



ERDÉSZETI ÉS FAIPARI EGYETEM  
ERDŐMÉRNÖKI KAR

---

Dr. GÁL JÁNOSNÉ  
egyetemi adjunktus

MATEMATIKAI FELADATGYŰJTEMÉNY  
I.

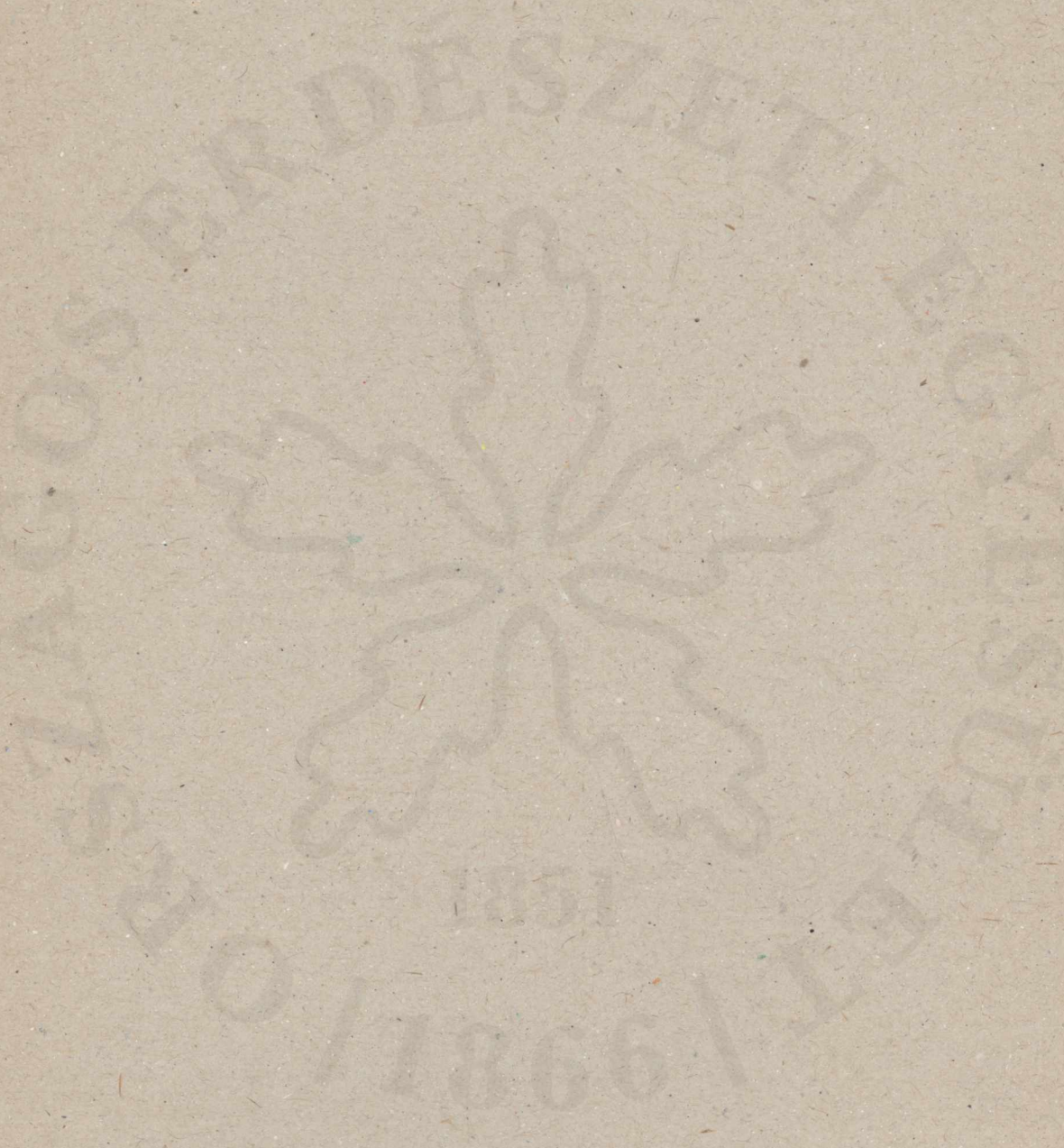
Kézirat



JEGYZETSOKSZOROSÍTÓ RÉSZLEG

---

SOPRON 1973.





Lektorok:

Dr. Pankotay Gábor

egyetemi tanár

és

Dr. Rónai Ferenc

egyetemi tanár

ERDÉSZETI ÉS FAIPARI EGYETEM  
Központi Könyvtár Sopron  
LELTÁRI SZÁM: -13819-1991

1851

/1866/

A kiadásért felelős az Erdészeti és Faipari Egyetem rektora

Megrendelve: 1991. július

Példányszám: 250

Készült az EFE Jegyzetsokszorosítójában

Vezető: Dr. Tvordy György

Kilencedik utánnomás!

# B e v e z e t é s

## Tartalomjegyzék

A matematikai elméletekhez mindig hozzátartozik azok gyakorlati alkalmazása, ami a mérnök számára kétszeresen is fontos. Egyrészt ezáltal válik teljessé a matematikai tudása, másrészt az egyes példák és feladatok önálló megoldása révén sajátíthatja el azt a gyakorlati tudást, amelyre munkája során szüksége van.

A jelen feladatgyűjtemény mind a két célt szolgálja. Számos olyan példa található benne, amely lényegileg az elmélet közvetlen alkalmazását kívánja meg a mérnöki munka során előforduló problémák megoldásánál. A szükséges matematikai módszerek egy-egy típuspélda részletes kidolgozása révén kerülnek bemutatásra. Ezek a módszerek nem egy esetben azonban az elméleti anyag önálló felhasználását és formálását teszik szükségessé, és így nemcsak a megfelelő matematikai képletek gépies kiválasztását és alkalmazását kívánják meg, hanem önálló logikus gondolkodásra is nevelnek. Ez végeredményben egy mérnökhallgató számára matematikai tanulmányainak - bizonyos tárgyi ismeretek megszerzésén és azok felhasználásának a képességén kívül - alapvető célja is, hiszen a gyakorlati munka során mindig előadódnak oly problémák, amelyek az ismert képletek gépies alkalmazásával nem oldhatók meg, hanem valami új ötletet igényelnek. Ez a mozzanat az, ami miatt a gép sohasem pótolhatja a "gondolkodó embert", bár igen nagy segítséget nyújthat neki.

A feladatok között található olyanok is, amelyek csak önálló gondolkodással és ötlettel oldhatók meg. Ezekre vonatkozóan elsősorban a határértékfeladatokra és a szélsőértékszámításra utalunk.

Amikor jelen gyakorlati példatárat a leendő mérnökmenzedék rendelkezésére bocsátjuk, reméljük, hogy a fenti célok eléréséhez tudunk általa hasznos segítséget nyújtani.

Differenciálási szabályok	76
Paraméteres alakban adott függvények differenciálhányadosa	83
Impliált függvények differenciálhányadosa	85
Logaritmikus differenciálás	87
A DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS ALKALMAZÁSA	
A differenciálhányados értéke a függvény adott pontjában	89
Az érintő egyenes és normális egyenesének felírása a függvény adott pontjában	90

Dr. Moór Arthur  
 egyetemi tanár  
 a Matematikai Tanszék vezetője



## T a r t a l o m j e g y z é k

### 1. rész.

#### A/ Mintapéldák és feladatok

	oldal
I. ALGEBRA	11
Kombinatorika	11
Binomiális tétel	17
Komplex számok	24
Harmadfoku egyenletek	30
A determináns	37
Elsőfoku egyenletrendszerek megoldása, Cramer szabály	40
Mátrixszámítás elemei	44
Általános lineáris egyenletrendszer megoldása	52
Magasabbrendű számtani sorozat és sor	56
II. ANALIZIS	59
Végtelen számsorozatok	59
A függvény fogalma, Egyszerűbb függvénytranszformációk	63
Függvény, inverz függvény kapcsolat	65
Függvény, inverz függvény kapcsolat felhasználásával megoldható egyenletek	70
a/ DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS	74
A függvény növekménye, differenciáhányados és differenciálhányados	74
A derivált függvény	75
A függvény differenciálhatósága	77
Differenciálási szabályok	78
Paraméteres alakban adott függvények differenciálhányadosa	83
Implicit függvények differenciálhányadosa	85
Logaritmikus differenciálás	87
b/ A DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS ALKALMAZÁSAI	89
A differenciálhányados értéke a függvény adott pontjában	89
Az érintő egyenes és normális egyenletének felírása a függvény adott pontjában	90

Subtangens, subnormális	91
Aszimptoták	93
Szélsőértékszámítás	96
Görbületi kör és evoluta	102
Hatványsorok	112
Bernoulli-L'Hospital szabály	113
Összefoglalás. Az $y = x + \frac{1}{x-3}$ függvény elemzése	116
<b>III. VEKTORALGEBRA</b>	<b>123</b>
Mintapéldák	123
Feladatok	128
<b>IV. ANALITIKUS SIKGEOMETRIA</b>	<b>130</b>
Áttérés Descartes koordinátákról polárkoordinátákra és polárkoordinátákról Descartes koordinátákra	130
Osztópontok koordinátái	133
Területszámítás koordinátákkal	134
Descartes-féle koordinátatranszformációk	135
Egyenes az analitikus geometriában	136
Másodrendű alakzatok	142
<b>V. ANALITIKUS TÉRGEOMETRIA</b>	<b>164</b>
Egy ponton átmenő adott iránytényezővel rendelkező egyenes egyenletei	164
Két pont által meghatározott egyenes egyenletei	165
További példák az egyenes egyenletének felírására	168
Vegyes feladatok a térbeli egyenessel kapcsolatosan	173
Két egyenes hajlásszöge	177
A sík egyenletei	180
Pont távolsága siktól	181
Két párhuzamos sík távolsága	181
Sík egyenletének felírása a síkot meghatározó adatok alapján	182
Adott ponton át egyenesre merőleges sík és adott ponton át adott síkra merőleges egyenes egyenletei	190
Egyenes és sík kölcsönös helyzete	193
Egyenes és sík dőléspontjának meghatározása	196
Két sík kölcsönös helyzete	198

oldal	oldal
Három sík kölcsönös helyzete	199
Sík és egyenes szemléltetése	203
2. rész	
B/ A feladatok megoldásai	
I. ALGEBRA	207
Kombinatorika	207
Newton-féle binomiális tétel	207
Komplex számok	208
Harmadfoku egyenletek	211
Determináns	212
Elsőfoku egyenletrendszerek	212
Mátrixszámítás	213
Általános lineáris egyenletrendszer	216
Magasabbrendű aritmetikai sorozat és sor	216
II. ANALIZIS	
Végtelen számsorozatok	217
A függvény fogalma, egyszerűbb függvénytranszformációk	219
Függvény, inverz függvény kapcsolat	225
Függvény, inverz függvény kapcsolat felhasználásával megoldható egyenletek	228
a/ DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS	230
A függvény növekménye, differenciáhányados és differenciáhányados	230
A derivált függvény	231
A függvény differenciálhatósága	232
Differenciálási szabályok	232
Paraméteres alakban adott függvények differenciáhányadosa	234
Implicit függvények differenciáhányadosa	235
Logaritmikus differenciálás	235

	oldal
b/ A DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS ALKALMAZÁSAI	236
A differenciálhányados értéke a függvény adott pontjában	236
Az érintő egyenes és normális egyenletének felírása a függvény adott pontjában	236
Subtangens subnormális	237
Aszimptoták	237
Szélsőértékszámítás	238
Görbületi kör és evoluta	247
Hatványsorok	250
Bernoulli-L'Hospital szabály	251
III. VEKTORALGEBRA	251
IV. ANALITIKUS SIKGEOMETRIA	252
Áttérés Descartes koordinátákról polárkoordinátákra és polárkoordinátákról Descartes koordinátákra	252
Két pont távolsága és az általuk meghatározott egyenes hajlásszöge	253
Osztópontok koordinátái	253
Területszámítás koordinátákkal	253
Descartes-féle koordináta transzformációk	253
Egyenes az analitikus geometriában	253
Másodrendű alakzatok	256
V. ANALITIKUS TÉRGEOMETRIA	265
Megoldások a térbeli egyenessel kapcsolatosan	265
A sikkal kapcsolatos feladatok megoldása	268
Pont távolsága siktól	268
Két párhuzamos sík távolsága	269
Sík egyenletének felírása a síkot meghatározó adatok alapján	269
Adott ponton át egyenesre merőleges sík és adott ponton át adott síkra merőleges egyenes egyenlete	270
Egyenes és sík kölcsönös helyzete	270
Egyenes dőfspontja a sikkal	271
Két sík kölcsönös helyzete	271
Három sík kölcsönös helyzete	271

Sík szemléltetése

272

Egyenes szemléltetése

Kombinatorika

273

Példák:

1. 9 személyt négyféléképpen helyeztünk el:

a) egy körben,

b) egy kör alakú asztal körül,

c) A helyeket ha megjelöljük az asztal körvonalán 9 egyenlő távolságra választjuk ki, a másodikra már csak 8 személy marad, az utolsó helyre már csak egy személy marad. Az összes lehetséges elhelyezés számát

$$P_9 = 9! = 362\,880 \text{ elhelyezés}$$

mivel az egyes elhelyezések egymástól függetlenek, így

$$P_9 = 9! = 362\,880$$

d) Az egyszerűség kedvéért tekintünk csak három személyt.

Három elem permutációinak 6 száma 3! azorban körben azaz az ennél nagyobb lesz a különböző elhelyezések száma.



1851

abc

cab

és a b a c egy-egy  
c b a b a c  
c a b

Ezért  $\frac{3!}{3} = 2$  a különböző elhelyezések száma 2 személynél is.

abcde fgh  
bcdefgh i  
cdefgh i a b

előzeteseknek egy  
előzetesnek tekint-  
nek.

1 abcde fgh

Isbjlo

oldal

III. A DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS ALKALMAZÁSAI

A differenciálhányvadász értéke a függvény meghatározásánál

Az érintő egyenes és a körhulló egyenletének felírása a függvény adott pontjában	236
Subtangens számítása	237
Axiomák	237
Szökőérték meghatározása	238
Görbék görbe és evolúta	247
Hatvány sorok	250
L'Hospital-L'Hospital szabály	251

IV. A TERNÁRI-GEOMETRIA

1. A Descartes koordinátáiról párhuzamosításra

Az érintő egyenes és a körhulló egyenletének felírása a függvény adott pontjában	253
Subtangens számítása	253
Axiomák	253
Szökőérték meghatározása	253
Görbék görbe és evolúta	253
Hatvány sorok	253
L'Hospital-L'Hospital szabály	253

2. ANALITIKAI TÉRGEOMETRIA

Meghatározás a térbeli egyenesekkel kapcsolatban	265
A sík által meghatározott síkfelettek meghatározása	268
Pont távolsága a síktól	268
Két párhuzamos sík távolsága	269
Sík egyenletének felírása adott meghatározó adatok alapján	269
Adott ponton át egyenesre merőleges sík és adott ponton át adott egyenesre merőleges egyenes egyenlete	270
Egyenes és sík kölcsönös helyzete	270
Egyenes dőlésszögje a síkhoz	271
Két sík kölcsönös helyzete	271
Három sík kölcsönös helyzete	271

1851

1866

ALGEBRA

Kombinatorika

Példák:

1. 9 személyt hányféleképpen helyezhetünk el:

a/ egy padon,

b/ egy kör alakú asztal körül.

a/ A helyeket ha megszámozzuk az első helyre 9 személy közül választhatunk, a másodikra már csak 8 személy közül és i.t. a kilencedik helyre már csak egy személy marad. Az összes elhelyezések száma a

$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$  szorzat lesz,

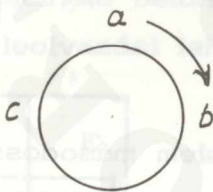
mivel az egyes elhelyezések egymástól függetlenek.

Igy

$P_9 = 9! = 362\ 880.$

b/ Az egyszerűség kedvéért tekintsünk csak három személyt.

Három elem permutációinak a száma  $3!$ , azonban körön mozogva ennél kevesebb lesz a különböző elhelyezések száma.



Az  $\left. \begin{matrix} a b c \\ b c a \\ c a b \end{matrix} \right\}$  és  $\left. \begin{matrix} b a c \\ a c b \\ c b a \end{matrix} \right\}$  egy-egy ülésrend

Ezért  $\frac{3!}{3} = 2$  a különböző elhelyezések száma 9 személynél az

$\left. \begin{matrix} a b c d e f g h i \\ b c d e f g h i a \\ c d e f g h i a b \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i a b c d e f g h \end{matrix} \right\}$  elhelyezkedések egy ülésrendnek tekinthetők.

Igy  $\frac{9!}{9} = 40\,320$  a különböző elhelyezések száma.

2. 4 ország 10 futója közül 3 magyar, 4 szovjet, 2 lengyel és 1 csehszlovák nemzetiségű. Hányféle eredménye lehet a versenynek, ha csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy az egyes országok milyen helyezést érnek el?

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_r) = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!}$$

összefüggés alapján

$$P_{10}(4, 3, 2, 1) = \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = 12\,600.$$

3. Adva az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számok. Hány csupa különböző jegyből álló kétjegyű szám alakítható?

Kétszítsünk csoportokat!

12	21	31	...	91
13	23	32		92
14	24	.		93
15	.	.		.
16	.	.		.
17	.	.		.
18				.
19	29	39	...	98

9 oszlop van és mindegyikben 8 db kétjegyű szám.

Ez összesen  $9 \cdot 8 = 72$ .

A feladatot képlettel is megoldhatjuk. Képezni kell 9 elem másodosztályú ismétlés nélküli variációját,

$$V_9^2 = 9 \cdot 8 = 72.$$

4. Hány csupa különböző jegyből álló kétjegyű szám alakítható az 1, 2, ..., 9, 0 számokból?

90 eshetőség lenne, ha a nullával kezdődő oszlopot is figyelembe vehetnénk. Így kiesik a lehetőségek  $\frac{1}{10}$ -e, vagyis 9, ezért

$$\frac{9}{10} V_{10}^2 = \frac{9}{10} \cdot 10,9 = 81 \quad \text{a kétjegyű számok száma.}$$

5. Az előbbi feladatban ha a számjegyek ismétlődését is megengedjük volna a nulla nélküli kétjegyű számok száma

$$V_9^2(i) = 9^2 = 81 \quad \text{lenne és a nullát is tartalmazóké}$$

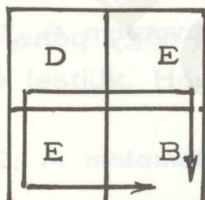
pedig

$$\frac{9}{10} V_{10}^2(i) = \frac{9}{10} 10^2 = 90 .$$

6. A "Debrecen" szó hányféleképpen olvasható el a következő ábráról?

D	E	B	R	E
E	B	R	E	C
B	R	E	C	E
R	E	C	E	N

A feladatot a következő megfontolás alapján oldjuk meg. Az ötször négyes téglalap minden négyzetébe beírjuk azt a számot ahányféleképpen az ott található betűhöz eljuthatunk. Így az N helyén lévő szám adja az összes leolvasási lehetőségeket.



Pl. a B betűhöz kétféleképpen juthatunk el, először jobbra majd lefelé haladva, másodszor lefelé haladva majd jobbra.

Könnyen ellenőrizhető, hogy bármely betűhöz az előtte s a felette álló betűn keresztül juthatunk, tehát annyiféleképpen ahányszor az előtte és a felette álló betűkhöz együttesen. Ennek alapján a számokat a kis négyzetekbe beírhatjuk.

1	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3	6	10	15
1	4	10	20	35

A leolvasási lehetőségek száma 35.

Észrevehetjük, hogy a feladat megoldása során alkalmazott eljárás hasonlít a Pascal háromszög képzési szabályához. A 35 nem más mint a Pascal háromszög hetedik sorának negyedik együtthatója.

A feladatot megoldhatjuk a kombinációk segítségével is. A bal felső sarokban lévő D betűtől az N betűig kell eljutni négy jobbra lépés és három lefelé lépés kombinálásával. Ha megmondjuk, hogy a  $4+3 = 7$  lépés közül melyik négy a jobbralépés, akkor ezáltal egy leolvasást adtunk meg. Hasonlóképpen akkor is egy leolvasási módot adunk meg, ha azt mondjuk meg, hogy melyik három a lefelé lépés. A leolvasási módozatok száma tehát,

$$C_7^4 = \binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$$

vagy

$$C_7^3 = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

7. Négy ötforintossal hány különböző dobás lehetséges (fej, irás)? A lehetséges esetek számát két elem (fej, irás) negyedosztályu (négy pénz) ismétléses kombinációi adják

$$C_2^{4(i)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5.$$

Feladatok:

1. Tíz személy nevét hányféleképpen tudjuk egy nyilvántartásban felsorolni?
2. Öt személy hányféleképpen helyezkedhet el egy padon, ha minden lehetséges elrendezést figyelembe veszünk?

3. Hányféleképpen lehet elhelyezni egy sakktáblán 8 bástyát úgy, hogy ne legyen kettő, amelyik úti egymást (azaz ne legyen kettő sem egy sorban sem egy oszlopban)?
4. Hány hétjegyű szám állítható elő a 0, 2, 3, 5, 7, 8, 9 számjegyekből?
5. Hányféleképpen köthető össze telefonnal öt olyan állomás, amelyek közül három-három nem esik egy egyenesbe?
6. Az 1, 2, 3, 4, 5 elemeknek hányadik permutációja a 43152?
7. Hányféleképpen foglalhat helyet egymás mellett 4 férfi és 4 nő úgy, hogy a férfiak és nők felváltva következzenek egymás után?
8. 5 férfi és 4 nő hányféleképpen helyezkedhet el egy padon úgy, hogy
  - a/ két egynembeli személy ne kerüljön egymás mellé,
  - b/ a férfiak és nők külön-külön csoportban ülnek (csak egy férfi és egy nő kerül egymás mellé)?
9. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 elemekből hány olyan permutációt tudunk alakítani, amely 5, illetve 1, 2, 3 elemekkel kezdődik?
10. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 elemekből hány olyan permutáció alakítható amelyben
  - a/ a 8642 elemcsoport az itt leírt sorrendben fordul elő,
  - b/ az a/ alatti elemek egy csoportban ugyan, de azon belül minden lehető elhelyezésben fordulnak elő.
11. A matematika szó 10 betűjét külön-külön kartonlapra különböző színűre festjük. Hányféleképpen rakható ki a matematika szó?
12. A matematika szó betűinek hány permutációja van?
13. Hány szám állítható elő a következő számjegyekből: 1, 1, 3, 4, 4, 5?
14. Hány különböző számot tudunk alakítani a következő számjegyekből: 2, 5, 5, 5, 9, 9, 9, 9.
15. Az 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5 számjegyekből alkotott számok közül hány szám kezdődik 125-tel?
16. Egy gyermek 2 piros, 3 fekete, 5 zöld és 5 fehér színű gombját egy

fonálra akarja felfűzni. A gombok azonos nagyságúak és alakúak csak különböző szincsoportúak. Hányféleképpen lehet a gombokat felfűzni.

17. Egy erdőgazdaság 6 erdészete versenyben áll egymással, hogy melyikük tudja előbb teljesíteni negyedévi tervét. A versenyző hat erdészeti közül a három legjobbat jutalmazták. A 6 erdészeti hányféle összeállításban kerülhet az első három helyezésbe?

18. Öt számjegyből hány olyan számot képezhetünk, amelyben három számjegy fordul elő?

19. Az 1, 2, 3, 4, 5 elemekből hány olyan négyjegyű számot képezhetünk, amely a 4-es számjeggyel kezdődik és a jegyek benne nem ismétlődhetnek?

20. Hány csupa különböző jegyből álló hatjegyű szám alakítható?

21. Egy ötülési padon hányféleképpen foglalhat helyet 5 fiú és 4 lány, úgy, hogy 2 fiú és 2 lány ne kerüljön egymás mellé?

22. Hány kapcsolási lehetősége van annak a távbeszélő központnak, amely a tíz számjegyből egy-egy kapcsoláshoz négy számjegyet igényel? (A 0-val kezdődőket kizárjuk.)

23. Az 1, 2, 3, 4, 5 elemekből hány olyan négyjegyű számot írhatunk, amely a 4-es számjeggyel kezdődik és a jegyek benne ismétlődhetnek?

24. Hány darab 12-ed osztályú ismétléses variációja van az 1, 2, x elemeknek?

25. Hány különböző dobást lehet tenni három különböző színű kockával? (A dobások különbözőek, ha ugyanazon szín, vagy ha ugyanazon szám van felül.)

26. Állítsuk össze az 1, 2, 3, 4 elemekből álló másod- és harmadosztályú kombinációkat! Először írjuk fel a lehetséges variációkat, majd huzzuk át azokat a csoportokat, amelyekben az egyes elemek előbb csoportokban valamilyen variációban már előfordultak. Kifejtésüket számítással ellenőrizzük.

27. Hány darab lottószevényt kellene kitölteni ahhoz, hogy biztosan legyen öt találatunk?

28. Egy játékkártya csomagban lévő és egymástól különböző 32 db játékkártya közül egy játékféleség esetén egy játékosnak 10 db kártyát osztanak ki. Hányféle összeállításban kaphatja kézhez a 10 db kártyát az első játékos?

29. Hányféleképpen osztható ki 32 kártya 4 játékos között, ha mindegyik 8 kártyát kap?

30. Hány különböző számlapu dobást lehet tenni három egyszínű kockával?

31. Hány különböző dobást lehet tenni három egyszínű kockával, ha a számjegyek ismétlődését is megengedjük?

32. Képezzük az 1, 2, 3 elemekből álló hatodosztályu ismétléses kombináció valamennyi tagját!

### Binomiális tétel

Kéttagu mennyiségnek magasabb hatványait Newton binomiális képletével számítjuk ki

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n} b^n.$$

a/ Legyen az  $n$  kitevő pozitív egész.

Példák:

1.  $(x + y)^8 = ?$

$$(x + y)^8 = x^8 + \binom{8}{1} x^7y + \binom{8}{2} x^6y^2 + \binom{8}{3} x^5y^3 + \binom{8}{4} x^4y^4 + \binom{8}{5} x^3y^5 + \binom{8}{6} x^2y^6 + \binom{8}{7} xy^7 + \binom{8}{8} y^8$$

ahol  $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}$  szerint az együtthatók

$$\binom{8}{1} = 8; \quad \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28; \quad \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$$

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70; \quad \binom{8}{5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 56.$$

A Pascal háromszög szimmetria tulajdonsága miatt a további együtthatókat nem is kell kiszámítani

$$\binom{8}{6} = 28; \quad \binom{8}{7} = 8; \quad \binom{8}{8} = 1$$

$$(x+y)^8 = x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8xy^7 + y^8.$$

2. ...  $(1+x)^5 = ?$

$$(1+x)^5 = 1 + \binom{5}{1}x + \binom{5}{2}x^2 + \binom{5}{3}x^3 + \binom{5}{4}x^4 + x^5 =$$
$$= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5.$$

3. 3.  $1,02^5 = ?$

$$1,02^5 = (1 + 0,02)^5 = \binom{5}{0} + \binom{5}{1}0,02 + \binom{5}{2}0,02^2 +$$
$$+ \binom{5}{3}0,02^3 + \binom{5}{4}0,02^4 + \binom{5}{5}0,02^5 = 1 + 10 \cdot 10^{-2} +$$
$$+ 40 \cdot 10^{-4} + 80 \cdot 10^{-6} + 80 \cdot 10^{-8} + 32 \cdot 10^{-10} = 1,104\ 080\ 803\ 2.$$

b/ Legyen az  $n$  tetszőes szerinti valószínűség szám,

Felhasználjuk  $(1+x)^\alpha$  Maclaurin sorát, amely

$$|x| < 1\text{-re konvergens.}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{1}{1!} \alpha x + \frac{1}{2!} \alpha(\alpha-1) x^2 + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!} \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1) x^n + \dots$$

Nyilvánvaló, hogy  $\alpha \neq$  pozitív egész szám miatt a sor végtelen sok tagból fog állni. Ha kiterjesztjük a binomiális együtthatók jelentését

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n}$$

alakban, akkor

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \dots$$

Ezek után  $(a+b)^\alpha$  képletet a következőképpen határozhatjuk meg. Tegyük fel, hogy  $|a| > |b|$

$$(a+b)^\alpha = \left[ a \left( 1 + \frac{b}{a} \right) \right]^\alpha = a^\alpha \left( 1 + \frac{b}{a} \right)^\alpha =$$

$$= a^\alpha \left( 1 + \binom{\alpha}{1} \frac{b}{a} + \binom{\alpha}{2} \left( \frac{b}{a} \right)^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} \left( \frac{b}{a} \right)^n + \dots \right) =$$

$$= a^\alpha + \binom{\alpha}{1} a^{\alpha-1} b + \binom{\alpha}{2} a^{\alpha-2} b^2 + \dots$$

Ezzel megkaptuk a binomiális tétel kiterjesztését  $|x| < 1$  mellett tetszés szerinti kitevőkre.

Példák:

A Newton-féle képlet negatív egész kitevőre

1.  $(x+y)^{-4} = \frac{1}{(x+y)^4} = ?$  ha  $x+y \neq 0$

$$(x + y)^{-4} = \binom{-4}{0} x^{-4} + \binom{-4}{1} x^{-4-1} y + \binom{-4}{2} x^{-6} y^2 + \\ + \binom{-4}{3} x^{-7} y^3 + \binom{-4}{4} x^{-8} y^4 + \binom{-4}{5} x^{-9} y^5 + \dots$$

Végtelen sok tagot kapunk, ahol a kiírt együtthatók a következők:

$$\binom{-4}{0} = 1; \quad \binom{-4}{1} = -4; \quad \binom{-4}{2} = \frac{-4(-4-1)}{1 \cdot 2} = 10$$

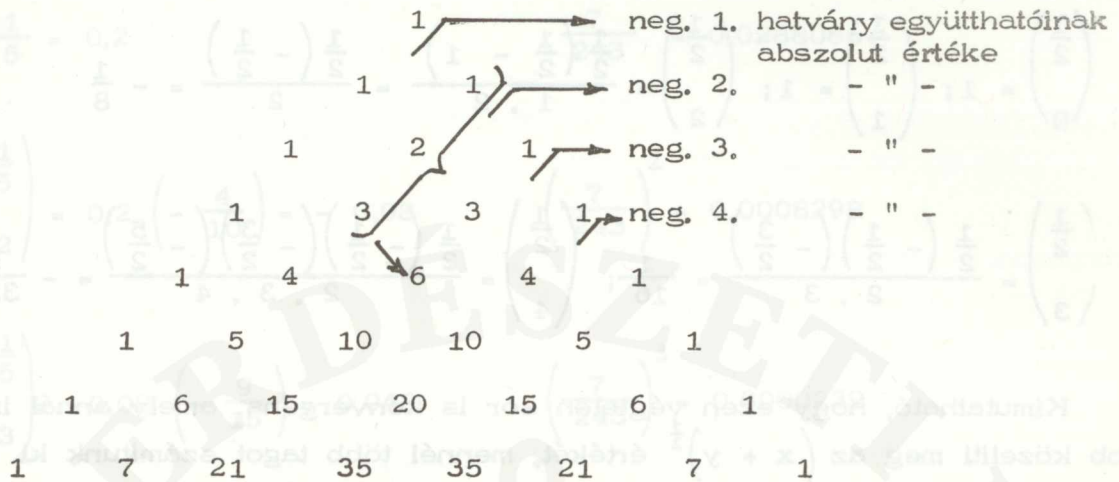
$$\binom{-4}{3} = \frac{-4(-5)(-6)}{2 \cdot 3} = -20; \quad \binom{-4}{4} = \frac{-4(-5)(-6)(-7)}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 35.$$

A bal oldal  $\frac{1}{(x+y)^4}$  véges érték ezért a végtelen sort meg kell vizsgálni, hogy mikor ad véges értéket. Evégből kiemeljük a jobb oldalon minden tagból az  $x^{-4}$ -t,

$$(x+y)^{-4} = x^{-4} \left[ 1 - 4 \frac{y}{x} + 10 \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 20 \left(\frac{y}{x}\right)^3 + 35 \left(\frac{y}{x}\right)^4 - \dots \right].$$

Ha az előbbieken  $\left| \frac{y}{x} \right| < 1$ , akkor ennek emelkedő hatványai csökkennek és ezért az igen magas hatványok elenyésző kis értékek lesznek és így lehetséges hogy végtelen sok tag összege véges szám lesz. A megadott végtelen sor annál erősebben konvergál minél kisebb az  $\frac{y}{x}$  tört.

Megjegyzés: A Pascal háromszög ferde sorai a negatív kitevőjű hatványok együtthatóit adják abszolút értékre nézve



A negatív hatvány együtthatóit is összeadással határozhatjuk meg az előző hatvány együtthatóiból. Pl. a negatív 2. hatvány három első együtthatójának összege az  $1 + 2 + 3 = 6$  adja a negatív 3. hatvány 3. együtthatóját.

2. Ki lehetne számítani a fentebb vázolt eljárással

$$23^{-4} = (20 + 3)^{-4} = \left[ 20 \left( 1 + \frac{3}{20} \right) \right]^{-4} = 20^{-4} \left( 1 + \frac{3}{20} \right)^{-4}$$

értékét megadott pontossággal, azonban egyszerűbb mód is van erre, úgy hogy ezt mellőzzük.

A Newton-féle képlet tört kitevő esetén

1.

$$(x + y)^{\frac{1}{2}} = ?$$

$$(x + y)^{\frac{1}{2}} = \binom{\frac{1}{2}}{0} x^{\frac{1}{2}} + \binom{\frac{1}{2}}{1} x^{\frac{1}{2} - 1} y + \binom{\frac{1}{2}}{2} x^{\frac{1}{2} - 2} y^2 +$$

$$+ \binom{\frac{1}{2}}{3} x^{\frac{1}{2} - 3} y^3 + \binom{\frac{1}{2}}{4} x^{\frac{1}{2} - 4} y^4 + \dots$$

Itt is végtelen sort kapunk. A kiírt együtthatók a következők:

$$\binom{\frac{1}{2}}{0} = 1; \quad \binom{\frac{1}{2}}{1} = 1; \quad \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right)}{1 \cdot 2} = \frac{\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \right)}{2} = -\frac{1}{8}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{3}{2} \right)}{2 \cdot 3} = \frac{1}{16}; \quad \binom{\frac{1}{2}}{4} = \frac{\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{3}{2} \right) \left( -\frac{5}{2} \right)}{2 \cdot 3 \cdot 4} = -\frac{5}{32}$$

Kimutatható, hogy ezen végtelen sor is konvergens, amely annál inkább közelíti meg az  $(x + y)^{\frac{1}{2}}$  értékét, mennél több tagot számítunk ki,

2. Példaként kiszámítjuk  $\sqrt[5]{250}$ -et.

Először megkeressük azt a két számot, amelynek ötödik hatványa között van 250

$1^5 = 1$ ;  $2^5 = 32$ ;  $3^5 = 243$ ;  $4^5 = 1024$ . A 250 tehát  $3^5$  és  $4^5$  közé esik. Így az ötödik hatványok figyelembevételével

$$250 = 243 + 7 = 243 \left( 1 + \frac{7}{243} \right)$$

$$250 = 1024 - 774 = 1024 \left( 1 - \frac{774}{1024} \right)$$

Mivel  $\frac{7}{243} < \frac{774}{1024}$  ezért az első felbontást választjuk.

(Ugyanis kisebb törtnél a végtelen sor gyorsabban konvergál.)

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{250} &= 3 \sqrt[5]{1 + \frac{7}{243}} = 3 \left[ 1 + \frac{1}{5} \frac{7}{243} + \binom{\frac{1}{5}}{2} \left( \frac{7}{243} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \binom{\frac{1}{5}}{3} \left( \frac{7}{243} \right)^3 + \binom{\frac{1}{5}}{4} \left( \frac{7}{243} \right)^4 + \dots \right] \end{aligned}$$

Ha az eredményt 5 tizedesnyi pontossággal akarjuk meghatározni, célszerű lesz az egyes tagokban a két tényezőt 7 tizedesre kiszámítani

$$1. \frac{1}{5} = 0,2 \qquad \frac{7}{243} = 0,0288066$$

$$2. \binom{\frac{1}{5}}{2} = 0,2 \left(-\frac{4}{10}\right) = -0,08 \qquad \left(\frac{7}{243}\right)^2 = 0,0008298$$

$$3. \binom{\frac{1}{5}}{3} = -0,08 \left(-\frac{9}{15}\right) = 0,048 \qquad \left(\frac{7}{243}\right)^3 = 0,0000239$$

$$4. \binom{\frac{1}{5}}{4} = 0,048 \left(-\frac{14}{20}\right) = -0,0336 \qquad \left(\frac{7}{243}\right)^4 = 0,0000007$$

$$5. \binom{\frac{1}{5}}{5} = -0,0336 \left(-\frac{19}{25}\right) = 0,025536 \qquad \left(\frac{7}{243}\right)^5 = 0,0000000$$

Rendre összeszorozva az egy-egy sorban álló tényezőket 7 tizedesre

1. sor 0,005 761 3	2. sor - 0,000 066 4
3. " 0,000 001 1	4. " - 0,000 000 0
5. " 0,000 000 0	- 0,000 066 4
0,005 762 4	+ 0,005 762 4
	+ 0,005 696 0

Láthatjuk, hogy a sor olyan erősen konvergál, hogy már az első 4 tag 7 tizedesig adja az eredményt

$$\sqrt[5]{250} = 3 \left[ 1 + 0,005696 \dots \right] = 3,017 088 .$$

Ez az eredmény hat tizedesig pontos.

A gyakorlatban ezen hosszú számításokat mellőzzük, mert pl. a logaritmustábla segítségével sokkal egyszerűbben tudunk akárhányadik gyököt vonni.

Feladatok:

1. Határozzuk meg a  $(\sqrt{x} + x^{-1})^6$  polinom mind a hét tagját és állapítsuk meg  $x$  értékét, ha a negyedik tagjának értéke  $\frac{20\sqrt{3}}{9}$ .

2. Határozzuk meg az  $(a^2 + b^3)^{13}$  kifejtésének ötödik tagját!

3.  $(a^2 - 1)^8 = ?$

4.  $(2a^2 - 3a)^5 = ?$

5.  $(\sqrt[3]{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})^4 = ?$

6.  $(\frac{a^2}{\sqrt{b}} - \frac{1}{b^2})^4 = ?$

Határozzunk meg a következő feladatok végtelen sorából 6-6 tagot!

7.  $(x + c)^{-4} = ?$

8.  $(2x - 1)^{-6} = ?$

9.  $(x + \frac{x^2}{2})^{\frac{1}{2}} = ?$

10.  $(x - 2)^{-\frac{5}{7}} = ?$

### Komplex számok

Megadásuk:

$(a, b)$ , számpáros alak

$z = a + bi$ , algebrai alak

$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ , trigonometriai alak

$z = r e^{i\varphi}$ , exponenciális alak,

Átalakítások:

1. Algebrai alakból trigonometriai alakba

$$z = 3 - 4i; \quad a = 3, \quad b = -4, \quad r = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\sin \varphi = -\frac{4}{5}; \quad \cos \varphi = \frac{3}{5}; \quad \operatorname{tg} \varphi = -1,33$$

$r$  mint távolság nem lehet negatív.

Olyan szöget kell keresni amelynek a sinusa negatív és a cosinusa pozitív. Ezen szög negyedik negyedbeli szög

$$\varphi' = 53,1^\circ ; \quad \text{és} \quad \varphi = 306,9^\circ$$

$$z = 5 (\cos 306,9^\circ + i \sin 306,9^\circ).$$

## 2. Trigonometriai alakból algebrai alakba

$$\begin{aligned} z &= 3 (\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = 3 (-\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ) = \\ &= 3 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} i. \end{aligned}$$

Műveletek komplex számokkal algebrai alakból:

Összeadás, kivonás és skalárral szorzás

$$z_1 = 2 + i$$

$$z_2 = 2 + 3i$$

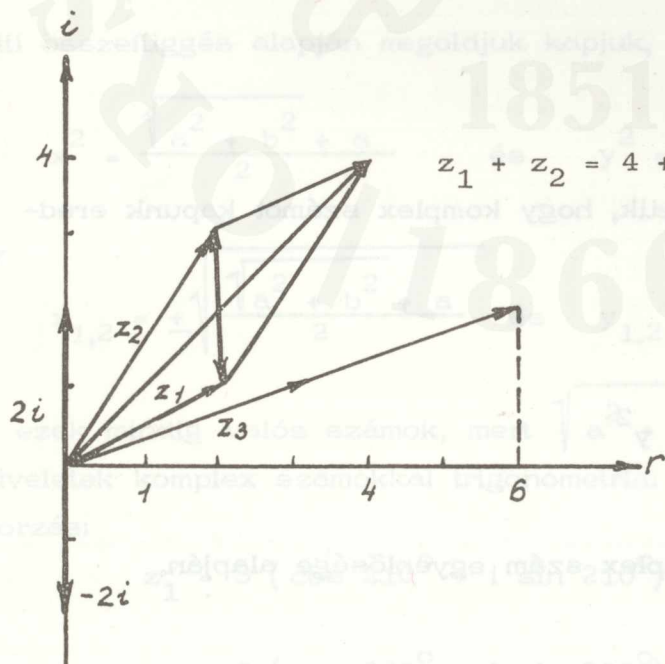
$$z_1 + z_2 = ?$$

$$z_1 - z_2 = ?$$

$$z_2 - z_1 = ?$$

$$z_3 = 3 + i ;$$

$$2z_3 = ?$$



$$z_1 + z_2 = 4 + 4i$$

$$z_1 - z_2 = 0 - 2i$$

$$z_2 - z_1 = 0 + 2i$$

$$z_3 = 3 + i$$

$$2z_3 = 6 + 2i$$

Szorzás:

$$z_1 = 3 + 3i$$

Figyelembe kell venni, hogy

$$z_2 = 4 + i$$

$$i \cdot i = -1$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 3i)(4 + i) = 12 + 15i - 3 = 9 + 15i.$$

Osztás:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 3i}{4 + i} = \frac{3 + 3i}{4 + i} \cdot \frac{4 - i}{4 - i} = \frac{15 + 9i}{17}.$$

Hatványozás:

$$z_1^5 = (3 + 3i)^5 = 3^5 + \binom{5}{1} 3^4 3i + \binom{5}{2} 3^3 (3i)^2 +$$

$$+ \binom{5}{3} 3^2 (3i)^3 + \binom{5}{4} 3 (3i)^4 + \binom{5}{5} (3i)^5 =$$

$$= 243 + 1215i - 2430 - 2430i + 1215 + 243i =$$

$$= -972 - 972i.$$

Négyzetgyökvonás:

$$\sqrt{3 + 4i} = ? \quad \text{Feltételezzük, hogy komplex számot kapunk eredményül}$$

$$\sqrt{3 + 4i} = x + yi$$

$$3 + 4i = x^2 + 2xyi - y^2$$

$$x^2 - y^2 = 3$$

$$2xy = 4$$

két komplex szám egyenlősége alapján,

Az utóbbi egyenlethől  $y = \frac{4}{2x} = \frac{2}{x}$

$$x^2 - \frac{4}{x} = 3$$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$x_{1,2}^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

x valós szám, ezért a továbbiakban csak a 4-es gyök jöhet tekintetbe.

Igy

$$x_1 = + 2$$

$$y_1 = \frac{2}{x_1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = - 2$$

$$y_2 = \frac{2}{x_2} = \frac{2}{-2} = - 1 .$$

A gyökök tehát:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{3 + 4i} &= 2 + i \\ \sqrt{3 + 4i} &= -2 - i \end{aligned} \right\}$$

A feladatnak mindig van megoldása, mert ha

$$\sqrt{a + bi} = x + yi \text{ egyenletet pl. a gyökök és együtthatók kö-}$$

zötti összefüggés alapján megoldjuk kapjuk, hogy

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \quad \text{és} \quad y^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2} .$$

Igy

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \quad \text{és} \quad y_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

és ezek mindig valós számok, mert  $\sqrt{a^2 + b^2} \geq a$  .

Műveletek komplex számokkal trigonometriai alakból

Szorzás:

$$z_1 = 3 (\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$$

$$z_2 = 5 (\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$$

$$z_1 \cdot z_2 = ?$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left[ \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right]$$

összefüggés alapján

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 3\sqrt{5} (\cos 510^\circ + i \sin 510^\circ) = \\ &= 3\sqrt{5} (\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = 3\sqrt{5} (-\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \\ &= 3\sqrt{5} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = -\frac{3\sqrt{15}}{2} + \frac{3\sqrt{5}i}{2}. \end{aligned}$$

Osztás:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left[ \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \quad \text{alapján}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3}{\sqrt{5}} \left[ \cos(-90^\circ) + i \sin(-90^\circ) \right] = \\ &= \frac{3}{\sqrt{5}} (\cos 90^\circ - i \sin 90^\circ) = \frac{3}{\sqrt{5}} (0 - i) = -\frac{3}{\sqrt{5}} i. \end{aligned}$$

Hatványozás:  $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$  alapján

$$\begin{aligned} z_1^4 &= 3^4 (\cos 840^\circ + i \sin 840^\circ) = 3^4 (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = \\ &= 3^4 (-\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 3^4 \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = \\ &= -\frac{81}{2} + \frac{81\sqrt{3}}{2} i. \end{aligned}$$

Gyökvonás:  $z = 16 (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ ;  $\sqrt[4]{z} = ?$

$$\text{Az általános } \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n} + i \sin \frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n} \right)$$

összefüggés alapján ( $k = 0, 1, \dots, n - 1$ )

$$\sqrt[4]{z} = 2 \left[ \cos (30^\circ + k 90^\circ) + i \sin (30^\circ + k 90^\circ) \right]$$

$k = 0$  mellett

$$\sqrt[4]{z} = 2 (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \sqrt{3} + i$$

$k = 1$  mellett

$$\sqrt[4]{z} = 2 (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = -1 + \sqrt{3} i$$

$k = 2$  mellett

$$\sqrt[4]{z} = 2 (\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = -\sqrt{3} - i$$

$k = 3$  mellett

$$\sqrt[4]{z} = 2 (\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) = 1 - \sqrt{3} i.$$

Feladatok:

1.  $(3 + 4 i) (4 + 5 i) = ?$

2.  $(2 + 3 i) (2 - 4 i) = ?$

3.  $(-5 - 7 i) (3 - 5 i) = ?$

4.  $\frac{3 + 4 i}{4 + 5 i} = ?$

5.  $\frac{5 + 6 i}{4 - 3 i} = ?$

6.  $\frac{7 - 4 i}{3 + 5 i} = ?$

7.  $(2 + 4 i)^3 = ?$

8.  $(3 - 5 i)^4 = ?$

9.  $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^4 = ?$

10.  $(2 - 6 i)^5 = ?$

11.  $\sqrt{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i} = ?$

12.  $\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i} = ?$

13.  $\sqrt{3 + 9 i} = ?$

14.  $\sqrt[3]{-i} = ?$

15. Mutassuk meg, hogy a  $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$  harmadik egységgyök!

16. Bizonyítsuk be, hogy ha  $x = \frac{-1 + 3 i}{2}$  és  $y = \frac{-1 - 3 i}{2}$ ,

akkor  $\sqrt[3]{x^3 + y^3 - 3xy} = \sqrt[3]{-1}$

17.  $\sqrt[3]{-2 + 2i} = ?$

18.  $\sqrt[3]{-8} = ?$

19.  $z_1 = 4 (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$

$z_2 = 2 (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$

$z_1 \cdot z_2 = ?$     $\frac{z_1}{z_2} = ?$     $z_1^3 = ?$     $\sqrt[3]{z_2} = ?$   
 $z_2^4 = ?$

20. Határozzuk meg az összes harmadik, negyedik és a hatodik egységgyököket! Állapítsuk meg, hogy az egységgyökök közül melyek a primitív egységgyökök?

21.  $\left[ 3 \left( \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right) \right]^{-3} = ?$

Harmadfoku egyenletek

Egységre normált alak:

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

Példák:

1.  $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$ . A másodfoku tag kiküszöbölése érdekében vezessük be az

$x = y - \frac{a}{3}$

helyettesítést, ekkor példánkra vonatkozóan

$x = y - 1$

$(y - 1)^3 + 3(y - 1)^2 - 3x - 1 = 0;$

$$y^3 - 3y^2 + 3y - 1 + 3y^2 - 6y + 3 - 3y + 3 - 1 = 0$$

$$y^3 - 6y + 4 = 0.$$

A megadott helyettesítés az eredeti egyenletből

$$y^3 + py + q = 0$$

alakú egyenletet eredményez.

A megoldást a szokás szerint  $y = u + v$  alakban keressük, ahol  $u, v$ -re fennállnak a következő relációk

$$\left. \begin{aligned} u, v &= -\frac{p}{3} \\ u^3 + v^3 + q &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Jelen példánkban tehát  $p = -6; q = 4$

$$\left. \begin{aligned} u \cdot v &= 2 \\ -\left(u^3 + v^3\right) &= 4 \end{aligned} \right\}$$

Az első egyenletet köbre emeljük

$$\left. \begin{aligned} u^3 \cdot v^3 &= 8 \\ -\left(u^3 + v^3\right) &= 4 \end{aligned} \right\}$$

E két egyenlet alapján felírjuk azt a másodfokú egyenletet amelynek  $u^3$  és  $v^3$  gyöke.

Ez

$$z^2 + 4z + 8 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2} = \begin{cases} -2 + 2i = u^3 \\ -2 - 2i = v^3 \end{cases}$$

Az  $y^3 - 6y + 4 = 0$  egyenlet gyökeit

$$y = u + v$$

alakban keressük, ezért az  $u^3$  és  $v^3$  komplex számokból köbgyököt kell vonni

$$z_1 = -2 + 2i \quad \text{algebrai alakban lévő komplex számot át kell írni}$$

trigonometriai alakra

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{-2} = -1; \quad \varphi = 135^\circ$$

$$z_1 = \sqrt{8} (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{z_1} &= \sqrt[6]{8} \left( \cos \frac{135^\circ + k 360^\circ}{3} + i \sin \frac{135^\circ + k 360^\circ}{3} \right) = \\ &= \sqrt{2} \left[ \cos (45^\circ + k 120^\circ) + i \sin (45^\circ + k 120^\circ) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 0 \text{ mellett } u_1 &= \sqrt[3]{z_1} = \sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \\ &= \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \underline{\underline{1 + i}} \end{aligned}$$

$v^3$ -ból is köbgyököt kellene vonni. E helyett  $u_1$  ismeretében az  $u \cdot v = -\frac{p}{3}$  egyenlet felhasználásával az  $u_1$ -hez tartozó  $v_1$ -et előállítjuk.

$$v_1 = \frac{6}{3 u_1} = \frac{2}{1 + i} = \frac{2(1 - i)}{2} = 1 - i.$$

Igy az  $y^3 - 6y + 4 = 0$  egyenlet gyökei

$$y_1 = u_1 + v_1 = 1 + i + 1 - i = 2$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}i(u_1 - v_1) = -1 - \sqrt{3}$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - \frac{\sqrt{3}}{2}i(u_1 - v_1) = -1 + \sqrt{3}.$$

Az eredeti egyenlet gyökei pedig az  $x = y - 1$  egyenlőség felhasználásával

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2 - 1 = 1 \\ x_2 &= -2 - \sqrt{3} \\ x_3 &= -2 + \sqrt{3} \end{aligned} \right\}$$

2.  $x^3 - 6x^2 + 6x + 10 = 0$  A másodfokú tag kiküszöbölése az előbbi feladat mintájára történt

$$y^3 - 6y + 6 = 0; \quad p = -6$$

$$q = 6$$

Használjuk fel a Cardano-képletet!

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{6}{2} + \sqrt{\frac{36}{4} - \frac{216}{27}}} =$$

$$= \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 - 8}} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$$

$$u_1 = \sqrt[3]{-2}; \quad v_1 = -\frac{2}{\sqrt[3]{12}} = -\sqrt[3]{4}$$

$y = u + v$  alapján

$$y_1 = u_1 + v_1 = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}i(u_1 - v_1) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}i\left(-\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - \frac{\sqrt{3}}{2}i(u_1 - v_1) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}i\left(-\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right).$$

Az  $x^3 - 6x^2 + 6x + 10 = 0$  egyenlet gyökei az

$x = y + 2$  egyenlőség alapján

$$\begin{cases} x_1 = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} + 2 \\ x_2 = -\frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}\right) + 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}i\left(-\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right) \\ x_3 = -\frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}\right) + 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}i\left(-\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right) \end{cases}$$

3. Az  $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$  egyenlet, mivel van egy racionális gyöke az  $x_1 = 1$ , egyszerűbben is megoldható. A baloldalon lévő harmadfokú polinomot elosztjuk az  $x_1 = 1$ -hez tartozó gyöktényezővel.

$$(x^3 + 3x^2 - 3x - 1) : (x - 1) = x^2 + 4x + 1$$

$$\begin{array}{r} -x^3 + x^2 \\ \hline 4x^2 - 3x \\ -4x^2 + 4x \\ \hline x - 1 \\ -x + 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Most már csak az  $x^2 + 4x + 1 = 0$  másodfokú egyenletet kell megoldani a többi gyökök meghatározása céljából.

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} -2 + \sqrt{3} \\ -2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

A megoldás egyszerűsége arra ösztönöz bennünket, hogy egy adott harmadfokú egyenletnél keressünk racionális gyököket. A harmadfokú egyenlet ha egész együtthatós, akkor érdemes ilyen gyököket keresni, mert bizonyítható tétel a következő:

Az egész együtthatóju

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n; \quad (a_0 \neq 0)$$

polinomnak a

$$\frac{p}{q} \quad (q \neq 0 \text{ és } (p, q) \text{ relatív primek})$$

racionális szám csak úgy lehet gyöke, ha

p osztója az abszolút tagnak, és

q osztója a legmagasabbfokú tag együtthatójának.

(A feltétel csak szükséges!)

Például az

$$f(x) = 3x^3 + x^2 - 8x + 4 \quad \text{polinom } \frac{p}{q}$$

alaku rac. zérus helyei a következő számok közül valók lehetnek. (A

számláló 4-nek a nevező 3-nak osztója.)

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}.$$

Látható, hogy kis egész számok (3 és 4) esetén is sok lehetőség van. Ezeknél az értékeknél meg kell nézni  $f(x)$  helyettesítési értékét. Ha valamely  $x$  helynél  $f(x) = 0$ , akkor az  $x$  gyök. A helyettesítési érték gyors kiszámítására ( $f(x)$  akárhányszor fokra) igen alkalmas a Horner-elrendezés. Ez  $f(x)$  alkalmas átrendezésével azonnal  $f(x)$  helyettesítési értékét adja.

Például az

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 + x^2 - 8x + 4 = (3x^2 + x - 8)x + 4 = \\ &= [3x + 1]x - 8x + 4 = \left( \left[ \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\} x + 1 \right] x - 8 \right) x + 4. \end{aligned}$$

Könnyebben áttekinthető formában

	3	1	-8	4
$x = 1$	3	$\underbrace{3 \cdot 1 + 1}_{4}$	$\underbrace{4 \cdot 1 - 8}_{-4}$	$1 \cdot (-4) + 4 = 0$
$x = 2$	3	7	6	$16 \neq 0$

Az első sorba a polinom együtthatóit írjuk (esetleges 0 együtthatókat is) az első oszlopba pedig a  $\frac{p}{q}$  alakú lehetséges gyököket

$x$  értéke mellé leírjuk a legmagasabbfokú tag együtthatóját. Összeszorozzuk a két számot majd hozzáadjuk a jobbra felette lévő következő együtthatót. Az így kapott számot leírjuk. Azután ismét szorzunk a megfelelő  $x$  értékkel, hozzáadjuk a következő együtthatót és leírjuk. S mindezt addig folytatjuk amíg van együttható. Az utolsó helyre éppen  $f(x)$  kerül.

A Horner-elrendezésnek egyszerűsége mellett más előnye is van. Ugyanis, ha sikerült egy gyököt megtalálnunk, akkor az egyenlet többi gyökét abból az eggyel alacsonyabbfokú egyenletből nyerhetjük, amelynek baloldalát a gyöktényezővel elosztjuk  $3x^3 + x^2 - 8x + 4 = 0$  egyenletnél

$$(3x^3 + x^2 - 8x + 4) : (x - 1) = 3x^2 + 4x - 4$$

$$\begin{array}{r} -3x^2 + 3x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$4x^2 - 8x$$

$$\begin{array}{r} + 4x^2 - 4x \\ \hline \end{array}$$

$$-4x + 4$$

$$\begin{array}{r} + 4x - 4 \\ \hline \end{array}$$

$$0$$

A hányados polinom együtthatói 3, 4, - 4, tehát éppen azok a számok, amelyek a Horner elrendezés második sorában állnak. Így a polinomok osztását sem kell elvégeznünk.

Feladatok:

Keressük meg a racionális gyökeit a következő harmadfoku egyenleteknek!

1.  $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

2.  $x^3 - 2x^2 - 15x + 36 = 0$

3.  $24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 = 0$

4.  $3x^3 + 2x^2 - 37x + 12 = 0$

5.  $3x^3 - 17x^2 + 21x + 9 = 0$

6.  $x^3 - 6x^2 - 19x + 84 = 0$

7.  $x^3 - 3x^2 + 8x - 12 = 0$

8.  $x^3 - 3x^2 + 5x - 36 = 0$

9.  $x^3 - 7x + 6 = 0$

10.  $9x^3 + 30x^2 + 7x - 6 = 0$

11.  $x^3 - 6x^2 + ax - 6 = 0$  egyenletben határozzuk meg a értékét

ugy, hogy az egyik gyök 3 legyen. Mennyi lesz a másik két gyök?

12.  $x^3 + ax^2 + bx + 6 = 0$  egyenletben határozzuk meg a és b értékét ugy, hogy az egyenlet egyik gyöke 2, egy másik gyöke 3 legyen. Mennyi a harmadik gyök?

Oldjuk meg a következő harmadfokú egyenleteket a Cardano-formula segítségével!

