2·93

Fasching,

Föld-

mérést.

I.

91.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

528
F28

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

MAGYAR ERDÉSZETI EGYESÜLET
1851/1866

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Lelt. sz. IV. 49 Sel. V. 136./283.

A FÖLDMÉRÉSTAN KÉZIKÖNYVE

A M. KIR. PÉNZÜGYMINISTERIUM MEGBIZÁSÁBÓL IRTA:

DR. FASCHING ANTAL
HÁROMSZÖGELŐ FŐMÉRNÖK

OEE Könyvtár
Áll.Ell. 2020

KIADTA A M. KIR. PÉNZÜGYMINISTERIUM.

I. KÖTET.

M. KIR. ÚRBÉRI ERDŐGONDNOKSÁG SOPRONBAN

Országos Erdészeti Egyesület
Wagner Károly Erdészeti Szakkönyvtár
Leltári szám: 167/2013
Csoport szám: I
Raktári jelzet: S. III. III.

FÖLDMŰVELÉSÜGYI MINISZTÉRIUM
Erdészeti főosztály
5. számú Erdőrendezőség
SZOMBATHELY, THÖKÖLY-U. 67.
Postafiók 72.

137 SZÖVEGÁBRÁVAL.

BUDAPEST, 1912.
MAGYAR KIRÁLYI ÁLLAMI NYOMDA.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

MÉM. SZOMBATHELYI ÁLLAMI ERDŐRENDEZŐSÉG * Szombathely *
376.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Az I. kötet tartalomjegyzéke.

I. Fejezet. Szögmérési, hosszmérési és területmérési egységek.

1. §. A szögegységek . . . . . 1 oldal
2. §. Hossz- és területegységek . . . . . 5 „

II. Fejezet. A vízszintes számszerü felmérés alapképletei.

1. §. Alapfogalmak . . . . . 12 „
2. §. Miként nyerjük a délszögeket . . . . . 17 „
3. §. Az oldalhosszszámítás . . . . . 29 „
4. §. Derékszögű összrendezők számítása . . . . . 34 „
5. §. Összrendezők átszámítása . . . . . 37 „
6. §. Irányértékek központosítása . . . . . 40 „
7. §. A térképek méretaránya . . . . . 44 „

III. Fejezet. A legkisebb négyzetek módszere.

1. §. A mérési hibák . . . . . 48 „
2. §. A mérések megbízhatósága . . . . . 49 „
3. §. A legk. négyz. szerinti kiegyenlítés . . . . . 51 „
4. §. Városmérések háromszögeléseinek kiegyenlítése . . . . . 66 „

IV. Fejezet. Egyes konfigurációk és egész felvételek területszámitása.

1. §. Egyes konfigurációknak az *eredeti méretekből* való területmeghatározása . . . . . 80 „
2. §. Egyes konfigurációknak *térképek*, illetve tervek alapján való terület meghatározása 86 „
3. §. Nagyobb felvételek részletes területszámítása . . . . . 113 „

V. Fejezet. Bevezetés az országos felmérésekbe . . . . . 120 „

VI. Fejezet. Az I. rendü háromszöghálózatra vonatkozó mérések.

1. §. Bázismérés . . . . . 141 „
2. §. A bázismérések megbizhatóságának mérőszáma . . . . . 161 „
3. §. A bázisfejlesztő hálózat . . . . . 162 „
4. §. Az I. rendű háromszögelési pontok jelzése . . . . . 163 „
5. §. Az I. rendű háromszögelések szögmérései és az állomás kiegyenlítés . . . . 176 „

Függelék.

I. Fejezet. Modern városfelmérések szokásos müszaki feltételei . . . . 187 „
II. Fejezet. Birtokrendezés . . . . . 197 „
III. Rajzmellékletek . . . . . 235 „

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

ELŐSZÓ.

A m. kir. pénzügyministerium e munkát az országos kataszteri felmérés végrehajtása iránt kiadott utasitásokkal kapcsolatos kézikönyvként adja ki. Mint ilyen, a felmérési intézményünknél előirt szakvizsgákra nézve tankönyvül is szolgál.

E munka három kötetből áll. Az I. és III. kötet túlnyomólag az alsó geodéziai, a II. kötet pedig kizárólag az országos felmérésekben szereplő felső geodéziai müveleteket tárgyalja.

A m. kir. pénzügyministerium által kiadott következő utasitások, illetve munkák, u. m.:

1. *Utasitás az országos kataszteri felmérés végrehajtására.*
2. *Utasitás az országos kataszteri felmérésnél alkalmazandó sokszögelésről.*
3. *Dr. Fasching Antal: Koordináta táblázatok sokszögvonalak számitására.*
4. *Dr. Fasching Antal: A magyar országos háromszögelések és részletes felmérések uj vetületi rendszerei,*

a jelen müben újolag részletesen nem tárgyaltatnak, azokra csupán a megfelelő helyeken a következőleg történik utalás:

az 1. munkára: *F. U.* a 3. munkára: *K. T.*
a 2. „ *S. U.* a 4. „ *V. U.* jelzéssel.

Az itt felsorolt valamennyi kiadvány, valamint a jelen munka — az utóbbi kötetenkint is — könyvárus uton megszerezhető.

Budapest, 1911. december havában.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

I. FEJEZET.

Szögmérési, hosszmérési és területmérési egységek.

1. §. A szögegységek.

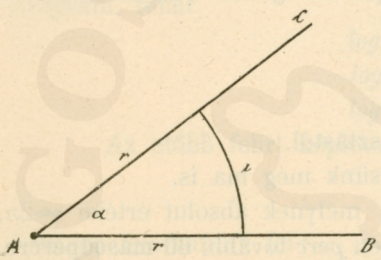
A szögeket úgy a tudományos, mint a gyakorlati életben *kétféle módon* szokás *egyértelműleg* megadni vagy egy *puszta szám* (viszonyszám) által, vagy *fokok, percek* és *másodpercek* által.

I.

Az a puszta szám (viszonyszám), melyet az illető α szög *absolut értékének* nevezünk, és amely szám ezt a szöget *egyértelműleg* definiálja, nem más mint az

$$\left(\frac{i}{r}\right) = |\alpha|$$

hányados értéke. Ezen képletben i jelenti (1. ábra) a szög csúcsa körül tetszőleges sugárral leírva képzelt körív hosszát, r pedig jelenti az ezen ívhez tartozó sugár hosszát — ugyanazon hosszegységre vonatkoztatva, mint amely hosszegységre vonatkozik az i számértéke.



1. ábra.

Pusztán szemléleten alapuló megfontolással a következő alapvető *tételekre* jutunk:

1. Ugyanazon α szög esetében az *absolut* érték nem változik, ha mindig *más* és *más* nagyságú sugárral képzeljük is az ívet leírva: mert az

$$\left(\frac{i}{r}\right)$$

értéke ugyanaz fog maradni.

2. Egy bizonyos $|\alpha|$ értékhez csakis egyetlen-egy szög fog tartozni és viszont.

3. Az absolut érték lehet *0*-tól a végtelenig bármely szám, ha (1. ábra.) az AC szárat fixnek tekintve az AB szárat az A pont körül végtelenszer körülforgatva képzelem. Tehát van oly szög, melynek absolut értéke $= 0$, van oly szög, melynek absolut értéke $= 1$, van oly szög, melynek absolut értéke $= 2$, stb. És ha felirunk egy tetszőleges számot, pl. 182.18965, akkor is van oly szög — még pedig csakis egy — amelynek ez a szám a mérőszáma, azaz az *absolut* értéke.

4. Az absolut érték, $|\alpha| = \frac{i}{r}$, lineáris függvénye a szögnek: t. i. *kétszer* akkora szögnek *kétszer* akkora *absolut érték* felel meg, *háromszor* akkora szögnek *háromszor* akkora *absolut érték* felel meg.

5. Ha azt a szöget, melynek absolut értéke $= 1$, melynél tehát az *ív* $=$ a *sugárral* vagyis

$$i = r$$

elnevezzük *absolut szögegységnek,* és ϱ betűvel jelöljük e *fontos* szöget, akkor azt mondhatjuk:

„Valamely α szög absolut szögértéke azt fejezi ki, hogy az illető α szög hányszorta nagyobb vagy kisebb, mint az a bizonyos ϱ szög, melyet az előbb definiáltunk.“ Igy például

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

az, hogy valamely szögnek absolut értéke egyenlő *1.234796,* az azt jelenti, hogy ez a szög *1.234796*-szor akkora, mint az a szög, melynek absolut értéke = 1-el, és amely szöget mi ϱ-nak neveztünk.

Az absolut értéknek ez a fontos értelmezése adja majd meg a *módot az absolut értékből a fokrendszerre való átszámitásokhoz.* Ha a *derékszögnek* absolut értéke egy *kerek,* és a *tizes* vagy *60-as* rendszerben *könnyen osztható szám volna*: akkor a fokrendszerre semmi szükség sem lett volna, akkor *szögmérő* és *szögfelrakó* műszereink minden bizonynyal absolut osztásuak volnának. A derékszög absolut értéke azonban egy végtelen sok decimálist tartalmazó, kényelmesen nem osztható szám. Ugyanis a derékszög *kétszeresének* absolut értéke:

$$\pi = \frac{\text{félkör}}{\text{sugár}} = 3.141\,59265\,3589793\ldots$$

ezen π érték logaritmusa $\log \pi = 0.497\,1498\,726\,941339\ldots$

Az *elméleti* analytikában a szögek mindig az absolut egységre vonatkozólag lesznek kifejezve; amiért is számos könyvben az *absolut rendszer* kifejezés helyett az *„analytikai mérték"* kifejezést használják.

Minthogy az analytikában ez a rendszer; geodéziai *mérőeszközeinkben* és *számítási segédeszközeinkben* (logaritmus táblák, koordináta táblák, tachymeteres táblák stb.) azonban a gyakorlati célokra sokszorta alkalmasabb *fokrendszer* szerepel: meg kell ismerkednünk az egyik rendszerből a másikra való áttérés módozataival.

II.

Meg kell különböztetni a *régi fokosztást* az **uj** fokosztástól.

A régi fokosztást használja a mi kataszteri felmérésünk még ma is.

A *régi* fokosztás szerint a teljes kör-, azaz a szög, melynek absolut értéke $=2\pi$, fel van osztva **360 fokra.** Minden *fok* további **60 percre**, minden *perc* további **60 másodpercre.**

Az *uj fokosztás* szerint a teljes kör tartalmaz 400 fokot, tehát a derékszög tartalmaz *100* fokot. Minden ilyen fok fel van osztva *100* percre, minden ilyen perc *100* másodpercre. Az uj osztásnál egy szög értéke így írható fel:

$\alpha = 378.4693$ fok, amely szög tehát tartalmaz 378 uj fokot, 46 uj percet és 93 uj másodpercet.

Minthogy hazánkban úgy az *állami,* mint a *magán geodéziai* méréseknél a régi fokosztás használtatik, csak ezzel fogunk tüzetesen foglalkozni.

Kérdés: hány *fokot,* illetve hány *percet,* illetve hány *másodpercet* tartalmaz az a szög, melynek absolut értéke = a π értékkel, melyet az előbb közöltünk. A definiciók szerint a

π-nek megfelelő szög tartalmaz **180°**-ot

„ „ „ „ **180×60** = 10800'-et

„ „ „ „ 10800 × 60 = 648000''-et.

Kérdés most már: hány *fokot,* illetve *percet,* illetve *másodpercet* tartalmaz az a *szög,* melynek absolut értéke = 1, és amely szöget mi ϱ-val jelöltünk?

Ezen számértékeket egyszerű aránynyal kapjuk, ha figyelembe vesszük a π-ben levő fokok, illetve percek, illetve másodpercek számát. Eszerint az absolut szögegységben (ϱ-ban) van:

$\frac{180}{\pi}$ fok,

$\frac{10800}{\pi}$ perc,

$\frac{648000}{\pi}$ másodperc.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Helyettesítsük π-nek számértékét e három képletbe, és végezzük el az osztást, akkor az *absolut* szögegységben (ϱ-ban) levő *fokok* száma:

$$\varrho^\circ = 57^\circ.295\,779\,51;$$ ennek *logaritmusa:*

$$log\ \varrho^\circ = 1.75\,812\,263;$$

az *absolut szögegységben* (ϱ-ban) levő *percek* száma:

$$\varrho' = 3437'.746\,77,$$ ennek logaritmusa

$$log\ \varrho' = 3.53\,627\,388;$$

az *absolut szögegységben* (ϱ-ban) levő *másodpercek* száma:

$$\varrho'' = 206\,264''.806,$$ ennek logaritmusa

$$log\ \varrho'' = 5.31\,442\,513.$$

Ezen számok kiszámitása által megvan a mód *absolut értékekből a fokrendszerre áttérni.*

Ha ugyanis adva van egy tetszőleges α szögnek absolut értéke $|\alpha|$, akkor ezen szöget fokokban, vagy percekben, vagy másodpercekben kifejezve kapjuk ezen képletek által:

$$1. \quad \begin{cases} \alpha^\circ = |\alpha|\,\varrho^\circ \\ \alpha' = |\alpha|\,\varrho' \\ \alpha'' = |\alpha|\,\varrho'' \end{cases}$$

Ezen számitást — ha számológépünk nincs — mindig logaritmikusan fogjuk elvégezni, tehát

$$log\ \alpha^\circ = log\ |\alpha| + 1.758\ldots$$
$$log\ \alpha' = log\ |\alpha| + 3.536\ldots$$
$$log\ \alpha'' = log\ |\alpha| + 5.314\ldots$$

Az előbb felírt képletekből következik, hogy

$$|\alpha| = \frac{\alpha^\circ}{\varrho^\circ} = \frac{\alpha'}{\varrho'} = \frac{\alpha''}{\varrho''},$$

amit így is írhatunk fel:

$$2. \quad |\alpha| = \alpha^\circ \left(\frac{1}{\varrho^\circ}\right) = \alpha' \left(\frac{1}{\varrho'}\right) = \alpha'' \left(\frac{1}{\varrho''}\right).$$

Ezen képletek mutatják, miként kell *fokokban,* illetve *percekben,* illetve *másodpercekben* kifejezett szögeknek absolut mérőszámát keresni.

Az itt szereplő állandó szorzók értékei:

$$\frac{1}{\varrho^\circ} = 0.017\,453\,292\,520$$

$$log\left(\frac{1}{\varrho^\circ}\right) = 8.24\,187\,737-10.$$

$$\frac{1}{\varrho'} = 0.000\,290\,888\,209$$

$$log\ \frac{1}{\varrho'} = 6.46\,372\,612-10.$$

$$\frac{1}{\varrho''} = 0.000\,004\,848\,137$$

$$log\ \frac{1}{\varrho''} = 4.68\,557\,487-10.$$

Az 1. és 2. képletek és a közölt számértékek segitségével bármely szög absolut értékéből e szög értéke a régi fokrendszerben és *viszont* kiszámítható.

A geodéziai gyakorlat szempontjából rendkivüli fontos értékek az $\frac{1}{\varrho'}$ és az $\frac{1}{\varrho''}$ értékek.

A definició alapján ugyanis $\frac{1}{\varrho'} = \frac{1'}{\varrho'}$ nem más, mint „*a percnyi szögnek absolut értéke*“, és $\frac{1}{\varrho''} = \frac{1''}{\varrho''}$ nem más, mint „*a másodpercnyi szögnek absolut értéke*“.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ezen absolut értékek jó közelítéssel *0,0003*, illetve *0,000005*-nek vehetők, tehát az itt szóbajöhető feladatok céljaira mondhatjuk:

Egy *másodperc* absolut szögértéke = *0,000005*, azaz 5 decimális nulla után egy 5-ös szám.

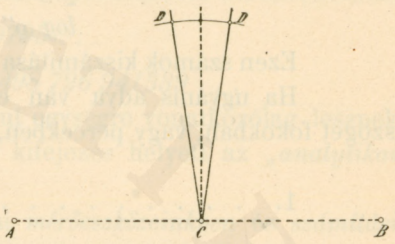
Egy *perc* absolut szögértéke pedig = *0,0003*, azaz 3 decimális nulla után egy 3-as szám.

Jegyezzük meg egyszer és mindenkorra ezen két fontos számot. Akkor bármikor — fejben — megoldhatjuk a következő feladatokat vagy ahhoz hasonlókat.

Feladatok.

1. Kitűztük szögtükörrel az AB egyenes vonal C pontjában (2. ábra) a CD *merőlegest* $\pm$ *2'* hibával.

Kérdés: a D pont, mennyire tér tehát el a helyes merőleges (pontozott) vonaltól ha $CD = 100$ $\frac{\text{öl}}{\text{méter}}$.



2. ábra.

ív = sugár $\times$ szög absolut értékével, tehát jelen esetben a szög absolut értéke

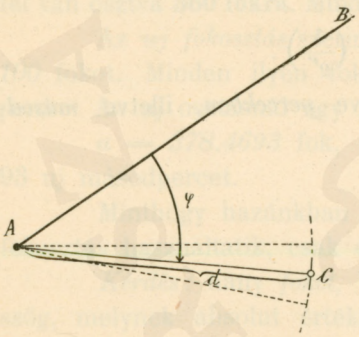
$$2 \times 0{,}0003 = 0{,}0006 \text{ lévén,}$$

$$\text{ív} = 100 \text{ } \tfrac{\text{öl}}{\text{méter}} \times 0{,}0006 = \mathbf{0.06} \text{ } \tfrac{\text{öl}}{\textbf{méter.}}$$

Tehát a jelen esetben a D pont a helyes merőlegeshez képest $\pm$ azaz *jobbra* vagy *balra* 6 század *öl*, illetve *méter*-pontossággal van meghatározva.

Ha a D pont nem 100 $\frac{\text{öl}}{\text{méter}}$, hanem csak 50 $\frac{\text{öl}}{\text{méterre}}$ van C-től, akkor az eltérés

$$\frac{0.06}{2} = 0.03 \text{ } \tfrac{\text{öl}}{\text{méter.}}$$



3. ábra.

2. A C pontot (3. ábra) az AB fix (alap) egyeneshez képest a φ szögnek teodolittal való mérése, és a **d** távolság mérése (polárkoordináták) által határoztuk meg. Feltéve, hogy a $d = 125$ $\frac{\text{öl}}{\text{méter}}$; kérdés, mekkora a C pont helyzeti hibája, ha a φ szög mérése $\pm$ 15''-re hibás? Most megint

ív = sugár $\times$ szög absolut értéke,

tehát ív = $125 \times (0{,}000005 \times 15)$

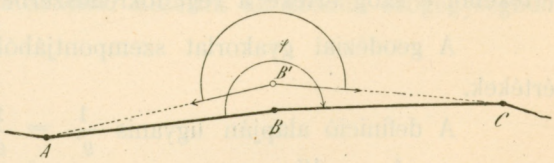
$= 125 \times 0.000075 = 0{,}009 \ldots$

Tehát a C pont eltérése jelen esetben $\pm$ 9 ezred *öl*, illetve *méter*.

3. Ha a mérőasztal $\pm$ 1'-re hibásan van tájékozva, mekkora vonalas eltérést kaphatok egy *1000* öl hosszú sugár (rayon) végpontjában?

ív = $1000 \times 0.0003 = 0.3$, tehát akkor $\pm$ *3 tized öl* lehet már ez az eltérés.

4. A B ponton (4. ábra) akarjuk a φ törési szöget mérni szögmérő műszerrel. Feltételezve, hogy az $ABCDE \ldots$ sokszögvonal nyujtott, tehát hogy a φ szög közel *180°*, kérdés: mekkora hibával nyerjük a φ szöget, ha krb. az ABC vonalra merőleges irányban *0.02* ölre pontatlanul állitottuk a műszert a B pont fölé (tehát B'-re) és $AB = 90$ öl, $BC = 30$ öl?



4. ábra.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Két ívszámítással megoldható közelítőleg:

$$\frac{\text{ív}}{\text{sugár}} = \text{szög absolut értéke;}$$

tehát $\frac{0.02}{90}$, adja a BA irány hibáját,

$\frac{0.02}{30}$, adja a BC „ „ :

e két irányhiba összege adja a φ hibáját.

$$0.02 : 90 = 0.0002 \ldots$$
$$0.02 : 30 = 0.00007$$

tehát *0.00027* lesz az absolut értéke a φ szög hibájának. Mekkora ez másodpercekben kifejezve?

$$0.00027 : 0{,}000005 = 54''.$$

Tehát jelen esetben, ha a pontraállítást 2 század öles hibával végeztük: már **54**″-re hibásan nyerjük a törési szög értékét.

5. Tegyük fel, hogy egy pontjelző karó (B ponton) ferdén áll. Mi (A pontból) a felső részét irányoztuk meg, miáltal vízszintes vetületben nem a B, hanem a B' pontba irányoztunk. Legyen a B—B' távolságnak megfelelő **ív** hossza: **0.01** öl. Kérdés: mekkora irányhibát okoz ez az eltérés, hogyha AB távolság = *100 öl?*

$\frac{\text{ív}}{\text{sugár}}$ = szög absolut értéke; tehát

$\frac{0.01}{100}$ = **0.0001**. Mivel 1′-nek absolut szögértéke *0.0003*, tehát jelen esetben az irányhiba = $^1/_3$ perccel, azaz **20**″-el. Ha az AB távolság csak 50 öl volna, akkor már **40**″ az irányhiba.

Az imént ismertetett 5 feladathoz hasonló feladatokat annak, aki *tudatosan* akar különböző geodéziai méréseket végezni: számtalanszor lesz alkalma megoldani. *Szögmérési hibák hatásának megítélése ilynemű számításokkal fog mindig eszközöltetni.*

Ezen ponthoz még azt a megjegyzést fűzöm, hogy *tankönyvekben* és *szakcikkekben* az $1/\varrho''$ érték mint *sinus 1″* érték szerepel.

Például: a gömbi szögfölösleg képletét így találjuk felírva

$$\varepsilon'' = \frac{F}{R^2 \sin 1''}, \text{ ahelyett hogy}$$
$$\varepsilon'' = \left(\frac{F}{R^2}\right)\varrho''$$

A *sin 1″ érték* elméletileg *nem azonos az* $1/\varrho''$ *értékkel*, de a rendes geodéziai számítások céljaira *még 8-jegyű logaritmusok használata esetében is,* szigorúan azonosnak tekinthető ez a két számérték: oly végtelen kicsiny köztük a különbség.

2. §. Hossz- és területegységek.

A magyar országos kataszteri felmérések *hosszegysége* ez idő szerint még a *bécsi öl;* területegysége pedig a *négyzetöl,* illetve a *kataszteri hold,* amely *1600* négyzetölet tartalmaz.

Hosszakat ölekben, tized- és *század*-ölekben fejezünk ki. Például: az x hosszúság = 346·52 öl.

A területeket már nem a *tízes* rendszerben, hanem *holdakban* és *négyzetölekben* fejezzük ki.

Például: az x telek nagysága = 2 hold 1234 négyzetöl.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Mértföld alatt egy *4000* öles hosszt értünk. Egy négyzetmértföld tartalmaz tehát $(4000)^2$ négyzetölet $= 16$ *millió négyzetölet* $= 10000$ *kataszteri holdat.*

Egy *kataszteri térképszelvény* hossza *1000 öl,* szélessége *800 öl;* tehát a területe $= 800$ *ezer* négyzetöl $= 500$ *kataszteri hold,* ami $^1/_{20}$ négyzetmértföldnek felel meg.

A gyakorlatban ujabban mindinkább sűrűbben előfordul a méter-rendszerre való átszámítás és viszont.

I. Hosszak átszámítása:

a *bécsi öl*-rendszerből a *méter-rendszerre* és viszont.

Ezen átszámitást — ha számszerüleg és nem grafikusan akarjuk eszközölni — *háromféle eljárással* foganatosíthatjuk.

1-ső eljárási mód. Az *ölekben* kifejezett hossz *logaritmusához* hozzáadjuk + előjellel a

0.277 949 1463

átszámítási logaritmust (modulus): és az így előállított összeg *numerusa* lesz a kérdéses hossz mérőszáma a *méterre* mint egységre vonatkoztatva.

Szabály: ha az átszámítandó hossz *1000 ölnél* kisebb, akkor elégséges *5 számjegyü* logaritmusokkal dolgozni; ha a kérdéses hosszúság *1000* ölnél nagyobb, de a *20000* ölet nem haladja túl, akkor elegendő *7 jegyü* logaritmusokkal végezni az átszámítást.

Az eredmény mindkét esetben *egy század méterre* (tehát centiméterre) lesz éles.

Ha *méterekben* kifejezett hosszt akarunk az *öles* rendszerben kifejezni, akkor a méterekben kifejezett hossz logaritmusához + előjellel hozzáadjuk a

9.722 0508 537—10

átszámítási logaritmust, (reciprok modulust) és az így nyert összeg *numerusa* lesz a kérdéses hossznak mérőszáma a bécsi ölre mint hosszegységre vonatkoztatva.

Szabály: Ha *század* ölre élesen óhajtjuk az átszámítást elvégezni, akkor *2000 méterig* még *5 számjegyü*, azután *40000* méterig 7 számjegyü logaritmusokkal dolgozunk.

Jegyzet: ha tömeges átszámításokról van szó, akkor a modulust, illetve e reciprok modulust (5 vagy 7 tizedesre kikerekítve) nem irjuk le külön-külön minden hossz logaritmusa alá, hanem úgynevezett *toló-cédula* szélére irjuk egyszer és mindenkorra a modulust, illetve a reciprok modulust és ezen cédulát tartva rendre az egyes logaritmusok fölé, végezzük el az összeadásokat.

2-ik eljárási mód. A *bécsi ölekben* kifejezett hosszt szorozva az

1.896 4838 40

szorzó állandóval,*) nyerjük az illető hossznak méterekben kifejezett mérőszámát. Ha *század méterre* éles eredményt óhajtunk elérni, úgy *200* ölig elegendő az

1.8965 szorzót; *1000* ölig pedig az

1.896 48 szorzót használni.

A *méterekben* kifejezett hosszt szorozva a

0,527 2916 01

szorzó állandóval,**) nyerjük az illető hossznak *ölekben* kifejezett mérőszámát. Analog az előbbi megjegyzéshez: *300* méterig a *0.5273* szorzót; *2500* méterig pedig a *0.52729* szorzót fogjuk használni: ha egy *század ölre* éles eredményt óhajtunk nyerni.

*) Egy bécsi öl ugyanis egyenlő 1.896... méterrel.

**) Egy méter ugyanis egyenlő 0.527... bécsi öllel.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Az ezen eljárási mód alkalmazásakor elvégzendő szorzásokat vagy *számológéppel,* vagy *szorzó táblázatok* segitségével fogjuk elvégezni, ha *tömeges átszámításokról* van szó. A legterjedelmesebb szorzó tábla a „*Ludwig Zimmermann Rechentafeln* (grosse Ausgabe) Liebenwerda." cimü könyv. Ha csak egy-két feladatot kell elvégeznünk, úgy a rendes „*rövidített szorzást*" fogjuk alkalmazni.

Ha számológéppel rendelkezünk, úgy az összes képzelhető eljárások között ez a szorzó eljárás a leggyorsabb. A *számoló gépekkel* a négy alapmüvelet: összeadás, kivonás, szorzás, osztás egyaránt hibátlanul és gyorsan végezhető el. Igen elterjedt szerkezet a „*Thomas-Burkhardt*"-féle; ezidőszerint azonban a „*Berolina*" nevezetü, de még inkább az *Egli* (Zürich)-féle „*Milionär*" számológép ajánlható leginkább. Ez utóbbi gépekkel például a 78965 × 342 szorzást úgy végezzük el, kogy a 78965 számot a 7, 8 stb. számok kitolásával egy sorban megjelentetjük, azután egy kis mutatót *3*-ra állitva egy kart *egyszer* megforgatunk, azután a kismutatót 4-re állitva a kart megforgatjuk, végül a *2*-re állitva a mutatót a kart ismét megforgatva: a *szorzat* egy számsorban hibátlanul jelentkezik.

