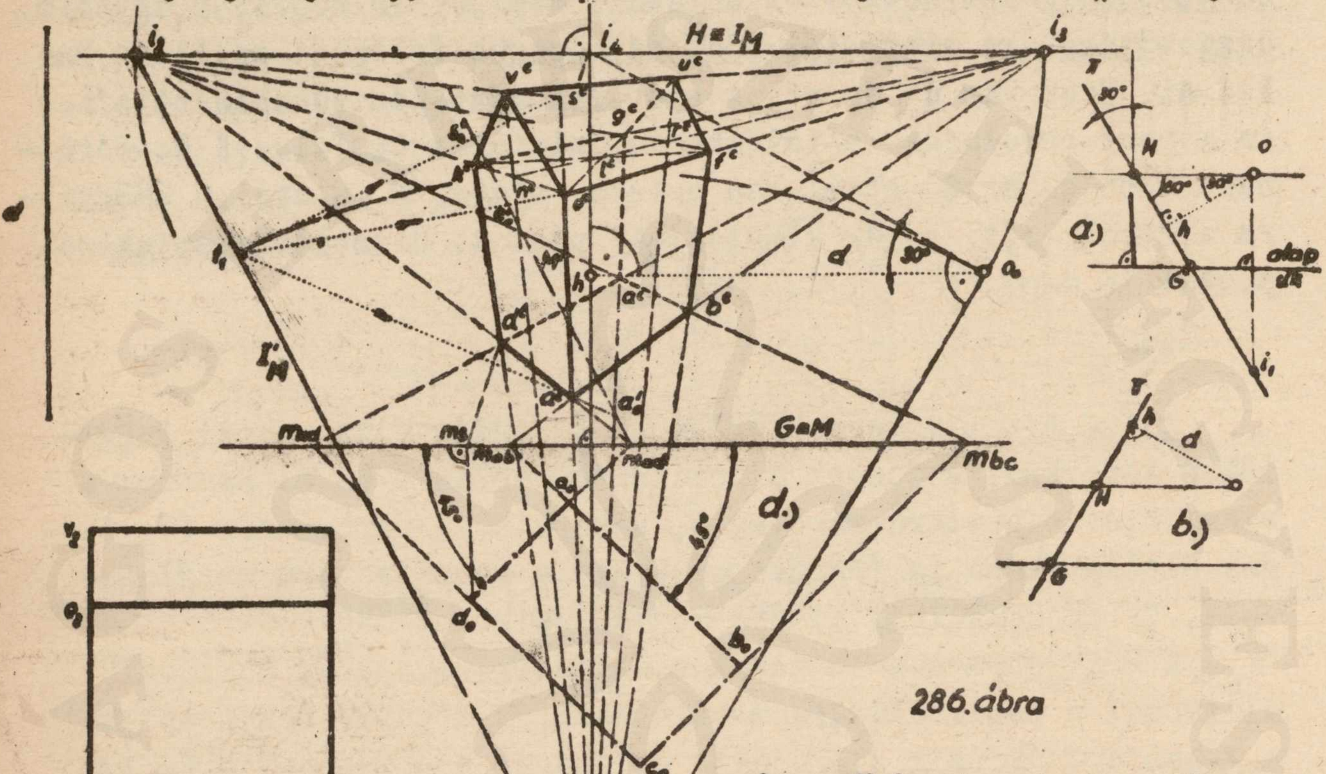
<u>114./ Látrajz ferde képsikon</u>. Az eddig alkalmazott függőleges képsiknál a főpont a horizonton volt, s az alakzatnak a vizszintes alapsikra merőleges, a képsikkal párhuzamos függőleges éleinek képe is függőleges, vagyis a horizontra merőleges volt. Ferde képsiknál mindez megváltozik.

A 286. ábra a./ és b./-ben a képsik, alapsik, horizont, alapvonal a papir sikjára merőlegesek, o a papir sikjában van. a./-ban a Π képsik előredőlt, a fősugár h döféspontja, a főpont a H horizont alatt van, a függőleges egyenesek i_1 iránypontja is a horizont alatt a végesben, ezek centrális képe lefelé összefut. b./-ben a képsik hátradőlt, igy a főpont, mint a függőlegesek i_1 iránypontja a horizont felett van. Ilyen kép keletkezik a szemben, ha magas álláspontból lefelé irányitott szemtengellyel, illetve alacsony álláspontból fölfelé irányitott szemtengellyel szemlélünk álló épitményeket. Ilyen képet rajzol a fényképezőgép lencséje, ha a lemez sikja előre, illetve hátradőlt.

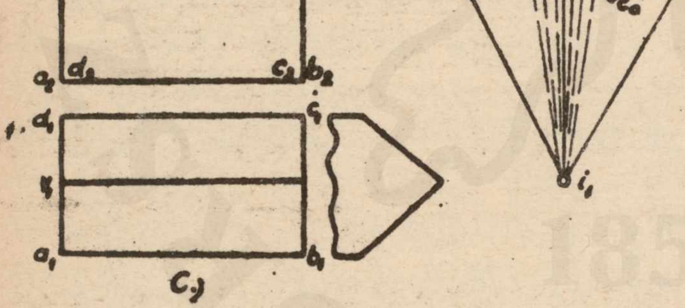
A perspektiva szerkesztéséhez a ferde helyzetü képsikot ismét a rajz sikjára helyezve képzeljük.