13.  $x^3 + 12x^2 + 24x - 64 = 0$

14.  $x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = 0$

15.  $x^3 + 6x^2 + 14x - 21 = 0.$

### A determináns

Példák

#### A másodrendű determináns megoldása

1. 
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-7) - 3 \cdot 5 = -29$$

2. 
$$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -3 \cdot 6 - (-4 \cdot 5) = 2$$

#### A harmadrendű determináns megoldása

a/ átlós módszerrel. (Ez a módszer csak a másod- és harmadrendű determinánsok kiszámítására alkalmas.)

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -5 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 48 + 0 + 18 - (-8 + 0 - 45) = \underline{\underline{119}}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -5 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 4(4 \cdot 6 - (-15)) - 3(12 - 6) + 2(4 - (-30)) = 4(24 + 15) - 3(6) + 2(34) = 4 \cdot 39 - 18 + 68 = 156 - 18 + 68 = 119$$

b/ aldeterminánssal az utolsó sora szerint kifejtve

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -5 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 1(24 + 30) - 0 + 3(16 + 15) = 54 + 3(31) = 54 + 93 = 119$$

Mindig igyekezzünk kiválasztani azt a sort vagy oszlopot, amelyikben a legegyszerűbb számok vannak.

c/ A determináns elemi tulajdonságai és az aldetermináns fogalmának felhasználásával

$(-3) \rightarrow +$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -5 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \text{Az első oszlop } (-3) \text{ szorosát adjuk a harmadik oszlophoz.}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 3 & -14 \\ -5 & 4 & 21 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & -14 \\ 4 & 21 \end{vmatrix} = 63 + 56 = 119$$

A negyedrendű determináns kifejtése

a/ aldeterminánssokra való bontással

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -9 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 2 & -1 \\ 4 & -9 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -9 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} -$$

$$-4 \begin{vmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -9 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 2 & -1 \\ 4 & -9 & 0 \\ -14 & 7 & 0 \end{vmatrix} -$$

$$-2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & -14 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -9 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= + 98 + 100 - 176 + 164 = \underline{\underline{186}}$$

b/ A determináns elemi tulajdonságai és az aldetemináns fogalmának felhasználásával.

$$4. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -9 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

A determináns második sorát szorzom 2-vel, de az egész determinánst osztom is kettővel

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 6 & -12 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -9 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

Az első sor (-1)-szeresét hozzáadom az utolsó sorhoz

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 6 & -12 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -9 & 0 \\ -3 & -4 & 7 & 0 \end{vmatrix} =$$

Az első sort hozzáadom a másodikhoz

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 7 & -10 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -9 & 0 \\ -3 & -4 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (-2) \begin{vmatrix} 7 & -10 & 0 \\ 2 & 4 & -9 \\ -3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \underline{\underline{186}}$$

Feladatok:

$$1. \quad 1. \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = ?$$

$$2. \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = ?$$

$$3. \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = ?$$

$$4. \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 6 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = ?$$

$$5. \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & 5 \end{vmatrix} = ?$$

$$6. \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = ?$$

$$7. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 13 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = ?$$

$$8. \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -5 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

$$9. \begin{vmatrix} 4 & 5 & -7 \\ 3 & 9 & 11 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = ?$$

$$10. \begin{vmatrix} 9 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

$$11. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -5 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = ?$$

$$12. \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{7} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = ?$$

$$13. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = ?$$

$$14. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \end{vmatrix} = ?$$

$$15. \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{25} \end{vmatrix} = ?$$

$$16. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -4 & 16 & -64 \end{vmatrix} = ?$$

Elsőfoku egyenletrendszerek megoldása, Cramer szabály

$$1. \left. \begin{array}{l} 5x - y = -25 \\ 10x + 3y = 20 \end{array} \right\}$$

Az egyenletrendszerből megpróbálunk kiküszöbölni egy ismeretlent és így egyismeretlenes egyenlethez jutunk.  
Az első egyenletből

$$\begin{aligned} y &= 5x + 25 && \text{Ezt a második egyenletbe téve} \\ 10x + 3(5x + 25) &= 20 && y = 5x + 25 \quad \text{alapján} \\ 10x + 15x + 75 &= 20 && \underline{y = 14} \\ 25x &= -55 \\ \underline{x} &= \underline{-2,2} \end{aligned}$$

$$2. \quad \left. \begin{aligned} x - 2y &= 3 \\ 5x + y &= 4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y &= \frac{x-3}{2} && \text{az első egyenletből} \\ y &= 4 - 5x && \text{a második egyenletből.} \end{aligned}$$

Igy a jobboldalak is egyenlők

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{2} &= 4 - 5x \quad / \cdot 2 && y = 4 - 5x \quad \text{alapján} \\ x - 3 &= 8 - 10x && \underline{y = -1} \\ 11x &= 11 \\ \underline{x} &= \underline{1} \end{aligned}$$

$$3. \quad \left. \begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 7x + 2y &= 13 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Az első egyenlet mindkét oldalát } (-2)\text{-vel, a} \\ &\text{másodikat } 3\text{-mal szorozzuk és az egyenletek} \\ &\text{megfelelő oldalait összeadjuk,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4x - 6y &= -10 && y \text{ ismeretlen értékét helyettesítéssel kapjuk} \\ 21x + 6y &= 26 \\ \hline 17x &= 29 && 2x + 3y = 5 \\ &&& \frac{58}{17} + 3y = 5 \\ &&& 3y = \frac{27}{17} \quad \underline{y = \frac{9}{17}} \end{aligned}$$

$$4. \quad \left. \begin{aligned} 2x + 3y - z &= -3 \\ -4x - 2y + 3z &= 6 \\ 3y + 5z &= 17 \end{aligned} \right\} D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 34 \neq 0$$

A Cramer szabály szerint:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & 3 \\ 17 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{34} = \frac{165 - 97}{34} = \frac{68}{34} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -4 & 6 & 3 \\ 0 & 17 & 5 \end{vmatrix}}{34} = -\frac{34}{34} = -1$$

$z = 2x + 3y + 3$  egyenletből  $z = 4$ .

Feladatok:

1. 
$$\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 8x + 3y = 5 \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases}$$

3. 
$$\begin{cases} \frac{a}{8} - \frac{b}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{6} = \frac{7}{3} \end{cases}$$

4. 
$$\begin{cases} x + \frac{2}{3}y = 6 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$$

5. 
$$\begin{cases} \frac{2x}{9} + \frac{y}{4} = 11 \\ \frac{5x}{12} + \frac{y}{3} = 19 \end{cases}$$

6. 
$$\begin{cases} \frac{a+3}{2} - \frac{b-2}{3} = 2 \\ \frac{a-1}{4} + \frac{b+1}{3} = 4 \end{cases}$$

7. 
$$\begin{cases} \frac{x+1}{y+2} = 5 \\ 3(2x-5) - 4(3y+4) = 5 \end{cases}$$

8. 
$$\begin{cases} \frac{2x-1}{5} + \frac{3y-2}{4} = 2 \\ \frac{3x+1}{5} - \frac{3y+2}{4} = 0 \end{cases}$$

9. 
$$\begin{cases} x + 2y = 9 \\ y - 3z = -5 \\ 5z - x = 14 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} 10. \quad 2x - 3y + 4z = -4 \\ \quad \quad 5y - 4x - 2z = 0 \\ \quad \quad \quad 4y + 3z = 5 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 17. \quad 3x + 2y + 3z = 110 \\ \quad \quad 5x + \quad y - 4z = 0 \\ \quad \quad 2x - 3y + \quad z = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 11. \quad x + y + z = 2 \\ \quad \quad 2x + 3z = 14 \\ \quad \quad \quad 2y + 2z = 2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 18. \quad 2x + 3y - 5z = 17 \\ \quad \quad 3x - 4y - 6z = -14 \\ \quad \quad 8x - 7y - 2z = 9 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 12. \quad x + 2y + 3z = 8 \\ \quad \quad x + 2y \quad \quad = -4 \\ \quad \quad x + z \quad \quad = 6 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 19. \quad x - y - 2z = 3 \\ \quad \quad \quad y + z = -1 \\ \quad \quad 2y - x - z = 12 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 13. \quad 3x + 2y + z = 2 \\ \quad \quad 2x + 3y - z = 5 \\ \quad \quad \quad x + y + z = 6 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 20. \quad 2x + z = 11 \\ \quad \quad 3y - x + z = 14 \\ \quad \quad 2y - 2z + 2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 14. \quad 2x + \quad y = 7 \\ \quad \quad y - 3z = -9 \\ \quad \quad 5z - \quad x = 18 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 21. \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{4}{z} = -5 \\ \quad \quad \frac{2}{x} + \frac{2}{y} - \frac{12}{z} = 18 \\ \quad \quad \frac{2}{y} - \frac{3}{x} + \frac{1}{z} = -4 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 15. \quad 4x - 3y - z = 4 \\ \quad \quad y + 2x - 2z = -7 \\ \quad \quad x - 4z + 2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 22. \quad \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{5}{12} \\ \quad \quad \frac{2}{x} - \frac{1}{y} - \frac{4}{z} = \frac{5}{6} \\ \quad \quad \frac{3}{x} + \frac{5}{y} - \frac{2}{z} = \frac{3}{2} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 16. \quad 7x - 6y + 7z = 100 \\ \quad \quad x - 2y + \quad z = 0 \\ \quad \quad 3x + \quad y - 2z = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 23. \quad x + 2y = 5 \\ \quad \quad y + 2z = 8 \\ \quad \quad z + 2u = 11 \\ \quad \quad u + 2x = 6 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 24. \quad x - 2y + 3z - u = 5 \\ \quad \quad y - 2z + 3u - x = 0 \\ \quad \quad z - 2u + 3x - y = 0 \\ \quad \quad u - 2x + 3y - z = 5 \end{array} \right\} \quad 26. \quad \left. \begin{array}{l} x - y - 2z = 3 \\ \quad \quad y + z = -1 \\ \quad \quad 2y - x - z = 8 \end{array} \right\}$$

$$25. \quad \left. \begin{array}{l} x + y - z = 11 \\ \quad \quad z - y + x = 1 \\ \quad \quad y + z - x = 5 \end{array} \right\}$$

27. Határozzuk meg az  $a, b, c$  értékét úgy, hogy az  $ax^2 + bx + c$  polinom értéke  $x = 1$  helyen  $1$ ,  $x = 2$  helyen  $\frac{1}{2}$  és az  $x = 3$  helyen  $\frac{1}{3}$  legyen.

### Mátrixszámítás elemei

Példák:

1.

$$\begin{matrix} A & B & C \\ (2,3) & (3,4) & (2,4) \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 \\ 11 & 9 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ugyanis az  $A$  mátrix sorait a  $B$  mátrix oszlopaival szorozva kapjuk, hogy

$$\begin{array}{ll} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 7 & 3 + 6 + 2 = 11 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 6 & 3 + 3 + 3 = 9 \\ 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 5 & -3 + 6 + 2 = 5 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4 & 3 + 3 + 1 = 7 \end{array}$$

2. Meghatározandó a  $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix inverz mátrixa mátrixegyenlettel!

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0, \quad \text{tehát létezik a } B^{-1}$$

$$B \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ alapján}$$

$$\left. \begin{aligned} 3x_{11} - 3x_{21} &= 1 \\ 2x_{11} + x_{21} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} 3x_{12} - 3x_{22} &= 0 \\ 2x_{12} + x_{22} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Ezen egyenletrendszerekből

$$x_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{1}{9}$$

$$x_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{3}{9}$$

$$x_{21} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{9} = -\frac{2}{9}$$

$$x_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{3}{9}$$

Igy az inverz mátrix  $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{3}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{3}{9} \end{pmatrix}$

3. Határozzuk meg az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix inverzét az (33)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \frac{A_{31}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \frac{A_{32}}{d} \\ \frac{A_{13}}{d} & \frac{A_{23}}{d} & \frac{A_{33}}{d} \end{pmatrix}$$

összefüggés alapján, amelyben  $A_{ik}$  a  $a_{ik}$ -hoz tartozó aldetermináns értékét jelenti  $d$  pedig a mátrixból képzett determinánsét.

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \text{ így } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{3}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{3} \\ -\frac{3}{3} & \frac{3}{3} & -\frac{3}{3} \end{pmatrix}$$

4. Határozzuk meg az

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & -2 & 5 \\ 10 & 15 & 25 & 17 \end{pmatrix} \text{ mátrix rangját!}$$

A mátrix rangja legalább 1 és legfeljebb 3.

A fenti mátrixból kivethető harmadrendű determinánsok (sorok és oszlopok cseréje a kivételnél nincs megengedve) száma:

$$\binom{3}{3} \cdot \binom{4}{3} = 4 \text{ db.}$$

Rendre meg kell vizsgálni van-e ezek között el nem tűnő harmadrendű determináns.

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & -2 \\ 10 & 15 & 25 \end{vmatrix} = 0, \text{ mert az első és második oszlopa arányos}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 & 9 \\ 4 & 6 & 5 \\ 10 & 15 & 17 \end{vmatrix} = 0, \text{ - " -}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 4 & -2 & 5 \\ 10 & 25 & 17 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 5 \\ 5 & 25 & 17 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 \\ 6 & -2 & 5 \\ 15 & 25 & 17 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 5 \\ 5 & 25 & 17 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 = 0$$

(A két utóbbi determinánsnál a lineáris kombináció nem szembetűnő.)  
Nincs el nem tűnő harmadrendű determináns, tehát a mátrix rangja legfeljebb 2 lehet.

Kivehető másodrendű determináns

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 18 \text{ van. Ezekből azonnal kiválasztható}$$

$$\text{pl. } \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 15 & 25 \end{vmatrix} = 150 + 30 = 180 \neq 0$$

ezért a rang 2, vagyis  $\rho(M) = 2$ .

Megjegyzés: Kevesebb munkával megállapíthatjuk a mátrix rangját, ha szem előtt tartjuk a következő tételt:

Ha egy mátrixban mindazok az  $(r + 1)$ -ed-rendű determinánsok eltűnnek, amelyek egy fix el nem tűnő  $r$ -ed-rendű determinánst tartalmaznak, akkor az összes  $(r + 1)$ -ed-rendű determinánsok eltűnnek.

A feladatunk megoldásában az előző tétel szerint elegendő lett volna pl. a következő két determináns vizsgálata, mert ezek tartalmaznak egy el nem tűnő másodrendű determinánst.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 15 & 25 \end{vmatrix} \\ 10 & 15 & 25 \end{vmatrix} = 0 \quad d_2 = \begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 \\ 6 & -2 & 5 \\ 15 & 25 & 17 \end{vmatrix} = 0$$

5. Határozzuk meg az

$$M_{(3,5)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 1 & 4 \\ 7 & -4 & 2 & 5 & 9 \\ -1 & 13 & -11 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ mátrix rangját!}$$

A mátrix rangjának meghatározását még egyszerűbbé tehetjük a következő két tétel felhasználásával.

1. Egy mátrix rangja nem változik, ha egy oszlopát (vagy egy sorát) megszorozzuk egy 0-tól különböző számmal.

2. Egy mátrix rangja nem változik, ha egyik oszlopához (vagy sorához) egy másik oszlop (sor) többszörösét adjuk.

$$M_{(3,5)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 1 & 4 \\ 7 & -4 & 2 & 5 & 9 \\ -1 & 13 & -11 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

Adjuk a 4. oszlop  $(-2)$ -szere-  
sét az első,  $(-3)$ -szorosát a 2.  
oszlophoz, 3-szorosát a 3.-hoz  
és  $(-4)$ -szeresét az 5. oszlop-  
hoz,

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -19 & 17 & 5 & -11 \\ 3 & 19 & -17 & -2 & 11 \end{pmatrix} \sim$$

adjuk a 2. sort a harmadik sor-  
hoz,

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -19 & 17 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

szorozzuk meg az első oszlopot  
 $\frac{1}{3}$ -dal, a másodikat  $\frac{1}{19}$ -del, a  
harmadikat  $\frac{1}{17}$ -del, a negyediket  
 $\frac{1}{11}$ -del,

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

az első sor  $(-3)$ -szorosát ad-  
juk a harmadik sorhoz, majd a  
harmadik oszlopot adjuk az el-  
ső, második, majd az ötödik és  
 $(-5)$ -szörösét a negyedik osz-  
lophoz.

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Két zérótól különböző számot kaptunk, amelyek nincsenek egy osz-  
lopban és egy sorban. Tovább az eljárást nem érdemes folytatni, mert ez-  
zel az egyesek helye változna csak meg a számuk nem. Így a rangszám  
a nem 0 elemek számával egyezik meg. Könnyen látható módon másod-  
rendű aldetemináns is kivehető belőle. ↪ harmadrendűek azonban tartal-  
mazni fognak egy zérókból álló oszlopot. Tehát  $\mathcal{R} \left( \begin{matrix} M \\ 3,5 \end{matrix} \right) = 2$

6. Állapítsuk meg, hogy a következőkben adott oszlopvektorok lineárisan függőek-e vagy függetlenek?

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

A vektorokból képzett determináns

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0, \quad \text{tehát függetlenek.}$$

Változtassuk  $\bar{b}$  (-2) komponensét úgy, hogy a három vektor függő legyen!

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 3 \end{vmatrix} = 6 + \lambda + 2 - 1 - 4\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda = \frac{4}{3}$$

$\bar{b}$  vektorban (-2) helyébe  $\frac{4}{3}$  -ot írva a három vektor függő lett, ami azt jelenti, hogy bármelyikük kifejezhető a másik kettő segítségével.

Például  $\bar{a}$  kifejezhető  $\bar{b}$  és  $\bar{c}$  segítségével mégpedig  $\bar{a} = 3\bar{b} - \bar{c}$  alakban. Ezen feladat megoldása homogén lineáris egyenletrendszer megoldásához vezet ezért ezt későbbre halasztjuk.

Feladatok:

1.

$$\begin{pmatrix} 2,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = ?$$

2.

$$\begin{matrix} A & \cdot & B & = & C & = & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} & = & ? \\ (2,3) & & (3,4) & & & & & & & & \end{matrix}$$

3.

$$\begin{matrix} A & \cdot & B & = & C & = & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} & = & ? \\ (2,3) & & (3,4) & & & & & & & & \end{matrix}$$

4.

$$\begin{matrix} A & \cdot & B & = & C & = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} & = & ? \\ (3,3) & & (3,4) & & & & & & & & \end{matrix}$$

5.

$$\begin{matrix} A & \cdot & B & = & C & = & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} & = & ? \\ (2,3) & & (3,4) & & & & & & & & \end{matrix}$$

6.

$$\begin{matrix} A & \cdot & B & = & C & = & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & = & ? \\ (3,3) & & (3,4) & & & & & & & & \end{matrix}$$

7. Igaz-e a mátrixok körében az a tétel, hogy a mátrixok szorzata akkor, és csakis akkor nulla, ha az egyik mátrix nullmátrix?

Határozzuk meg a következő feladatoknál az inverz mátrixot!

8.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

9.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

10.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

11.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



12.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

13.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

14.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

15.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

16.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

17.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

18. Igaz-e, hogy a kommutatív mátrixpárok csak négyzetes mátrixok lehetnek?

19. Meghatározandó két olyan egymástól különböző mátrix, amelyek szorzata kommutatív, de egymásnak nem inverzei! ( $A, B \neq O, E$ ).

Határozzuk meg a következő mátrixok rangját!

20.

$$M_{(4,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

21.

$$M_{(4,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

22.

$$M_{(4,5)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

23.

$$M_{(4,6)} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 & 8 & -2 & -3 \\ 5 & 0 & -2 & 3 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & -3 & -5 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

### Általános lineáris egyenletrendszer megoldása

a/ Az ismeretlenek száma egyenlő az egyenletek számával.

1. Az egyenletrendszer determinánsa  $D \neq 0$ . Ilyen típusu példákat és feladatokat a Cramer szabállyal kapcsolatosan adtunk.

2. Az egyenletrendszer determinánsa  $D = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y - 4z = 3 \\ -4x - 6y + 5z = -4 \\ 6x + 9y - 6z = 5 \end{array} \right\} M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -4 & -6 & 5 \\ 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}; \quad M' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & -4 \\ -4 & -4 & -6 & 5 \\ 5 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Mivel  $\rho(M) = \rho(M') = 2$ , az egyenletrendszer megoldható. Kiválasztunk egy el nem tűnő másodrendű determinánst pl.:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 9 & -6 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$$

Tekintsük az ezt tartalmazó egyenleteket!

$$\left. \begin{array}{l} 3y - 4z = 3 - 2x \\ 9y - 6z = 5 - 6x \end{array} \right\}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 - 2x & -4 \\ 5 - 6x & -6 \end{vmatrix}}{18} = \frac{2 - 12x}{18} = \frac{1 - 6x}{9}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 - 2x \\ 9 & 5 - 6x \end{vmatrix}}{18} = -\frac{6}{9}$$

Az általános megoldás (x-et választva paraméternek):

$$x = t; \quad y = \frac{1 - 6t}{9}; \quad z = -\frac{6}{9}$$

3. Homogén lineáris egyenletrendszer megoldása

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 7y - z = 0 \\ -2x + 3y + 7z = 0 \\ -x - y + 13z = 0 \end{array} \right\} D = \begin{vmatrix} 3 & -7 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \\ -1 & -1 & 13 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ezért}$$

az egyenletrendszernek van a triviális  $x = y = z = 0$ -tól különböző megoldása.

A számításokat az előző feladat mintájára végezzük:

$$\left. \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -5; \\ \begin{array}{l} 3x - 7y = z \\ -2x + 3y = -7z \end{array} \end{array} \right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z & -7 \\ -7z & 3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{3z - 49z}{-5} = \frac{46z}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & z \\ -2 & -7z \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-21z + 2z}{-5} = \frac{19z}{5}$$

Az általános megoldás:  $x = \frac{46t}{5}$ ;  $y = \frac{19t}{5}$ ;  $z = t$ .

Végtelen sok megoldás van, amelyekben az ismeretlenek aránya meghatározott.

b/ Az ismeretlenek száma nem egyenlő a megadott egyenletek számával.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix};$$

A zárójelbe tett számok az egyenletrendszert meghatározó együtthatók.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$D' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldható mert  $\rho(D) = \rho(D') = 2$

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = 2 - 3z \\ 3x - y = 6 - 5z \end{array} \right\}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3z & -2 \\ 6 & -5z & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{10 - 5z}{5} = 2 - \frac{7}{5}z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 - 3z \\ 3 & 6 - 5z \end{vmatrix}}{5} = \frac{4z}{5}; \quad z = 1 - re \quad x = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{4}{5}$$

Az általános megoldás:  $x = 2 - \frac{7}{5}t$ ;  $y = \frac{4}{5}$ ;  $z = t$ .

Feladatok:

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket!

1.

$$\left. \begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= -21 \\ -x - 2y + z &= -8 \\ 3x - 8y + 5z &= -50 \end{aligned} \right\}$$

2.

$$\left. \begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= -21 \\ -x - 2y + z &= -8 \\ 3x - y + z &= 5 \end{aligned} \right\}$$

3.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{lineárisan}$$

összefüggő vektorok közül fejezzük ki  $\vec{a}$ -t  $\vec{b}$  és  $\vec{c}$  segítségével!

(Meg kell oldani a

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{homogén lineáris egyenletrendszer.})$$

A következő vektorokat tegyük lineárisan függő vektorokká és fejezzük ki az egyik vektort a másik kettő segítségével!

4.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ ? \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = ?$$

5.

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ ? \end{pmatrix}; \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \bar{b} = ?$$

6. Adott

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 1 & 4 \\ 7 & -4 & 2 & 5 & 9 \\ -1 & 13 & -11 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ mátrix,}$$

(3,5)

amelynek rangja  $\rho(M) = 2$ . Válasszunk ki a mátrixból két lineárisan független oszlopvektort és állítsunk elő ezek segítségével egy tetszés szerinti harmadik oszlopvektort!

7.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x = ?; \quad y = ?; \quad z = ?; \quad u = ?; \quad v = ?$$

MAGASABBRENDÜ SZÁMTANI SOROZAT ÉS SOR

Példák:

1. Adva egy magasabbrendű számtani sorozat első öt eleme: 1, 3, -1, -3, 2.

a/ Határozzuk meg a sorozat következő elemét úgy, hogy negyedrendű számtani sorozatot kapjunk.

b/ Számítsuk ki a sorozat 10-ik elemét.

c/ Számítsuk ki a sorozat első 12 elemének összegét.

a/ Leírjuk a magasabbrendű számtani sorozat ismert elemeit, majd képezzük ennek a differencia sorozatait. Negyedrendű a számtani sorozat akkor, ha a negyedik differencia sorozata állandó. A hatodik tag megalkotásánál ezt vesszük figyelembe.

1	3	-1	-3	2	16
	2	-4	-2	5	14
		-6	2	7	9
			8	5	2
				-3	-3

A bekeretezett számokat a differencia sorozatok képzési szabályának megfordításával kaptuk. A keresett elem 16.

b/ A sorozat 10-ik elemét az

$$y_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \Delta^k y_1$$

összefüggés alapján számítjuk ki a  $\Delta^0 y_1 = 1$ ,  $\Delta^1 y_1 = 2$ ,  $\Delta^2 y_1 = -6$ ,  $\Delta^3 y_1 = 8$  és  $\Delta^4 y_1 = -3$  értékek figyelembevételével.

Tehát

$$y_{10} = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} 2 + \binom{9}{2} (-6) + \binom{9}{3} 8 + \binom{9}{4} (-3) = 97.$$

c/ A sorozat első 12 elemének összegét az

$$S_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \Delta^{k-1} y_1$$

összefüggés segítségével számítjuk ki a differencia sorozatok első elemeinek felhasználásával. ( $\Delta^0 y_1 = 1$ ,  $\Delta y_1 = 2$ ,  $\Delta^2 y_1 = -6$ ,  $\Delta^3 y_1 = 8$ ,  $\Delta^4 y_1 = -3$ )

$$S_{12} = \binom{12}{1} + \binom{12}{2} 2 + \binom{12}{3} (-6) + \binom{12}{4} 8 + \binom{12}{5} (-3) = 408.$$

2. Egy harmadrendű aritmetikai sorozat első négy eleme a következő: 2, 5, 11, 20. Vizsgáljuk meg, hogy a sorozat összegét  $n$  tagig bezárólag helyesen adja-e meg az

$$S_n = \frac{n^3 + 3n}{2}$$

összefüggés?

A teljes indukcióval való bizonyítás egy kicsit hosszadalmas, ezért az

$$S_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \Delta^{k-1} y_1 \quad \text{összefüggéssel végezzük a bizonyítást.}$$

Az

$$y_1 = 2, \quad \Delta y_1 = 3, \quad \Delta^2 y_1 = 3$$

értékek mellett

$$\begin{aligned} S_n &= \binom{n}{1} 2 + \binom{n}{2} 3 + \binom{n}{3} 3 = 2n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3 + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot 3 = \frac{4n + 3n^2 - 3n + n^3 - 3n^2 + 2n}{2} = \\ &= \frac{3n + n^3}{2}. \end{aligned}$$

A megsejtett összefüggés valóban a  $\frac{3n + n^3}{2}$  kifejezést adja.

Feladatok:

1. Állapítsuk meg, hogy a következő sorozat elemei hányadrendű számtani sorozatot alkotnak:

2, 6, 18, 54, 162, ... ?

2. Egy ötödrendű számtani sorozat differencia sorozatainak első elemei a következők:

$\Delta^0 y_1 = 2, \Delta y_1 = -1, \Delta^2 y_1 = 3, \Delta^3 y_1 = 4, \Delta^4 y_1 = 5,$

$\Delta^5 y_1 = 6$ . Határozzuk meg a sorozat első 6 elemét!

3. Határozzuk meg az első 10 négyzetszám összegét! (1, 4, 9, ...)

4. Határozzuk meg az első 15 köbszám összegét! (1, 8, 27, ...)

5. Határozzuk meg az 1, 3, 7, 13, ... elemekkel adott sorozatnál a 20-ik tagot és az első 25 elem összegét!

1851

1866

ANALIZIS I. rész

Végtelen számsorozatok

Példák a sorozatok felírására

1. Határozzuk meg azt a számsorozatot, amelynek első eleme 1 és a további elemek úgy állnak elő, hogy minden előző elemét megszorozzuk  $\frac{1}{4}$ -del.

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$$

(A sorozatot a képzési szabály ismeretével adtuk meg.)

2. Irjuk fel azt a sorozatot, amelyet az  $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$  általános tag határoz meg.

$$a_1 = (-1)^2 \cdot 1 = 1 ;$$

$$a_2 = (-1)^3 \cdot 2 = -2$$

$$a_3 = (-1)^4 \cdot 3 = 3 ;$$

$$a_4 = (-1)^5 \cdot 4 = -4 .$$

A sorozat:

$$1, -2, 3, -4, \dots$$

3. Irjuk fel azt a sorozatot, amelyet a következő általános tag határoz meg:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

$$a_1 = 1 ; \quad a_2 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} ; \quad a_3 = 1$$

$$a_4 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} ; \quad a_5 = 1 ; \quad a_6 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} .$$

A sorozat:

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, \dots$$

4. Határozzuk meg azon sorozat első 4 tagját, amelynek

$$a_n = \frac{1}{a_{n-1}} + 1$$

az általános tagja és  $a_1 = 2$ . (Rekurzív megadási mód.)

$$a_1 = 2; \quad a_2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}; \quad a_3 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}.$$

A sorozat:

$$2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \dots$$

Példák az általános tag meghatározására

1. Mi lesz a 0,9, 0,99, 0,999, ... sorozat általános tagja?

$$0,9 = 1 - \frac{1}{10}; \quad 0,99 = 1 - \frac{1}{10^2}; \quad 0,999 = 1 - \frac{1}{10^3}.$$

Az általános tag:

$$a_n = 1 - \frac{1}{10^n}; \quad (n = 1, 2, \dots)$$

2. Mi lesz a következő sorozat általános tagja:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \dots$$

Látható, hogy a sorozat az

$$\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \dots, \quad a_n = \frac{2n-1}{2n+1}, \dots$$

és az

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, a_n = \frac{n}{n+1}, \dots$$

két sorozatból van összetolva,

A sorozat egyetlen képlettel is megadható, ha a második sorozat minden elemét bővítjük, mégpedig

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}; \quad \frac{2}{3} = \frac{4}{6}; \quad \frac{3}{4} = \frac{6}{8}; \quad \frac{4}{5} = \frac{8}{10}; \quad \dots$$

Igy a sorozat az

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \dots$$

elemekből áll, amelyekre  $a_n = \frac{n}{n+2}; (n = 1, 2, \dots)$

#### Példák a sorozatok konvergenciájának eldöntésére

1. Állapítsuk meg, hogy az  $a_n = \frac{3n-2}{n}$  általános taggal megadott sorozat konvergense?

a/ Először bizonyítjuk, hogy a megadott sorozat monoton növekedik, majd azt, hogy korlátos. Ebből azután következik, hogy van határértéke.

Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy  $a_{n+1} > a_n$ .

A sorozat  $n+1$ -edik tagja

$$a_{n+1} = \frac{3(n+1)-2}{n+1} = \frac{3n+1}{n+1}$$

Képezzük az  $n+1$ -edik és az  $n$ -edik tag hányadosát

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3n+1}{n+1}}{\frac{3n-2}{n}} = \frac{n(3n+1)}{(n+1)(3n-2)} = \frac{3n^2+n}{3n^2+n-2} > 1.$$

Mivel a hányados  $> 1$ , ezért  $a_{n+1} > a_n$ .

b/ Ezután megmutatjuk, hogy a sorozat korlátos.

Az  $n$ -edik tag

$$a_n = \frac{3n - 2}{n} = \frac{3n}{n} - \frac{2}{n} = 3 - \frac{2}{n}$$

$n \rightarrow \infty$  esetén  $\frac{2}{n} \rightarrow 0$  és így  $a_n \rightarrow 3$ .

Tehát a sorozat korlátos is.

2. Állapítsuk meg az

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n}, \quad \dots$$

sorozatról, hogy konvergens-e?

a/ A sorozat monoton növekedő, mert  $a_{k+1} - a_k > 0$ ,

ugyanis

$$a_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{k+k} + \frac{1}{k+(k+1)} + \frac{1}{(k+1)+(k+1)}$$

$$a_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{k+k}$$

$$a_{k+1} - a_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} > \frac{1}{2k+2} +$$

$$+ \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{2}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} = 0.$$

Tehát a sorozat szigorúan monoton nő.

b/ A sorozat korlátos, amit láthatunk abból, hogy az  $n$ -edik tagot két szám közé szorítjuk,

$a_n$ -et növeljük, ha mindegyik tört helyébe a legnagyobb törtet

$\frac{1}{n+1}$ -et írjuk, viszont kisebbítjük akkor, ha az  $n$ -edik tört helyébe a legkisebbet  $\frac{1}{2n}$ -et írjuk.

Vagyis

$$n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} < a_n < n \frac{1}{n+1} < 1.$$

Ebből adódik, hogy

$$\frac{1}{2} < a_n < 1.$$

A sorozat korlátos is, ezért konvergens.

### Feladatok a sorozatokra

Írjuk fel azokat a sorozatokat, amelyeket a következő általános tagok határoznak meg:

1.  $a_n = 2^n$ ;                      2.  $a_n = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

3. Határozzuk meg az  $1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{3}{4}, 1 + \frac{7}{8}, \dots$  sorozat általános tagját.

4. Mekkora a közelítés hibája, ha  $\frac{1}{3}$  helyett 0,33-at írunk?

5. Határozzuk meg, hogy az  $a_n = \frac{1}{2^n}$  sorozat tagjai  $n$  melyik értékétől kezdve kisebbek  $10^{-5}$ -nél?

6. Állapítsuk meg, hogy az  $a_n = \frac{n}{n+2}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) általános taggal megadott sorozat konvergens-e?

7. Határozzuk meg, hogy az

$$a_1 = \ln 2; \quad a_2 = \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{4}\right); \dots$$

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{n}{2}\right), \dots$$

sorozat konvergens-e?

### A függvény fogalma, Egyszerűbb függvénytranszformációk

Feladatok:

Ábrázoljuk értéktáblázat segítségével vagy transzformációval a következő - középiskolából márt ismert - függvényeket és határozzuk meg

értelmezési tartományukat és értékészletüket!

1.  $y = 2x$

2.  $10x - 2y = -8$

3.  $y = x^2 + 3$

4.  $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 6$

5.  $y = |x^2 - 3|$

6.  $y = 3x^3$

7.  $y = \frac{1}{x}$

8.  $y = \pm \sqrt{x}$

9.  $y = \pm \sqrt{25 - x^2}$

10.  $y = \pm \sqrt{x^2 - 1}$

11.  $y = \cos x$

12.  $y = \sin x$

13.  $y = \operatorname{tg} x$

14.  $y = \operatorname{ctg} x$

15.  $y = 2^x$

16.  $y = \log x$

Határozzuk meg a következő racionális és irracionális függvények értelmezési tartományát!

17.  $y = \frac{1}{2 - x^2}$

18.  $y = \frac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6}$

19.  $y = \sqrt{(x - 2)(x + 3)}$

20.  $y = \sqrt[3]{x^3 - 1}$

21.  $y = \frac{\sqrt{x - 1}}{x}$

22.  $y = \frac{x}{(x - 1)\sqrt{x^2 + 1}}$

23.  $y = \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1}}$

24.  $y = \sqrt{1 + x} + \sqrt{2 - x}$

Határozzuk meg a következő transzcendens függvények értelmezési tartományát:

25.  $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x - 1}$

26.  $y = \frac{1}{\sin x \operatorname{tg} x}$

27.  $y = \ln \sqrt{1 - x^2}$

28.  $y = \ln \frac{1}{1 + \ln(1 - x)}$

Határozzuk meg, hogy a következő függvények közül melyek párosak, és melyek páratlanok:

29.  $f(x) = 3x - x^3$

30.  $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$

31.  $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$

32.  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .

Vizsgáljuk meg, hogy a következő függvények közül melyek periodikusak és határozzuk meg a legkisebb periodust:

33.  $f(x) = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 \operatorname{tg} \frac{x}{3}$

34.  $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$

35.  $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$

36.  $f(x) = \sin^2 x$ .

Ábrázoljuk a következő függvényekkel adott görbékét:

37.  $y = \sin 2x + 2$

38.  $y = 2 \cos 2x$

39.  $y = 2 \sin(2x + 1)$

40.  $y = -2 \cos(2x - 2)$

41.  $y = -2 \sin(x - 2)$

42.  $y = 2 \cos(x - 1)$ .

### Függvény, inverz függvény kapcsolat

Példák:

1. Határozzuk meg az  $y = \lg(x - 3)$  függvény inverz függvényét explicit alakban.

$$y = \lg(x - 3)$$

$$x = \lg(y - 3)$$

Alkalmazzuk a 10-es alapu logaritmus ellentétes függvényét a 10-es alapu exponenciális függvényt az egyenlőség mindkét oldalára

$$10^x = 10^{\lg(y-3)}$$

A függvény és ellentétes függvény együttes alkalmazása változatlanul hagyja a jobb oldalon lévő kifejezést. Így

$$y - 3 = 10^x$$

és ebből

$$y = 10^x + 3.$$

2. Határozzuk meg az  $y = 3 - 4e^{5x-3}$  függvény inverz függvényét explicit alakban

$$y = 3 - 4e^{5x-3}$$

$$x = \frac{3 - y}{5} - \frac{3}{5}$$

$$\ln \frac{3 - y}{4} = (5x - 3) \ln e$$

$$y = \frac{\ln \frac{3 - x}{4} + 3}{5}$$

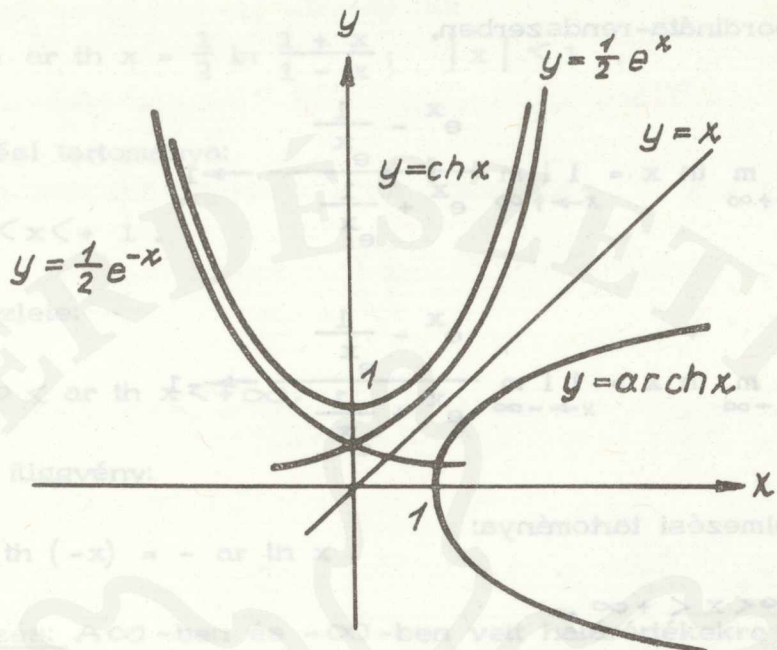
3. Ábrázoljuk az  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$  függvényt és inverzét közös koordináta-rendszerben.

Az  $y = \operatorname{ch} x$  függvény az  $y = \frac{e^x}{2}$  és az  $y = \frac{e^{-x}}{2}$  függvények összegeként áll elő.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{ch} x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2} \rightarrow +\infty$$

$$y = \operatorname{ch} x.$$



Értelmezési tartománya:

$$-\infty < x < +\infty.$$

Értékkészlete:

$$1 \leq \text{ch } x < +\infty.$$

Páros függvény:

$$\text{ch}(-x) = \text{ch } x.$$

Inverz függvénye:

$$y = \text{ar ch } x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}); \quad x \geq 1$$

$y = \text{ar ch } x$  függvény értelmezési tartománya:

$$1 \leq x < +\infty.$$

Értékkészlete:  $-\infty < \text{ar ch } x < +\infty.$

Főértéke:  $(0, +\infty).$

4. Ábrázoljuk az  $y = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$  függvényt és inverz függvényét egy közös koordináta-rendszerben.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{th} x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \rightarrow -1$$

$y = \operatorname{th} x$  értelmezési tartománya:

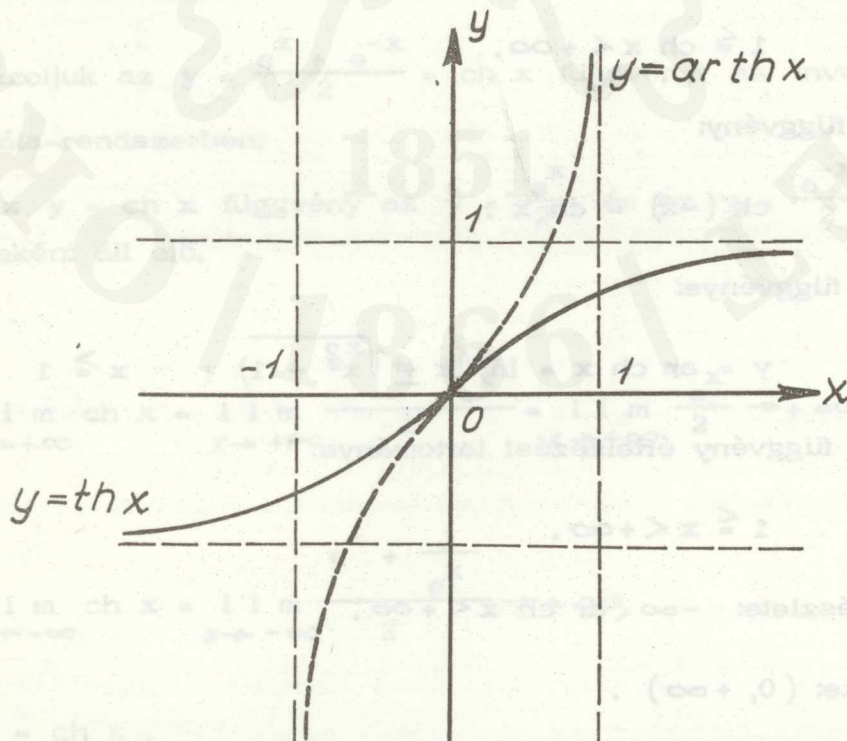
$$-\infty < x < +\infty .$$

Értékkészlete:

$$-1 < \operatorname{th} x < 1 .$$

Páratlan függvény:

$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x .$$



Inverz függvénye:

$$y = \operatorname{ar th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}; \quad |x| < 1.$$

Értelmezési tartománya:

$$-1 < x < +1.$$

Értékkészlete:

$$-\infty < \operatorname{ar th} x < +\infty.$$

Páratlan függvény:

$$\operatorname{ar th} (-x) = -\operatorname{ar th} x.$$

Megjegyzés: A  $\infty$ -ben és  $-\infty$ -ben vett határértékekre vonatkozó megállapításainkat a differenciálhányados ismeretében ellenőrizni fogjuk.

Feladatok:

Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben a következő függvényeket és inverzüket:

1.  $y = 2x$
2.  $y = \overset{(3)}{\log} x$
3.  $y = x^2$
4.  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16.$

Határozzuk meg a következő függvények inverzét:

5.  $y = \operatorname{tg} \frac{1+x}{1-x}$
6.  $y = \sin \frac{x-1}{2}$
7.  $y = \operatorname{arc} \cos \frac{1}{1-x}$
8.  $y = \frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}}.$

Határozzuk meg számítással a következő függvények inverz függvényét, majd ábrázoljuk a függvényt az inverzával együtt közös koordináta-rendszerben.

9.  $y = \operatorname{sh} x$
10.  $y = \operatorname{cth} x.$

Függvény, inverz függvény, kapcsolat felhasználásával megoldható  
egyenletek

Példák:

1.  $\arcsin \frac{1}{2} = x$  ( Keressük azon  $x$  szöget ivmértékben, amelynek  
sinusza =  $\frac{1}{2}$  )

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6}$$

$x_2$  mint szögérték nem jöhet számításba, mert nincs a főértéken belül. Az

$y = \arcsin x$  főértéke ugyanis  $-\frac{\pi}{2}$  és  $\frac{\pi}{2}$  között van.

A főérték jelölése a következő:

$$-\frac{\pi}{2} < \arcsin x < \frac{\pi}{2}$$

2.  $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x$ ;  $0 < \arccos x < \pi$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = \frac{5\pi}{6}$$

$$x_2 = \frac{7\pi}{6}$$

$x_2$  nincs a főértéken belül, tehát a megoldás  $x_1$

3.  $\operatorname{arctg}(-1) = x$ ;  $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{tg} x = -1$$

$$x_1 = \frac{3\pi}{4}; \quad x_2 = \frac{7\pi}{4}$$

Egyik szögérték sincs a főértéken belül, így negatív forgással keletkező szöget kell venni. Ez  $x_3 = -\frac{\pi}{4}$ .

$$4. \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = x; \quad 0 < \arcsin x < \pi$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x_1 = \frac{2\pi}{3}; \quad x_2 = \frac{5\pi}{3}$$

$x_2$  a főértéken kívül esik, azért nem megoldása az egyenletnek,

$$5. \quad 4 \arcsin(4x - 7) = \pi$$

$$\arcsin(4x - 7) = \frac{\pi}{4}$$

$$4x - 7 = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$4x - 7 = 1$$

$$x = 2.$$

$$6. \quad \arcsin\frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin\sqrt{1-x} = \arcsin\frac{1}{3}$$

$$\underbrace{\sin\left(\arcsin\frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin\sqrt{1-x}\right)}_{\alpha} = \frac{1}{3}$$

Kifejtve a  $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$  addíciós tétel alapján

$$\frac{2}{3\sqrt{x}} \cos(\arcsin\sqrt{1-x}) - \cos\left(\arcsin\frac{2}{3\sqrt{x}}\right) \sqrt{1-x} = \frac{1}{3}.$$

A következőkben  $\cos(\arcsin\sqrt{1-x})$

$$\cos\left(\arcsin\frac{2}{3\sqrt{x}}\right)$$

értékeket kell meghatározni.

Legyen

$$\arcsin \sqrt{1-x} = z$$

ebből

$$\sqrt{1-x} = \sin z$$

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z}$$

$$\cos z = \sqrt{1 - (1-x)} = \sqrt{x}.$$

Igy

$$\cos(\arcsin \sqrt{1-x}) = \sqrt{x}.$$

Hasonlóképpen

$$\cos\left(\arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3\sqrt{x}}\right)^2} = \frac{\sqrt{9x-4}}{3\sqrt{x}}.$$

Beírva ezen utóbbi értékeket, az egyenlet a következő:

$$\frac{2}{3\sqrt{x}} \sqrt{x} - \frac{\sqrt{9x-4}}{3\sqrt{x}} \sqrt{1-x} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{\sqrt{(9x-4)(1-x)}}{3\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{9} = \frac{(9x-4)(1-x)}{9x}$$

$$x = 9x - 4 - 9x^2 + 4x$$

$$9x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{18} = \frac{2}{3}.$$

Feladatok:

1.  $6 \sin \frac{2 - 4x}{3} = -3$

2.  $\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{5 - 4x}{3} + 4 = 3$

3.  $\frac{13}{16} \operatorname{ctg} (x - 7) + 4 = \frac{11}{6}$

4.  $2 \arcsin \frac{3x - 4}{5} = \pi$

5.  $3 \arcsin \sqrt{1 - 2x} = \pi$

6.  $4 \cos \frac{8x + 4}{3} + 7 = 3$

7.  $4 \arcsin \frac{7x - 8}{3} = \pi$

8.  $2 \cos \frac{5x - 7}{3} = \sqrt{3}$

9.  $4 \arcsin (x^2 - 3x - 3) = \pi$  10.  $6 \arcsin (x^2 - 6x + 8,5) = \pi$

11.  $\arcsin \frac{a}{b} - \arcsin \frac{a-b}{a+b} = \arcsin x$

12.  $\arcsin (x + 2) - \arcsin (x + 1) = \frac{\pi}{4}$

13.  $2 \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{4}$

Példék

Határozzuk meg az  $y = \sqrt{1 - 2x}$  függvény differenciálhányadosát az  $x = 1$  helyen.

$$f(x) = \sqrt{1 - 2x}$$

$$f(1 + \Delta x) = \sqrt{1 - 2(1 + \Delta x)} = \sqrt{-1 - 2\Delta x}$$

$$f(x) = \sqrt{1 - 2x} = \sqrt{1 - 2(1) - 2\Delta x} = \sqrt{-1 - 2\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{-1 - 2\Delta x} - \sqrt{-1}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{-1 - 2\Delta x} - \sqrt{-1})(\sqrt{-1 - 2\Delta x} + \sqrt{-1})}{\Delta x(\sqrt{-1 - 2\Delta x} + \sqrt{-1})} = \frac{-1 - 2\Delta x - (-1)}{\Delta x(\sqrt{-1 - 2\Delta x} + \sqrt{-1})} = \frac{-2\Delta x}{\Delta x(\sqrt{-1 - 2\Delta x} + \sqrt{-1})} = \frac{-2}{\sqrt{-1 - 2\Delta x} + \sqrt{-1}}$$

Ha  $\Delta x \rightarrow 0$ , akkor  $\sqrt{-1 - 2\Delta x} \rightarrow \sqrt{-1}$ , ekkor  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{-2}{\sqrt{-1} + \sqrt{-1}} = \frac{-2}{2\sqrt{-1}} = \frac{-1}{\sqrt{-1}}$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{-1}} = \frac{-1}{i} = i$$

## DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

### A függvény növekménye, differenciahányados és a differenciálhányados

Példák:

1. Határozzuk meg az  $f(x) = x^3$  függvény "növekményét", vagy függvényérték változását, ha  $x = 1$  és  $\Delta x = 1$ .

$$y = f(1) = 1^3 = 1$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 2^3 - 1^3 = 7.$$

2. Határozzuk meg az  $f(x) = x^3$  függvény differenciahányadosát az  $x = 2$  helyen, ha  $\Delta x = 1$ .

$$y = f(2) = 2^3 = 8$$

$$y + \Delta y = f(2 + 1) = 3^3 = 27$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 27 - 8 = 19$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{19}{1} = 19.$$

3. Határozzuk meg az  $f(x) = x^3$  függvény differenciálhányadosát az  $x = 2$  helyen

$$y = f(2) = 2^3 = 8$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^3 = 8 + 12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Ha  $\Delta x \rightarrow 0$ , akkor  $12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2 \rightarrow 12$  tehát

$$\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=2} = f'(2) = 12.$$

Feladatok:

Határozzuk meg az alábbi függvények alatt  $x_0$ -helyhez tartozó növekményét, differenciahányadosát adott  $\Delta x$  értékek esetén, majd képezzük határátmenettel a függvény  $x_0$  helyhez tartozó differenciálhányadosát.

1.  $y = 3x^3$ ;  $x_0 = 1$ ;  $\Delta x = 0,1$ ;  $\Delta x = 0,01$

2.  $y = \frac{1}{x}$ ;  $x_0 = 3$ ;  $\Delta x = 0,1$ ;  $\Delta x = 0,01$

3.  $y = \frac{2}{4x - 3}$ ;  $x_0 = 1,5$ ;  $\Delta x = 0,5$ ;  $\Delta x = 0,2$

4.  $y = \frac{1}{3x^2}$ ;  $x_0 = 1$ ;  $\Delta x = 1$ ;  $\Delta x = 0,1$ ;  $\Delta x = 0,01$

5.  $y = \frac{x+1}{x-1}$ ;  $x_0 = 3$ ;  $\Delta x = 0,1$ ;  $\Delta x = 0,01$ .

A derivált függvény

Példa:

Határozzuk meg az  $y = 3x - 2x^2$  függvény differenciálhányadosát az  $x = 1, 2, 3$  helyeken, majd tetszőleges  $x$  helyen!

$$f(1) = 3 - 2 = 1$$

$$f(1 + \Delta x) = 3(1 + \Delta x) - 2(1 + \Delta x)^2 = 3 + 3\Delta x - 2 - 4\Delta x - 2(\Delta x)^2 = 1 - \Delta x - 2(\Delta x)^2$$

$$\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = 1 - \Delta x - 2(\Delta x)^2 - 1$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -1 - 2\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-1 - 2\Delta x) = -1 \text{ vagyis}$$

$$\underline{f'(x = 1) = -1}$$

$$f(2) = 6 - 8 = -2$$

$$f(2 + \Delta x) = 3(2 + \Delta x) - 2(2 + \Delta x)^2 = 6 + 3\Delta x -$$

$$- 2[4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2] = 6 + 3\Delta x - 8 - 8\Delta x -$$

$$- 2(\Delta x)^2 = -2 - 5\Delta x - 2(\Delta x)^2$$

$$\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = -2 - 5\Delta x - 2(\Delta x)^2 + 2 =$$

$$= -5\Delta x - 2(\Delta x)^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = -5 - 2\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-5 - 2\Delta x) = -5 \quad \text{vagyis}$$

$$\underline{f'(x = 2) = -5.}$$

Hasonló módon

$$\underline{f'(x = 3) = 9.}$$

A derivált értéke függ  $x$  megválasztásától, vagyis  $x$ -nek a függvénye. Határozzuk meg hogyan függ  $x$ -től!

$$f(x) = 3x - 2x^2$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = 3(x + \Delta x) - 2(x + \Delta x)^2 =$$

$$= 3x + 3\Delta x - 2x^2 - 4x\Delta x - 2(\Delta x)^2$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 3x + 3\Delta x - 2x^2 - 4x\Delta x -$$

$$- 2(\Delta x)^2 - 3x + 2x^2 = 3\Delta x - 4x\Delta x - 2(\Delta x)^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3 - 4x - 2\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3 - 4x \quad \text{vagyis}$$

$$\underline{f'(x) = 3 - 4x.}$$

Feladatok:

1. Határozzuk meg az  $y = x^2$  függvény differenciálhányadosát az  $x = 1$ ;  $x = 2$ ;  $x = 3$  helyeken, majd tetszőleges  $x$  helyen!

A függvény differenciálhatósága

Példa:

Határozzuk meg az  $y = f(x) = |x|$  függvény differenciálhányadosát az  $x = 0$  helyen.

$$f(0) = 0$$

$$f(0 + \Delta x) = |\Delta x|$$

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = |\Delta x|.$$

Ha  $\Delta x > 0$ , akkor

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = +1; \quad \text{jobboldali derivált.}$$

Ha  $\Delta x < 0$ , akkor

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{-\Delta x} = -1; \quad \text{baloldali derivált.}$$

A függvénynek az  $x = 0$  helyen vett jobb- és baloldali deriváltja különböző, ezért az  $x = 0$  helyen nincs differenciálhányadosa.

Feladatok:

Képezzük az alábbi függvények jobb- és baloldali differenciálhányadosát a megadott  $x_0$  helyen:

1.  $y = x + |x|$ ;  $x_0 = 0$

2.  $y = \begin{cases} 2x; & \text{ha } x \leq 1 \\ 3-x; & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$   $x_0 = 1$

$$3. \quad y = \begin{cases} x - x^2; & \text{ha } x \leq 1 \\ -x^2 + 3x - 2; & \text{ha } x \geq 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$$

$$4. \quad y = \begin{cases} 3x - 1; & \text{ha } x \leq 2 \\ 5; & \text{ha } x \geq 2 \end{cases} \quad x_0 = 2$$

$$5. \quad y = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}; & \text{ha } x \leq 0 \\ 1-x; & \text{ha } x \geq 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

$$6. \quad y = \begin{cases} -x; & \text{ha } x \leq 0 \\ x^2; & \text{ha } x \geq 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

Differenciálási szabályok

A függvény  $y = f(x)$  (explicit) alakban van adva.

Példák:

1. Legyen  $y = mx + c$

$$y(x) = mx + c$$

$$y(x+h) = m(x+h) + c$$

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \frac{mx + mh + c - mx - c}{h} = m$$

tehát

$$y'(x) = m$$

vagyis

$$(mx + c)' = m \quad \text{és} \quad m = 0 \quad \text{esetén}$$

$$(c)' = 0$$

vagyis állandó differenciálhányadosa nulla.

2.  $y = 2x; \quad y' = 2$

3.  $y = x^5$

$$y' = 5 x^4$$

$(x^n)' = n x^{n-1}$ ;  $n$  tetszőleges valós szám.

4.  $y = 3 \cdot x^5$

$$y' = 3 \cdot 5 x^4 = 15 x^4$$

Ugyanis a differenciálhányados alapértelmezéséből következik, hogy egy függvény konstansszorosának differenciálhányadosa egyenlő a differenciálhányados konstansszorosával.

5.  $y = x^3 + x^2 + x$

Ennél a függvénynél a hatványfüggvényre és összegfüggvényre levezetett differenciálási szabályokat alkalmazzuk.

Az utóbbi

$$y = f(x) \pm g(x) \text{ -re}$$

$$y' = f'(x) \pm g'(x)$$

így

$$y' = 3x^2 + 2x + 1$$

6.  $y = x \sqrt{x^2 + 1}$

A szorzat differenciálási szabálya

$$(f \cdot g)' = f'g + g'f$$

szerint

$$y' = \sqrt{x^2 + 1} + x \cdot \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x =$$

$$= \frac{x^2 + 1 + x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

7.  $y = \frac{1}{1 + x^3}$

Az  $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$  differenciálási szabály szerint

$$y' = -\frac{3x^2}{(1+x^3)^2}$$

8.  $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$

A törtre vonatkozó

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

differenciálási szabály szerint

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2x+1)(x^2-x+1) - (2x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-x+1)^2} = \\ &= \frac{-2x^2+2}{(x^2-x+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2} \end{aligned}$$

9.  $y = \ln \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}$

a közvetett függvényre vonatkozó differenciálási szabály

$$f'(u(x)) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

szerint

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (-2x) - (1 + \sqrt{1-x^2})}{x^2} = \\ &= \frac{1}{1 + \sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-x^2 - \sqrt{1-x^2} - (1-x^2)}{x} = \end{aligned}$$

$$= \frac{-\left(1 + \sqrt{1-x^2}\right)}{1 + \sqrt{1-x^2} \cdot x \sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{x \sqrt{1-x^2}}.$$

Feladatok:

A függvényeket, ha külön kikötés nincs, mindig azon  $x$ -ekre értjük, melyeknél a függvénynek értelme van. Számítsuk ki a differenciálhányado-saikat!