Ujabban az összes geodésiai számitásokat (előmetszés, hátrametszés stb.) számoló géppel kezdik végezni. Lásd a *Prof. O. Koll: Geodätische Rechnungen mittelst der Rechenmaschine. Stuttgart. 5 Mk.*" cimü müvet.

3-ik eljárási mód. Az átszámitást végül *számtáblázatok* segitségével is végezhetjük el. Igen *gyors átszámitást* enged az a terjedelmes táblázat, melyet a m. kir. pénzügyministerium: „*Segédtáblázatok az ölmértékben kifejezett hosszúságok métermértékre való átváltoztatásához. Budapest, 1885. Államnyomda*" cím alatt adott ki. Hangsúlyozom, hogy ezen táblázattal *elég gyorsan* lehet métereket ölekre is átalakitani.

10000 öles hossz átváltoztatása *két tizedesre* élesen eszközölhető még ezen táblázat segitségével. A táblázat az interpolálás egyszerüsítése céljából aránytáblázatokkal is van ellátva. A táblázat *alakilag* teljesen a 7-jegyes logaritmus könyv mintájára készült: ami ott a *numerus* az itt az ölekben kifejezett hossz; amik ott a logaritmikus értékek azok *itt* a méter értékek. Evvel meg is magyaráztuk ezen hasznos táblázat használatát azoknak, akik a 7 jegyü logaritmus táblát ismerik. A nevezett táblázat egyébiránt részletes használati utasitással van ellátva.

Az imént leirt terjedelmes hivatalos táblázatnál *sokszorta lassubb* átszámitást enged ezen két kis *segédtáblázat:*

öl	méter
1	1.896 484
2	3.792 97
3	5.689 45
4	7.585 94
5	9.482 42
6	11.378 90
7	13.275 39
8	15.171 87
9	17.068 35

méter	bécsi öl
1	0.5272 916
2	1.0545 832
3	1.5818 748
4	2.1091 664
5	2.6364 580
6	3.1637 497
7	3.6910 413
8	4.2183 329
9	4.7456 245

Ezen táblázatokkal *20 ezer* ölig bármely hosszt ± 0.01 hosszegységre élesen lehet kiszámitani.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

E táblázatok felhasználását és pontosságát egy számpéldán mutatjuk be:

8964.526 öl hány méter?

8	ölnek, illetve	8.000	ölnek megfelel	15171.87	méter,
9	„ „	900	„ „	$1706.83 \cdot_5$	„
6	„ „	60	„ „	$113.78 \cdot_9$	„
4	„ „	4	„ „	$7.58 \cdot_6$	„
5	„ „	0.5	„ „	$0.94 \cdot_8$	„
2	„ „	0.02	„ „	$0.03 \cdot_8$	„
6	„ „	0.006	„ „	$0.01 \cdot_1$	„
				$17001.07 \cdot_7$	méter.

A talált értéket a 2-ik segédtáblázattal ölekre átszámítva:

5272.916
3691.041
0.527
0.037
0.004

8964.525

Ezen érték a kiinduló értéktől csak 0.001 ölre különbözik.

Jegyzet. Az előadott három eljárási módozat között ha *számológép* áll rendelkezésre, úgy a 2-ik eljárást; ha számológép nem áll rendelkezésre úgy a 3-ik eljárást használjuk. Ha nincs számológépünk, és 20 000 hosszegységen felüli hosszt kell élesen átszámítani, akkor használjuk csak az első eljárást. Kizárólag az első eljárást fogjuk használni, ha az *adott* hosszaknak *logaritmusai* vannak adva. Hangsúlyozom, hogy az összes közölt számértékek *hibátlanok.*

Az ölekből méterre való áttérésnek és viszont, van még egy *negyedik* gyakorlati eljárási módja is: *a grafikus módszer.* Ezen módszer *térképekről* levett hosszaknak átszámításakor lesz célszerűen felhasználható. Például az 1 hüvelyk = 40 öl kataszteri térképekhez oly lépték tartozik, a melylyel a térképi hosszakat *ölek-* és *tized ölekben* megkapjuk.

De készithetünk oly léptéket is, amely az ily térképről levett hosszakat közvetlenül *méterekben* és *tized méterekben* adja. Ugyanis mivel 1 : 2880 méretarányról van szó, 100 méternek *természetben,* $^{100}/_{2880}$ méter = *34·7 mm* hosszúság felel meg a térképen. Ezt a hosszt 100 egyenlő részre osztva, megvan az 1 : 2880 méretarányhoz tartozó méteres skála. (1 méter = 0.35 mm). Egy másik gyakorlati feladat a következő: *1 : 500* méretarányú térképhez oly léptéket készíteni, amely a térképről levett méreteknek *ölekben* kifejezett természetbeni hosszait engedi leolvasni. Megoldás: *100* öl egyenlő lévén 189.65 méterrel és 189.65 méternek az *1 : 500* méretarányban *379.3 mm* felelvén meg; tehát a *379.3 mm* hosszuságot 100 egyenlő részre osztva, meglesz a keresett öles skála. (Egy öl = 3.8 mm.)

Ha a tized öleket is fel akarjuk a léptéken tüntetni, úgy *transversalis* léptéket készitünk. Ennek lényege: egymásalatt (tetszőleges de *egyenlő* távolban) huzunk meg tizenegy párhuzamos vonalat és az utolsó vonalra a *kezdő merőlegestől balra* felrakjuk az **1 ölnek** megfelelő hosszt. Az igy nyert pontot a kezdő merőlegesnek az első párhuzamossal való metszéspontjával összekötve: ezen (transversalis) vonal az 1-tized, 2-tized, 3-tized stb méreteket vágja le rendre a párhuzamos vonalakon, a kezdő merőlegestől számitva.

II. Területek átszámitása:

az öles rendszerből a méterrendszerre és viszont.

A gyakorlatban idevonatkozólag két feladattal szoktunk találkozni:

A) négyzetölekben kifejezett területet *négyzetméterekben* kifejezni és viszont;

B) kataszteri holdakban kifejezett területeket *hektárokban* kifejezni és viszont.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ugy az *A)* mint a *B)* feladat háromféle módon oldható meg gyakorlatilag: *logaritmikusan, szorzással* és *segédtáblázattal.*

Mielőtt ezen három eljárást ismertetnők, *két* körülményre akarjuk a figyelmet felhívni.

1. a méterrendszerben a területegység a *hektár,* amely *10 000* négyzetmétert tartalmaz. Ha tehát valamely területet *négyzetméterre* élesen akarunk kifejezni, akkor *4 decimálisra* élesen kell azt felírni — feltéve, hogy egység a hektár. Tehát:

3.4652 hektár, az jelent 3 hektárt és 4.652 négyzetmétert. És viszont 5 hektár és 497 négyzetméter, az egyenlő:

5.0497 hektár, mert a négyzetmétereket adó számban az *egyes* mindig a *4-dik* decimálist adja a hektárokat kifejező számban.

2. Előfordulhat az az eset is, hogy *tized, század, ezred* és *tízezred* holdakat kell *ölekben* kifejezni. Minthogy egy kataszteri hold 1.600 négyzetölet tartalmaz, azért

0.1 hold = 160.0000 □ öl
0.01 „ = 16.0000 □ öl
0.001 „ = 1.6000 □ öl
és 0.0001 „ = 0.1600 □ öl.

Ebből a kis táblázatból azt a szabályt meríthetjük, hogy az esetben, ha ± 1 ölre élesen akarjuk a területet kifejezni, úgy legalább is

0.0005-re élesen kell a holdakat kifejező számot előállítani, illetve számításokban figyelembe venni. Hektároknál pedig az előbbiekből következik:

0.0001-re élesen kell a hektárokat kifejező számot előállitani illetve számításokban figyelembe venni: ha szélső esetben 1 négyzetmétert akarunk elhanyagolni.

A *holdak decimálisait négyzetölekben* kifejezve adja ezen táblázat:

hold	négyzetöl
0.1	160.0
0.2	320.0
0.3	480.0
0.4	640.0
0.5	800.0
0.6	960.0
0.7	1.120.0
0.8	1.280.0
0.9	1.440.0

Négyzetöleket holdak deciméljaiban kifejezni sohasem kell, hiszen mi a területeket egész *holdakban és négyzetölekben* fejezzük ki hivatalosan.

Ezeket előrebocsájtva közöljük az *átszámítási* állandókat ugy az ***A.*** mint a ***B.*** esetre.

1-ső eljárási módszer. A *négyzetölekben* kifejezett területi mérőszám logaritmusához + előjellel hozzáadjuk a

0.555 898 2926

átszámitási logaritmus értéket: az igy nyert összegnek *numerusa* lesz a kérdéses terület mérőszáma *négyzetméterekben* kifejezve.

Ha ± 0.5 négyzetméterre éles eredménynyel megelégszünk, úgy *10 000* négyzetölig **5**, azonfelül *100 000* négyzetölig 7 jegyű logaritmusokkal dolgozunk.

Ha *négyzetméterekben* kifejezett területi mérőszám logaritmusához hozzáadjuk + előjellel a

9.444 1017 074—10

átszámítási logaritmus értéket: az így nyert összegnek megfelelő *numerus* lesz a kérdéses terület mérőszáma *négyzetölekben* kifejezve. A kataszter céljaira *10 000* négyzetméterig **5** azonfelül **7** jegyű logaritmusokkal dolgozunk.

Ha **kataszteri holdakban** kifejezett területi mérőszám logaritmusához + előjellel hozzáadjuk a

9.760 0182 753—10

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

átszámítási logaritmus értéket: az így nyert összegnek *numerusa* lesz a kérdéses terület mérőszáma *hektárokban* (és annak decimálisaiban kifejezve).

Ha ± 0,0001 hektárra, azaz ± 1 négyzetméterre éles eredményt óhajtunk, ugy *10* holdnyi területig *5* jegyű, *1000* holdnyi területig pedig 7 jegyű logaritmusokkal fogunk dolgozni.

Ha *hektárokban* (és annak decimálisaiban) kifejezett területi mérőszám logaritmusához + előjellel hozzáadjuk a

0.239 9817 247

átszámító logaritmus értéket, a nyert összeg *numerusa* lesz a kérdéses terület mérőszáma *kataszteri holdakban* (és annak decimálisaiban) kifejezve.

A kataszter céljaira *10 hektárnyi* területig **5** számjegyű, *1 000* hektárnyi területig pedig **7** számjegyü logaritmusokkal fogunk dolgozni.

2-ik eljárási mód. A **négyzetölekben** kifejezett terület mérőszámát szorozva

3.5966 5095

szorzó állandóval, nyerjük a nevezett terület mérőszámát *négyzetméterekben* kifejezve. Ha ± 0.5 négyzetméterre éles eredményt óhajtunk, ugy **10 000** négyzetölig a

3.5967 szorzót, és

500 000 négyzetölig a

3.59665 szorzót használjuk.

A **négyzetméterekben** kifejezett terület mérőszámát szorozva a

0.278 03 643

szorzóállandóval, nyerjük a nevezett terület mérőszámát *négyzetölekben* kifejezve. Ha ± 0.5 négyzetölre éles eredményt óhajtunk nyerni, úgy *12 000* négyzetméterig a

0.2780 szorzót, és *120.000* négyzetméterig a
0.27804 szorzót használjuk.

A kataszteri holdakban kifejezett területi mérőszámot szorozva a

0.575 464 1526

szorzó állandóval, nyerjük a nevezett terület mérőszámát *hektárokban* (és annak decimálisaiban) kifejezve.

Ha ± 0.5 négyzetméterre, vagyis ± 0.00005 hektárra élesen akarjuk az eredményt, úgy *500* holdig a

0.575 464 szorzót,

1.000 holdig pedig a *0.5754 642* állandót használjuk.

A hektárokban kifejezett területi mérőszámot szorozva az

1.7377270

szorzó állandóval, nyerjük a nevezett terület mérőszámát *kataszteri holdakban* kifejezve.

Ha ± 0.5 négyzetölre élesen, azaz krb. ± 0.0003 holdnyi elhanyagolással akarjuk a területet megkapni, úgy:

10 hektárig az *1.7377* állandót
100 „ pedig az *1.73773* szorzó állandót fogjuk használni.

3-ik eljárási mód.

A négyzetölekben kifejezett területi mérőszámokat *négyzetméteresekre* és *viszont:* a következő két táblázattal végezhetjük el, ha számológép nem áll rendelkezésre.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

□ öl	□ méter
1	3.596 650 95
2	7.193 301 90
3	10.789 952 85
4	14.386 603 80
5	17.983 554 75
6	21.579 905 70
7	25.176 556 65
8	28.773 207 60
9	32.369 858 55

□ méter	□ öl
1	0.278 036 43
2	0.556 072 86
3	0.834 109 29
4	1.112 145 72
5	1.390 182 15
6	1.668 218 58
7	1.946 255 01
8	2.224 291 44
9	2.502 327 87

A holdakban kifejezett területi mérőszámoknak *hektárokra* és *viszont* való *átalakitása*: a következő két táblázattal végezhető el.

kat. hold	hektár
1	0.575 464 15
2	1.150 928 30
3	1.726 392 46
4	2.301 856 61
5	2.877 320 77
6	3.452 784 92
7	4.028 249 07
8	4.603 713 22
9	5.179 177 38

hektár	hold
1	1.737 727 0
2	3.475 454 0
3	5.213 181 0
4	6.950 908 0
5	8.688 635 0
6	10.426 362 0
7	12.164 089 0
8	13.901 816 0
9	15.639 543 0

Részletes átszámítási táblázatokat*) a magyar országos kataszteri felmérés adott ki 1911. évben, amelyek használati utasitással együtt 2 K 50 f.-ért megszerezhetők a m. kir. állami nyomdában (Budapest).

Záradékul még néhány — a gyakorlatban esetleg szükségelt — számadatot közlünk. Az *öl* régi alosztásai: a *láb*, *hüvelyk* és a vonás.

1 öl = 6 láb.
1 láb = 12 hüvelyk, tehát 1 öl = 72 hüvely.
1 hüvelyk = 12 vonás.

Ezen *régi alosztás* a méter-rendszerben kifejezve:

1 láb = 31.608 cm.
1 hüvelyk = 2.634 cm.
1 vonás = 2.19 mm.

*) *Igen jó*, részletes az osztrák táblázat: „Hilfs-Tabelle zur Umrechnung des niederösterreichischen Flächenmasses in das Meter-System. Wien. Hof-und Staatsdruckerei.“ Preis 2 Kr.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

További figyelemreméltó egyenlőségek:

1 mértföld = 4000 öl = *7.5859354 kilométer.*

1 □ *mtf.* = 10.000 hold = *5754.641526 hektár*

= *57.546415 km.*²

A gyakorlati geodézia terén működő műszaki egyénektől okvetlenül meg kell követelni a következő közelítő adatoknak fejből való tudását:

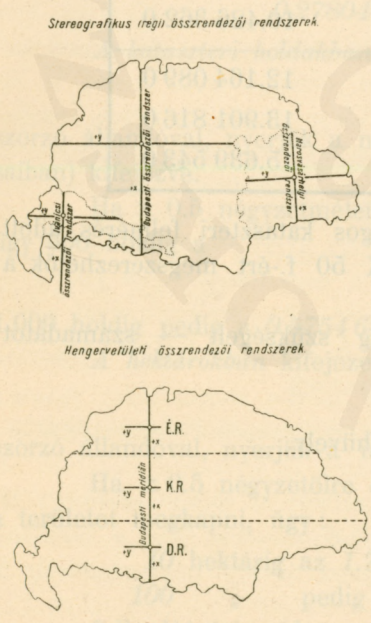
1 öl = krb. *1.9* méter.
1 láb = krb. *32.0* cm.
1 hüvelyk = krb. *2.6* cm.
1 □ öl = krb. *3.6* □ méter.
1 hold = krb. *0.6* hektár.
1 hold = krb. *5755.0* négyzetméter.
1 mértföld = krb. *7.6* kilométer.
1 □ mértföld = krb. *57.5* négyzetkilométer.
1 méter = krb. *0.56* öl.
1 □ méter = krb. *0.28* □ öl.
1 hektár = *1.7* hold.

II. FEJEZET.

A vizszintes számszerü felmérés alapképletei.

I. §. Alapfogalmak.

Számítási felület *a vízszintes sík,* amely vagy országos vetületi képsík vagy egy helyi vízszintes sík.



5. ábra.

Ezen síkon egy K kezdőpontban egy derékszögű koordináta tengelypárt képzelünk megrögzítve: az x tengely észak-déli irányú, az y tengely kelet-nyugati irányú. Az x tengely *déli* felét nevezzük „+ x *tengely*"-nek; az y tengely *nyugati* felét nevezzük „+ y tengely"-nek. Az ilyen koordináta rendszert: *délnyugati koordináta* rendszernek nevezzük. Ilyen koordinátarendszerek a *régi* és az *uj* magyarországi kataszteri koordinátarendszerek is. (5. ábra.)

Az x és y tengelyek a síkot négy *„térnegyedre osztják"* (6. ábra):

a) az *„első térnegyedben"* fekvő összes pontok x és y összrendezői + előjelűek;

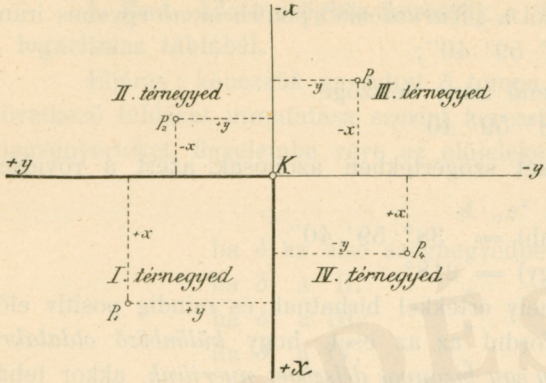
b) a *„második térnegyedben"* fekvő összes pontok x összrendezői — előjelűek, y-jaik + előjelűek;

c) a *„harmadik térnegyedben"* fekvő összes pontok x és y-jai — előjelűek;

d) a *„negyedik térnegyedben"* fekvő összes pontok x-ei + előjelűek, y-jai — előjelűek.

A pont helyzete a síkon egyértelműen tehát csakis az esetben lesz definiálva: ha az x és y *számértékeken kívül az x és y előjeleit is mindenkor feltüntetjük.* És így az

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.



6. ábra.

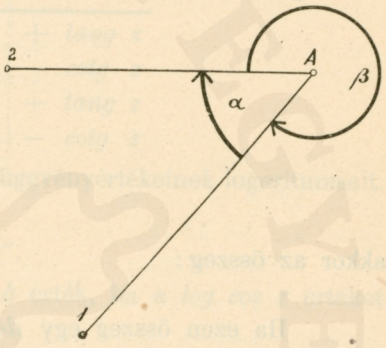
összrendezők alapján végzett számítások is *hamis eredményekre* vezetnek: ha az összrendezők *előjeleire* nem ügyelünk!

A tetszőleges P_1 pontot a tetszőleges P_2 ponttal összekötő *egyenes vonalat* nevezzük a „P_1 P_2 *oldalnak*“. Ennek hossza $s_{1,2}$ nevezetik „*oldalhossznak*“ vagy „*távolság*“-nak. Ezen egyenes vonalnak a $+x$ tengely irányával bezárt *positív* szögét nevezzük az „*oldal délszögének*“. Ezen alapvető definiciónál a következőket kell megjegyezni:

1. Mi mindig *positív* előjelű szögekkel fogunk dolgozni. Megkülönböztetjük a szög *bal* (vagy *kezdő)* szárát a szög jobb szárától.

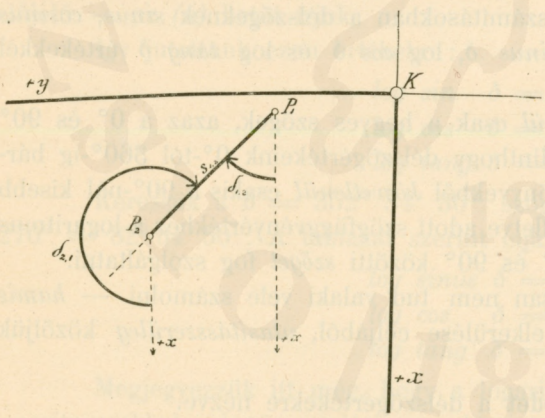
Például a 7. ábrán az α szögnek *bal* szára az A—*1.* oldal; a β szögnek bal szára pedig az A—*2.* oldal.

A bal szárt *positív*, azaz az óramutató forgási irányával egyenlő értelemben forgatva képzelve: jutunk mindig a jobb szárhoz, azaz iródik le a kérdéses — mindig $+$ előjellel veendő — szög.



7. ábra.

2. A P_1 P_2 oldal *délszögének bal szára* (kezdő szára) mindig a $+x$ tengely irányával párhuzamosan képzelt egyenes vonal. Aszerint azonban, amint a $+x$ tengelylyel párhuzamos egyenest (a 8. ábrán pontozva) vagy a P_1 vagy a P_2 pontban képzeljük tényleg megvonva: más és más délszögértékre jutunk. A 8. ábrából látható, hogy a két délszögérték mindig *180°-al különbözik* egymástól: tehát ismerve az egyik délszöget, ismeretes a másik is.



8. ábra.

Mindazonáltal *élesen* kell a kétféle délszöget egymástól megkülönböztetni és ha ezt elmulasztjuk megtenni, a legtöbb számítás végeredménye hamis lesz. A megkülönböztetés módja a következő:

a „P_1 *pontról a* P_2 *pontra menő irány délszöge*“ alatt értem ezen iránynak a P_1 *pontba* eltolt x iránnyal való *positív* szögét; ezt a délszöget $\delta_{1,2}$-vel jelöljük.

A „P_2 *pontról a* P_1 *pontra menő irány délszöge*“ alatt ezen iránynak a P_2 pontba eltolt x iránnyal való positív szögét értjük és $\delta_{2,1}$-el jelöljük.

Ugy a $\delta_{1,2}$ mint a $\delta_{2,1}$ mindig positív előjelűek és áll közöttük ezen összefüggés:

$$\delta_{2,1} = \delta_{1,2} \pm 180°.$$

Itt pontosan kell tudni mikor használtassék a $+$ és mikor a — előjel, azaz mikor adjunk $\delta_{1,2}$-höz 180°-ot, illetve mikor vonjunk ki $\delta_{1,2}$-ből 180°-ot.

A szabály egyszerű: mivel úgy a $\delta_{1,2}$ mint a $\delta_{2,1}$ mindig positív szögek és mivel egyike sem lehet nagyobb *360°*-nál, azért a 180° akkor $+$ előjelű, ha a $\delta_{1,2}$ szög *kisebb* 180°-nál és akkor — előjelű a 180°, hogyha $\delta_{1,2}$ nagyobb, mint 180°.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Számpélda. A „*Magashegy*“ pontból a „*Kurucdomb*“ pontra menő egyenes irány délszöge

$$\delta_{M.-K.} = 38° 59' 40'';$$

tehát a Kurucdombról—Magashegy pontra menő irány délszöge

$$\delta_{K.-M.} = 218° 59' 40''$$

Mivel a *percek* és a *másodpercek* a két szögértékben azonosak, azért a rövidség okáért így írjuk a két délszöget:

(Magashegy—Kurucdomb) = 38° 59' 40''.
(Kurucdomb—Magashegy) = 218°.

A délszögértékek 0°-tól 360°-ig bármely értékkel bírhatnak és mindig positiv előjelűek. Ha tehát valamely számításban előfordul az az eset, hogy *különböző oldalakra vonatkozó délszögértékeket össze kell adni, hogy egy bizonyos délszöget nyerjünk,* akkor tehát

1. tényleg összeadásról lesz szó,

2. a nyert összegből a 360°-ot annyiszor fogjuk kivonni, ahányszor az az összegben foglaltatik. Például: ha a délszögek értékei

172° 40' 34''
228° 37' 48''
96° 42' 38''
8° 5' 06''
195° 39' 40''
278° 46' 31''
349° 41' 15''

akkor az összeg:

1330° 13' 32''

Ha ezen összeg egy *délszöget* akar jelenteni, akkor — mivel a 360° háromszor foglaltatik benne,

250° 13' 32''

lesz a végösszeg: amely szintén mindig positív előjelű.

A vízszintes felvételekkel kapcsolatos számításokban a délszögeknek *sinus*, *cosinus* és *tangens* függvényértékeivel, illetve a log *sinus* δ, log *cos* δ és log *tang* δ értékekkel fogunk dolgozni.

A logaritmus táblák azonban *közvetlenül* csak a hegyes szögek, azaz a 0° és 90° közötti szögek szögfüggvényeit tartalmazzák. Minthogy délszögértékeink 0°-tól 360°-ig bármely értéket vehetik fel: azért a logaritmus könyvekből *közvetlenül* csakis a 90°-nál kisebb délszögek szögfüggvényértékeit állíthatjuk elő, illetve adott szögfüggvényértékhez a logaritmus könyv *közvetlenül* mindig csak *hegyes,* azaz 0° és 90° közötti *szöget* fog szolgáltatni.

Ezen körülmény — ha feltétlen biztosan nem tud valaki vele számolni — *hamis számítási eredményeknek lehet okozója.* Ennek elkerülése céljából, *utasításszerüleg* közöljük itt az *eljárási szabályokat.*

Különböztessünk meg négy **szögnegyedet** a délszögértékekre nézve.

(Hangsúlyozzuk azonban tüstént, hogy *szögnegyed* és *térnegyed* két egészen különböző fogalom: a kettőnek egymáshoz semmi köze.)

Az I-ső *szög*negyedben vannak a 0°-tól 90°-ig terjedő délszögértékek;
a II-ik *szög*negyedben vannak a 90°-tól 180°-ig terjedő délszögértékek;
a III-ik *szög*negyedben a 180° és 270° közötti délszögértékeket foglalja magában és
a IV-ik *szög*negyed a 270° és 360° közötti délszögértékeket tartalmazza.

Hangsúlyozzuk, hogy az itt elmondandók nemcsak *délszögekre,* hanem idomoknak 90°-nál nagyobb belszögeire is állanak szószerint. Két fő esetről, illetve feladatról van szó.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

1. Eset. Adott szöghöz keressük a *log sin, log cos* vagy *log tang* értékeket a logaritmus táblából.

Eljárás: képezzük az adott δ tompa szögből *kivonás* által a z *hegyes szöget* és a következő táblázat utmutatása szerint keressük ezen z *segédszög* alapján a kérdéses szögfüggvényértéket, figyelembe véve az előjeleket.

A „z" képzése:

ha δ az első szögnegyedben van, úgy $z = \delta$,
ha δ a II. „ „ „ $z = \delta - 90°$,
ha δ a III. „ „ „ $z = \delta - 180°$,
ha δ a IV. „ „ „ $z = \delta - 270°$.

A „z" felhasználása:

	sinus δ	cosinus δ	tangens δ
I. szögnegyed	$+ \sin z$	$+ \cos z$	$+ \tan z$
II. „	$+ \cos z$	$- \sin z$	$- \cot z$
III. „	$- \sin z$	$- \cos z$	$+ \tan z$
IV. „	$- \cos z$	$+ \sin z$	$- \cot z$

Számpéldák: Keressük a $\delta = 114° 40' 10''$ szögfüggvényértékeinek logaritmusait. Mivel a kérdéses szög a II. szögnegyedben fekszik, azért

$$z = \delta - 90° = 24° 40' 10''.$$

A táblázat szerint most már meglesz a *log sinus* δ érték, ha a *log cos* z értéket keressük;

meglesz a *log cosinus* δ érték, ha a *log sin* z értéket keressük és mögéje — jelezve azt, hogy negatív előjelű — az *(n)* betűt írjuk; meglesz a *log tangens* δ érték, ha a *cotangens* rovatban megkeressük a *log cotg* z értéket és mögéje — jelezve azt, hogy negatív előjelű — az *(n)* betűt írjuk.