Szerkesszük meg a 286. ábra c./-ben sematikusan megadott objektum perspektiváját. A d./ ábrában adott az alapsik $G \equiv M$ alapvonala, nyoma, h főpont, d szemtávolság, az alapvonalhoz legközelebbi "a" alapcsucs a^c képe, a képsik a függőleges sikkal 30^0-os szöget alkot. Az alapélek G alapvonallal 45^0-os szöget zárjanak be.

A h főponton áthaladó fővertikális merőleges G-re. A fővertikálisnak a papir sikjára merőleges vetitősikja az alapsik iránysikját ennek az o-n átmenő esésvonalában metszi. E vetitősik ledöntésénél a szem o_0-ba jut, amikor ho_0= d. Az iránysik esésvonala, az a./ ábra szerint a képsikkal 60, az oh fősugárral 30°-ot zár be, s igy ledöntött helyzete o_0i_4. Az iránysik esésvonalának nyompontja i_4, ezen áthalad a G-vel párhuzamos I_H irányvo-



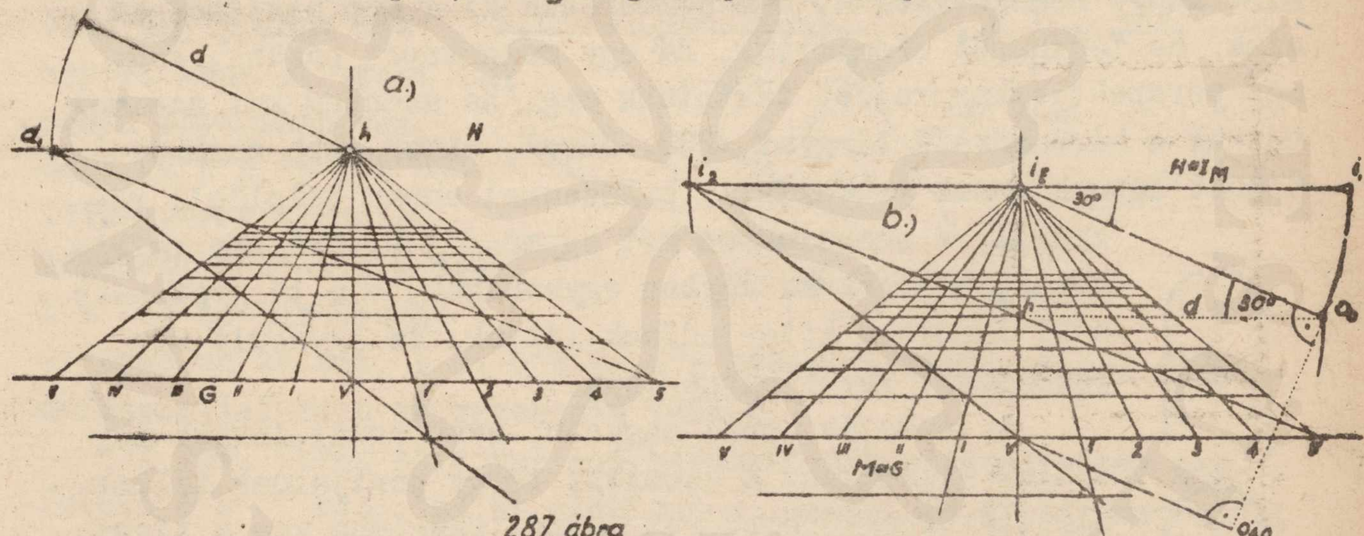
286.ábra



nal, a H horizont. Az o-ban az iránysikra merőleges egyenes i_1 nyompontja az alapsikra merőleges egyenesek iránypontja. A ledöntésben o_0i_1 merőleges i_4o_0-ra.

G alapvonallal 45°-os szöget bezáró alapsikbeli egyeneseknek H-n levő i_2 és i_3 iránypontja i_4-től ugyanakkora távolságra vannak, mint o szem, azaz i_4o_0 távolságra. ad él képe a^ci_2 egyenesen van, nyompontja m_{ad}, az ab él képe a^ci_3 egyenesen van, nyompontja m_{ab}. Mindkét egyenesnek G körül $\overline{\mathrm{II}}$-be forgatott helyzete a nyompontokból indul ki és G-vel 45°-ot zár be. Metszéspontjuk a_0. A c./ ábrából vett méretekkel megrajzolható $a_0b_0c_0d_0$ alap. $m_{ac}i_2$ és $m_{cd}i_3$ visszaállitott egyenesek kimetszik b^c, d^c és c^c csucsképeket. Ellenőrzésül az alapsiknak d csucsán átmenő esésvonalának képsikbaforgatott helyzete a G-re merőleges d_0m_5, nyompontja m_5, iránypontja i_4, igy m_5i_4 esésvonalkép $m_{co}i_5$-at d^c-ben metszi, stb.