1.  $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$

2.  $y = \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}$

3.  $y = \arcsin \sqrt{1-x^2};$

4.  $y = \ln \frac{3-x^2}{2-x^2}$

5.  $y = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x};$

6.  $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$

7.  $y = \ln \left( 2x + \sqrt{4x^2 + 1} \right);$

8.  $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \operatorname{tg} \frac{x \sqrt{3}}{1-x^2}$

9.  $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x;$

10.  $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

11.  $y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2};$

12.  $y = \arcsin x + \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

13.  $y = \sqrt{4x-1} + \arcsin \sqrt{4x-1};$

14.  $y = \ln \left( e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1} \right)$

15.  $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}};$

16.  $y = \frac{1 - \frac{1}{2x}}{3x + \frac{1}{2x^2}}$

17.  $y = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \left( \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right); \quad a > b \geq 0$

$$18. \quad y = \frac{2}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{1-x^2}$$

$$19. \quad y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$$

$$20. \quad y = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x + \frac{3}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{7} \operatorname{tg}^7 x$$

$$21. \quad y = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}; \quad 22. \quad y = \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$23. \quad y = \frac{1}{2a} \left( \ln \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a+x} - \frac{a}{a+x} \right)$$

$$24. \quad y = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$$

$$25. \quad y = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a+x}\sqrt{b}}{\sqrt{a-x}\sqrt{b}}; \quad (a>b, \quad b>0)$$

$$26. \quad y = \frac{2+3x^2}{x^4} \sqrt{1-x^2} + 3 \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$27. \quad y = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{a}{b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{b}$$

$$28. \quad y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$$29. \quad y = \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + x}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} - \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$$

$$30. \quad y = \sqrt{1-x^2} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + \operatorname{arc} \sin x$$

$$31. y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1+x^4} - x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}}$$

$$32. y = \ln(\operatorname{ch} x) + \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 x}$$

$$33. y = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} - \ln\left(\operatorname{cth} \frac{x}{2}\right)$$

$$34. y = \frac{b}{a} x + \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{th} \frac{x}{2}\right) \quad (0 \leq |b| < a)$$

$$35. y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}$$

Paraméteres alakban adott függvények differenciálhányadosa

$$\text{Az } \left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right\}$$

függvény első x szerinti differenciálhányadosa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

a második x szerinti differenciálhányadosa

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\dot{y}}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{x}}$$

Példák:

1. Számítsuk ki az

$$\left. \begin{array}{l} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{array} \right\} \text{ ahol } 0 \leq t < 2\pi$$

paraméteres alakban megadott kör x szerinti első és második differenciálhányadosát!

$$19. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{R \cos t}{-R \sin t} = - \operatorname{ctg} t;$$

$$20. \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{1}{-R \sin t} = - \frac{1}{R \sin^3 t}.$$

$$2. \quad \left. \begin{array}{l} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{array} \right\} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \quad (\text{asztroid})$$

$$21. \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{3 a \sin^2 t \cos t}{3 a \cos^2 t \sin t} = - \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$24. \quad \begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{3 a \cos^2 t \sin t} = \\ &= \frac{1}{3 a \cos^4 t \sin t}. \end{aligned}$$

Feladatok:

Határozzuk meg a következő paraméteres alakban adott függvények első és második x szerinti differenciálhányadosát! (A paraméter mindig pozitív)

$$1. \quad \left. \begin{array}{l} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{array} \right\} \quad (0 \leq t < 2\pi) \quad \text{ellipszis} \quad 2. \quad \left. \begin{array}{l} x = \cos 2t \\ y = \sin^2 t \end{array} \right\}$$

$$3. \quad \left. \begin{array}{l} x = e^{2t} \cos^2 t \\ y = e^{2t} \sin^2 t \end{array} \right\} \quad 4. \quad \left. \begin{array}{l} x = a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{array} \right\}$$

$$5. \quad \left. \begin{array}{l} x = e^{-at} \\ y = e^{at} \end{array} \right\} \quad 6. \quad \left. \begin{array}{l} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{array} \right\}$$

$$7. \quad \left. \begin{aligned} x &= r(t - \sin t) \\ y &= r(1 - \cos t) \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq t \leq 2\pi; \quad \text{ciklois iv})$$

$$8. \quad \left. \begin{aligned} x &= r(\cos t + t \sin t) \\ y &= r(\sin t - t \cos t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{körevolvens})$$

$$9. \quad x = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}; \quad y = \frac{2t}{t^2 - 1}; \quad (\text{egyenlőszáru hiperbola})$$

$$10. \quad \left. \begin{aligned} x &= \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ y &= \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{aligned} \right\} \quad 11. \quad \left. \begin{aligned} x &= \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}} \\ y &= \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}} \end{aligned} \right\}$$

### Implicit függvények differenciálhányadosa

$F(x, y) = 0$  alakban adott függvény differenciálhányadosa

$$a/ \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{F_x}{F_y}$$

b/ Az implicit függvény differenciálhányadosa úgy is képezhető, hogy az egyenlet mindkét oldalát végig differenciáljuk a független változó szerint és algebrai úton kifejezzük az egyenletből  $\frac{dy}{dx}$ -et.

Példák:

$$1. \quad x^2 + x^2 y + y^2 = 0;$$

$$a/ \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{2x + 2xy}{x^2 + 2y}$$

$$b/ 2x + 2xy + x^2 y' + 2yy' = 0$$

$$y' (x^2 + 2y) = - (2x + 2xy)$$

$$y' = - \frac{2x + 2xy}{x^2 + 2y}$$

2.  $x \sin y - \cos y = - \cos 2y$  (x a fgtl. változó)

$$\sin y + x \cos y y' + \sin y y' = 2 \sin 2y y'$$

$$y' (x \cos y + \sin y - 2 \sin 2y) = - \sin y$$

$$y' = - \frac{\sin y}{x \cos y + \sin y - 2 \sin 2y}$$

Feladatok:

Határozzuk meg az első x szerinti differenciálhányadosokat a következő feladatoknál:

1.  $y^3 - 3xy + x^2 = 0$

2.  $y^3 + 3x^2y + xy^2 - 3x + 5 = 0$

3.  $F(x, y) = x^3 - 3cxy + y^3 = 0$

4.  $F(x, y) = y^x - x^y = 0$

5.  $F(x, y) = e^y + ax^2 e^{-y} - 2bx = 0$

6.  $F(x, y) = \frac{y}{x} - \arctg \frac{x}{y} = 0$

7.  $F(x, y) = x \ln y + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$

8.  $F(x, y) = xy - \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 0$

### Logaritmiikus differenciálás

A differenciálendő függvényünk, ha exponenciális hatványfüggvény, ha bonyolult törtfüggvény, vagy ha összetett szorzatfüggvény, akkor először az egyenlőség mindkét oldalának vesszük a természetes logaritmusát, majd mindkét oldalát differenciáljuk a független változó szerint és algebrailag kifejezzük a differenciálhányadost.

Példák:

1.  $y = x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ;  $y' = ?$

$$\ln y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \ln x$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{\ln x}{2 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{1-x - (1+x)}{(1-x)^2} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = y \left( \frac{\sqrt{1-x}}{2 \sqrt{1+x}} \cdot \frac{\ln x (-2x)}{(1-x)^2} + \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$$

$$y' = x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left( \frac{-x \ln x}{\sqrt{1+x} (1-x)} + \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$$

2.  $y = \frac{x^2 \sqrt[5]{2+3x^2} (1-x)^4}{(x^3+2)^2}$ ;  $y' = ?$

$$\ln y = 2 \ln x + \frac{1}{5} \ln (2+3x^2) + 4 \ln (1-x) - 2 \ln (x^3+2)$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{2}{x} + \frac{1}{5} \frac{6x}{2+3x^2} - \frac{4}{1-x} - \frac{6x^2}{x^3+2}$$

$$y' = y \left( \frac{2}{x} + \frac{1}{5} \frac{6x}{2+3x^2} - \frac{4}{1-x} - \frac{6x^2}{x^3+2} \right)$$

$$3. \quad y = (x^2 + 2)^{\frac{1}{3}}(5x^3 + 3)^4(4x^5 + 2)^{\frac{1}{2}}; \quad y' = ?$$

$$\ln y = \frac{1}{3} \ln(x^2 + 2) + 4 \ln(5x^3 + 3) + \frac{1}{2} \ln(4x^5 + 2)$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{3} \frac{2x}{x^2 + 2} + 4 \frac{15x^2}{5x^3 + 3} + \frac{1}{2} \frac{20x^4}{4x^5 + 2}$$

$$y' = y \left( \frac{1}{3} \frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{60x^2}{5x^3 + 3} + \frac{5x^4}{2x^5 + 1} \right).$$

Feladatok:

$$1. \quad y = (2x + 7)^{\frac{1}{2x + 1}}$$

$$2. \quad y = \frac{x^3 \sqrt{1 + \ln x}}{(1 + x)^4}$$

$$3. \quad y = \frac{x^2 \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$4. \quad y = x^3 (x^2 + 4)^{\frac{1}{2}} (x^3 + 3x)^{\frac{1}{3}}$$

$$5. \quad y = \frac{2x^3 \sqrt{6x + 1}}{\sqrt{3x^2 + 4x + 4}}$$

$$6. \quad y = \sqrt{x(x^2 + 2)}^{\frac{1}{3}} (x + 2x^3)^{\frac{1}{4}}$$

## A DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS ALKALMAZÁSAI

### A differenciálhányados értéke a függvény adott pontjában

Példák:

1.  $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ ;  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = ?$

$$\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = 3x^2 + 6x - 9 \Big|_{x=0} = -9$$

2.  $\left. \begin{aligned} x &= 2(\cos t + t \sin t) \\ y &= 2(\sin t - t \cos t) \end{aligned} \right\} \frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = ?$

$$\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{2(\cos t - \cos t + t \sin t)}{2(-\sin t + \sin t + t \cos t)} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{2t \sin t}{2t \cos t} \Big|_{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} t \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

3.  $x^2 + 2xy^2 - 3y^2 + 1 = 0$ ;  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_P = ?$

Ha  $x = 1$  akkor

$$1 + 2y^2 - 3y^2 + 1 = 0$$

$$y^2 = 2$$

$$y = \pm \sqrt{2}$$

$$\left[ \frac{dy}{dx} \right]_P = -\frac{2x + 2y^2}{4xy - 6y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=\sqrt{2}}} = -\frac{2+4}{4\sqrt{2} - 6\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Feladatok:

1. Határozzuk meg az  $(x^2 + y^2)^3 - 26x^2y^2 = 21$  egyenlettel adott görbe érintőjének meredekségét a  $P(2,1)$  pontban!

2. Határozzuk meg az  $F(x,y) = xy - \frac{4}{x} + \frac{3}{2y} = 0$  egyenlettel adott görbe érintőjének meredekségét a  $P(1,1)$  pontban!

Az érintő egyenes és normális egyenes egyenletének felírása a függvény adott pontjában

Példák:

1. Határozzuk meg a

$$2x^3 - x^2y^2 - 3x + y + 7 = 0$$

görbéhez az  $(1, -2)$  pontban húzott érintő és normális egyenes egyenletét!

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=1 \\ y=-2}} = - \frac{6x - 2xy^2 - 3}{-2x^2y + 1} \bigg|_{\substack{x=1 \\ y=-2}} = 1.$$

Az

$$\bar{y} - y_0 = \left( \frac{dy}{dx} \right)_P (x - x_0) \quad \text{összefüggés alapján}$$

$$y + 2 = x - 1; \quad \text{az érintő egyenes egyenlete.}$$

A merőlegesség felhasználásával előáll az

$$y + 2 = - (x - 1); \quad \text{a normális egyenes egyenlete.}$$

2. Határozzuk meg az

$$\left. \begin{aligned} x &= 2(t - \sin t) \\ y &= 2(1 - \cos t) \end{aligned} \right\}$$

ciklois  $t_1 = \frac{\pi}{3}$  pontjában az érintő egyenes egyenletét!

$$x \left( t_1 = \frac{\pi}{3} \right) = 2 \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}; \quad y \left( t_1 = \frac{\pi}{3} \right) = 1$$

$$\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{t_1} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \Big|_{t_1 = \frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}.$$

Az érintő egyenes egyenlete:  $y - 1 = \sqrt{3} \left[ x - \left( 2 \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \right) \right].$

Feladatok:

Határozzuk meg a következő egyenletekkel adott függvények adott pontjában az érintő egyenes és normális egyenes egyenletét.

1.  $x^3 + y^3 - 2xy = 0; \quad P(1, 1)$

2.  $3x^2 + 2xy^2 - 6y^2 + 1 = 0; \quad P(1, -1)$

3.  $x^2 + 2xy^2 - 3y^2 + 1 = 0; \quad P(1, \sqrt{2})$

4.  $\left. \begin{aligned} x &= 2(\cos t + t \sin t) \\ y &= 2(\sin t - t \cos t) \end{aligned} \right\} t = \frac{\pi}{4}$

5. Az  $\left. \begin{aligned} x &= 2t^3 - 9t^2 + 12t - 1 \\ y &= t^2 + t + 1 \end{aligned} \right\}$

egyenletekkel adott görbén határozzuk meg azokat a pontokat, amelyekhez húzott érintők párhuzamosak az  $y$  tengellyel.

Subtangens, subnormális

Példa:

Határozzuk meg az  $y^2 = 2x$  egyenlettel adott parabola  $P_1(x = 2, y = 2)$  pontjában a subtangenst és a subnormális.

$$y(x_0 = 2) = 2; \quad y' = \frac{1}{y}; \quad y'(P_1) = \frac{1}{2}.$$

Az érintő egyenes egyenlete  $P_1(2, 2)$  pontban:

$$y - 2 = \frac{1}{2} (x - 2) .$$

Elmetszük az  $y = 0$  egyenessel és a metszéspontot  $x_1$ -gyel jelölve

$$0 - 2 = \frac{1}{2} (x_1 - 2)$$

egyenlethez jutunk, ahonnan

$$\|x_1 - 2\| = |-4| \quad \text{adja a subtangens értékét.}$$

A normális egyenes egyenlete  $P_1 (2, 2)$  pontban:

$$y - 2 = -2 (x - 2) .$$

Az  $y = 0$  egyenessel elmetszve és a metszéspontot  $x_2$ -vel jelölve a subnormális

$$\|x_2 - 2\| = 1 .$$

A szűkebben vett érintési paraméterek,

T: Az érintési ponttól  $x_1$ -ig terjedő szakasz hossza, Pythagoras tétele szerint  $T = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$ .

N : az érintési pont és az  $x_2$  közötti távolság

$$N = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} .$$

Feladatok:

Határozzuk meg a következő görbéknél a megadott pontjukban a subtangens, subnormális és a szűkebben vett érintési paramétereket!

1.  $y^2 = x^2$ ;  $P (2, 4)$ ;                      2.  $y = \sin 2x$ ,  $x_1 = \frac{\pi}{6}$

3.  $y = \cos \frac{x}{3}$ ,  $x_1 = 2\pi$                       4.  $y = 2^x$ ,  $x_1 = -2$

5.  $x = 2 (t - \sin t)$   
 $y = 2 (1 - \cos t)$                        $t_1 = \frac{\pi}{4}$  .

Aszimptoták

Példák:

1. Határozzuk meg az  $y = x + \frac{2x}{x^2 - 1}$  függvény aszimptotáit.

Az aszimptota a végtelenben érintő egyenes, ezért előállítjuk az érintő egyenes egyenletét

$$y - f(x_0) = f'(x) \Big|_{x=x_0} (x - x_0).$$

Vesszük a függvényt és a differenciálhányadosát az  $x = x_0$  helyen

$$y(x_0) = x_0 + \frac{2x_0}{x_0^2 - 1}; \quad y' = 1 - \frac{2 + 2x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'(x_0) = 1 - \frac{2 + 2x_0^2}{(x_0^2 - 1)^2}$$

$y(x_0)$  és  $y'(x_0)$  kifejezéseket behelyettesítjük az érintő egyenes egyenletébe

$$y - x_0 - \frac{2x_0}{x_0^2 - 1} = \left[ 1 - \frac{2(1 + x_0^2)}{(x_0^2 - 1)^2} \right] (x - x_0).$$

A kijelölt műveleteket elvégezzük és megvizsgáljuk, hogy az egyenletben az egyes tagok mihez tartanak, ha  $x_0 \rightarrow \infty$ -hez.

$$y - x_0 - \frac{2x_0}{x_0^2 - 1} = x - x \frac{2 + 2x_0^2}{(x_0^2 - 1)^2} - x_0 + \frac{2x_0 + 2x_0^3}{(x_0^2 - 1)^2}$$

$$\frac{2x_0}{x_0^2 - 1} = \frac{2}{x_0 - \frac{1}{x_0}} \rightarrow 0, \quad \text{ha } x_0 \rightarrow \infty$$

$$x \frac{2 + 2x_0^2}{(x_0^2 - 1)^2} = x \frac{2}{(x_0^2 - 1)^2} + x \frac{2}{x_0^2 - 2 + \frac{1}{x_0^2}} \rightarrow 0$$

mindkét törtben a második tényező miatt,

$$\frac{2x_0 + 2x_0^3}{(x_0^2 - 1)^2} = \frac{2}{x_0^3 - 2x_0} + \frac{1}{x_0} + \frac{2}{x_0 - \frac{2}{x_0}} + \frac{1}{x_0^3} \rightarrow 0$$

Az érintő egyenletéből marad:  $y = x$ .

Az ordinátaérték  $\infty$  nagy akkor lesz, ha az

$$\frac{x^3 + x}{x^2 - 1}$$

tört nevezője 0-vá válik. Ez  $x = \pm 1$ -nél következik be.

$$\text{Az } y = x + \frac{2x}{x^2 - 1}$$

függvény aszimptótái tehát:  $y = x$  }  
 $x_1 = 1$  }  
 $x_2 = -1$  }

Bizonyos esetekben nem kell az aszimptóta kiszámításánál az általános módszert alkalmazni, mert egyszerűbb mód is van annak meghatározására.

2. Ha az  $y = f(x)$  függvényt elő tudjuk állítani a következő módon:

$$y = f(x) = kx + b + \alpha(x) \quad \text{ahol}$$

$x \rightarrow \pm \infty$  esetén

$\alpha(x) \rightarrow 0$ , akkor az

$y = kx + b$  egyenes lesz a görbe aszimptótája.

Például:

$$y = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2} = x + 1 + \frac{1}{x^2} \quad \text{függvényél az}$$

$$\frac{1}{x^2} \rightarrow 0, \quad \text{ha } x \rightarrow \pm \infty \text{ -hez.}$$

Ezért az egyik aszimptóta

$$y = x + 1.$$

A másik aszimptóta ott van, ahol a függvényérték  $\infty$  lesz. Ez  $x = 0$ -nál van.

3. Az  $y = mx + b$  egyenes aszimptotája az  $y = f(x)$  függvénynek, ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

Bizonyítható, hogy  $m$  és  $b$  állandók a következő relációkkal vannak meghatározva:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

és

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx].$$

Amennyiben mindkét limesz létezik. Ha ezek közül valamelyik nem létezik, akkor a függvénynek  $y = mx + b$  alakú aszimptotája nincsen.

Például:

$$y = x - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \quad \text{függvénynél}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [x - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - x] = \mp \pi.$$

Az aszimptoták:  $y = x \mp \pi$  egyenesek.

Feladatok:

Vizsgáljuk meg a következő függvényeket és állapítsuk meg, melyeknek van aszimptotájuk s melyek ezek!

1.  $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ ; 2.  $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

3.  $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$

4.  $y = x^3 (x^2 - 1)$

A lineáris rész leválasztásával határozzuk meg az aszimptotákat a következő függvényeknél

5.  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$  ;

6.  $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

7.  $y = \frac{1 - 4x}{1 + 2x}$

8.  $y = \frac{ax + b}{mx + n}$

### Szélsőértékszámítás

Példák:

1. Számítsuk ki az  $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$  függvény görbéjének maximum, minimum és inflexiós pontjainak koordinátáit!

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0$  egyenlet gyökei szolgáltatják a le-

hetséges helyeket

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

Képezzük a második differenciálhányadost és behelyettesítjük az

$x_1 = 1$  és  $x_2 = -3$  értékeket.

$f''(x) = 6x + 6$

$f''(x=1) = 12 > 0$

$f''(x=-3) = -18 + 6 < 0$

Mindkét helyen szélsőérték van mégpedig  $P_1(1, -3)$  pontnál minimum és  $P_2(-3, 29)$  pontnál maximum. (Az  $x_1$ -hez és  $x_2$ -höz tartozó ordináta értékeket az eredeti egyenletből visszahelyettesítéssel nyerhetjük.)

$f''(x) = 6x + 6 = 0$  egyenlet gyöke  $x = -1$  az inflexiós pont helye. Az ehhez tartozó ordináta értéket ugyancsak az eredeti egyenletből számíthatjuk ki.

$$f(x = -1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 9(-1) + 2 = 13.$$

Tehát a görbének  $P_3(-1, 13)$ -nál inflexiós pontja van, mert  $f''' = 6 \neq 0$ .

2. Állapítsuk meg az  $y = -\cos 2x$  függvény szélsőérték helyeit és inflexiós pontjainak koordinátáit!

$$y' = +2 \sin 2x = 0 \quad \text{ebből}$$

$$\sin 2x = 0 \quad \text{ha}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x = 0 + 2k\pi \\ 2x = \pi + 2k\pi \end{array} \right\}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$x = 0 + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$k = 0 \quad \text{mellett} \quad P_1 \begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ y_1 = -1 \end{pmatrix}; \quad P_2 \begin{pmatrix} x_2 = \frac{\pi}{2} \\ y_2 = 1 \end{pmatrix}$$

$$k = 1 \quad \text{mellett} \quad P_3 \begin{pmatrix} x_3 = \pi \\ y_3 = -1 \end{pmatrix}; \quad P_4 \begin{pmatrix} x_4 = \frac{3}{2}\pi \\ y_4 = 1 \end{pmatrix}$$

$$y'' = 4 \cos 2x$$

$$[y'']_{x=0} = 4 > 0;$$

$$[y'']_{x=\frac{\pi}{2}} = -4 < 0$$

$$[y'']_{x=\pi} = 4 > 0;$$

$$[y'']_{x=\frac{3}{2}\pi} = -4 < 0$$

$P_1$  és  $P_3$  pontokban minimuma,  $P_2$  és  $P_4$  pontokban maximuma van a görbének.

$y'' = 4 \cos 2x = 0$ ;  $\cos 2x = 0$ , ahonnan

$$\left. \begin{aligned} 2x &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 2x &= \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x &= \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{aligned}$$

$k = 0, 1$  értékek mellett kapjuk a

$P_5\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ ;  $P_6\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ ;  $P_7\left(\frac{5\pi}{4}, 0\right)$  és  $P_8\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$

inflexióspontokat, mert  $y'''$  ezen pontokban  $\neq 0$ .

3. Számítsuk ki az

$$\left. \begin{aligned} x &= 4(t - \sin t) \\ y &= 4(1 - \cos t) \end{aligned} \right\}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott ciklois iv szélsőérték helyeit a  $0 \leq t \leq 2\pi$  intervallumban!

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = 0$ , ez a  $[0, 2\pi]$ -ben  $t = 0$  és  $t = \pi$ -re

vehet fel 0 értéket. Nyilván  $t = \pi$ -re  $y'(0) = 0$ ,  $t = 0$ -ra pedig a határérték a Bernoulli-L'Hospital szabály alapján

$y'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{\sin t} = \infty$ ,

tehát a szélsőérték szempontjából csak  $t = \pi$  veendő figyelembe.

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\cos t (1 - \cos t) - \sin^2 t}{(1 - \cos t)^2} \cdot \frac{1}{4(1 - \cos t)} = \\ &= -\frac{1}{4(1 - \cos t)^2} \end{aligned}$$

$\left[ \frac{d^2y}{dx^2} \right]_{t=\pi} = -\frac{1}{4(1 + 1)^2} = -\frac{1}{16} < 0$ .

Igy  $t = \pi$ -nél a függvénynek maximuma van.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{1}{4(1 - \cos t)^2} = 0 \quad \text{nem lehet sohasem, ezért a függvénynek nincs inflexió pontja.}$$

Ha a szélsőérték helyet derékszögű koordinátákkal akarjuk megadni, akkor a  $t = \pi$  értéket az eredeti egyenletrendszerbe betéve kapjuk az

$$\left. \begin{aligned} x &= 4\pi \\ y &= 8 \end{aligned} \right\} \text{értékeket.}$$

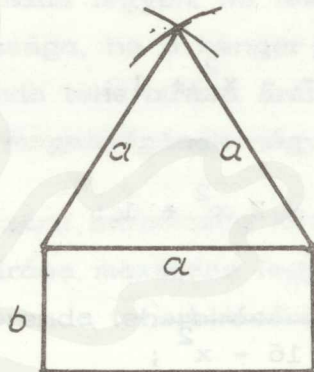
4. Egy ablak derékszögű négyszög fölé állított egyenlő oldalú háromszög alakú. Kerülete 4,5 m. Milyenek válasszuk a méreteket, hogy az ablak a legtöbb fényt bocsássa át?

$$\text{Kerület} = 3a + 2b = 4,5 \text{ m}$$

$$2b = 4,5 - 3a$$

$$b = \frac{4,5 - 3a}{2}$$

$$\text{Terület} = \frac{a \cdot m}{2} + ab$$



A területre kapott kifejezés a és b változóktól függ. Tegyük egyváltozósá b kiküszöbölésével!

$$\text{Ter} = \frac{a \sqrt{3}}{2} + a \frac{4,5 - 3a}{2}$$

$$\text{Ter} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{4,5a - 3a^2}{2}$$

Képezzük az első differenciálhányadost

$$\frac{d \text{Ter}}{d a} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2a + \frac{4,5}{2} - \frac{6}{2}a = 0$$

$$a \left( 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{4,5}{2}$$

$$a = \frac{4,5}{6 - \sqrt{3}} \approx 1,05 \text{ m ;}$$

$$b = \frac{4,5 - \frac{13,5}{6 - \sqrt{3}}}{2} \approx 0,68 \text{ m}$$

$$\frac{d^2}{da^2} T_{er} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 < 0$$

Az  $a = 1,05$  mellett a függvénynek maximuma van.

Feladatok:

Számítsuk ki a következő explicit módon és paraméteres alakban megadott görbék szélsőértékhelyeit és inflexiós pontjainak koordinátáit.

1.  $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 1;$

2.  $y = x^3 - 3x^2 - 2$

3.  $y = x^4 - 2x^2 + 1;$

4.  $y = x + \frac{1}{x^2}$

5.  $y = \frac{x}{4} \sqrt{16 - x^2};$

6.  $y = \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5}$

7.  $y = \frac{x}{1 + x^2}$

8.  $y = \frac{ax^2}{a^2 + x^2}; \quad a > 0$

9.  $y = -\frac{2x}{x^2 + 1}$

10.  $y = \frac{2x - 1}{(x-1)^2}$

11. 
$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{(t+1)^2}{4} \\ y &= \frac{(t-1)^2}{4} \end{aligned} \right\}$$

12. 
$$\left. \begin{aligned} x &= t \ln t \\ y &= \frac{\ln t}{t} \end{aligned} \right\}$$



1. Szöveges szélsőérték feladatok:

13. R sugaru körbe írjunk derékszögű négyszöget úgy, hogy a területe maximális legyen! Mekkora lesznek az oldalak?

14. Egyenlőszáru derékszögű háromszög befogóján felvett P pontból az átfogóra merőlegest és az átfogóval párhuzamos egyenest húzunk. Mikor

lesz a keletkezett trapéz területe a legnagyobb?

15. Adott oldalú téglalap sarkaiból mekkora oldalú négyzeteket kell kivágni, hogy a fennmaradó részt dobozzá hajtogatva annak a térfogata a lehető legnagyobb legyen?

16. Egy előírt  $V$  térfogatu, négyzetalapu, felül nyitott tartályt akarunk készíteni. Mekkora válasszuk a méreteket, hogy az elkészítéshez a legkevesebb lemezt kelljen használni, azaz, hogy a tartályt határoló lapok területösszege (a felszín) a lehető legkisebb legyen?

17. Egy henger alakú fatörzsből olyan téglalap keresztmetszetű gerendát kell kivágni, hogy ennek a teherbirása maximális legyen. Mi lesz a gerenda keresztmetszetének szélessége és magassága, ha a henger átmérője  $d$ ? (A mechanika azt tanítja, hogy egy gerenda teherbirása arányos a gerenda keresztmetszetének szélességével és magasságának négyzetével.)

18.  $R$  sugaru hengeres gerendából egyenlőszáru háromszög keresztmetszetű gerendát faragunk úgy, hogy a teherbirása maximális legyen. Mekkora válasszuk a háromszög alkotóit? (A gerenda teherbirására vonatkozóan lásd az előző feladatot!)

19. Egy egyenes körkup alapkörének sugara  $R$  és magassága  $M$  adott. Határozzuk meg a kupba irható legnagyobb térfogatu henger adatait!

20. Határozzuk meg az adott  $R$  sugaru gömbbe beirt maximális térfogatu kup adatait!

21. Határozzuk meg az adott  $R$  sugaru gömbbe beirható legnagyobb térfogatu henger adatait!

22. Az egykaru emelőnek támasztéka az egyik végén van és  $f$  erővel hatunk rá a másik végén. Emellett a támasztóponttól  $a$  távolságra  $p$  sullyal terheljük, az emelő hosszúságegységének sulya  $m$ . Határozzuk meg az emelő  $x$  hosszúságát úgy, hogy az  $f$  erő a legkisebb legyen!

23.  $c$  sebességű folyóban a parton mért  $s$  távolságra akarunk fel- és visszavezni. Mekkora legyen  $v$  sebességünk (a vízhez viszonyítva), hogy a legkisebb munkát végezzük? (Pl.  $c = 1,5$  m/sec,  $s = 9$  km)

24. Igazoljuk, hogy az

$$y = x^3 - 3x^2 - 24x + 27$$

függvény görbéjének inflexió pontja rajta fekszik a szélsőértékpontokat összekötő egyenesen!

25. Valamely kör egyenlete  $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 14$ . Határozzuk meg az  $(1, 3)$  ponton áthaladó legrövidebb hur egyenletét és hosszúságát! (Ismeretlenek vesszük azt a síkgeometriai tételt, mely szerint a megadott ponton és a középponton átmenő egyenesre merőleges hur a legrövidebb.)

### Görbületi kör és evoluta

Példák:

1. Határozzuk meg az  $y = e^{-x^2}$  függvénnyel adott görbénél a görbületi kör középpontjának koordinátáit és a sugarát a görbe  $P_1(0, 1)$  pontjában.

Az

$$x_0 = a - \frac{1 + (f'(a))^2}{f''(a)} \cdot f'(a); \quad y_0 = f(a) + \frac{1 + (f'(a))^2}{f''(a)}$$

és

$$r = \frac{[1 + (f'(a))^2]^{\frac{3}{2}}}{|f''(a)|} \quad \text{levezetett összefüggések alapján szükség}$$

van  $f'(a)$ ,  $f''(a)$ -ra, azért ezeket számítjuk ki először,

$$f'(x) = -2x e^{-x^2}; \quad f'(a) = 0$$

$$f''(x) = e^{-x^2}(-2x)^2 - 2e^{-x^2}; \quad f''(a) = -2$$

$$x_0 = 0 - \frac{1 + 0^2}{-2} \cdot 0 = 0; \quad y_0 = 1 + \frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{[1 + 0]^{\frac{3}{2}}}{|-2|} = \frac{1}{2}$$

A következőkben az érintkezés rendszámát vizsgáljuk meg, ( $y(x)$  a kört jelenti)

$$f'''(x) = 4x e^{-x^2} (3 - 2x^2); \quad f'''(a) = 0$$

$$y'''(x) = \frac{3y'y''^2}{1+y'^2}; \quad y'''(a) = 0$$

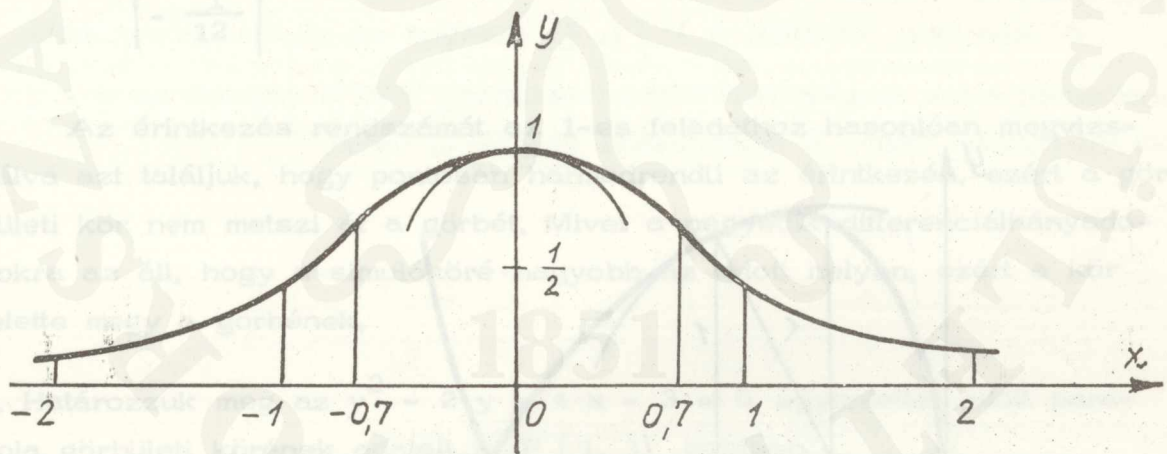
$$f^{(4)} = 12x e^{-x^2} - 8x^3 e^{-x^2}; \quad f^{(4)}(a) = 12$$

$$y^{(4)} = \frac{3y''^3 + 4y'y''y'''}{1+y'^2}; \quad y^{(4)}(a) = -24$$

$f^{(4)}(a) \neq y^{(4)}(a)$  ezért az érintkezés pontosan harmadrendű.

Ha az érintkezés páratlan rendű a kör a görbét az adott  $x = a$  helyen nem metszi át. És mivel  $f^{(4)}(a) > y^{(4)}(a)$ , ezért a görbe van felül.

Inflexiós pont:  $(\pm 0,7; 0,6)$ .



2. A görbe implicit módon van adva:

$$y^2 = x^3 - 4x^2 + 4x.$$

Határozzuk meg a görbületi kör adatait a  $P_1(1, 1)$  pontjában. A függvényt  $x$  független változó szerint differenciálva

$$2yy' = 3x^2 - 8x + 4 \Rightarrow y' = \frac{3x^2 - 8x + 4}{2y}.$$

Az implicit függvényt még egyszer  $x$  szerint differenciálva

$$2 y'^2 + 2 y y'' = 6 x - 8 \Rightarrow y'' = \frac{6 x - 8 - 2 y'^2}{2 y}$$

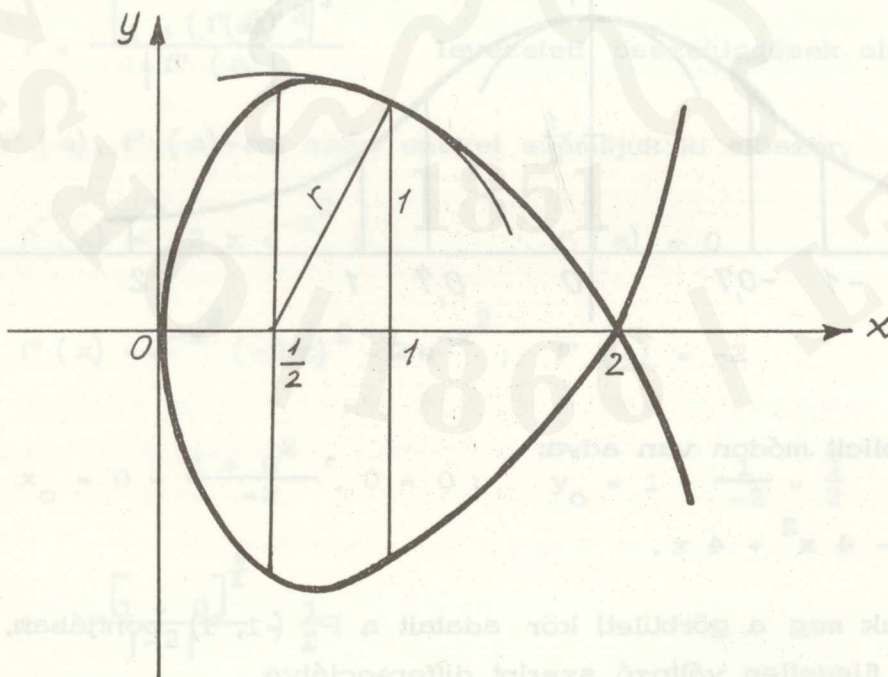
$$y' \Big|_{P_1} = -\frac{1}{2};$$

$$y'' \Big|_{P_1} = -\frac{5}{4}$$

$$x_0 = 1 - \frac{1 + \frac{1}{4}}{-\frac{5}{4}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}; \quad y_0 = 1 + \frac{1 + \frac{1}{4}}{-\frac{5}{4}} = 0$$

$$r = \frac{\left(1 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|-\frac{5}{4}\right|} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ha megvizsgáljuk az érintkezést, azt találjuk, hogy másodrendű, ezért a kör a görbét a megadott pontban átmetszi.



3. A görbe paraméteres alakban van adva az

$$\left. \begin{aligned} x &= 3(t - \sin t) \\ y &= 3(1 - \cos t) \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

egyenletekkel. Határozzuk meg a  $t = \pi$  értékhez tartozó görbületi körének adatait.

$$a = x(t = \pi) = 3\pi; \quad f(a) = y(t = \pi) = 6$$

$$\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{t=\pi} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \Big|_{t=\pi} = 0; \quad \left[ \frac{d^2y}{dx^2} \right]_{t=\pi} = - \frac{1}{4(1 - \cos t)^2} \Big|_{t=\pi} = - \frac{1}{12}$$

$$x_0 = 3\pi + \frac{1}{-\frac{1}{12}} \cdot 0 = 3\pi; \quad y_0 = 6 + \frac{1}{-\frac{1}{12}} = -6$$

$$r = \frac{1}{\left| -\frac{1}{12} \right|} = 12.$$

Az érintkezés rendszámát az 1-es feladathoz hasonlóan megvizsgálva azt találjuk, hogy pontosan harmadrendű az érintkezés, ezért a görbületi kör nem metszi át a görbét. Mivel a negyedik differenciálhányadosokra az áll, hogy a simulóköré nagyobb az adott helyen, ezért a kör felette megy a görbének.

4. Határozzuk meg az  $y^2 - 2y + 4x - 3 = 0$  egyenlettel adott parabola görbületi körének adatait a  $P(1, 1)$  pontban.

A parabola egyenletét az

$$(y - k)^2 = 2p(x - h)$$

alakra hozzuk. Így

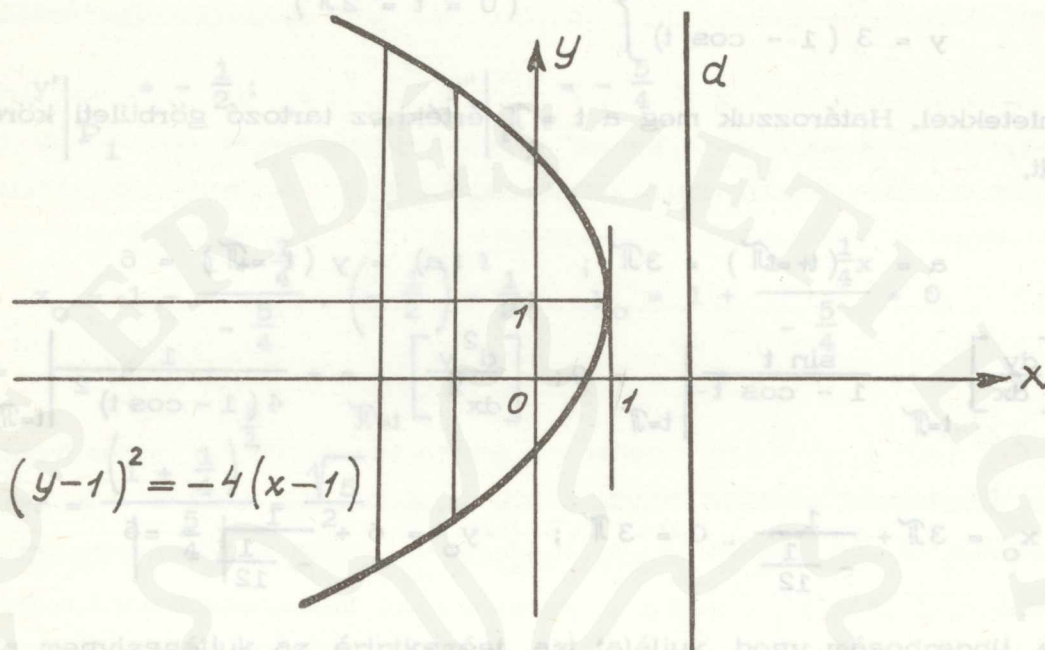
$$(y - 1)^2 = -4(x - 1)$$

lesz a parabola egyenlete.

A parabola tengelye az  $x$  tengely, csúcsa a  $P(1, 1)$  pontban van

$$\frac{p}{2} = 1.$$

Ábrázolva:



A parabola érintőjét a  $P(1, 1)$  pontban az  $y' = -\frac{2}{y-1}$  differenciálhányados alapján nem tudjuk előállítani, mert a nevező az  $y = 1$  helyen nullává válik. A másodrendű görbéknél tanult

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

együtthatómátrix felhasználásával megkapjuk, hogy

$$x = 1.$$

A második differenciálhányados  $y'' = -\frac{y'^2}{y-1}$  a  $P(1, 1)$  helyen határozatlan értéket ad, így a görbületi kör adatait csak a határértékszámítással tudjuk meghatározni.

$$x_0 = \lim_{y \rightarrow 1} \left[ \frac{2y - y^2 + 3}{4} - \frac{1 + \frac{4}{(y-1)^2}}{\frac{4}{(y-1)^3}} \cdot \frac{2}{y-1} \right] =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 1} \left[ \frac{2y - y^2 + 3}{4} - \frac{(y-1)^2 + 4}{2} \right] = -1$$

$$y_0 = \lim_{y \rightarrow 1} \left[ y + \frac{1 + \frac{4}{(y-1)^2}}{-\frac{4}{(y-1)^3}} \right] =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 1} \left\{ y - \frac{(y-1) [(y-1)^2 + 4]}{4} \right\} = 1$$

$$r = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\left[ 1 + \frac{4}{(y-1)^2} \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| -\frac{4}{(y-1)^3} \right|} = \frac{\infty}{\infty}$$

Alkalmazzuk a B-L'Hospital szabályt, így

$$r = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\frac{3}{2} \left[ \frac{(y-1)^2 + 4}{(y-1)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left( -\frac{8}{(y-1)^3} \right)}{12 (y-1)^4} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\frac{3}{2} \sqrt{(y-1)^2 + 4} (-8)}{12} = \lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{(y-1)^2 + 4} = 2$$

5. Példa az evoluta kiszámítására.

A görbületi körök középpontjainak mértani helyét evolutának nevez-  
zük. Az eredeti görbét evolvensnek hívjuk.

$y^2 = 2x$ ;  $P(x, y)$  pontban vizsgáljuk a görbületi körre jellemző  
adatokat

$$2yy' = 2; y' = \frac{1}{y}$$

$$2y'^2 + 2yy'' = 0 \quad y'' = -\frac{2y'^2}{2y} = -\frac{\frac{1}{y^2}}{y} = -\frac{1}{y^3}$$

h-val jelöljük a görbületi kör középpontjának abszcisszáját, k-val pedig az ordinátáját.

$$h = x - \frac{1 + y'^2}{y''} \cdot y' = x - \frac{1 + \frac{1}{y^2}}{-\frac{1}{y^3}} \cdot \frac{1}{y} = x + y^2 + 1$$

h-t csak x-től függő kifejezéssé tesszük az eredeti egyenlet felhasználásával

$$h = x + 2x + 1 = 3x + 1$$

$$k = y + \frac{1 + \frac{1}{y^2}}{-\frac{1}{y^3}} = y - y^3 - y = -y^3$$

x-et h-val, y-t k-val kifejezve

$$x = \frac{h - 1}{3}; \quad y = \sqrt[3]{-k}$$

Az így kapott x, y értékeket az  $y^2 = 2x$  eredeti egyenletbe téve kapjuk az evoluta egyenletét

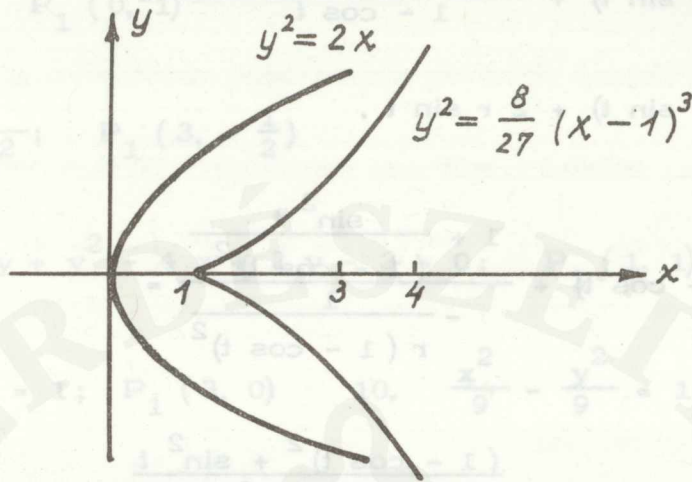
$$\left(\sqrt[3]{-k}\right)^2 = 2 \frac{h - 1}{3}$$

k helyébe y-t, h helyébe x-et írva és mindkét oldalt harmadik hatványra emelve

$$y^2 = \frac{8}{27} (x - 1)^3$$

egyenlethez jutunk, amit Neil-féle parabolának hívnak.

x	1	2	3	4
y	0	0,5	1,5	2,8



6. Példa az evoluta kiszámítására.

Határozzuk meg az

$$\left. \begin{aligned} x &= r(t - \sin t) \\ y &= r(1 - \cos t) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

cikloisív görbületi középpontjainak mértani helyét a  $t$  paraméterérték mellett,

$$h = x - \frac{1 + y'^2}{y''} \cdot y' =$$

$$= r(t - \sin t) + \frac{1 + \frac{\sin^2 t}{(1 - \cos t)^2}}{r(1 - \cos t)^2} \cdot \frac{\sin t}{1 - \cos t} =$$

$$= r(t - \sin t) + \frac{\frac{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}{(1 - \cos t)^2}}{r(1 - \cos t)^2} \cdot \frac{\sin t}{1 - \cos t} =$$

$$= r(t - \sin t) + \frac{r(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) \sin t}{1 - \cos t} =$$

$$= r(t - \sin t) + \frac{2r(1 - \cos t) \sin t}{1 - \cos t} =$$

$$= r(t - \sin t) + 2r \sin t .$$

$$k = r(1 - \cos t) + \frac{1 + \frac{\sin^2 t}{(1 - \cos t)^2}}{-\frac{1}{r(1 - \cos t)^2}} =$$

$$= r(1 - \cos t) - \frac{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}{(1 - \cos t)^2} =$$

$$= r(1 - \cos t) - r(2 - 2 \cos t) =$$

$$= r(1 - \cos t) - 2r(1 - \cos t) .$$

Látható, hogy a cikloisiv evolútája újra cikloisiv lesz, csak a koordináta-rendszerben az eredetihez viszonyítva mind az  $x$ , mind az  $y$  tengelyen el van tolva.

Feladatok:

Határozzuk meg a következő görbék görbületi körének adatait ( $x_0$ ,  $y_0$ ,  $r$ ) a megadott pontjukban.

1.  $y = x^3 - 3x$ ;  $P_1(1, -2)$       2.  $y = x^3 - 1$ ;  $P_1(1, ?)$

3.  $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$ ;  $P_1(0, ?)$ ,  $P_2(2, -\frac{1}{3})$

4.  $y = x^2 - 2x$ ;  $P_1(2, 0)$

5.  $y = x^3 - 3x^2 - 2$ ;  $P_1(2, -6)$

6.  $y = e^{-x}$ ;  $P_1(0, 1)$

7.  $y = \frac{x}{3 - x^2}$ ;  $P_1(3, -\frac{1}{2})$

8.  $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$ ;  $P_1(1, 1)$

9.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ;  $P_1(3, 0)$       10.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$ ;  $P_1(3, 0)$

11.  $y^2 - 2y + 4x = 0$ ;  $P_1(0, 2)$

12.  $\left. \begin{array}{l} x = 4t \\ y = \frac{2}{t} \end{array} \right\} t = 1$

13.  $\left. \begin{array}{l} x = 4 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{array} \right\} t = \frac{\pi}{2}$

14.  $\left. \begin{array}{l} x = 2 \cos t \\ y = \cos 2t \end{array} \right\} t = \frac{\pi}{2}$

15.  $\left. \begin{array}{l} x = 3 \cos^3 t \\ y = 3 \sin^3 t \end{array} \right\} t = \frac{\pi}{4}$

16.  $\left. \begin{array}{l} x = 2(\cos t + t \sin t) \\ y = 2(\sin t - t \cos t) \end{array} \right\} t = \frac{\pi}{3}; \quad t = \frac{\pi}{4}$

17. Határozzuk meg az  $y^2 = 4x$  egyenlettel adott parabola evolutájának egyenletét!

18. Határozzuk meg a  $2x^2 + y^2 = 1$  egyenlettel adott másodrendű görbe evolutájának egyenletét!

19. Az  $y = kx + b$  egyenes egyenletében határozzuk meg a paramétereket úgy, hogy az egyenes és az

$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$

görbe legalább másodrendben érintkezzenek.

### Hatványsorok

Példák:

1. Melyik az az ötödfoku polinom, amely kielégíti a következő feltételeket:

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = -1, \quad f''(0) = 3, \quad f'''(0) = 4, \quad f^{(4)}(0) = -2, \\ f^{(5)}(0) = 1.$$

A Mac-Laurin sor

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) x + \frac{1}{2!} f''(0) x^2 + \dots$$

összefüggést felhasználva

$$f(x) = 2 - x + \frac{3}{2!} x^2 + \frac{4}{3!} x^3 - \frac{2}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} x^5.$$

2. Irjuk fel azt a harmadfoku polinomot, amely kielégíti a következő feltételeket:

$$f(2) = 3, \quad f'(2) = -2, \quad f''(2) = 3, \quad f'''(2) = 1.$$

A Taylor sor

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a) (x - a) + \frac{1}{2!} f''(a) (x - a)^2 + \dots$$

összefüggést felhasználva

$$f(x) = 3 - 2(x - 2) + \frac{3}{2} (x - 2)^2 + \frac{1}{6} (x - 2)^3.$$

A kijelölt műveleteket elvégezve

$$f(x) = \frac{35}{3} - 6x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3$$

(Mac-Laurin sor).

Feladatok:

1. Irjuk fel  $y = \operatorname{tg} x$  függvény Mac-Laurin sorának hatodik szeletét (6 első tagját).

Irjuk fel a következő függvények Mac-Laurin sorát:

2.  $y = e^{-x^2}$

3.  $y = \cos 2x$

4.  $y = \frac{1}{(1-x)^2}; \quad |x| < 1$

5.  $y = \operatorname{ch}(x + 2x^2)$

Irjuk fel a következő függvények Taylor sorát!

6.  $y = \cos 2x; \quad x = \frac{\pi}{2}$

7.  $y = \operatorname{tg} x; \quad x = \frac{\pi}{4}$

8.  $y = \ln x; \quad x = 1$

Bernoulli - L'Hospital szabály

Példák:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x} = ?$

Behelyettesítve az  $x = 0$  értéket  $\frac{0}{0}$  alak adódik. Felhasználjuk a B - L'Hospital szabályt, mely szerint

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2}{\cos^2 x} = 1.$$

2. Ha nemcsak  $f(a) = 0$  és  $g(a) = 0$ , hanem  $f'(a) = 0$  és  $g'(a) = 0$ , akkor az  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  kifejezésre újra alkalmazhatjuk a B-L'Hospital szabályt és a keresett értéket az

$$\frac{f''(a)}{g''(a)}$$

tört adja, vagy az eljárást szükség esetén folytatva

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

Például:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 \sin x + 2x \cos x}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

Folytatva az eljárást

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 \cos x - 4x \sin x + 2 \cos x}{\cos x} = 2$$

3. A  $\frac{0}{0}$ -hoz hasonló határozatlan kifejezés a  $\frac{\infty}{\infty}$ . Ha  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ , akkor is alkalmazhatjuk a B-L'Hospital szabályt.

Példa:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos^2 5x}{5 \cos^2 3x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{6 \cos 5x (-\sin 5x) 5}{10 \cos 3x (-\sin 3x) 3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{150 \sin^2 5x - 150 \cos^2 5x}{90 \sin^2 3x - 90 \cos^2 3x} = \frac{5}{3}.$$

4. A B-L'Hospital szabály abban az esetben is érvényes, ha  $x \rightarrow \infty$  és  $\lim f(x) = 0$  és  $\lim g(x) = 0$  (vagy  $\pm \infty$ ). Ebben az esetben a függvényekre és a differenciálhányadosaikra a megfelelő feltételeknek valamely A számnál nagyobb  $x$ -ekre kell teljesülniök.

Példa:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctg x}{\frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{2x} = -1.$$

Feladatok:

1.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = ?$

2.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{\cos 3x} = ?$

3.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} = ?$

4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 1} = ?$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = ?$

6.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x} = ?$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = ?$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\operatorname{tg} 2x - 2x} = ?$

9.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{\ln \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}} = ?$

10.  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = ?$

11.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = ?$

Összefoglalás

A függvényekről tanultak és a differenciálszámítás felhasználásával elemezzük az

$y = x + \frac{1}{x - 3}$  függvényt .

a/ A függvény értelmezési tart.:  $x \lesseqgtr 3$

a függvény értékészlete:  $5 \leq y \leq 1$

zérushelyei:  $\frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3} = 0$  egyenletből

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

b/ A függvény szélsőérték helyei és inflexiós pontjainak koordinátái

$$y' = 1 - \frac{1}{(x - 3)^2} = 0 ;$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

$$y'' = \frac{2}{(x - 3)^3} ;$$

$$y''(x=4) = \frac{2}{1} > 0$$

$P_1(4, 5)$  rel. min.

$$y''(x=2) = \frac{2}{-1} < 0$$

$P_2(2, 1)$  rel. max.

$$y'' = \frac{2}{(x-3)^3} = 0 \quad \text{sehol sem, tehát nincs inflexiós pont.}$$

c/ A függvény aszimptotái

$$y = x + \frac{1}{x-3};$$

$$y(x_0) = x_0 + \frac{1}{x_0-3}$$

$$y' = 1 - \frac{1}{(x-3)^2};$$

$$y'(x_0) = 1 - \frac{1}{(x_0-3)^2}.$$

Az érintő egyenes egyenlete  $P(x_0, f(x_0))$  mellett

$$y - f(x_0) = y' \Big|_{x=x_0} (x - x_0)$$

0-ra redukálva

$$y - y'(x_0) x - (y_0 - y'(x_0) x_0) = 0$$

behelyettesítve az  $y(x_0)$  és  $y'(x_0)$  értékeket

$$y - \left(1 - \frac{1}{(x_0-3)^2}\right)x - \left[x_0 + \frac{1}{x_0-3} - \left(1 - \frac{1}{(x_0-3)^2}\right)x_0\right] = 0$$

egyenlethez jutunk, amiből

$$y - x + x \cdot \frac{1}{(x_0-3)^2} - x_0 - \frac{1}{x_0-3} + x_0 - \frac{x_0}{(x_0-3)^2} = 0.$$

Ha  $x_0 \rightarrow \pm \infty$ , akkor

$$\frac{1}{x_0 - 3} \rightarrow 0$$

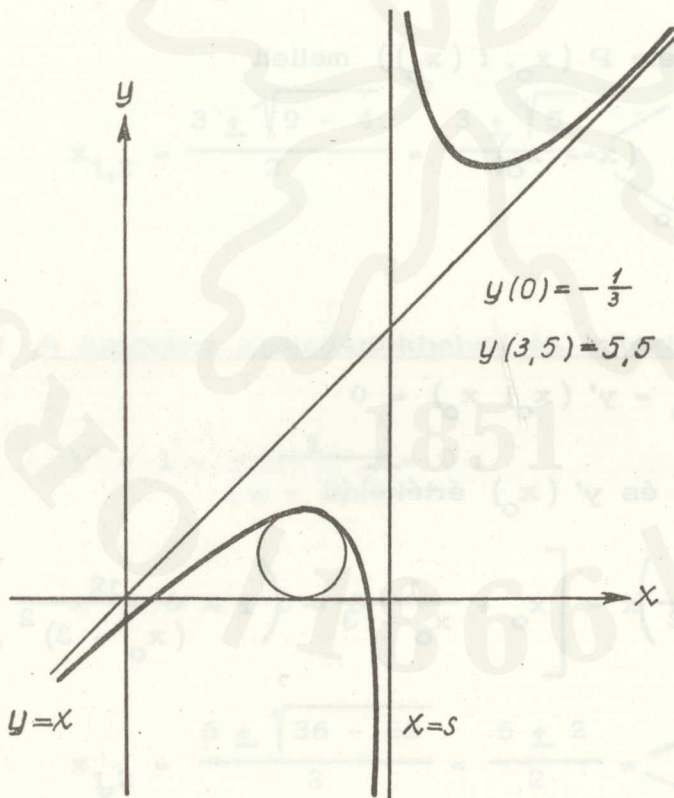
$$\frac{x_0}{(x_0 - 3)^2} = \frac{1}{x_0 - 6 + \frac{9}{x_0}} \rightarrow 0$$

$x \cdot \frac{1}{(x_0 - 3)^2} \rightarrow 0$  a második tényező miatt, marad  $y = x$ ;

ez lesz az egyik aszimptota,

Ha  $x_0 \rightarrow 3$  akkor  $y = x + \frac{1}{x - 3} \rightarrow \infty$ , ezért  $x = 3$  is aszimptota,

d/ A függvény ábrázolása



e/ görbületi körének adatai  $P_2 (2, 1)$  pontjában

$$y'(x=2) = 1 - \frac{1}{(2-3)^2} = 1 - 1 = 0$$

$$y'' (x=2) = \frac{2}{(2-3)^3} = -2$$

$$h = 2 - \frac{1}{-2} \cdot 0 = 2 \quad P_3 (4, 5) \text{ pontjában}$$

$$k = 1 + \frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$h = 4$$

$$k = \frac{11}{2}$$

$$r = \frac{1}{|-2|} = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

f/ Érintő és normális  $P_5 (1, \frac{1}{2})$  pontban

$$y' = 1 - \frac{1}{(x-3)^2};$$

$$y' (1) = \frac{3}{4}$$

$$y - y_0 = y' (x - x_0)$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{4}{3} (x - 1)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} (x - 1)$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{4}{3} x + \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{3}{4} x - \frac{3}{4} + \frac{2}{4}$$

$$y = -\frac{4}{3} x + \frac{4}{3} + \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{3}{4} x - \frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{4}{3} x + \frac{11}{6}$$

Az érintő és normális metszéspontja az x tengellyel:

$$0 = \frac{3}{4} x - \frac{1}{4}$$

$$0 = -\frac{4}{3} x + \frac{11}{6}$$

$$\frac{3}{4} x = \frac{1}{4}$$

$$\frac{4}{3} x = \frac{11}{6}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{11}{8}$$

g/ Subtangens és subnormális  $P_5(1, \frac{1}{2})$  pontban

$$|x_1 - x_0| = \left| -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = +\frac{2}{3}$$

$$|x_2 - x_0| = \left| f(x_0) \cdot f'(x_0) \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

h/ Szükebben vett érintési paraméterek  $P_5(1, \frac{1}{2})$ -nél

T : az érintőnek az érintési ponttól az x tengellyel való metszéspontjáig terjedő szakasza,

N : a normális egyenesnek az érintési ponttól az x tengellyel való metszéspontjáig terjedő szakasza,

$$T = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \sqrt{1 + y'^2(x_0)}; \quad N = f(x_0) \sqrt{1 + y'^2(x_0)}$$

$$T = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{6}$$

$$N = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{8}$$

Ellenőrzés:

$$T^2 = S_t^2 + [f(x_0)]^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{4} = \frac{16 + 9}{36} = \frac{25}{36}$$

$$T = \frac{5}{6}$$

$$N^2 = S_n^2 + [f(x_0)]^2 = \frac{9}{64} + \frac{1}{4} = \frac{9}{64} + \frac{16}{64} = \frac{25}{64}$$

$$N = \frac{5}{8}$$

i/ Az  $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$  függvény Mac-Laurin sora

$$y' = 1 - \frac{1}{(x - 3)^2}; \quad y'(x=0) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$y'' = \frac{2}{(x - 3)^3}; \quad y''(x=0) = \frac{2}{-27}$$

$$y''' = -\frac{6}{(x - 3)^4}; \quad y'''(x=0) = -\frac{2}{27}$$

$$y^{(4)} = \frac{24}{(x - 3)^5}; \quad y^{(4)}(x=0) = \frac{8}{81}$$

A függvény Mac-Laurin sora:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3} = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots = \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{8}{9} x - \frac{1}{27} x^2 - \frac{1}{54} x^3 + \frac{1}{243} x^4 + \dots \end{aligned}$$

j/ A függvény Taylor-sora  $x = 1$  mellett

$$y(x=1) = \frac{1 - 3 + 1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$y'(x=1) = 1 - \frac{1}{(1 - 3)^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$y''(x=1) = \frac{2}{(1 - 3)^3} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$y'''(x=1) = -\frac{6}{(1 - 3)^4} = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8}$$

$$y^{(4)}(x=1) = \frac{24}{(1 - 3)^5} = -\frac{24}{32} = -\frac{3}{4}$$

A függvény Taylor-sora:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3} = f(1) + \frac{f'(1)}{1!} (x - 1) + \frac{f''(1)}{2!} (x - 1)^2 + \\
 &+ \frac{f'''(1)}{3!} (x - 1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!} (x - 1)^4 + \dots = \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} (x - 1) - \frac{\frac{1}{4}}{2!} (x - 1)^2 - \frac{\frac{3}{8}}{3!} (x - 1)^3 - \\
 &- \frac{\frac{3}{4}}{4!} (x - 1)^4 + \dots
 \end{aligned}$$

1851

1866

## VEKTORALGEBRA

Példák:

1. Határozzuk meg az  $A(4, -3, -4)$  és  $B(2, 5, 6)$  pontokkal megadott  $\vec{AB}$  vektort!

$$A \text{ helyvektora: } \vec{a} = 4 \vec{i} - 3 \vec{j} - 4 \vec{k}$$

$$B \text{ helyvektora: } \vec{b} = 2 \vec{i} + 5 \vec{j} + 6 \vec{k}$$

Igy

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = -2 \vec{i} + 8 \vec{j} + 10 \vec{k}.$$

2. Határozzuk meg az  $\vec{a} = -5 \vec{i} + 2 \vec{j} - 3 \vec{k}$  vektornak a hosszát és az  $\vec{a}$  irányába eső  $\vec{a}^0$  egységvektort!