Igy jutottunk ezen értékekre:

$$\log \sin \delta = 9.958\,4353$$
$$\log \cos \delta = 9.620\,5342 \ (n)$$
$$\log \tan \delta = 0.337\,9010 \ (n)$$

Keressük a $\delta = 352° 34' 30''$ szögfüggvényértékeinek logaritmusait: $z = \delta - 270^0 = 82^0\,34'\,30''$. A táblázat szerint eljárva:

$$\log \text{sinus } \delta = 9.111\,3576 \ (n)$$
$$\log \cos \delta = 9.996\,3430$$
$$\log \tan \delta = 9.115\,0145 \ (n).$$

Megjegyezzük itt még, hogy a logaritmusok mögé írt *(n)* betű nincs befolyással a logaritmusokkal való összeadási vagy kivonási műveletekre: csak a művelet eredményének numerusa *minus* előjelű lesz.

Például. Keresendő az $s = a \sin \delta$ értéke.

1. Ha a előjele $+$, de *log sin* δ mögött *n* betű áll, azért a *log a*-hoz mégis *hozzáadandó* a *log* δ érték és az így nyert összeg *numerusa,* azaz az s érték lesz *negatív* előjelű:

$$\log a = 3.4259$$
$$\log \sin \delta = 9.3254 \ (n)$$
$$\log s = 2.7513 \ (n)$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

2. Ha a előjele —, és *log sin* δ mögött is *n* betű áll, akkor is a *log a*-hoz *hozzáadandó* a *log* δ érték de most az összeg numerusa *positív* lesz:

$$\begin{array}{rl} \log a & = 3.4259\ (n) \\ \log \sin \delta & = 9.3254\ (n) \\ \hline \log s & = 2.7513 \end{array}$$

2. eset. Adva a *log sin* δ vagy *log cos* δ vagy *log tang* δ értéke (és előjele): kerestetik a δ szögérték.

A logaritmus tábla mindig egy hegyes, azaz 0° és 90° között fekvő értéket fog közvetlenül szolgáltatni. Legyen ezen hegyes szög jelzése, illetve értéke: α.

Ezen α szögből kell a valódi δ értéket meghatározni. Látnivaló lesz, hogy ezen feladat teljes megoldására *általános* szabályt adni *nem lehet.*

Ugyanis az adott szögfüggvény előjeléből (azaz, hogy a *log* mögött van-e *(n)* betü vagy nincs) nem egy, hanem **két szögnegyedre** tudunk csak következtetni. Nevezetesen

a *sinus*	előjele	+	+	—	—
a *cosinus*	„	+	—	—	+
a *tangens*	„	+	—	+	—
	az	I.	II.	III.	IV.

szögnegyedekben. Ha tehát adva van például a *sin.* értéke + előjellel, akkor az illető szög lehet az I. vagy II. szögnegyedben; ha adva van például a *cos* értéke — előjellel (azaz *log cos* az *(n)* betüvel) akkor az illető szög lehet a II. vagy III. szögnegyedben.

Ha azonban az illető szög nemcsak egyik szögfüggvényének *értékét és előjelét*, hanem egy másik szögfüggvényének **előjelét** (nagyságát nem) is ismerem, akkor már *biztosan tudjuk*, hogy melyik *szögnegyedben* van a δ, tehát a logaritmus könyv adta α hegyes szögből a valódi δ előállítható.

Például: adva *log tang* $\delta = 9.0897407\ (n)$ és valami utonmódon tudjuk, hogy e δ sinusának előjele is *negativ.* Akkor *bizonyos*, hogy a kérdéses szög a IV. szögnegyedben fekszik; tehát a logaritmus könyv adta $\alpha = 7°\ 0'\ 34''$ hegyes szögértékből a valódi δ-t most a $360° - \alpha$ képlettel nyerjük, azaz: $\delta = 352°\ 0'\ 34''$.

Általános szabály: ismerve, hogy *mely szögnegyedben* van a δ szög, az α hegyes szögértékből a δ szögértéket a:

$\delta =$	α	I.	szögnegyed
$\delta = 180° -$	α	II.	„
$\delta = 180° +$	α	III.	„
$\delta = 360° -$	α	IV.	„

képletekkel nyerjük.

Ha a δ nem délszöget, hanem egy *háromszög* belszögét jelenti — akkor — mivel ez esetben δ okvetlenül kisebb 180°-nál elég vagy a *cosinust* és annak előjelét, vagy a *tangenst* és annak előjelét ismerni, hogy megmondjuk melyik negyedben (I. vagy II.) fekszik a keresett belszög. Látnivaló, hogy még *ez esetben* sem elegendő például a *sinust* és annak előjelét ismerni: mert a *sinus* az I. *és* II. szögnegyedben egyaránt *positív* előjelű.

A gyakorlati geodéziában sűrűn szereplő oly feladatoknál tehát, a melyeknél adott szögfüggvényértékekből *délszögértékeket* kell keresni: egyszer és mindenkorra szabályokat kell levezetni, illetve felállítani a *szögnegyed* gyors és kétségtelen megállapítására. Az ilyen szabályokat azután a földmérőnek *feltétlenül biztosan kell alkalmazni tudni!*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

2. §. Miként nyerjük a gyakorlatban a délszögeket.

A gyakorlatban oldalak délszögeit vagy

I. az adott összrendezőkből való *számítás* által (neve *délszögszámítás*);

II. összefüggő poligon esetében a *törési szögek* mérése és összeadása által;

III. egy pontból induló sugarak esetén az *irányértékek tájékozása* által nyerjük.

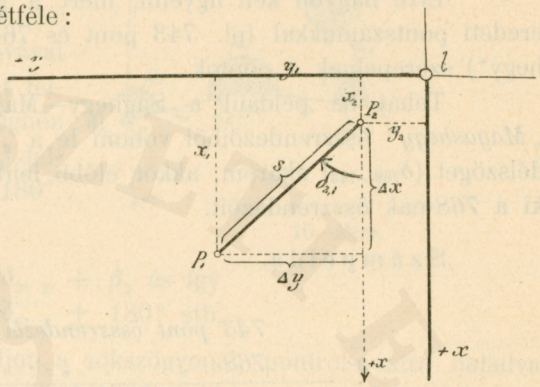
Ezen tájékozási művelet pedig lehet kétféle:

1. tájékozás belső irányokkal,

2. tájékozás *külső irányokkal.*

IV. Ismeretlen ponton, csupán belső irányok esetén: hátrametszés számítással.

Lássuk ezen eseteket egyenkint és részletesen.



9. ábra.

ad. I.

Adva a P_1 és P_2 pontok derékszögű sík összrendezői $(y_1, x_1; y_2, x_2)$ keresztetik a $\delta_{2,1}$ és ennek révén a $\delta_{1,2}$ délszögérték. A 9. ábrából látható, hogy

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tang\ \delta_{2,1}$$ azaz, hogy $log\ tang\ \delta_{2,1} = log\ \Delta y - log\ \Delta x.$

A Δy és Δx hosszakat a $P_2\ P_1$ *oldal* y illetve x irányú vetületeinek vagy *röviden részösszrendezőinek* nevezzük.

Az ábrából látható, hogy

$$\Delta y = y_1 - y_2$$
$$\Delta x = x_1 - x_2 \text{ és így}$$

a $\delta_{2,1}$ számítására alkalmas gyakorlati képlet:

1. $$log\ tang\ \delta_{2,1} = log\ (y_1 - y_2) - log\ (x_1 - x_2)$$

A jobboldali műveletet végrehajtva, nyerjük a keresett $\delta_{2,1}$ délszög tangensének logaritmusát: azután a logaritmus könyvből a megfelelő α hegyes szöget fogjuk megkapni. Hogy ezen α hegyes szögből a valódi δ délszöget nyerjük, a *szögnegyed* kérdését kell eldönteni.

Leghelyesebb gyakorlati eljárás: az $(y_1 - y_2)$ *és* az $(x_1 - x_2)$ előjeleit figyelembe venni. Ugyanis a 9. ábra szerint

2. $$\begin{cases} (y_1 - y_2) = \Delta y = s\ sin\ \delta_{2,1} \\ (x_1 - x_2) = \Delta x = s\ cos\ \delta_{2,1}; \end{cases}$$

és mivel az **s** (oldalhossz) előjele mindig positív: azért a Δy részösszrendező előjele **azonos** a $sin\ \delta_{2,1}$ és a Δx részösszrendezendő előjele azonos a $cos\ \delta_{2,1}$ előjelével.

Tehát képezve az $(y_1 - y_2)$ különbséget, nyerjük a keresett délszög *sinusának* és képezve az $(x_1 - x_2)$ különbséget, nyerjük a keresett délszög *cosinusának* előjelét: és így a

	I.	II.	III.	IV.
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+

táblázatból megállapítható, hogy melyik szögnegyedben fekszik a $\delta_{2,1}$ szög; ezt tudva a logaritmus tábla adta α hegyes szögből a $\delta_{2,1}$ szöget ezen séma szerint képezhetjük:

I. szögnegyed $\delta_{2,1} = \alpha$

II. „ $\delta_{2,1} = 180° - \alpha$

III. „ $\delta_{2,1} = 180° + \alpha$

IV. „ $\delta_{2,1} = 360° - \alpha$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Az ily módon nyert $\delta_{2,1}$ délszögből a $\delta_{1,2}$ délszöget a $\delta_{1,2} = \delta_{2,1} \pm 180°$ ismert képlettel képezzük.

Gyakorlati megjegyzés: hamis $\delta_{2,1}$ értékre jutunk, ha nem ügyelünk arra, hogy a *2, 1* indexxel jelölt δ délszöget ($\delta_{2,1}$) nyerjük a leírt módon, azaz ha az y_1-ből vonjuk le az y_2-őt és az x_1-ből az x_2-őt.

Erre nagyon kell ügyelni, mert a gyakorlatban nem *1* és *2* számokkal, hanem eredeti pontszámukkal (pl. 743 pont és 768 pont) esetleg *nevekkel* („Magashegy", „Sághegy") szerepelnek a pontok.

Tehát ha például a Sághegy—Magashegy délszöget ($\delta_{S.-M.}$) akarom, akkor a *„Magashegy"* összrendezőiből vonom le a *„Sághegy"* összrendezőit; vagy ha a 768—743 délszöget ($\delta_{768-743}$) akarom, akkor előbb leirom a *743*-nak összrendezőit és ebből vonom ki a *768*-nak összrendezőit.

Számpélda.

	y	x
743 pont összrendezői:	+ 62758.41	+ 678.95
768 „ „ :	+ 63908.54	+ 751.54
tehát $y_{743} - y_{768} =$	— 1150.13 ;	$x_{743} - x_{768} =$ — 72.59

Mivel a Δy azaz a *sin* $\delta_{768-743}$ előjele —
és a Δx „ „ *cos* $\delta_{768-743}$ „ —,
azért a $\delta_{768-743}$ délszög a III. szögnegyedben lesz, azaz:

$$\delta_{768-743} = 180° + \alpha.$$

Keressük tehát az α-t.

$$\log \Delta y = 3.0607469 \ (n)$$
$$\log \Delta x = 1.8608768 \ (n)$$
$$\log \operatorname{tang} \alpha = \log \Delta y - \log \Delta x = 1.1998701$$

és így:

$$\alpha = 86° 23' 19'', \text{ azaz}$$
$$\delta_{768-743} = 266° 23' 19'' \text{ és}$$
$$\delta_{743-768} = \delta_{768-743} \pm 180° = 86° 23' 19''.$$

További számpéldák találhatók a *„Sokszögelési Utasítás" 9. számu minta a 18., 22. és 23. §-okhoz* című lapján.

A most közölt számítási példa szabványos alakban írva a következő:

743	+ 62758.41	+ 678.95	3.0607469 *(n)*
768	+ 63908.54	+ 751.54	1.8608768 *(n)*
	— 1150.13	— 72.59	1.1998701

$$\alpha = 86° 23' 19''$$
délszög 768—743 $= 266° 23' 19''$
„ 743—768 $= 86°$

Oldalaknak délszögeit az összrendezőkből számítani: mindennapi feladata a földmérőnek, illetve háromszögelőnek. Egy-egy ily előírt délszögszámítást — *7 jegyü logaritmus könyvvel — 5 perc alatt feltétlenül el kell tudni végezni!*

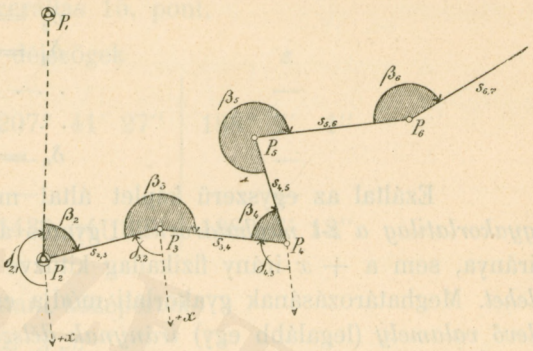
ad. II.

Összefüggő poligon esetében a *törési szögek* mérése és összeadása által nyerjük a délszögeket.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ennek alapfeltétele az, hogy a poligon *kiinduló oldalának délszöge* ismeretes. (10. ábra.)

A mért törési szögek az ábrán β-val vannak jelölve; látnivaló, hogy a törési szögek mind a poligon *ugyanazon* oldalán, azaz P_1-ről P_2, P_3 . . . P_7 felé haladva a *bal oldalán* vannak, továbbá, hogy a törési szögek *positív* szögek és mindig az óramutató irányával azonos értelemben definiálandók. Ezeket feltételezve, az ismert (adott) $\delta_{2,1}$ délszöghöz adva a β_2 törési szöget nyerjük a $\delta_{2,3}$ délszöget; tehát a $\delta_{3,2}$ délszög $= \delta_{2,3} \pm 180°$. Ez az eljárás most ismétlődik:



10. ábra.

$$\delta_{3,4} = \delta_{3,2} + \beta_3 \text{ és így}$$
$$\delta_{4,3} = \delta_{3,4} \pm 180° \text{ stb.}$$

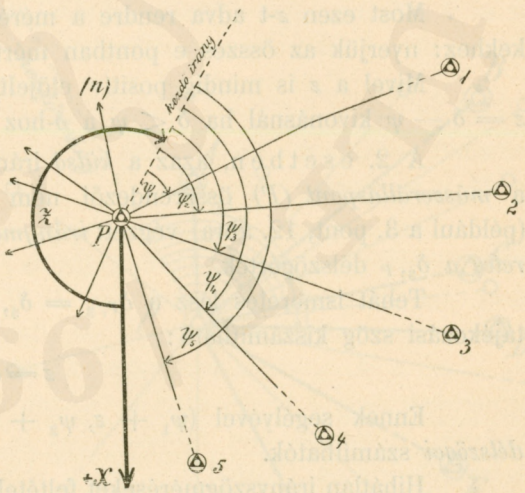
Ily módon akárhány oldalból álljon a sokszögvonal, pontról-pontra haladva és a törési szögeket az előző délszöghöz adva majd 180°-ot kivonva vagy hozzáadva: nyerjük folytatólagosan az oldalak mindkét végpontjabeli délszögeit.

Hangsúlyozzuk, hogy mivel egyetlen délszög sem lehet nagyobb 360°-nál, azért ha valamely pontban a $\delta + \beta$ összeg 360°-nál nagyobb értéket ad: a *360°* kivonandó.

ad. III.

A vízszintes felmérések alkalmával a teodolittal rendszerint *iránymméréseket* végezünk. Ezen mérések számbeli eredménye: az illető műszerálláspontból induló összes irányoknak úgynevezett **irányértékei** értve alatta azon szögeket, a melyeket az egyes irányok *egyazon kezdő iránnyal* bezárnak. A 11. ábrán a pontozott vonal *a kezdő irány* és a ψ_1, ψ_2, ψ_3 . . . ψ_n szögek az *1., 2., 3., . . . n irányok irányértékei*. Az irányértékek mindig positív előjelűek; értékük 0°-tól 360°-ig bármely érték lehet; forgási értelmük mindig az óramutató forgási értelmével azonos.

Az irányértékeket gyakorlatilag úgy nyerjük, hogy az egyes irányzások alkalmával végzett vízszintes kör (limbus) *leolvasások számtani középértékeit* képezzük.*)



11. ábra.

Ha az irányértékrendszer kezdő iránya szigorúan *azonos* volna koordináta rendszerünk $+x$ *irányával:* akkor — és ez bizonyításra nem szorul — a $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \ldots \psi_n$ irányértékek **azonosak volnának** a δ_1, δ_2, δ_3 . . . . δ_n délszögértékekkel.

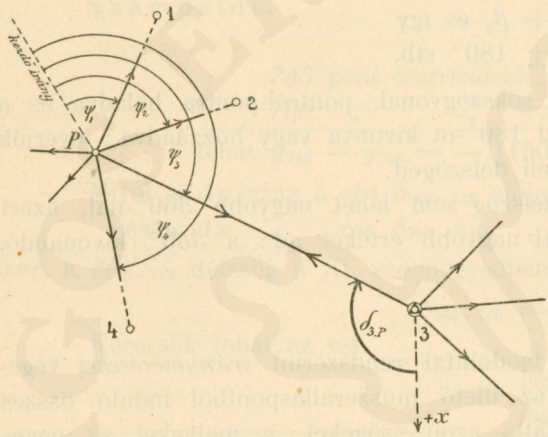
De a $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ irányértékekből előállíthatjuk elemi módon a δ_1, δ_2, ... δ_n délszögeket akkor is, ha valami uton-módon ismerjük a *kezdő irány délszögét.* Ezt a szöget z betűvel jelöljük és *tájékozási szögnek* nevezzük. Bizonyításra sem szorul, hogy

*) Bármely két irány (például 4. és 2.) által bezárt szöget az irányértékekből úgy nyerjük, hogy a *jobb* szárny irányértékéből (ψ_4) kivonjuk a *bal* szár irányértékét (ψ_2)-öt.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

$$\delta_1 = \psi_1 + z$$
$$\delta_2 = \psi_2 + z$$
$$\delta_3 = \psi_3 + z$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta_n = \psi_n + z$$

Ezáltal az egyszerű képlet által megkaptuk a módot arra is, hogy *miként kell gyakorlatilag a z-t meghatározni.* Ugyanis a z szöget — mivel sem az irányértékek kezdő iránya, sem a $+x$ irány fizikailag kitűzve nincs — közvetlenül teodolittal mérni *sohasem lehet.* Meghatározásának gyakorlati módja csak az lehet, *hogy ismeretes az iránysorozatban levő valamely* (legalább egy) *iránynak délszöge.*



12. ábra.

És itt két eset lehetséges:

1. ha *ismeretesek a műszerálláspont összrendezői,*

2. ha nem *ismeretesek* a műszerálláspont összrendezői.

Az 1. esetben azt mondjuk, hogy a *„tájékozás"* (azaz a z szög számítása) **belső** iránnyal történik; a 2. esetben azt mondjuk, hogy a *„tájékozás"* **külső** iránnyal történik. Az 1. esetben ugyanis a *műszerálláspont* és valamely megirányzott **ismert** pont (például a 11. ábrán az 5. pont) összrendezői alapján kiszámítjuk a kérdéses irány *délszögét* (δ_5) és ebből *levonva* ugyanezen irány irányértékét (ψ_5), nyerjük a z tájékozási szöget:

$$z = \delta_5 - \psi_6.$$

Most ezen z-t adva rendre a méréssel nyert ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, ψ_6 . . . ψ_n irányértékekhez: nyerjük az összes e pontban mért irányok *délszögértékeit.*

Mivel a z is mindig positív előjelü és 0°-tól 360°-ig terjedhető érték: azért a $z = \delta - \psi$ kivonásnál ha $\delta < \psi$ a δ-hoz 360°-ot kell hozzáadni.

A 2. esetben, azaz a *külső* iránnyal, illetve irányokkal való tájékozás esetében a *műszerálláspont (P)* összrendezői nem ismeretesek, de az egyik megirányzott ponton (például a 3. pont, 12. ábra) végzett *irányméresekből* (azok tájékozása eredményeként) *ismeretes a* $\delta_{3,P}$ délszögérték.

Tehát ismeretes lesz a $\delta_{P,3} = \delta_{3,P} \pm 180°$ délszögérték is, és igy a P pontbeli tájékozási szög kiszámítható:

$$z = \delta_{P,3} - \psi_3.$$

Ennek segélyével ($\psi_1 + z$, $\psi_2 + z$, . . .) most már a ***P***-n mért összes irányok *délszögei* számíthatók.

Hibátlan irányszögméréseket feltételezve és feltéve azt is, hogy a z meghatározásához felhasznált összrendezői értékek absolut pontosak: *egyetlen* (külső vagy belső) *ismert irány* alapján számított z érték absolut pontosan tájékozná irányértékeinket. Mivel a két feltétel között *egyik sem* teljesül egészen: azért csakis az oly z érték tekinthető gyakorlatilag megbízhatónak, amely legalább *két-három ismert* (külső vagy belső) *irányból van* (középértékként) levezetve.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Számpélda: Műszerállás 15. pont.

	ismert délszögek	z
$\psi_{18} = 3° 42' 50''$	—	—
$\psi_{26} = 19° 34' 26''$	$\delta_{15-26} = 207° 41' 27''$	$188° 7' 1''$
$\psi_{35} = 116° 37' 12''$	—	—
$\psi_{9} = 234° 40' 20''$	—	—
$\psi_{42} = 315° 47' 27''$	$\delta_{15-42} = 143° 54' 39''$	$188° 7' 12''$

stb.

A nyert két tájékozási értékből a számtani középérték:

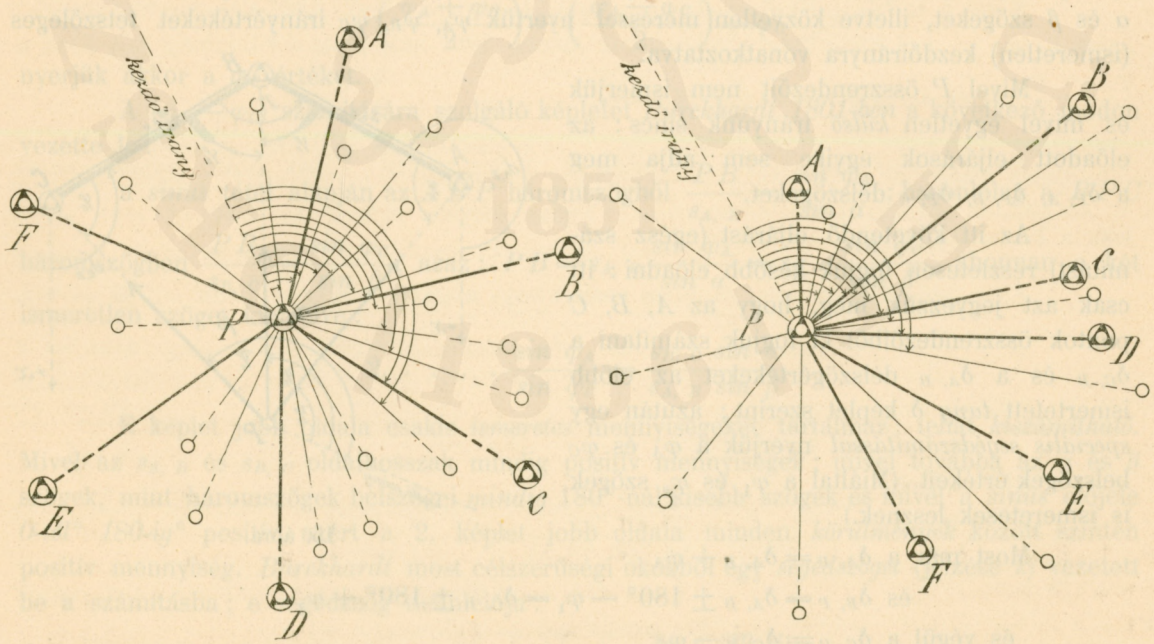
$$z = 188° 7' 6.5''$$

Ezen értéket adva rendre a ψ_{18}, ψ_{35}, ψ_{9} stb. irányértékekhez, nyerjük rendre ezen irányok délszögeit, azaz a δ_{15-18}, δ_{15-35}, δ_{15-9} stb. délszög értékeket.

Azon irányokat, amelyek alapján a z meghatározását végeztük: *tájékozó irányoknak* szoktuk nevezni. Gyakorlati szabály: *a z érték gyakorlatilag annál megbízhatóbbnak tekintendő, minél hosszabb oldalak a tájékozó* ***belső*** *irányok; a* ***külső*** *tájékozó irányok azonban lehetőleg ne legyenek hosszabbak mint a tájékozandó iránysugarak.* Ennek magyarázata az alappontok helyzetének valószínű (várható) hibáiban rejlik.

Továbbá — ugyancsak az alappontok helyzetének várható hibáiból kifolyólag — gyakorlatilag minél inkább oszlanak el az **összes égtájak** *szerint a tájékozó irányok:* annál megbízhatóbbnak mondhatjuk a levezetett z értéket. A tájékozó irányok gyakorlati megválasztásánál tehát azok *relatív hossza, sokasága* és *elosztása* veendő figyelembe.

A 13. ábrán *belső* irányok esetére egy ideálisan jó és egy *helytelen* tájékozórendszer van feltüntetve: az *A, B, C, D, E* és *F* irányok a tájékozó irányok.



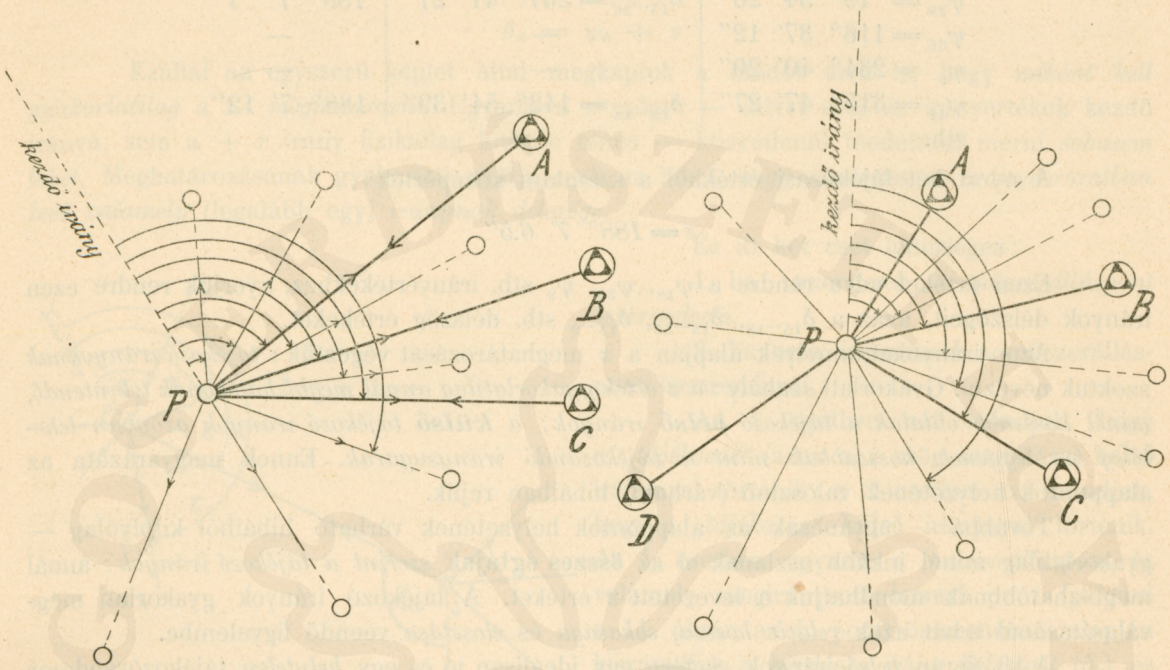
13. ábra.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A 14. ábrán pedig *külső* tájékozás esetére van két ily szélső eset feltüntetve:

ad. IV.