A sarokélek képei az i_1a^c; i_1b^c... egyeneseken vannak. Mérjük a sarokéleknek c./ ábrából vett a_2e_2 hosszát i_1a^c-re osztópontjának felhasználásával. Az ad élen átmenő falsik $i_{M'}$ irányvonala i_1i_2, mert ae él iránypontja i_1, az ad élé meg i_2. Az ezzel párhuzamos M′ nyomvonalának egyik pontja ad-nek m_{ad} nyompontja. Az ae élnek az i_1i_2-ön levő t_1 osztó-mérőpont távolsága i_1-től egyenlő oi_1 távolsággal, vagyis i_1c_0. t_1a^c sugár M′-et a_0'-ban metszi. $a_0'e_0' = a_2e_2$. A t_1e_0 sugár kimetszi e^c csucsot. Ezzel $e^cf^cg^ck^c$ megrajzolható; átlóinak h^c metszése és i_3 összekötése e^ck^c oldalt z^c-ben, f^cg^c-t meg r^c-ben metszi. i_1n^c egyenesen lesz v^c tetőcsucs, az i_1r^c egyenesen meg u^c. Mérjük fel az ae-re e-től a tetőélnek az efgk ereszsik feletti e_2v_2-vel egyenlő magasságát. Akkor M′-ön $e_0's_0' = e_2v_2$ és $s_0't_1$ kimetszi s^c pontot. s^ci_2 kimetszi v^c csucsképet, v^ci_3 meg u^c pontot adja.



287. ábra

115./ Vizszintes négyzethálózat szerkesztés. A 287. ábra az alkalmazásban előforduló vizszintes siku négyzethálózat szerkesztést mutat. a./-ban a képsik függőleges; a G alapvonalon levő v.1; 1.2 ... ; v.1; 1.11 ... négyzetoldalak hossza egyenlő a valódi nagysággal. Az ezekre és a képsikra merőleges, vizszintes oldalak az u. n. mélységi vonalak iránypontja h főpont. A képsikhoz 45°-kal hajló átlók iránypontjai a distancpontok. Egy négyzetátló 5.d₁, s ez a mélységi vonalakat a négyzetek csucsaiban metszi, amelyeken át megrajzolhatók az alapvonallal párhuzamos négyzetoldalakat tartalmazó u.n. szélességi vonalak. Az alapvonal előtti szélességi vonalat egy másik átló megrajzolásával kaphatunk.

A b./ ábrában a fősugár a vizszintessel 30^o-ot zár be, a képsik 30^o-al előredőlt. A szemtávolság és szemmagasság ugyanakkora, mint a./-ban. A függőleges fősikban levő fősugár Π-be fektetett helyzete ho_0, ezzel a vizszintes látósugár 30^o-ot alkot és a fővertikálist az alapsik $I_M \equiv H$ irányvonalának i_E pontjában metszi. Az $i_E o_0$-ra merőlegesen felmért $o_0 o_{10}$ az a./ ábrából vett szemmagasság, az erre merőleges a fővertikálist az alapsik $M \equiv G$ nyomának, a alapvonalnak v pontjában metszi.

Az M alapvonalra merőleges mélységi vonalak iránypontja i_E. Az alapvonalhoz 45^o-al hajló átlók iránysugarának nyompontjai meg i_1 és i_2 /$i_1 i_E = i_2 i_E = i_E o_0$/. Ezzel a négyzetháló megrajzolható.

116./ Sztereoszkopikus, térhatásu képek. Ha a tárgyat egy szemmel nézzük, akkor a szemben keletkező kép nem térhatásu, nem háromirányu kiterjedésünek mutatja a tárgyat, épen ugy nem, mint ahogy nem emelkedik, nem domborodik ki a kép sikjából az alak, ha fényképét szemléljük, ha egy mozgóképet nézünk, vagy egy perspektivikus rajzot tekintünk meg. Ha azonban két szemmel nézzük a háromméretü tárgyat /288. ábra/, akkor jobb szemmel többet látunk annak jobboldali, balszemmel annak baloldali részéből, a szemeinkben két egymástól eltérő kép keletkezik, amelyek az agyban egyesülnek, s a tárgyat mélységi irányban kiterjedőnek látjuk. Az egyesült kép térhatásu, sztereoszkopikus.

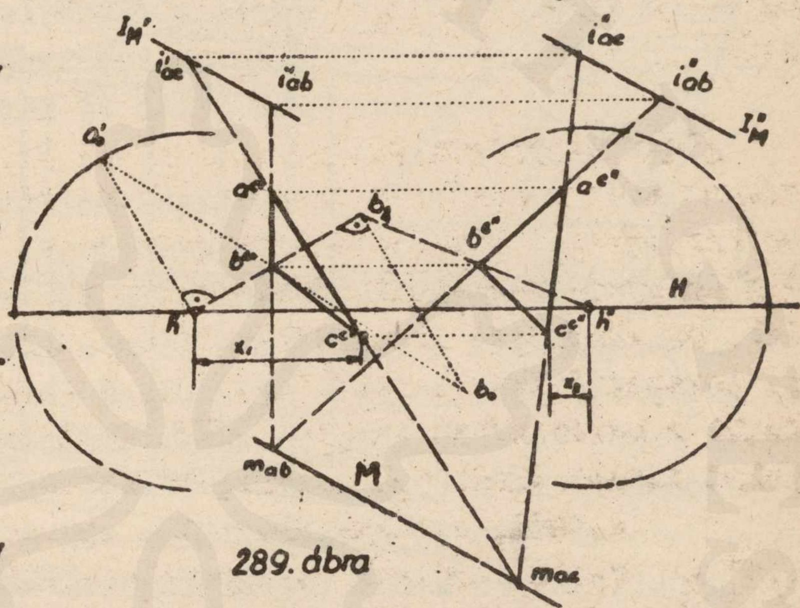
288. ábra

A térhatás annál nagyobb, azaz annál inkább meg tudjuk állapitani a szemlélt tárgy pontjainak tőlünk mért távolságkülömbségét, minél közelebb van a tárgy, vagyis minél nagyobb a szemben keletkezett képek különbözősége. A távolság növekedésével a képek különbözősége annyira csökken, hogy az agyban egyesitett kép már nem térhatásu, a pontok mélységi külömbsége már nem érzékelhető.