$\vec{a}$  hossza vagy abszolút értéke az

$$|\vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 a_i^2} \quad \text{összefüggés alapján}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{38}$$

$$\vec{a} \text{ irányára: } \vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \text{ tehát}$$

$$\vec{a}^0 = -\frac{5}{\sqrt{38}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{38}} \vec{j} - \frac{3}{\sqrt{38}} \vec{k}.$$

3. Határozzuk meg  $\vec{a}(1, 1, -4)$  és  $\vec{b}(1, -2, 2)$  vektoroknál

- a skaláris szorzatot
- a két vektor szögét
- a két vektor által meghatározott háromszög területét
- az  $\vec{a}$  vektornak  $\vec{b}$ -re eső vetületét és vetületvektorát
- az  $\vec{a}$  vektornak  $\vec{b}$  irányára merőleges vetületére merőleges vetületét.

a/ A skaláris szorzat  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$  alapján

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 - 2 - 8 = -9.$$

b/ A két vektor szögét a  $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$  összefüggés alapján számí-  
juk ki, miszerint

$$\cos \varphi = \frac{-9}{3\sqrt{2} \cdot 3} = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \varphi' = 45^\circ \quad \text{és} \quad \varphi = 135^\circ.$$

c/ Kiszámítjuk először a két vektor vektoriális szorzatát

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$$

A háromszög területe:  $\frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{81} = \frac{9}{2}$  t.e.

d/ A vetületet az  $|\vec{a}| \cdot \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$  alapján számítjuk ki, tehát

$$\text{a vetület: } \frac{-9}{\sqrt{9}} = -3$$

a vetületvektor: a vetület hossza szorozva a  $\vec{b}$  irányába mutató egység-  
vektorral, vagyis

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b}^0 = -3 \left( \frac{1}{3} \vec{i} - \frac{2}{3} \vec{j} + \frac{2}{3} \vec{k} \right) = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

e/  $|\vec{a}| \sin \varphi = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{b}|}$  összefüggés alapján a  $\vec{b}$  irányára merőle-

$$\text{ges vetület: } \frac{\sqrt{81}}{3} = 3.$$

4. Határozzuk meg azt a  $\vec{c} = -2\vec{i} + \lambda\vec{j} + \mu\vec{k}$  vektort, amely  $\perp$  az  
 $\vec{a} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$  és  $\vec{b} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$  vektorokra!

$$\vec{c} \perp \vec{a} \text{ miatt } \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\vec{c} \perp \vec{b} \text{ miatt } \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

Ezért

$$-6 - 3\lambda + 4\mu = 0$$

$$\underline{-10 - 3\lambda + 2\mu = 0}$$

a két egyenletből álló egyenletrendszert megoldva

$$\lambda = -\frac{14}{3} \quad \text{és} \quad \mu = -2, \quad \text{ezért}$$

$$\vec{c} = -2\vec{i} - \frac{14}{3}\vec{j} - 2\vec{k} \quad \text{a keresett vektor.}$$

5. Határozzuk meg azt a  $\vec{c}$  vektort, amely  $\perp \vec{a}$   $(2, -3, 2)$  és  $\vec{b}$   $(2, -5, 1)$  vektorokra, azokkal jobbsodrású koordinátarendszert alkot és abszolút értéke  $|\vec{c}| = 3$

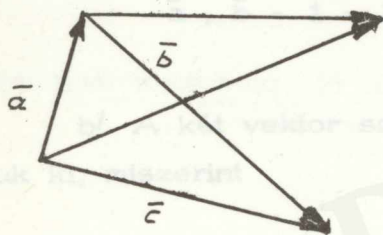
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 7\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{49 + 4 + 16} = \sqrt{69}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})^\circ = \frac{7}{\sqrt{69}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{69}}\vec{j} - \frac{4}{\sqrt{69}}\vec{k}$$

$$\vec{c} = |\vec{c}| \cdot (\vec{a} \times \vec{b})^\circ = \frac{21}{\sqrt{69}}\vec{i} + \frac{6}{\sqrt{69}}\vec{j} - \frac{12}{\sqrt{69}}\vec{k}.$$

6. Számítsuk ki az  $A(-4, 3, 1)$ ;  $B(3, 5, 2)$  és  $C(1, 2, 3)$  csúcspontokkal adott háromszög területét!



$$\bar{a} = -4 \bar{i} + 3 \bar{j} + \bar{k}$$

$$\bar{b} = 3 \bar{i} + 5 \bar{j} + 2 \bar{k}$$

$$\bar{c} = \bar{i} + 2 \bar{j} + 3 \bar{k}$$

$$\bar{c} - \bar{a} = 5 \bar{i} - \bar{j} + 2 \bar{k}$$

$$\bar{b} - \bar{a} = 7 \bar{i} + 2 \bar{j} + \bar{k}$$

$$(\bar{c} - \bar{a}) \times (\bar{b} - \bar{a}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \bar{i} + 9 \bar{j} + 17 \bar{k}$$

$$|(\bar{c} - \bar{a}) \times (\bar{b} - \bar{a})| = \sqrt{395}$$

Az ABC  $\Delta$  területe:  $\frac{1}{2} \sqrt{395}$  t.e.

7. Határozzuk meg az  $\bar{a} (4, 2, -1)$ ,  $\bar{b} (1, 2, 3)$  és  $\bar{c} (4, 5, 1)$  vektorokkal mint élekkel megadott paralelepipedon térfogatát!

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -27$$

$V = 27$  térfogat egység.

8. Állítsuk elő a  $\bar{d} (1, -2, 5)$  vektort  $\bar{a} (1, -3, 4)$ ,  $\bar{b} (2, 1, 3)$  és  $\bar{c} (3, -2, 4)$  vektorokból  $x \bar{a} + y \bar{b} + z \bar{c}$  alakban!

Mivel olyan  $x, y, z$  szorzószámokat keresünk, amelyekre

$$x \bar{a} + y \bar{b} + z \bar{c} = \bar{d}$$

ezért meg kell oldani a következő egyenletrendszert

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Az egyenletrendszer determinánása

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -21 \neq 0, \quad \text{ezért a megoldás}$$

a Cramer-szabállyal előállítható

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{-21} = \frac{4 - 20 - 18 - 15 + 6 + 16}{-21} = \frac{27}{21}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -2 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix}}{-21} = \frac{-8 - 8 - 45 + 24 + 10 + 12}{-21} = \frac{15}{21}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{-21} = \frac{5 - 16 - 9 - 4 + 6 + 30}{-21} = -\frac{12}{21}$$

Igy

$$\vec{d} = \frac{27}{21} \vec{a} + \frac{15}{21} \vec{b} - \frac{12}{21} \vec{c} .$$

9. Mutassuk ki, hogy az  $\vec{a} (-3, -2, -3)$ ,  $\vec{b} (1, 5, 4)$  és  $\vec{c} (4, -2, \frac{10}{13})$  vektorok komplanárisak és bontsuk fel a  $\vec{b}$  vektort  $\vec{a}$  és  $\vec{c}$  irányu összetevőkre!

A vektorokból képzett determináns

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & \frac{10}{13} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{tehát } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ vektorok egysikuak,}$$

A  $\vec{b}$  vektor  $\vec{a}$  és  $\vec{c}$  irányu összetevőkkel

$$\vec{b} = p \vec{a} + q \vec{c}$$

alakban állítható elő, amiből az egyes komponensekre

$$\left. \begin{array}{l} -3p + 4q = 1 \\ -2p - 2q = 5 \\ -3p + \frac{10}{13}q = 4 \end{array} \right\}$$

egyenletek írhatók fel. Ezek közül kettő elegendő  $p$  és  $q$  meghatározására. Legyenek ezek a következők:

$$\left. \begin{array}{l} -3p + 4q = 1 \\ -2p - 2q = 5 \end{array} \right\}$$

Innen  $p = -\frac{22}{14}$  és  $q = -\frac{13}{14}$ , tehát

$$\bar{b} = -\frac{22}{14}\bar{a} - \frac{13}{14}\bar{c}.$$

Feladatok:

1. Határozzuk meg  $A(7, -5, 2)$  és  $B(6, 1, -5)$  pontok által megadott  $\overrightarrow{BA}$  vektort, annak hosszát és irányába mutató egységvektort!
2. Határozzuk meg  $A(-7, 5, 2)$ ,  $B(3, 2, -3)$  és  $C(-2, 3, -4)$  pontok által adott háromszög területét!
3. Határozzuk meg azt a  $\bar{d}(-3, \lambda, \mu)$  vektort, amely  $\perp$  az  $\bar{a}(3, -5, 7)$  és  $\bar{b}(4, 2, 3)$  vektorokra!
4. Határozzuk meg azt a  $\bar{c}$  vektort, amely  $\perp$  az  $\bar{a} = -8\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$  és  $\bar{b} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$  vektorokra, azokkal jobbsodrású koordinátarendszert alkot és abszolút értéke  $|\bar{c}| = 5$ .
5. Határozzuk meg a  $P(-5, 7, 3)$  erőnek az  $\bar{s}(-2, 5, 3)$  elmozdulási vektor irányába eső vetületvektorát!
6. Adott  $\bar{a} = -5\bar{i} + 5\bar{j} + \bar{k}$ ,  $\bar{b} = 3\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$  és  $\bar{c} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + 5\bar{k}$  vektoroknál határozzuk meg

- a/  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  összegét
- b/  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  szögét
- c/  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  vektorok által meghatározott paralelogramma területét
- d/  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  és  $\vec{c}$  vektorok által meghatározott paralelepipedon köbtartal-  
mát!

7. Számítsuk ki az  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  egységvektorok koordinátáit az  $\vec{a} (1, -2, 2)$ ,  $\vec{b} (3, -4, 1)$  és  $\vec{c} (1, -3, 2)$  bázisvektorokra vonatkozóan!

8. Legyen  $\vec{e}_1 = 2\vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{i} - 2\vec{j}$ ,  $\vec{e}_3 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ . Mik lesznek az  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  rendszerben adott  $\vec{a} (2, 4, 6)$  vektor koordinátái az  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$  rendszerben?

9. Egy kocka két élvektora  $\vec{a} (6, 2, -3)$  és  $\vec{b} (-3, 6, -2)$ . Határozzuk meg a harmadik él vektorát!

10. Legyen  $\vec{a} (2, 2, 1)$ ,  $\vec{b} (3, -4, 0)$  és  $\vec{c} (6, 2, 3)$ .

a/ Bontsuk fel az  $\vec{a}$  vektort a  $\vec{b}$  vektorral párhuzamos és arra merőleges összetevőkre.

b/ Tükrözzük a  $\vec{c}$  vektort az  $\vec{a}$  vektorra.  
Adjuk meg a  $\vec{c}'$  tükörkép koordinátáit.

### ANALITIKUS SIKGEOMETRIA

Áttérés Descartes koordinátákról polárkoordinátákra és polárkoordinátákról Descartes koordinátákra.

Példák:

1. Mi a  $P_1 (2; -3)$  derékszögű koordinátákkal adott pont polárkoordinátás alakja?

$$r = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-3}{2} = -1,5;$$

$$\varphi' = 56,4^\circ$$

$$\varphi = 360^\circ - 56,4^\circ = 303,6^\circ$$

$\varphi$  negyedének megállapításánál figyelembe vettük

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} = \frac{y}{x}$$

kifejezés számlálójának és nevezőjének előjelét.

Igy a szög a III., IV. negyedben, illetve az I., IV. negyedben lehet.

A közös negyed adja a  $\varphi$  szöget.

Vagy más módon:

Két egyenletet írunk fel  $\varphi$ -re

$$\varphi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\varphi = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ezen egyenletrendszer megoldása adja a  $\varphi$  szöget.

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2 \cdot \sqrt{13}}{13} = 0,5547 \\ \sin \varphi &= \frac{-3}{\sqrt{13}} = -\frac{3 \sqrt{13}}{13} = -0,8320 \end{aligned} \right\}$$

Az első egyenletből  $\varphi_1 = 56,4^\circ$ ;  $\varphi_2 = 303,6^\circ$

a második egyenletből  $\varphi_3 = 123,6^\circ$ ;  $\varphi_4 = 303,6^\circ$

Mindkét egyenletet kielégítő szög a  $\varphi = 303,6^\circ$ .

Igy  $P_1(2, -3)$  pont polárkoordinátás alakja

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{13} \cos 303,6^\circ \\ y &= \sqrt{13} \sin 303,6^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 2. \quad r &= 5 \\ \varphi &= 135^\circ \end{aligned} \right\}$$

Melyek a pont derékszögű koordinátái?

$$x = r \cos \varphi = 5 \cos 135^\circ = -5 \cos 45^\circ = -5 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = r \sin \varphi = 5 \sin 135^\circ = 5 \sin 45^\circ = 5 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Tehát:

$$\left. \begin{aligned} x &= -5 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y &= 5 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\}$$

Feladatok:

Határozzuk meg a következő pontoknál adott  $x$  és  $y$  Descartes koordináták mellett a polárkoordinátákat,  $r$  és  $\varphi$  mellett pedig a Descartes koordinátákat!

1. 
$$P \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases}$$

2. 
$$P \begin{cases} x = -5 \\ y = 4 \end{cases}$$

3. 
$$P \begin{cases} x = 7 \\ y = 8 \end{cases}$$

4. 
$$P \begin{cases} r = 3 \\ \varphi = 210^\circ \end{cases} \quad \begin{matrix} x = ? \\ y = ? \end{matrix}$$

5. 
$$P \begin{cases} r = 5 \\ \varphi = 315^\circ \end{cases} \quad \begin{matrix} x = ? \\ y = ? \end{matrix}$$

6. 
$$P \begin{cases} r = 4 \\ \varphi = 153^\circ \end{cases} \quad \begin{matrix} x = ? \\ y = ? \end{matrix}$$

7. 
$$P \begin{cases} r = 2 \\ \varphi = 68^\circ 30' \end{cases} \quad \begin{matrix} x = ? \\ y = ? \end{matrix}$$

Két pont távolsága és az általuk meghatározott egyenes hajlásszöge az x-tengely pozitív részével.

Példa:

$P_1 (2; -3) \quad d = ?$

$P_2 (-1; -2) \quad \alpha = ?$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{3} = -0,333$$

$$\alpha' = 18,4^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 18,4^\circ = 161,6^\circ \quad (0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ).$$

Feladatok:

Számítsuk ki a megadott pontok távolságát és a pontokat összekötő egyenes hajlásszögét az x tengely pozitív részével!

$$1. \quad P_1 \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases} \quad P_2 \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -2 \end{cases} \quad d = ? \quad \alpha = ?$$

$$2. \quad P_1 \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = -3 \end{cases} \quad P_2 \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 1 \end{cases} \quad d = ? \quad \alpha = ?$$

$$3. \quad P_1 \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 5 \end{cases} \quad P_2 \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = -1 \end{cases} \quad d = ? \quad \alpha = ?$$

Osztópontok koordinátái

Példa:

$$\left. \begin{array}{l} P_1 (1, 5) \\ P_2 (11, 7) \end{array} \right\}$$

Számítsuk ki a felezőpont és a 3 : 4 arányban osztó pont koordinátáit!

$$a/ \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + 11}{2} = 6; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{5 + 7}{2} = 6$$

$$\frac{P_1 P_2}{2} : (6; 6)$$

$$b/ \quad x = \frac{x_1 + \frac{k_1}{k_2} \cdot x_2}{1 + \frac{k_1}{k_2}} = \frac{1 + \frac{3}{4} \cdot 11}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{37}{7}$$

$$y = \frac{y_1 + \frac{k_1}{k_2} \cdot y_2}{1 + \frac{k_1}{k_2}} = \frac{5 + \frac{3}{4} \cdot 7}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{41}{7}$$

Feladatok:

Számítsuk ki minden egyes pontpárnál a felezőpont, és a  $k_1 : k_2$  arányban osztó pont koordinátáit!

1.  $P_1 \begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 3 \end{cases} \quad P_2 \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = -8 \end{cases} \quad k_1 = 3 \quad k_2 = 4$

2.  $P_1 \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = -5 \end{cases} \quad P_2 \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = -9 \end{cases} \quad k_1 = 1 \quad k_2 = 4$

3.  $P_1 \begin{cases} x_1 = -7 \\ y_1 = 3 \end{cases} \quad P_2 \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 8 \end{cases} \quad k_1 = 2 \quad k_2 = 3$

Területszámítás koordinátákkal

Példák:

1.  $P_0 (0, 0)$   
 $P_1 (-2, 3)$   
 $P_2 (-4, -1)$  Számítsuk ki a  $P_0 P_1 P_2 \Delta$  területét!

$$t = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 7 \text{ t. e.}$$

2.  $P_1 (3, 2)$   
 $P_2 (-1, 3)$   
 $P_3 (-3, -4)$   $P_1 P_2 P_3 \Delta$  területe = ?

$$t = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 15 \text{ t.e.}$$

Feladatok:

1.  $P_1 \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases} \quad P_2 \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases} \quad P_3 \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases} \quad t = ?$

2.  $P_1 \begin{cases} 2 \\ 5 \end{cases} \quad P_2 \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \quad P_3 \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \quad t = ?$

3.  $P_1 \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases} \quad P_2 \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases} \quad P_3 \begin{cases} 3 \\ -3 \end{cases} \quad t = ?$

4.  $P_1 \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases} \quad P_2 \begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases} \quad P_3 \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases} \quad P_4 \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases} \quad t = ?$

5.  $P_1 \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases} \quad P_2 \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases} \quad P_3 \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases} \quad P_4 \begin{cases} 5 \\ -4 \end{cases} \quad t = ?$

Descartes-féle koordinátatranszformációk

a/ A koordinátarendszer eltolása

Mik lesznek a  $P_1 (5, 7)$  pont koordinátái, ha az eltolt koordinátarendszer origója  $0^+ (2, -3)$  koordinátákkal rendelkezik?

$$x^+ = x - a = 5 - 2 = 3$$

$$p^+ (3, 10)$$

$$y^+ = y - b = 7 + 3 = 10$$

b/ A koordinátarendszer elforgatása

Mik lesznek a  $P(3, 2)$  pont koordinátái, ha a koordináta-rendszert elforgatjuk  $\varphi = 45^\circ$ -kal?

$$\bar{x} = x \cos \varphi + y \sin \varphi = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\bar{y} = -x \sin \varphi + y \cos \varphi = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

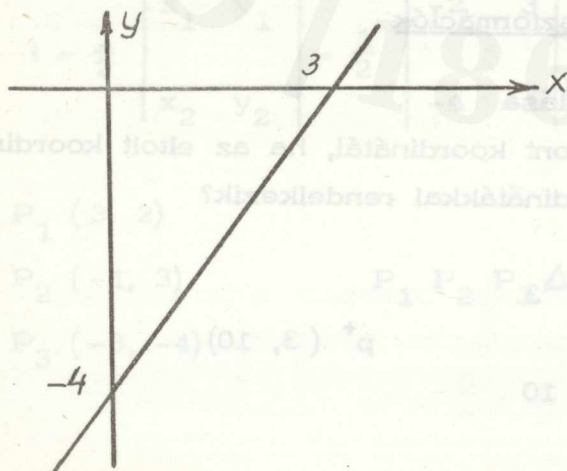
Feladatok:

1.  $P \begin{cases} 2 \\ 7 \end{cases}$  Toljuk el a koordináta-rendszert  $x$  irányba  $-3$ ,  $y$  irányba  $-4$  egységgel. Mik lesznek a pont koordinátái?
2.  $P \begin{cases} 3 \\ -5 \end{cases}$   $x$  irányba  $8$ ,  $y$  irányba  $-7$  egységgel  
 $p^+ (x^+ = ?; y^+ = ?)$
3.  $P \begin{cases} 3 \\ -5 \end{cases}$  Forgassuk el a koordináta-rendszert  $\varphi = 60^\circ$ -kal.  
Mik lesznek a pont koordinátái?

Egyenes az analitikus geometriában

Példák:

1. Ábrázoljuk a Descartes koordináta-rendszerben a  $-4x + 3y = -12$  egyenlettel adott egyenest!



a/ Hozzuk  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  tengelymetszetes alakra, ahol  $a$  és  $b$  a tengelymetszeteket jelenti.

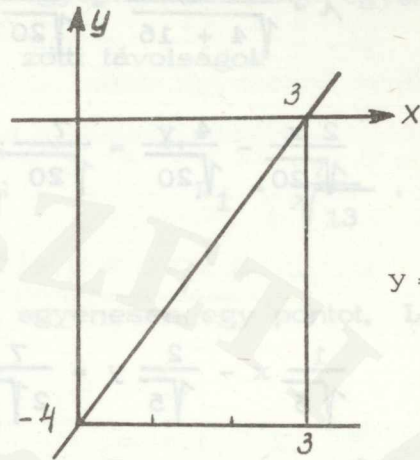
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} = 1.$$

b/ Explicit alakra hozva

$$y = \frac{4}{3}x - 4.$$

Az egy egységnyi jobbrahaladáshoz tartozó ordinátaérték  $\frac{4}{3}$ .

Az egyenest pontosabban rajzolhatjuk be, ha jobbra 3 egységet számlálunk és az ehhez tartozó 4 egység ordináta értékét vesszük figyelembe.



2. Határozzuk meg az előbbi egyenes hajlásszögét az x tengellyel!

$$y = \frac{4}{3}x - 4; \quad m = \operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{3} = 1,3333.$$

Mind a sinus, mind a cosinus előjele pozitív, ezért a szög hegyesszög, tehát  $\varphi = 53,1^\circ$ .

3. Vegyünk fel a  $2x + 3y = 6$  egyenlettel adott egyenesen egy pontot, amelynek abszcisszája 6!

$$12 + 3y = 6$$

$$3y = -6 \quad P(6, -2)$$

$$y = -2$$

4. Határozzuk meg a  $2x - 4y = 7$  egyenlettel adott egyenesnek a normálisát és a normális hajlásszögét!

Az egyenletet

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = p \text{ normálalakra hozzuk a}$$

$$\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \text{ szorzószámmal, amelynek azt az előjelét}$$

vesszük szorzáskor, amely a jobboldalt pozitívvá teszi:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{4 + 16}} = \frac{1}{\sqrt{20}}$$

$$\frac{2x}{\sqrt{20}} - \frac{4y}{\sqrt{20}} = \frac{7}{\sqrt{20}}; \quad \text{egyszerűsítve}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y = \frac{7}{2\sqrt{5}};$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin \varphi = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-2}{1} = -2;$$

$$\varphi = 296,5^\circ$$

$$p = \frac{7}{2\sqrt{5}}$$

5. Határozzuk meg a  $2x - 3y = 5$  egyenlettel adott egyenes távolságát a  $P_1(4, -3)$  ponttól!

$$d = \left| x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p \right|$$

alapján

$$d = \left| x_1 \frac{2}{\sqrt{13}} - y_1 \frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{5}{\sqrt{13}} \right| \quad \text{amibe } x_1 = 4 \text{ és } y_1 = -3$$

értéket téve

$$d = \left| \frac{8}{\sqrt{13}} + \frac{9}{\sqrt{13}} - \frac{5}{\sqrt{13}} \right| = \frac{12}{\sqrt{13}}$$

A "d" előjeléből a pont, az egyenes és az origó elhelyezkedésére következtethetünk. Ha  $d > 0$ , akkor a pont és az origó az egyenes különböző oldalán van, ha  $d < 0$ , akkor ugyanazon oldalán.

6. Párhuzamos egyenesek távolsága.

Számítsuk ki a

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 11 \end{array} \right\} \text{ egyenletekkel adott egyenesek kö-} \\ \text{zötti távolságot!}$$

$$a/ \quad \frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y = \frac{7}{\sqrt{13}}; \quad p_1 = \frac{7}{\sqrt{13}}.$$

Felveszünk a  $4x + 6y = 11$  egyenesen egy pontot, Legyen  $x = 2$

$$\text{akkor } 8 + 6y = 11$$

$$y = \frac{1}{2}.$$

Kiszámítjuk a  $P\left(2; \frac{1}{2}\right)$  pont távolságát a  $2x + 3y = 7$  egyenlettel megadott egyenestől

$$d = \left| 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{3 \cdot 0,5}{\sqrt{13}} - \frac{7}{\sqrt{13}} \right| = \frac{3}{2\sqrt{13}}.$$

b/ Számíthatjuk a két egyenes távolságát úgy is, hogy az utóbbi egyenesnek is kiszámítjuk az origótól való távolságát és képezzük a két távolság különbségének abszolút értékét.

$$\frac{4}{\sqrt{52}} + \frac{6}{\sqrt{52}} = \frac{11}{\sqrt{52}}; \quad p_2 = \frac{11}{\sqrt{52}}$$

$$d = \left| \frac{7}{\sqrt{13}} - \frac{11}{2\sqrt{13}} \right| = \frac{3}{2\sqrt{13}}.$$

7. Két egyenes metszéspontja és az általuk bezárt szög.

$$\left. \begin{array}{l} 12x - 13y = 2 \\ 3x + 4y = 1 \end{array} \right\} \text{ Számítsuk ki: a/ a metszéspont koordinátáit,} \\ \text{b/ a közbezárt szöget.}$$

$$a/ \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -13 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & -13 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{8 + 13}{48 + 39} = \frac{21}{87} = \frac{7}{29}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{87} = \frac{12 - 6}{87} = \frac{6}{87} = \frac{2}{29}$$

$$b/ \left. \begin{array}{l} E_1 \dots 12x - 13y = 2 \\ E_2 \dots 3x + 4y = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} m_1 = \frac{12}{13} \\ m_2 = -\frac{3}{4} \end{array}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{12}{13}}{1 + \frac{12}{13} \left(-\frac{3}{4}\right)} = -\frac{87}{16}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = -5,4375$$

$$\alpha' = 79^\circ 34'$$

$$\alpha = 180^\circ - 79^\circ 34' = 100^\circ 26'$$

$$\underline{\alpha = 100^\circ 26'}$$

8. Az egyenes paraméteres egyenletei:

a/ Határozzuk meg a  $P_0(1, 5)$  ponton átmenő és  $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$  vektorral párhuzamos egyenes egyenletrendszerét!

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 5 + 3t \end{array} \right\} \text{ ahol } -\infty < t < \infty$$

b/ Határozzuk meg a  $P_0(2, -3)$  és  $P_1(3, 5)$  pontokon átmenő egyenes paraméteres egyenletrendszerét!

$$\text{Az } \left. \begin{array}{l} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{array} \right\}$$

egyenletek alapján

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = -3 + 8t \end{array} \right\}$$

Feladatok:

Számítsuk ki a következő egyenletekkel adott egyenesek normálisának hosszát, a normális hajlásszögét és a megadott ponttól való távolságát!

1.  $2x - 4y = 7;$  P (4; -3)

2.  $4x + 3y = -5;$  P (2; 3)

3.  $y = -\frac{2}{3}x - 5;$  P (3; 6)

4.  $y = -3x + 2;$  P (2; -4)

5.  $3y - 4x = 8;$  P (-3; -5)

6.  $7x + 4y = 5;$  P (1; -3)

Számítsuk ki a következő egyenletekkel megadott egyenesek metszéspontját és az általuk bezárt szöveget.

7.	$2x - y = 6$	}	8.	$5x - y = 6$
	$3x + \frac{1}{2}y = -1$			$\frac{2}{5}x - 6y = -2$

9.	$2x - 3y = 5$	}	10.	$3x - 5y = 6$
	$6x - \frac{1}{2}y = -1$			$2x + \frac{1}{2}y = 0$

Határozzuk meg a következő egyenletekkel megadott párhuzamos egyenesek távolságát!

11.	$3x - 5y = 8$	}	12.	$2x + 3y = 5$
	$6x - 10y = 11$			$6x + 9y = 10$

Határozzuk meg a következő feltételekkel adott egyenes paraméteres egyenletrendszerét!

13.  $P_0 (-5, 7)$

$$\vec{v} = 3 \vec{i} - 5 \vec{j}$$

14.  $P_0 (2, 5)$

$$\vec{v} = -5 \vec{i} + 3 \vec{j}$$

15.  $P_0 (-3, 5)$

$$P_1 (-1, -4)$$

16.  $P_0 (-4, -7)$

$$P_1 (2, 3)$$

17. Adva az egyenes

$$\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 3 + 4t \end{cases}$$

paraméteres egyenletrendszere, határozzuk meg a  $Ax + By = C$  általános alakját, tengelymetszetes alakját és normál alakját!

18. Állapítsuk meg, hogy az  $A(3, -2)$ ,  $B(1, 6)$  és a  $C(-1, 2)$  pontok egy egyenesen vannak-e?

19. A  $P_1(1, 2)$  ponton át fektessünk egy olyan egyenest, amely egyenlő távolságra van a  $P_2(2, 3)$  és  $P_3(4, -5)$  pontoktól! Számítsuk ki a  $P_1, P_2, P_3$  pontok által meghatározott háromszög területét, magasságvonalainak metszéspontját és súlypontjának koordinátáit.

20. Az  $\overline{AB}$  egyenesen mozog egy  $P$  pont. Mi a mértani helye az  $\overline{AP}$  és  $\overline{PB}$  szakaszok fölé rajzolt négyzetek középpontjait összekötő szakaszok felezőpontjainak, ha ezek az egyenes a/ azonos, illetve b/ különböző oldalán vannak?

### Másodrendű alakzatok

Általános alakjuk:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Az egyenletből, ha az  $xy$ -os tag hiányzik, könnyen meg tudjuk állapítani, hogy az egyenlet milyen görbe egyenlete.

Példák:

1. Ábrázoljuk az  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 8 = 0$  egyenletnek megfelelő másodrendű görbét!

Mivel  $x^2$  és  $y^2$  együtthatója előjelre is és abszolút értékre is megegyezik az egyenlet kör egyenlete.

Az egyenletet átalakítjuk

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y = 8$$

$$x^2 - 4x + (-2)^2 + y^2 + 2y + 1 = 8 + 4 + 1$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 13$$

Összehasonlítva az

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \text{ eltoló helyzeti kör egyenletével,}$$

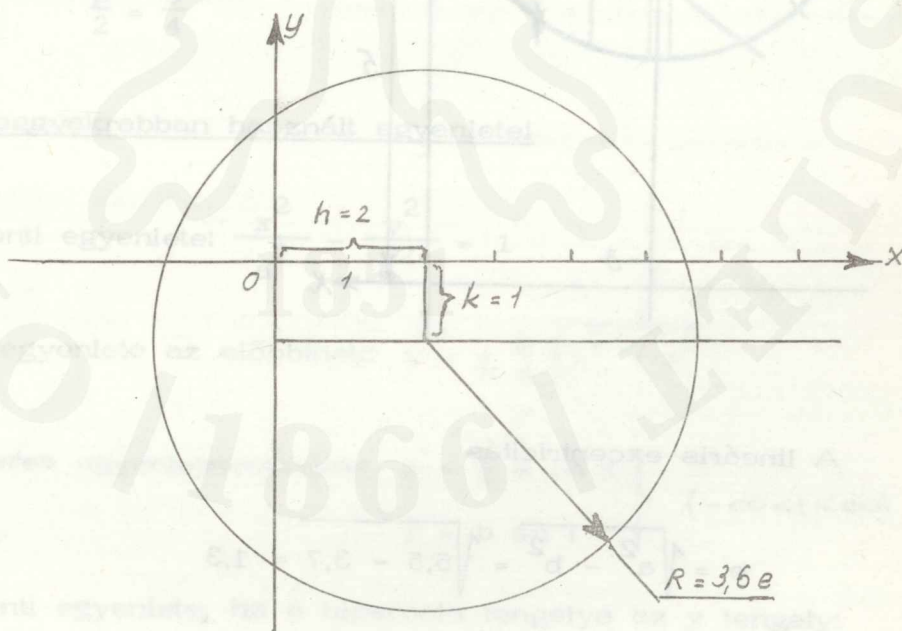
amelyben  $h$  és  $k$  az eltolódás mértékei, kapjuk hogy

$$h = 2$$

$$k = -1$$

$$r^2 = 13$$

$$r \approx 3,6$$



2. Ábrázoljuk a  $2x^2 + 3y^2 + 12x - 30y + 82 = 0$  egyenletnek megfelelő másodrendű görbét!

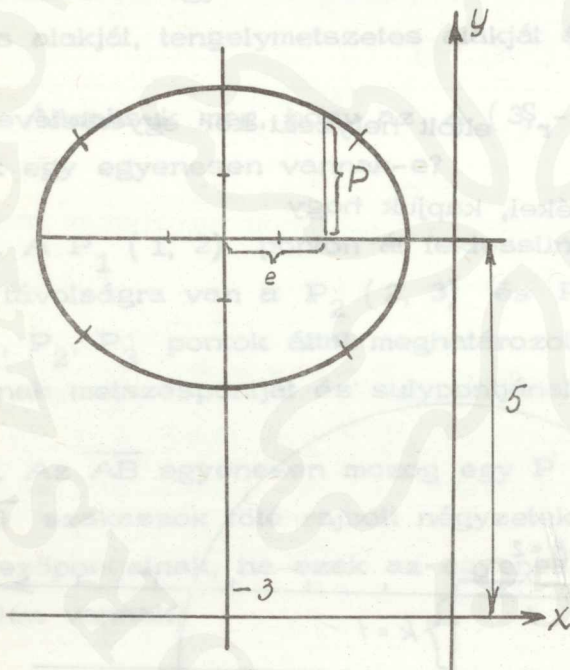
Az  $x^2$  és  $y^2$  együtthatója csak előjelre egyezik meg. Az egyenlet ellipszisnek az egyenlete,

$$2x^2 + 3y^2 + 12x - 30y = -82$$

$$2(x^2 + 6x + 9) + 3(y^2 - 10y + 25) = -82 + 18 + 75$$

$$2(x + 3)^2 + 3(y - 5)^2 = 11$$

$$\frac{(x + 3)^2}{\frac{11}{2}} + \frac{(y - 5)^2}{\frac{11}{3}} = 1$$



$$h = -3 \quad k = 5$$

$$a^2 = \frac{11}{2} \quad a = 2,3$$

$$b^2 = \frac{11}{3} \quad b = 1,9$$

A lineáris excentricitás

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5,5 - 3,7} = 1,3$$

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{3,7}{2,3} = 1,6$$

A numerikus excentricitás

$$\xi = \frac{e}{a} = \frac{1,3}{2,3} = 0,565 < 1$$

3. Ábrázoljuk a  $3y^2 - 9x + 6y = 6$  egyenletnek megfelelő másodrendű görbét!

Csak egy másodfokú tag van az egyenletben, az egyenlet parabolának felel meg, melynek tengelye az  $x$  tengely.

$3y^2 - 9x + 6y = 6$  egyenletet a következő alakra hozzuk

$$(y - k)^2 = 2p(x - h)$$

$$3(y^2 + 2y) = 6 + 9x$$

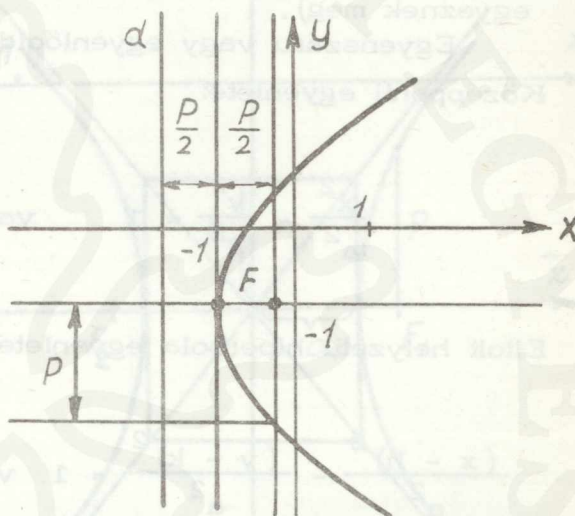
$$3(y + 1)^2 = 9 + 9x$$

$$(y + 1)^2 = 3 + 3x$$

$$(y + 1)^2 = 3(x + 1)$$

$$k = -1 \quad h = -1$$

$$2p = 3 \quad \frac{p}{2} = \frac{3}{4}$$



A hiperbola leggyakrabban használt egyenletei

Középponti egyenlete:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Explicit egyenlete az előbbinek:  $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$

Paraméteres egyenletrendszer:  $\left. \begin{aligned} x &= \pm a \operatorname{ch} t \\ y &= b \operatorname{sh} t \end{aligned} \right\} (-\infty < t < \infty)$

Középponti egyenlete, ha a hiperbola tengelye az  $y$  tengely:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$C(h, k)$  középpontu hiperbola egyenletei:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{vagy} \quad \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1.$$

Általános egyenlete, amelyben a tengelyei párhuzamosak a koordináta-rendszer tengelyeivel,

$$A x^2 - B y^2 + C x + D y + E = 0 \quad (A > 0, \quad B > 0)$$

(a másodfokú tagok együtthatói sem előjelre sem abszolút értékre nem egyeznek meg).

Egyenszáru vagy egyenlőoldalu hiperbola.

Középponti egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{vagy} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Eltolt helyzetű hiperbola egyenlete:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad \text{vagy} \quad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1.$$

Általános egyenlete:

$$A x^2 - A y^2 + B x + C y + D = 0.$$

Az egyenszáru hiperbolát elforgatjuk úgy, hogy az aszimptotái legyenek a tengelyei. Így a

középponti egyenlete:  $y = \frac{a^2}{2x}$

eltolt helyzetű egyenlete:  $y - k = \frac{a^2}{2(x-h)}$

Példák:

4. Ábrázoljuk a  $3x^2 - 2y^2 - 24x - 12y + 24 = 0$  egyenletnek megfelelő görbét!

$$3x^2 - 2y^2 - 24x - 12y = -24$$

$$3(x^2 - 8x) - 2(y^2 + 6y) = -24$$

$$3(x - 4)^2 - 2(y + 3)^2 = -24 + 48 - 18$$

$$\frac{(x - 4)^2}{2} - \frac{(y + 3)^2}{3} = 1.$$

$$h = 4$$

$$k = -3$$

$$a = \sqrt{2}$$

$$b = \sqrt{3}$$

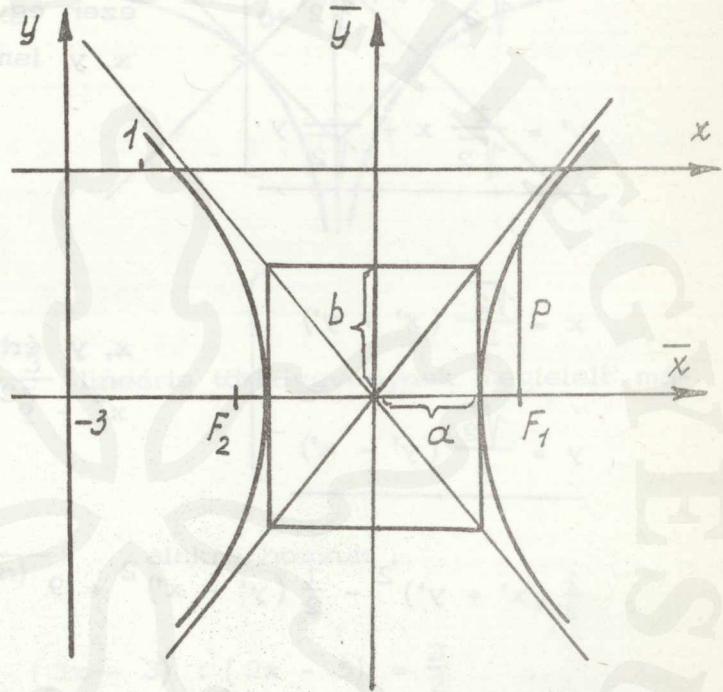
A lineáris excentricitás

$$e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}.$$

Paramétere:

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$p = 2,11.$$



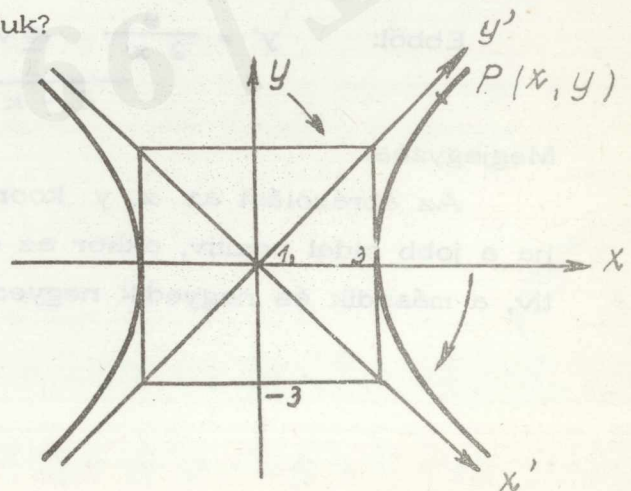
A numerikus excentricitás

$$\mathcal{E} = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} > 1.$$

5. Mi lesz az  $x^2 - y^2 = 9$  egyenszáru hiperbola egyenlete, ha a koordináta-rendszert  $\psi = -45^\circ$ -kal elforgatjuk?

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a = 3; \quad b = 3.$$



A koordinátarendszer transzformációs képleteit alkalmazva

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi = x \cos (-45^\circ) + y \sin (-45^\circ)$$

$$y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi = -x \sin (-45^\circ) + y \cos (-45^\circ)$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}} x - \frac{1}{\sqrt{2}} y \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y \end{aligned} \right\}$$

ezen egyenletrendszert megoldjuk az  $x, y$  ismeretlenre nézve

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2} (y' - x') \end{aligned} \right\}$$

$x, y$  értékét behelyettesítjük az  $x^2 - y^2 = 9$  egyenletbe

$$\frac{1}{2} (x' + y')^2 - \frac{1}{2} (y' - x')^2 = 9$$

$$\frac{1}{2} (x'^2 + 2 x' y' + y'^2) - \frac{1}{2} (y'^2 - 2 x' y' + x'^2) = 9 .$$

Az összevonást elvégezve marad

$$2 x' y' = 9 .$$

Ebből:  $y' = \frac{9}{2 x'}$  a vesszőket elhagyva  $y = \frac{9}{2 x}$  .

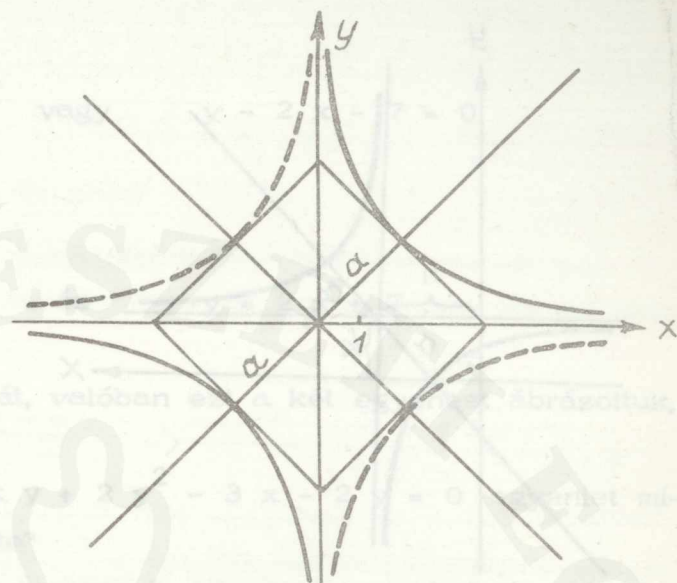
Megjegyzés:

Az ábrázolást az  $x, y$  koordinátarendszerben végezzük, mégpedig ha a jobb oldal pozitív, akkor az első és a harmadik negyedbe, ha negatív, a második és negyedik negyedbe rajzoljuk a hiperbolát!

Lásd az ábrát

a = 3

Tengelyeltolódás nincs



6. Ábrázoljuk az  $y = \frac{3x - 3}{2x - 5}$  lineáris törtfüggvénynek megfelelő másodrendű görbét!

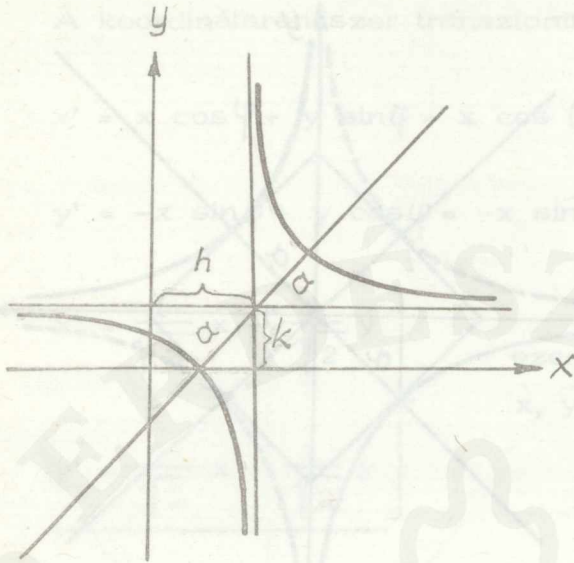
$$y - k = \frac{a^2}{2(x - h)} \quad \text{alakra hozzuk.}$$

Elvégezzük az osztást  $(3x - 3) : (2x - 5) = \frac{3}{2}$

$$\begin{array}{r} -3x + \frac{15}{2} \\ \hline \frac{9}{2} \end{array}$$

$$y = \frac{3x - 3}{2x - 5} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{9}{2}}{2x - 5}$$

$$y - \frac{3}{2} = \frac{\frac{9}{2}}{2(x - \frac{5}{2})}$$

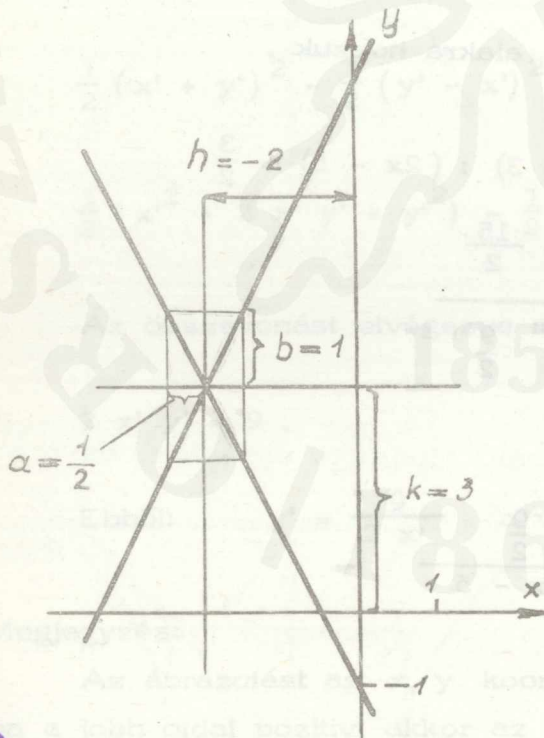


$$k = \frac{3}{2}; \quad a = 2,1$$

$$h = \frac{5}{2}$$

7. Ábrázoljuk az  $y^2 - 4x^2 - 16x - 6y - 7 = 0$  egyenletnek megfelelő másodrendű görbét!

$$a/ \quad (y - 3)^2 - 4(x + 2)^2 = 0$$



$$\frac{(y - 3)^2}{1} - \frac{(x + 2)^2}{\frac{1}{4}} = 0$$

$$k = 3$$

$$h = -2$$

$$b = 1$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Az adott görbe látható módon valós metsző egyenespár.

b/ Rendezhetjük az egyenletet a következő módon is:

$$(y - 3)^2 - (2x + 4)^2 = 0$$

$$(y - 3 + 2x + 4)(y - 3 - 2x - 4) = 0$$



egyenletből

Példák  $y + 2x + 1 = 0$  vagy  $y - 2x - 7 = 0$

amiből

$$y = -2x - 1 \quad \text{és} \quad y = 2x + 7.$$

Megtekintve az előbbi ábrát, valóban ezt a két egyenest ábráztuk,

8. Állapítsuk meg a  $6x^2 + 7xy + 2y^2 - 3x - 2y = 0$  egyenlet milyen másodrendű görbe egyenlete?

Mivel az egyenletben  $xy$ -os tag is szerepel, nem tudunk a tiszta másodfokú tagok együtthatói alapján semmit se mondani.

Képezzük az  $A$  és  $A_{33}$  determinánst és állapítsuk meg az értéküket!

$$A = \begin{vmatrix} 6 & 3,5 & -1,5 \\ 3,5 & 2 & -1 \\ -1,5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 6 & 3,5 \\ 3,5 & 2 \end{vmatrix} = -0,25.$$

Mivel  $A = 0$  és  $A_{33} < 0$  ezért az egyenlet két valós metsző egyenes egyenlete.

A metszéspont (centrum) koordinátáit a

$$\left. \begin{aligned} 6x + 3,5y &= 1,5 \\ 3,5x + 2y &= 1,5 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer  $x = 2; y = -3$  megoldásai adják.

Az eredeti egyenletből, ha az általuk meghatározott egyeneseket ábrázolni akarjuk, célszerű az  $x$ -es,  $y$ -os és  $xy$ -os tagokat kiküszöbölni.

Nézzük először az eltolást!

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi + 2 \\ y &= \eta - 3 \end{aligned} \right\} \text{ amiből } \xi = x - 2$$

$$6(\xi + 2)^2 + 7(\xi + 2)(\eta - 3) + 2(\eta - 3)^2 - 3(\xi + 2) - 2(\eta - 3) = 0$$

$$6(\xi^2 + 4\xi + 4) + 7(\xi\eta + 2\eta - 3\xi - 6) + 2(\eta^2 - 6\eta + 9) - 3\xi - 6 - 2\eta + 6 = 0.$$

Az összevonásokat elvégezve marad  $2\eta^2 + 2\xi\eta + 6\xi^2 = 0$ .

Ezen egyenletet megoldjuk  $\eta$ -ra

$$\eta = \frac{-7\xi \pm \sqrt{49\xi^2 - 48\xi^2}}{4} = \frac{-7\xi \pm \xi}{4} = \begin{cases} -\frac{3}{2}\xi \\ -2\xi \end{cases}$$

$\eta$  értékeit behelyettesítjük az

$y = \eta - 3$  egyenletbe

$$y = -\frac{3}{2}\xi - 3 = -\frac{3}{2}(x - 2) - 3 = -\frac{3}{2}x$$

$$y = -2\xi - 3 = -2(x - 2) - 3 = -2x + 1.$$

Ábrázolva:

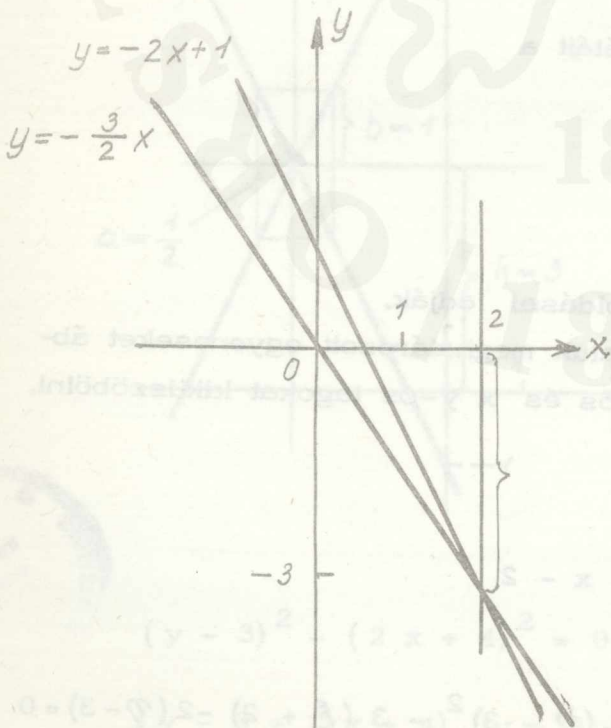
Ellenőrzés:

A két egyenes szorzata

$$\begin{aligned} (y + \frac{3}{2}x)(y + 2x - 1) &= \\ &= y^2 + \frac{3xy}{2} + 2xy + 3x^2 - \\ &- y - \frac{3}{2}x = 0, \end{aligned}$$

vagyis

$$6x^2 + 7xy + 2y^2 - 3x - 2y = 0.$$



Másodrendű görbék érintője

Példák:

9. Középponti helyzetű ellipszis érintője.

Az ellipszis  $P_0(x_0; y_0)$  pontjához tartozó érintő egyenlete

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1.$$

Ha  $y_0 = 0$ , akkor a nagytengely két végpontjában húzott érintőről van szó. A képlet ebben az esetben is alkalmazható, hiszen ha  $y_0 = 0$  és  $x_0 = a$ , akkor az érintő egyenlete  $x = a$ , ha  $y_0 = 0$  és  $x_0 = -a$ , akkor az érintő egyenlete  $x = -a$ .

10. Határozzuk meg az  $y = \frac{3x - 3}{2x - 5}$  egyenlettel adott másodrendű görbe

$P(\xi = 3; \eta = 6)$  pontjához tartozó érintőjének egyenletét!

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix} \quad \text{együtthatómátrix felhasználásával az}$$

$$(a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13})x + (a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23})y + (a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}) = 0$$

összefüggés alapján, ahol  $P(\xi, \eta)$  a görbe pontjának koordinátái

$$(0 + 6 - \frac{3}{2})x + (3 + 0 - \frac{5}{2})y + (-\frac{9}{2} - \frac{30}{2} + 3) = 0.$$

Az összevonásokat elvégezve az érintő egyenlete

$$y = -9x + 33.$$

Vegyes feladatok

11. Határozzuk meg a

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 2y + K = 0 \text{ egyenletben a } K$$

állandót úgy, hogy az egyenlet egyenespár egyenlete legyen!