A gyakorlati geodéziának csak egyetlen oly feladata van, ahol a délszögek képzésére az itt *a), b), c)* alatt előadott eljárások egyike sem alkalmazható *közvetlenül:*

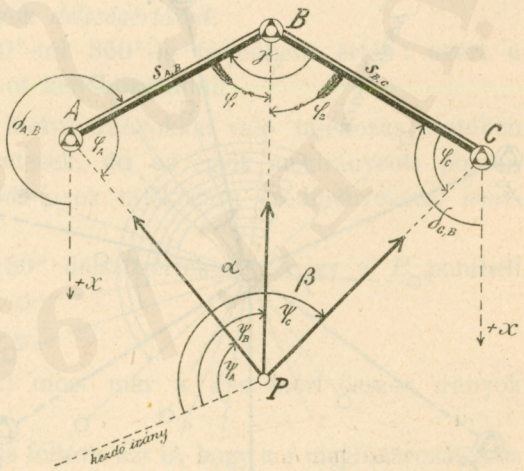


14. ábra.

ez *a tiszta hátrametszés feladata.* Lényege: látható legalább *három,* ismert összrendezővel biró pont; meg akarjuk határozni a P pontot (15. ábra); e célból a P ponton mértük az α és β szögeket, illetve közvetlen méréssel nyertük ψ_A, ψ_B, ψ_C irányértékeket tetszőleges (ismeretlen) kezdőirányra vonatkoztatva.

Mivel P összrendezőit nem ismerjük és mivel egyetlen *külső* irányunk sincs: az előadott eljárások egyike sem adja meg a $\delta_{P,\,A}$, $\delta_{P,\,B}$, $\delta_{P,\,C}$ délszögeket.

Az itt követendő eljárást (egész számítást) részletesen fogjuk később előadni: itt csak azt jegyezzük meg, hogy az A, B, C pontok összrendezőiből ki fogjuk számítani a $\delta_{C,\,B}$ és a $\delta_{A,\,B}$ délszögértékeket az előbb ismertetett *tang δ* képlet szerint; azután egy *speciális segédszámítással* nyerjük a φ_A és φ_C belszögek értékeit. (Miáltal a φ_1 és φ_2 szögek is ismeretesek lesznek.)



15. ábra.

Most már a $\delta_{A,\,P} = \delta_{A,\,B} + \varphi_A$

$$\text{és } \delta_{B,\,P} = \delta_{A,\,B} \pm 180° - \varphi_1 = \delta_{C,\,B} \pm 180° + \varphi_2$$

és végül a $\delta_{C,\,P} = \delta_{C,\,B} - \varphi_C$

képletek által nyerjük majd a mért irányok keresett délszögértékeit.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A φ_A és φ_C szögértékek számítására szolgáló képletek *levezetése a következő.*

Az A, B, C pontok összrendezői által kiszámíthatók a $\delta_{B,\,A}$ és $\delta_{B,\,C}$ délszögek és e kettő különbségeként nyerjük az ábrán γ-val jelölt szöget:

$$\gamma = \delta_{B,\,A} - \delta_{B,\,C};$$

továbbá ugyancsak az összrendezők segélyével kiszámíthatók (lásd a következő 3. §.-t) az AB és BC oldalhosszak.

Ismeretes *adott* mennyiségek tehát a

$$\gamma,\ log\ s_{A,\,B} \text{ és } log\ s_{B,\,C}$$

értékek; továbbá az α és β szögértékeket a P ponton mért ψ_A, ψ_B, ψ_C irányértékekből nyerjük:

$$\alpha = \psi_B - \psi_A$$
$$\beta = \psi_C - \psi_B.$$

Ezen 5 adat segítségével kell a φ_A és φ_C szögértékeket kiszámítani.

Mivel $\alpha + \beta + \varphi_C + \gamma + \varphi_A = 360°$, azért a két ismeretlen szög *összege:*

$$(\varphi_A + \varphi_C) = 360° - (\alpha + \beta + \gamma).$$

tehát 1. . . . . $\dfrac{\varphi_A + \varphi_C}{2} = 180° - \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$.

Mivel a jobb oldalon csupa ismeretes mennyiség áll, azért a két ismeretlen szögérték **összegének fele** ezen 1. képlet által már kiszámítható. Ha most sikerül egy csupa ismeretes mennyiséget tartalmazó képletet találni a két ismeretlen szögérték *különbségére* (illetve a $\dfrac{\varphi_A - \varphi_C}{2}$ kifejezésre), akkor külön a φ_A és külön a φ_C is ismeretesekké lettek, mert *összeadás* által

$$\left(\frac{\varphi_A + \varphi_C}{2}\right) + \left(\frac{\varphi_A - \varphi_C}{2}\right) = \varphi_A$$

nyerjük akkor a φ_A-t és *kivonás* által

$$\left(\frac{\varphi_A + \varphi_C}{2}\right) - \left(\frac{\varphi_A - \varphi_C}{2}\right) = \varphi_C$$

nyerjük akkor a φ_C értéket.

A $(\varphi_A - \varphi_C)$ számítására szolgáló képletet *Burckhardt 1801-ben* a következő módon vezette le:

a *sinus* tétel alapján az ABP háromszögből $\dfrac{PB}{s_{A,\,B}} = \dfrac{sin\ \varphi_A}{sin\ \alpha}$; hasonlólag a BPC háromszögben $\dfrac{PB}{s_{B,\,C}} = \dfrac{sin\ \varphi_C}{sin\ \beta}$, azaz: $PB = s_{A,\,B}\dfrac{sin\ \varphi_A}{sin\ \alpha} = s_{B,\,C}\dfrac{sin\ \varphi_C}{sin\ \beta}$, ahonnan a két ismeretlen szöget kiemelve:

$$2. \ldots \ldots \frac{sin\ \varphi_A}{sin\ \varphi_C} = \frac{s_{B,\,C}\ sin\ \alpha}{s_{A,\,B}\ sin\ \beta}.$$

E képlet jobb oldala csakis *ismeretes* mennyiségeket tartalmaz: tehát *kiszámítható.* Mivel az $s_{A,\,B}$ és $s_{B,\,C}$ oldalhosszak mindig positív mennyiségek; mivel továbbá az α és β szögek, mint háromszögek belszögei *mindig* 180°-nál kisebb szögek és mivel a *sinus* előjele *0-tól° 180-ig°* positív, azért a 2. képlet jobb oldala minden *körülmények* között szintén positív mennyiség. *Burckhardt* most célszerűségi okokból egy *segédszöget* (jelzése λ) vezetett be a számításba; e segédszög definiciója:

$$3. \ldots \text{cotangens } \lambda = \frac{s_{B,\,C}\ sin\ \alpha}{s_{A,\,B}\ sin\ \beta}.$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Mivel a jobb oldal, mint láttuk, mindig **positív** mennyiség, azért a *cotg* λ érték mindig positív; és mivel a *cotg* függvény az *I. és III. szögnegyedekben positív* előjelű: tehát a *3.* képletből számítva a λ szöget: a logaritmuskönyvből közvetlenül nyert *hegyesszög* feltétlenül kielégíti a 3. képletet. *Szóval a* λ *szög mindig a logaritmuskönyv adta hegyesszög lesz.*

A 3. képlet alapján a 2. képlet ezen alakot ölti:

$$\frac{\sin \varphi_A}{\sin \varphi_C} = \frac{1}{\operatorname{tang} \lambda}.$$

és így ismert goniometriai egyenlőségek alapján:

$$\frac{\sin \varphi_A - \sin \varphi_C}{\sin \varphi_A + \sin \varphi_C} = \frac{1 - \operatorname{tang} \lambda}{1 + \operatorname{tang} \lambda},$$

$$\text{ahonnan } \sin \varphi_A - \sin \varphi_C = (\sin \varphi_A + \sin \varphi_C)\frac{1 - \operatorname{tang} \lambda}{1 + \operatorname{tang} \lambda},$$

$$\text{mivel pedig } \sin \varphi_A - \sin \varphi_C = 2 \sin \frac{\varphi_A - \varphi_C}{2} \cos \frac{\varphi_A + \varphi_C}{2},$$

$$\text{és } \sin \varphi_A + \sin \varphi_C = 2 \cos \frac{\varphi_A - \varphi_C}{2} \sin \frac{\varphi_A + \varphi_C}{2},$$

$$\text{és } \frac{1 - \operatorname{tang} \lambda}{1 + \operatorname{tang} \lambda} = \operatorname{cotg} (\lambda + 45°),$$

amely ismeretes goniometriai egyenlőségek alapján helyettesítéssel a

$$4. \ldots \operatorname{tang} \frac{\varphi_A - \varphi_C}{2} = \operatorname{tang} \frac{\varphi_A + \varphi_C}{2} \operatorname{cotg} (45° + \lambda)$$

kifejezésre jutunk, amely a keresett $(\varphi_A - \varphi_C)$ értéket szolgáltatja. A jobb oldalon a $\frac{(\varphi_A + \varphi_C)}{2}$ és a λ szögértékek ismeretesek: az 1. és 3. képletek megoldásából.

Mivel a φ_A és φ_C szögek háromszögek belszögei, azaz 180°-nál kisebb szögek: azért a $(\varphi_A - \varphi_C)$ különbség is okvetlenül kisebb 180°-nál, tehát e különbség *fele*, azaz a $\frac{\varphi_A - \varphi_C}{2}$ érték *mindig kisebb lesz 90°-nál.*

És így a *log tang* $\frac{\varphi_A - \varphi_C}{2}$ értékből a logaritmus könyv adta *hegyesszögérték* lesz a keresett $\frac{\varphi_A - \varphi_C}{2}$ szögérték.

Ezen szög **előjele** lehet azonban **positív** vagy **negatív**: aszerint amint $\varphi_A \lessgtr \varphi_C$-nél.

A $\frac{\varphi_A - \varphi_C}{2}$ előjelét a 4. egyenlet *jobb oldalának* előjele szabja meg: azaz ha a *log tang* $\frac{\varphi_A + \varphi_C}{2}$ + *log cotg* (45° + λ) összeg mögé *n* betű (negativ) kerül, úgy a $\frac{\varphi_A - \varphi_C}{2}$ szög *negatív* előjelű.

Például:

$$\frac{\varphi_A + \varphi_C}{2} = 120°$$

$$\lambda + 45° = 110°$$

esetében a 4. képlet jobb oldalán *log tang* $\frac{\varphi_A + \varphi_C}{2}$ mögé *n* betű irandó és *log cotg*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

$(\lambda + 45°)$ mögé is n betű irandó: tehát a kettő összege, azaz a $log\ tang \frac{\varphi_A - \varphi_C}{2}$ mögé már nem kerül az n betű és így a $\frac{\varphi_A - \varphi_C}{2}$ érték positív.

Ha ellenben $\frac{\varphi_A + \varphi_C}{2} = 120°$ esetében $\lambda + 45° = 72°$, akkor a 4. képletben csak a $log\ tang \frac{\varphi_A + \varphi_C}{2}$ mögé irandó az n betű: tehát a $log\ tang \frac{\varphi_A - \varphi_C}{2}$ mögé is kerül az n betű és így a $\frac{\varphi_A - \varphi_C}{2}$ értéke negatív.

Ugyszintén hogyha $\frac{\varphi_A + \varphi_C}{2} = 82°$ és $\lambda + 45° = 113°$, akkor a 4. képletben csak a $log\ cotg\ (\lambda + 45°)$ mögé kerül az n betű: tehát a $log\ tang \frac{\varphi_A - \varphi_C}{2}$ mögé is kerülvén az n betű, a $\frac{\varphi_A - \varphi_C}{2}$ érték *negatív* előjelű lesz.

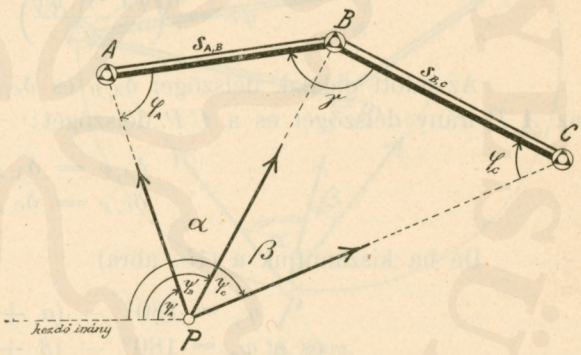
A magyar országos kataszteri felmérés (lásd Sokszögelési Utasítás 8. sz. minta „*Hátrametszés*" alatti képleteket) a segédszöget nem λ-val, hanem φ-val jelzi; $s_{A,B}$ helyett a és $s_{B,C}$ jelzés helyett a b jelzést alkalmazza; továbbá a φ_A-t x-el és a φ_C-t y-al jelöli.

Ezen jelzés mellett a 3. alatti eredeti képlet alakja:

$$cotang\ \varphi = \frac{b\ sin\ \alpha}{a\ sin\ \beta} = \frac{\frac{b}{sin\ \beta}}{\frac{a}{sin\ \alpha}}$$

amely képlet így is irható:

5. . $tang\ \varphi = \frac{\frac{a}{sin\ \alpha}}{\frac{b}{sin\ \beta}}$.



16. ábra.

Ezt a képletet használja a nevezett (8. számu) minta a segédszög számítására a 3. képlet helyett. Látnivaló a levezetésből, hogy $\varphi = \lambda$, azaz a φ is mindig a logaritmus könyv adta **hegyes- és positív előjelű szög!** Lényegesebb alaki eltérés mutatkozik a 4. alatti képletben, amely a nevezett (8. számu) minta szerint így jelentkezik:

6. . . . $tang \frac{x - y}{2} = tang \frac{x + y}{2}\ tang\ (45° - \varphi)$

ezzel szemben a 4. alatti képlet ugyanezen jelzéssel írva:

7. . . . $tang \frac{x - y}{2} = tang \frac{x + y}{2}\ cotang\ (\varphi + 45°)$

ami *tényleg azonosság* a képlettel, mert bármely hegyesszögre nézve

$$tang\ (45° - \varphi) = cotg\ (45° + \varphi)$$

hiszen ha a logaritmus könyvben például a

$$log\ cotang\ 72° = log\ cotang\ (45° + 27°)$$

értéket keressük, azt *tényleg* a $log\ tang\ 18° = log\ tang\ (45° - 27°)$ helyen találjuk meg.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A 6. és 7. képletek között gyakorlatilag a különbség csak ott van, hogyha: $\varphi > 45°$, akkor a $(45° - \varphi)$ szög *negatív* lesz, míg ugyanakkor a $45° + \varphi$ egy 90°-nál nagyobb szöget ad. A 6. képlet esetén a *negatív* $(45° - \varphi)$-nek *log tang* értéke után n betűt irunk, a 7. képletben pedig, mivel tompaszögről van szó $(45° + \varphi) - 90°$-nak keressük *a log tangensét* és mögéje (II. szögnegyed) irunk n betűt.

Tehát a 6. képlet *tényleg azonos* a 4., illetve 7. képlettel: tehát amit a 4. képletre nézve (különösen a $\frac{\varphi_A - \varphi_C}{2}$ előjelére nézve) elmondottunk, az szószerint érvényes a 6. képletre is.

Végeredményben nyertük tehát a

$$\frac{\varphi_A + \varphi_C}{2} \text{ és a } \frac{\varphi_A - \varphi_C}{2}$$

értékeket, (16. ábra) ahol az utóbbi szögérték előjele lehet vagy + vagy —.

Ezen két szögértékből *algebrai összeadás által* nyerjük a φ_A értéket:

$$\varphi_A = \left(\frac{\varphi_A + \varphi_C}{2}\right) + \left(\frac{\varphi_A - \varphi_C}{2}\right);$$

és *algebrai kivonás által* nyerjük a φ_C értéket:

$$\varphi_C = \left(\frac{\varphi_A + \varphi_C}{2}\right) - \left(\frac{\varphi_A - \varphi_C}{2}\right).$$

Az adott oldalak délszögei $\delta_{A,B}$ és $\delta_{C,B}$ segélyével (16. ábra) megkapjuk most már az AP irány délszögét és a CP délszögét:

$$\delta_{A,P} = \delta_{A,B} + \varphi_A$$
$$\delta_{C,P} = \delta_{C,B} - \varphi_C$$

De ha kiszámítjuk a (15. ábra)

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= 180° - (\alpha + \varphi_A); \\ \text{és a } \varphi_2 &= 180° - (\beta + \varphi_C); \end{aligned}\right\} \varphi_1 + \varphi_2 = \gamma$$

belszögeket is, akkor a BP oldal délszöge:

$$\delta_{B,P} = \delta_{B,A} - \varphi_1 = \delta_{B,C} + \varphi_2.$$

Látnivaló tehát, hogy **ismeretlen ponton** végezve tetszőleges (eszményi) kezdőirányra vonatkozó irányméréseket, ha egyetlen *külső irányzásunk* sincs: még akkor is lehet iránymérésünket tájékozni, azaz az *összes irányok délszögeit levezetni.*

A feltétel csak az: hogy az ismeretlen P ponton végzett irányzási sorozatunkban legyen *legalább is három, ismert pontokra menő irányunk is.* Van azonban egy eset, mikor így sem végezhető el a tájékozás: *amikor ugyanis* a $\varphi_A + \varphi_C$ értéke 180°; ekkor a λ segédszög a

$$cotg\ \lambda = \frac{s_{B,C}\ sin\ \alpha}{s_{A,B}\ sin\ \beta}$$

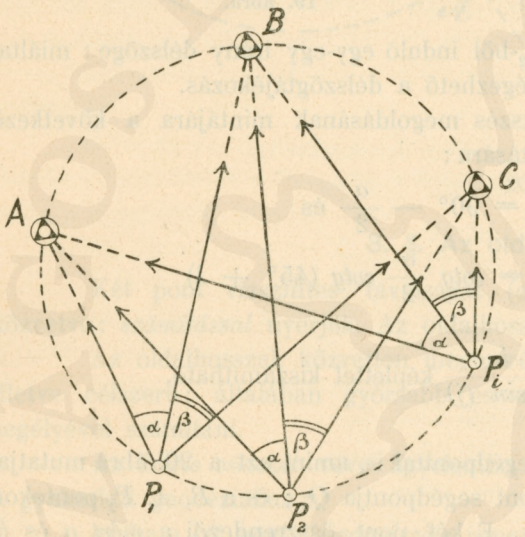
képletből $45°$-nak adódik. Tehát $45° + \lambda = 90°$, és így a 4. képletben a jobb oldalon

$$tang\ \frac{\varphi_A + \varphi_C}{2}\ cotg\ (45° + \varphi) = \infty.0$$

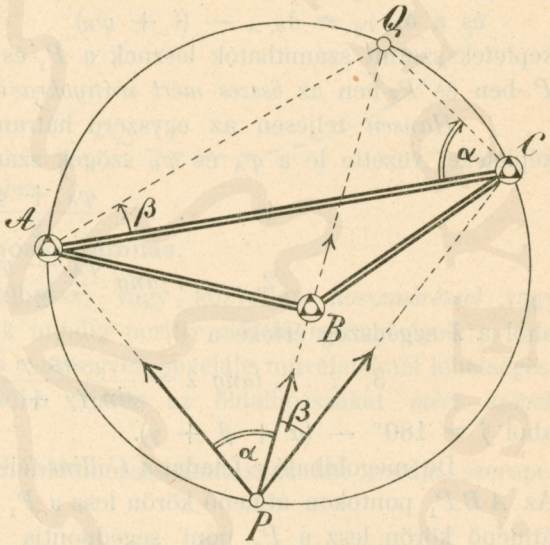
© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

azaz *határozatlan* a feladat : $\frac{\varphi_A - \varphi_C}{2}$ értéke tehát egyértelmüleg meg nem határozható. Ha $\frac{\varphi_A + \varphi_C}{2}$ értéke nem pontosan 180° de *közel* 180°, akkor nem *határozatlan ugyan, de pontatlan az eredmény.* Geometriailag a $\frac{\varphi_A + \varphi_C}{2} = 180°$ azt jelenti, hogy a műszerállás-pont $\boldsymbol{P}$ azon körön fekszik, (17. ábra) amely az A, B, C ismert pontokon át megrajzolva képzelhető : ezen kör bármely pontjából (P_1, P_2, ... P_i) az A, B, C pontokra menő hurok *ugyanazon* α és β szöget zárják be. Ezen kör a pontok vázlatrajza alapján mindig megrajzolható: tehát ez az eset a gyakorlatban mindig *elkerülhető.*

De nemcsak e körön — *neve veszélyes kör* — ne feküdjön a $\boldsymbol{P}$ pont, hanem *közel hozzá* sem feküdjön. Legjobb a megoldás ha az A, B, C pontok által alkotott **háromszög** belsejében van a $\boldsymbol{P}$ pont.



17. ábra.



18. ábra.

A hátrametszéssel való *tájékozásnak* egy érdekes és sok helyen alkalmazott de az előbbi megoldástól különböző megoldását adta *Collins* 1671-ben. A λ segédszög helyett itt egy Q segédpont szerepel, amelyet *„Collins-féle segédpontnak"* nevezünk. E megoldás lényegét a következőkben adjuk :

A három ismert *(A, B, C)* pont közül a *két szélső* ponton *(A* és *C)* és a *(P)* műszerállásponton át képzeljünk egy kört kirajzolva. (18. ábra.) Ez a *Collins*-féle kör : ezen fekszik a Collins-féle *segédpont (Q)* is. Még pedig *e körnek* a $P\,B$ egyenes hosszabbításával való metszése neveztetik a *Collins*-féle segédpontnak.

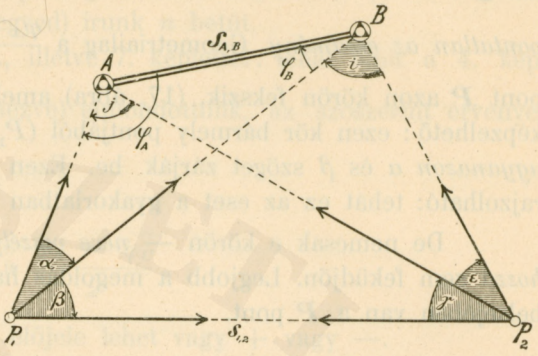
Ezen Q pontot az A és C pontokkal összekötve az $A\,C\,Q$ háromszögben $\boldsymbol{A}$-nál a β szög és $\boldsymbol{C}$-nél az α szög jelentkezik.

Tehát az $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{C}$ összrendezői és az α és β szögek (melyeket mi P-n mértünk) által a $\boldsymbol{Q}$ pont összrendezői *előmetszés* számítással számíthatók. De ha $\boldsymbol{Q}$ összrendezői ismeretesek, úgy Q és B összrendezői alapján kiszámítható a $\delta_{Q,\,B} = \delta_{B,\,P}$ délszög, amivel a cél el van érve, mert így a $\boldsymbol{P}$-n mért irányok közül az egyiknek délszöge már ismeretessé vállván : **a $\boldsymbol{P}$-n nyert (mért) összes irányértékek tájékozhatók.**

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A Hansen-féle pontpár esete.

Az ismeretlen ponton végzett iránymérés tájékozásának *elméletileg legérdekesebb* esete az, amidőn *két ismeretlen* ponton végeztünk egymásra és *két ismert* pontra irányzást. A 19. ábrán A és B az ismeretes pontok (tehát ismeretes $\delta_{A,\,B}$, $\delta_{B,\,A}$ és $s_{A,\,B}$), P_1 és P_2 az ismeretlen pontok: ezeken mértük — illetve a mért irányokból nyertük — az α, β, γ és ε szögeket, amelyek alapján ($\beta + \gamma + \varepsilon + i = 180°$) kiszámítható tüstént az i-vel jelölt szög.



19. ábra.

A P_1 és P_2 pontokon végzett iránymérések tájékozhatók lesznek: mihelyt a φ_A és φ_B szögeket ismerjük. Ekkor ugyanis a

$$\delta_{A,\,P_1} = \delta_{A,\,B} + \varphi_A$$

és a $\delta_{B,\,P_2} = \delta_{B,\,A} - (i + \varphi_B)$

képletek szerint számíthatók lesznek a P_1 és P_2-ből induló egy-egy irány délszöge: miáltal P_1-ben és P_2-ben az *összes mért irányokra* elvégezhető a délszögtájékozás.

Hansen teljesen az egyszerű hátrametszés megoldásának mintájára a következő képleteket vezette le a φ_A és φ_B szögek számítására:

$$1. \ldots\ldots \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2} \text{ és}$$

$$2. \ldots\ldots tang\ \frac{\varphi_A - \varphi_B}{2} = cotg\ \frac{\alpha}{2}\ cotg\ (45° + \lambda)$$

ahol a λ segédszög értéke a

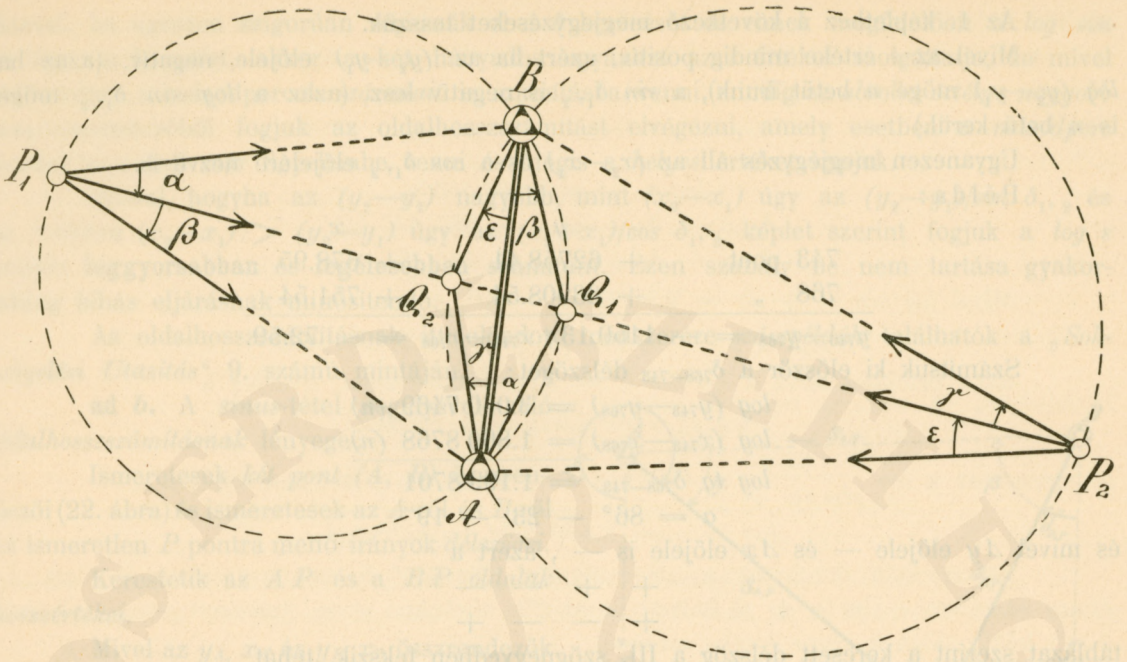
$$3. \ldots\ldots tang\ \lambda = \frac{sin\ \gamma\ sin\ i}{sin\ (\gamma + \varepsilon)\ sin\ (j)}$$ képlettel kiszámítható,

ahol $j = 180° - (\alpha + \beta + \gamma)$.