Térhatásu képpárt kapunk, ha a két szemmel való nézés folyamatát leegyszerüsitve, az alakzatot olyan két középpontból vetitjük egyazon képsikra, amelyek a képsiknak ugyanazon oldalán, attól egyenlő távolságra vannak. Ez az ábrázolás a sztereoszkopikus projekció. Ilyen képpárt kapunk akkor is, ha két azonos szerkezetü, párhuzamos optikai tengelyü fényképezőgéppel felvételt készitünk. /Ez megfelel a messzetekintő szempárnak, amikor is a szemtengelyek párhuzamosak./

Ha a sztereografikus képek vetitési középpontjainak távolsága egyenlő a pupillák távolságával, átlagosan 65 mm, s a képeket ugy szemléljük, hogy a jobboldai képet csak a jobb, a baloldalit csak a bal szem lássa, térhatásu kép képződik az agyban. fokozható a térhatás a sztereoszkóp készülékkel, mert ez a képtávolságot csökkenti.

A 289. ábrában H képhorizonton h′ és h″ a két főpont, a distancok egyenlők.



289. ábra

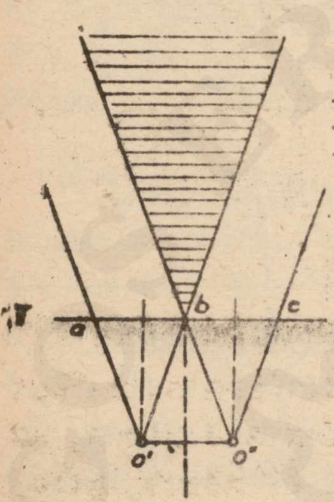
Egy egyenesnek egy nyompontja van, de a két centrumnak megfelelően két iránysugara, s igy két iránypontja van. Egy p pont két centr. képe horizont irányu egyenesen van, mert az o′p és o″p vetitősugarak sikja $\overline{\Pi}$ képsikot o′o″-el, s igy h′h″-el is párhuzamos egyenesben metszi, s az o′p és o″p látósugaraknak $\overline{\Pi}$-vel való döféspontjai ezen az egyenesen vannak.

A 289. ábrán adva van abc háromszögnek o′ centrumnak megfelelő $a^{c'}b^{c'}c^{c'}$ képe, az ab oldalnak m_{ab} nyom- és i'_{ab} iránypontja, valamint i'_{ac} iránypont, Megszerkesztendő az o″ centrumnak megfelelő kép, valamint b pont merőleges vetülete $\overline{\Pi}$ képsikon és távolsága $\overline{\Pi}$-től.

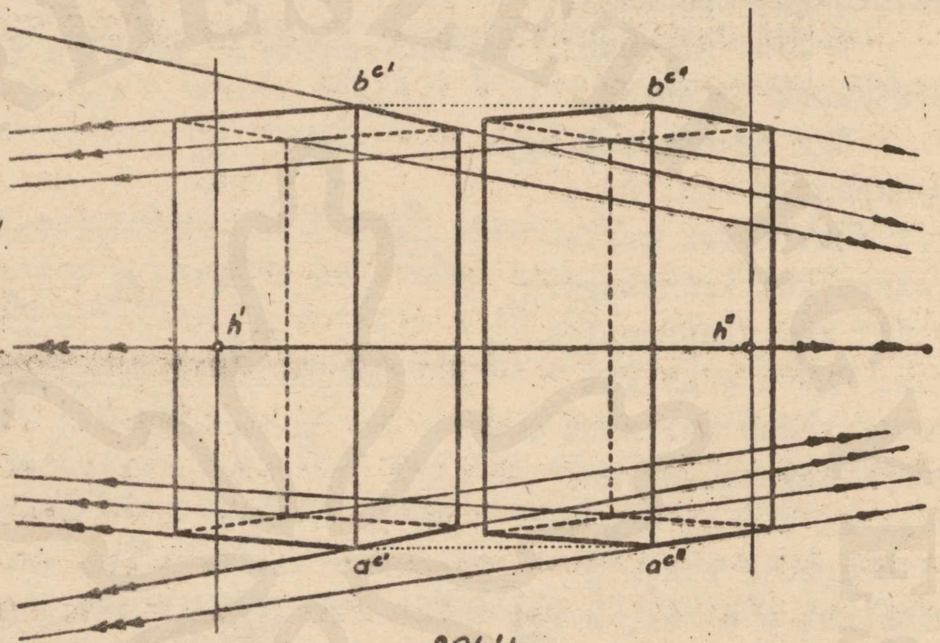
Az abc háromszög sikjának M nyoma áthalad m_{ab} nyomponton és párhuzamos az $i'_{ab}i'_{ac} \equiv I_{M'}$ irányvonallal. Ezen van ac oldal m_{ac} nyompontja. Az ab oldalnak o″ centrumra vonatkozó i''_{ab} iránypontja i'_{ab}-től h′h″ távolságra van, mert az o′i'_{ab} és o″i''_{ab} iránysugarak egymással párhuzamosak, s a distancok is egyenlők. Igy m_{ab} és i''_{ab} összekötése az ab egyenes centr. képe az o′-ből való vetitésnél és $a^{c'}a^{c''}$, valamint $b^{c'}b^{c''}$ párhuzamos a horizonttal. $a^{c''}$ és m_{ac} összekötésén van $c^{c''}$ és $c^{c'}c^{c''}$ ugyancsak párhuzamos H-val.