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & K \end{vmatrix} = 9K + 1 + 1 - (6 + K) = 8K - 4 = 0$$

$$K = \frac{1}{2}$$

12. Határozzuk meg a

$$2x^2 + \lambda xy + 2y^2 - 7x + \mu y + 3 = 0$$

egyenletben  $\lambda$ -t és  $\mu$ -t úgy, hogy az egyenlet párhuzamos egyenespár egyenlete legyen!

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & \frac{\lambda}{2} \\ \frac{\lambda}{2} & 2 \end{vmatrix} = 4 - \frac{\lambda^2}{4} = 0 \quad \lambda^2 = 16$$
$$\lambda_{1,2} = \pm 4$$

$$\lambda_1 = 4\text{-nél}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 2 & 2 & \frac{\mu}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{\mu}{2} & 3 \end{vmatrix} = -7\mu - \frac{\mu^2}{2} - \frac{49}{2} = 0$$

$$\mu^2 + 14\mu + 49 = 0$$

$$\mu_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 196}}{2} = -7$$

$$\lambda_2 = -4 \text{ -nél } \mu = 7 .$$

A kapott  $\lambda$  és  $\mu$  értékek mellett bontsuk egyenesekre!

a/  $\lambda_1 = 4$ ;  $\mu = -7$ -nél az egyenlet átmegy a

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 - 7x - 7y + 3 = 0 \quad \text{egyenletbe}$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - \frac{7}{2}x - \frac{7}{2}y + \frac{3}{2} \equiv$$

$$\equiv (a_1x + b_1y + C_1)(a_1x + b_1y + C_2)$$

ahol  $a_1 = \pm 1$

$$b_1 = \pm 1$$

$$a_1 b_1 + b_1 a_1 = 2$$

ezeket az értékeket a jobboldalba beírva  $C_1$  és  $C_2$  értékekre tudunk következtetni

$$\left. \begin{aligned} \pm C_1 \pm C_2 &= -\frac{7}{2} \\ C_1 \cdot C_2 &= \frac{3}{2} \end{aligned} \right\}$$

$C_1, C_2 > 0$ -nál

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 &= -\frac{7}{2} \\ 2 C_1 C_2 &= 3 \end{aligned} \right\}$$

$$C_2 = \frac{3}{2 C_1}$$

$$C_1 + \frac{3}{2 C_1} + \frac{7}{2} = 0$$

$$2 C_1^2 + 7 C_1 + 3 = 0$$

$$(C_1)_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{-7 \pm 5}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -3 \end{cases}$$

$$C_2 = -3; \quad C_2 = -\frac{1}{2}$$

$C_1, C_2 < 0$ -nál az egyenletet  $(-1)$ -gyel megszorozzuk

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 &= \frac{7}{2} \\ 2 C_1 C_2 &= 3 \end{aligned} \right\} \quad C_2 = \frac{3}{2 C_1}$$

$$(C_1)_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{2} \\ C_2 &= 3 \end{aligned}$$

Az egyenesek

$$\left. \begin{aligned} x + y - \frac{1}{2} &= 0 \\ x + y - 3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

b/ Az egyenesek  $\lambda_2 = -4$  és  $\mu = 7$ -nél

$$\left. \begin{aligned} x - y - 3 &= 0 \\ 2x - 2y - 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

A feladat megoldása transzformációval, ha  $\lambda_1 = 4$   $\mu_1 = -7$

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 - 7x - 7y + 3 = 0 \quad \text{egyenlet az}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{x} + \xi \\ y &= \bar{y} + \eta \end{aligned} \right\} \quad \text{transzformációval átmegy a}$$

$$2(\bar{x}^2 + 2\bar{x}\xi + \xi^2) + 4(\bar{x}\bar{y} + \bar{x}\eta + \bar{y}\xi + \xi\eta) + \\ + 2(\bar{y}^2 + 2\bar{y}\eta + \eta^2) - 7(\bar{x} + \xi) - 7(\bar{y} + \eta) + 3 = 0$$

egyenletbe.

A szorzásokat elvégezve és az azonos tényezőket kiemelve kapjuk

a

$$2\bar{x}^2 + \bar{x}(4\xi + 4\eta - 7) + \bar{y}(4\xi + 4\eta - 7) + \\ + 4\bar{x}\bar{y} + 2\bar{y}^2 + (2\xi^2 + 4\xi\eta + 2\eta^2 - 7\xi - 7\eta) + 3 = 0$$

egyenletet.

Az elsőfoku tagok kiesnek, ha

$$4\xi + 4\eta - 7 = 0.$$

Legyen  $\xi = 0$ , akkor  $\eta = \frac{7}{4}$  és a transzformációval kapott egyenletből marad a

$$2\bar{x}^2 + 4\bar{x}\bar{y} + 2\bar{y}^2 + \frac{49}{8} - \frac{49}{4} + 3 = 0$$

$$(\bar{x} + \bar{y})^2 - \frac{25}{16} = 0.$$

Szorzat alakban

$$\text{Képe: } (\bar{x} + \bar{y} + \frac{5}{4})(\bar{x} + \bar{y} - \frac{5}{4}) = 0$$

azonban

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= x - \xi \\ \bar{y} &= y - \eta \end{aligned} \right\} \text{helyettesítéssel}$$

$$(x - \xi + y - \eta + \frac{5}{4})(x - \xi + y - \eta - \frac{5}{4}) = 0 \text{ alakba megy át és}$$

itt figyelembe véve, hogy  $\xi = 0$  és  $\eta = \frac{7}{4}$  kapjuk, hogy

$$(x + y - \frac{1}{2})(x + y - 3) = 0.$$

Hasonlóképpen adódik  $\lambda_2 = -4$  és  $\mu = 7$  mellett

$$(x - y - 3)(2x - 2y - 1) = 0.$$

13. Határozzuk meg, hogy az

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0 \quad \text{egyenlet milyen}$$

görbe egyenlete?

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -8 \\ 3 & 5 & -8 \\ -8 & -8 & -16 \end{vmatrix} = -512 \neq 0; \quad A_{33} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 16 > 0$$

ezért a görbe valós, vagy képzetes ellipszis.

Amennyiben többet szeretnénk a görbéről tudni, mivel magasabb matematikai ismeretek nem állnak rendelkezésünkre, elmetszük a görbét egy, a centrumon átmenő egyenessel. Ha van valós metszéspont, akkor az ellipszis valós, ha nincs, nem valós.

A centrum koordinátáit az

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 3y - 8 = 0 \\ 3x + 5y - 8 = 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszerből számítjuk ki, ahonnan

$$C(x = 1; y = 1) \quad \text{adódik.}$$

Elmetszük a görbét az  $x = 1$  egyenessel, marad az egyenletből

$$5y^2 - 10y - 27 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 4\sqrt{10}}{5} = \begin{cases} 1 + \frac{4}{5}\sqrt{10} \\ 1 - \frac{4}{5}\sqrt{10} \end{cases}$$

Van valós metszéspont, tehát az ellipszis valós.

14. Az  $x^2 + y^2 = 2x$  egyenlettel adott görbe  $P(-1,0)$  pontjában határozzuk meg az érintők egyenletét!

A  $P(-1,0)$  pont nincs rajta a körön, ezért képezzük a polárist

$$x x_1 + y y_1 = x + x_1$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Megkeressük a kör és a poláris közös pontjait

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2x \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} P_1\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\frac{1}{4} + y^2 = 4 \quad P_2\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{3}}{2}$$

Képezzük a  $P(-1,0)$  és  $P_1\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  majd

$$P(-1,0) \text{ és } P_2\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

pontokon átmenő egyeneseket. Ezek lesznek az adott pontból az adott görbéhez húzható érintő egyenesek. Explicit egyenletük:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 1)$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3} (x + 1).$$

Feladatok:

Ábrázoljuk a következő egyenletekkel adott másodrendű görbéket és határozzuk meg adott pontjukban az érintő egyenes egyenletét!

1.  $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 9 = 0$

2.  $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y = 12$

3.  $4x^2 + 4y^2 - x + y - 12 = 0$

4.  $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0;$  P (2; ?)

5.  $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0;$  P (2; ?)

6.  $x^2 - 4y^2 + 6x + 5 = 0;$  P (x = 1; y = ?)

7.  $5x^2 - 4y^2 - 20x - 24y - 36 = 0;$  P (-1; ?)

8.  $4x^2 - 9y^2 + 32x - 54y - 161 = 0;$  P (3; ?)

9.  $y = \frac{1+x}{1-2x};$  P (0; 1)

10.  $y^2 - 2y + 4x - 3 = 0;$  P (0; 3).

Állapítsuk meg a következő egyenletekről milyen görbéknek felelnek meg. Állítsuk elő, ahol lehet, a görbe centrumának koordinátáit és a megadott pontokban az érintőket.

11.  $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$

12.  $5x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 1 = 0$

13.  $5x^2 + 6xy + 2y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$

14.  $3x^2 + 4xy + 6y^2 - 2x - 5 = 0$

15.  $x^2 - 4xy + 5y^2 - 2x + 6y - 7 = 0;$   $P(2; -1)$

16.  $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$

17.  $x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0;$   $P(5, 2)$

18.  $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$

19.  $x^2 + 6xy + y^2 + 8x + 24y + 39 = 0;$   $P(0; ?)$

20.  $3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 5 = 0;$   $P(2; \frac{3}{4})$

21.  $2x^2 + 8xy + 8y^2 + 4x + 8y + 2 = 0$

22.  $5x^2 + 6xy + 2y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$

23.  $2x^2 + 8xy + 8y^2 + 4x + 8y = 0$

24.  $x^2 - 5xy + 6y^2 + 3x - 8y + 2 = 0$

25.  $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 3 = 0$

26.  $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0.$

A konstans megválasztásával tegyük degenerálttá a másodrendű egyenletnek megfelelő görbét!

27.  $3x^2 - 4xy - 2x + 4y + \lambda = 0$

28. Határozzuk meg  $\lambda$ -t úgy, hogy az

$$x^2 + 2\lambda xy + 4y^2 + 2x + \lambda y = 0$$

egyenlet valós metsző egyenespár egyenlete legyen és határozzuk meg a keletkező egyeneseket,

29. Határozzuk meg a

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 4y = 25 \\ 5x + 12y = 65 \\ 8x + 15y = -85 \end{array} \right\} \text{ és az } \left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ -3x + 4y = -12 \\ 2x - 6y = -12 \end{array} \right\}$$

egyenletekkel adott háromszögeknél

- a/ a háromszög csúcspontjainak koordinátáit,
- b/ a háromszög területét,
- c/ a háromszögbe beírt kör sugarát ( $r = \frac{T}{s}$ , ahol  $T$  a háromszög területe és  $s$  a kerület fele),
- d/ a háromszög köré írt kör sugarát ( $R = \frac{abc}{4T}$ , ahol  $a, b, c$  a háromszög oldalai és  $T$  a háromszög területe),
- e/ a háromszög súlypontját,
- f/ a háromszög magasságpontjának koordinátáit.

30. Az  $A(1; 13)$ ,  $B(11; 3)$  és  $C(13; 9)$  pontok által meghatározott körön rajta van-e a  $D(7; 1)$  és az  $E(4; 15)$  pont?

31. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely érinti mindkét tengelyt és átmegy a  $P(32; 81)$  ponton.

32. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely a  $P(5, 0)$  pontban érinti az  $x$  tengelyt és az  $y$  tengelyből 10 egységnyi hirt metsz ki.

33. Irjuk fel a  $P(2; 3)$  középpontú és a  $3x + 4y = 43$  egyenest érintő kör egyenletét.

34. Határozzuk meg a  $P_1(1; 2)$  és  $P_2(3; 6)$  pontokon átmenő kör sugarának hosszát, amelynek középpontja az  $y = 0,5x - 1$  egyenesen van.

35. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely átmegy az  $P_1(11; 2)$  és a  $P_2(7; -2)$  pontokon és a középpontja rajta van az  $y = 3x - 19$  egyenlettel megadott egyenesen.

36. Határozzuk meg az  $M(1; 1)$  ponttól  $\sqrt{5}$  távolságra lévő pontok összességét. Állapítsuk meg a kapott mértani helynek és a  $2x + 5y - 3 = 0$  egyenlettel adott egyenesnek vannak-e közös pontjai?



ANALITIKUS TÉRGEOMETRIA

Egyenes

Egy ponton átmenő adott irányítványozóval rendelkező egyenes egyenletei.

Példa:

Határozzuk meg a  $P_0(2, -5, 3)$ ,  $(y_i)$  ponton átmenő és  $\vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$  irányu egyenes egyenletét!

a/ t paraméteres egyenlete

$x_i = y_i + t v_i$  képlet alapján

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2 + 2t \\ x_2 &= -5 + 5t \\ x_3 &= 3 - 4t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} t &= \frac{x_1 - 2}{2} \\ t &= \frac{x_2 + 5}{5} \\ t &= \frac{x_3 - 3}{-4} \end{aligned}$$

a jobboldalakat egyenlővé téve kapjuk az

$$\frac{x_1 - 2}{2} = \frac{x_2 + 5}{5} = \frac{x_3 - 3}{-4}$$

relációt, ami az egyenes analitikus alakja.

b/ Az egyenes s távolságpaméteres egyenlete

$\vec{v}$  irányába mutató egységvektor  $\vec{v}^0 = \frac{2}{\sqrt{45}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{45}}\vec{j} - \frac{4}{\sqrt{45}}\vec{k}$

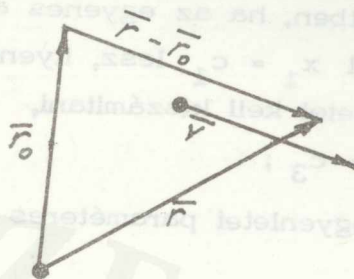
$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2 + \frac{2s}{\sqrt{45}} \\ x_2 &= -5 + \frac{5s}{\sqrt{45}} \\ x_3 &= 3 - \frac{4s}{\sqrt{45}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_i &= y_i + s e_i \text{ képlet alapján} \\ \text{ha } t &= \frac{s}{\sqrt{45}} \text{ helyettesítést végzünk, nyilván} \\ &\text{előáll a } t \text{ paraméteres alak és az analitiku-} \\ &\text{kus alak is.} \end{aligned}$$

c/ Az egyenes vektoros egyenlete

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v} \quad \text{összefüggés alapján}$$

$$\vec{r}_0 = 2 \vec{i} - 5 \vec{j} + 3 \vec{k}$$

$$\vec{v} = 2 \vec{i} + 5 \vec{j} - 4 \vec{k}$$



$$\begin{aligned} \vec{r} &= (2 \vec{i} - 5 \vec{j} + 3 \vec{k}) + (2 \vec{i} + 5 \vec{j} - 4 \vec{k}) = \\ &= (2 + 2t) \vec{i} + (-5 + 5t) \vec{j} + (3 - 4t) \vec{k} \end{aligned}$$

Ugyanis

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2 + 2t \\ x_2 &= -5 + 5t \\ x_3 &= 3 - 4t \end{aligned} \right\} \text{ezekből} \quad \begin{aligned} t &= \frac{x_1 - 2}{2} \\ t &= \frac{x_2 + 5}{5} \\ t &= \frac{3 - x_3}{4} \end{aligned}$$

vagyis

$$\frac{x_1 - 2}{2} = \frac{x_2 + 5}{5} = \frac{x_3 - 3}{-4} \quad \text{az egyenes analitikus alakja mint az előző példákban.}$$

d/ Az egyenes explicit egyenlete

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= m_1 x_1 + b_1 \\ x_3 &= m_2 x_1 + b_2 \end{aligned} \right\}$$

összefüggés alapján adható meg, ahol  $m_1$  az egyenes  $x$   $y$  síkon lévő vetület és az  $x_1$  tengely pozitív irányával bezárt szög tangensét,  $b_1$  pedig az  $x_2$  tengelyből lemetszett darabot;  $m_2$  az  $x_1$   $x_3$  síkon lévő vetület és az  $x_1$  tengely pozitív irányával bezárt szög tangensét,  $b_2$  pedig az  $x_3$  tengelyből lemetszett darabot jelenti.

Az egyenes azonban nem fejezhető ki mindig a d/ alatt leírt alakban. Abban az esetben, ha az egyenes az  $x_2$  tengellyel párhuzamos, akkor a két egyenletből  $x_1 = c_1$  lesz, ilyenkor azonban az  $x_1 x_3$  síkon lévő harmadik vetületet kell kiszámítani,

$$\text{ez } x_3 = c_3 ;$$

Az egyenes egyenletei paraméteres alakban

$$x_1 = c_1; \quad x_2 = t; \quad x_3 = c_3 .$$

Az  $\frac{x_1 - 2}{2} = \frac{x_2 + 5}{5} = \frac{x_3 - 3}{-4}$  egyenletekből két egyenletet írunk fel,

amelyeket  $x_2$ -re és  $x_3$ -ra megoldunk

$$\frac{x_1 - 2}{2} = \frac{x_2 + 5}{5} \quad | \cdot 10 \qquad \frac{\frac{5}{2} x_1 - 5}{5} = \frac{x_3 - 3}{-4} \quad | \cdot (-20)$$

$$5 x_1 - 10 = 2 x_2 + 10 \qquad -10 x_1 + 20 = 5 x_3 - 15$$

$$2 x_2 = 5 x_1 - 20$$

$$5 x_3 = -10 x_1 + 35$$

$$x_2 = \frac{5}{2} x_1 - 10$$

$$x_3 = -2 x_1 + 7 .$$

Igy a két egyenletből álló egyenletrendszer

$$x_2 = \frac{5}{2} x_1 - 10$$

$$x_3 = -2 x_1 + 7$$

e/ Az egyenes vetítősíkokkal kifejezett egyenlete (ez lényegében a d/ alattival azonos, a d/ alatti forma van most a konstans tagra megoldva).

$$\text{Az } x_2 = \frac{5}{2} x_1 - 10$$

$$x_3 = -2 x_1 + 7$$

egyenletrendszerből

$$\left. \begin{aligned} \frac{5}{2} x_1 - x_2 &= 10 \\ 2 x_1 + x_3 &= 7 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 5 x_1 - 2 x_2 &= 20 \\ 2 x_1 + x_3 &= 7 \end{aligned} \right\}$$

f/ Az egyenes két általános sík metszésvonalaként van adva,

Példa:

Írjuk át a következő egyenletekkel adott egyenest explicit alakra

$$\left. \begin{aligned} 2 x - 3 y + 2 z &= 5 \\ x + 2 y + 2 z &= 6 \end{aligned} \right\}$$

A lineáris egyenletrendszert megoldjuk az  $y$  és  $z$  ismeretlenre

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 - 2x & 2 \\ 6 - x & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-2x - 2}{-10} = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 5 - 2x \\ 2 & 6 - x \end{vmatrix}}{-10} = \frac{7x - 28}{-10} = -\frac{7}{10}x + \frac{14}{5}$$

Tehát az általános síkok metszésvonalaként adott egyenes explicit egyenlete:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \\ z &= -\frac{7}{10}x + \frac{14}{5} \end{aligned} \right\}$$

Két pont által meghatározott egyenes egyenletei:

Példa:

Adott  $P_1(2, 5, -3)$  ( $y_i$ ) és  $P_2(-3, 2, 1)$  ( $z_i$ ) pont. Határozzuk meg a két ponton átmenő egyenes egyenletét.

a/ Az egyenletrendszert  $t$  paraméterrel az

$$x_i = y_i + t(z_i - y_i) \quad \text{összefüggés alapján írjuk fel}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2 - 5t \\ x_2 &= 5 - 3t \\ x_3 &= -3 + 4t \end{aligned} \right\}$$

b/ Az egyenes távolságparaméteres egyenletrendszere az

$$x_i = y_i + s \frac{z_i - y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 (z_i - y_i)^2}}$$

összefüggés alapján

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2 - s \frac{5}{\sqrt{50}} \\ x_2 &= 5 - s \frac{3}{\sqrt{50}} \\ x_3 &= -3 + s \frac{4}{\sqrt{50}} \end{aligned} \right\}$$

További példák az egyenes egyenletének felírására.

1. Határozzuk meg a  $P_1(2, -5, 3)$  ponton átmenő és az  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{2}$  egyenessel párhuzamos egyenes egyenletét.

a/  $t$  paraméteres egyenletrendszere,

Mivel a pont helyvektora:  $\vec{r}_1 = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$  az adott egyenes irányának komponensei:  $v_1 = 2$ ;  $v_2 = 3$ ;  $v_3 = 2$ .

Igy a keresett egyenes egyenletrendszere

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 + 2t \\ y &= -5 + 3t \\ z &= 3 + 2t \end{aligned} \right\}$$

b/ Az "s" paraméteres egyenletrendszert kapjuk meg, ha

$$\vec{v}^0 = \frac{2}{\sqrt{17}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{17}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{17}}\vec{k} \quad \text{egységvektorral dolgozunk,}$$

c/ Vektoros egyenlete az  $\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{v}$  összefüggés alapján

$$\begin{aligned} \vec{r} &= 2\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k} + t(2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}) = \\ &= (2 + 2t)\vec{i} + (-5 + 3t)\vec{j} + (3 + 2t)\vec{k}. \end{aligned}$$

d/ Az egyenes explicit egyenletét felírhatjuk az egy ponton átmenő adott iránytényezőkkel rendelkező

$$\left. \begin{aligned} y - y_1 &= m_1(x - x_1) \\ z - z_1 &= m_2(x - x_1) \end{aligned} \right\} \quad \text{egyenletek alapján.}$$

A  $P_1$  pont adott, csak  $m_1$  és  $m_2$  iránytényezőket kell a megadott egyenesből kifejezni,

$$\text{Ha } \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{3} \text{ akkor ebből } y \text{ kifejezhető.}$$

$$\text{Igy } y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}.$$

$$\text{Azonban } \frac{x - 1}{2} = \frac{z - 4}{2} \text{ egyenlőség is fennáll, amiből } z = x + 3.$$

A megadott egyenes egyenlete tehát: 
$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} \\ z &= x + 3 \end{aligned} \right\}$$

ahonnan  $m_1 = \frac{3}{2}$  és  $m_2 = 1$ .

Ezeket az értékeket és a pont koordinátáit behelyettesítve kapjuk az

$$\left. \begin{aligned} y + 5 &= \frac{3}{2}(x - 2) \\ z - 3 &= x - 2 \end{aligned} \right\} \text{ egyenleteket, amiből rendezéssel}$$

nyerjük az

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{3}{2}x - 8 \\ z &= x + 1 \end{aligned} \right\} \text{ explicit egyenleteket.}$$

Megkaphatjuk az utóbbi alakot a

$$t = \frac{x - 2}{2} = \frac{y + 5}{3} = \frac{z - 3}{2} \text{ analitikus alakból is, ha}$$

y-ra és z-re megoldjuk.

2. Határozzuk meg a  $P_O(-1, 3, -5)$  ponton át az

$$\vec{r} = (-5 + 2t)\vec{i} - (2 + 3t)\vec{j} + (1 + 4t)\vec{k} \text{ egyenessel pár-}$$

huzamos egyenes paraméteres egyenletrendszerét!

Az adott egyenes  $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$  irányu.

A megadott pontot figyelembe véve az egyenletrendszert

$$\left. \begin{aligned} x &= -1 + 2t \\ y &= 3 - 3t \\ z &= -5 + 4t \end{aligned} \right\}$$

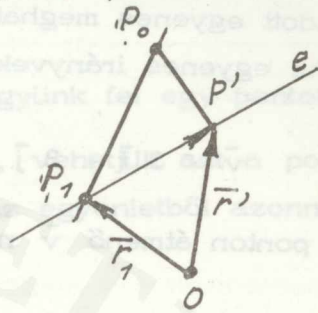
3. Határozzuk meg a  $P_O(-3, -2, 5)$  ponton átmenő és az

$$\vec{r} = (2 + 3t)\vec{i} + (-5 + 3t)\vec{j} + (1 - 2t)\vec{k} \text{ egyenesre merőle-}$$

ges metsző egyenest paraméteres alakban.

a/ A megadott egyenes irányvektora:  $\vec{v} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$

egyik pontja:  $P_1(2, -5, 1)$



$\vec{P_1P_0}$  vetületének hossza az egyenesen

$$\overline{P_1P'} = \overline{P_1P_0} \cdot \vec{v}^0 =$$

$$= (-5\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) \left( \frac{3}{\sqrt{22}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{22}}\vec{j} - \frac{2}{\sqrt{22}}\vec{k} \right) =$$

$$= -\frac{15}{\sqrt{22}} + \frac{9}{\sqrt{22}} - \frac{8}{\sqrt{22}} = -\frac{14}{\sqrt{22}}$$

A vetületvektor:

$$\overline{P_1P'} = -\frac{14}{\sqrt{22}} \cdot \vec{v}^0 = -\frac{21}{11}\vec{i} - \frac{21}{11}\vec{j} + \frac{14}{11}\vec{k}$$

A vetületi pont koordinátáit adja az az  $\vec{r}'$ , amely

$$\vec{r}' = \vec{r}_1 + \overline{P_1P'} = \left(2 - \frac{21}{11}\right)\vec{i} + \left(-5 - \frac{21}{11}\right)\vec{j} + \left(1 + \frac{14}{11}\right)\vec{k} =$$

$$= \frac{1}{11}\vec{i} - \frac{76}{11}\vec{j} + \frac{25}{11}\vec{k}$$

A  $P_0(-3; -2; 5)$  és  $P' \left( \frac{1}{11}; -\frac{76}{11}; \frac{25}{11} \right)$  pontokon átmenő egye-

nes paraméteres egyenletrendszere:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -3 + \frac{34}{11}t \\ x_2 &= -2 - \frac{54}{11}t \\ x_3 &= 5 - \frac{30}{11}t \end{aligned} \right\}$$

b/ A feladat megoldása más módon.

Az adott  $P_0(-3; -2; 5)$  ponton át az  $\vec{r} = (2 + 3t)\vec{i} + (-5 + 3t)\vec{j} +$

+ (1 - 2 t)  $\bar{k}$  egyenesre merőleges síkot fektetünk. Ezután meghatározzuk az egyenes és a sík dőléspontját. Így a feladatot visszavezettük két pontjával adott egyenes meghatározására.

Az egyenes irányvektora lesz a sík normálvektora.

Ez a

$$\vec{v} = 3 \bar{i} + 3 \bar{j} - 2 \bar{k}.$$

A  $P_0$  ponton átmenő  $\vec{v}$  normálvektoru sík egyenlete:

$$3 x_1 + 3 x_2 - 2 x_3 + 25 = 0.$$

Képezzük a kapott sík és a megadott egyenes dőléspontját. Az  $x_1 = 2 + 3 t$ ;  $x_2 = -5 + 3 t$  és  $x_3 = 1 - 2 t$  értékeket a sík egyenletébe téve kapjuk, hogy

$$6 + 9 t - 15 + 9 t - 2 + 4 t + 25 = 0$$

$$22 t = -14$$

$$t = -\frac{7}{11}.$$

Ezen utóbbi értéket az egyenes egyenletrendszerébe téve

$$P \left( \frac{1}{11}; -\frac{76}{11}; \frac{25}{11} \right)$$

dőléspontot kapunk.

A  $P_0 (-3; -2; 5)$  és a  $P_1 \left( \frac{1}{11}; -\frac{76}{11}; \frac{25}{11} \right)$  pontokon átmenő

egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -3 + \frac{34}{11} t \\ x_2 &= -2 - \frac{54}{11} t \\ x_3 &= 5 - \frac{30}{11} t \end{aligned} \right\}$$

amint ezt az a/ megoldásban láttuk. Nyilvánvaló, hogy  $t$  együtthatójának nem kell a korábban számítottal megegyeznie, attól egy konstans faktorban eltérhet. Az egyenes irányvektora ugyanis nincs egyértelműen rögzítve.

Pont felvétele egyenesen.

Példák:

1. Az  $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{5} = \frac{z-3}{-4}$  egyenesen vegyünk fel egy pontot.

Ha a pontra nézve nincs semmi egyéb kikötésünk, vehetjük azt a pontot, amellyel az egyenes egyenletét felírtuk, mert ez az egyenletből azonnal leolvasható. Ez a  $P(2; -5; 3)$ .

2. Vegyünk fel az  $x = 2 + t; y = -5 - 3t; z = 3 + 2t$  egyenletrendszerrel adott egyenesen egy pontot, amelyre nézve  $x = 0$ .

A feltételből  $t = -2$ . Így a keresett pont:  $P(0; 1; -1)$ .

Vegyes feladatok a térbeli egyenessel kapcsolatosan

Példák:

1. Állapítsuk meg, hogy metszik-e egymást az  $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{-3} = z-1$  és az  $x = 3t - 2; y = 4; z = 2t$  egyenesek!

a/ Ha van közös  $(x; y; z)$  pont, akkor ez a következő egyenleteket nyilvánvalóan kielégíti:

$$\frac{x-3}{3} = z-1; \quad \frac{y-2}{-3} = z-1; \quad y-4=0; \quad \frac{x+2}{3} = \frac{z}{2}.$$

A négy egyenletből hármat kiválasztunk a közös pont meghatározására. Az

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x-3}{3} = z-1 \\ \frac{y-2}{-3} = z-1 \\ y-4=0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer megoldása az  $x = 1; y = 4; z = \frac{1}{3}$  értékhármassal, amit behelyettesítve az  $\frac{x+2}{3} = \frac{z}{2}$  eddig fel nem használt egyenletbe

$$\frac{1+2}{3} \neq \frac{1}{6}.$$

Az egyenesek tehát nem metszők, hanem kitérők.

b/ A feladat megoldása más módon.

El kell dönteni, hogy van-e olyan  $t$  érték, amelyre a következő egyenlőség fennáll:

$$\frac{3t - 2 - 3}{3} = \frac{4 - 2}{-3} = 2t - 1.$$

Ez szétbomlik két független egyenletre

$$\frac{3t - 5}{3} = -\frac{2}{3}; \quad -\frac{2}{3} = 2t - 1.$$

A két egyenletből  $t = 1$ , illetve  $t = \frac{1}{6}$  adódik, tehát közös pont nincs.

2. Metszik-e egymást az  $x = \frac{7}{2} + t$ ;  $y = -\frac{5}{4} - 2t$ ,  $z = 3t$  és az  $\frac{x - 2}{2} = \frac{y + 5}{5} = \frac{z - 3}{-4}$  egyenesek?

Az adott egyenesek egyenletéből kiválasztjuk a következő két-két egyenletet:

$$x - \frac{7}{2} = \frac{y + \frac{5}{4}}{-2}; \quad \frac{y + \frac{5}{4}}{-2} = \frac{z}{3}; \quad \frac{x - 2}{-2} = \frac{y + 5}{5}; \quad \frac{y + 5}{5} = \frac{z - 3}{-4}.$$

Az első három egyenletből a

$$\left. \begin{aligned} 8x + 4y &= 23 \\ 12y + 8z &= -15 \\ 5x - 2y &= 20 \end{aligned} \right\}$$

lineáris egyenletrendszer adódik, ahonnan

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 23 & 4 & 0 \\ -15 & 12 & 8 \\ 20 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & 12 & 8 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1008}{288} = \frac{7}{2}; \quad y = -\frac{5}{4} \\ z = 0$$

A  $P\left(\frac{7}{2}; -\frac{5}{4}; 0\right)$  pont megoldás is, mert kielégíti az

$$\frac{y + 5}{5} = \frac{z - 3}{-4} \quad \text{egyenletet, ugyanis}$$

$$\frac{-\frac{5}{4} + 5}{5} = \frac{3}{-4} \quad \text{egyenlőség fennáll.}$$

3. Határozzuk meg az

$$\left. \begin{aligned} x &= 3 + 2t \\ y &= -2 - t \\ z &= 2 - 4t \end{aligned} \right\} \quad \text{és az} \quad \left. \begin{aligned} x &= 2 - 2\tau \\ y &= -1 + \tau \\ z &= 3 + 4\tau \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{egyenesek} \\ \text{metszéspontját.} \end{array}$$

Felírjuk mindkét egyenesnek analitikus alakját.

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y + 2}{-1} = \frac{z - 2}{-4}; \quad \frac{x - 2}{-2} = y + 1 = \frac{z - 3}{4}$$

$$\left. \begin{aligned} -x + 3 &= 2y + 4 \\ -4y - 8 &= -z + 2 \\ x - 2 &= -2y - 2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -x - 2y &= 1 \\ -4y + z &= 10 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -x - 2y &= 1 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Nincs megoldása ezen egyenletrendszernek. A két adott egyenes párhuzamos. Ez a tény észlelhető a megadott egyenesek egyenletén is.

Az első egyenes átmegy a  $P_1(3; -2; 2)$  ponton és irányvektora a

$$\vec{v}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}.$$

A második egyenes átmegy a  $P_2(2; -1; 3)$  ponton és irányvektora a

$$\vec{v}_2 = -2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}.$$

4. Határozzuk meg a  $P_1(2; -1; 3)$  pontra illeszkedő és az

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -3 + \frac{34}{11}t \\ x_2 &= -2 - \frac{54}{11}t \\ x_3 &= 5 - \frac{30}{11}t \end{aligned} \right\} \text{ és } \frac{x_1 - 2}{3} = \frac{x_2 + 5}{3} = \frac{z - 1}{-2}$$

egyenesekre merőleges egyenes egyenletét.

A két egyenes metsző (metszéspontjuk  $M\left(\frac{1}{11}; -\frac{76}{11}; \frac{25}{11}\right)$ )  
tehát síkot határoznak meg, aminek a normálvektora lesz a felírandó egyenes irányvektora.

Az egyik egyenes irányvektora:  $\vec{v}_1 = \frac{34}{11}\vec{i} - \frac{54}{11}\vec{j} - \frac{30}{11}\vec{k}$   
a másik egyenesé pedig  $\vec{v}_2 = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{34}{11} & -\frac{54}{11} & -\frac{30}{11} \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \left( \frac{108}{11} + \frac{90}{11} \right) - \\ &\quad - \vec{j} \left( -\frac{68}{11} + \frac{90}{11} \right) + \vec{k} \left( \frac{102}{11} + \frac{162}{11} \right) = \\ &= \frac{198}{11}\vec{i} - \frac{22}{11}\vec{j} + \frac{264}{11}\vec{k} = 18\vec{i} - 2\vec{j} + 24\vec{k}. \end{aligned}$$

A  $P_1$  ponton átmenő és  $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$  irányvektoru egyenes egyenletrendsze-  
re

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2 + 18t \\ x_2 &= -1 - 2t \\ x_3 &= 3 + 24t \end{aligned} \right\}$$

Megemlítjük, hogy a feladat szempontjából nem lényeges, hogy a két  
adott egyenes metsző legyen.

5. Határozzuk meg a  $P(-1; -4; 3)$  pontra illeszkedő, továbbá a

$$\left. \begin{aligned} 2x - 4y + z - 1 &= 0 \\ x + 3y + 5 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ és az } \left. \begin{aligned} x &= 2 + 4t \\ y &= -1 - t \\ z &= -3 + 2t \end{aligned} \right\}$$

egyenesekre merőleges egyenes egyenletét.

A két sík metszésvonala által adott egyenes egyenletrendszerének második egyenletéből

$$x = -3y - 5.$$

Ezt az első egyenletbe téve és a z-t kifejezve

$$z = 10y + 11.$$

Az első egyenletrendszer analitikus alakban

$$\frac{x + 5}{-3} = y = \frac{z - 11}{10}$$

ahonnan  $\vec{v}_1 = -3\vec{i} + \vec{j} + 10\vec{k}.$

A második egyenes irányvektora:  $\vec{v}_2 = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}.$

A meghatározandó egyenes irányvektora

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 10 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 46\vec{j} - \vec{k}.$$

Az egyenes egyenletrendszere tehát

$$\left. \begin{aligned} x &= -1 + 12t \\ y &= -4 + 46t \\ z &= 3 - t \end{aligned} \right\}$$

Két egyenes hájlásszöge

Példa:

Határozzuk meg az

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 + 3t \\ y &= -5 + 3t \\ z &= 1 - 2t \end{aligned} \right\} \text{ és } \left. \begin{aligned} x &= -3 - 4\tau \\ y &= -2 + 2\tau \\ z &= 5 - 3\tau \end{aligned} \right\}$$

paraméteres alakban adott térbeli egyenesek hajlásszögét!

Két egyenes hajlásszöge az egyenesek irányába eső vektorok hajlásszöge.

Az első egyenes irányvektora:  $\vec{v}_1 = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$

a második egyenes irányvektora:  $\vec{v}_2 = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

A hajlásszög kosinusa:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|} = \frac{-12 + 6 + 6}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{29}} = \frac{0}{\sqrt{22} \sqrt{29}}$$

$\varphi$  mint hajlásszög  $180^\circ$ -nál nagyobb nem lehet, így  $\varphi = 90^\circ$ .

Feladatok:

Állítsuk elő az egyenes  $t$  paraméteres,  $s$  paraméteres, vektoros, explicit és általános egyenletét a következő adatok mellett:

1.  $P_0(2, -3, 5)$ ;  $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

2.  $P_0(-2, 3, -4)$ ;  $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

3.  $P_0(1, 7, -5)$ ;  $\vec{v} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$

4.  $P_0(5, 2, 3)$ ;  $\vec{v} = 5\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}$

5.  $P_1(5, 2, -3)$ ;  $R_2(1, -5, 8)$

6.  $P_1(3, -2, 4)$ ;  $R_2(5, -4, 1)$

7.  $P_1(-4, 2, 3)$ ;  $P_2(2, 3, 4)$

8.  $P_1(2, 5, 3)$ ;  $P_2(3, 2, 1)$

9. Határozzuk meg a  $P_1(3, -2, 5)$  ponton átmenő és az

$\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-4}{2}$  egyenessel párhuzamos egyenes egyenletét!

10. Határozzuk meg a  $P_1(3, -2, 5)$  ponton átmenő és az  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-4}{2}$  egyenesre merőleges metsző egyenes egyenletét!

11. Adott az  $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{5} = \frac{z-3}{-4}$  egyenes. Vegyünk fel rajta egy pontot, amelyre nézve  $x = 4$ .

12. Határozzuk meg az  $x - 2 = \frac{y+5}{-3} = \frac{z-3}{2}$  és az  $x = 2 + 2t$ ;  $y = -5 + 5t$ ;  $z = 3 - 4t$  egyenesek metszéspontját!

13. Döntsük el a következő térbeli egyenesekről, hogy melyik kettő párhuzamos, melyik kettő kitérő és melyik kettő metsző egyenespár?

a/ 
$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 5 - 5t \\ x_2 &= 2 + 6t \\ x_3 &= 3 - 4t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_1 &= 3 + 2\tau \\ x_2 &= -2 - 2\tau \\ x_3 &= 4 - 3\tau \end{aligned}$$

b/ 
$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-4}{2}; \quad \left. \begin{aligned} x &= 3 + 4t \\ y &= -2 - 6t \\ z &= 5 + 9t \end{aligned} \right\}$$

c/ 
$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -4 + 6t \\ x_2 &= 2 + t \\ x_3 &= 3 + t \end{aligned} \right\} \frac{x_1 - 4}{6} = x_2 - 3 = x_3 - 2$$

d/ 
$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2 + 3t \\ x_2 &= -5 + 3t \\ x_3 &= 1 - 2t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_1 &= -3 - 4\tau \\ x_2 &= -2 + 2\tau \\ x_3 &= 5 - 3\tau \end{aligned}$$

### A sík egyenletei

#### 1. Általános egyenlete

$$A x + B y + C z + D = 0$$

ahol  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$  együtthatók tetszőlegesek  $A$ ,  $B$  és  $C$  egyidejűleg nem egyenlők nullával,

#### 2. Normálegyenlete

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p,$$

ahol  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  a normálvektor iránycosinuszai,  $p$  a sík előjeles távolsága az origótól.

#### 3. Tengelymetszetes egyenlete:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

ahol  $a$ ,  $b$ ,  $c$  az  $x$ ,  $y$  és  $z$  tengelyből lemetszett szeletek.

#### 4. Kétparaméteres egyenletrendszere:

$$x_i = y_i + u_1 v_i + u_2 w_i.$$

Példa:

Határozzuk meg a  $2x - 3y - 6z = -18$  egyenlettel adott sík normálegyenletét.

Beszorozzuk az egyenlet mindkét oldalát a

$$\lambda = \frac{1}{-\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = -\frac{1}{7} \text{ számmal.}$$

Megjegyzés:  $\lambda$  lehet pozitív is és negatív is. A két előjel közül mindig azt választjuk, amely a jobboldalra rendezett szabad tagot pozitívvá teszi.

$$-\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z = \frac{18}{7}$$

ahonnan

$$p = \frac{18}{7}; \quad \cos \alpha = -\frac{2}{7}; \quad \cos \beta = \frac{3}{7}; \quad \cos \gamma = \frac{6}{7}.$$

Feladatok:

1.  $2x - 3y + z = 6;$   $p = ?$   $\text{iránycosinusok} = ?$
2.  $x - 2y + z = -4;$   $p = ?$   $\text{iránycosinusok} = ?$
3.  $2y - 3x = 7;$   $p = ?$   $\text{iránycosinusok} = ?$
4.  $3x - 2y + 5z = 28;$   $p = ?$   $\text{iránycosinusok} = ?$

Pont távolsága siktól

Számítsuk ki P (3, 2, 7) pont távolságát az  $x - 2y + 3z = -18$  siktól!

$$-\frac{x}{\sqrt{14}} + \frac{2y}{\sqrt{14}} - \frac{3z}{\sqrt{14}} = \frac{18}{\sqrt{14}}; \lambda = \frac{1}{-\sqrt{1+4+9}} = \frac{1}{-\sqrt{14}}$$

$$d = \left| x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p \right|$$

$$d = \left| -\frac{3}{\sqrt{14}} + \frac{4}{\sqrt{14}} - \frac{21}{\sqrt{14}} - \frac{18}{\sqrt{14}} \right| = \frac{38}{\sqrt{14}}$$

Feladatok:

1.  $2x - 3y + z = -6$   $P(3, 2, 7)$   $d = ?$
2.  $3x - y + 4z = 15$   $P(1, 2, -3)$   $d = ?$
3.  $9x + 8y - 7z = -35$   $P(2, -4, 2)$   $d = ?$
4.  $3y - 3x = 12$   $P(-1, 3, -2)$   $d = ?$

Két párhuzamos sík távolsága

Határozzuk meg az  $x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$

$$\underline{2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1}$$

egyenletekkel adott párhuzamos síkok távolságát!

$$\frac{x_1}{\sqrt{6}} - \frac{2x_2}{\sqrt{6}} + \frac{x_3}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0; \quad \tilde{\sigma}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{2x_1}{\sqrt{24}} - \frac{4x_2}{\sqrt{24}} + \frac{2x_3}{\sqrt{24}} - \frac{1}{\sqrt{24}} = 0; \quad \tilde{\sigma}_2 = \frac{1}{\sqrt{24}}$$

A két normálvektor azonos irányítású, így a két sík távolsága:

$$\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Feladatok:

Határozzuk meg a következő párhuzamos síkok távolságát!

$$1. \left. \begin{array}{l} 3x + 2y - z = 5 \\ 9x + 6y - 3z = 7 \end{array} \right\} \quad 2. \left. \begin{array}{l} 5x - 10y + 5z = 6 \\ -x + 2y - z = 8 \end{array} \right\}$$

Sík egyenletének felírása a síkot meghatározó adatok alapján

A síkot meghatározza:

1. egy pont és egy a síkra merőleges vektor,
2. két egymást metsző egyenes,
3. két párhuzamos egyenes,
4. egy pont és egy rá nem illeszkedő egyenes,
5. három nem egy egyenesen lévő pont.

E meghatározások közül az első a legáltalánosabb, mert erre a többi eset visszavezethető,

Példák:

1. Egy pont és egy a síkra merőleges normálvektor által meghatározott sík egyenlete.

Irjuk fel  $P_0(-3; 6; -1)$  ponton átmenő és a  $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$  vektorra merőleges sík

- a/ skaláregyenletét
- b/ Hesse-féle egyenletét
- c/ tengelymetszetes egyenletét.

a/ A sík skaláregyenletét a  $\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i) n_i = 0$  összefüggés alapján, ahol  $x_i$  a futópont koordinátáit,  $y_i$  az adott pont koordinátáit és  $n_i$  a  $\vec{v}$  vektor irányába mutató egységvektor koordinátáit jelenti ( $n_i$  helyett  $\lambda n_i$  is vehető, ahol  $\lambda$  valós szám.)

$$(x_1 + 3) \frac{2}{\sqrt{21}} - (x_2 - 6) \frac{1}{\sqrt{21}} + (x_3 + 1) \frac{4}{\sqrt{21}} = 0$$

a kijelölt műveleteket elvégezve, összevonva és az egyenletet  $\sqrt{21}$ -gyel megszorozva kapjuk a

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = -16 \quad \text{skalár egyenletet.}$$

b/ A Hesse-féle egyenletét a  $x_1 \cos \alpha_1 + x_2 \cos \alpha_2 + x_3 \cos \alpha_3 - \delta = 0$  összefüggéssel állítjuk elő, ahol  $x_i$  a futópont koordinátái,  $\cos \alpha_i$  az iránycosinusok és  $\delta$  a síknak a távolsága az origótól

$$-\frac{2}{\sqrt{21}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{21}} x_2 - \frac{4}{\sqrt{21}} x_3 = \frac{16}{\sqrt{21}}$$

c/ A sík tengelymetszetes egyenletét az

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 1 \quad \text{összefüggés alapján írjuk fel}$$

$$\frac{x_1}{-8} + \frac{x_2}{16} + \frac{x_3}{-4} = 1.$$

2. Két egymást metsző egyenes által meghatározott sík egyenlete.

Írjuk fel az

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y + 2}{-1} = \frac{z - 2}{3}$$

és 
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{-2}$$

egymást metsző egyenesek által meghatározott sík egyenletét!

Az egyenesek átmennek a  $P_0(1, -2, 2)$  ponton és irányuk  $\vec{v}_1 = 3\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ , illetve  $\vec{v}_2 = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$  vektor.

A sík normálvektora:

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 11\vec{i} + 12\vec{j} - 7\vec{k} .$$

A sík egyenlete:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0$$

$$(x_1 - 1) \cdot 11 + (x_2 + 2) \cdot 12 + (x_3 - 2) \cdot (-7) = 0$$

$$11x_1 + 12x_2 - 7x_3 + 27 = 0 .$$

3. Két párhuzamos egyenes által meghatározott sík egyenlete.

$$\text{Írjuk fel az } \left. \begin{array}{l} x_1 = 2 + 3t \\ x_2 = -2 + 5t \\ x_3 = 3 - 2t \end{array} \right\} \text{ és } \left. \begin{array}{l} x_1 = 3 + 3\tau \\ x_2 = 2 + 5\tau \\ x_3 = 1 - 2\tau \end{array} \right\}$$

párhuzamos egyenesek által meghatározott sík egyenletét!

Az első egyenes átmege a  $P_1(2, -2, 3)$  ponton, a második a  $P_2(3, 2, 1)$  ponton és közös irányuk párhuzamos a  $\vec{v} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$  vektorral,

Az egyenesek  $P_1$  és  $P_2$  pontját összekötő vektor:

$$\vec{P_1P_2} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k} .$$

A sík normálvektora:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k} .$$

Felhasználjuk a két pont közül  $P_1 (2, -2, 3)$  pontot.

$$(x_1 - 2)(-2) + (x_2 + 2)4 + (x_3 - 3)7 = 0$$

$$-2x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 9 = 0 \quad \text{a sík egyenlete.}$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha  $P_2 (3, 2, 1)$  ponttal dolgozunk.

4. Egy pont és egy rá nem illeszkedő egyenes által meghatározott sík egyenlete.

Írjuk fel a  $P_0 (-5, 3, -1)$  pont és az  $x_1 = -3 + t$ ;  $x_2 = 2 - t$ ;  $x_3 = 1 + 3t$  egyenes által meghatározott sík egyenletét!

Az egyenes  $P_1 (-3, 2, 1)$  pontját és az adott  $P_0$  pontot összekötő vektor:

$$\overrightarrow{P_0 P_1} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} .$$

Az egyenes irányvektora  $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ . A keresett síkra merőleges vektor:

$$\vec{n} = \overrightarrow{P_0 P_1} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$$

$$(x_1 + 5)(-1) + (x_2 - 3)(-4) + (x_3 + 1)(-1) = 0$$

$$-x_1 - 4x_2 - x_3 + 6 = 0 \quad \text{a keresett sík egyenlete.}$$

5. Három nem egy egyenesen lévő pont által meghatározott sík

a/ skalár egyenlete

Írjuk fel a  $P_1 (-1, 3, -2)$ ,  $P_2 (2, -2, 3)$ ,  $P_3 (1, 2, 3)$

pontokon átmenő sík egyenletét!

$$\left| \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{összefüggés} \\ = 0 \end{array} \text{ alapján} \quad \left| \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right| = 0$$

a determinánst az első sora szerint kifejtve

$$x_1 (5 - 25) - x_2 (15 - 10) + x_3 (10 - 3) + 9 = 0 \quad \text{adódik,}$$

amiből

$$-20 x_1 - 5 x_2 + 7 x_3 + 9 = 0.$$

b/ A sík  $u, v$  paraméteres egyenletrendszere.

Írjuk fel az előző példában szereplő

$$\left. \begin{array}{l} P_1 (-1, 3, -2) \quad (s_i) \\ P_2 (2, -2, 3) \quad (y_i) \\ P_3 (1, 2, 3) \quad (z_i) \end{array} \right\} \text{ pontokon átmenő sík paraméteres} \\ \text{egyenletrendszerét!}$$

$$x_i = y_i + u (z_i - y_i) + v (s_i - y_i) \quad \text{összefüggés alapján}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 2 - u - 3v \\ x_2 = -2 + 4u + 5v \\ x_3 = 3 - 5v \end{array} \right\} \text{ a sík } u, v \text{ paraméteres egyenlet-} \\ \text{rendszere.}$$

Ha az  $u, v$  paramétereket az egyenletekből kiküszöböljük, az előző feladatban nyert  $-20 x_1 - 5 x_2 + 7 x_3 + 9 = 0$  egyenletet kapjuk, ugyan- is az első egyenletből

$$u = 2 - x_1 - 3v$$

ezzel

$$x_2 = 6 - 4x_1 - 7v$$

$$x_3 = 3 - 5v$$

alakra megy át,

mindkettőből v-t kifejezve és egyenlővé téve

$$-\frac{4x_1}{7} - \frac{x_2}{7} + \frac{6}{7} = \frac{3}{5} - \frac{x_3}{5} \quad \text{egyenlet adódik,}$$

amiből a közös nevezővel való beszorzás után

$$-20x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 9 = 0 \quad \text{egyenlethez jutunk.}$$

c/ Vektoregyenlete

Adott  $P_1 (-1, 3, -2)$

$P_2 (2, -2, 3)$

$P_3 (1, 2, 3)$

} pont.

$$\vec{r}_1 = -\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{r}_3 - \vec{r}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{r}_2 = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{r}_3 = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

A keresett síkra merőleges vektor:

$$\vec{n} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -5 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = -20\vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$(\bar{r} - \bar{r}_1) \cdot [(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times (\bar{r}_3 - \bar{r}_1)] = 0 \quad \text{a sík vektoregyenlete,}$$

ami az

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

determináns segítségével  
írható át  $x, y, z$  ismer-  
etlenes egyenletbe,  
ugyanis behelyettesítve a  
 $P_1, P_2, P_3$  pontok

koordinátáit

$$\begin{vmatrix} x + 1 & y - 3 & z + 2 \\ 3 & -5 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{egyenlethez jutunk,}$$

A determinánst az első sora szerint kifejtve

$$(x + 1)(-20) - (y - 3)5 + (z + 2)7 = 0.$$

A kijelölt műveleteket elvégezve

$$-20x - 5y + 7z + 9 = 0 \quad \text{egyenletet kapjuk,}$$

6. Határozzuk meg a sík  $u_1, u_2$  paraméteres egyenletrendszerét a

$$\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}, \quad \vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} \quad \text{és} \quad Q(-1, 2, -3) \quad \text{ada-}$$

tok mellett!

Az

$$x_i = y_i + u_1 v_i + u_2 w_i$$

reláció alapján

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -1 + 2u_1 - u_2 \\ x_2 &= 2 + 3u_1 + 2u_2 \\ x_3 &= -3 + 5u_1 - 3u_2 \end{aligned} \right\}$$

Az egyenletrendszerből az  $u_1, u_2$  paramétereket kiküszöbölve kapjuk a

$$-19x_1 + x_2 + 7x_3 = 0$$

skalár egyenletet.

Feladatok:

1. Irjuk fel  $P_O (-3, 6, -1)$  ponton átmenő és  $\vec{n} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$  normálvektoru sík tengelymetszetes egyenletét.

2. Irjuk fel a  $P_O (-2, 5, 3)$  pontra illeszkedő és  $\vec{n} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$  normálvektoru sík normálegyenletét.

3. Irjuk fel az  $\frac{x-5}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-2}{3}$  és  $\frac{x-5}{6} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-1}$  egyenletek által meghatározott metsző egyenesek síkjának egyenletét!

4. Irjuk fel az  $x_1 = 3 + 2t; x_2 = -3 - 2t; x_3 = 1 + 3t$  és  $x_1 = 2 + 2\tau; x_2 = 5 - 2\tau; x_3 = 3 + 3\tau$  párhuzamos egyenesek által meghatározott sík egyenletét.

5. Irjuk fel a  $P_O (-3, 5, -1)$  pont és az  $x_1 = 2 - 5t; x_2 = -4 - 3t; x_3 = 1 + 3t$  egyenes által meghatározott sík egyenletét.

6. Irjuk fel a  $P_1 (2, -1, 5); P_2 (3, 2, 1)$  és  $P_3 (1, -2, 3)$  pontok által meghatározott sík skalár egyenletét és  $u_1, u_2$  paraméteres egyenletrendszerét.

7. Határozzuk meg a sík  $u_1, u_2$  paraméteres egyenletrendszerét a  $\vec{v} = -3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}; \vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$  és  $Q(2, -5, -7)$  adatok mellett.

Adott ponton át egyenesre merőleges sík és adott ponton át adott síkra merőleges egyenes egyenlete

Példák:

1. Határozzuk meg a  $P_0 (-2, 3, -4)$  ponton átmenő és az

$$\vec{r} = (2 - 3\lambda) \vec{i} + (-2 + 3\lambda) \vec{j} + (1 - 2\lambda) \vec{k}$$

egyenesre merőleges sík skaláregyenletét!

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{v} \quad \text{alapján}$$

$$\vec{r} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + k + \lambda(-3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k})$$

összefüggésből

$$\vec{v} = -3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

vektor irányába mutató egységvektor

$$\vec{v}^0 = \frac{-3}{\sqrt{22}} \vec{i} + \frac{3}{\sqrt{22}} \vec{j} - \frac{2}{\sqrt{22}} \vec{k}$$

vektor lesz a sík normálvektora. Felhasználva ezt és a  $P_0$  pontot kapjuk az

$$(x_1 + 2) \left( \frac{-3}{\sqrt{22}} \right) + (x_2 - 3) \frac{3}{\sqrt{22}} - (x_3 + 4) \frac{2}{\sqrt{22}} = 0$$

egyenletet, amiből algebrai átalakítással és rendezéssel a

$$-3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 23 \quad \text{egyenlethez jutunk.}$$

2. Határozzuk meg a  $P_0 (-1, -2, -3)$  ponton átmenő és az

$$\frac{x_1 - 2}{3} = \frac{x_2 + 3}{2} = \frac{x_3 - 1}{-4} \quad \text{egyenesre merőleges sík skaláregyenletét,}$$

A sík normálisának irányába mutató vektor

$$\vec{v} = 3 \vec{i} + 2 \vec{j} - 4 \vec{k}$$

$\vec{v}$  irányába mutató egységvektor, vagyis a sík normálisa

$$\vec{v}^0 = \frac{3}{\sqrt{29}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{29}} \vec{j} - \frac{4}{\sqrt{29}} \vec{k}$$

Ezt és  $P_0 (-1, -2, -3)$  pontot figyelembe véve

$$(x_1 + 1) \frac{3}{\sqrt{29}} + (x_2 + 2) \frac{2}{\sqrt{29}} - (x_3 + 3) \frac{4}{\sqrt{29}} = 0.$$

Ebből

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 5.$$

3. Határozzuk meg a  $P_0 (3, -2, 1)$  ponton átmenő és egy az

$$\frac{x_1 - 5}{2} = \frac{x_2 + 3}{3} = \frac{x_3 - 2}{4}$$
 egyenessel párhuzamos sík skaláregyenle-

tét!

Az egyenes irányvektora:  $\vec{v} = 2 \vec{i} + 3 \vec{j} + 4 \vec{k}$

$\vec{v}$ -re merőleges vektor a

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = 0 \quad \text{alapján határozható meg}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = (2 \vec{i} + 3 \vec{j} + 4 \vec{k}) \cdot (-\vec{i} + 2 \vec{j} + \lambda \vec{k}) = 0$$

$$0 = -2 + 6 + 4\lambda$$

$$\lambda = -1$$

$$\vec{r} = -\vec{i} + 2 \vec{j} - \vec{k}$$

$\vec{r}$  nem más, mint a sík normálvektora. Ezt és az adott  $P_0 (3, -2, 1)$  pontot felhasználva a sík egyenlete

$$\text{Példá! } (x_1 - 3) (-1) + (x_2 + 2) 2 - (x_3 + 1) = 0$$

amiből

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + 8 = 0.$$

4. Határozzuk meg a  $P(3, -1, 4)$  ponton átmenő és a  $2x + 3y - 4z = 6$  egyenlettel megadott síkra merőleges egyenes egyenletét!

a/ Az adott ponton átmenő egyenes egyenlete:

$$\frac{x - 3}{m} = \frac{y + 1}{n} = \frac{z - 4}{p}$$

A sík normálvektora:  $\vec{v}(2, 3, -4)$ , így a keresett egyenes egyenlete

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y + 1}{3} = \frac{z - 4}{-4}$$

b/ Ha az explicit egyenletet akarjuk meghatározni az előbbi egyenleteket  $y$ -ra és  $z$ -re meg kell oldani.