De megoldható e feladat a *Collins*-féle segédponttal is, amint azt a 20. ábra mutatja. Az $A\,B\,P_1$ pontokon átmenő körön lesz a P_1 pont segédpontja Q_1; és a B, A, P_2 pontokon átmenő körön lesz a P_2 pont segédpontja Q_2. E két pont összrendezői a *mért* α és β, illetve γ és ε szögek, valamint az $A\,B$ ismert hossz és $\delta_{A,\,B}$ ismert délszög alapján kiszámíthatók az $A\,B\,Q_2$ és a $B\,A\,Q_1$ háromszögekből előmetszés módjára. Ismerve a két segédpont *összrendezőit*, kiszámítható a $Q_1\ Q_2$ irány *délszöge* és így ismeretes P_1-ben a $\delta_{P_1,\,P_2}$ és P_2-ben a $\delta_{P_2,\,P_1}$ délszögértékek: tehát a P_1-en és a P_2-ön mért összes irányértékek tájékozhatók.

Még egy harmadik eljárás is vezet célhoz: a P_1, P_2 ismeretlen oldalhossznak (lásd 19. ábra) tulajdonítunk *tetszőleges* (kerekszámu) értéket ($s_{1,\,2}$) és kiszámítjuk a $P_1\ P_2\ B$ háromszögből a *sinus* tétel alapján a $P_1\ B$ oldalhosszt és az $A\ P_1\ P_2$ háromszögből ugyancsak a *sinus* tétel alapján a $P_1\ A$ oldalhosszt. Ezáltal az $A\ P_1\ B$ háromszögben ismeretes két oldal ($A_1\ P_1$ és $P_1\ B$) és a közbezárt szög (α) és így e háromszögben kiszámíthatók a φ_B és a φ_A szögértékek — amelyek segélyével a P_1 és P_2 pontokon mért irányok tájékozhatók. Ha az $A\ P_1\ B$ háromszögben a φ_A és φ_B szögértékeken kívül az $A\ B$ oldal hosszát is számítjuk, úgy az ily módon levezetett *log* $s_{A,\,B}$ értéket kivonva az A és B pontok összrendezőiből számítható valódi *log* $s_{A,\,B}$ oldalhosszból: nyerünk egy σ értéket, a melyet a felvett $P_1\ P_2$ és a levezetett $P_1\ B$ és $P_1\ A$ oldalhosszak logaritmusaihoz adva, nyerjük ezen oldalak *valódi* oldalhosszait. A talált szögek azonban nem szorulnak semmiféle javításra.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.



20. ábra.

3. §. Az oldalhosszszámítás.

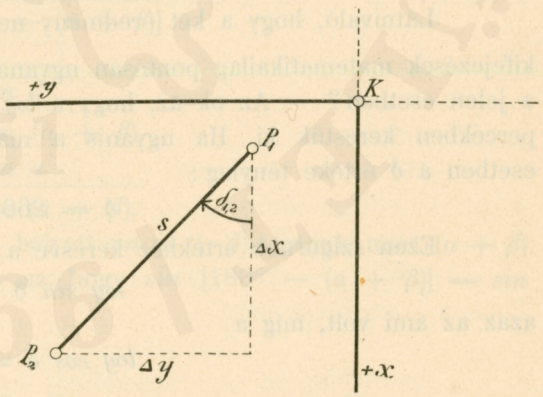
Két pont vízszintes távolságát (oldalhossz) vagy közvetlen *hosszméréssel* vagy közvetve: *számítással* nyerjük. Az oldalhosszak mindig positív előjelű mennyiségek.

Az oldalhosszak közvetlen megmérése csak egyes speciális műveleteknél lehetséges, illetve célszerű: általában gyorsabb és olcsóbb eljárás az oldalhosszakat *mért szögek* segélyével számítani.

Az *összes eseteket* véve figyelembe, az oldalhosszszámításnak két módja szerepel a gyakorlati geodéziában:

a) ha a *két pont összrendezője* ismeretes, az oldalhossz az összrendezők alapján számítható;

b) az oldalhosszszámítás a *sinus*-tétel segélyével.



21. ábra.

ad. *a.* Mivel a 21. ábra szerint

$$\frac{\Delta y}{s} = sin\ \delta_{1,2} \text{ és}$$

$$\frac{\Delta x}{s} = cos\ \delta_{1,2}, \text{ azért}$$

a keresett s oldalhossz az

$$s = \frac{\Delta y}{sin\ \delta_{1,2}} = \frac{\Delta x}{cos\ \delta_{1,2}} \text{ azaz a}$$

$$1. \ldots\ldots\ldots \quad log\ s = log\ (y_2 - y_1) - log\ sin\ \delta_{1,2}$$
$$= log\ (x_2 - x_1) - log\ cos\ \delta_{1,2}$$

gyakorlati képletekből számítható, ha a *délszöget* előzőleg az ismeretes

$$2. \ldots\ldots\ldots \quad log\ tang\ \delta_{1,2} = log\ (y_2 - y_1) - log\ (x_2 - x_1)$$

képletből levezettük.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Az 1. képlethez a következő megjegyzéseket tesszük.

Mivel az s értéke mindig positív, azért ha az $(y_2—y_1)$ előjele negatív, (azaz ha $log\ (y_2—y_1)$ mögé n betüt irunk), a $sin\ \delta_{1,2}$ is negatív lesz, (azaz a $log\ sin\ \delta_{1,2}$ mögé is n betű kerül.)

Ugyanezen megjegyzés áll az $(x_2—x_1)$ és a $cos\ \delta_{1,2}$ előjelére nézve is.

Példa:

	y	x
743 pont	+ 62758.41	+ 678.95
768 „	+ 63908.54	+ 751.54

$y_{743}—y_{768} = —\ 1150.13$; $x_{743}—x_{768} = —\ 72.59.$

Számítsuk ki először a $\delta_{768—743}$ délszöget:

$$log\ (y_{743}—y_{768}) = 3.060\ 7469\ (n)$$
$$—\ log\ (x_{743}—x_{768}) = 1.860\ 8768\ (n)$$
$$log\ tg\ \delta_{768—743} = 1.199\ 8701$$
$$\alpha = 86° — 23' — 19''$$

és mivel Δy előjele — és Δx előjele is — , azért a

$$+\ +\ —\ —$$
$$+\ —\ —\ +$$

táblázat szerint a keresett délszög a III. szögnegyedben fekszik, tehát

$$\delta_{768—743} = 180° + \alpha = 266°\ 23'\ 19''.$$

Ha az oldalhosszt a Δy és $sin\ \delta$-ból számítjuk:

$$log\ (y_{743}—y_{768}) = 3.060\ 7469\ (n)$$
$$—\ log\ sin\ \delta_{768—743} = 9.999\ 1368\ (n)$$
$$log\ s = 3.061\ 6101.$$

Ha az oldalhosszt a Δx és $cos\ \delta$-ból számítjuk:

$$log\ (x_{743}—x_{768}) = 1.860\ 8768\ (n)$$
$$—\ log\ cos\ \delta_{768—743} = 8.799\ 2640\ (n)$$
$$3.061\ 6128.$$

Látnivaló, hogy a két eredmény nem egyezik *szigorúan*, jóllehet a $\frac{\Delta y}{sin\ \delta}$ és a $\frac{\Delta x}{cos\ \delta}$ kifejezések matematikailag pontosan ugyanazon értéket képviselik! Mi az eltérés *oka* mégis a jelen esetben? — Az ok az, hogy a *log tang* δ-értékből a δ-t csak *kerekszámú* másodpercekben kerestük ki. Ha ugyanis a másodperc decimálisait is számítjuk, akkor jelen esetben a δ értéke tényleg:

$$\delta = 266°\ 23'\ 18.''92.$$

Ezen szigorúbb értékhez keresve a *log sin* és *log cos* értékeket:

$$log\ sin\ \delta = 9.999\ 1368$$

azaz az ami volt, míg a

$$log\ cos\ \delta = 8.799\ 2640$$
$$—\ 26.6$$
$$8.799\ 2613.4$$

26.6 egységgel lett kisebb és így most a $\frac{\Delta x}{cos\ \delta}$-ból számítva az oldalhosszt, a

$$log\ s = 3\ .\ 061\ 6101.6$$

értékre jutunk, amely — és *ezt jegyezzük meg tanulságként* — a $\Delta y/sin\ \delta$-nak azon értékével is egyezik, amelyet a *kerekszámú* másodpercekben kifejezett δ-val nyertünk volt.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Szóval, ha egészen szigorúan végezzük el a δ keresését és ennek megfelelően a *log sin* és *log cos* keresést, akkor a két hányados ugyanazt az s értéket szolgáltatja, de mivel kellemetlen a másodpercek *századait* is számításba venni, mindig az *absolut értékre nagyobb* részösszrendezőből fogjuk az oldalhosszszámítást elvégezni, amely esetben a *másodperc tizedeit* sem kell már figyelembe venni és mégis a *helyes* értéket kapjuk.

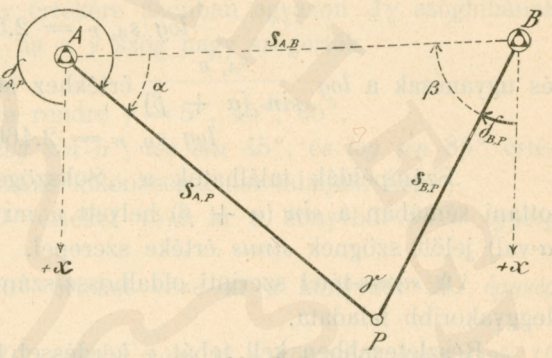
Szóval, hogyha az $(y_2 - y_1)$ nagyobb, mint $(x_2 - x_1)$ úgy az $(y_2 - y_1)/sin\ \delta_{1,2}$ és ha fordítva $(x_2 - x_1) > (y_2 - y_1)$ úgy az $(x_2 - x_1)/cos\ \delta_{1,2}$ képlet szerint fogjuk a *log s* értékét **leggyorsabban** és **legélesebben** számítani. Ezen szabály be nem tartása gyakorlatilag hibás eljárásnak minősitendő.

Az oldalhosszszámításnak itt előadott módszerére *számpéldák* találhatók a „*Sokszögelési Utasítás*“ 9. számú mintáján.

ad *b*. A *sinus*-tétel segélyével való *oldalhosszszámításnak* lényege:

Ismeretesek *két pont* (A, B) összrendezői (22. ábra) és ismeretesek az A-ról és B-ről az ismeretlen P pontra menő irányok *délszögei*.

Kerestetik az AP és a BP *oldalak hosszértékei*.



22. ábra.

Mivel az y_A, x_A és y_B, x_B összrendezők alapján kiszámithatók a $\delta_{A,B}$, $\delta_{B,A}$ délszög- és az $s_{A,B}$ hosszérték, továbbá mivel

$$\alpha = \delta_{A,P} - \delta_{A,B}$$
$$\text{és } \beta = \delta_{B,A} - \delta_{B,P}$$

azért ezen *előkészítő* számítás után az ABP háromszögben ismeretesek lesznek egy oldal $s_{A,B}$ és a mellette fekvő két szög α és β.

Tehát a *sinus*-tétel alapján

$$\frac{s_{A,P}}{s_{A,B}} = \frac{sin\ \beta}{sin\ [180° - (\alpha + \beta)]}$$
$$\frac{s_{B,P}}{s_{A,B}} = \frac{sin\ \alpha}{sin\ [180° - (\alpha + \beta)]}$$

ahonnan a keresett két oldalhossz

$$s_{A,P} = s_{A,B} \frac{sin\ \beta}{sin\ (\alpha + \beta)}$$
$$s_{B,P} = s_{A,B} \frac{sin\ \alpha}{sin\ (\alpha + \beta)}.$$

E két képletben *sin* $[180° - (\alpha + \beta)]$ helyett *sin* $(\alpha + \beta)$-*t* irtunk, mert $(\alpha + \beta)$ mindig *kisebb* lévén 180°-nál mindig igaz lesz az, hogy *sin* $[180° - (\alpha + \beta)] = sin\ (\alpha + \beta)$.

Gyakorlati alakja e képleteknek:

1. . . . $s_{A,P} = \left(\frac{s_{A,B}}{sin\ (\alpha + \beta)} \right) sin\ \beta$

2. . . . $s_{B,P} = \left(\frac{s_{A,B}}{sin\ (\alpha + \beta)} \right) sin\ \alpha.$

A két képletben a zárjelben levő tag azonos: annak értékét tehát csak egyszer kell képezni. Ugy az $s_{A,P}$ mint az $s_{B,P}$ oldalhossz előjelének mindig positívnek kell lenni: és tényleg a jobb oldalon szereplő összes tagok mindig positívek. Ugyanis $s_{A,B}$ mindig

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

positív előjelű és mivel $(\alpha + \beta)$ továbbá α és β kisebbek 180°-nál, azért $sin\ (\alpha + \beta)$ valamint $sin\ \alpha$ és $sin\ \beta$ előjelei mindig positívek. Ha vagy α vagy β vagy $(\alpha + \beta)$ nagyobb 90°-nál, ugy az illető szögből 90°-ot ki kell vonni és az így nyert hegyesszögnek *cosinusát* kell keresni.

Számpélda:

$$log\ s_{A,\ B} = 2.607\ 4015.$$
$$\delta_{A,\ P} - \delta_{A,\ B} = \alpha = 62°\ 15'\ 59''.$$
$$\delta_{B,\ A} - \delta_{B,\ P} = \beta = 43°\ 20'\ 9''.$$

Mivel $log\ sin\ (\alpha + \beta) = 9.9836949 - 10$, azért

$$log\ s_{A,\ B} - log\ sin\ (\alpha + \beta) = 2.6237066.$$

Ezen értékhez adva a $log\ sin\ \alpha = 9.9470025$ értéket, nyerjük a

$$log\ s_{A,\ P} = 2.570\ 7091 \text{ értéket,}$$

és ugyancsak a $log \frac{s_{A,\ B}}{sin\ (\alpha + \beta)}$ értékhez adva a $log\ sin\ \beta$ értéket, nyerjük a

$$log\ s_{B,\ P} = 2.460\ 2038 \text{ hosszértéket.}$$

Számpéldák találhatók a „Sokszögelési Utasítás" 8. számu mintáin 3. alatt. Az ottani sémában a $sin\ (\alpha + \beta)$ helyett a mi 22. ábránkon γ-val (nevezett séma rajzában α-val) jelölt szögnek *sinus* értéke szerepel.

A *sinus*-tétel szerinti oldalhossz-számítás a vízszintes felmérés egyik alapvető és leggyakoribb feladata.

Részletesebben kell tehát e kérdéssel foglalkoznunk.

Nevezzük az oldalhosszak képleteiben (1. és 2. képlet) szereplő $\frac{s_{A,\ B}}{sin\ (\alpha + \beta)}$ tagot röviden a kérdéses ABP háromszög **„sinus viszonyának"**.

Geometriailag érthetőbbek lesznek az elmondandók, hogy ha $sin\ (\alpha + \beta)$, illetve $sin\ (180 - [\alpha + \beta])$ helyett a $sin\ \gamma$ kifejezést írjuk. A

3. . . . $k = \frac{s_{A,\ B}}{sin\ \gamma}$ kifejezésben tehát az *ismeretes oldal és a vele szemközt fekvő belszög sinusa szerepel.* Mivel a k úgy az $s_{A,\ P}$ mint az $s_{B,\ P}$ kifejezésben szerepel:

4. . . . . $\begin{cases} s_{A,\ P} = k\ sin\ \beta \\ s_{B,\ P} = k\ sin\ \alpha \end{cases}$

azért a k kisebb vagy nagyobb pontossága kihat egyformán mindkét számítandó oldalhossz számítására.

Ha a k-ban szereplő $s_{A,\ B}$ oldalhossz hibája $= \Delta s$, és ha a $\Delta s / s_{A,\ B}$ hányadost l betűvel jelöljük (tehát $l.\ s_{A,\ B} = \Delta s$) és *„aránylagos hosszhibának"* nevezzük, akkor a 3. és 4. képletekből láthatólag, *hibátlan* α, β és γ értékek esetén, úgy az $s_{A,\ P}$ mint az $s_{B,\ P}$ számított oldalhosszértékek *„aránylagos hosszhibája"* szintén l lesz, tehát az $s_{A,\ P}$ lineáris hosszhibája lesz:

$$\Delta_{A,\ P} = l.\ s_{A,\ P};$$

hasonlólag az $s_{B,\ P}$ hosszhibája lesz:

$$\Delta_{B,\ P} = l.\ s_{B,\ P}.$$

Tehát ha például az AB oldalhossz *„aránylagos hosszhibája"* egy tízezrede (0.0001) a hossznak, úgy — hibátlan α, β, γ értékek esetén — a számított oldalhosszak is $^1/_{10000}$-re lesznek hibásak.

A logaritmikus számításban ez ugy jut kifejezésre: hogy ha például a $log\ s_{A,\ B}$ értéke a 7-ik logaritmus x egységére hibás (pl. 3.462 8958 helyett 3.462 8932, azaz

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

$x = log\ l = -26$ egység a 7-ik helyen) akkor úgy a $log\ s_{A,P}$ mint a $log\ s_{B,P}$ értékek is x egységgel lesznek hibásak (azaz jelen esetben 0,0000026 lesz mindkét logaritmus értékben a hiba.)

Ebből az is látható, hogy ha *utólag* valami úton-módon megtudjuk a kiinduló oldal hosszhibáját azaz $log\ s_{A,B}$ valódi értékét — a számítás ismétlése nélkül egyszerüen *javíthatók* a számított oldalhosszak logaritmusainak értékei.

Lássuk most a *szöghibák* hatását a számított oldalhosszakra.

Itt *gyakorlatilag* döntő jelentőségű a *„sinus viszonyban"*, azaz a k értékben szereplő $sin\ \gamma$ kifejezés.

Akár nagy, akár kis szögről van szó, egy bizonyos *szögmérő-műszer* mellett és *egyenlő körülmények között* a γ szöghibája $\Delta\gamma$ *mindig ugyanaz lesz.*

A $sin\ \gamma$, illetve közvetlenül a $log\ sin\ \gamma$ értékére azonban egyazon $\Delta\gamma$ szöghibának más hatása lesz ha a γ szög kicsiny és más, ha a γ szög nagy szögérték.

Egy számpélda mindent megmagyaráz:

legyen $\Delta\gamma = \pm 10''$ és legyen rendre $\gamma = 5°, 45°, 85°$.

Megnézve a logaritmus könyvben a $log\ sin\ 5°$, $log\ sin\ 45°$, és $log\ sin\ 85°$ értékeknél a $\triangle\gamma = \pm 10''$-nek megfelelő logaritmikus különbséget azt találjuk, hogy

$log\ sin\ 5°$ helyett $log\ sin\ 5°\ 0'\ 10''$ értéket véve ki a könyvből *2406 egység* (a 7-ik helyen);

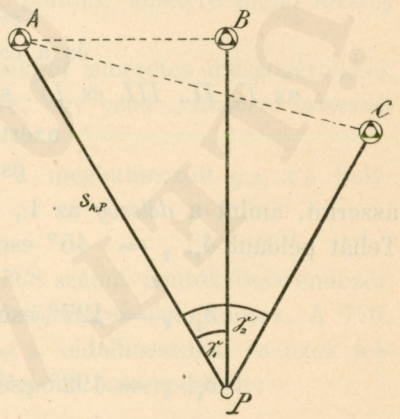
$log\ sin\ 45°$ helyett $log\ sin\ 45°\ 0'\ 10''$ értéket véve ki a könyvből *211 egység* (a 7-ik helyen); és végül

$log\ sin\ 85°$ helyett $log\ sin\ 85°\ 0'\ 10''$ értéket vévé ki a könyvből, már csak *19* egység (a 7-ik helyen) lesz a $log\ sin\ \gamma$ értékben az eltérés, azaz a logaritmikus hiba.

Ezen *hibák* pedig teljes értékükben átmennek a 3. képlettel a $log\ k$ értékébe és a 4. képletekkel a $log\ s_{A,P}$ és a $log\ s_{B,P}$ értékekbe.

Ugyanazon $A\,P$ oldalhossz értéke tehát ugyanazon $\Delta\gamma$ szöghiba esetében lényegesen más és más értékkel adódik a számításból aszerint amint igen hegyes, vagy 90°-hoz közel fekvő γ-val biró háromszögből számitjuk.

Ha tehát (23. ábra) módunkban áll az $s_{A,P}$ oldalhosszt oly két háromszögből számítani, amelyek közül az egyikben *igen kicsiny* a γ szög: úgy *csak* a nagyobb γ szöggel (γ_2) biró háromszög adta $s_{A,P}$ értéket fogjuk *megbizhatónak* tekinteni.



23. ábra.

Szélső eseteket feltételezve a különbség rendkivüli nagy lehet egyenlő $\Delta\gamma$ esetében. Ugyanis a $\Delta\gamma = 10''$-et feltételezve $\gamma = 5°$ esetén a $log\ s_{A,P}$ érték 0,0002406 egységre, azaz az $s_{A,P}$ érték *5 tízezredre*, azaz kilométerenkint *50 centiméterrel lesz hibás*, míg ugyanazon $\Delta\gamma$ de $\gamma = 45°$ esetében a $log\ s_{A,P}$ értékében jelentkező *211* egységnek kilométerenkint már nem 50, hanem csak *5* centiméter hiba felel meg.

A *„sinus viszonyban"* szereplő szög tehát lehetőleg nagy legyen; de azért a 90°-nál sokkal nagyobb szög is *kerülendő, mert akkor* az α és β lesznek kis szögek, ami azután ugyancsak káros a szemben levő oldalhosszra.

Legideálisabb a megoldás, ha a három szög közel egyenlő egymással azaz közel 60° : — egyazon Δ szöghibának akkor van ugyanis *legkevesebb* hatása a számítandó oldalak hossz értékeire.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ha azonban valamely geodéziai feladatban el nem kerülhető, hogy a γ szög kis hegyes szög legyen (például bázis fejlesztő hálózatban) akkor *e szög mérése a legtökéletesebb eszközökkel és eljárásokkal történjék.* Erre a tételre a háromszögelési bázisfejlesztő hálózat tárgyalásánál hivatkozni fogunk.

Ilyenkor ugyanis a γ-ban elkövetett $1''$ hibának nagyobb hatása lehet a számított oldalhosszakra, mint $10''$ hibának az α vagy β értékekben!

4. §. Derékszögű sík összrendezők számítása oldalhosszak és délszögek alapján.

Ismertettük az oldalak délszögeinek levezetési módjait és ismertettük az oldalak hosszainak meghatározási módjait.

Valamely oldalnak *hossza* és *délszöge* alapján kiszámíthatók — *helyes előjellel* — az illető oldal y és x irányú részösszrendezői (8. ábra) a

$$1. \quad \begin{cases} \Delta y = (y_2 - y_1) = s_{1,2} \sin \delta_{1,2} \\ \Delta x = (x_2 - x_1) = s_{1,2} \cos \delta_{1,2} \end{cases}$$

Ismerve tehát az 1. pont összrendezőit (y_1 és x_1) kiszámíthatók a 2. pont összrendezői:

$$2. \quad \begin{cases} y_2 = y_1 + s_{1,2} \sin \delta_{1,2} \\ x_2 = x_1 + s_{1,2} \cos \delta_{1,2} \end{cases}$$

Ugy az 1. mint a 2. képletben különös gondot kell fordítani a helyes előjelek figyelembe vételére.

Ha ugyanis az 1. pont összrendezői ismeretesek, akkor az 1. képletekben az *1. pontról a 2. pontra menő irány délszöge* $\delta_{1,2}$ *szerepel!* Szóval mindig az ismeretes pontról az ismeretlen pont felé értelmezett irány délszöge szerepel. Ezt figyelembe véve és tekintettel arra, hogy az $s_{1,2}$ oldalhossz előjele mindig positiv: a Δy részösszrendező előjele mindig a $\sin \delta_{1,2}$ és a Δx előjele mindig a $\cos \delta_{1,2}$ előjelével lesz azonos előjelű. Mivel a

$\sin \delta_{1,2}$ előjelei $+ + - -$

és a $\cos \delta_{1,2}$ „ $+ - - +$

az *I., II., III. és IV.* szögnegyedekben,

azért a Δy előjele is $+ + - -$

és a Δx „ „ $+ - - +$

aszerint, amint a *délszög* az I., II., III. vagy IV. szögnegyedben fekszik.

Tehát például $\delta_{1,2} = 45°$ esetén $\operatorname{sign} \Delta y = +$
$\operatorname{sign} \Delta x = +$;

$\delta_{1,2} = 127°$ esetén $\operatorname{sign} \Delta y = +$
$\operatorname{sign} \Delta x = -$;

$\delta_{1,2} = 192°$ esetén $\operatorname{sign} \Delta y = -$
$\operatorname{sign} \Delta x = -$;

és végül $\delta_{1,2} = 320°$ esetén $\operatorname{sign} \Delta y = -$
$\operatorname{sign} \Delta x = +$.

Az ilymódon nyert előjelekkel állítandók be a részösszrendező értékek a 2. képletekbe, ahol az y_1 és x_1 összrendezők saját előjelükkel szerepelnek.

Ha *egyetlen* oldalból számítjuk valamely pont összrendezőit az 1. és 2. képletek szerint: *semmiféle ellenőrzésünk nincs sem az adatok* (s, δ, x_1, y_1) hibás voltára, sem a *számítás hibás vagy hibátlan voltára.*

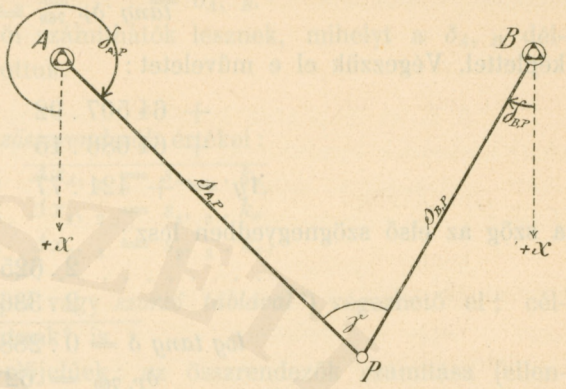
© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ha *két ismert pontból* ugyanazon P pontra induló oldalból számítjuk ki a P pont összrendezőit és a kétféle számítás egyező y_P és x_P értékeket szolgáltat, akkor (24. ábra) **bizonyos,** hogy

a) hibátlanok a felhasznált y_A, x_A és y_B, x_B értékek,

b) hibátlanok a felhasznált $\delta_{A,P}$ és $\delta_{B,P}$ délszögértékek, de

c) nem *bizonyos,* hogy hibátlanok voltak a felhasznált $s_{A,P}$ és $s_{B,P}$ hosszértékek.



24. ábra.

Ugyanis azon esetben, ha az $s_{A,P}$ és $s_{B,P}$ oldalhosszak *az ABP háromszögből a sinus tétel segítségével számíttattak,* és mi ott a k értékét (amely úgy $s_{A,P}$ mint az $s_{B,P}$ kifejezésében szerepel mint szorzó) vagy *azáltal* hogy az $s_{A,P}$ értéke hibás, vagy azáltal, hogy a γ, illetve *sin* γ értéke volt hibás, hibáson határoztuk volt meg: azért mégis *ugyanazon* y_P és x_P (de hibás) értéket fogja az AP és a BP oldallal való összrendező számítás szolgáltatni.

Ha azonban az $s_{A,P}$ és az $s_{B,P}$ oldalak hosszai a *sinus* tétel alapján **nem ugyanazon háromszögből számíttattak,** akkor egyező y_P és x_P esetén sem mérési, sem számítási hiba nem foroghat fenn.

Ezekre tekintettel a gyakorlatban a *következő eljárások* nyernek alkalmazást:

1. *két* háromszögből — akár szomszédosak, azaz közös oldallal bírók, akár nem — számítjuk az oldalhosszakat a *sinus* tétel segélyével — és azután az összrendező számítást *két* oly oldallal végezzük, amelyek nem ugyanazon háromszögből számíttattak,

2. vagy úgy járunk el, hogy egy háromszögből számított két oldallal végezzük el az összrendező számítását és ellenőrzésül *összeszámítjuk* (délszögszámítás összrendezők alapján) a nyert (y_P x_P) pontot egy oly *harmadik ismert* ponttal, amelyre menő *délszög* a méréseink tájékozása alapján ismeretes.