A háromszög sikjának o″-re vonatkozó $I_{M''}$ irányvonala i''_{ab}-n halad át és párhuzamos M, illetve I'_N-el. Ez $c^{c''}a^{c''}$ meghosszabbitása $i''_{a.c}$ iránypontban metszi. Es $i'_{a.c}$ és $i''_{a.c}$ összekötése ugyancsak párhuzamos és egyenlő $h'h''$-el.

A térbeli b-ből Π-re állitott merőlegesnek centrális képei a h' és $b^{c'}$ illetve h'' és $b^{c''}$ pontokat összekötő egyenesek. Ezeknek b_2 metszéspontja /ugy mint $m_{a.b}$/ a merőlegesnek nyompontja, azaz b-nek merőleges képe Π képsikon. b csucs képsiktávolságának megállapitásához fektessük az $o'b^{c'}b$ vetitősugarat merőleges



290. ábra



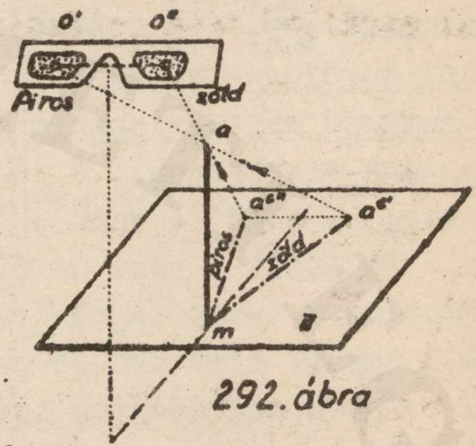
291. ábra

képe, azaz $h'b^{c}b_2$ körül Π-be, amikor is o' az o'_0-ba jut, $b^{c'}$ helybenmaradó, b meg b_0-ba jut. b_2b_0 a keresett képsiktávolság. Ilyen módon kedvező helyzet esetén, a csucsok mindegyikének megszerkeszthetjük centrális képét, képsiktávolságát, s ezekkel valódi nagyságát is.

Amint emlitettük, a sztereoszkopikus képpárok szemlélésénél a szemek csak a nekik megfelelő képet láthatják. Ennek megfelelően a két képnek egymástól elválasztott területen kell lenniök. A 290. ábrán a Π képsik a rajz sikjára merőleges. Az ábra mutatja, hogy a képek elkülönülése akkor következik be, ha a tárgy a bevonalazott térben van, mert akkor o'-ből vetitve, képe az ab; o''-ből bc képsikrészre jut.

A 291. ábra egy négyzetes oszlop sztereoszkopikus képpárja. A szemek távolsága 70 mm, a képsiktávolság 250 mm, a közepes tárgytávolság 360 mm.

117./ Sztereoszkopikus, szin-térhatású /anaglif/ képek+ A két kép területének elválasztása nélkül is elérhetjük a térhatást, ha a képek kidolgozásánál a szinkép kiegészitő szineit használjuk. Kiegészitő szinek összetéve közel fehérek, egymásból kivonva közel feketék. Ilyenek: piros és zöld; sárga és ibolya; narancs és kék. Ha egy piros vonalat zöld üvegen át nézünk, a vonalat feketének látjuk, a zöld vonalat meg piros üvegen át nézve látjuk feketének. Ezzel szemben a piros vonal piros üvegen át nézve eltünik, a piros üveg elnyeli a piros sugarakat, a zöld vonal viszont zöld üvegen át nézve nem látható.

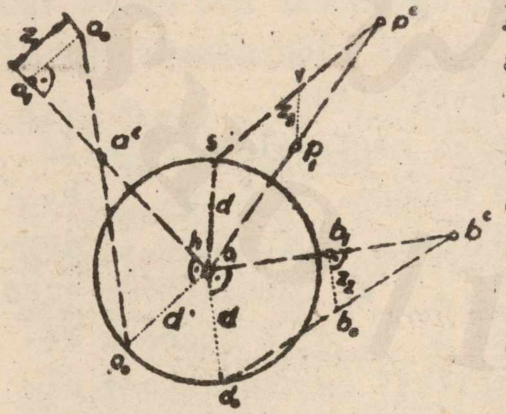


292. ábra

Ha tehát a π vizszintes képsikot /292. ábra/ m-ben döfő függőleges am távolságnak megszerkesztjük az o′ és o″ centrumoknak megfelelő $a^{c'}m$ és $a^{c''}m$ képeit π képsikon és $ma^{c'}$-et zöld, $ma^{c''}$-et piros szinnel huzzuk ki, s az o′ szem elé piros, az o″ elé zöld üveget helyezünk, akkor o′ szem csak $a^{c'}$ képet látja, s igy "a" az $o'a^{c'}$ sugáron lehet; o″ szem csak $a^{c''}$-t látja, "a" az $o''a^{c''}$ sugáron van, azaz a két szem a pontot az $o'a^{c'}$ és $o''a^{c''}$ sugarak "a" metszéspontjában levőnek látja. Ennek megfelelően a távolságot az $o'ma^{c'}$ sik és $o''ma^{c''}$ sik ma függőleges metszetében látja.