Meghatározhatjuk az egyenes explicit egyenletét úgy is, hogy a megadott sík egyenletéből leolvassuk az

$$m_1 = \frac{B}{A} = \frac{3}{2} \quad \text{és} \quad m_2 = \frac{C}{A} = -2$$

értékeket, majd ezeket és a megadott pont koordinátáit behelyettesítjük az egy ponton átmenő térbeli egyenes

$$\left. \begin{aligned} y - y_1 &= m_1 (x - x_1) \\ z - z_1 &= m_2 (x - x_1) \end{aligned} \right\}$$

egyenleteibe is kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} y + 1 &= \frac{3}{2} (x - 3) \\ z - 4 &= -2 (x - 3) \end{aligned} \right\}$$

amiből

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{3}{2} x - \frac{11}{2} \\ z &= -2x + 10 \end{aligned} \right\}$$

Feladatok:

1. Irjuk fel a  $P_O (-2, -5, 3)$  ponton átmenő és a  $\vec{v} = -5 \vec{i} + 3 \vec{j} + 4 \vec{k}$  vektorra merőleges sík a/ skaláregyenletét, b/ Hesse-féle egyenletét, c/ tengelymetszetes egyenletét.

2. Határozzuk meg a  $P_O (2, -2, 5)$  ponton átmenő és az  $\vec{r} = (-1 + 2t) \vec{i} + (2 - 3t) \vec{j} + (5 + 3t) \vec{k}$  egyenesre merőleges sík skaláregyenletét.

3. Határozzuk meg a  $P_O (-6, 2, 1)$  ponton átmenő és az  $\frac{x_1 + 2}{3} = \frac{x_2 - 5}{-2} = \frac{x_3 + 1}{2}$  egyenesre merőleges sík skaláregyenletét és  $u_1, u_2$  paraméteres egyenletrendszerét.

4. Határozzuk meg a  $P_O (5, 7, -3)$  ponton átmenő és az  $x - 2y + 4z = 8$  egyenlettel megadott síkra merőleges egyenes explicit egyenletét.

5. Határozzuk meg a  $P_O (3, -1, 4)$  ponton átmenő és a  $2x + 3y - 4z = 6$  egyenlettel adott síkra merőleges egyenes  $t$  paraméteres egyenletrendszerét.

6. Határozzuk meg a  $P_O (-5, 3, -2)$  ponton átmenő és a  $4x + y - 5z = 13$  egyenlettel adott síkra merőleges egyenes vektoros egyenletét.

### Egyenes és sík kölcsönös helyzete

Egy egyenesnek és egy síknak

- ha kettő vagy ennél több közös pontja van, akkor az egyenes benne van a síkban,
- ha pontosan egy közös pontja van, akkor az egyenes dőfi a síkot,
- ha nincs közös pontja, akkor az egyenes párhuzamos a síkkal.

Példák:

Állapítsuk meg a következő feladatokban, hogy az egyenesnek és a síknak van-e közös pontja.

1. Az egyenes egyenlete:  $x_1 = 2 + t$ ;  $x_2 = 1$ ;  $x_3 = 4 + \frac{3}{2} t$ .

A sík egyenlete:  $3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3$ .

Van legalább két  $t$  érték, amelyre a sík egyenlete áll

Pl.  $t = 0$ -ra  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = 1$ ;  $x_3 = 4$

$t = 2$ -re  $x_1 = 4$ ;  $x_2 = 1$ ;  $x_3 = 7$

értékeknél a sík egyenlete ki van elégítve, ugyanis

$$6 + 5 - 8 = 3$$

$$12 + 5 - 14 = 3$$

Az egyenes benne van a síkban, ezért minden  $t$ -re áll a sík egyenlete, mert

$$3(2 + t) + 5(1) - 2\left(4 + \frac{3}{2}t\right) =$$

$$= 6 + 3t + 5 - 8 - 3t = 3.$$

2. Az egyenes egyenlete:  $\frac{x_1 - 2}{3} = \frac{x_2 + 1}{2} = \frac{x_3 - 3}{-2}$ .

A sík egyenlete:  $4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 20$ .

A sík egyenletét látható módon kielégíti az egyenes  $P_1(2, -1, 3)$  pontja, viszont más pont nem, mert az  $x_1 = 3t + 2$ ;  $x_2 = 2t - 1$ ;  $x_3 = -2t + 3$  értékeket a sík egyenletébe téve

$$4(3t + 2) + 3(2t - 1) + 5(-2t + 3) =$$

$$= 12t + 8 + 6t - 3 - 10t + 15 = 8t + 20 = 20$$

$$8t = 0$$

$$t = 0$$

ami az  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = -1$ ;  $x_3 = 3$  már megtalált pontot adja. Így közös pont csak egy van.

3. Az egyenes egyenlete:  $\frac{x + 1}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z - 4}{3}$ .

A sík egyenlete:  $5x + y + 2z = 6$ .

Az egyenes irányvektora:  $\vec{v}_1 = (-2, 4, 3)$ .

A sík normálvektora:  $\vec{v}_2 = (5, 1, 2)$ .

A két vektor skalárszorzata

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -10 + 4 + 6 = 0$$

tehát a két vektor egymásra merőleges. Ha a két vektor egymásra merőleges, akkor egy közös pont esetén is az egyenes már a síkban fekszik. Ha közös pont nincs, akkor az egyenes a síkkal párhuzamos.

A két alakzatnak nincsen közös pontja, mert nincsenek olyan  $x, y, z$  értékek, melyek mellett az egyenes egyenlete is és a sík egyenlete is kielégülne.

Ugyanis

$$t = \frac{x+1}{-2}; \quad t = \frac{y}{4}; \quad t = \frac{z-4}{3} \quad \text{egyenletekből}$$

$$-2t - 1 = x; \quad 4t = y; \quad 3t + 4 = z$$

értékeket a sík egyenletébe téve

$$-10t - 5 + 4t + 6t + 8 \neq 6.$$

Tehát az egyenesnek és a síknak nincs közös pontja.

Feladatok:

Állapítsuk meg a következő feladatokban, hogy az egyenesnek és a síknak van-e közös pontja

1.  $\frac{x-4}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}; \quad x - y + 2z = -5$

2. 
$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2 - 3t \\ x_2 &= -5 + 2t \\ x_3 &= 3 - 2t \end{aligned} \right\} \quad -3x + 2y - 2z = 5$$

3.  $\vec{r} = (1+t)\vec{i} + (1+t)\vec{j} + (-1+2t)\vec{k}$  és

$$5x + 3y - 4z = 12.$$

### Egyenes és sík dőléspontjának meghatározása

Példák:

1. Határozzuk meg a  $2x + 3y + z = 6$  egyenlettel adott sík és az  $y = \frac{1}{2}x - 3$ ; és  $z = \frac{2}{3}x + 4$  egyenletekkel adott egyenes dőléspontját.

A dőléspont az a pont, amely az egyenesen is és a síkon is rajta van. Meghatározása úgy történik, hogy a három egyenletből álló egyenletrendszert megoldjuk.

$$2x + 3\left(\frac{1}{2}x - 3\right) + \frac{2}{3}x + 4 = 6$$

$$2x + \frac{3}{2}x - 9 + \frac{2}{3}x + 4 = 6$$

$$12x + 9x - 54 + 4x + 24 = 36$$

$$25x = 66$$

$$x = \frac{66}{25}; \quad y = -\frac{42}{25}; \quad z = \frac{144}{25}.$$

Ezzel meghatároztuk a dőléspont koordinátáit.

2. Határozzuk meg a  $2x + y + 3z = -11$  egyenlettel adott sík és az  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z+1$  egyenes dőléspontját.

A sík egyenlete mellé kiválasztunk az egyenes egyenletrendszeréből két tetszős szerinti egyenletet, és az előző feladat mintájára megoldjuk  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ismeretlenekre

$$2x + y + 3z = -11$$

$$\frac{x-1}{2} = z+1$$

$$\frac{y}{3} = z+1$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + 3z = -11 \\ x - 2z = 3 \\ y - 3z = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 3 + 2z \\ y = 1 + 3z \end{array}$$

$$2(3 + 2z) + 1 + 3z + 3z = -11$$

$$7 + 4z + 6z = -11$$

$$10z = -18$$

$$z = -\frac{9}{5}$$

$$x = 3 - \frac{18}{5} = -\frac{3}{5}; \quad y = 1 - \frac{27}{5} = -\frac{22}{5}.$$

3. Határozzuk meg a  $3x + 4y - 5z + 2 = 0$  egyenlettel adott sík és az  $x = t$ ;  $y = 2t - 1$  és  $z = t + 2$  egyenletrendszerrel megadott egyenes dőféspontját

$$3t + 8t - 4 - 5t - 10 + 2 = 0$$

$$6t = 12$$

$$t = 2.$$

A keresett pont  $P(2, 3, 4)$ .

Feladatok:

Határozzuk meg a következő feladatokban a síknak az egyenessel való dőféspontját.

$$1. \quad \left. \begin{array}{l} 5x + 5y - 6z = 13; \\ x = 2t + 1 \\ y = 2t - 2 \\ z = 3t + 5 \end{array} \right\}$$

$$2. \quad \left. \begin{array}{l} x - 4y + 5z = 8; \\ y = -\frac{2}{3}x + 4 \\ z = \frac{1}{2}x - 3 \end{array} \right\}$$

3.  $7x + 2y - z = 6;$

$$\vec{r} = (1 + 2t) \vec{i} + (2 + t) \vec{j} + (3 + 14t) \vec{k} .$$

Két sík kölcsönös helyzete

Két sík lehet párhuzamos egymással és metsző.

Példa:

Határozzuk meg, hogy a következő két sík párhuzamos-e, vagy metsző!

$$\left. \begin{aligned} 2x - 4y + 6z &= -5 \\ 6x - 2y + 4z &= 13 \end{aligned} \right\}$$

A két sík metsző sík, mert az x, y, z együtthatói nem arányosak. A két sík metszésvonalát ha elő akarjuk állítani szükségünk van egy a metszésvonalon lévő pontra és egy irányvektorra, ami a metszésvonallal párhuzamos.

A két sík normálvektorai az

és 
$$\left. \begin{aligned} \vec{m}_1 &= 2\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k} \\ \vec{m}_2 &= 6\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k} \end{aligned} \right\} \text{vektorok}$$

a 
$$\vec{v} = \vec{m}_1 \times \vec{m}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 6 \\ 6 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 28\vec{j} + 20\vec{k}$$

vektor párhuzamos a két sík által meghatározott egyenessel.

Az egyenes átmegy azon a P<sub>0</sub> ponton, amelynek koordinátáit úgy kapjuk meg, hogy pl. 0-nak választjuk y értéket és az így kapott

$$\left. \begin{aligned} 2x + 6z &= -5 \\ 6x + 4z &= 13 \end{aligned} \right\} \text{egyenletrendszert megoldjuk.}$$

Ebből  $x = \frac{5}{2}; \quad z = -2.$

Igy a  $P_0 \left( \frac{5}{2}; 0; -2 \right)$  ponton átmenő és a

$\vec{v} = -4 \vec{i} + 28 \vec{j} + 20 \vec{k}$  vektorral párhuzamos egyenes:

a/ skaláris egyenletrendszere

$$\frac{x - \frac{5}{2}}{-4} = \frac{y}{28} = \frac{z + 2}{20}.$$

b/ paraméteres egyenletrendszere

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{5}{2} - 4t \\ y &= 28t \\ z &= -2 + 20t \end{aligned} \right\}$$

Feladatok:

Határozzuk meg a következő síkpárok metszésvonalát.

$$1. \left. \begin{aligned} 3x - y - 2z &= 4 \\ x + 2y + 3z &= 5 \end{aligned} \right\}$$

$$2. \left. \begin{aligned} 5x - 3y + z &= 4 \\ 2x + 2y + 3z &= 3 \end{aligned} \right\}$$

Három sík kölcsönös helyzete

Három sík metszéspontja az a pont, amely rajta van mindhárom síkon. Ugy határozzuk meg, hogy megoldjuk a három egyenletből álló egyenletrendszert.

Példa:

Határozzuk meg a

$$\left. \begin{aligned} 3x - 2y + 5z &= 4 \\ 2x + 5y - 3z &= 6 \\ x - 5y + 2z &= 3 \end{aligned} \right\} \text{ síkok közös pontját!}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & 5 \\ 6 & 2 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldható, mert  $\rho(A) = \rho(A') = 3$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 6 & 5 & -3 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-203}{-76} = \frac{203}{76}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-76} = -\frac{35}{76}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}}{-76} = -\frac{75}{76}$$

Előfordulhat, hogy a három síknak nincs közös pontja, akkor azonban van maximum három metszésvonala, amiket úgy határozunk meg, hogy a síkokat páronként állítjuk elő és képezzük így 2-2 sík metszésvonalát (az előző feladat mintájára).

Példa:

Határozzuk meg az  $x + 2y - z = 6$ ; a  $2x + 4y - 2z = 5$  és az  $5x - 3y + 2z = 1$  egyenletek által megadott síkok metszésvonalát.

Az első két sík párhuzamos, ezért nincs közös pontjuk.

Megvizsgáljuk az első és a harmadik, majd a második és a harmadik síkot. Egyenleteik

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 6 \\ 5x - 3y + 2z = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2x + 4y - 2z = 5 \\ 5x - 3y + 2z = 1 \end{array} \right\}$$

Meghatározzuk mindkét síkpár metszésvonalát.

$x + 2y - z = 6$  sík normálvektora  $\vec{n}_1 = (1, 2, -1)$

$2x + 4y - 2z = 5$  "  $\vec{n}_2 = (2, 4, -2)$

$5x - 3y + 2z = 1$  "  $\vec{n}_3 = (5, -3, 2)$ .

Az első síkpár által meghatározott egyenes irányvektora

$$\vec{v}_{1,3} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} - 7\vec{j} - 13\vec{k}.$$

Keresünk a metszésvonalon egy pontot.

Pl.  $x = 0$  mellett a háromismeretlenes egyenletrendszerből marad

$$\left. \begin{array}{l} 2y - z = 6 \\ -3y + 2z = 1 \end{array} \right\}$$

Ezt az egyenletrendszert megoldva kapjuk a

$z = 16$  és  $y = 11$  értékeket.

A  $P_0(0, 11, 16)$  ponton átmenő és  $\vec{v}_{1,3} = (1, -7, -13)$  irányu metszésvonal paraméteres egyenletrendszere

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= 11 - 7t \\ x_3 &= 16 - 13t \end{aligned} \right\}$$

A második síkpár által meghatározott egyenes egy pontja

$$P_1 \left( 1, -1, -\frac{7}{2} \right), \text{ irányvektora}$$

$$\vec{v}_{2,3} = \vec{n}_2 \times \vec{n}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 14\vec{j} - 26\vec{k}.$$

A  $P_1$  ponton átmenő és  $\vec{v}_{2,3}$  irányvektoru metszésvonal paraméteres egyenletrendszere

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 1 + 2t \\ x_2 &= -1 - 14t \\ x_3 &= -\frac{7}{2} - 26t \end{aligned} \right\}$$

Feladatok:

Határozzuk meg a következő három-három sík metszéspontját, vagy -ha ez nincs - metszésvonalait.

$$1. \left. \begin{aligned} 2x - 2y + 3z &= 7 \\ x + 5y + z &= 6 \\ -3x + y + 2z &= 8 \end{aligned} \right\} \quad 2. \left. \begin{aligned} -x + 3y + 5z &= 6 \\ 2x + 2y + 2z &= 7 \\ 2x + 4y + 5z &= 18 \end{aligned} \right\}$$

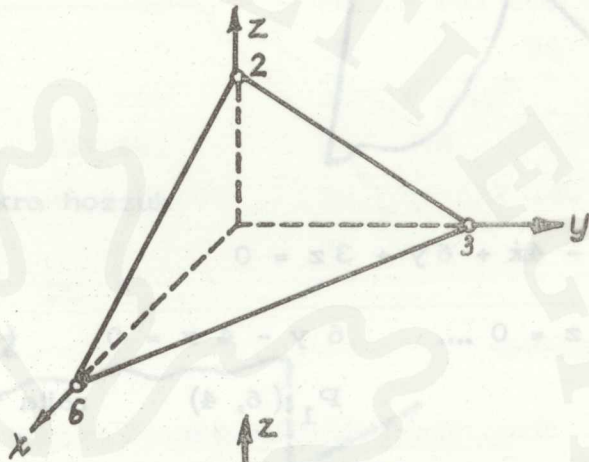
Sík és egyenes szemléltetése

Példák:

Rajzoljuk be a térbeli koordináta-rendszerbe a következő egyenletekkel adott síkokat:

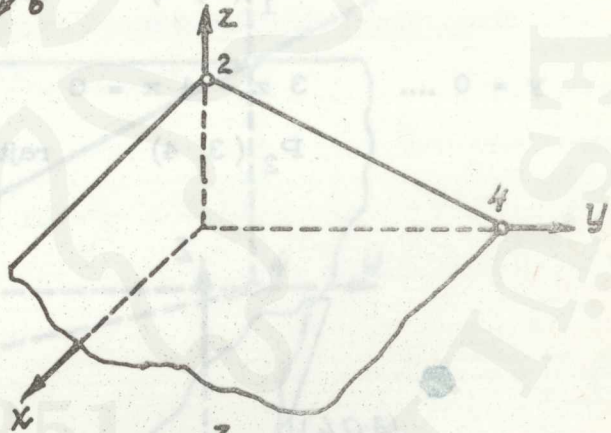
1.  $x + 2y + 3z = 6$

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$$



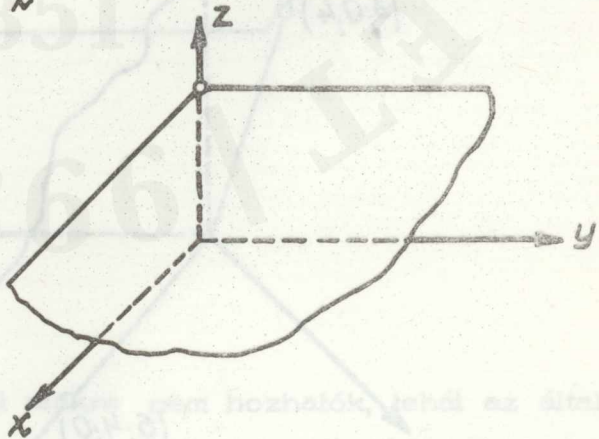
2.  $2z + y = 4$

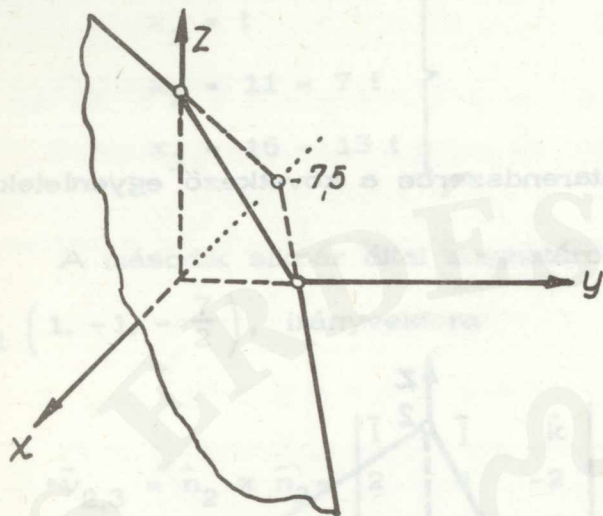
$$\frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1$$



3.  $3z = 12$

$$z = 4$$





4.  $2x - 5y - 3z = -15$

$$-\frac{2x}{15} + \frac{5y}{15} + \frac{3z}{15} = 1$$

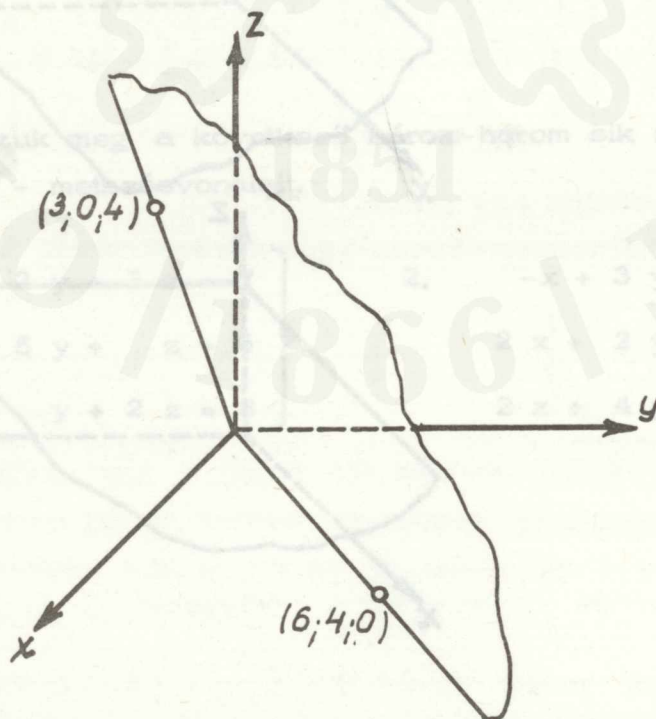
5.  $-4x + 6y + 3z = 0$

$z = 0 \dots 6y - 4x = 0$  (nyomvonal)

$P_1(6, 4)$  rajta van az előbbi egyenesen

$y = 0 \dots 3z - 4x = 0$

$P_2(3, 4)$  rajta van az utóbbi egyenesen.



Feladatok:

1.  $-2x + 3y + 4z = 18$

3.  $y + 2z = 4$

2.  $x - 2y + 3z = 7$

4.  $2y + z - 3x = 0$ .

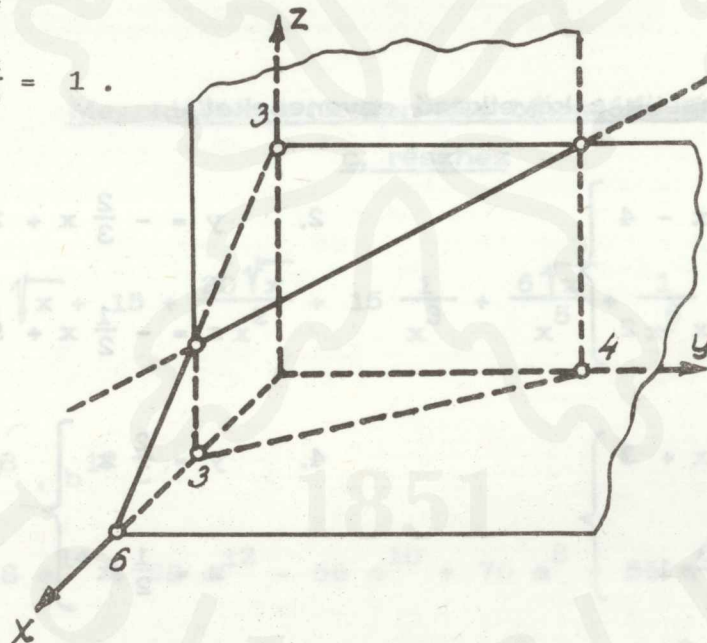
Szemléltessük a következő egyenletekkel adott térbeli egyenest!

1. 
$$\left. \begin{aligned} y &= -\frac{4}{3}x + 4 \\ z &= -\frac{1}{2}x + 3 \end{aligned} \right\}$$

Szerkesztésre alkalmasabb alakra hozzuk

$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

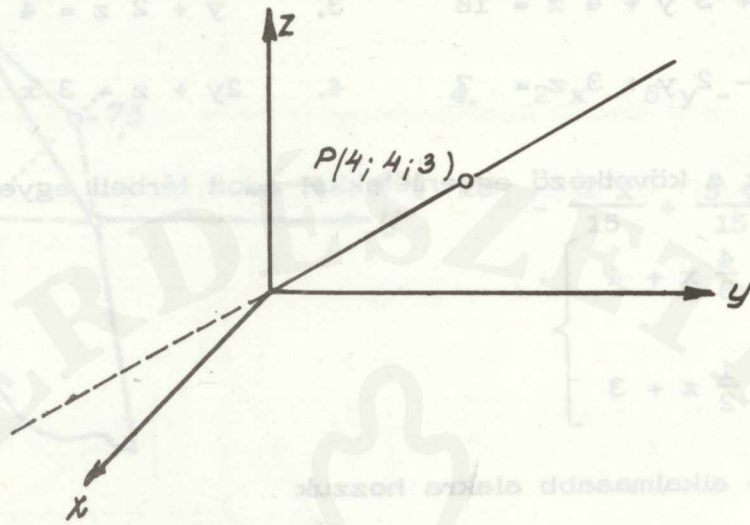
$\frac{x}{6} + \frac{z}{3} = 1$ .



2. 
$$\left. \begin{aligned} x - y &= 0 \\ 3x - 4z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Az egyenletek szerkesztési alakra nem hozhatók, tehát az általuk meghatározott egyenes átmegy az origón. Még egy pontját megkeressük az egyenesnek.

Legyen  $x = 4$ , akkor  $y = 4$  és  $z = 3$ .



Feladatok:

Szemléltessük a következő egyeneseket!

$$1. \left. \begin{aligned} y &= -\frac{2}{5}x - 4 \\ z &= -\frac{1}{3}x + 2 \end{aligned} \right\}$$

$$2. \left. \begin{aligned} y &= -\frac{2}{3}x + 2 \\ z &= -\frac{1}{2}x + 5 \end{aligned} \right\}$$

$$3. \left. \begin{aligned} y &= -\frac{1}{5}x + 3 \\ z &= 2x - 1 \end{aligned} \right\}$$

$$4. \left. \begin{aligned} y &= \frac{2}{3}x \\ z &= \frac{1}{2}x \end{aligned} \right\}$$

Megoldások a kombinatorika című részhez

- |                            |                      |                    |
|----------------------------|----------------------|--------------------|
| 1. 3 628 800               | 2. 120 ;             | 3. 40 320          |
| 4. 4 320                   | 5. 12                | 6. 86.             |
| 7. 1152                    | 8. a/ 2880 ; b/ 5760 |                    |
| 9. 5040 ; 120              | 10. a/ 120 ; b/ 2880 |                    |
| 11. 24                     | 12. 151 200          | 13. 180            |
| 14. 280                    | 15. 60               | 16. 7 567 560      |
| 17. 120                    | 18. 60               | 19. 24             |
| 20. 136 080                | 21. 1 200            | 22. $9 \cdot 10^3$ |
| 23. 125                    | 24. 531 441          | 25. 216            |
| 26. 6 ; 4                  | 27. 43 949 265       | 28. 64 512 240     |
| 29. 99 561 092 450 391 000 |                      | 30. 20             |
| 31. 56                     | 32. 28               |                    |

Megoldások a Newton-féle binomiális tételhez

c. részhez

$$1. x^3 + 6 \sqrt{x} + 15 + \frac{20 \sqrt{x}}{x^2} + 15 \frac{1}{x^3} + \frac{6 \sqrt{x}}{x^5} + \frac{1}{x^6}$$

$$x = 3$$

$$2. 715 a^{18} \cdot b^{12}$$

$$3. a^{16} - 8 a^{14} + 28 a^{12} - 56 a^{10} + 70 a^8 - 56 a^6 + 28 a^4 - 8 a^2 + 1$$

$$4. 32 a^{10} - 240 a^9 + 720 a^8 - 1080 a^7 + 810 a^6 - 243 a^5$$

$$5. a \sqrt[3]{a} - 4 \sqrt{a} + \frac{6 \sqrt[3]{a^2}}{a} - \frac{4 \sqrt[6]{a^5}}{a^2} + \frac{1}{a^2}$$

$$6. \frac{a^8}{b^2} - \frac{4 a^6 \sqrt{b}}{b^4} + \frac{6 a^4}{b^3} - \frac{4 a^2 \sqrt{b}}{b^7} + \frac{1}{b^8}$$

$$7. \frac{1}{x^4} - \frac{4c}{x^5} + \frac{10c^2}{x^6} - \frac{20c^3}{x^7} + \frac{35c^4}{x^8} - \frac{56c^5}{x^9} + \frac{84c^6}{x^{10}} - + \dots$$

$$8. \frac{1}{(2x)^6} + \frac{6}{(2x)^7} + \frac{21}{(2x)^8} + \frac{56}{(2x)^9} + \frac{126}{(2x)^{10}} + \frac{252}{(2x)^{11}} + \dots$$

$$9. \sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{4} - \frac{x^2\sqrt{x}}{32} + \frac{x^3\sqrt{x}}{128} - \frac{5x^4\sqrt{x}}{2048} + \frac{7x^5\sqrt{x}}{8192} - + \dots$$

$$10. x^{-\frac{5}{7}} + \frac{10x^{-\frac{12}{7}}}{7} + \frac{120x^{-\frac{19}{7}}}{49} + \frac{1520x^{-\frac{26}{7}}}{343} + \frac{19760x^{-\frac{33}{7}}}{2401} + \dots$$

Megoldások a komplex számok c. részhez

1.  $-8 + 31i$ ;      2.  $16 - 2i$ ;      3.  $-50 + 4i$

4.  $\frac{32 + i}{41}$ ;      5.  $\frac{2 + 39i}{25}$ ;      6.  $\frac{1 - 47i}{34}$

7.  $-88 - 16i$ ;      8.  $-644 + 960i$ ;      9.  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

10.  $10112 + 15936i$ ;      11.  $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ;       $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

12.  $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ;       $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

13.  $z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3 + 3\sqrt{10}}{2}} \pm \sqrt{\frac{27}{2 + 2\sqrt{10}}}$

14.  $\sqrt[3]{z} = i$ ;       $\sqrt[3]{z} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ ;       $\sqrt[3]{z} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$

$$15. z^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = -\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i + \frac{9}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}i = 1$$

vagy, ha  $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$  akkor

$$z^3 = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ = 1$$

$$16. x^3 + y^3 + 3xy = \frac{26}{8} - \frac{18i}{8} + \frac{26}{8} + \frac{18i}{8} - \frac{60}{8} = -1$$

$$17. z_1 = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i \right)$$

$$z_3 = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}i \right)$$

$$18. z_1 = 1 + \sqrt{3}i; \quad z_2 = -2; \quad z_3 = 1 - \sqrt{3}i$$

$$19. z_1 \cdot z_2 = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i; \quad z_1^3 = -64; \quad z_2^4 = 16$$

$$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right); \quad \sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$\sqrt[3]{z_2} = -\sqrt[3]{2}i.$$

20. A harmadik egységgyökök:

$$\sqrt[3]{1} = 1; \quad \sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad \sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

A két utóbbi primitív harmadik egységgyök is, mert mindkettő hatványozása során előáll az összes többi harmadik egységgyök

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = 1$$

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = 1$$

A negyedik egységgyökök:  $1; -1; i; -i$ .

Ezek közül  $i$  és  $-i$  primitív negyedik egységgyökök.

A hatodik egységgyökök:

$$\sqrt[6]{1} = 1; \quad \sqrt[6]{1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad \sqrt[6]{1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\sqrt[6]{1} = -1; \quad \sqrt[6]{1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad \sqrt[6]{1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Ezek közül primitív hatodik egységgyökök:

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$21. \left[ 3 \left( \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right) \right]^{-3} = \frac{1}{27} \left( \cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5} \right)$$

Megoldások a harmadfoku egyenletek c. részhez

1.  $(2, -2, -3)$

2.  $(3; 3; -4)$

3.  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$

4.  $\left(\frac{1}{3}; 3; -4\right)$

5.  $\left(3; 3; -\frac{1}{3}\right)$

6.  $(-4; 7; 3)$

7.  $\left(2; \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{23}}{2}\right)$

8.  $\left(4; -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{35}}{2}\right)$

9.  $(2; 1; -3)$

10.  $\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -3\right)$

11.  $a = 11; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 1$

12.  $a = -4; \quad b = 1; \quad x_3 = -1$

13.  $(-2 + 2\sqrt{3}; \quad -8; \quad -2 - 2\sqrt{3})$

14.  $\left(2; \quad -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

15.  $x_1 = \sqrt[3]{6 + \frac{14}{3}\sqrt{5}} - \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{6 + \frac{14}{3}\sqrt{5}}} - 2$

$x_{2,3} = -\frac{1}{2} \left( \sqrt[3]{6 + \frac{14}{3}\sqrt{5}} - \frac{2}{3 \sqrt[3]{6 + \frac{14}{3}\sqrt{5}}} \right) \pm$

$\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \sqrt[3]{6 + \frac{14}{3}\sqrt{5}} + \frac{2}{3 \sqrt[3]{6 + \frac{14}{3}\sqrt{5}}} \right)^{-2}$

7 Nem ellenpélda rá

Megoldások a determináns c. részhez

- |          |           |                      |                      |
|----------|-----------|----------------------|----------------------|
| 1. - 2   | 2. 16     | 3. 20                | 4. $-\frac{15}{8}$   |
| 5. 179   | 6. 16     | 7. - 92              | 8. 119               |
| 9. - 51  | 10. 47    | 11. - 43             | 12. $-\frac{31}{84}$ |
| 13. - 24 | 14. - 244 | 15. $\frac{78}{225}$ | 16. - 1512 .         |

Elsőfoku egyenletrendszerek megoldása

- |                         |                      |                          |
|-------------------------|----------------------|--------------------------|
| 1. $x = \frac{1}{4}$    | 2. $x = \frac{1}{2}$ | 3. $a = 8$               |
| $y = 1$                 | $y = -\frac{7}{6}$   | $b = -2$                 |
| 4. $x = \frac{56}{19}$  | 5. $x = 36$          | 6. $a = 5$               |
| $y = \frac{87}{19}$     | $y = 12$             | $b = 8$                  |
| 7. $x = 4$              | 8. $x = 3$           | 9. $x = 1$               |
| $y = -1$                | $y = 2$              | $y = 4$                  |
|                         |                      | $z = 3$                  |
| 10. $x = 3$             | 11. $x = 1$          | 12. $x = 2$              |
| $y = 2$                 | $y = -3$             | $y = -3$                 |
| $z = -1$                | $z = 4$              | $z = 4$                  |
| 13. $x = -\frac{27}{5}$ | 14. $x = 2$          | 15. $x = -\frac{18}{11}$ |
| $y = \frac{34}{5}$      | $y = 3$              | $y = -\frac{39}{11}$     |
| $z = \frac{23}{5}$      | $z = 4$              | $z = \frac{1}{11}$       |

$$16. \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = 7 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x = 11 \\ y = 13 \\ z = 17 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} y = 6 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = -4 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 5 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = \frac{1}{8} \\ z = 1 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x = \frac{18}{7} \\ y = 18 \\ z = -36 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ u = 4 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 4 \\ u = 2 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = -1 \\ c = \frac{11}{6} \end{cases}$$

Megoldások a mátrix-számítás elemei c. részhez

$$1. \begin{matrix} C \\ (2,3) \end{matrix} = \begin{pmatrix} 17 & 1 & 3 \\ 35 & 12 & -2 \end{pmatrix};$$

$$2. \begin{matrix} C \\ (2,4) \end{matrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -4 & 2 \\ 7 & -8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{matrix} C \\ (2,4) \end{matrix} = \begin{pmatrix} 19 & 29 & 24 & 8 \\ 25 & 39 & 26 & 10 \end{pmatrix};$$

$$4. \begin{matrix} C \\ (3,4) \end{matrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 7 & 8 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{matrix} C \\ (2,4) \end{matrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 8 & 5 \\ 9 & 2 & 19 & 12 \end{pmatrix};$$

$$6. \begin{matrix} C \\ (3,4) \end{matrix} = \begin{pmatrix} 33 & 21 & 12 & 25 \\ 36 & 24 & 14 & 26 \\ 22 & 14 & 8 & 15 \end{pmatrix}$$

7. Nem, ellenpélda rá

$$\begin{matrix} A & \cdot & B & = & C \\ (3,2) & \cdot & (2,2) & = & (3,2) \end{matrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \\ 12 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$

9.  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$

10.  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{5}{16} \end{pmatrix}$

11.  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{7}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 1 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

12.  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

13.  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

14.  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{13}{3} \end{pmatrix}$

15.  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{7}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{48} & \frac{5}{48} & \frac{7}{48} \end{pmatrix}$

16.  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

17.  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{7}{22} \\ -\frac{3}{11} & \frac{5}{11} & -\frac{1}{22} \\ \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} & \frac{5}{22} \end{pmatrix}$

18. Igen, mert ugyanis

$$\begin{matrix} A & \cdot & B & = & C_1 \\ (p,r) & \cdot & (r,p) & = & (p,p) \end{matrix} ; \quad \begin{matrix} B & \cdot & A & = & C_2 \\ (r,p) & \cdot & (p,r) & = & (r,r) \end{matrix}$$

és  $C_1 = C_2$  csak  $p = r$  esetben,  
 $(p,p) \quad (r,r)$

19. A feladat megoldása (2,2) típusu mátrixokra a következő:

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{a_{21}(b_{22} - b_{11}) - b_{21}a_{22}}{-b_{21}} \\ a_{12} = \frac{a_{21}b_{12}}{b_{21}} \end{cases}$$

Miszerint, ha például:  $a_{21} = 1$

$$a_{22} = 1$$

és

$$b_{11} = 2 ; \quad b_{12} = 2 , \quad b_{21} = 2 , \quad b_{22} = 2$$

akkor

$$a_{11} = 1 \quad \text{és} \quad a_{22} = 1 .$$

Igy előáll olyan két mátrix, amelyeknél az egyik a másiknak számszorosa.  
Ilyen speciális mátrixoknál (n, n) típusra is igaz a kommutativitás.

Legyen

$$a_{21} = 1 , \quad b_{11} = 2 , \quad b_{21} = 4$$

$$a_{22} = 1 , \quad b_{12} = 3 , \quad b_{22} = 5$$

akkor

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$(2,2)$   $(2,2)$

Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{14}{4} & \frac{18}{4} \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

20.  $Q(M) = 2;$       21.  $Q(M) = 3;$       22.  $Q(M) = 3$

23.  $Q(M) = 3.$

Megoldások az általános lineáris egyenletrendszerek című részhez

1. pl.  $z = -4$ -nél  $x = -2$  és  $y = 3.$

2. Az egyenletrendszer megoldhatatlan, mert  $Q(D) \neq Q(D')$ .

3.  $\bar{a} = 3\bar{b} - \bar{c}$

4.  $\bar{c} = \frac{2}{3}\bar{a} + \frac{5}{3}\bar{b}$

5.  $\bar{b} = 5\bar{a} - 7\bar{c}.$

6. Ha pl. a kiválasztott két független oszlopvektor az első kettő  $(\bar{a}, \bar{b})$ , akkor a harmadik

$$\bar{c} = -\frac{6}{29}\bar{a} - \frac{25}{29}\bar{b}.$$

7.  $z = 1;$        $u = 1;$        $v = 1$       mellett

$$x = \frac{12}{5}; \quad y = \frac{11}{5}.$$

Megoldások a magasabbrendű aritmetikai sorozat és sor című részhez

1. A 2, 6, 18, 54, 162, ... elemek nem alkotnak magasabbrendű számtani sorozatot, mert mértani sorozat elemei. Az első és a további differencia sorozatok elemei szintén mértani sorozatot alkotnak.

2. Az ötödrendű sorozat első hat eleme: 2, 1, 3, 12, 37, 98.

3. Az első 10 négyzetszám összege: 385.

4. Az első 15 köbszám összege: 14400.

5. Az 1, 3, 7, 13, ... sorozat 20-ik tagja: 381. A 25 első elemének összege: 5225.

Megoldások a végtelen számsorozatok című részhez

1. 2, 4, 8, 16, ...

2.  $3, \frac{5}{2}, \frac{9}{4}, \frac{17}{8}, \dots$

3.  $a_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

4. 0,33 esetében a közelítés hibája  $\frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}$

5. Az  $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10^5}$  egyenlőtlenséget kell megoldani n-re. Beszorozzuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát  $2^n \cdot 10^5$ -nel

$$10^5 < 2^n$$

Mindkét oldal tizes alapu logaritmusát véve

$$5 < n \lg 2$$

lg 2-vel elosztva mindkét oldalt kapjuk, hogy

$$\frac{5}{\lg 2} < n ; \quad \lg 2 = 0,3010 \dots$$

lg 2 értékét beírva

$$\frac{5}{0,3010} < n$$

ahonnan  $n > 16,63$ , és mivel n egész szám ezért  $n = 17$ -től kezdődő tagokra igaz, hogy  $10^{-5}$  értéknél kisebbek, tehát már

$$\frac{1}{2^{17}} < \frac{1}{10^5}$$

6. a/ A sorozat monoton, mert  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n} > 1$ .

b/ A sorozat korlátos is, ugyanis  $a_n = \frac{n}{n+2} = 1 - \frac{2}{n+1}$  ahol

$$\frac{2}{n+1} \rightarrow 0 \text{ és ezért } a_n \rightarrow 1.$$

7. a/ A sorozat monoton csökkenő voltára következtethetünk úgy, hogy az  $a_n$  általános tagból kivonjuk az  $a_{n+1}$  általános tagot. A kivonást célszerű úgy elvégezni, hogy párosával írjuk fel a különbségeket

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{(n+1)^2} \right) = \ln \frac{\frac{n^2 + 1}{n^2}}{\frac{(n+1)^2 + 1}{(n+1)^2}} =$$

$$= \ln \frac{n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1}{n^4 + 2n^3 + 2n^2} > 0$$

$$\ln \left( 1 + \frac{2}{n^2} \right) - \ln \left( 1 + \frac{2}{(n+1)^2} \right) > 0$$

$a_n$  kifejezés  $n$  tagból áll,  $a_{n+1}$  pedig  $n+1$  tagból, ezért az  $n$ -edik tagból  $a_{n+1}$   $n$ -edik és  $n+1$ -edik tagját vonjuk le, így kapjuk, hogy

$$\ln \left( 1 + \frac{n}{n^2} \right) - \left[ \ln \left( 1 + \frac{n}{(n+1)^2} \right) + \ln \left( 1 + \frac{n+1}{(n+1)^2} \right) \right] > 0 .$$

b/ A sorozat korlátos is, mert

$$n \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) < a_n < n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

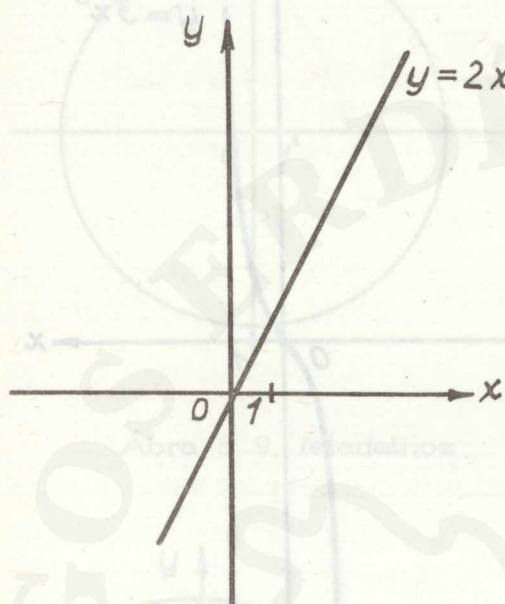
$$\ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^n < a_n < \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n .$$

Mivel  $\left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^n$  monoton csökkenőleg  $\rightarrow 1$ -hez és  $\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$  monoton növekedőleg  $\rightarrow e$ -hez azért  $0 = \ln 1 < \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^n < a_n < \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n < \ln e = 1$ .

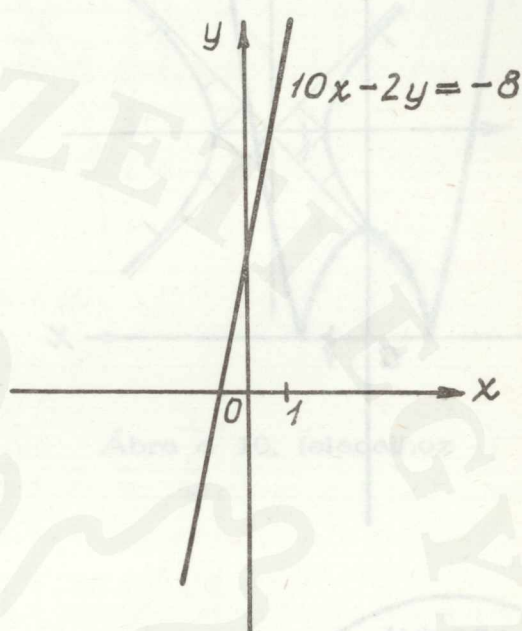
A sorozatról beláttuk, hogy monoton és korlátos

ezért konvergens.

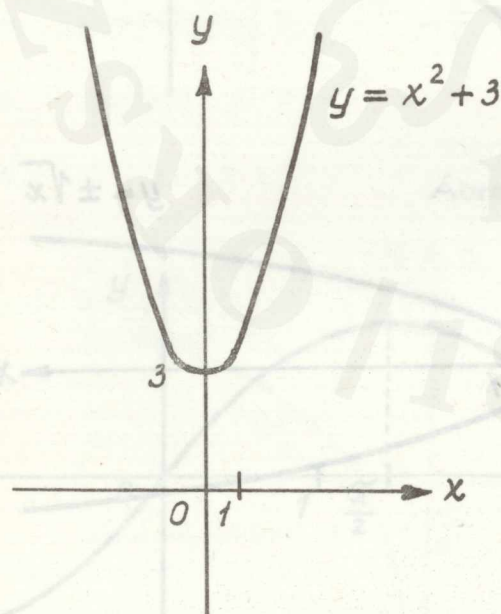
Megoldások a függvény fogalma, egyszerűbb függvénytranszformációk  
című részhez



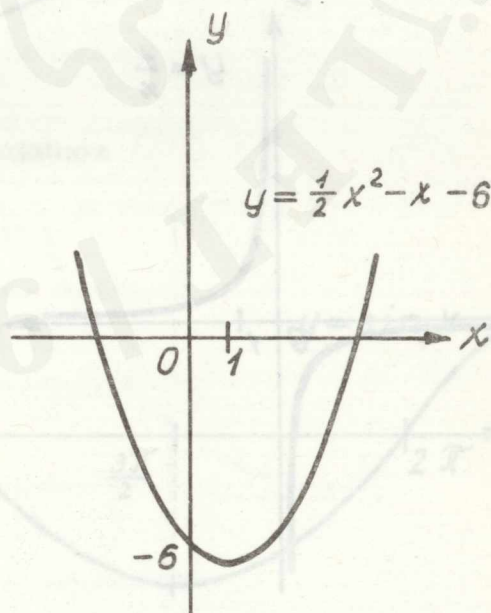
Ábra az 1. feladathoz



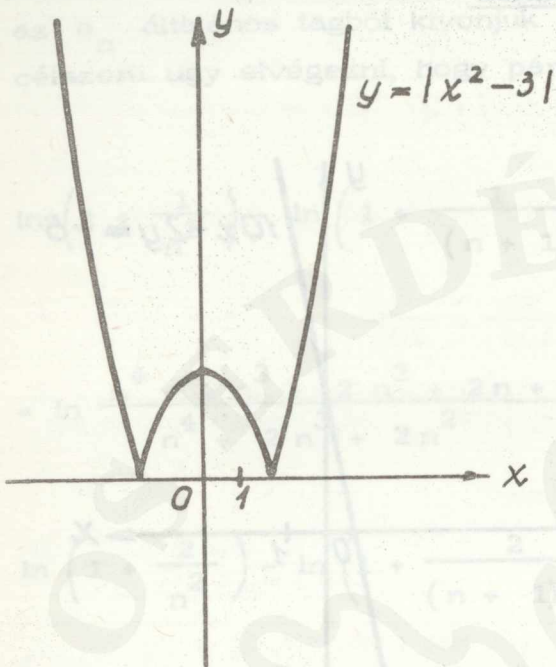
Ábra a 2. feladathoz



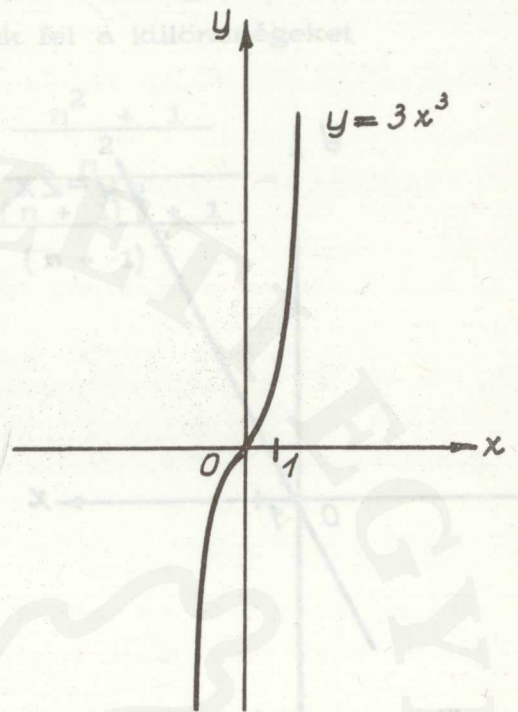
Ábra a 3. feladathoz



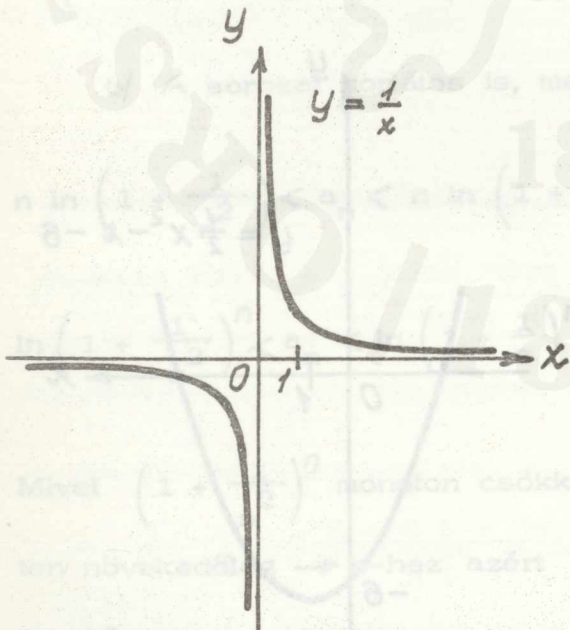
Ábra a 4. feladathoz



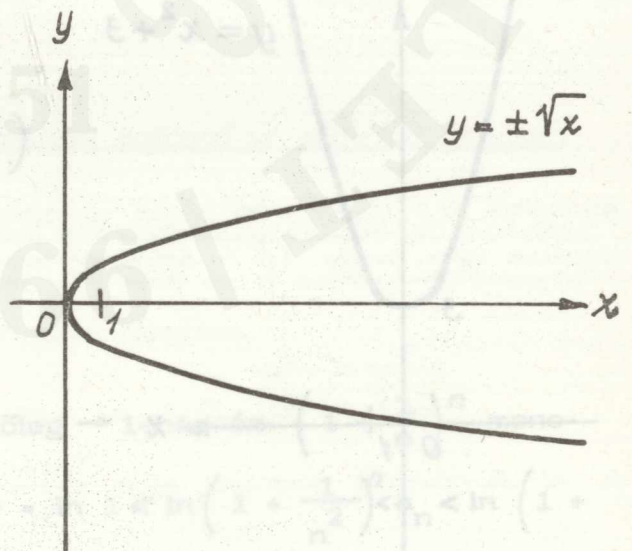
Ábra az 5. feladathoz



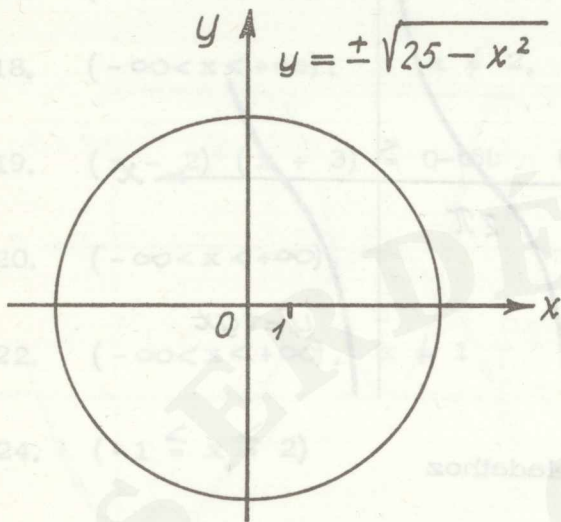
Ábra a 6. feladathoz



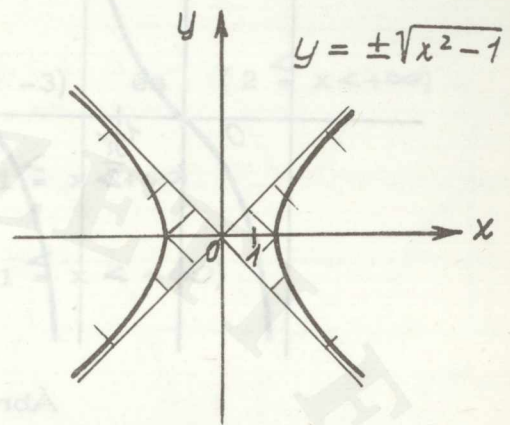
Ábra a 7. feladathoz



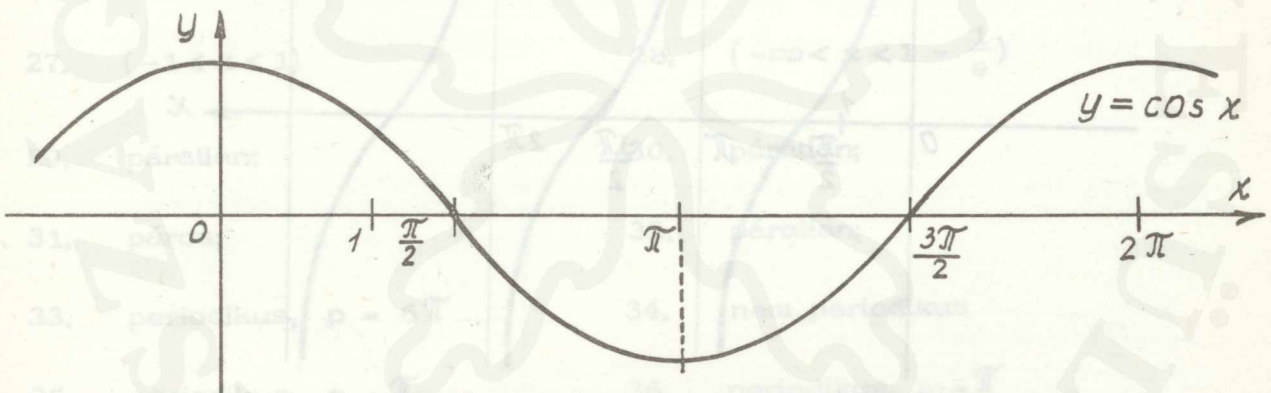
Ábra a 8. feladathoz



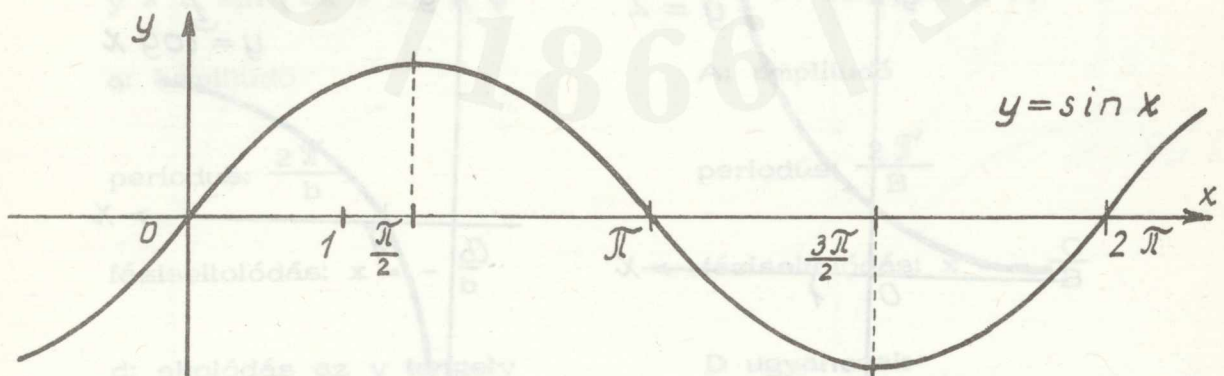
Ábra a 9. feladathoz



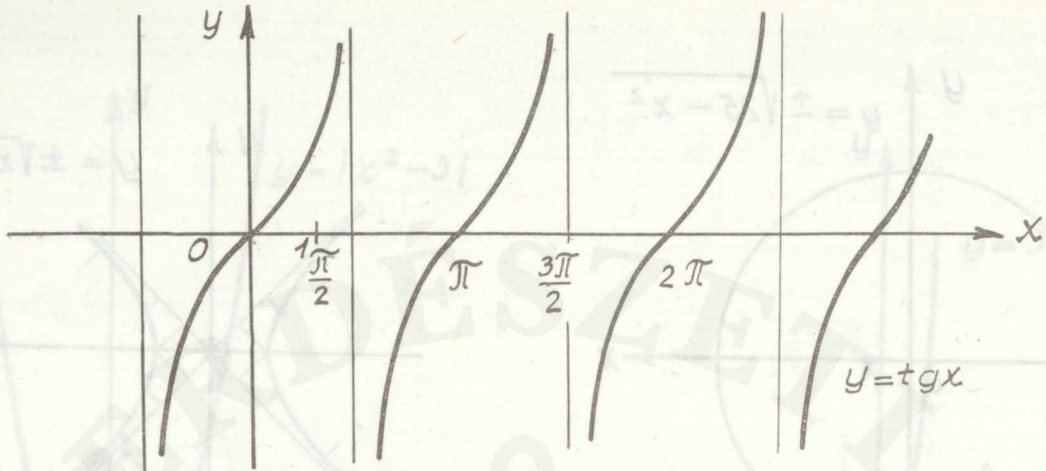
Ábra a 10. feladathoz



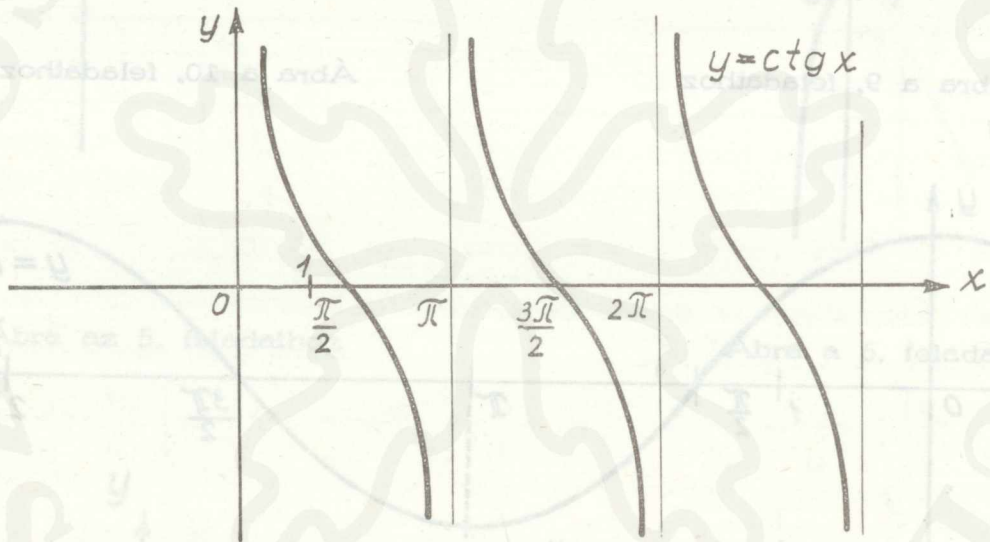
Ábra a 11. feladathoz



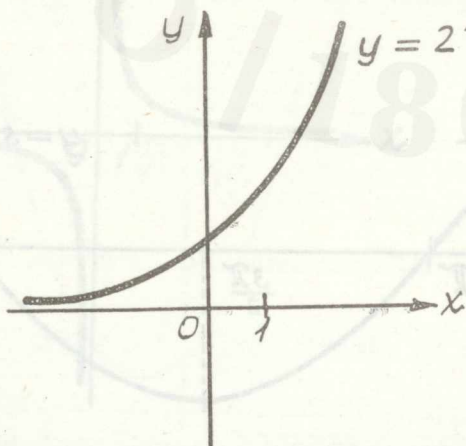
Ábra a 12. feladathoz



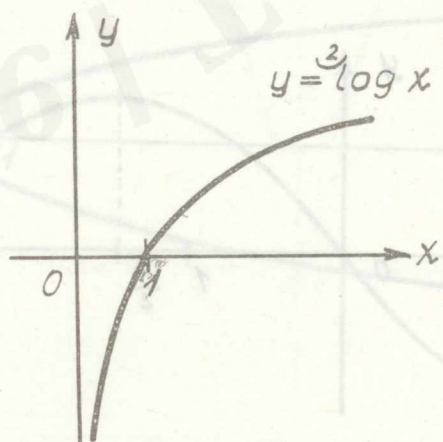
Ábra a 13. feladathoz



Ábra a 14. feladathoz



Ábra a 15. feladathoz



Ábra a 16. feladathoz

17.  $(-\infty < x < +\infty)$ ,  $x \neq \pm \sqrt{2}$

18.  $(-\infty < x < +\infty)$ ,  $x \neq 2$ ,  $x \neq 3$

19.  $(x - 2)(x + 3) \geq 0$ -ból:  $(-\infty < x \leq -3)$  és  $(2 \leq x < +\infty)$