A *számított* délszögnek akkor egyeznie kell a mérésekből ismeretes délszögértékkel. Ha több ismert pontra menő délszögérték áll rendelkezésre, úgy ezen *„ellenőrző összeszámítást“* mindegyik pontra menőleg el fogjuk végezni.

Igy azután feltétlenül biztos tájékozást szerzünk a meghatározott y_P, x_P helyhatározók megbízhatóságáról.

Számpélda.

Ismeretes pontok: a *770* számú, a *769* számú és a *768* számú pontok összrendezői.

Az ezekről a meghatározandó P pontra menő *délszögértékek* ismeretesek. A 770, 768, P háromszögből kiszámítottuk volt az $s_{770,P}$ és $s_{768,P}$ oldalhosszakat és azok felhasználásával az 1. és 2. képletek alapján számítottuk a P pont összrendezőit:

$$y_P = +\ 64\,086.15$$
$$x_P = +\ 519.85.$$

Mint említettük, ismeretesek még a *769.* pont összrendezői:

$$y_{769} = +\ 64\,507.92$$
$$x_{769} = +\ 737.01$$

és a 769. ponton végzett mérések tájékozása alapján ismeretes a P pontról a 769 pontra menő irány délszöge is:

$$\delta_{769,P} = 62^\circ\ 45'\ 27''.$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Az ellenőrzés most már abból áll, hogy a P pont és *769* pont összrendezői alapján számítjuk a P, 769 irány délszögét a

$$tang\ \delta_{P,\ 769} = \frac{y_{769} - y_P}{x_{769} - x_P}$$

képlettel. Végezzük el e műveletet:

+ 64 507 . 92	+ 737 . 01
+ 64 086 . 15	+ 519 . 85
Δy = + 421 . 77	Δx = + 217 . 16,

a szög az első szögnegyedben lesz:

$$\begin{array}{r} 2\ .\ 625\ 0757 \\ 2\ .\ 336\ 7798 \\ \hline log\ tang\ \delta = 0\ .\ 288\ 2959, \text{ tehát} \end{array}$$

$$\delta_{P,\ 769} = 62^\circ\ 45'\ 25.''5.$$

Ezen érték a mérésekből ismeretes δ értékkel *1.''5*-re egyezik: tehát a P pont meghatározása (azaz az y_P, x_P összrendezők) feltétlenül megbízható.

Sokszögvonalaknál ismerve az oldalhosszakat és a délszögeket, az 1. képletek alapján számíthatjuk az összes oldalak részösszrendezőit, azután a 2. képleteket alkalmazva sorban (a kezdőpontból indulólag) az egyes pontokra: nyerjük az összes pontok összrendezőit. Itt is kell *mérési és számítási* ellenőrzésről gondoskodni. Ennek módjai:

1. ha a sokszögvonal *zárt*, azaz önmagába visszatér, úgy a Δy és a Δx részösszrendezők algebrai összegének *zérusnak* kell lenni:

$$\Sigma\ \Delta y = 0.$$
$$\Sigma\ \Delta x = 0.$$

Midőn ezt az ellenőrzést elvégeztük, úgy a 2. képletek szerint számítva folytatólagosan az összrendezőket, a végén ismét a kiinduló összrendezőkre kell jutni;

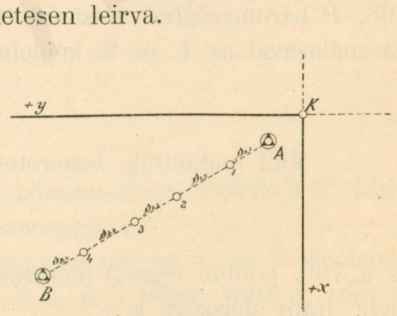
2. ha a sokszögvonal kezdő (P_o) és végpontja (P_n) nem azonos, de ismert összrendezőjű két pont: akkor a részösszrendezők algebrai összegei az $(y_n - y_o)$ és $(x_n - x_o)$ összrendező különbséggel kell egyeznie (nagyságra és előjelre):

$$\Sigma\ \Delta y = (y_n - y_o)$$
$$\Sigma\ \Delta x = (x_n - x_o)$$

Midőn ezt az ellenőrzést elvégeztük (illetve megengedett eltérés esetén erre az értékre kiegyenlítettük a részösszrendezőket) úgy a 2. képletek szerint számítva (y_o, x_o-ból kiindulva) folytatólagosan a sokszög töréspontjainak összrendezőit: a végén pontosan az adott y_n és x_n összrendezői értékeket kell nyerni. Az itt említett eltérés kiegyenlítése a *„Sokszögelési Utasítás"* 40. §-ában (25. oldal) van részletesen leírva.

Speciális módja az összrendező számításnak az úgynevezett *„mérési vonalpontok"* összrendezőinek számítása. (25. ábra.) *Egyazon egyenes vonalon fekvő pontok (1, 2, 3 . . .) összrendezőinek számításáról van szó.* Feltétel: a vonal két pontjának, rendszerint a két *(A* és *B)* végpontnak összrendezői ismeretesek; továbbá ismeretesek (megmérettek) a kérdéses pontok egymástóli távolságai:

$$s_{A,\ 1},\quad s_{1,\ 2},\quad s_{2,\ 3} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$



25. ábra.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ezen vonaldarabokat sokszögoldalaknak fogva fel, oly sokszögvonalunk van, amelynek összes délszögei azonosak, azaz:

$$\delta_{A,\,1} = \delta_{1,\,2} = \delta_{2,\,3} = \ldots = \delta_{A,\,B}.$$

Tehát az egyes vonaldarabok részösszrendezői számíthatók lesznek, mihelyt a $\delta_{A,\,B}$ délszöget, és annak *sinusát* és *cosinusát* számítottuk.

Legyen $sin\ \delta_{A,\,B} = k_y$

„ $cos\ \delta_{A,\,B} = k_x$, akkor a *részösszrendezők* értékei:

$$\Delta y_{A,\,1} = s_{A,\,1} \cdot k_y\ ;\quad \Delta x_{A,\,1} = s_{A,\,1} \cdot k_x$$
$$\Delta y_{1,\,2} = s_{1,\,2} \cdot k_y\ ;\quad \Delta x_{1,\,2} = s_{1,\,2} \cdot k_x$$
$$\Delta y_{2,\,3} = s_{2,\,3} \cdot k_y\ ;\quad \Delta x_{2,\,3} = s_{2,\,3} \cdot k_x,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

amely számítás legcélszerűbben *számoló géppel* vagy *szorzó táblával**) végezhető el; célszerűen alkalmazható itt „Koordináta táblázatunk“ is.

A részösszrendezők itt *mind azonos* előjelűek; az összrendezők számítása (ellenőrzés, illetve kiegyenlítés után) a 2. képlet szerint eszközölhető. Ha nem az $s_{A,\,1}$; $s_{1,\,2}$; $s_{2,\,3}$ stb. szakaszok hosszai, hanem az *A 1, A 2, A 3, A 4* . . . távolságok értékei ismeretesek, akkor ezen távolságok részösszrendezőit számíthatjuk a k_y és k_x értékekkel való szorzás által és az így nyert Δy és Δx értékekhez sorban adjuk az *A pont* összrendezőit: y_A és x_A-t.

Mivel ezen esetben az egyes pontok összrendezői egymástól függetlenül nyerettek: nincs más kellő számítási ellenőrzés, mint a számítás megismétlése.

A magyar országos kataszteri felmérés által a mérési vonalpontok számítására alkalmazott eljárás teljes magyarázattal a *„Sokszögelési utasítás“*-nak *„13. és 14. minta a 46. §.-hoz“* című lapjain található.

Szelvénysarkoknak egyik koordináta-rendszerből a másikba való átszámításakor előfordul az a speciális eset, hogy $s_{A,\,1} = s_{1,\,2} = s_{2,\,3} = \ldots = s_{n,\,B} = 1000$ öl, illetve 800 öl.

Ekkor a Δy illetőleg a Δx értékek egyenlők: tehát az $(y_B - y_A)$ különbséget és az $(x_B - x_A)$ különbséget elosztva a *szelvények* számával, nyerjük a szelvényhossznak és a szelvényszélességnek megfelelő Δy és Δx részösszrendezőjét.

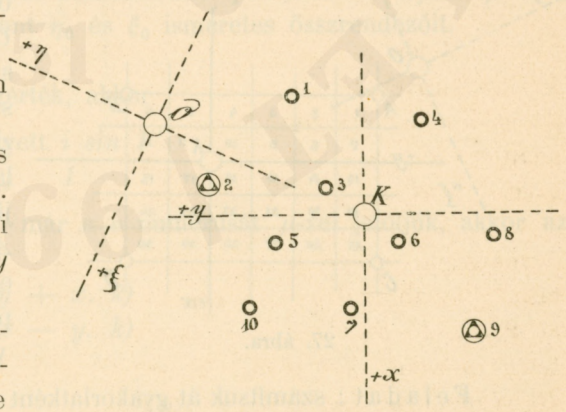
5. §. A derékszögű sík koordináták átszámítása más derékszögű koordinátarendszerre.

Ez az eset a gyakorlati geodéziában (nálunk az országos kataszteri felmérésben) igen sűrűn fordul elő: különösen önálló (nagyobb méretarányú) városmérések eredményeinek az országos koordinátarendszerbe való átszámításánál.

Lássuk a feladatot először tisztán geometriailag. (26. ábra.)

Ismeretesek valamely *önálló* városmérés eredményeként az 1., 2., 3. . . . . 10. pontoknak **méterekben** kifejezett összrendezői a K kezdőponton át fektetve képzelt x, y helyi koordinátarendszerre vonatkozólag.

Feladat: ezen 1., 2. . . . 10. pontok összrendezőit az *országos kataszteri* koordinátarendszerre vonatkozólag ölekben kifejezve kiszámítani.



26. ábra.

*) Legcélszerűbb a számítást „Scherer: Log. Trig. Rechen-Tafel“ című speciális táblázattal végezni; e táblázat a sokszögvonalak számítására is kitünően használható.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

E célból *legalább* két városi háromszögelési pontnak azonosnak kell lenni *két ismert* kataszteri ponttal. Legyen e két pont a 2. és 9. számú pontok. Ezeknek kataszteri összrendezői, vonatkozva a kataszteri ξ, η koordináta tengelyekre legyenek

$$\eta_2, \quad \xi_2$$
$$\eta_9, \quad \xi_9.$$

A 2. és 9. pontok kétféle összrendezői alapján kiszámítjuk mindenekelőtt a *2—9* oldal hosszának logaritmusát és a $\delta_{2,9}$ délszög értékét *mindkét rendszerben.*

Az országos rendszerbeli $\log s_{2,9}$-ből kivonva a városi rendszerbeli $\log s_{2,9}$ értéket, nyerjük a *„hosszátszámítási faktort"*, melyet röviden σ-val jelölök.

Azután ugyancsak az országos rendszerbeli $\delta_{2,9}$-ből kivonva a városi rendszerbeli $\delta_{2,9}$ értéket, nyerjük az i-vel jelölendő *„szögelforgatási"* értéket. Ugy a σ, mint az i előjele lehet — vagy + egyaránt.

Számítsuk most össze az összes átszámítandó pontokat a *2. ponttal* a *városi összrendezők alapján:* nyerjük a

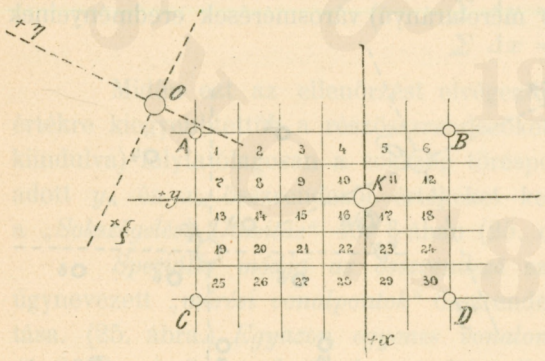
$$\log s_{2,1}; \ \log s_{2,3}; \ \log s_{2,4}; \ \ldots .$$
$$\text{és a } \delta_{2,1}; \ \delta_{2,3}; \ \delta_{2,4}; \ \ldots \ldots .$$

értékeket.

Most javítsuk meg ezen értékeket σ-val és i-vel, azaz adjuk hozzá (saját előjelükkel) a δ és az i értékeket: nyerjük a 2. pontból induló összes oldalak **délszögeit** és **oldalhosszait** *az országos kataszteri rendszerben.* Ezen adatok alapján számíthatók a $\Delta\eta$ és $\Delta\xi$ részösszrendezők; ezeket saját előjelükkel a **2. pontnak országos kataszteri összrendezőihez** adjuk: miáltal az összes pontok kataszteri összrendezőinek számértékeit nyerjük.

Ha nemcsak *két* pontnak ismerjük előre *mindkét rendszerbeli összrendezőit*, hanem 3 vagy még több pontnak: akkor a σ-t és i-t úgy nyerjük, hogy az egyik közös pontot összeszámítjuk a többi közös ponttal és az így nyert σ_1, σ_2 σ_3 . . . i_1, i_2 . . . értékekből képezett számtani középérték lesz a legmegbízhatóbb σ és i érték. Szabály: a lehető *leghosszabb oldalakból vezetni le* a σ és i faktorokat.

A városi **felvételi szelvények sarkainak** átszámítása az országos kataszteri koordinátarendszerbe — miután σ és i ismeretesek — legcélszerűbben úgy történik (27. ábra) hogy az ismertetett módon, városi összrendezőik alapján átszámítjuk az *A*, *B*, *C*, *D* szélső sarokpontokat a kataszteri rendszerbe, és most az (27. ábra) 1, 2, 3, . . 30. szelvények összes sarokpontjainak összrendezőit az előbbi cikk végén a mérési vonalakra előadott interpolatorikus eljárással nyerjük, elvégezvén az interpolálást, először az *AB*, *BD*, *DC* és *CA* vonalakon egymástól egyenlő távolságokban fekvő szelvénysarokpontokra azután az egyes belső parallel osztó vonaakra.



27. ábra.

Feladat: számítsuk át gyakorlatként a 27. ábrán látható hengervetületi szelvények összes sarokpontjait a stereográfikus koordinátarendszerre feltéve hogy:

$$\sigma = -0.277\,9462$$
$$i = +0^\circ\ 6'\ 31''$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

továbbá az A pont összrendezői a városi hengervetületben (mivel szelvényhossz = 600 méter, szelvényszélesség = 500 méter) a 22. ábra szerint:

$$y_A = + 2400.00 \text{ méter}$$
$$X_A = - 1000.00 \quad „$$

és ugyanezen pontnak stereográfikus összrendezői:

$$\eta_A = - 36\,427.46 \text{ öl}$$
$$\xi_A = + 126\,948.32 \text{ öl.}$$

Jegyzet: most tehát a B, C és D pontokat a mindkét rendszerben ismeretes A ponttal fogjuk összeszámítani és a σ és i-t figyelembe véve a B. C és D gráfikus összrendezőit nyerni.

Tömeges pont átszámításoknál (nem szelvénysarkoknál) amidőn 400—500 pontról van szó, az átszámítás a következő általános eljárás szerint eszközölhető.

1. Az egyik *közös*, azaz mindkét rendszerben ismeretes pontot választjuk ideiglenes *koordináta kezdőpontnak*, azaz az összes átszámítandó (x, y) összrendezőkből kivonjuk e pontnak (y_o, x_o) összrendezőit.

2. Ezen pontot összeszámítjuk most a többi *közös*, azaz mindkét rendszerben ismeretes pontokkal: nyerjük a σ és i középértékeket.

3. Most az átszámítandó pontoknak az *ideiglenes koordináta kezdőpontra vonatkozó* x, y összrendezőiből ezen általános képlet alapján nyerjük az ugyanazon *ideiglenes kezdőpontra vonatkozó* η, ξ összrendezőket:

$$1. \quad \begin{cases} \eta = x.\ a + y.\ b \\ \xi = x.\ b - y.\ a \end{cases}$$

ahol az a és b betűk két **állandó** mennyiséget jelentenek:

$$2. \quad \begin{cases} log\ a = \sigma + log\ sin\ i \\ log\ b = \sigma + log\ cos\ i. \end{cases}$$

(Az 1. és 2. képlet az analitikai geometriából ismeretes koordináta transformációs képletből:

$$x, = x\ cos\ \alpha - y\ sin\ \alpha$$
$$y, = x\ sin\ \alpha + y\ cos\ \alpha$$

ered.)

4. Az 1. képletet alkalmazva az összes átszámítandó pontokra: a nyert η és ξ összrendezőkhöz adjuk az ideiglenes kezdőpont η_0 és ξ_0 ismeretes összrendezőit.

Speciális esetek:

1. Ha az i szög $10'$-nél kisebb szögérték, akkor

$$sin\ i \text{ helyett } i\ sin\ 1''$$
$$\text{és } cos\ i \quad „ \quad 1$$

írható az 1., illetve 2. képletben. Ha most már a σ numerusát μ-vel jelöljük, akkor az 1. képlet alakja:

$$3. \quad \begin{cases} \eta = \mu\ (y + x.\ k) \\ \xi = \mu\ (x - y.\ k) \end{cases}$$

ahol k = *constáns* = $i\ sin\ 1''$.

$log\ sin\ 1'' = 4.685\,5749 - 10.$

A 3. alatti képlet számológéppel való számításra kiválóan alkalmas. Az i e képletben *másodpercekben* kifejezve helyettesítendő, tehát $i = 0°\ 2'\ 17''$ esetében *137* irandó az i helyére.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

2. Ha a közös pontokkal való összeszámítások középértékül az $i = 0° 0' 0''$ értéket eredményeznék, akkor a 3. képlet ezt az alakot ölti:

$$4. \quad \begin{cases} \eta = \mu . y \\ \xi = \mu . x \end{cases} \text{ azaz:}$$

$$log\ \eta = log\ y + \sigma$$
$$log\ \xi = log\ x + \sigma$$

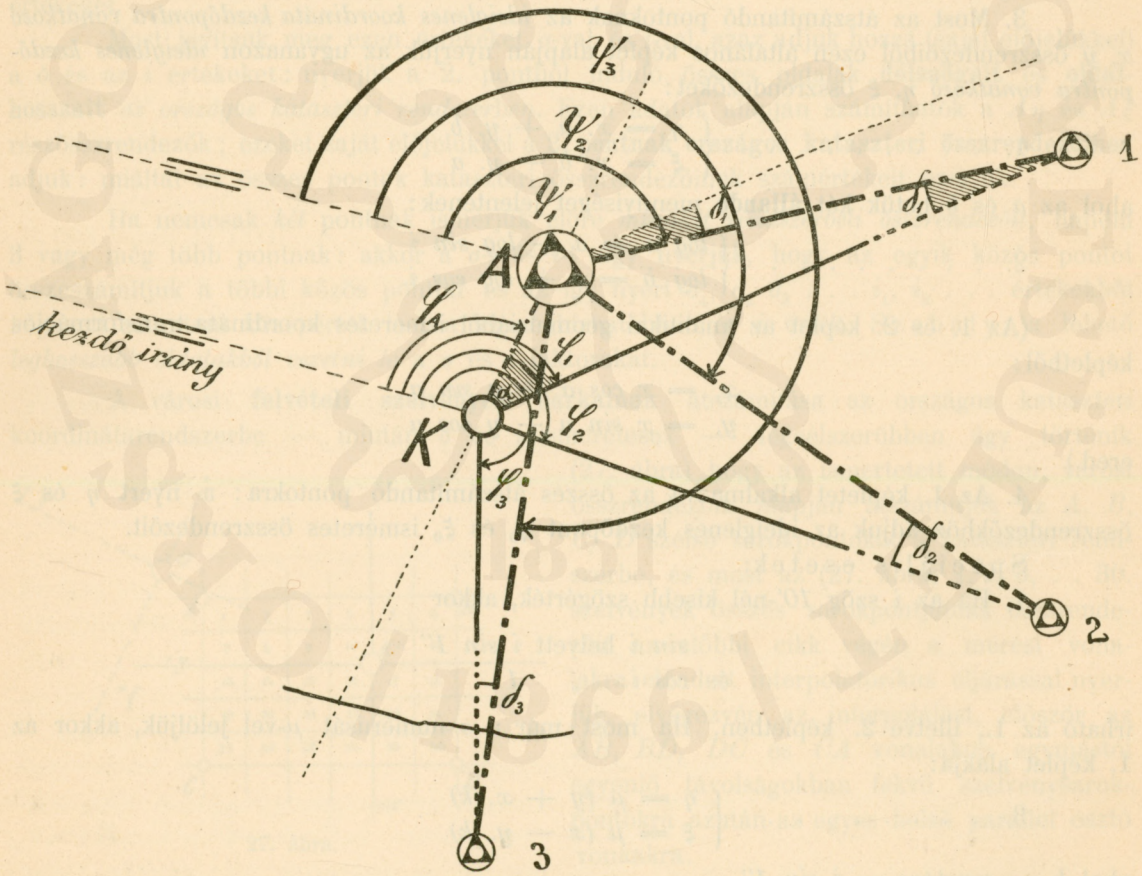
A 4. képlet tehát számológéppel vagy logaritmus könyvvel való számításra egyaránt igen alkalmas.

A 3., illetve a 4. képlet adta η és ξ összrendezőkhöz végezetül még hozzá kell adni a választott ideiglenes kezdőpont η_0 és ξ_0 összrendezőit.

6. §. Külső pontra vonatkozó irányértékek központosítása.

E feladat gyakorlati részét a háromszögelési fejezetben (II. kötet) tárgyaljuk: itt tisztán mint *geometriai feladatot* ismertetjük.

A K ponton műszerrel való iránymeréssel nyertük a tetszőleges kezdő irányhoz tartozó φ_A, φ_1, φ_2, φ_3 irányértékeket.



28. ábra.

Ha a kezdő irányt párhuzamosan A-ba eltolva képzeljük, továbbá az A-t az 1., 2., 3. pontokkal összekötve képzeljük: előállanak A-ban a ψ_1, ψ_2, ψ_3 irányértékek. Kérdés: miként lehet *számítással* a mért φ_1, φ_2, φ_3 értékekből a ψ_1, ψ_2, ψ_3 értékeket megkapni.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ha a *K,1* irányt párhuzamosan *A*-ba eltoljuk, ugy *A*-nál előáll az 1. pontnál δ_1-el jelzett szög és látnivaló, hogy

$$\psi_1 = \varphi_1 + \delta_1;$$

egészen analog jutunk a

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \varphi_2 + \delta_2 \\ \psi_3 &= \varphi_3 + \delta_3 \\ &- - - - - \\ \psi_i &= \varphi_i + \delta_i \end{aligned}$$

általános érvényű képletekre. A ψ és φ szögek — mint minden irányérték — mindig *positív* előjelű, 0°-tól 360°-ig terjedhető szögértékek lesznek. Minthogy azonban egyes pontokra nézve képzelhető az az eset, hogy a ψ *érték kisebb*, mint a φ érték: azért a δ javítások előjele *minus* is lehet.

Kérdés: mikor + és mikor — a δ előjele. Felelet: képzeljük, hogy az ***A* ponton állunk** és a *K pont felé nézünk;* akkor mindazon pontokra nézve, amelyek az *A K* iránytól balkéz felé esnek, a $\psi > \varphi$, azaz a δ *positív* és mindazon pontokra nézve, amelyek az *A K* iránytól ekkor *jobb* kézre esnek, a $\psi < \varphi$, azaz a δ *előjele negatív.* Erről egyszerű rajzi kisérletezéssel meggyőződhetünk: egyébként maga a számítási képlet *mindig meg fogja adni a helyes előjelt.*

Jó lesz azonban már *itt* megjegyezni, hogy helyes *vázlatból* bármely φ-hez tartozó δ-nak előjele megállapítható.

A δ-k számszerű meghatározása a *sinus* tétel segélyével történhetik. Például a δ_1 értékének meghatározása czéljából alkalmazva a *sinus* tételt az *A K* 1 hegyes háromszögre:

$$\frac{A\,K}{A\,1} = \frac{\sin\,\delta_1}{\sin\,\alpha_1} \text{ ahol}$$

$$\alpha_1 = \varphi_1 - \varphi_A \text{ és így}$$

$$\sin\,\delta_1 = A\,K\,\frac{\sin\,\alpha}{A\,1} = A\,K\,\frac{\sin\,(\varphi_1 - \varphi_A)}{A\,1};$$

Egészen hasonlóan az *A K 2* háromszögből

$$\sin\,\delta_2 = A\,K\,\frac{\sin\,(\varphi_2 - \varphi_A)}{A,\,2} \text{ és így tovább } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1.\ \ldots\ \sin\,\delta_i = A\,K\,\frac{\sin\,(\varphi_i - \varphi_A)}{A,\,i}.$$

Ezen képlet jobb oldalán az *A K* és az *A i* távolságok mindig *positív mennyiségek* és így a $\sin\,\delta_i$ *előjele azonos a* $\sin\,(\varphi_i - \varphi_A)$ *előjelével.*

Mivel a *sinus függvény* előjele az I. és II. szögnegyedben positív, azért a $\sin\,(\varphi_i - \varphi_A)$ előjele pozitív lesz, amig $(\varphi_i - \varphi_A)$ értéke kisebb 180°-nál; és mivel a *sinus* függvény a III. és IV. szögnegyedben *negatív,* azért a $\sin\,(\varphi_i - \varphi_A)$ előjele *negatív lesz,* amikor $(\varphi_i - \varphi_A)$ értéke 180°-nál nagyobb. *Tehát a szabály:* ha $(\varphi_i - \varphi_A) < 180°$, úgy δ_i előjele +, ha $(\varphi_i - \varphi_A) > 180°$, úgy δ_i '' előjele —; megjegyeztetik, hogy a $(\varphi_i - \varphi_A)$ kivonás számszerű eszközlésénél, ha φ_i kisebb mint φ_A, úgy a φ_i-hez *adunk 360°-ot* és így vonjuk ki φ_A-t!

A gyakorlatban a *K A* hossz rendszerint igen kicsiny hosszúság az A_i-hez képest és így a δ javítások is rendszerint kicsiny értékek. — Kicsiny szögeknél azonban a szög abszolut értéke és a szög *sinusa közel egyenlő értékek.*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Vegyük kézbe a 7 jegyű logaritmus táblát és keressük a

log sin 30′, *log sin* 1°, *log sin* 2°, *log sin* 3° értékeket:

log sin 30′ = 7.940 8419—10.
log sin 1° = 8.241 8553—10.
log sin 2° = 8.542 8192—10.
log sin 3° = 8.718 8002—10.

Most tekintsük ezen logaritmikus értékeket a 30′, 1°, 2°, . . . szögek *absolut értékei logaritmusainak*. Ha ez igaz, úgy hozzáadva ezen logaritmikus értékekhez a *log* ϱ'' értéket és az így talált összegek *numerusait felütve:* a 30′, 1° . . . szögeket másodpercekben kifejezve, azaz az

1800″, 3600″, 7200″, 10800″

értékekre kell jutni.

Tudva azt, hogy *log* ϱ'' = 5.3144251, végezzük el az összeadást:

log sin 30′ + 5.3144251 = 3.2552670; ennek
numerusa = 1799·98
= 1800″ — 0.″02.

Hasonlóan eljárva a többi értékekkel, a

δ = 1° esetén a 3600″ — 0.″18 értékre
δ = 2° „ „ 7200″ — 1.″46 „
δ — 3° „ „ 10800″ — 4.″93 „ jutunk.