Ez a lényege az u.n. anaglif eljárásnak, az igy megszerkesztett képek anaglif, vagy szin-térhatású képek.

Az alakzat rendszerint egy vizszintes alapsikon áll, s igy a sztereoszkopikus képpár megszerkesztésénél célszerüen felhasználható az alakzat felülnézete, oldalnézete, valamint egy összefüggés, amellyel eddig is ismételten találkoztunk anélkül, hogy reámutattunk volna /legutóbb 284. ábra/.



293. ábra

A 293. ábrán a képsik a papir vizszintes sikja, $h = o_1$ a

+Rollman W.1853. D'Almeida J.Ch.1858. Köhler-Graf-Calor: Mathematische Raumbilder/1938/. Csiszár S: A szintérhatású ábrázolás /1942/.

centrum képe, a distanc d, a képsik alatti "a" pont merőleges képe a_1, a képtávolság $-z_1$.

Az oa vetitősugárnak merőleges képe $o_1 o_1$. Hogy oa sugárnak a képsikkal való döfését nyerjük, fektessük merőleges vetitősikját a képsikba, amikor is o pont o_0-ba, "a" meg, mivel z negativ, a_0-ba jut. $o_0 a_0$ és $o_1 a_1$ metszése a-nak a^c centrális képe. b pont a képsik előtt van, z_2 pozitiv, a centrális kép b^c.

A háromszögek hasonlósága alapján irhatjuk: $\frac{hb^c}{b_1 b^c} = \frac{d}{z_2}$, valamint $\frac{ha^c}{a_1 a^c} = \frac{d}{-z_1}$. Azaz: a pont centrális képe a főpont és a pont merőleges vetületét összekötő sugáron van, s e két pontra vonatkozó osztásviszonya egyenlő a distanc és a pont képsiktávolságának viszonyával. S ez pozitiv, ha a pont a képsik előtt, negativ, ha mögötte van.

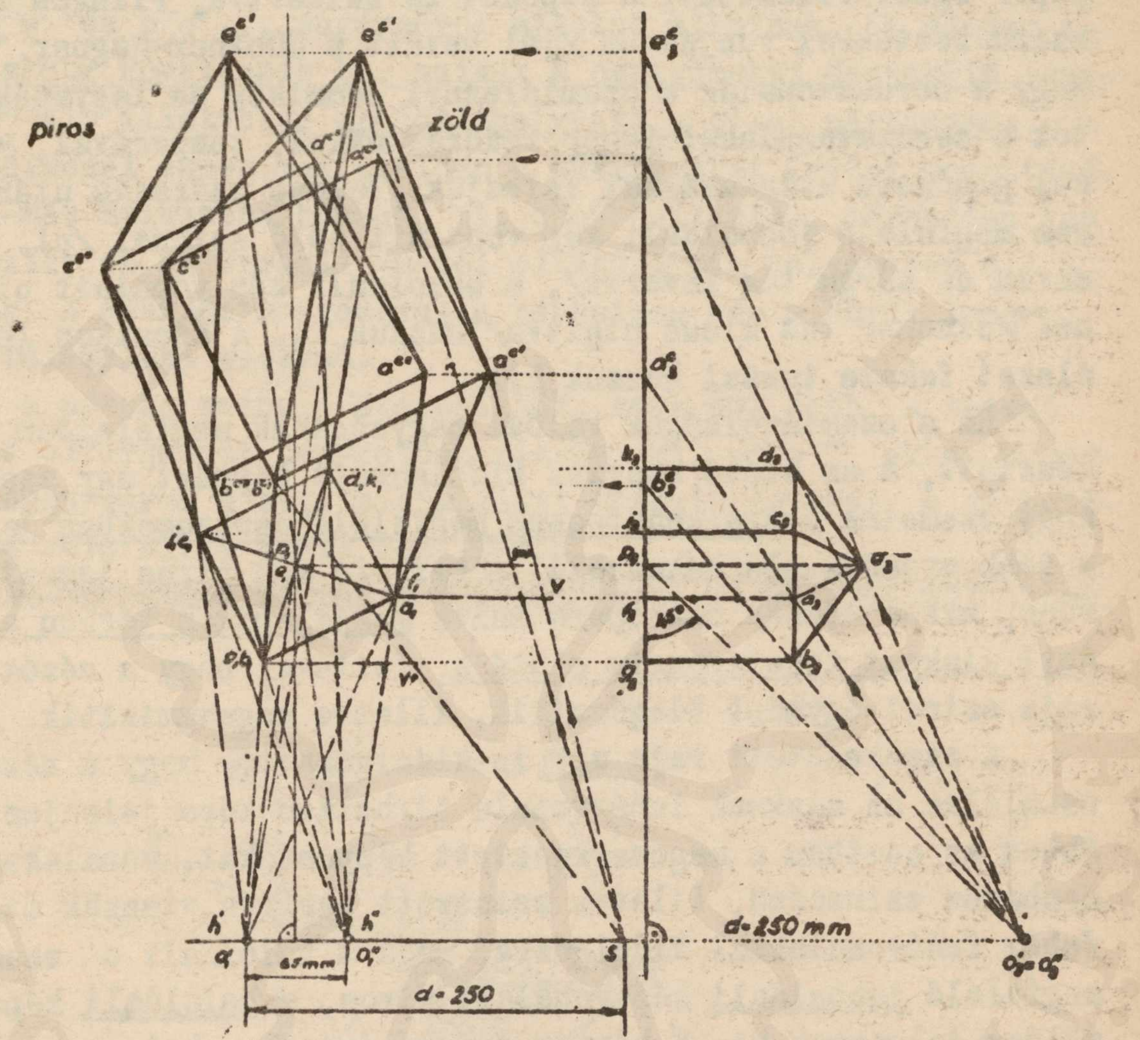
Ha tehát p pont merőleges vetülete p_1; képsiktávolsága z_3, akkor ha a tetszőleges irányu $hs = d$, s az ezzel párhuzamos $p_1 v = z_3$, ugy sv kimetszi p^c centrális képet.