20.  $(-\infty < x < +\infty)$ , 21.  $(1 \leq x < +\infty)$

22.  $(-\infty < x < +\infty)$ ,  $x \neq 1$  23.  $(1 \leq x < +\infty)$

24.  $(-1 \leq x \leq 2)$

25.  $(-\infty < x < +\infty)$ ,  $x \neq 1$ ,  $x \neq \frac{\pi}{2} \pm k\pi$ ,  $(k = 0, 1, 2, \dots)$

26.  $(-\infty < x < +\infty)$ ,  $x \neq \pm k \frac{\pi}{2}$   $(k = 0, 1, 2, \dots)$

27.  $(-1 < x < 1)$  28.  $(-\infty < x < 1 - \frac{1}{e})$

29. páratlan; 30. páratlan;

31. páros; 32. páratlan;

33. periodikus,  $p = 6\pi$  34. nem periodikus

35. periodikus,  $p = \pi$  36. periodikus,  $p = \pi$

37.  $y = \sin 2x + 2$  38.  $y = 2 \cos 2x$

$y = a \sin (bx + c) + d$

$y = A \cos (Bx + C) + D$

a: amplitudó

A: amplitudó

periodus:  $\frac{2\pi}{b}$

periodus:  $\frac{2\pi}{B}$

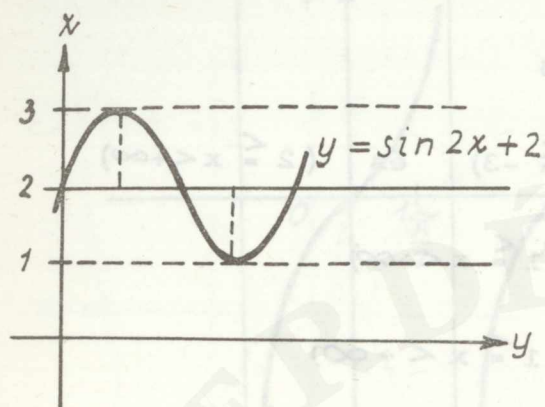
fáziseltolódás:  $x = -\frac{c}{b}$

fáziseltolódás:  $x = -\frac{C}{B}$

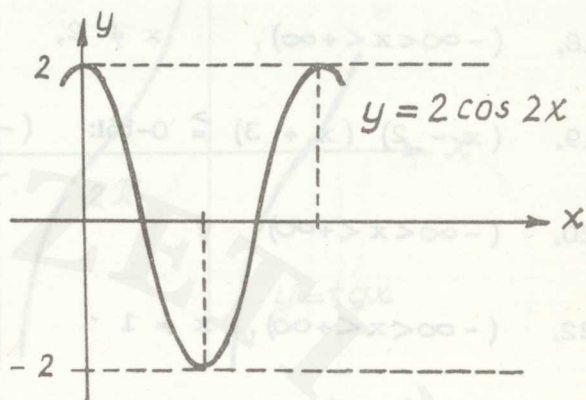
d: eltolódás az y tengely mentén,

D ugyancsak

37. feladat ábrája



38. feladat ábrája



39.  $y = 2 \sin (2x + 1)$

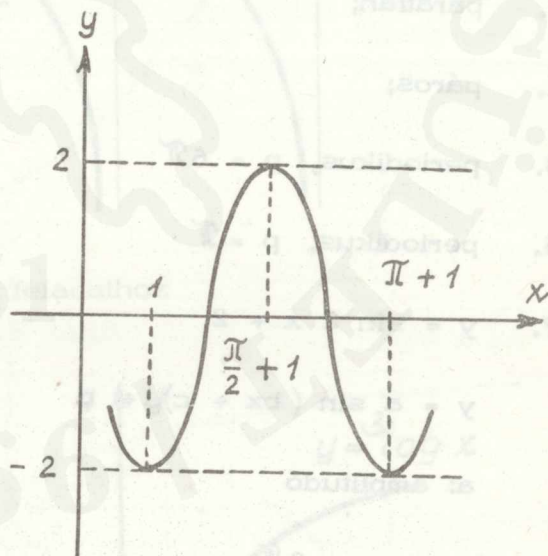
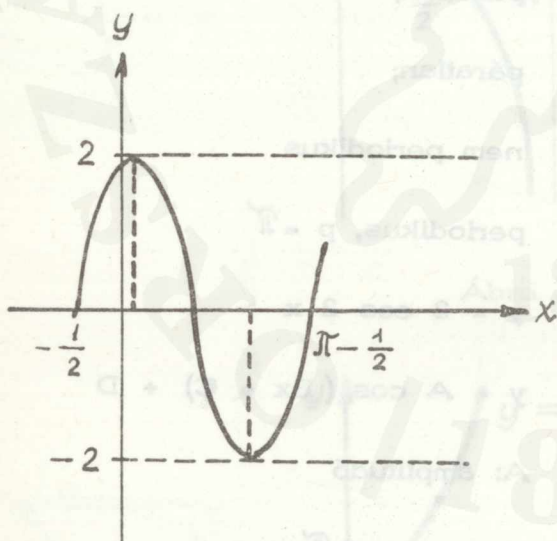
$a = 2$ , periodus:  $\pi$

fáziseltolódás:  $x = -\frac{1}{2}$

40.  $y = -2 \cos (2x - 2)$

$a = 2$ , periodus:  $\pi$

fáziseltolódás:  $x = +1$



41.  $y = -2 \sin (x + 1)$

$a = 2$ ,  $p: 2\pi$

fázis e:  $x = -1$

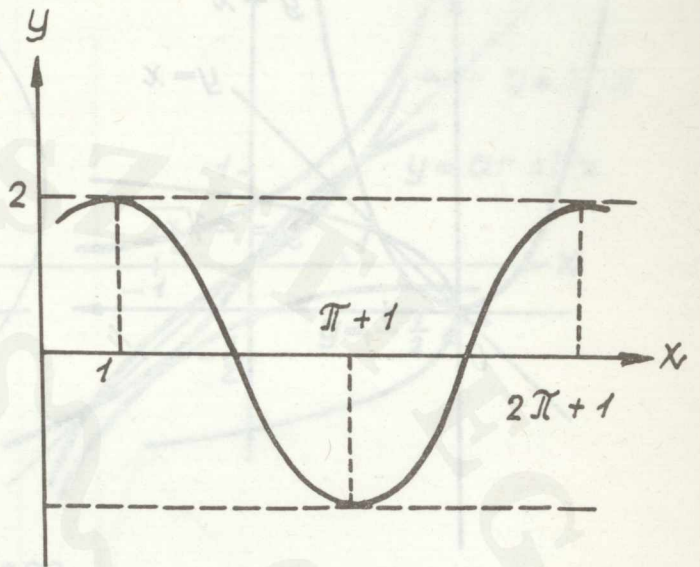
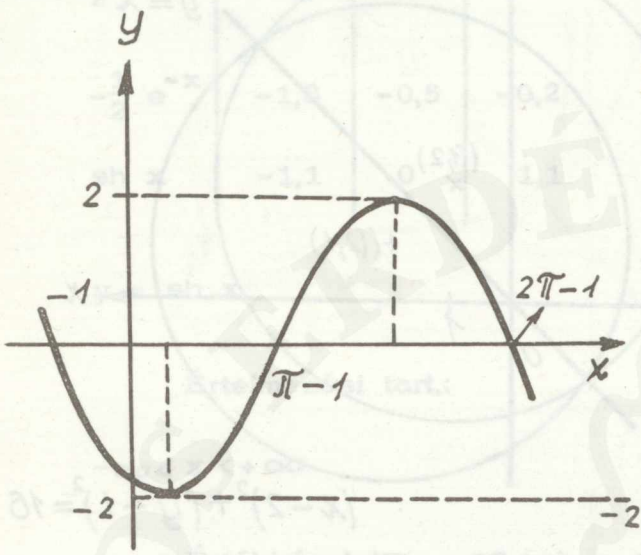
42.  $y = 2 \cos (x - 1)$

$a = 2$ ,  $p: 2\pi$

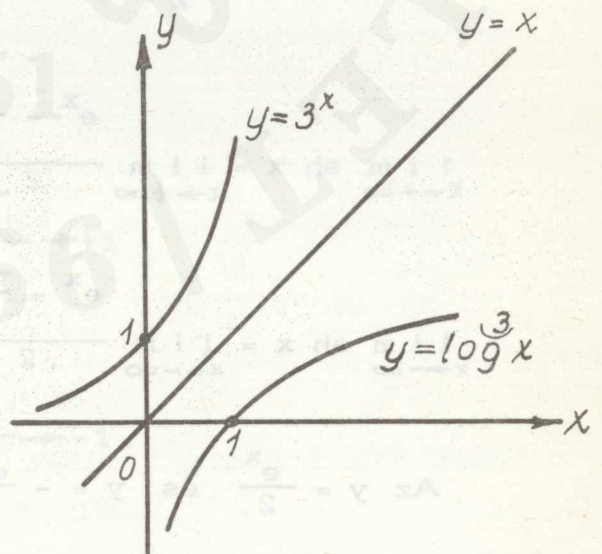
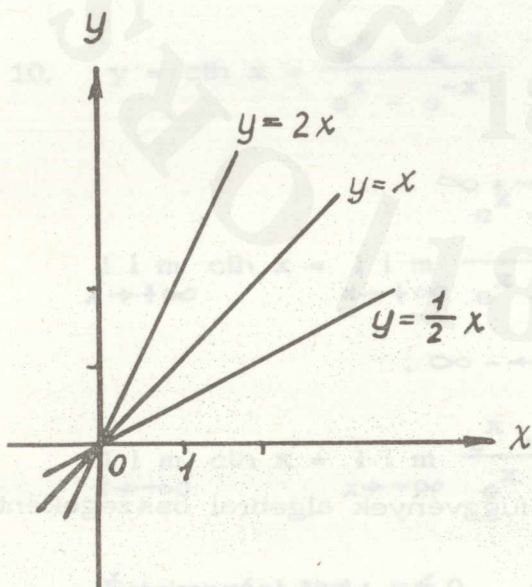
$x = 1$

41. feladat ábrája

42. feladat ábrája

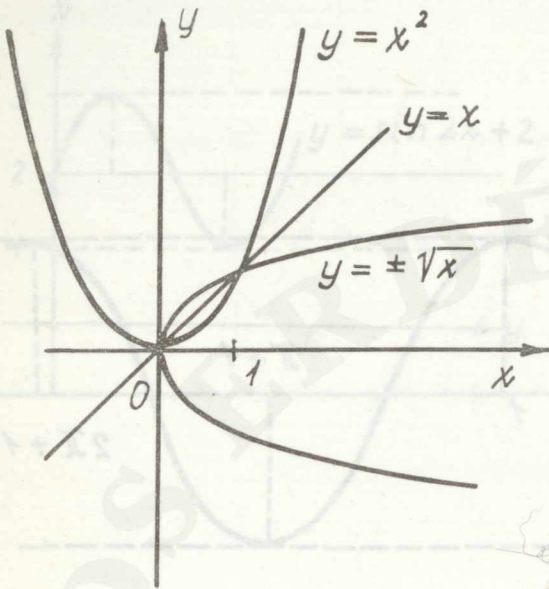


Megoldások a függvény, inverz függvény kapcsolat című részhez

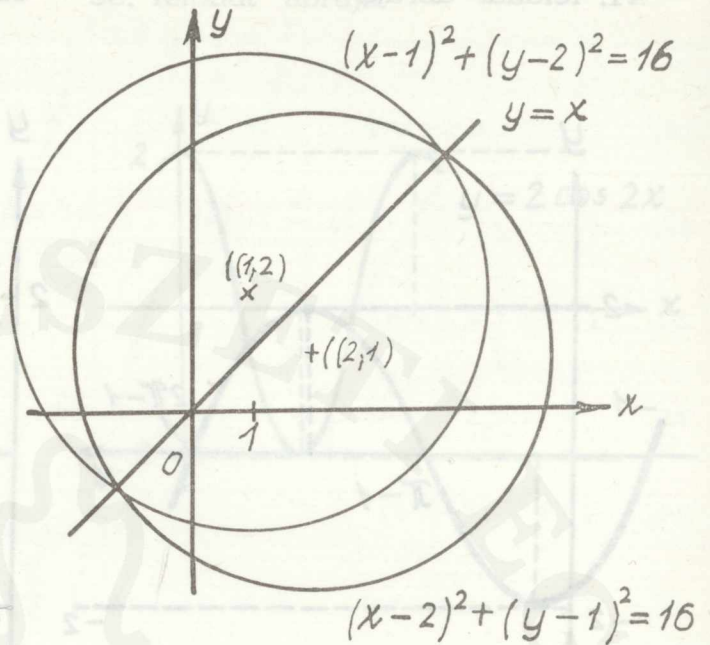


Ábra az 1. feladathoz

Ábra a 2. feladathoz



Ábra a 3. feladathoz



Ábra a 4. feladathoz

5.  $y = \frac{\arctan x - 1}{\arctan x + 1}$

6.  $y = 1 + 2 \arcsin x$

7.  $y = 1 - \frac{1}{\cos x}$

8.  $y = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}$

9.  $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

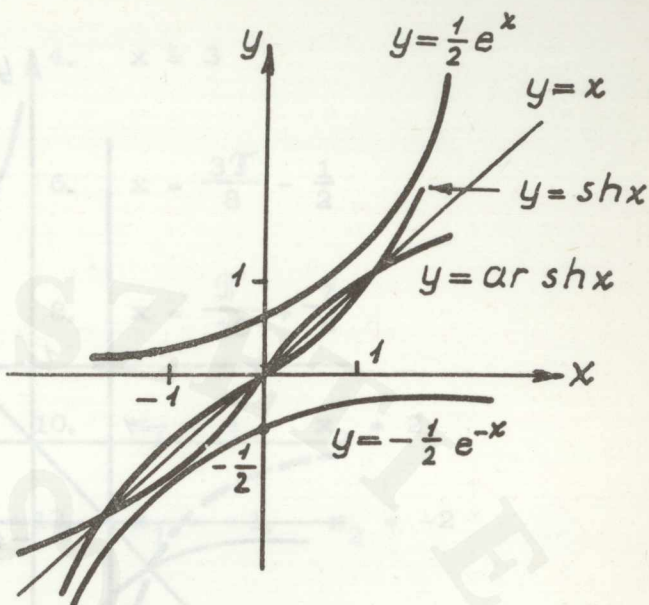
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2} \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh} x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2} \rightarrow -\infty$$

Az  $y = \frac{e^x}{2}$  és  $y = -\frac{e^{-x}}{2}$  függvények algebrai összegeként áll

elő az  $y = \operatorname{sh} x$  függvény

x	-1	0	1
$\frac{1}{2} e^x$	0,2	0,5	1,3
$-\frac{1}{2} e^{-x}$	-1,3	-0,5	-0,2
sh x	-1,1	0	1,1



$y = \text{sh } x$

Értelmezési tart:

$-\infty < x < +\infty$

Értékkészlete:  $-\infty < \text{sh } x < +\infty$

Páratlan függvény, vagyis  $\text{sh}(-x) = -\text{sh } x$

Inverz függvénye:  $\text{ar sh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

$y = \text{ar sh } x$ , értelmezési tartománya:  $-\infty < x < +\infty$

értékkészlete:  $-\infty < \text{ar sh } x < +\infty$

páratlan függvény:  $\text{ar sh}(-x) = -\text{ar sh } x$ .

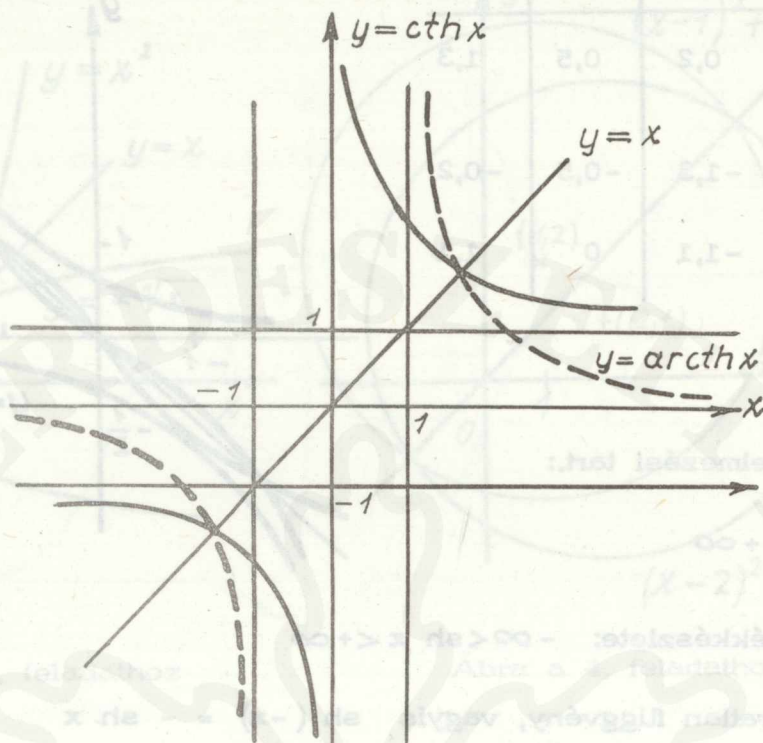
10.  $y = \text{cth } x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{cth } x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{e^x - \frac{1}{e^x}} \rightarrow +1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{cth } x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \rightarrow -1.$$

Értelmezési tart.:  $x \neq 0$ .

Értékkészlet:  $1 < \text{cth } x < -1$ .



Páratlan függvény:  $\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$ .

Inverz függvénye:  $y = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$

$$|x| > 1.$$

Az inverz függvény értelmezési tartománya:

$$1 < x < -1.$$

Értékkészlet:  $\operatorname{ar} \operatorname{cth} x \leq 1$ .

Páratlan függvény:  $\operatorname{ar} \operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{ar} \operatorname{cth} x$ .

Megoldások a függvény, inverz függvény kapcsolat felhasználásával megoldható egyenletek című részhez

1.  $x = \frac{\tilde{\pi}}{8} + \frac{1}{2}$

2.  $x = \frac{\pi}{8} + \frac{5}{4}$

3.  $x = \frac{3\pi}{4} + 7$

4.  $x = 3$

5.  $x = \frac{3}{8}$

6.  $x = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}$

7.  $x = \frac{3\sqrt{2}}{14} + \frac{8}{7}$

8.  $x = \frac{\pi}{10} + \frac{7}{5}$

9.  $x_1 = 4, x_2 = -1$

10.  $x_1 = 4, x_2 = 2$

11.  $x = 1$

12.  $x_1 = -1, x_2 = -2$

13.  $x = \frac{1}{7}$

1851

1866

## DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS

Megoldások a függvény növekménye, differenciahányados és a differenciálhányados című részhez

1. A függvény növekménye:  $\Delta x = 0,1$  mellett,  $\Delta y = 0,993$   
 $\Delta x = 0,01$  mellett,  $\Delta y = 0,090903$

a függvény differenciahányadosa  $\Delta y = 0,993$  mellett

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 9,93$$

a függvény differenciálhányadosa  $x_0 = 1$  mellett

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 9$$

2. A függvény növekménye:  $\Delta x = 0,1$  mellett  $\Delta y = -\frac{1}{93}$

$\Delta x = 0,01$  mellett  $\Delta y = -\frac{1}{903}$

a függvény differenciahányadosa  $\Delta y = -\frac{1}{93}$  mellett

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{10}{93}$$

a függvény differenciálhányadosa  $x_0 = 3$  mellett

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{9}$$

3. A függvény növekménye:

$$\Delta x = 0,5\text{-nél} \quad \Delta y = -\frac{4}{15}$$

$\Delta x = 0,2\text{-nél}$   $\Delta y = -\frac{8}{57}$

$$\Delta x = 0,1\text{-nél} \quad \Delta y = -\frac{14}{100}$$

a függvény differenciahányadosa  $\Delta y = -\frac{4}{15}$  -nél: - 0,53

a függvény differenciálhányadosa  $x_0 = 1,5$ -nél:  $-\frac{8}{9}$ .

4. A függvény növekménye:

$$\Delta x = 1 \text{ mellett} \quad \Delta y = -\frac{1}{4}$$

$$\Delta x = 0,1 \text{ mellett} \quad \Delta y = -\frac{7}{121}$$

$$\Delta x = 0,01 \text{ mellett} \quad \Delta y = -\frac{67}{10201}$$

a függvény differenciahányadosa  $\Delta y = -\frac{1}{4}$  mellett  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -0,57$

a függvény differenciálhányadosa:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ -\frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{3\Delta x(1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2)} \right] = -\frac{2}{3}.$$

5. A függvény növekménye:

$$\Delta x = 0,1 \text{ mellett} \quad \Delta y = -\frac{1}{21}$$

$$\Delta x = 0,01 \text{ mellett} \quad \Delta y = -\frac{1}{201}$$

a függvény differenciahányadosa:

$$\Delta y = -\frac{1}{21} \text{ mellett} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -0,476$$

$$\Delta y = -\frac{1}{201} \text{ mellett} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -0,497$$

a függvény differenciálhányadosa:  $y'(x=3) = -\frac{1}{2}$ .

Megoldások a derivált függvény című részhez

$$1. \quad y'(x=1) = 2; \quad y'(x=2) = 4; \quad y'(x=3) = 6; \quad y' = 2x.$$

Megoldások a függvény differenciálhatósága című részhez

1. A jobboldali differenciálhányados:  $y'_+ = 2$  a baloldali differenciálhányados:  $y'_- = 0$ .

2.  $y'_+ = -1$ ;  $y'_- = 2$

3.  $y'_+ = 1$ ;  $y'_- = -1$

4.  $y'_+ = 0$ ;  $y'_- = 3$

5.  $y'_+ = -1$ ;  $y'_- = 0$

6.  $y'_+ = 0$ ;  $y'_- = -1$ .

Megoldások a differenciálási szabályok című részhez

1.  $y' = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ;

2.  $y' = \frac{7}{8\sqrt{x}}$

3.  $y' = -\frac{x}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ;

4.  $y' = \frac{2x}{6-5x^2+x^4}$

5.  $y' = \frac{4 \cos 2x}{(1-\sin 2x)^2}$ ;

6.  $y' = -\frac{2 \operatorname{ctg}^2 x}{\sin x}$

7.  $y' = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$ ;

8.  $y' = \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$

9.  $y' = \operatorname{tg}^3 x$

10.  $y' = \frac{2\sigma}{1+x^2}$

( $\sigma = \operatorname{sign}(1-x^2)$ ;  $x^2 \neq 1$ )

11.  $y' = -\frac{2\sigma}{1+x^2}$ ;  $\sigma = \operatorname{sign} x$ ; 12.  $y' = \frac{2}{1-x^4}$

$$13. y' = \frac{\sqrt{4x-1}}{2x}$$

$$14. y' = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}$$

$$15. y' = \frac{1}{x^2-1}$$

$$16. y' = \frac{-12x^4 + 12x^3 + 4x - 1}{(6x^3 + 1)^2}$$

$$17. y' = \frac{1}{a + b \cos x}$$

$$18. y' = \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1}$$

$$19. y' = -\frac{1}{2x^2 + 2}$$

$$20. y' = \frac{1}{\cos^8 x}$$

$$21. y' = -\frac{3x}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$$

$$22. y' = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$23. y' = \frac{x^2}{(a^2 + x^2)(a+x)^2}$$

$$24. y' = \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}; \quad (0 < x - 2k\pi < \pi) \\ k \text{ egész}$$

$$25. y' = \frac{1}{a-bx^2}; \quad (|x| < \sqrt{\frac{a}{b}})$$

$$26. y' = \frac{8}{x^5 \sqrt{1-x^2}}; \quad (0 < x < 1)$$

$$27. y' = \frac{a^2 + b^2}{(x+a)(x^2 + b^2)} \\ x > -a$$

$$28. y' = \frac{1}{x^3 + 1}; \quad x \neq -1$$

$$29. y' = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}$$

$$30. y' = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$(|x| < 1)$$

$$31. y' = \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}; \quad (|x| \neq 1)$$

$$32. y' = \operatorname{th}^3 x$$

$$33. y' = -\frac{2}{\operatorname{sh}^3 x}; \quad (x > 0)$$

$$34. y' = \frac{a + b \operatorname{ch} x}{b + a \operatorname{ch} x}$$

$$35. y' = \frac{1}{x^4 + 1} \quad 36. y' = -\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

Megoldások a paraméteres alakban adott függvényekkel kapcsolatosan

$$1. y' = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t \quad (0 < |t| < \pi)$$

$$y'' = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t}$$

$$2. y' = -\frac{1}{2}; \quad y'' = 0$$

$$3. y' = \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{tg} \left( t + \frac{\pi}{4} \right); \quad \left( t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

$$4. y' = \frac{b}{a} \operatorname{cth} t; \quad (|t| > 0)$$

$$5. y' = -e^{2at}; \quad y'' = 2e^{3at}$$

$$6. y' = -1 \quad (0 < x < 1); \quad y'' = 0$$

$$7. y' = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \quad (t \neq 0, 2\pi) \quad y'' = -\frac{1}{r(1 - \cos t)^2}$$

$$8. y' = \operatorname{tg} t \quad t \neq (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$y'' = \frac{1}{r t \cos^3 t}; \quad t \neq 0, \quad t \neq (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$9. y' = \frac{1}{2} \frac{t^2 + 1}{t}; \quad t \neq 0;$$

$$10. y' = \operatorname{sign} t \quad (0 < |t| < +\infty)$$

$$11. \quad y' = \sqrt[6]{\frac{(1 - \sqrt{t})^4}{t(1 - \sqrt{t})^3}}; \quad t > 0, \quad t \neq 1$$

Megoldások az implicit függvényekkel kapcsolatosan

$$1. \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 3y}{3y^2 - 3x}; \quad 2. \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{6xy + y^2 - 3}{3y^2 + 3x^2 + 3xy}$$

$$3. \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - cy}{y^2 - cx}; \quad 4. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2(\ln x - 1)}{x^2(\ln y - 1)}$$

$$5. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}; \quad 6. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + 2x^2y}{xy^2 + 2x^3} = \frac{y}{x}$$

$$7. \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y \ln y \sqrt{x^2 + y^2} + xy}{x \sqrt{x^2 + y^2} + y^2}$$

$$8. \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y^3(x^2y + 4)}{x^2(xy^3 - 6)}$$

Megoldások a logaritmikus differenciálás című részhez

$$1. \quad y' = (2x + 7)^{\frac{1}{2x+1}} \left[ \frac{2}{(2x+1)(2x+7)} - \frac{2 \ln(2x+7)}{(2x+1)^2} \right]$$

$$2. \quad y' = \frac{x^3 \sqrt{1 + \ln x}}{(1+x)^4} \left[ \frac{3}{x} + \frac{1}{2x + 2x \ln x} - \frac{4}{1+x} \right]$$

$$3. \quad y' = \frac{x^2 \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 3}} \left[ \frac{2}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x}{x^2 + 3} \right]$$

$$4. \quad y' = y \left[ \frac{3}{x} + \frac{x}{x^2 + 4} + \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x} \right]$$

$$5. \quad y' = \frac{2x^3 \sqrt{6x+1}}{\sqrt{3x^2+4x+4}} \left[ \frac{3}{x} + \frac{3}{6x+1} - \frac{3x+2}{3x^2+4x+4} \right]$$

$$6. \quad y' = y \left[ \frac{1}{2x} + \frac{1}{3} \frac{2x}{x^2+2} + \frac{1}{4} \frac{1+6x^2}{x+2x^3} \right]$$

Megoldások a differenciálhányados értéke a függvény adott pontjában című részhez

$$1. \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{6x(x^2+y^2)^2 - 52x^2y^2}{6y(x^2+y^2)^2 - 52x^2y} \Big|_P = \frac{98}{29}$$

$$2. \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{y^3(x^2y+4)}{x^2(xy^3-6)} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 1$$

Megoldások az érintő egyenes és normális egyenes egyenletének felírása című részhez

$$1. \quad y = -x + 2; \quad y = x$$

$$2. \quad y = x - 2; \quad y = -x$$

$$3. \quad y = \frac{3\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad y = -\frac{\sqrt{2}}{3}x + \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$4. \quad y = x - \frac{\sqrt{2}\pi}{2}; \quad y = -x + 2\sqrt{2}$$

$$5. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2t+1}{6(t^2-3t+2)} = \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \infty \text{ felé}$$

akkor ha  $t^2 - 3t + 2 \rightarrow 0$  felé.

Ennek alapján  $P_1(3, 7)$ ;  $P_2(4, 3)$ .

Megoldások a subtangens, subnormális című részhez

1.  $S_t = 1$ ;  $S_n = 16$ ;  $T = \sqrt{17}$   $N = 4\sqrt{17}$

2.  $S_t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $S_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $T = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ;  $N = \sqrt{\frac{3}{2}}$

3.  $S_t = \sqrt{3}$ ;  $S_n = \frac{\sqrt{3}}{12}$ ;  $T = \frac{1}{2}\sqrt{13}$ ;  $N = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{12}}$

4.  $S_t = \frac{1}{\ln 2}$ ;  $S_n = \frac{\ln 2}{16}$ ;  $T = \frac{1}{4 \ln 2} \sqrt{16 + (\ln 2)^2}$ ;

$N = \frac{1}{16} \sqrt{16 + (\ln 2)^2}$

5.  $S_t = 3\sqrt{2} - 4$ ;  $S_n = \sqrt{2}$ ;  $T = 2\sqrt{10 - 7\sqrt{2}}$ ;

$N = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

Megoldások az aszimptoták című részhez

1. nincs

2.  $x = 1$ ;  $y = 1$

3.  $x = 0$ ;  $x = 1$ ;  $y = 0$

4. nincs

5.  $x = 0$ ;  $y = x$

6.  $y = 1$

7.  $y = -\frac{1}{2}$ ;  $y = -2$

8.  $x = -\frac{n}{m}$ ;  $y = \frac{a}{m}$

Megoldások a szélsőértékszámítás című részhez

1.  $P_1 (0, 1)$  relatív maximum hely;  $P_2 (2, -\frac{1}{3})$  relatív minimum hely  
 $P_3 (1, \frac{1}{3})$  inflexiós pont
2.  $P_1 (2, -6)$  rel. min.;  $P_2 (0, -2)$  rel.max.;  $P_3 (1, -4)$  inflexiós pont
3.  $P_1 (0, 1)$  rel.max.;  $P_2 (-1, 0)$  rel.min.;  $P_3 (1, 0)$  rel.min.;  
 $P_4 (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9})$  inflexiós pont;  $P_5 (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9})$  inflexiós pont
4.  $P_1 (\sqrt[3]{2}, -\frac{3}{\sqrt[3]{4}})$  relatív minimum
5.  $P_1 (2\sqrt{2}, 2)$  rel.max.;  $P_2 (-2\sqrt{2}, -2)$  rel.min.;  
 $P_3 (0, 0)$  inflexiós pont
6.  $P_1 (-3, 3)$  rel.max.;  $P_2 (-1, 1)$  rel.min.;  $P_3 (-2, 2)$  inflexiós pont
7.  $P_1 (1, \frac{1}{2})$  rel.max.;  $P_2 (-1, -\frac{1}{2})$  rel.min.;  
 $P_3 (0, 0)$  inflexiós pont;  $P_4 (\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$  inflexiós pont;  
 $P_5 (-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$  inflexiós pont
8.  $P_1 (0, 0)$  rel.min.;  $P_2 (\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{4})$  inflexiós pont;  
 $P_3 (-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{4})$  inflexiós pont
9.  $P_1 (1, -1)$  rel.min.;  $P_2 (-1, 1)$  rel.max.;

$P_3(0, 0), P_4\left(\sqrt{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{4}\right), P_5\left(-\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{4}\right)$  inflexiós pontok

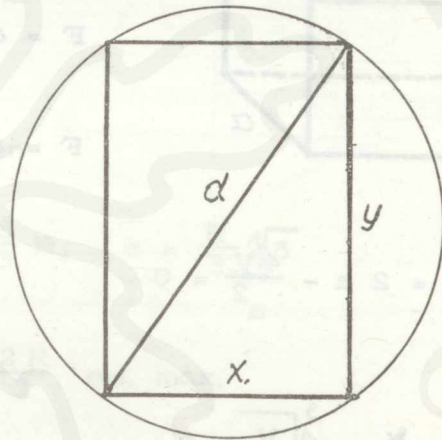
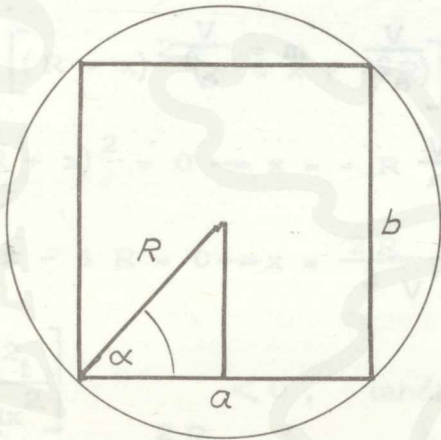
10.  $P_1(0, -1)$  rel.min.;  $P_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{8}{9}\right)$  inflexiós pont

11.  $t = 1$ -nél  $x = 1, y = 0$  rel.min. Inflexiós pont nincs

12.  $t = e$ -nél  $x = e, y = \frac{1}{e}$  rel.max.

$$\left. \begin{array}{l} t = e^{-\sqrt{2}} \text{-nél } x = -\sqrt{2} e^{-\sqrt{2}}, y = -\sqrt{2} e^{\sqrt{2}} \\ t = e^{\sqrt{2}} \text{-nél } x = \sqrt{2} e^{\sqrt{2}}, y = \sqrt{2} e^{-\sqrt{2}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{inflexiós} \\ \text{pontok} \end{array}$$

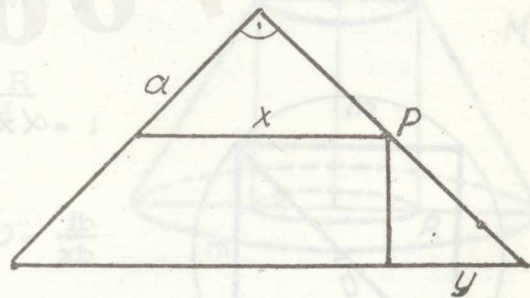
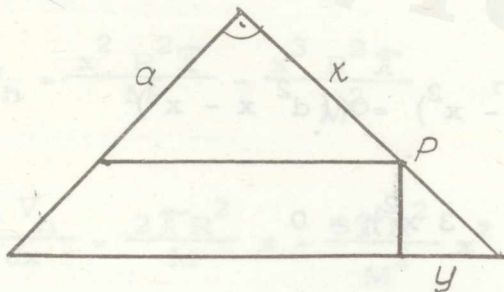
13.



$\alpha = 45^\circ$

$a = b = 2R \cos 45^\circ = \frac{2R}{\sqrt{2}} \quad x = \frac{d}{\sqrt{2}}; \quad y = \frac{d}{\sqrt{2}}$

14.

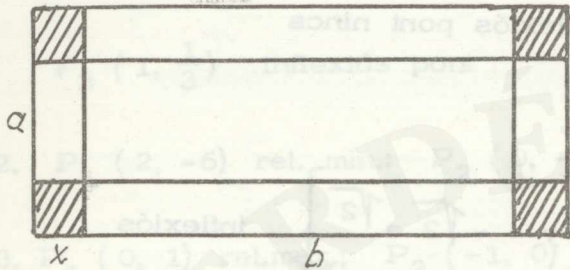


$x = \frac{a}{3}; \quad y = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

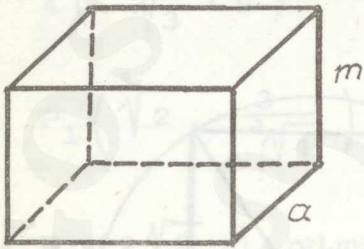
$x = \frac{a\sqrt{2}}{3}; \quad y = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

15.

$$x = \frac{b + a + \sqrt{b^2 - ab + a^2}}{6}$$



16.



$$F = a^2 + 4 a m \quad V = a^2 m$$

$$F = a^2 + 4 a \frac{V}{a^2} \quad m = \frac{V}{a^2}$$

$$F = a^2 + 4 \frac{V}{a}$$

$$\frac{dF}{da} = 2a - \frac{4V}{a^2} = 0$$

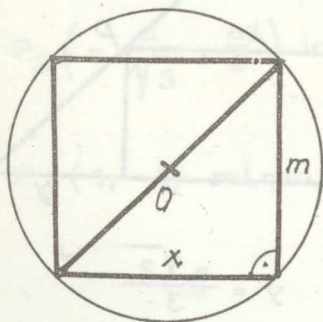
$$a = \sqrt[3]{2V}$$

$$m = \frac{V}{a^2} = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$$

$$\frac{a}{m} = 2$$

$$\frac{d^2F}{da^2} = 2 + \frac{8V}{a^3} \Big|_{a = \sqrt[3]{2V}} = 2 + \frac{8V}{2V} = 6 > 0$$

17.



$$t = \alpha x (d^2 - x^2) = \alpha (d^2 x - x^3)$$

$$\frac{dt}{dx} = \alpha (d^2 - 3x^2) = 0$$

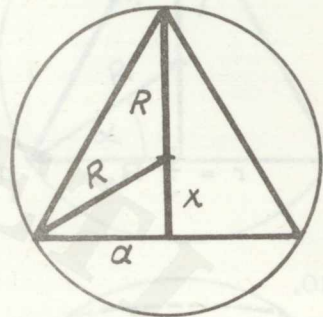
$$x = \frac{d}{\sqrt{3}}; \quad m = d \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\left[ \frac{d^2 t}{dx^2} \right]_{x = \frac{d}{\sqrt{3}}} = \alpha \left( -\frac{6d}{\sqrt{3}} \right) < 0 \quad \text{tehát} \quad x = \frac{d}{\sqrt{3}} \quad \text{rel. max.}$$

18.  $a^2 = R^2 - x^2 \quad m = R + x$

$$a = \sqrt{R^2 - x^2} \quad m^2 = (R + x)^2$$

$$t = \alpha 2 \sqrt{R^2 - x^2} (R + x)^2$$



$$\frac{dt}{dx} = \alpha \left[ 2 \frac{-2x}{2R^2 - x^2} (R + x)^2 + 2(R + x) 2\sqrt{R^2 - x^2} \right] = 0$$

$$\alpha \left[ (R + x)^2 (-6x + 4R) \right] = 0$$

$$(R + x)^2 = 0 \rightarrow x = -R \quad \text{lehetetlen}$$

$$6x - 4R = 0 \rightarrow x = \frac{2R}{3}, \quad m = \frac{5}{3}R, \quad a = \frac{R}{3}\sqrt{5}$$

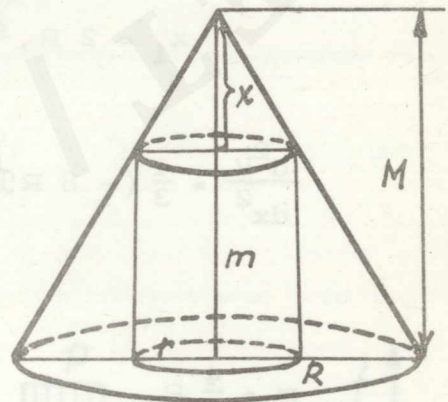
$$\left[ \frac{d^2 t}{dx^2} \right]_{x = \frac{2R}{3}} < 0, \quad \text{tehát} \quad x = \frac{2R}{3} \quad \text{rel. max.}$$

19.  $V_h = r^2 \pi m \quad x = M - m$

$$V_h = \frac{x^2 R^2}{M^2} \pi (M - x) \quad m = M - x$$

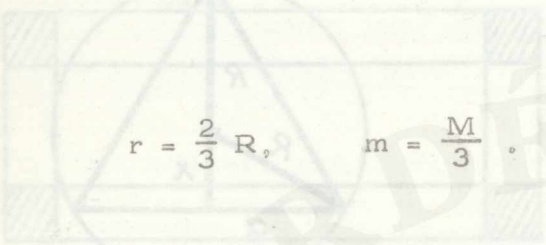
$$R : r = M : x$$

$$V_h = \frac{x^2 R^2 \pi}{M} - \frac{x^3 R^2 \pi}{M^2} \quad r = \frac{x R}{M}$$



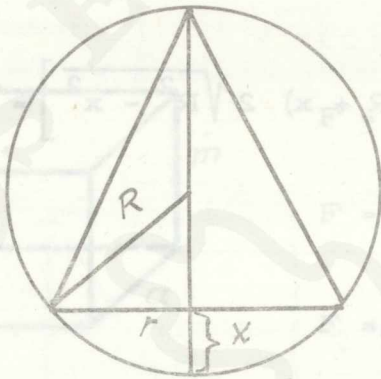
$$\frac{dV_h}{dx} = \frac{2\pi R^2}{M} x - \frac{3\pi R^2}{M^2} x^2 = 0$$

$$x \left( \frac{2 R^2 \pi}{M} - x \frac{3 R^2 \pi}{M^2} \right) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{2 M}{3} \end{cases}$$



$$r = \frac{2}{3} R, \quad m = \frac{M}{3}$$

20.



$$V_k = \frac{r^2 \pi m}{3} \quad m = 2 R - x$$

$$r = \sqrt{2 R x - x^2}$$

$$V_k = \frac{(2 r x - x^2) \pi (2 R - x)}{3}$$

$$V_k = \frac{4 R^2 \pi x - 4 R \pi x^2 + \pi x^3}{3}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{1}{3} (4 R^2 \pi - 2 x 4 R \pi + 3 \pi x^2) = 0$$

$$3 \pi x^2 - 8 R \pi x + 4 R^2 \pi = 0$$

$$3 x^2 - 8 R x + 4 R^2 = 0$$

$$x_1 = 2 R, \quad x_2 = \frac{2}{3} R$$

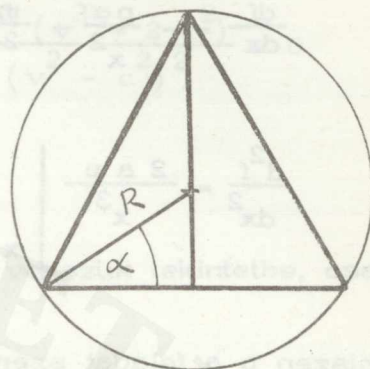
$$\left. \frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{1}{3} (-8 R \pi + 6 x \pi) \right|_{x_2 = \frac{2}{3} R} = \frac{1}{3} (-8 R \pi + 4 R \pi) < 0$$

$$m = \frac{4}{3} R, \quad r = \frac{2\sqrt{2}}{3} R$$

Más módon okoskodva:

$$V_k = \frac{R^2 \cos^2 \alpha \pi (R + R \sin \alpha)}{3}$$

$$r = R \cos \alpha, \quad m = R (1 + \sin \alpha)$$



$$21. \quad V_h = r^2 \pi m \quad r = \sqrt{2 R x - x^2}$$

$$m = 2 (R - x)$$

$$V_h = (2 R x - x^2) \pi 2 (R - x) =$$

$$= 4 R^2 \pi x - 6 R \pi x^2 + 2 \pi x^3$$

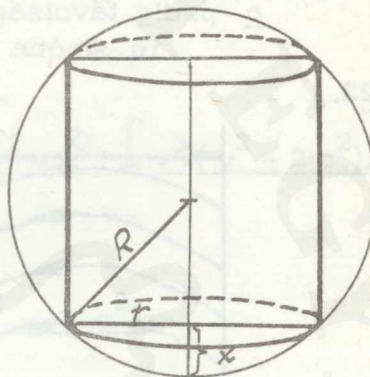
$$\frac{dV}{dx} = 4 R^2 \pi - 12 R \pi x + 6 \pi x^2 = 0$$

$$3 x^2 - 6 R x + 2 R^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 R \pm R \sqrt{3}}{3} = \begin{cases} \frac{3 R + R \sqrt{3}}{3} \\ \frac{3 R - R \sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -12 R \pi + 12 x \pi \Big|_{x = \frac{3 R - R \sqrt{3}}{3}} = -4 R \sqrt{3} < 0$$

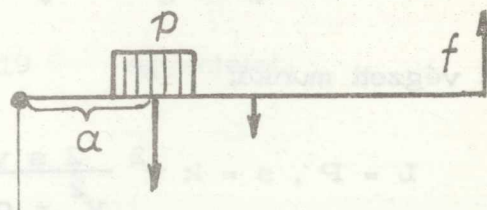
$$m = \frac{2 \sqrt{3} R}{3}, \quad r = \frac{R}{3} \sqrt{6}$$



22. Az emelőkre vonatkozó törvény-  
szerűség szerint:

$$f \cdot x = p a + x m \frac{x}{2}$$

$$f = \frac{p a}{x} + m \frac{x}{2}$$

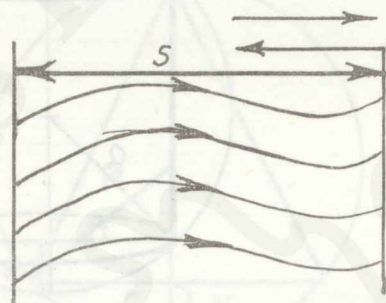


$$\frac{df}{dx} = -\frac{pa}{x^2} + \frac{m}{2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2ap}{m}}$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{2ap}{x^3} \Bigg|_{x = +\sqrt{\frac{2ap}{m}}} = \frac{2ap}{\left(\sqrt{\frac{2ap}{m}}\right)^3} > 0$$

hiszen  $p$  a feladat szerint súly, tehát  $p > 0$ ,  
 $a$  pedig távolság ezért  $a > 0$  szintén.

23.



A munkavégzés függ attól, hogy milyen egymáshoz viszonyított egyenletes sebességgel mozgó koordináta rendszerben nézzük.

Ebben a feladatban a vízhez képest evezünk, tehát a végzett munkát a vízhez rögzített koordináta rendszerben kell felírni. (Elhanyagoljuk azt a munkát, amelyet a folyó víz végez.)  
 A közegellenállási erő:

$$P = k v^2, \quad k \text{ arányossági tényező.}$$

A folyó ellenében a parthoz viszonyított sebesség:  $v - c$ .

A folyással azonos irányban:  $v + c$ .

A szükséges idő a folyó ellenében:  $t_f = \frac{s}{v - c}$ .

A szükséges idő a víz folyásának irányába:  $t_1 = \frac{s}{v + c}$ .

Az összes idő:  $t_f + t_1 = \frac{2sv}{v^2 - c^2}$ .

Az ut  $s = \frac{v \cdot 2sv}{v^2 - c^2} = \frac{2sv^2}{v^2 - c^2}$ .

A végzett munka:

$$L = P \cdot s = k v^2 \frac{2sv^2}{v^2 - c^2} = 2k \frac{v^4}{v^2 - c^2}$$

$$\frac{dL}{dv} = 2k \frac{4v^3(v^2 - c^2) - 2vv^4}{(v^2 - c^2)^2} = 4k \frac{v^3(v^2 - 2c^2)}{(v^2 - c^2)^2} = 0$$

$$v_1 = 0 \quad \text{vagy} \quad v_2 = \sqrt{2}c$$

$v_1 = 0$  sebességet, mint érdektelen esetet nem vesszük tekintetbe, csak

a  
 $v_2 = \sqrt{2}c$  sebességet.

Megnézzük, hogy  $v_2$  mellett  $L$ -re minimum adódik-e?

$$\frac{d^2L}{dv^2} = \frac{[3v^2(v^2 - 2c^2) + 2v^3](v^2 - c^2)^2 - 4v(v^2 - c^2)[v^3(v^2 - 2c^2)]}{(v^2 - c^2)^4} =$$

$$= \frac{(5v^4 - 6v^2c^2)(v^2 - c^2) - 4v^3(v^2 - 2c^2)}{(v^2 - c^2)^3} =$$

$$= \frac{v^6 - 3v^4c^2 + 6v^2c^4}{(v^2 - c^2)^3} \Bigg|_{v = \sqrt{2}c} = \frac{8c^6 - 12c^6 + 12c^6}{c^6} > 0$$

(Helykimélés céljából  $L$ -nek  $4k$  tényezőjét, mint pozitív állandót a második differenciálhányados képzésénél elhagytuk.)

24. A szélsőérték helyek:  $P_1(4, -53)$

$P_2(-2, 55)$ .

A szélsőérték pontokat összekötő egyenes:

$$y = -18x + 19$$

Az inflexió pont:  $P_3(1, 1)$  kielégíti az

$$y = -18x + 19 \quad \text{egyenletet.}$$

25. A kör középpontja:  $C(-1, 1)$ .

A  $P_1(1, 3)$  ponton átmenő egyenesek egyenlete:

$$y - 3 = m(x - 1); \quad m \text{ itt paraméter.}$$

A kör és az egyenes metszéspontját az

$$\left. \begin{array}{l} y = m(x - 1) + 3 \\ (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 16 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja.

$$x_{1,2} = \frac{-1 + m^2 - 2m + 2\sqrt{3m^2 + 2m + 3}}{1 + m^2}$$

$$y_{1,2} = \frac{m^2 + 2m(\sqrt{3m^2 + 2m + 3} - 1)}{1 + m^2}$$

$P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  pontok távolságának négyzete:

$$d^2 = \frac{12m^2 + 8m + 12}{1 + m^2}$$

Ennek a  $d^2$  függvénynek kell a szélsőértékét kiszámítani.

$$\frac{d}{dm} \frac{d^2}{dm} = \frac{-8m^2 + 8}{(1 + m^2)^2} = 0 \rightarrow m = \pm 1$$

$$\frac{d^2 d^2}{dm^2} = \frac{-16m(1+m^2)^2 - 2(1+m^2) \cdot 2m(8-8m^2)}{(1+m^2)^4} =$$

$$= \frac{-16m(1+m^2) - 32m(1-m^2)}{(1+m^2)^3} =$$

$$= -\frac{16m[1+m^2+2(1-m^2)]}{(1+m^2)^3} =$$

$$= - \frac{16 m (3 - m^2)}{(1 + m^2)^3}$$

$$\left. \frac{d^2 d^2}{d m^2} \right|_{m=1} = - \frac{32}{8} < 0, \quad \text{tehát } m = 1\text{-nél maximális a távolság,}$$

vagyis éppen az átmérő

$$\left. \frac{d^2 d^2}{d m^2} \right|_{m=-1} = - \frac{-32}{8} > 0, \quad \text{tehát } m = -1\text{-nél minimális a két pont}$$

távolsága.

A legrövidebb hur hosszúsága:  $\overline{P_1 P_2} = 4\sqrt{2}$

A legrövidebb hur egyenlete:  $y - 3 = - (x - 1)$ .