T a n u l s á g: külpontos mérés esetén az irányjavítás képletében *elsőrendű* méréseknél δ = 30′-ig lehet *sin* δ helyett (δ)-t írni; a rendes geodéziai gyakorlatban pedig — ahol elégséges az 1″ pontosság — δ = *1° 30′*-ig lehet a

2. . . . $\delta_i^{(másodp.)} = \frac{sin\ (\varphi_i - \varphi_A)}{A,\ i}$ ($A\,K.\ \varrho''$) képlettel végezni a számítást.

Mivel felsőrendű méréseknél (A, i nagy távolság) a δ-k rendszerint kisebbek *30′*-nél és mivel az alsóbbrendü mérésekben a δ-k *1°*-nál nem igen lesznek nagyobbak: azért a *2.* képlet tekintendő *általános gyakorlati képletnek.* — Tegyük tehát ezen képletet vizsgálat tárgyává.

Egy bizonyos pontban, egyenlő A, i távolságok esetén δ_i maximum, ha *sin* (φ_i — φ_A) = ± 1, azaz ha (φ_i — φ_A) = 90° illetve 270°. — Tehát

3. . . . . $\delta_{max.} = \left(\frac{\varrho''}{A,\ i}\right) A\,K.$

Mivel ϱ'' egy igen nagy szám, azért nagy A, i oldalhosszak esetén is a $\left(\frac{\varrho''}{A,\ i}\right)$ tag egy **nagy egész szám.**

Például A, i = 5 km = 5000 meter esetében

$$\frac{\varrho''}{A,\ i} = \frac{206264.8}{5000} = 41.2 \text{ és így}$$

δ = 41.2 × $A\,K$, ahol az $A\,K$ meterekben helyettesítendő, amikor a δ másodpercekben adódik.

Ha tehát az $A\,K$ értékének meghatározásában ± 0.1 meter hibát követtünk el, úgy a δ-t ± (0.1 × 41.2 =) ± *4.″1*-re hibásan nyerjük.

Ha a jelen példához hasonló vizsgálatot különböző $A\,i$ távolságokra nézve elvégezzük, azt találjuk, hogy a *műszer-álláspontnak az irányok csúcspontjától való távolságát* **mindenkor**

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

$\pm$ **1 cm-re pontosan kell** megmérnünk, illetve meghatároznunk, ha a külpontos mérés által nem akarjuk szögértékeink megbízhatóságát csökkenteni.

Hibátlan AK érték esetén a 3. képlet szerint a $\delta_{max.}$ hibája csakis az Ai oldalhosszak hibáinak függvénye.

Mivel az AK méret a gyakorlatban alig lesz *10* méternél nagyobb (rendszerint jóval kisebb), azért a 3. képlet így írható:

$$4. \ldots\ldots \delta_{max.} = \frac{206\,264.8 \times 10}{Ai} = \frac{2\,062\,648}{Ai.}$$

Feltéve, hogy $Ai = 5000$ méter, $\delta_{max.} =$ **412.″5,** és feltéve, hogy $Ai = 5010$ méter, a 4. képlet a $\delta_{max.} = 411.''7$ értéket fogja szolgáltatni. Tanulság: ugyanakkor ($Ai = 5000$ méter), amikor az AK-ban elkövetett *10 cm* hiba a δ értékben 4″ hibát okozott, ugyanakkor az Ai-ban elkövetett *10 méteres* hiba csak *0.″8* hibát okoz!

Mivel $Ai = 50\,000$ méter esetében az Ai-ben elkövetett $\pm$ 20 méter hibának *0.″008* felel csak meg; $Ai = 2000$ méter esetében pedig az Ai-ban elkövetett $\pm$ 5 méter hibának $\pm$ *2.″5* felel csak meg, azért kimondhatjuk, hogy az Ai *távolság* nagysága szerint *5 métertől 20 méterig* hibás (közelítő) Ai értékkel lehet a gyakorlatban *szabatos* központosító számításokat végezni.

Ebből kifolyólag az Ai helyett (ha kellemesebb) a Ki érték használható, illetve az Ai értéket (ha 2000 méternél nem kisebb) elegendő lesz egy pontos vázlatból (kitüzési, illetve észlelési vázlatból, amelyek e könyv 3. számú rajzmellékletén láthatók) *lemérni* és az így nyert értékkel végezni a *szabatos* δ számítást.

Hátra van még a φ_A-ban elkövetett hiba hatását vizsgálni. Ez azért fontos, mert rendszerint *nincs módunkban a* φ_A-t *pontosan mérni.*

A 2. képlet szerint a φ_A-ban elkövetett hiba közvetlenül a *sin* $(\varphi_i - \varphi_A)$ értékére hat ki. Vegyük elő a *„0.01 hosszegységre éles: Koordináta-Táblázatot“*; ott azt találjuk, hogy

sin 0° 1′ és *sin 0° 2′* között a különbség $= 0.0003$
sin 44° 59′ és *sin 45° 0′* „ „ „ $= 0.0002$
sin 78° 0′ és *sin 78° 1′* „ „ „ $= 0.0001.$

Tehát a φ_A-ban elkövetett $\pm$ *1′* hibának ekkora hatása van a *sin* $(\varphi_i - \varphi_A)$ értékre. Irjuk most a 2. képletet ezen alakban:

$\delta_i = sin\ (\varphi_i - \varphi_A) \left(\frac{AK.\varrho''}{Ai}\right)$, és azt a szélső (kedvezőtlen) esetet, hogy $AK = 10$ *méter*, $Ai = 2000$ méter feltételezve, szóval, hogy az

$$\frac{AK.\varrho''}{Ai} = \frac{2\,062\,648}{2000} = 1031.3$$

ezt a nagy értéket veszi fel: a φ_A-ban elkövetett $\pm$ *1′* hibának szélső értékű hatása a δ értékre lesz:

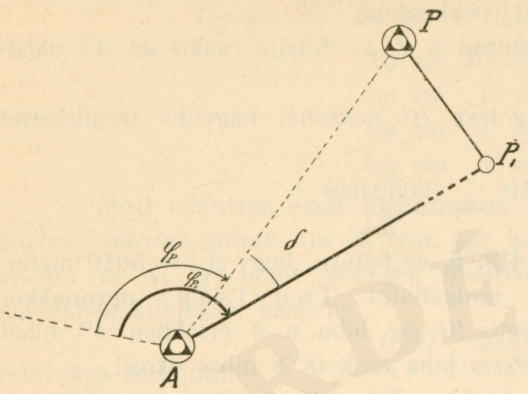
$$0.0003 \times 1031.3 = 0.''30939.$$

Még ezen rövid A, i és nagy A, K esetében is tehát a φ_A mérésében feltételezett $\pm$ 4′ hibának alig van $\pm$ *1″*-nél nagyobb hatása a δ-ra. Ha ez esetben $Ai = 20\,000$ méter volna, akkor ezen $\pm$ 4′ hibának a δ-ra csak *0.″12* hatása volna. Ebből azt a tanulságot vonhatjuk le, hogy a φ_A-t még nagy AK esetében is elégséges *5′ – 10′*-re pontosan ¡smerni; kisebb (2—3 méteres) AK esetében pedig *20′—40′*-re hibás φ_A-val is még szabatos δ értékeket számíthatunk.

A m. kir. háromszögelő hivatal a 2. képletet mindig logaritmusokkal számítja célszerű nyomtatványokon: *minden esetben elegendő az 5 jegyű logaritmus könyvvel dolgozni.*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Miként lehet a gyakorlatban az AK és a φ_A értékeket mérni, illetve meghatározni: azt az I. rendű háromszögelésekkel kapcsolatosan részletesen ismertetjük. (II. kötet.)



29. ábra.

A gyakorlatban előfordul az az eset is, hogy (29. ábra) a P' jelre A-ból végzett iránymérés (azaz a nyert $\varphi_{P'}$ irányérték) a P pontra vonatkoztatandó:

$\varphi_P = \varphi_{P'} + \delta$, ahol a δ előjele *pozitív*, hogyha a P' a P-től (A-ból nézve) *balra* fekszik.

A δ képlete pedig:

$$\delta = \frac{P\,P'}{A\,P'}\,\varrho''\,sin\,\omega.$$ ahol ω a (külpontos) P'-nél levő belszöget jelenti.

7. §. A térképek méretaránya.

Azt a törtszámot *(M)*, amely megadja, hogy a térképi hosszak a természetbeni hosszaknak *hányadrészeként* jelentkeznek: nevezzük az illető térkép méretarányának.

A gyakorlatban ez a szám mindig *valódi* törtszám: értékei az $M_{max.} = {}^1/_{200}$ és $M_{min.} = {}^1/_{100.000.000}$ határértékek között váltakoznak. Az $M = {}^1/_{200}$ arányban készülnek a modern városmérések *„utca-tekercs-térképei"*; az $M = {}^1/_{100\,000\,000}$ méretben készülnek az egész földfelületet egy lapon ábrázoló *atlasz*-lapok.

Ha az M értéke ${}^1/_{10\,000}$-nél nagyobb érték (pl. 1 : 500, 1 : 1000, 1 : 2500, 1 : 2880 stb.) akkor *nagy méretarányú* térképnek vagy *helyszinrajzi térképnek* (tervnek) nevezzük az illető térképet; ha ${}^1/_{10\,000}$ és ${}^1/_{200\,000}$ között van az M értéke, úgy *kis méretarányú*-nak mondjuk a felvételt. Az ${}^1/_{200\,000}$-nél kisebb méretarányban készült térképeket *földrajzi térképeknek (átnézeti térképeknek)* nevezzük.

Konkret esetben az alkalmazandó méretarány M értékét a felvétel *célja* fogja megszabni. Igy minél több részletet akarunk valamely vidékről ábrázolni, annál *nagyobb* méretarányt (M értéket) kell alkalmazni. Gyakran azonban nem a *felveendő* tereprészletek sokasága, hanem a térképen **később** eszközlendő műszaki tervezések részletsokasága miatt kell nagyobb M értékkel térképezni. (Pl. városi utcatérképek 1 : 200 arányú térképezését csakis ez indokolja.)

Nagy méretarányú térképeknél ($M_{minimum} = {}^1/_{10\,000}$) az M választására mérvadó szempont: *melyik az a legkisebb méret, amelyet a térképen még fel akarunk tüntetni, illetve amelyet a térképről még le akarunk mérni?* Mivel $\pm {}^1/_{10}$ **milliméter** az a végső méret, amit megfelelő finom rajz- illetve felrakó-eszközökkel még fel tudunk tüntetni, azért egy M méretarányban készült térképen mint *végső méret a természetbeni* $(0.1 \times {}^1/M)$ *mm* méret tüntethető fel. Eszerint

1 : 200	méretarányban a végméret	*20 mm*	= *2 cm.*
1 : 500	„ „ „	*50 mm*	= *5 cm.*
1 : 1000	„ „ „	*100 mm*	= *10 cm.*
1 : 2880	„ „ „	*288 mm*	= *28.8 cm.*
1 : 5000	„ „ „	*500 mm*	= *50 cm.*
1 : 10000	„ „ „	*1000 mm*	= *100 cm.*

Az itt közölt és könnyen fejben tartható *végméret* értékekből fontos gyakorlati tanulságokat vonhatunk le.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

1. Látnivaló, hogy *1 : 10 000* méretarányban *egy* méter méretű objektum (pl. *egy* méter széles árok) *már nem tüntethető fel*, illetve csakis **torzítással** tüntethető fel. Ez a jelenség különösen a *kis méretarányú* (például *katonai topográfiai*) térképeken követeli figyelmünket: az 1 : 75000 katonai térképen egy *8* méter széles országut, amelyet még egy-egy *2* méter széles árok határol (tehát *4 vonalról* volna szó) *méretarányosan* egyáltalában fel nem tüntethető, mert $8 + 2 + 2 = 12$ *méternek* e térképen $12\,000 : 75\,000 = 0.16$ mm felelne meg. Ha tehát e térképen az *utat* és a *két árkot* mégis fel kell tüntetni, és az utat *0.4 mm*, az árkokat *0.3 mm* szélesen ábrázoljuk, ugy ez már *erős torzításnak* felel meg, mert: $(0.4 + 0.3 + 0.3) \times 75\,000 = 75$ *méter* a természetben. E jelenségre eklatáns példa a következő: keskeny völgyben halad egy *7 méter* széles országút, mellette egy (parttal együtt) *10 méter* széles patak és annak másik oldalán halad egy *4 méter* széles vasúti úttest. Összesen tehát *21* méter természetbeni szélességről van szó. A térképen e három objektum a közbenső part feltüntetésével *legalább 2.5 mm* szélességgel jelentkezik: aminek $75.000 \times 2.5 = 187.500$ mm = **187.5 méter** felel meg a természetben. Ha tehát egy *ház* van a közút mellett és szemben is egy ház van a *vasút* mellett feltüntetve: e két ház *térképi távolsága* $187.5 - 21 =$ **166.5** méterrel lesz szükségszerűen hamis.

A közölt példák adják most már a magyarázatát annak, hogy *miért különböztettük* meg az $^1/_{10000}$ méretarányon felüli térképeket az $^1/_{10000}$ méretarányon aluli térképektől.

Azok **terveknek mondhatók**, mert *valóban* egy méretarány szerint ábrázolnak illetve *ábrázolhatnak* minden méretet: az 1 : 10000-en aluli térképek azonban a szükségszerű *torzítások* miatt már csak **közelítő tervezésekre** alkalmas *tájékoztató* térképeknek tekintendők.

2. Az $^1/_{10}$ *mm* érték gyakorlatilag csak *nominális* pontosságnak tekinthető: elsősorban a rajzpapir egyenlőtlen (nedvesség okozta) méretarány változása miatt. Minthogy ezt általában kiküszöbölni, illetve pontosan figyelembe *(számításba)* venni nem tudjuk: **0.25 × 1/M** tekinthető gyakorlatilag térképi *végméretnek*, és így *ez* az érték mérvadó konkrét esetben a választandó *M* értékére.

Minimális lesz azonban a végméret, és így megközelíthető a *nominális* végméret ha a *rajzpapir üveglapra* van állandóan ragasztva. Ujabban *cinklemezre* vagy *aluminiumlemezre* ragasztott papiron is szoktak térképezni. (Megjegyzem, hogy ily esetben a fémlemez alul is bevonandó papirral.) A *magyar* országos kataszteri felmérés az 1 : 1000 méretarányú városi térképeket ujabban *öt rétegű*, alul olajfestékkel bevont és legalább *egy évig szárított papírkarton*-lapokon készítteti. A vászonréteget is tartalmazó karton a méretváltozás szempontjából *nem* vált be.

3. *Kőnyomati* úton sokszorosított térképek — a nedves folyamat miatt — tekintet nélkül a méretarány nagyságára, *mindig torzítottak* lesznek. Az ujabb időben a m. kir. állami nyomda által fejlesztett és a kataszteri térképek sokszorosításánál most már kizárólag alkalmazott *fénymásolási eljárással* (aluminium nyomólemezzel), a térkép eltorzítás *azonban teljesen elkerülhető:* az ily másolatok (akár 1000 példány nyomható egy lemezről) absolut hű képei a *sötét* tussal rajzolt eredeti térképeknek.*)

Szokásos méretarányok.

a) A *magyar* országos kataszteri felmérés általában az 1 hüv. = 40 öl azaz *1 : 2880* méretarányban készíti térképeit. Nominális végméret tehát *28.8 cm.*

Kisebb részleteket tartalmazó dülőket, illetve belsőségeket a kataszteri felmérés 1 : 1440 azaz 1 hüv. = 20 öl, esetleg 1 hüv. = 10 öl (1 : 720) méretarányban térképez;

*) Ilyen másolatokat bármily rajzról magánfeleknek is készít az állami nyomda, ha az állami munkák ebben őt nem gátolják.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

kevés részletet tartalmazó erdőségeket pedig *1 : 5760* azaz 1 hüv. = 80 öl méretarányban ábrázolnak. A kataszteri térképlap (értve a rajzolt derékszögű *szelvényvonalakat*) méretei: kelet-nyugati méret *25* hüvely és észak-déli méret *20* hüvely. Az *1 : 2880* méretarányban tehát *1000 öl* és *800 öl* a szelvény természetbeni hossza. A térképlap szelvényvonalai párhuzamosak a *derékszögű sík koordináta* tengelyekkel. (5. ábra.)

Nagyobb városok felvételénél a magyar kataszteri felmérés ujabban az *1 : 1000* méretarányt használja: a szelvényvonalak 60/50 cm (600/500 méter) méretű derékszögű négyszöget alkotnak.

Az *osztrák* kataszteri felmérés 1872 óta az 1 : 2500; 1 : 1250 és az 1 : 625 méretarányokat használja.

Poroszországban 1 : 1000, illetve 1 : 2000 és 1 : 500 a kataszteri méretarány.

b) *Városok felvételénél* az 1 : 1000 méretarányú térképszelvényeken kívül rendszerint 1 : 200 méretarányú utca-térképek készülnek minden utcáról külön tekercsen; a belsőséget *egy lapon* ábrázoló, rétegvonalas 1 : 5000 méretarányú térképet pedig *átnézeti* térkép gyanánt szokás készíteni. (Ezekre nézve lásd ezen kötet *„Függelékének"* I. Fejezetét.)

c) Hazánk *topográfiai* (hegyrajzi) felvételét a cs. és kir. katonai földrajzi intézet végezte *1 : 25000* méretarányban. Ezen eredeti felvételek másolatai *külön megrendelésre* lesznek csak sokszorosítva. (Kivételt képez a *„Magas Tátra"* 1 : 25000 térképe, amely könyvárús úton beszerezhető).

Könyvárús úton árusíttatnak az *1 : 75000* méretarányú (Speciálkarte) és az *1 : 200 000* méretarányú (Generalkarte) katonai topográfiai térképek. E katonai térképek nem derékszögű szelvények, hanem a gömbi *parallelkörök* és *meridiánok* által alkotott trapézek szerint készülnek.

e) A *közigazgatási* és *földmivelési* térképeket (a művelési ágak feltüntetésével) 1 : 144 000 méretarányban készíti *vármegyénkint* a m. kir. állami nyomda, a kataszteri felmérések alapján.

d) *Műszaki tervezésekre és építésekre szolgáló* helyszinrajzok — rendszerint rétegtervvel ellátva — a vállalatok által vagy *a kataszteri térképek kiegészítése*, vagy 1 : 10 000, 1 : 2500, 1 : 500 méretarányban, eredeti felvételek alapján, készíttetnek különösen *vasútépítésekkel* és *vízrendezésekkel* kapcsolatban, illetve azok céljaira.

A térképek célszerű, illetve szokásos készítési (szerkesztési) módjáról a III. kötetben lesz szó.

III. FEJEZET.

A legkisebb négyzetek módszere.

Ezen *C. F. Gauss*-tól származó elmélet, illetve módszer egy évszázad alatt nemcsak az *országos felmérések* (vízszintes- és magasságméréseket értve) alapvető műveleteiben, nemcsak szabatos városi felmérésekben, hanem az egyes elemi geodéziai műveletekben is fontos gyakorlati segédeszközzé vált.

Ezen módszer kétféle szolgálatot teljesít a *gyakorlati földmérésekben:*

a) lehetővé teszi, hogy fölösszámú mérések esetében az *elérhető legmegbízhatóbb* eredményeket adhassuk

b) lehetővé teszi, hogy fölösszámú mérések esetén munkánk jóságát, illetve megbízhatóságát jellemző *„igazságos mértékekhez"* jussunk, ami napjainkban már a városmérések pályázati feltételeiben is kifejezésre jut.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Konstatálni kívánjuk azonban, hogy a legkisebb négyzetek módszerének gyakorlati alkalmazásában az *észszerűség* (racionálizmus) *elvével össze nem egyeztethető túlzásokat is tapasztalhatunk már,* különösen ami az *a)* alatt említett alkalmazást illeti.

Így például nem lenne *értelme* annak, hogy — igen tetemes munkatöbblet árán — az országos háromszögelések IV. rendű *összes mérései* ezen módszer szerint egyenlítessenek ki; nem lenne értelme annak, hogy városméréseknél *a pontkapcsolások,* vagy az országos felmérésben a *trigonometriai magasságmérések mind* **ezen módszer** szerint egyenlítessenek ki.

Az itt említett műveletekben *ugyanis a megfelelő műszerekkel, kellő gonddal* mért nyers mérési eredmények *egyrészt* a gyakorlat céljainak *teljesen megfelelő eredményeket adnak* (amiről fölösszámú mérésekből való ellenőrző számítással meggyőződhetünk); másrészt a legkisebb négyzetek módszerének e műveletekre való alkalmazása — a keret kényszer hibái folytán — amúgy sem az *elméletileg legmegbízhatóbbnak* mondható értékrendszert szolgáltatja. A munkakülönbség a kétféle eljárás között pedig sokszor igen tetemes: így például a pontkapcsolások egyszerű számítása (ellenőrzéssel) vagy szigorú kiegyenlítéssel való számítása úgy aránylik egymáshoz, mint *1 : 5-höz.*

Ezen kérdésekre az egyes műveletek leírásánál még visszatérünk, itt csak azt akartuk jelezni, *hogy nem lehet cél a legkisebb négyzetek módszerét* minden *gyakorlati geodéziai műveletre alkalmazni:* kiegyenlítés céljából.

Egészen másként áll a dolog e módszernek a *b)* alatt említett célra való alkalmazását illetőleg. Itt igenis a *legelemibb geodéziai műveletre* is alkalmazandó ez a módszer, amidőn az úgynevezett *„hivatalos hibahatárok"* vagy más néven a *„megengedett mérési hibahatárok"* képleteinek és az azokban szereplő számszerű értékek meghatározásáról van szó. Hogy ezen gyakorlatilag fontos kérdést már itt megértsük, lássunk konkrét példákat.

A *svájci* országos szintezésben egy t (kilométerekben) hosszúságú *zárt vonalon* (poligon) a hivatalosan *megengedett* záróhiba:

$$1. \ldots \ldots \Delta_{max.} = 3\sqrt{t}$$

ahol a Δ milliméterekben értendő. Eszerint tehát kiindúlva A pontból és *100* km hosszú úton visszatérve A pontra szélső esetben:

$$3\sqrt{100} = \pm \mathbf{30\ mm}$$

eltérés van megengedve az A pont magasságára. Itt vizsgálandó — még pedig a legkisebb négyzetek módszerével — hogy az 1. alatt felírt függvény *általános alakja:* $\Delta = c\sqrt{t}$ megfelelő-e?

Egy másik példa: a kataszteri felmérési utasításunk (lásd F. U. Minták 4. sz. táblázat) a természetben 2-szer mért távolságokra oly Δt eltérést enged meg, ahol

$$2. \ldots \ldots \Delta t = \frac{c}{10}\, t + c\sqrt{t}$$

ahol a c állandó értéke, a terepnehézségek szerint, *három különböző* (de megadott) *értéket vehet fel.*

Itt is természetesen vizsgálat tárgyát kell hogy képezze ezen 2. alatt felírt *függvényalak* helyes volta.

Hasonlólag a papiroson való kétszeri területszámításra (F. U. Minták 7. táblázat)

$$\Delta T = c\sqrt{T}$$

függvényalak megfelelő volta is vizsgálat tárgyát kell hogy képezze.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

I. §. A mérési hibák.

Egészen eltekintve az úgynevezett *durva hibáktól* (szarvashibák), amelyek a mérések ismétlése által mindig kiküszöbölhetők, azt tapasztaljuk, hogy

a) ugyanazon mérési műveletnek többszöri *megismétlésekor* az eredmények egymástól különböznek;

b) vagy több *elemet* mérve, mint amennyit az illető geometriai alakzat feltétlenül megkíván (pl. háromszögben nemcsak két, hanem mind a három szöget mérve), nem a geometriai alakzatnak megfelelő elméletileg szigorú értéket fogjuk nyerni. Például a háromszögben $\alpha + \beta + \gamma$ nem lesz 180°, vagy két háromszöggel végezve ugyanazon pontra előmetszést: a síknak nem *ugyanazon* pontját nyerjük stb.

Ezen jelenségek okozói az úgynevezett *elkerülhetetlen mérési hibák.*

E hibák jelenlétét azonban csakis a feltétlenül szükségesnél nagyobb, **vagyis fölös számban végzett mérések** esetén fogjuk tapasztalni.

Ezen *elkerülhetetlen hibák* a mérőeszközök (műszerek) *finomsága,* illetve pontossága, az alkalmazott *mérési módszer helyessége* és a művelet gondos végrehajtása által mindig *bizonyos kicsiny határok közé szoríthatók:* de egészen soha, semmi körülmények között el nem kerülhetők. Az *elkerülhetetlen mérési hibák* kétféle hibából tevődnek össze: a *szabályos* és a *szabálytalan* hibából. Ez utóbbit a *véletlen hibának* is szokás nevezni.

A *szabályos* hiba természete, hogy *állandó előjellel* szerepel (esetleg állandó értékkel is); a *véletlen hiba* természete, hogy egyenlően lehet *minus* és *egyenlően* lehet *plus* előjelü.

A műszerek finomságával, helyesbítésével és a célszerű mérési módszerrel a *szabályos hibákat, illetve azok hatását vagy egészen ki tudjuk* küszöbölni a mérések végeredményeiből, vagy a célnak megfelelő minimumra szorítani. Igy például a *szintezésnél* gyakori léckomparálás, középről való irányzás, és oda-vissza szintezéssel védekezünk a szabályos hibák ellen, illetve küszöböljük ki azokat egészen; *teodolittal* való szögmérésnél *szabatos pontra állítás,* szabatos pontjelzés és két távcső állásban, különböző limbusz-állásban oda-vissza sorrendben való méréssel küszöböljük ki a szabályos hibák hatását; *hosszmérésnél, területmérésnél* az eszköz szabatos *komparálása* (állandók meghatározása) által igyekszünk az eredményt a szabályos *hibától* megtisztítani.

Bodola tanár szerint: „a legjobb eljárás valamely szabályos hiba még ismeretlen változási törvényének felderítésére rendesen a mérésnek *kellőképpen változtatott, illetőleg változott tényezőkkel* való ismétlése".

A hangsúly itt a *„változtatott tényezőkkel"* kifejezésen van, mert a szabályos hiba veszedelmes volta éppen abban rejlik, *hogy azonos körülmények között* (illetve ugyanazon eszközzel, ugyanazon módon) *számtalanszor megismételve ugyanazt a mérést: a hiba ugyanazon előjellel marad benne minden egyes mérési eredményben, tehát a különböző eredményekből alkotott középértékben is.**)

A *méréstan* egyik legfontosabb feladata: *a szabályos hibaforrások kipuhatolása és ezek ellen védő eszközök és eljárások megállapítása.*

Az elkerülhetetlen mérési hiba második faktora a *szabálytalan* mérési hiba: ugyanazon mérésnek ugyanazon tényezők mellett való *megismétlésénél jelentkezik.* Ha

---

*) Vannak a mérést végző *egyén*-től eredő szabályos hibák is, például az *Alders* planimeterrel való sávlefogásnál az egyik állandóan $^1/_{10}$ mm-rel nagyobbat fog le, mint a másik; vagy csillagátmeneteknek megfigyelésénél (a csillag a távcső látmezején a szálakon látszik keresztülhaladni) az egyik egyén állandóan *korán* adja a jeleket stb.

Tehát *„változtatott tényezők"* alatt rendszerint az *egyén* is értendő.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

ugyanis valamely mérést többször egymásután megismételünk, úgy a közvetlen eredmények *minden szabályszerűség nélkül* hol kisebb, hol nagyobb értékkel különböznek egymástól, hol egyesek véletlenül megegyeznek.

Az értékingadozás *bizonyos határok* között mozog. E határok között fekszik *a hibátlan érték is*, ha

a) többször ismételtük a mérést, azaz ha nagy a fölös mérések száma,

b) ha a *szabályos hibákat kiküszöböltük.*

Tökéletesebb eszközökkel, a leggondosabb munkával, a véletlen hibák két határát *összébb szoríthatjuk:* amint azt a tapasztalat igazolja. A két határt teljesen összeejteni azonban semmi szín alatt nem lehet.