/Ez a szerkesztés egyébként a 273. 276. ábrák szerint is értelmezhető: p_1 a nyompontja p_1-ben Π-re merőleges egyenesnek, erre p_1-től felmérendő z_3 távolság. Az egyenes iránypontja h; ennek távolsága o-tól d, s igy az iránykör a distanckör. s egy osztópont stb./

A 294. ábrán egy négyzetes alaprajzu, sátorfedelü épület 1:500 méretarányban megrajzolt felülnézete $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 p_1$; oldalnézete $a_3 b_3$ ... p_3. A sztereoszkopikus képsik az alaprajzsikja: az o'p és o"p látósugarak sikjának képsikszöge 45°. Az egymástól 65 és a sztergr. képsiktól 250 mm. távolságra levő szemek o_1' és o_1'' felülnézetét összekötő egyenes p_1-től ugyancsak 250 mm-re van. o_1' és o_1'' egyben a h' és h" főpontok. A szemek oldalnézete $o_3' = o_3''$. Az utóbbi távolságokat 1:5 arányban kisebbitettük.

Szerkesszük meg először az o' szemnek megfelelő centrális képet. Az fgjk alapnak a centrális képe önmaga. Az f; g; j; k alapcsucsok a képsikra merőleges sarokéleknek nyompontja, iránypontjuk h' főpont, s igy $h'f_1$; $h'g_1$; $h'j_1$; $h'k_1$ összekötése ezen éleknek centrális képe, amelyeken van az a; b; c; d csucsok képe is. Az $a^{c'}$ képet az előbbiben megállapitott osztásviszony alkalmazásával szerkesszük meg. Az "a" csucs merőleges képe a_1, képsiktávolsága $a_3 f_3$. A h'-ből huzott tetszőleges egyenesre, pl. h'h"-re h'-től felmérjük $d = \frac{250}{5} = 50$ mm.-t. Az ezzel párhuzamos $a_1 v = a_3 f_3$ képsiktávolság, s igy sv egyenes kimetszi az $a^{c'}$ centrális képet. Hasonlóan b_1v^+ - b_3g_3 és sv^+ és $h'b_1$ metszése $b^{c'}$; valamint e_1v^{++} = e_3p_3 és sv^{++} és $h'e_1$ metszése $e^{c'}$ csucskép.

Mivel abcd négyzet $\parallel$ képsikkal párhuzamos, azért $a^{c}b^{c}c^{c}d^{c}$ is négyzet, $a^{c'}b^{c'}$ és a_1b_1; $b^{c'}c^{c'}$ és b_1c ... egymással párhuzamo-



294. ábra
Méretarány= 1:500; 1:5

sak. Ezzel az o' szemnek megfelelő kép minden éle megrajzolható.

Az o'' centrumnak megfelelő képnél a sarokélek iránypontja h'' főpont, $h''g_1$; $h''j_1$ ... sarokéleknek, $h''p_1$ meg a magasságnak a centrális képe és $a^{c'}a^{c''}$; $b^{c'}b^{c''}$... $e^{c'}e^{c''}$ a $h'h''$-el párhuzamos egyenesek. Ezzel az o''-nek megfelelő kép is megrajzolható.

Az ábra mutatja a csucsok centrális képének szerkesztését az oldalnézet felhasználásával. Pl. az o'e vetitősugár felülnézete $o_1'e_1$; oldalnézete $o_3'e_3$. A centrális kép oldalnézete e_3^c, rendezővel $e^{c'}$, stb.

Az ilyentén nagy pontossággal megszerkesztett képet a kétszinű nézőkén át való szemléléshez a következőleg dolgozzuk ki:

A képek vonalait finom ceruzavonalakkal rajzoljuk meg, s minden mást eltávolitunk /esetleg a pontokat, vonalakat átszurással, vagy pauszpapir közvetitésével egy más rajzpapirra visszük át, s ott rajzoljuk meg a ceruzavonalakat gondosan, pontosan/. A papir egész felületét, a képeket is beleértve, világos rózsaszinü festékkel vonjuk be /jól bevált a Günther-Wagner "rósa"/. Hogy a ceruzavonalak a szemlélésnél semmikép se legyenek láthatók a ceruzavonalakat fehér fedőfestékkel, temperával, vagy tussal gondosan utánhuzással lefedjük. Teljes száradás után az o'-nem megfelelő jobboldali kép vonalait zöld szinnel /pl. ultramarin és sárga tus keverve/, a baloldali kép vonalait piros szinnel /cinober tus kissé higitva/ huzzuk ki. A képsikon levő alapéleket fekete tussal huzzuk ki.