Megoldások a görbületi kör és evoluta című részhez

1.  $x_0 = 1$ ;  $y_0 = -\frac{11}{6}$ ;  $r = \frac{1}{6}$

2.  $x_0 = -4$ ;  $y_0 = \frac{5}{3}$ ;  $r = \frac{5\sqrt{10}}{3}$

3.  $x_0 = 0$ ;  $y_0 = \frac{1}{2}$ ;  $r = \frac{1}{2}$ ;  $P_1(0, 1)$ -ban

$x_0 = 2$ ;  $y_0 = \frac{1}{6}$ ;  $r = \frac{1}{2}$ ;  $P_2(2, -\frac{1}{3})$ -ban

4.  $x_0 = -3$ ;  $y_0 = \frac{5}{2}$ ;  $r = \sqrt{\frac{125}{2}}$

5.  $x_0 = 2$ ;  $y_0 = -\frac{35}{6}$ ;  $r = \frac{1}{6}$

6.  $x_0 = 2$ ;  $y_0 = 3$ ;  $r = \sqrt{8}$

7.  $x_0 = \frac{101}{27}$ ;  $y_0 = -\frac{49}{18}$ ;  $r = \frac{20\sqrt{10}}{27}$

8.  $x_0 = 1$ ;  $3 = m(x - y_0) - 2$ ;  $r = 3$

$$9. \quad x_0 = \lim_{y \rightarrow 0} \left[ x - \frac{1 + \frac{16x^2}{81y^2}}{\frac{36y^2 + 16x^2}{81y^3}} \cdot \frac{4x}{9y} \right] =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \frac{3}{2} \sqrt{4 - y^2} - \frac{\frac{81y^2 + 144 - 36y^2}{81y^2}}{\frac{36y^2 + 144 - 36y^2}{81y^3}} \cdot \frac{2\sqrt{4 - y^2}}{3y} \right] =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \frac{3}{2} \sqrt{4 - y^2} - \frac{(45y^2 + 144) \sqrt{4 - y^2}}{216} \right] =$$

$$= 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

$$y_0 = \lim_{y \rightarrow 0} \left[ y + \frac{1 + \frac{16x^2}{81y^2}}{\frac{36y^2 + 16x^2}{81y^3}} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left[ y - \frac{y(45y^2 + 144)}{144} \right] = 0$$

$$r = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\left[ 1 + \frac{16x^2}{81y^2} \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{36y^2 + 16x^2}{81y^3}} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(45y^2 + 144)^{\frac{3}{2}}}{1296} = \frac{1728}{1296} = \frac{4}{3}$$

$$10. \quad x_0 = \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \sqrt{9 - y^2} - \frac{1 + \frac{9 - y^2}{y^2}}{\frac{2y^2 - 9}{y^3}} \cdot \frac{\sqrt{9 - y^2}}{y} \right] =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \sqrt{9 - y^2} - \frac{9\sqrt{9 - y^2}}{2y^2 - 9} \right] = 3 + 3 = 6$$

$$y_0 = \lim_{y \rightarrow 0} \left[ y + \frac{1 + \frac{9 - y^2}{y^2}}{\frac{2y^2 - 9}{y^3}} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left[ y + \frac{9y}{2y^2 - 9} \right] = 0$$

$$r = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\left[ 1 + \frac{9 - y^2}{y^2} \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \frac{2y^2 - 9}{y^3} \right|} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{27}{y}}{\left| \frac{2y^2 - 9}{y^3} \right|} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{27}{\left| 2y^2 - 9 \right|} = \frac{27}{9} = 3$$

$$11. \quad x_0 = -\frac{10}{4}; \quad y_0 = \frac{3}{4}; \quad r = \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

$$12. \quad x_0 = \frac{13}{2}; \quad y_0 = 7; \quad r = \frac{\sqrt{125}}{2}$$

$$13. \quad x_0 = 0; \quad y_0 = -6; \quad r = 8$$

$$14. \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 0; \quad r = 1$$

$$15. \quad x_0 = 3\sqrt{2}; \quad y_0 = .3\sqrt{2}; \quad r = 4,5$$

$$16. \quad x_0 = 1; \quad y_0 = \sqrt{3}; \quad r = \frac{2\pi}{3}; \quad t = \frac{\pi}{3} \text{ -nál}$$

$$x_0 = \sqrt{2}; \quad y_0 = \sqrt{2}; \quad r = \frac{\pi}{2}; \quad t = \frac{\pi}{4} \text{ -nél}$$

$$17. \quad k^2 = \frac{4}{27} (h - 2)^3; \quad 18. \quad 2 \sqrt[3]{\frac{h^2}{4}} + \sqrt[3]{4k^2} = 1.$$

19. A legalább másodrendű érintkezéshez kell, hogy az egyenes  $y(x)$  és a görbe  $f(x)$   $x = x_0$  pontjára a következő feltételek fennálljanak:

$$y(x_0) = f(x_0); \quad y'(x_0) = f'(x_0) \quad \text{és} \quad y''(x_0) = f''(x_0).$$

Ezekből a feltételekből kapjuk a következő háromismeretlenes egyenletrendszert:

$$\left. \begin{aligned} x_0^3 - 3x_0^2 + 2 &= kx_0 + b \\ 3x_0^2 - 6x_0 &= k \\ 6x_0 - 6 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Ezen egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy

$$x_0 = 1$$

$$k = -3$$

$$b = 3$$

Ezekkel az egyenes egyenlete  $x_0 = 1$ -ben

$$y = -3(x - 1).$$

Megoldások a hatványsorok című részhez

$$1. \quad \text{tg } x = 0 + x + \frac{0}{2!} x^2 + \frac{2}{3!} x^3 + \frac{0}{4!} x^4 + \frac{16}{5!} x^5$$

2.  $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots$

3.  $\cos 2x = 1 - \frac{4}{2!} x^2 - \frac{16}{4!} x^4 - \dots$

4.  $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$

5.  $\operatorname{ch}(x + 2x^2) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{12}{3!} x^3 + \frac{49}{4!} x^4 + \frac{40}{5!} x^5 + \dots$

6.  $\cos 2x = -1 + \frac{4}{2!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{16}{4!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 \pm \dots$

7.  $\operatorname{tg} x = 1 + \frac{2}{1!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{2!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{16}{3!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots$

8.  $\ln x = 0 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \pm \dots$

Megoldások a B-L'Hospital című részhez

1.  $\frac{1}{2}$       2.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$       3.  $-\frac{3}{5}$       4.  $\frac{7}{2}$

5.  $\frac{1}{2}$       6.  $-\frac{1}{2}$       7. 2      8.  $\frac{1}{8}$

9. a      10. 0      11.  $+\infty$

Megoldások a vektoralgebra című részhez

1.  $\vec{BA} = (1, -3, 10); |\vec{BA}| = \sqrt{110}; (\vec{BA})^\circ = \frac{1}{\sqrt{110}}, \frac{-3}{\sqrt{110}}, \frac{10}{\sqrt{110}}$

2.  $ABC\Delta$  területe =  $\frac{1}{2} \sqrt{266}$  területegység

3.  $d = -3, \frac{57}{29}, \frac{78}{29}$

4.  $\vec{c} = -\frac{25}{\sqrt{897}} \vec{i} + \frac{130}{\sqrt{897}} \vec{j} - \frac{70}{\sqrt{897}} \vec{k}$

5.  $\vec{P}_m = (\vec{s}^0 \cdot \vec{P}) \cdot \vec{s}^0 = -\frac{108}{38} \vec{i} + \frac{270}{38} \vec{j} + \frac{162}{38} \vec{k}$

6. a/  $\vec{a} + \vec{b} = -2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ ;      b/  $\varphi = 149^\circ 50'$

c/  $\text{Ter. } \square = \sqrt{650} \text{ területegység}$ ;      d/  $V = 82 \text{ köbt. egység}$

7.  $\vec{i} \left(1, \frac{2}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ ;       $\vec{j} (1, 0, -1)$ ;       $\vec{k} \left(1, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

8.  $\vec{a} = -2\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$

9.  $\vec{c} = \pm |\vec{a}| (\vec{a} \times \vec{b})^0 = (\pm 2, \pm 3, \pm 6)$

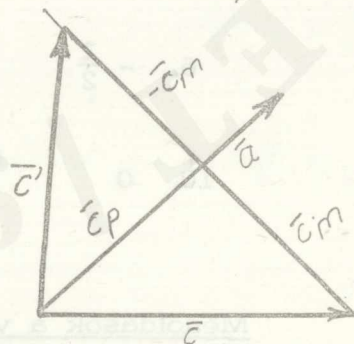
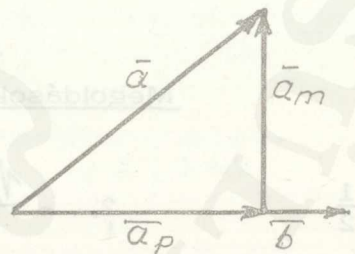
10. a/  $\vec{a}_p = (\vec{b}^0 \cdot \vec{a}) \vec{b}^0 = \left(-\frac{6}{25}, \frac{0}{25}, 0\right)$

$\vec{a}_m = \vec{a} - \vec{a}_p = \left(\frac{56}{25}, \frac{42}{25}, 1\right)$

b/  $\vec{c}' = \vec{c}_p - \vec{c}_m = \vec{c}_p - (\vec{c} - \vec{c}_p) =$

$= 2\vec{c}_p - \vec{c}$

$\vec{c}' = \left(\frac{22}{9}, \frac{58}{9}, \frac{11}{9}\right)$



Megoldások az analitikus síkgeometria című részhez

Áttérés D-féle koordinátákról polárkoordinátákra és viszont

1.  $r = \sqrt{17}$

2.  $r = \sqrt{41}$

3.  $r = \sqrt{113}$

$$\varphi = 194^{\circ}10'$$

$$\varphi = 141^{\circ}23'$$

$$\varphi = 48^{\circ}49'$$

$$4. \quad x = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$5. \quad x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$6. \quad x = -3,564$$

$$7. \quad x = 0,733$$

$$y = -\frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$y = 1,816$$

$$y = 1,860$$

Két pont távolsága és az általuk meghatározott egyenes hajlásszöge

$$1. \quad d = \sqrt{13}$$

$$2. \quad d = \sqrt{20}$$

$$3. \quad d = \sqrt{40}$$

$$\varphi = 56^{\circ}19'$$

$$\varphi = 63^{\circ}26'$$

$$\varphi = 71^{\circ}40'$$

Osztópontok koordinátái

$$1. \quad a/ \quad P\left(3; -\frac{5}{2}\right)$$

$$2. \quad a/ \quad P\left(\frac{1}{2}; -7\right)$$

$$3. \quad a/ \quad P\left(-2; \frac{11}{2}\right)$$

$$b/ \quad P\left(\frac{23}{7}; -\frac{12}{7}\right)$$

$$b/ \quad P\left(\frac{13}{5}; -\frac{29}{5}\right)$$

$$b/ \quad P(-3; 5)$$

Területszámítás összrendezőkkal

$$1. \quad t = 27 \text{ t. e.}$$

$$2. \quad t = \frac{17}{2} \text{ t. e.}$$

$$3. \quad t = 8 \text{ t. e.}$$

$$4. \quad t = 19,5 \text{ t. e.}$$

$$5. \quad t = 41,5 \text{ t. e.}$$

Descartes-féle koordináta transzformációk

$$1. \quad P^+(5, 11)$$

$$2. \quad P^+(-5, 2)$$

$$3. \quad P$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3 - 5\sqrt{3}}{2} \\ y = -\frac{5 + 3\sqrt{3}}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3 - 5\sqrt{3}}{2} \\ y = -\frac{5 + 3\sqrt{3}}{2} \end{array} \right.$$

Egyenes az analitikus geometriában

$$1. \quad p = \frac{7}{\sqrt{20}}$$

$$\varphi = 296^{\circ}34'$$

$$d = \frac{13}{\sqrt{20}}$$

2.  $p = 1$        $\alpha = 216^{\circ}54'$        $d = \frac{22}{5}$

3.  $p = \frac{15}{\sqrt{13}}$        $\alpha = 236^{\circ}24'$        $d = \frac{39}{\sqrt{13}}$

4.  $p = \frac{2}{\sqrt{10}}$        $\alpha = 71^{\circ}37'$        $d = 0$

5.  $p = \frac{8}{5}$        $\alpha = 143^{\circ}6'$        $d = \frac{11}{5}$

6.  $p = \frac{5}{\sqrt{65}}$        $\alpha = 29^{\circ}42'$        $d = \frac{10}{\sqrt{65}}$

7.  $M\left(\frac{1}{2}; -5\right)$   
 $\alpha = 36^{\circ}2'$

8.  $M\left(\frac{95}{74}; \frac{31}{74}\right)$   
 $\alpha = 74^{\circ}53'$

9.  $M\left(-\frac{11}{34}; -\frac{32}{17}\right)$   
 $\alpha = 51^{\circ}33'$

10.  $M\left(\frac{6}{23}; -\frac{24}{23}\right)$   
 $\alpha = 70^{\circ}4'$

11.  $d = \frac{2,5}{\sqrt{34}}$

12.  $d = \frac{5}{\sqrt{117}}$

13.  $\left. \begin{aligned} x &= -5 + 3t \\ y &= 7 - 5t \end{aligned} \right\}$

14.  $\left. \begin{aligned} x &= 2 - 5t \\ y &= 5 + 3t \end{aligned} \right\}$

15.  $\left. \begin{aligned} x &= -3 + 2t \\ y &= 5 - 9t \end{aligned} \right\}$

16.  $\left. \begin{aligned} x &= -4 + 6t \\ y &= -7 + 10t \end{aligned} \right\}$

17.  $4x - 5y = -23;$

$-\frac{x}{23} + \frac{y}{5} = 1$

$-\frac{4x}{\sqrt{41}} + \frac{5y}{\sqrt{41}} = \frac{23}{\sqrt{41}}$

18.  $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$  tehát nincsenek egy egyenesen .

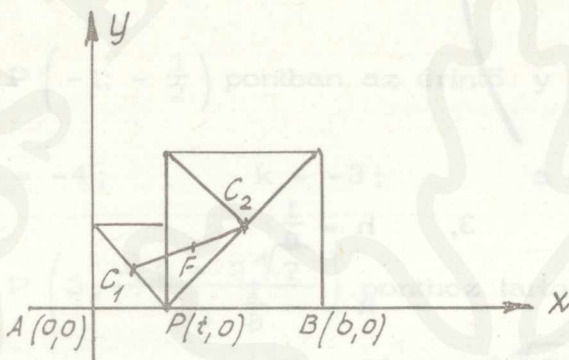
19.  $y = -4x + 6$  ;  $P_1 P_2 P_3 \Delta$  ter. = 5 ter. e.

$M(-2; 1)$  ;  $S\left(\frac{7}{3}; 0\right)$

20.

$C_1\left(\frac{t}{2}; \frac{t}{2}\right)$

$C_2\left(\frac{t+b}{2}; \frac{b-t}{2}\right)$



A felezőpont koordinátái

$F\left(\frac{\frac{t+b}{2} + \frac{t}{2}}{2}; \frac{\frac{b-t}{2} + \frac{t}{2}}{2}\right)$

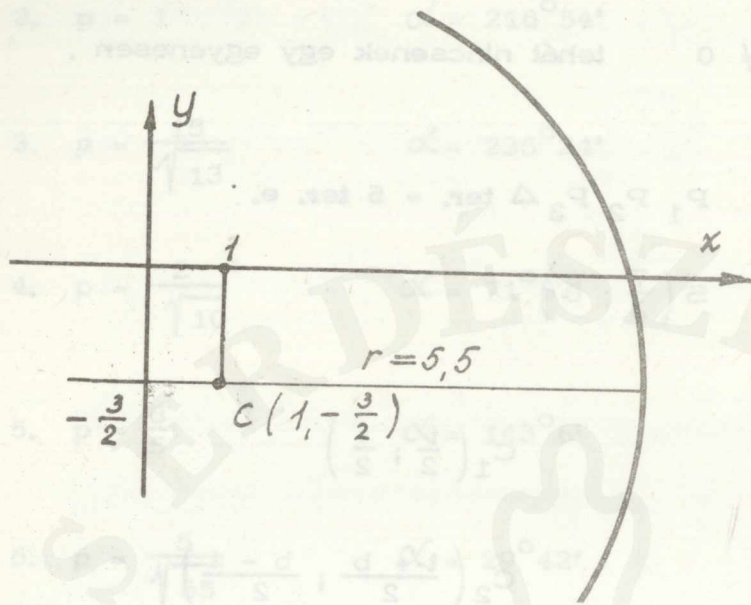
egyszerűsítve

$F\left(\frac{b}{4} + \frac{t}{2}; \frac{b}{4}\right)$

A felezőpontok helye  $\overline{AB}$ -vel párhuzamosan  $\frac{\overline{AB}}{4}$  távolságra haladó egyenes lesz, amelyre áll, hogy

$\frac{\overline{AB}}{4} \leq x \leq \frac{3 \overline{AB}}{4}$

Másodrendű alakzatok



1.  $h = 1$

$k = -\frac{3}{2}$

$r = \frac{\sqrt{31}}{2} \approx 5,5$

2.  $h = 1$

$k = -2$

$r = 3$

3.  $h = \frac{1}{8}$

$k = -\frac{1}{8}$

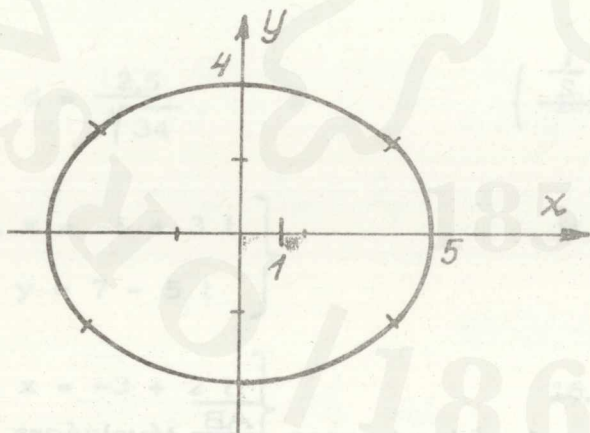
$r = \frac{97}{32}$

4.  $h = -1$

$k = 2$

$a = 5$

$b = 4$



$$P \left\{ \begin{array}{l} 2; \\ \frac{26}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{array} \right\}$$

$$P \left( 2; \frac{26}{5} \right)$$

pontban az érintő  $3x + 5y + 32 = 0$ .

5.  $h = 3; \quad k = -1; \quad a = 3; \quad b = \sqrt{5}$

$P \left( 2; \frac{-3 + 2\sqrt{10}}{3} \right)$  -ben az érintő

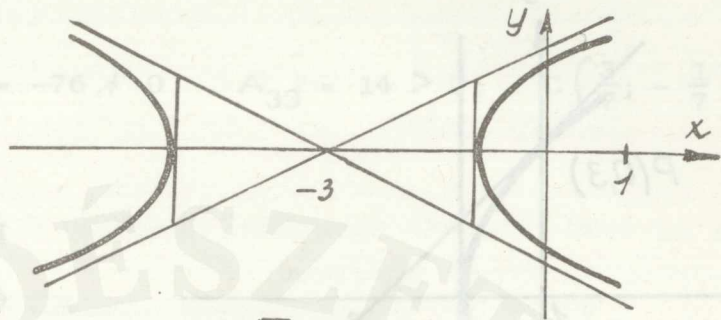
$$-5x + 6\sqrt{10}y - 30 + 6\sqrt{10} = 0.$$

6.  $h = -3$

$k = 0$

$a = 2$

$b = 1$



$P(1; \pm\sqrt{3})$ -ban az érintő  $x \pm y\sqrt{3} + 2 = 0$ .

7.  $h = 2;$

$k = -3;$

$a = 2;$

$b = \sqrt{5}$

$P(-1; -\frac{1}{2})$  pontban az érintő  $y = -\frac{3}{2}x - 2$ .

8.  $h = -4;$

$k = -3;$

$a = 6;$

$b = 4$

$P(3; \frac{-9 + 2\sqrt{7}}{3})$  ponthoz tartozó érintő

$$14x - 3\sqrt{7} - 16 - 9\sqrt{7} = 0.$$

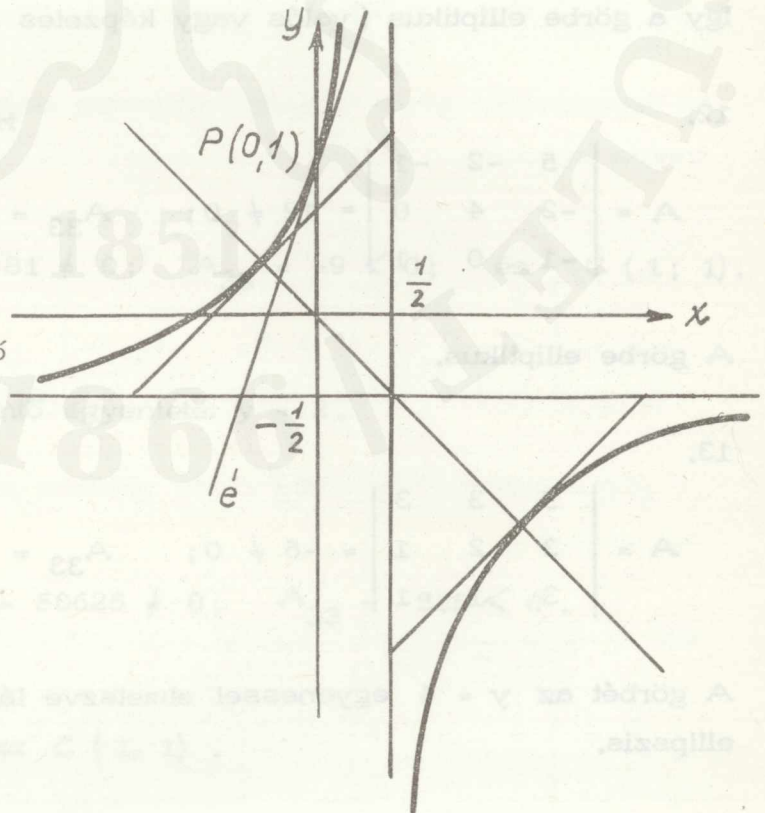
9.  $h = \frac{1}{2}$

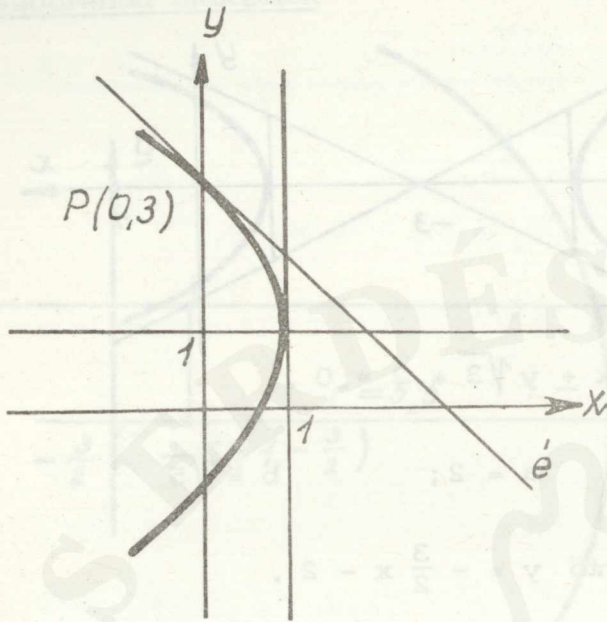
$k = -\frac{1}{2}$

$a^2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1,2$

$P(0; 1)$  pontjában az érintő

$y = 3x + 1.$





10.  $h = 1$

$k = 1$

$p = 2$

$P(0; 3)$  pontjában az érintő  $y = -x + 3$

11.

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & -9 \end{vmatrix} = -81 \neq 0; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9 > 0; \quad C(1, -1).$$

Igy a görbe elliptikus (valós vagy képzetes ellipszis).

12.

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0; \quad A_{33} = 16 > 0; \quad C\left(\frac{2}{8}; \frac{1}{8}\right).$$

A görbe elliptikus.

13.

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0; \quad A_{33} = 1 > 0; \quad C(-3; 4).$$

A görbét az  $y = 4$  egyenessel elmetszve látjuk, hogy a görbe valós ellipszis.

14.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -76 \neq 0; \quad A_{33} = 14 > 0; \quad C\left(\frac{3}{7}; -\frac{1}{7}\right).$$

A görbe valós ellipszis.

15.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & -7 \end{vmatrix} = -9 \neq 0; \quad A_{33} = 1 > 0; \quad C(-1; -1)$$

Valós ellipszis. P (2; -1)-ben az érintő egyenes egyenlete:

$$3x - 6y - 12 = 0.$$

16.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0; \quad A_{33} = 8 > 0; \quad C\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right).$$

A görbe elliptikus.

17. A görbe hiperbola, mert

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -4 & 7 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = -81 \neq 0; \quad A_{33} = -9 < 0; \quad \text{és} \quad C(1; 1).$$

P (5; 2) pontjában az érintő egyenlete:  $y = 2$ .

18.

$$A = \begin{vmatrix} 7 & 8 & -7 \\ 8 & -23 & -8 \\ 7 & -8 & -218 \end{vmatrix} = 50625 \neq 0; \quad A_{33} = -225 < 0.$$

A görbe hiperbola, centruma C (1, 1).

19.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 12 \\ 4 & 12 & 39 \end{vmatrix} = -184 \neq 0; \quad A_{33} = -8 < 0.$$

Az egyenlet hiperbola egyenlete. Centruma:  $C(-4, 0)$ ,  $P(0; -12 + \sqrt{105})$  pontjában az érintő egyenlete:

$$(-32 + 3\sqrt{105})x + \sqrt{105}y - 105 + 12\sqrt{105} = 0.$$

20.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 16 \neq 0; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0; \quad C(1, 1)$$

$$P\left(2; \frac{3}{4}\right) \text{ pontban az érintő: } 7x - 4y - 11 = 0.$$

21.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{33} = 0.$$

A másodrendű görbe elfajuló, mégpedig párhuzamos egyenespár, vagy kettős egyenes.

22.

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

A görbe elfajuló, mégpedig valós pontban metsző ( $P(-1; 1)$ ) képzetes egyenespár.

23.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{33} = 0.$$

A görbe párhuzamos egyenespár, vagy kettős egyenes.

$$24. \quad A = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & 6 & -4 \\ \frac{3}{2} & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{33} = -4 < 0; \quad C(-4; -1).$$

Az egyenlet valós metsző egyenespárt határoz meg.

$$25. \quad A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0; \quad A_{33} = 0.$$

Az egyenlet parabola egyenlete.

$$26. \quad A = \begin{vmatrix} 9 & +12 & -20 \\ +12 & 16 & 15 \\ -20 & 15 & 0 \end{vmatrix} = -3200 \neq 0; \quad A_{33} = 0.$$

Az egyenlet parabola egyenlete.

$$27. \quad A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = -12 - 4\lambda + 8 = 0, \quad \text{amiből } \lambda = -1.$$

Mivel  $A_{33} = 4 > 0$  az elfajuló másodrendű görbe valós pontban metsző képzetes egyenespár.

$$28. \quad A = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 4 & \frac{\lambda}{2} \\ 1 & \frac{\lambda}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \lambda^2 - 4 = 0, \quad \text{ebből } \lambda_{1,2} = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Mindkét  $\lambda$  értékre  $A_{33} < 0$  is teljesül.

$$a/ \lambda_1 = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{-t véve a centrum koordinátáira } C \left( 1; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

adódik.

Megkeressük az egyeneseket.

Kiszűrjük az egyenletből az elsőfoku tagokat a következő transzformációval

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi + 1 \\ y &= \eta - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} (\xi + 1)^2 + \frac{8}{\sqrt{3}} (\xi + 1) \left( \eta - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 4 \left( \eta - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \\ + 2 (\xi + 1) + \frac{4}{\sqrt{3}} \left( \eta - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

A kijelölt műveleteket és összevonásokat elvégezve marad

$$4\eta^2 + \frac{8}{\sqrt{3}}\xi\eta + \xi^2 = 0$$

$\eta$ -ra megoldva

$$\eta_{1,2} = \frac{-\frac{8}{\sqrt{3}}\xi \pm \sqrt{\frac{64}{3}\xi^2 - \frac{16}{3}\xi^2}}{8} = \frac{-\frac{8}{\sqrt{3}}\xi \pm \frac{4}{\sqrt{3}}\xi}{8}$$

$$\eta_1 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\xi; \quad \eta_2 = -\frac{3}{2\sqrt{3}}\xi$$

$\xi = x - 1$  helyettesítést elvégezve és  $y = \eta - \frac{\sqrt{3}}{2}$ -be téve

$$y = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(x - 1) - \frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}x - \frac{2}{2\sqrt{3}}$$

$$y = -\frac{3}{2\sqrt{3}}(x - 1) - \frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

b/  $\lambda_2 = -\frac{4}{\sqrt{3}}$  értéknél  $C\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

A centrum koordinátáinak felhasználásával a transzformációs képletek a következők:

$$x = \xi + 1$$

$$y = \eta + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Az a/ részben vázolt módon az egyenesekre

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} x \quad \text{és} \quad y = \frac{x-1}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2\sqrt{3}} \quad \text{egyenletek adódnak.}$$

29. A  $\left. \begin{array}{l} 3x - 4y = 25 \\ 5x + 12y = 65 \\ 8x + 15y = -85 \end{array} \right\}$  egyenesek által alkotott háromszögnél,

a/  $A(-95; 45); B\left(\frac{5}{11}; -\frac{65}{11}\right); C\left(10; \frac{5}{4}\right)$ .

b/ 588,1 területegység

c/ félkerület 117 hosszegység és 588,1 területegység mellett a beírt kör sugara  $r = 5,02$  hosszegység  $\left(r = \frac{T}{s}\right)$ .

d/ A háromszög köré írt kör sugara:

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4T} = 62,82 \quad \text{hosszegység.}$$

e/ A háromszög súlypontjának koordinátái  $S(-28,2; 12,7)$ .

f/ A háromszög magasságpontjának koordinátái  $M(-20; -55)$ .

Az  $\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ -3x + 4y = -12 \\ 2x - 6y = -12 \end{array} \right\}$  egyenletekkel meghatározott háromszögnél.

a/  $P_1(0; 2); P_2(12; 6); P_3\left(\frac{20}{7}; -\frac{6}{7}\right)$

b/  $\frac{32}{7}$  területegység .

c/  $r = \frac{T}{s} = \frac{448}{1365}$  hosszegység .

d/ A háromszög köré írt kör sugara:  $R = \frac{10 \cdot \sqrt{20}}{7}$  e .

e/ A háromszög súlypontjának koordinátái:  $S \left( \frac{104}{21} ; \frac{50}{21} \right)$  .

f/ A háromszög magasságpontjának koordinátái:  $M \left( \frac{24}{7} ; -\frac{18}{7} \right)$  .

30. Az  $A (1; 13)$ ;  $B (11; 3)$ ;  $C (13; 9)$  pontok által meghatározott kör egyenlete

$$(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 50 .$$

Ezen a körön a  $D (7; 1)$  pont rajta van és az  $E (4; 15)$  nincs.

31.  $(x - 41)^2 + (y - 41)^2 = 41^2$

$$(x - 185)^2 + (y - 185)^2 = 185^2$$

32.  $(x - 5)^2 + (y - \sqrt{50})^2 = 50$

33.  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$

34.  $r = 5$  hosszegység

35.  $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 16$

36.  $Q_1 \left( \frac{21 - 5\sqrt{129}}{29} ; \frac{9 + 2\sqrt{129}}{29} \right)$

$$Q_2 \left( \frac{21 + 5\sqrt{129}}{29} ; \frac{9 - 2\sqrt{129}}{29} \right)$$

37.  $r_1 = 2\sqrt{2}$ ;  $r_2 = 4\sqrt{2}$

38. A parabola csúcspontja  $C (2; -1)$  .

Analitikus térgeometria

Megoldások a térbeli egyenessel kapcsolatosan

$$1. \left. \begin{aligned} x_1 &= 2 + 3t \\ x_2 &= -3 - t \\ x_3 &= 5 + 2t \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x_1 &= 2 + \frac{3}{\sqrt{14}}s \\ x_2 &= -3 - \frac{1}{\sqrt{14}}s \\ x_3 &= 5 + \frac{2}{\sqrt{14}}s \end{aligned} \right\}$$

$$\vec{r} = (2 + 3\lambda) \vec{i} + (-3 - \lambda) \vec{j} + (5 + 2\lambda) \vec{k}$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= -\frac{1}{3}x_1 - \frac{7}{3} \\ x_3 &= \frac{2}{3}x_1 + \frac{11}{3} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= -7 \\ 2x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned} \right\}$$

$$2. \left. \begin{aligned} x_1 &= -2 + 3t \\ x_2 &= 3 + 2t \\ x_3 &= -4 + t \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x_1 &= -2 + \frac{3}{\sqrt{14}}s \\ x_2 &= 3 + \frac{2}{\sqrt{14}}s \\ x_3 &= -4 + \frac{1}{\sqrt{14}}s \end{aligned} \right\}$$

$$\vec{r} = (-2 + 3\lambda) \vec{i} + (3 + 2\lambda) \vec{j} + (-4 + \lambda) \vec{k}$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \frac{2}{3}x_1 + \frac{13}{3} \\ x_3 &= \frac{1}{3}x_1 - \frac{10}{3} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= -13 \\ x_2 + 2x_3 &= 11 \end{aligned} \right\}$$

$$3. \left. \begin{aligned} x_1 &= 1 + 2t \\ x_2 &= 7 - 4t \\ x_3 &= -5 + 3t \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x_1 &= 1 + \frac{2}{\sqrt{29}}s \\ x_2 &= 7 - \frac{4}{\sqrt{29}}s \\ x_3 &= -5 + \frac{3}{\sqrt{29}}s \end{aligned} \right\}$$

$$\vec{r} = (1 + 2\lambda) \vec{i} + (7 - 4\lambda) \vec{j} + (-5 + 3\lambda) \vec{k}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = -2x_1 + 9 \\ x_3 = \frac{3}{2}x_1 - \frac{13}{2} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 = 18 \\ 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{array} \right\}$$

$$4. \left. \begin{array}{l} x_1 = 5 - 5t \\ x_2 = 2 + 6t \\ x_3 = 3 - 4t \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x_1 = 5 - \frac{5}{\sqrt{77}}s \\ x_2 = 2 + \frac{6}{\sqrt{77}}s \\ x_3 = 3 - \frac{4}{\sqrt{77}}s \end{array} \right\}$$

$$\vec{r} = (5 - 5\lambda)\vec{i} + (2 + 6\lambda)\vec{j} + (3 - 4\lambda)\vec{k}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = \frac{6}{5}x_1 + 8 \\ x_3 = \frac{4}{5}x_1 - 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 6x_1 + 5x_2 = 40 \\ 4x_2 + 6x_3 = 26 \end{array} \right\}$$

$$5. \left. \begin{array}{l} x_1 = 5 - 4t \\ x_2 = 2 - 7t \\ x_3 = -3 + 11t \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x_1 = 5 - \frac{4}{\sqrt{186}}s \\ x_2 = 2 - \frac{7}{\sqrt{186}}s \\ x_3 = -3 + \frac{11}{\sqrt{186}}s \end{array} \right\}$$

$$\vec{r} = (5 - 4\lambda)\vec{i} + (2 - 7\lambda)\vec{j} + (-3 + 11\lambda)\vec{k}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = \frac{7}{4}x_1 - \frac{27}{4} \\ x_3 = -\frac{11}{4}x_1 + \frac{43}{4} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -7x_1 + 4x_2 = -27 \\ 11x_2 + 7x_3 = 1 \end{array} \right\}$$

$$6. \left. \begin{array}{l} x_1 = 3 + 2t \\ x_2 = -2 - 2t \\ x_3 = 4 - 3t \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x_1 = 3 + \frac{2}{\sqrt{17}}s \\ x_2 = -2 - \frac{2}{\sqrt{17}}s \\ x_3 = 4 - \frac{3}{\sqrt{17}}s \end{array} \right\}$$

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + t \bar{v} = (3 + 2t) \bar{i} + (-2 - 2t) \bar{j} + (4 - 3t) \bar{k}$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= -x_1 + 1 \\ x_3 &= -\frac{3}{2}x_1 + \frac{17}{2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 2 \\ -3x_2 + 2x_3 &= 14 \end{aligned} \right\}$$

$$7. \left. \begin{aligned} x_1 &= -4 + 6t \\ x_2 &= 2 + t \\ x_3 &= 3 + t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_1 &= -4 + \frac{6}{\sqrt{38}}s \\ x_2 &= 2 + \frac{1}{\sqrt{38}}s \\ x_3 &= 3 + \frac{1}{\sqrt{38}}s \end{aligned} \right\}$$

$$\bar{r} = (-4 + 6t) \bar{i} + (2 + t) \bar{j} + (3 + t) \bar{k}$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{6}x_1 + \frac{8}{3} \\ x_3 &= \frac{1}{6}x_1 + \frac{11}{3} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_1 - 6x_2 &= -16 \\ x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned} \right\}$$

$$8. \left. \begin{aligned} x_1 &= 2 + t \\ x_2 &= 5 - 3t \\ x_3 &= 3 - 2t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_1 &= 2 + \frac{1}{\sqrt{14}}s \\ x_2 &= 5 - \frac{3}{\sqrt{14}}s \\ x_3 &= 3 - \frac{2}{\sqrt{14}}s \end{aligned} \right\}$$

$$\bar{r} = (2 + t) \bar{i} + (5 - 3t) \bar{j} + (3 - 2t) \bar{k}$$

9. t paraméteres alakja

$$\left. \begin{aligned} x &= 3 + 3t \\ y &= -2 + 5t \\ z &= 5 + 2t \end{aligned} \right\}$$

analitikus alakja

$$\frac{x - 3}{3} = \frac{y + 2}{5} = \frac{z - 5}{2}$$

10.  $\frac{x - 3}{1} = \frac{y + z}{-1,5} = \frac{z - 5}{2,25}$

11.  $x = 4$  mellett  $y = 0$  és  $z = -1$

12.  $M(2, -5, 3)$

13. a/ az egyenesek kitérők

b/ az egyenesek metszők, a metszéspont  $M\left(\frac{53}{19}; -\frac{32}{19}; \frac{86}{19}\right)$

c/ a megadott egyenesek párhuzamosak, mert irányvektoruk

$$\vec{v} = 6\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

d/ az egyenesek kitérők.

A síkkal kapcsolatos feladatok megoldása

A sík normálegyenletének felírása az általános alakból

1.  $p = \frac{6}{\sqrt{14}}; \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}; \cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{14}}; \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}$

2.  $p = \frac{4}{\sqrt{6}}; \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}}; \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{6}}; \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{6}}$

3.  $p = \frac{7}{\sqrt{13}}; \cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}}; \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{13}}$

4.  $p = \frac{28}{\sqrt{38}}; \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{38}}; \cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{38}}; \cos\gamma = \frac{5}{\sqrt{38}}$

Pont távolsága síktól

1.  $d = \frac{13}{\sqrt{14}}$

2.  $d = \frac{26}{\sqrt{26}}$

3.  $d = \frac{7}{\sqrt{194}}$

2.  $d = 0$

Két párhuzamos sík távolsága

1. A két normálvektor azonos irányítású azért

$$d = \left| \frac{5}{\sqrt{14}} - \frac{7}{3\sqrt{14}} \right| = \frac{8}{3\sqrt{14}}$$

2. A két normálvektor ellentétes irányítású ezért

$$d = \frac{6}{5\sqrt{6}} + \frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{46}{5\sqrt{6}}$$

Sík egyenletének felírása a síkot meghatározó adatok alapján

1.  $\frac{x_1}{-8} + \frac{x_2}{16} - \frac{x_3}{4} = 1$

2.  $\frac{2}{\sqrt{17}} x_1 + \frac{3}{\sqrt{17}} x_2 + \frac{2}{\sqrt{17}} x_3 = \frac{17}{\sqrt{17}}$

3.  $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 15$

4.  $4x_1 + x_2 - 2x_3 = 7$

5.  $21x_1 + 25x_2 + 60x_3 = 2$

6.  $5x_1 - 3x_2 - x_3 = 8$

$u_1, u_2$  paraméteres egyenletrendszere:

$$x_1 = 2 + u_1 - u_2$$

$$x_2 = -1 + 3u_1 - u_2$$

$$x_3 = 5 - 4u_1 - 2u_2$$

$$\left. \begin{aligned} 7. \quad x_1 &= 2 - 3 u_1 + u_2 \\ x_2 &= -5 + u_1 + 2 u_2 \\ x_3 &= -7 + 2 u_1 + 3 u_2 \end{aligned} \right\}$$

Adott ponton át egyenesre merőleges sík-, és adott ponton át adott síkra merőleges egyenes egyenlete

1. a/  $-5 x_1 + 3 x_2 + 4 x_3 - 7 = 0$

b/  $-\frac{5}{\sqrt{50}} x_1 + \frac{3}{\sqrt{50}} x_2 + \frac{4}{\sqrt{50}} x_3 = \frac{7}{\sqrt{50}}$

c/  $\frac{x_1}{-\frac{7}{5}} + \frac{x_2}{\frac{7}{3}} + \frac{x_3}{\frac{7}{4}} = 1$

2.  $2 x_1 - 3 x_2 + 3 x_3 = 25$

3.  $3 x_1 - 2 x_2 + 2 x_3 = -20$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -6 + 7 u_1 + 7 u_2 \\ x_2 &= 2 - u_2 \\ x_3 &= 1 - \frac{21}{2} u_1 - \frac{23}{2} u_2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 4. \quad y &= -2 x + 17 \\ z &= 4 x - 23 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 5. \quad x_1 &= 3 + 2 t \\ x_2 &= -1 + 3 t \\ x_3 &= 4 - 4 t \end{aligned} \right\}$$

6.  $\vec{r} = (-5 + 4 t) \vec{i} + (3 + t) \vec{j} + (-2 - 5 t) \vec{k}$ .

Egyenes és sík kölcsönös helyzete

1. Igen.  $M(1, 2, -2)$ .

2. Nincs, az egyenes és a sík párhuzamosak.
3. Az egyenes benne van a síkban.

Egyenes dőléspontja a síkkal

1.  $D(49; 46; 77)$
2.  $D\left(\frac{234}{37}; -\frac{8}{37}; \frac{6}{37}\right)$
3.  $D(-1; 1; -11)$ .

Két sík kölcsönös helyzete

A metszésvonal paraméteres egyenletrendszere:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad x = t \\ \quad y = 22 - 11t \\ \quad z = -13 + 7t \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2. \quad x = \frac{9}{13} - 11t \\ \quad y = -13t \\ \quad z = \frac{7}{13} + 16t \end{array} \right\}$$

Három sík kölcsönös helyzete

1. A metszéspont:  $M\left(-\frac{31}{76}; \frac{51}{76}; \frac{232}{76}\right)$ .

2. Az első és a második sík, a második és harmadik sík és az első és a harmadik sík metszésvonalának paraméteres egyenletrendszere:

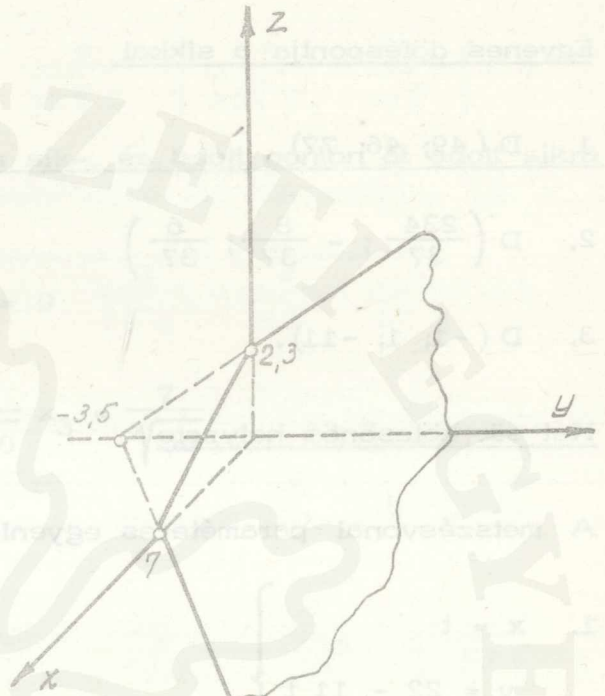
$$\left. \begin{array}{l} x = -4t \\ y = \frac{23}{4} + 12t \\ z = -\frac{9}{4} - 8t \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x = -\frac{1}{6} + 2t \\ y = -6t \\ z = \frac{11}{3} + 4t \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x = 1 - 5t \\ y = 9 + 15t \\ z = -4 - 10t \end{array} \right\}$$

Sík szemléltetése

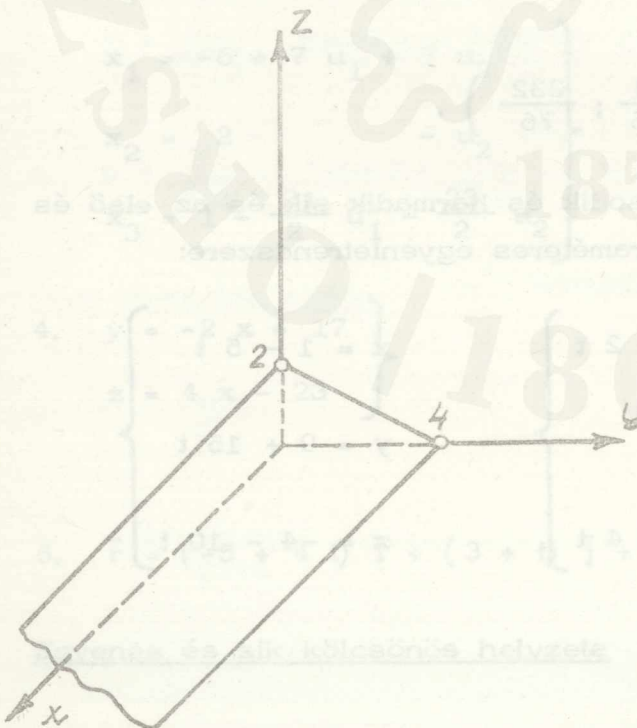
1.  $-2x + 3y + 4z = 18$



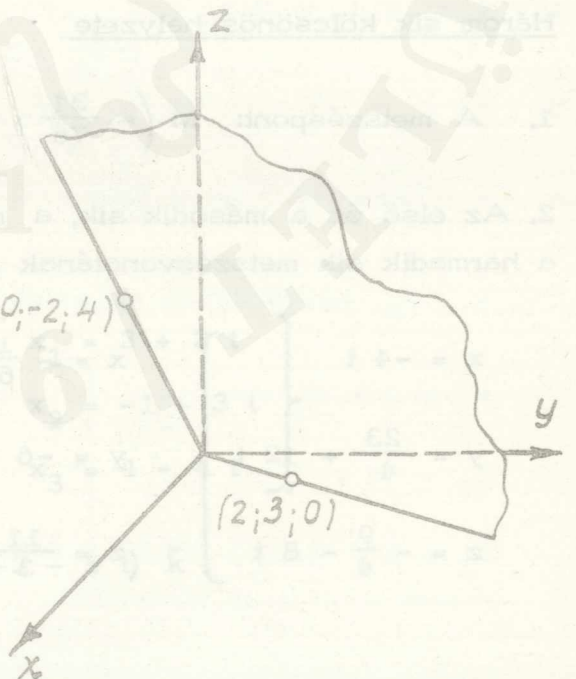
2.  $x - 2y + 3z = 7$



3.  $y + 2z = 4$



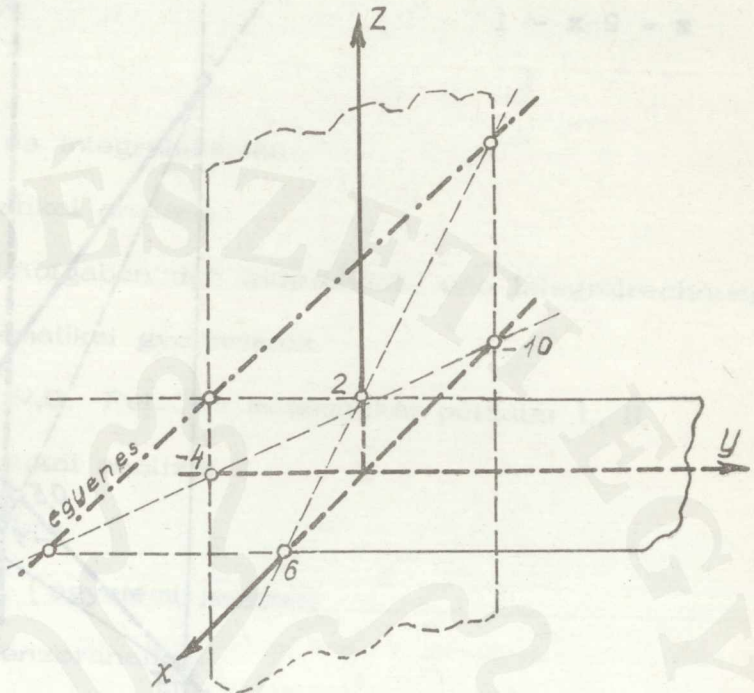
4.  $2y + z - 3x = 0$



Egyenes szemléltetése

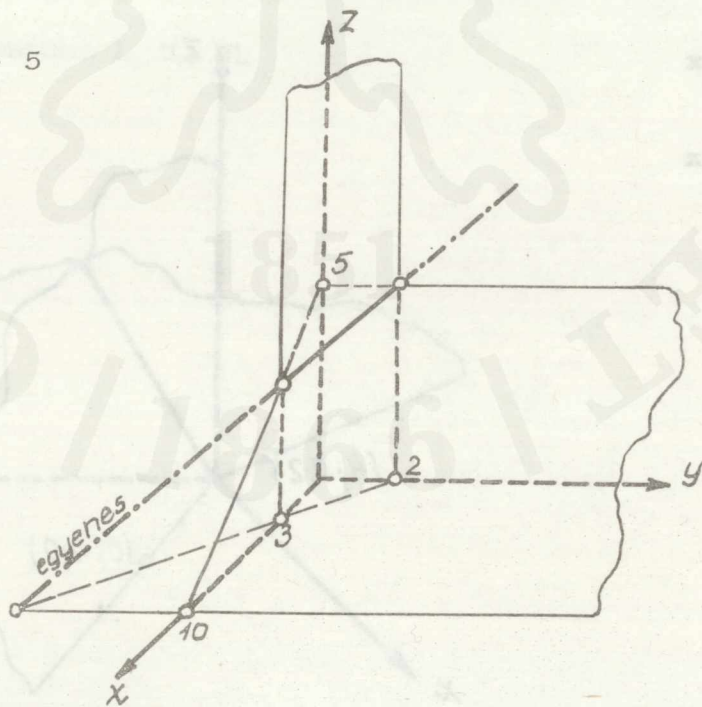
1.  $y = -\frac{2}{5}x - 4$

$z = -\frac{1}{3}x + 2$



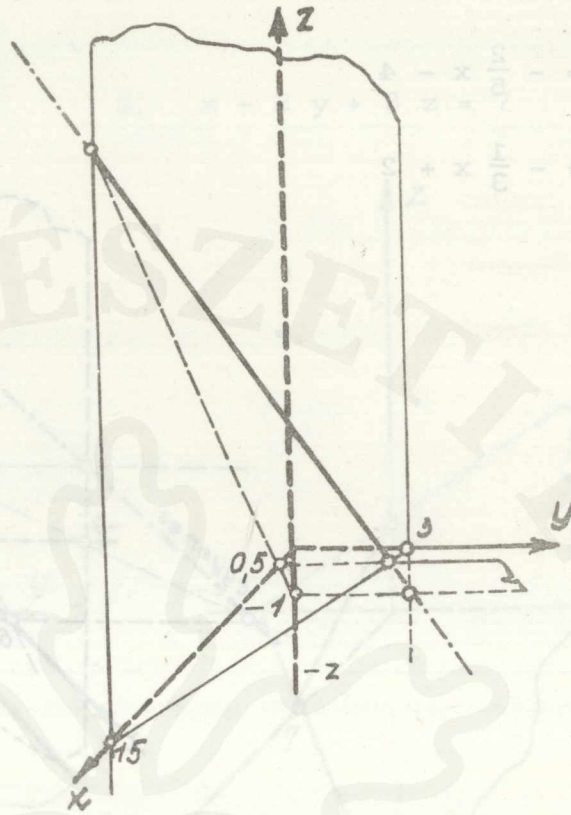
2.  $y = -\frac{2}{3}x + 2$

$z = -\frac{1}{2}x + 5$



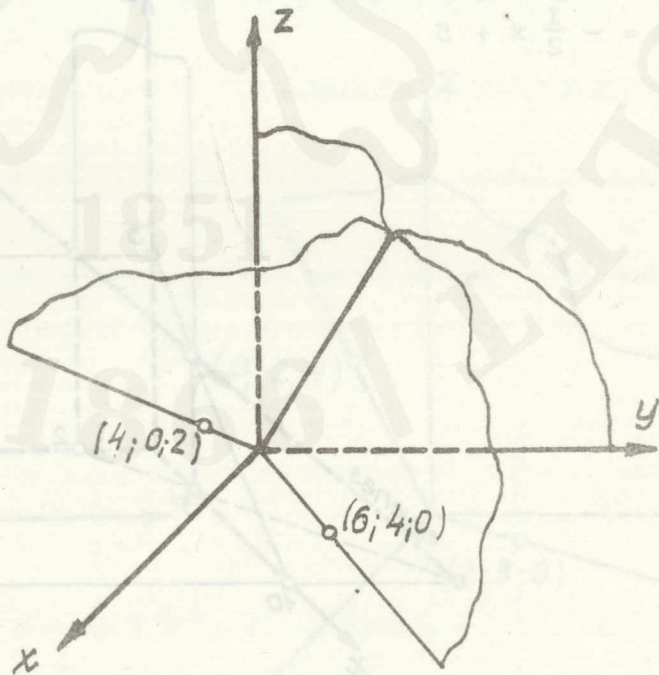
3.  $y = -\frac{1}{5}x + 3$

$z = 2x - 1$



4.  $y = \frac{2}{3}x$

$z = \frac{1}{2}x$



Felhasznált irodalom

Banach, S.: Differenciál- és integrálszámítás

Denkinger-Gyurkó: Matematikai analízis

Dölp, H.: Grundzüge und Aufgaben der Differential- und Integralrechnung

Fazekas F.: Műszaki matematikai gyakorlatok

Gjunter, N.M. és Kuzmin, R.O.: Felsőbb matematikai példatár I., II.

Gyemidovics, B.P.: Matematikai analízis

Kuros, A.G.: Felsőbb algebra

Dr. Moór A.: Matematika I. (egyetemi jegyzet)

Pachné-Frei: Vektor- és tenzoranalízis

Dr. Roxer E.: Matematika I., II., III. (egyetemi jegyzet)

Szász P.: Differenciál- és integrálszámítás I., II.

Szép J.: Analízis

Dr.Walek K.: Matematika I., II., III.

1851

/1866/

Borch, B.: Differenciál- és integrálszámítás

Leibniz-Gyűjtemény: Matematikai műveletek

Döb, H.: Grundsätze der Analysis und Infinitesimalrechnung

Fuchs, F.: Mathematische Physik

Günther, N.M. és Schmidt, R.O.: Elementararithmetik

Gyémányi, E.: Matematikai analízis

Klein, A.G.: Feladatok a differenciál- és integrálszámításból

Dr. Miksa, A.: Matematika I. (Egyetemi jegyzék)

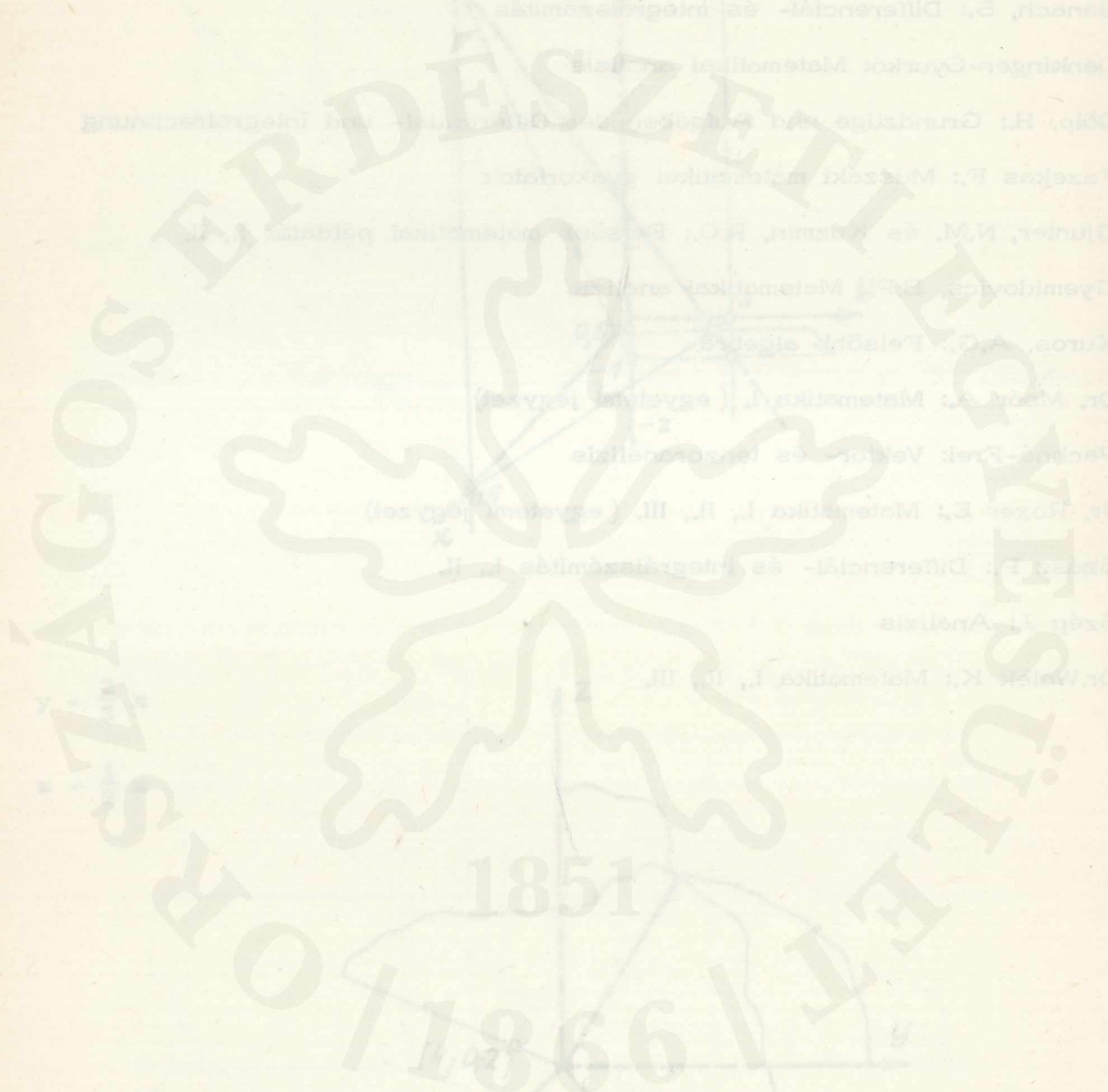
Pachner, F.: Vektor- és tenzorszámítás

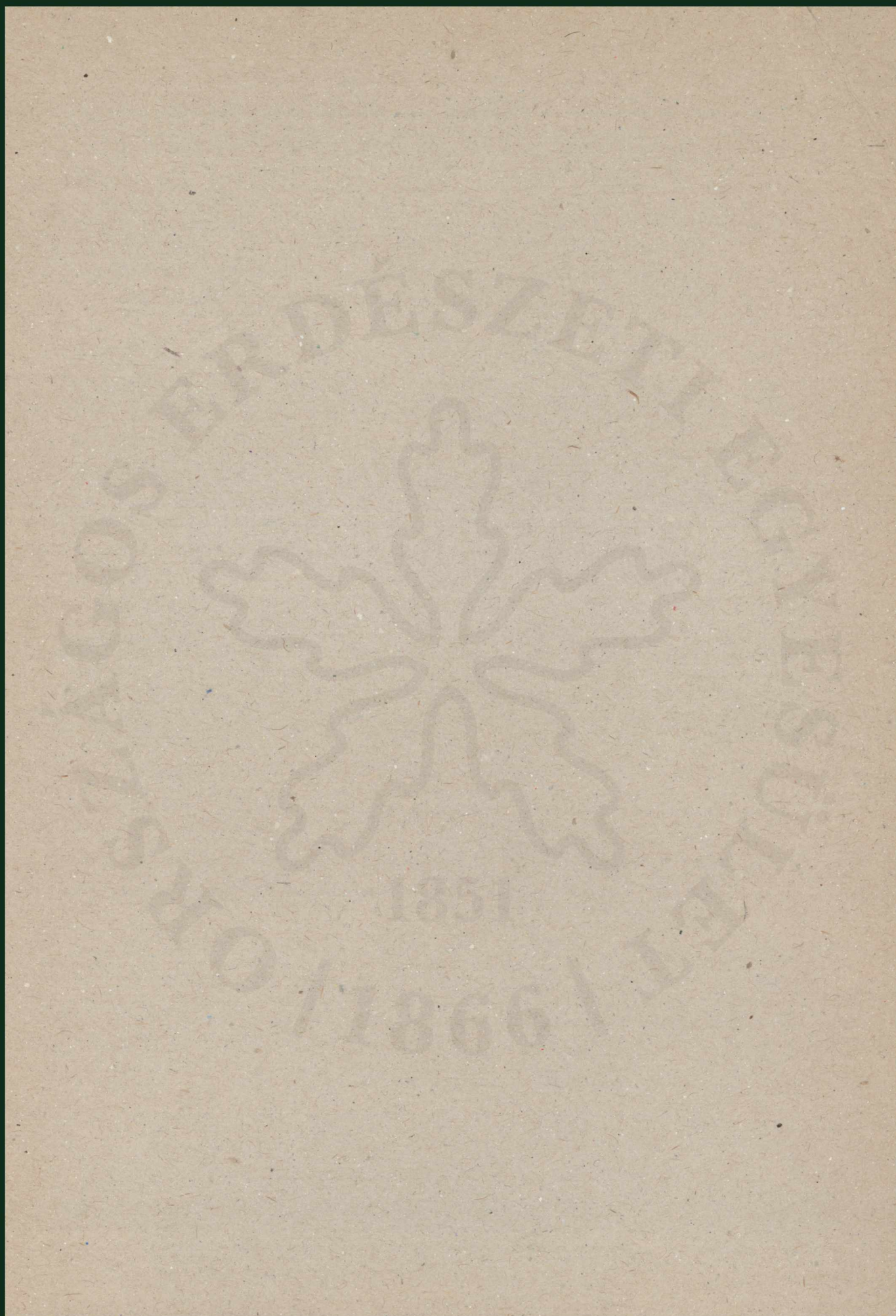
Dr. Rózsa, E.: Matematika I., II., III. (Egyetemi jegyzék)

Szász, F.: Differenciál- és integrálszámítás II.

Szász, F.: Analízis

Dr. Weisk, K.: Matematika I., II., III.





Ára: 284,- Ft.