Ha a szemtávolságok valódi nagyságának megfelelően megszerkesztett, s az előző szerint kidolgozott képpárt ugy szemlélünk, hogy szemeink a szerkesztésnek megfelelő centrumokban legyenek, s jobb szemünk elé kékeszöld, a bal elé meg piros lemezt helyezünk, akkor néhány másodperc mulva megjelenik a térben a megadott alakzat feketevonalu mintája, feltéve, hogy a nézőke és a rajz szinei egymást kiegészitik, illetve megsemmisitik.

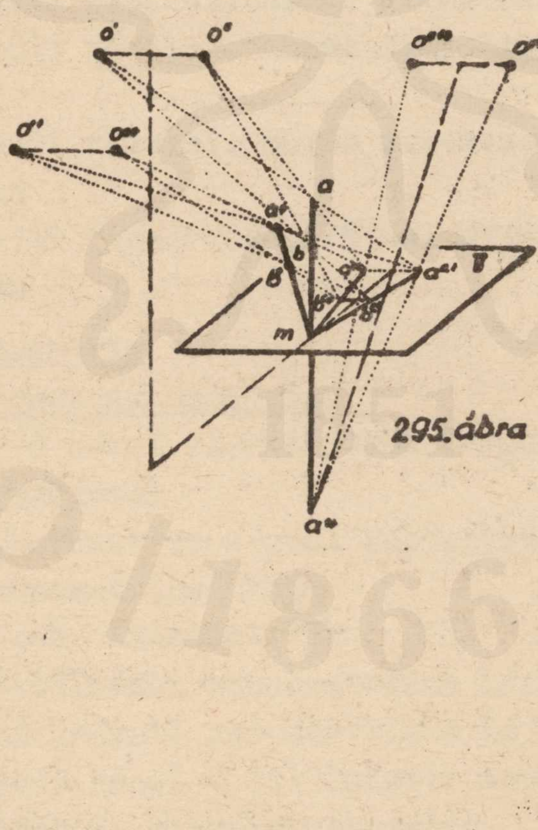
A szerkesztett rajz ugy is kidolgozható, hogy a nézőkén át szemlélve az alaknak fehérvonalu térhatásu képe jelenjen meg. Ebben az esetben a megszerkesztett képpontokat, vonalakat vörösesbarna szinezésü, illetve szinezett papirra visszük át, ott fehér fedővonalakkal kidolgozva, majd a baloldali o' szemnek megfelelő jobboldali kép vonalait piros, a baloldali képet meg zölden dolgozzuk ki. E képpár szemlélésénél a bal szem elé helyezett piros nézőkén át a feketének látott baloldali zöld kép vonalai egybeolvadnak a papir sötét szinével, viszont a jobboldali piros vonalak fehéren villannak ki a sötét papiralapból. A jobb szem viszont fehéren látja a baloldali zöld képet, s igy a két fehér kép egybeolvadása fehér térhatásu képet ad.

A képsik lehet függőleges, akár ferde is, az alak lehet a képsik mögött is, amikor a zöld és piros képpárszinek felcserélődnek. A képsik mögötti alak képpárja a szemlélésnél érzékenyebbek a képek hibái iránt, mert, mivel a térhatásu alak távolabb van, mint a képek, ezek kis hibái sokszorozódnak, a képek összeolvadásában zavarok keletkeznek.

Amint a 292. ábrával kapcsolatban megállapitottuk, hogy térhatásu kép ugy keletkezik /295. ábra/, hogy a zöld $a^{c'}$ képéhez a piros o'-ből menő látósugár és a piros $a^{c''}$-hez a zöld $o^{c''}$-ből haladó látósugarak <u>egymást metszik</u>. De éppen ugy metszeniök kell egymást bármely $b^{c'}o'$ és $b^{c''}o''$ sugaraknak, amikor is az $a^{c'}o'$ és $a^{c''}o''$; $b^{c'}o'$ és $b^{c''}o''$... sugárpárok sikokat alkotnak. Ez <u>minden esetben akkor következik be, amikor a centrumokat összekötő egyenes</u> $a^{c'}a^{c''}$-el, illetve <u>az eredeti helyzetü $o'o''$-el párhuzamos</u>. Ha a szemlélésnél ennek megfelelően a szempárokat fejünk mozgatásával más-más helyzetbe hozzuk, pl. $o'^{+}o''^{+}$ helyzetbe, térhatásu kép keletkezik, de az eredeti om-től eltérő $a^{+}b^{+}m$ helyzetben áll a távolság. A szempár mozgásával a térhatásu kép m körül lengve, affin átalakulást szenved.

Ha a nézőke szineit átcseréljük, vagy ami jobb, a rajzot 180°-kal elforgatott helyzetben nézzük, pl. $o'''^{+}o''''^{+}$, akkor a megfelelő sugárpárok a rajz sikja alatt metszik egymást, a térhatásu kép a rajz sikja alatt keletkezik.

Szin-térhatásu képpárok fényképészeti uton is készülhetnek.



295.ábra

T a r t a l o m j e g y z é k .

old.

5540226

CK.