De sikerült oly általános kiegyenlítő módszert találni, amely mindenféle mérési eredményre egyaránt alkalmazható és amely által nagyszámú fölös mérések esetében a *véletlen hibák káros hatása a lehető minimumra szorítható.*

Ez a módszer a *legkisebb négyzetek* módszere szerinti kiegyenlítés.

2. §. A mérések megbízhatósága.

Valamely eredmény annál pontosabb, mennél kisebb a benne rejlő *tényleges* hiba. Ezt ismerhetni a legritkább esetben lesz csak módunkban. Gyakorlatilag meg kell elégednünk a mérési eredmények *megbízhatóságának* mérőszámaival. És azt mondjuk: valamely mérési eredmény*) *annál megbízhatóbb, mennél nagyobb a valószínüség, hogy az eredményben rejlő hiba abszolut értéke kicsi legyen.* Hiba alatt itt a *teljes* hibát értjük:

$$\varepsilon = U - l,$$

ahol U a hibátlan érték, l pedig a mérési eredmény. A megbízhatóság mértéke gyanánt részint elméletileg kimutatható *helyes* voltánál fogva, részint gyakorlati okokból a *Gauss* által *error medius*-nak, magyarul *középhibának* nevezett:

$$1. \quad \mu = \pm \sqrt{\overline{\varepsilon^2}}$$

kifejezés tekintetik.

Az 1. alatti képletben az $\overline{\varepsilon^2}$ *kifejezés az összes egyenlően lehetséges hibák négyzeteinek számtani középértékét jelenti.*

Valamely mérési sorozat végeredménye most már annál megbizhatóbb, mennél kisebb a hozzátartozó μ abszolut értéke.

A *középhiba* négyzetének reciprok értéke, szorozva egy *puszta számmal*, megadja az illető középhibához tartozó úgynevezett *súlyt*, amelyet g-vel jelölünk. Tehát:

$$2. \quad g = \frac{1}{\mu^2} \cdot (c^2),$$

ahol a (c^2) egy puszta szám, amely *tehát mindig positív előjelü.*

Tehát a g is positív előjelü: mert μ^2 is positív előjelü.

A g tehát — mint egyenes függvénye a μ^2-nek — szintén *alkalmas a megbízhatóság fokának kifejezésére:* minél nagyobb valamely eredményhez tartozó g, annál nagyobb az eredmény megbízhatósága.

A 2. alatti kifejezésben, ha $g = 1$, akkor szükségszerűleg

$$3. \quad \begin{matrix} c^2 = \mu^2 \text{ azaz} \\ c = \mu. \end{matrix}$$

*) Akár közvetlenül, akár közvetve mért mennyiségről van szó.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Tehát a 2. képletben a számlálóban szereplő puszta szám a $g = 1$ súlyú eredmény *középhiba értékével azonos.* Az irodalomban az *egységsúlyú eredmény közép- hibáját* (mittlere Fehler der Gewichtseinheit) μ_0-al szokás jelölni és így 2. szerint a súly képlete:

$$4. \quad g = \frac{\mu_0^2}{\mu^2}.$$

Ezen egyenlőségből adódnak a:

$$5. \quad \begin{cases} \mu = \mu_0 \sqrt{\frac{1}{g}} \\ \text{és a } \mu_0 = \mu \sqrt{g} \end{cases}$$

gyakorlatilag fontos képletek.

Továbbá ha g_1 jelenti a μ_1 középhibájú eredmény súlyát és g_2 jelenti a μ_2 középhibájú eredmény súlyát, akkor áll ez az arány:

$$6. \quad g_1 : g_2 = \frac{1}{\mu_1^2} : \frac{1}{\mu_2^2} = \mu_2^2 : \mu_1^2. \; —$$

A hibaterjedés törvénye.

Tegyük fel, hogy a $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_n$ stb. középhibákkal az

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ mennyiségekre

nyert $l_1, l_2 \ldots l_n$ mérési sorozati éredményekből (például szög és hosszértékekből) az

$$7. \quad x = f(x_1, x_2, x_3 \ldots)$$

függvényértéket számítottuk ki.

(Például egy háromszögben két mért oldalból (x_1, x_2) és egy szögből (x_3) számítjuk a harmadik oldal hosszát: x-et.)

Kérdés: mi lesz a számított mennyiség megbízhatóságának mérőszáma: azaz μ_x középhibája?

A középhiba 1. alatt adott definiciójából kiindulva és véletlen természetű hibákat tételezve fel az $l_1, l_2, \ldots$ mérési eredményekben a függvényérték középhibájára (jelzése μ_x) *tisztán matematikai úton* ez az általános képlet vezethető le:

$$8. \quad \mu^2_x = \left(\frac{\delta x}{\delta l_1}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{\delta x}{\delta l_2}\right)^2 \mu_2^2 + \ldots + \left(\frac{\delta x}{\delta l_n}\right)^2 \mu^2_n$$

ahol $\frac{\delta x}{\delta l_n}$ jelenti a 7. alatti egyenlet jobb oldala x_n szerinti első differenciál hányadosának értékét az $x_n = l_n$ helyen.

Ezen általános érvényű egyenlet *lineáris* függvény

$$x = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

esetében ezen egyszerű és gyakorlatilag fontos alakot ölti:

$$9. \quad \mu^2_x = a_1^2 \mu_1^2 + a_2^2 \mu_2^2 + \ldots + a_n^2 \mu_n^2.$$

A *függvényérték* súlyának képlete most már — mint az $l_1, l_2 \ldots l_n$ mérési eredmények súlyainak függvénye, az 5. alatti első képletnek a 8. képletbe való helyettesítésével — állítható elő:

$$10. \quad g_x = \frac{1}{\left(\frac{\delta x}{\delta l_1}\right)^2 \frac{1}{g_1} + \left(\frac{\delta x}{\delta l_2}\right) \frac{1}{g_2} + \ldots \left(\frac{\delta x}{\delta l_n}\right) \frac{1}{g_n}}.$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ezen képlet szerint számítva a g_x-et és feltéve, hogy a $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ középhibák μ_0-ja ismeretes, általa (5. szerint) kiszámítható *a* μ_x is:

11. . . . . $\mu_x = \mu_0 \sqrt{\frac{1}{g_x}}$

ismert képlet szerint.

Ha a függvényérték középhibájának számításához felhasznált középhibák közül a μ_i és a μ_j középhibák nemcsak *véletlen* hibákból, hanem *állandó* részt is tartalmazó hibákból erednek, azaz ha:

$$\mu_i^2 = \alpha_i^2 + \mu_{vi}^2 \text{ és } \mu_j^2 = \alpha_j^2 + \mu_{vj}^2$$

ahol az α-k az állandó részt jelentik, akkor a μ_x kifejezésében (8. képlet) még a:

$+ 2 \frac{\delta x}{\delta l_i} \frac{\delta x}{\delta l_j} \alpha_i \alpha_j$ tag is szerepel, amiért is a μ_x képlete ezen esetben így irható:

12. . . . $\mu_x = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{\delta l_1}\right)^2 \mu_1^2 + \ldots + \left(\frac{\delta x}{\delta l_i}\right)^2 \mu v_i^2 + \left(\frac{\delta x}{\delta l_j}\right)^2 \mu v_j^2 + \ldots}$

$$+ \left(\frac{\delta x}{\delta l_n}\right)^2 \mu_n^2 + \left(\frac{\delta x}{\delta l_i} \alpha_i + \frac{\delta x}{\delta l_j} \alpha_j\right)^2}$$

Hasonló alakú lesz a g_x kifejezése is.

Példákat a függvényérték középhibájának és súlyának számítására találni Bodola tanár: „A mérési hibák elmélete és a legkisebb négyzetek módszere“ című I. füzet 97—133. oldalain.

3. §. A legkisebb négyzetek módszere szerinti kiegyenlítés.

Ezen módszernek végcélja mindig: *a legkisebb középhibájú* (tehát a legmegbízhatóbb) eredménynek a mérési eredmények alapján való előállítása. Természetesen ha csak annyit mérünk, mint ahány mérés *geometriailag* (hibátlan mérések esetén) *szükséges és elegendő a feladat megoldására,* akkor kiegyenlítésre szükség nincs és akkor legmegbízhatóbb eredmény számításáról sem lehet szó.

Kiegyenlítésről és így a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazásáról *csak ott lehet szó, ahol fölös számú méréseink vannak.*

Tájékozásul, hogy miről lesz itt szó, lássunk nehány gyakorlati esetet:

1. Egy *szöget* akarunk ismerni. Erre a célra *geometriailag* elegendő ezt a szöget teodolittal *egyszer* megmérni. Ha 10-szer mértük, 10-féle eredményt kapunk. *Kérdés*: miként nyerjük ezen 10 eredményből a *legkisebb középhibájú eredményt?*

2. Egy síkháromszögben elég két szöget mérni, hogy (hibátlan mérések esetén) a harmadik szöget is ismerjük, mert

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta).$$

Ha azonban *mind a három* szöget és nem is egyszer, hanem többször mértük, kérdés

a) miként javítsuk ki az egyes *szögértékeket,* hogy összegben 180°-ot, és amellett

b) a legmegbízhatóbb azaz a legkisebb középhibáju vagyis a legnagyobb súlyú eredményeket is kapjuk?

3. Az ***A*** pontból induló ***3*** irány két egymástól független szöget zár be. Elég tehát e két szöget külön-külön egyszer megmérni.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Mi azonban nemcsak többször mértük ezt a két szöget, hanem a *két szög összegét* is mértük külön és többször.*)

Kérdés tehát:

a) miként javítsuk meg e mérési eredményeket, hogy *számszerűleg összhangban*

b) és amellett az így megjavított értékek egyszersmind a *legkisebb középhibájú* azaz a legnagyobb súlyú eredmények is legyenek?

Szóval, amint e példákból látnivaló, általában arról lesz szó: úgy *javítani meg* mérési eredményeinket, hogy ezek a megjavított eredmények

a) az összes, geometriailag megállapítható egymástól független feltételi egyenleteket kielégítsék és

b) amellett még a legkisebb középhibájú, azaz a legnagyobb súlyú eredmények is legyenek.

Ezen feladat célszerű megoldását C. F. Gauss mutatta meg 1795-ben és tőle függetlenül *Legendre* ugyanezen módszert ismertette egy 1806. évben megjelent művében.

Legendre-től ered a *„legkisebb négyzetek módszere“* elnevezés is.

E módszer lényege:

Legyenek $l_1, l_2, l_3, \ldots . l_n$ a mérési eredmények, és

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots . \lambda_n$ jelentsenek egy oly javítási értékrendszert, amely mellett az

$$(l_1 + \lambda_1), (l_2 + \lambda_2), \ldots (l_n + \lambda_n)$$

megjavított értékek az összes geometriai feltételeknek eleget tesznek. Ilyen javítási rendszer minden esetben végtelen sok lesz. A végtelen sok λ javítási rendszerek között most már az fogja (az l-ekhez adva) a legkisebb középhibájú tehát egyszersmind a legmegbizhatóbb

$$(l_1 + \lambda_1), (l_2 + \lambda_2) \ldots . (l_n + \lambda_n)$$

eredményeket adni, amely javítási értékrendszerre nézve a javítások négyzeteinek összege:

$$13. \ldots . \lambda_1 \lambda_1 + \lambda_2 \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \lambda_n = [\lambda \lambda] =$$

minimum azaz az összes lehetséges λ kiegyenlítő rendszerek között a *legkisebb* számértéket adja a $[\lambda \lambda]$ négyzetösszegre.

Illetve ha $g_1, g_2, g_3 \ldots . g_n$ jelenti a mérési eredmények különböző súlyait, akkor a

$$14. \ldots . \lambda_1 \lambda_1 g_1 + \lambda_2 \lambda_2 g_2 + \ldots . + \lambda_n \lambda_n g_n = [\lambda \lambda g]$$

teendő minimummá, hogy a legkisebb középhibájú eredményeknek megfelelő λ_1, λ_2 is javítási értékrendszerre jussunk.

Ezen minden tekintetben leghelyesebbnek elismert módszer a geodéziában előforduló *tipikus* esetekre *sablonos* megoldásokra vezet, — amint ezt a következőkből látni fogjuk.

1. A számtani középérték esete.

Ha egy mennyiséget (hossz vagy szög) többször mértünk és e mérések egyenlő súlyúak, akkor az $l_1, l_2, \ldots . l_n$ összesen tehát n számú mérésből vett *számtani középérték* (jelzése x) tekintendő *a legkisebb négyzetek módszere értelmében* a legkisebb középhibájú, azaz a mérési eredményekből nyerhető legmegbízhatóbb értéknek:

$$15. \ldots . x = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n}$$

*) Persze ez a mérési eredmény nem egyezik szigorúan a két szögre külön-külön nyert értékek összegével.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Az ezen x értékhez tartozó λ javítási rendszer kiszámítható:

16. . . . . $\begin{cases} \lambda_1 = x - l_1 \\ \lambda_2 = x - l_2 \\ \quad . \quad . \quad . \\ \lambda_n = x - l_n \end{cases}$

A λ_1, λ_2 . . . λ_n értékek a 16. képlet szerinti hibátlan előállítására *ellenőrzésül* szolgálhat, hogy

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_4 = [\lambda] = 0$, amint az a 16. képletből adódik, amint x helyébe a 15. alatti értéket helyettesítjük és a $[\lambda]$-t képezzük.

Egy *mérés középhibáját* μ-vel jelölve:

17. . . . . $\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\ \lambda]}{n-1}}$, ahol *(n—1)* jelenti tehát a *fölös* mérések számát.

A μ alapján kiszámítható most már a számtani középértéknek azaz az *x középhibája*, mert 15. szerint:

$$x = \frac{1}{n} l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \ldots + \frac{1}{n} l_n$$

és alkalmazva ezen lineáris függvényre a 9. képletet:

$\mu_x^2 = \frac{1}{n} \mu^2_1 + \frac{1}{n} \mu^2_2 + \ldots$ és így egyenlő súlyu eredmények esetében

18. . . . . $\mu_x = \pm \frac{\mu}{\sqrt{n}}$

A 18. képletből látnivaló, hogy a mérések sokszori ismétlése (azaz az n növelése) által a μ_x értéke fogy, azaz az x eredmény megbizhatósága nő. De nem linearisan, mert míg négy ismétlés a μ felére redukálja μ_x-et, addig *16* ismétlés kell, hogy a μ_x a μ-nek negyedrésze legyen csak.

Számpélda: egy 20 méteres acélszalaggal 12-szer mértünk egy hosszt

	$x - l = \lambda$	$\lambda\lambda$
$l_1 = 624,63$ m	+ 4 cm	16
$l_2 =$,69	— 2	4
$l_3 =$,80	— 13	169
$l_4 =$,58	+ 9	81
$l_5 =$,64	+ 3	9
$l_6 =$,54	+ 13	169
$l_7 =$,73	— 6	36
$l_8 =$,80	— 13	169
$l_9 =$,54	+ 13	169
$l_{10} =$,66	+ 1	1
$l_{11} =$,77	— 10	100
$l_{12} =$,70	— 3	9
$x = \frac{[l]}{12} = 624,67$		$[\lambda\lambda] = 932$

egy mérés középhibája azaz az egység súlyú eredménynek középhibája

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{932}{11}} = \pm 9,2 \text{ cm.}$$

A számtani középérték középhibája azonban már csak:

$$\mu_x = \pm \frac{9.2}{\sqrt{12}} = \pm 2,7 \text{ cm.}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

2. A számtani középérték különböző súlyok esetében.

Ha az egyes mérések nem egyenlően megbizhatók, úgy nem lehet azokból egyszerüen középértéket venni.

A legkisebb négyzetek elve szerint most már ha

$g_1, g_2, \ldots g_n$ jelentik az

$l_1, l_2, \ldots l_n$ mérési eredmények súlyait*), úgy az

19. $\ldots x = \dfrac{l_1 g_1 + l_2 g_2 + \ldots + l_n g_n}{g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_n} = \dfrac{[l\,g]}{[g]}$

úgynevezett *„általános középérték"* fogja a legkisebb középhibájú eredményt képviselni.

$$\text{A } \lambda_1 = x - l_1$$
$$\lambda_2 = x - l_3$$
$$\ldots\ldots$$
$$\lambda_n = x - t_n$$

egyenletekből előállítva a legmegbízhatóbb javításokat és képezve a

$$\lambda_1\,\lambda_1\,g_1,\ \lambda_2\,\lambda_2\,g_2,\ \ldots\ \lambda_n\,\lambda_n\,g_n$$

értékeket és azokat összegezve:

19. $\ldots$ az egységsúlyú eredmény középhibája $\mu = \pm\sqrt{\dfrac{[\lambda\,\lambda\,g]}{n-1}}$

és a függvényérték középhibájának mintájára előállítva az eredmény középhibáját

20. $\ldots\ldots \mu_x = \pm\dfrac{\mu}{\sqrt{[g]}}$, *ahol* $[g]$ *tehát a* μ_x *súlyát is jelenti: azaz* $g_x = [g]$.

Számpélda: Ugyanazon hosszúság megméretett 18-szor de úgy hogy

6 mérés 5 méteres mérőléczekkel,
6 „ 4 „ „ „
és 6 „ 20 „ mérőszalaggal eszközöltetett.

Mindenekelőtt számítsuk ki a háromféle módra külön-külön (az előbbi pont szerint) az egy mérésnek azaz az egység súlyú eredménynek középhibáját.

5 méter léc		4 méter léc		20 méter szalag	
312.540	— 10 mm	312.520	0 mm	312.58	— 3 cm
.531	— 1	.506	+ 14	.54	+ 1
.532	— 2	.530	— 10	.65	— 10
.537	— 7	.533	— 13	.52	+ 3
.517	+ 13	.518	+ 2	.53	+ 2
.522	+ 8	.513	+ 7	.49	+ 6
$x_1 = 312{,}530$		$x_2 = 312{,}520$		$x_3 = 312{,}55$	
$[\lambda\,\lambda] = 387$		$[\lambda\,\lambda] = 518$		$[\lambda\,\lambda] = 15900$	
$\mu_1^2 = \frac{387}{5} = 77{,}4$		$\mu_2^2 = 103{,}6$		$\mu_3^2 = 3180$	

Tehát a súlyok úgy aránylanak:

$$g_1 : g_2 : g_3 = \frac{1}{77{,}4} : \frac{1}{103{,}6} : \frac{1}{3180}$$

vagy $g_1 : g_2 : g_3 = 39{,}8 : 30{,}7 : 1$

*) Ezeket a tüstént bemutatandó számpéldában a mérési eredmények *középhibáiból* fogjuk előállítani.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

vagy kerek értékeket vezetve be:

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= 41 \\ g_2 &= 31 \\ g_3 &= 1 \end{aligned}\right\}$$ és így a háromféle méréssel nyert x_1, x_2, x_3 értékek legmegbízhatóbb eredménye:

$$x = \frac{[l\,g]}{[g]} = \frac{41\,x_1 + 31\,x_2 + x_3}{73} = 312{,}526.$$

Ezen x értékhez képezhetjük most már a λ-kat és a $[\lambda\,\lambda\,g]$ összeget: $]\lambda\,\lambda\,g] = 44416$ és így az egységsúlyú eredmény középhibája:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{44416}{17}} = \pm\sqrt{2613} = \pm\ 51{,}0\ \text{mm}.$$

Most számítható az x_1, x_2, x_3 középhibája:

$$\mu_1 = \pm\sqrt{\frac{2613}{40}} = \pm\ 8.1\ \text{mm}$$

$$\mu_2 = \pm\sqrt{\frac{2613}{30}} = \pm\ 9.0\ \text{mm}$$

$$\mu_3 = \pm\sqrt{\frac{2613}{1}} = \pm\ 51.0\ \text{mm}$$ és végül a végeredmény középhibája:

$$\mu_x = +\sqrt{\frac{2613}{426}} = \pm\ 2.5\ \text{mm}$$

3. Záróhibák esete.

Ha több egynemü és majdnem egyenlő nagyságó, (például közel egyenlő hosszú bázis szakaszok) mindegyike *kétszer méretett meg*, úgy a kétszeri méréssel nyert *záróhibákból* a mérési művelet megbízhatóságát jellemző következtetések vonhatók. Jelöljük l és l'-vel az összetartozó méréseket és d-vel a különbözeteket, azaz

$$l_1' - l_1 = d_1$$
$$l_2' - l_2 = d_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$l_n' - l_n = d_n,$$ akkor *egy mérés középhibáját adja ezen képlet:*

21. . . . . $\mu = \pm\sqrt{\frac{[dd]}{2n}}$, illetve

ha különböző súlyú mérésekre vonatkoznak a d záróhibák, akkor az egységsúlyú eredmény középhibája

22. . . . . $\mu = \pm\sqrt{\frac{[ddg]}{2n}}$

Számpélda: Egy nagyobb hosszt mértünk oda-vissza méréssel, és így a *közben* átlag mintegy 132—136 méter távolban elhelyezett jelzésekre (szakaszokra) kétféle értéket kaptunk:

	l	l'	d	dd
1. szakasz	132,45	132,54	— 9 cm	81
2. „	135,26	135,21	+ 5	25
3. „	134,77	134,73	+ 4	16
4. „	132,59	132,69	— 10	100
5. „	136,62	136,58	+ 4	16
6. „	134,09	134,09	0	0
				$[dd] = 238$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Egy 134 méteres *szakasz* egyszeri mérésének középhibája tehát:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{238}{12}} = + \mathbf{4.45\ cm.}$$

Egy *oda-vissza* mérés középhibája pedig a hibaterjedés képletét alkalmazva a

$$\mu_{o.\,v.} = \frac{\mu}{\sqrt{2}} \text{ szerint}$$

számitandó.

4. Közvetítő mérések kiegyenlítése.

Egy egyszerű példán mutatjuk be először a szóban forgó feladatot.

Ismerni akarjuk a

23. . . . . $z = \alpha + \beta\, k$

egyenletben szereplő α és β állandó értékeket. Azonban ezen α és β ismeretlenek méréssel **közvetlenül** nem határozhatók meg. De igenis módunkban van a 23. képletben szereplő z és k mennyiségeket *közvetlenül megmérni*, még pedig úgy, hogy ezen mérések a k-ra nézve hibátlanoknak tekinthetők, de a z-re nézve *elkerülhetetlen, tehát véletlen természetü hibákkal* lesznek terhelve. Igyekszünk természetesen a z mérést úgy berendezni, hogy szabályos hibák ne legyenek az eredményben. Mivel előrebocsátottuk, hogy α és β állandó mennyiségek, tehát a 23. egyenlet értelmében minden z-hez egy bizonyos k érték fog tartozni.

Tegyük fel, hogy a

k_1 hibátlan mérési eredménynek, ugyancsak méréssel az l_1 eredmény felelt meg z-re nézve,

és a k_2 hibátlan mérési eredménynek. ugyancsak méréssel az l_2 eredmény felelt meg z-re nézve.

Akkor helyettesítvén rendre ezen mérési eredmények számértékeit 23.-ba, lesz:

24. . . . . $\begin{cases} l_1 = \alpha + \beta\, k_1 \\ l_2 = \alpha + \beta\, k_2 \end{cases}$

amely két egyenletből — minden ellenmondás nélkül — kiadódnak az α és β ismeretlen állandók értékei. Ha hibásak voltak a z-re végzett mérések eredményei (l_1, l_2), ugy hibásak lesznek az így számitott α és β értékek is. Hogy az α és β értékeket *megbizhatóbban* kapjuk, nem **két**, hanem *kilencz* összetartozó k és z mérést végeztünk, amelyek a következő értékeket adták:

k-ra nézve	*z-re nézve*
$k_1 = -19.6$	$l_1 = 15.80$
$k_2 = -16.4$	$l_2 = 16.48$
$k_3 = -11.6$	$l_3 = 17.42$
$k_4 = -6.8$	$l_4 = 18.40$
$k_5 = -0{\cdot}4$	$l_5 = 19.66$
$k_6 = +4.4$	$l_6 = 20.56$
$k_7 = +9.5$	$l_7 = 21.58$
$k_8 = +14.5$	$l_8 = 22.66$
$k_9 = +19.5$	$l_9 = 23.60$

Itt már kiegyenlitésre szorulunk, mert ha az itt közölt összetartozó k és l értékpárokat a 24. mintára kettesével összeállitjuk — bizonyos határok közt — változó, azaz más-más α és β értékeket kapunk az ismeretlenekre.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Keressünk tehát az l mérési eredményekhez oly λ javításokat, hogy

$$25. \quad \begin{cases} l_1 + \lambda_1 = \alpha + \beta\, k_1 \\ l_2 + \lambda_2 = \alpha + \beta\, k_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ l_9 + \lambda_9 = \alpha + \beta\, k_9 \end{cases}$$

és amellett ezen javitási rendszer négyzetösszege:

$$\lambda_1\,\lambda_2 + \lambda_2\,\lambda_2 + \ldots + \lambda_9\,\lambda_9 = [\lambda\lambda]$$

az összes (végtelen sok) kiegyenlítő rendszerek között a legkisebb értékű azaz a *matematikai minimum* legyen. Ekkor — a legkisebb négyzetek módszerének elmélete szerint — egyszersmind az α és β ismeretlenek *legmegbizhatóbb azaz legkisebb középhibájú értékeit nyerjük.*

A feladat megoldása czéljából irjuk fel a 25. alatti egyenleteket úgy, hogy a baloldalon csak a λ javitások szerepeljenek:

$$26. \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\,l_1 + \alpha + k_1\,\beta. \\ \lambda_2 = -\,l_2 + \alpha + k_2\,\beta. \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_9 = -\,l_9 + \alpha + k_9\,\beta. \end{cases}$$

Ezen úgynevezett *hibaegyenletekből* most már úgy állapítandó meg az α és β értékpár, hogy a

$$27. \quad [\lambda\lambda] = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_9^2$$

érték ezen az α és β helyen **minimum** legyen.

A minimum matematikai feltétele, hogy az első differenciál hányadosok 0-ak legyenek, azaz, hogy

$$\frac{\delta[\lambda\lambda]}{\delta\alpha} = 0 \text{ és } \frac{\delta[\lambda\lambda]}{\delta\beta} = 0.$$

Vagy a közvetett differenciálás elve szerint:

$$\frac{\delta[\lambda\lambda]}{\delta\alpha} = \frac{\delta[\lambda\lambda]}{\delta\lambda_1}\,\frac{\delta\lambda_1}{\delta\alpha} + \frac{\delta[\lambda\lambda]}{\delta\lambda_2}\,\frac{\delta\lambda_2}{\delta\alpha} + \ldots \frac{\delta[\lambda\lambda]}{\delta\lambda_9}\,\frac{\delta\lambda_9}{\delta\alpha}$$

amely művelet a 27. egyenlet jobb oldalán végrehajtva:

$$\frac{\delta[\lambda\lambda]}{\delta\alpha} = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + 2\lambda_9.$$

Ugyanezt végrehajtva β-ra nézve

$$\frac{\delta[\lambda\lambda]}{\delta\beta} = 2\lambda_1\,k_1 + 2\lambda_2\,k_2 + \ldots + 2\lambda_9\,k_9.$$

Ezen differenciál hányadosoknak kell 0-nak lenni azaz: úgy kell meghatározni az α és β értékeket, hogy a 26. egyenletrendszeren kívül a

$$28. \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_9 = 0, \\ k_1\,\lambda_1 + k_2\,\lambda_2 + k_3\,\lambda_3 + \ldots + k_9\,\lambda_9 = 0, \end{cases}$$

egyenletek is ki legyenek elégítve. Helyettesitvén ezen egyenletekbe a λ értékeket — azaz a *hibaegyenletek* (26.) jobb oldalait, lesz:

$$29. \quad \begin{cases} -\,[l] + 9\alpha + [k]\,\beta = 0. \\ -\,[kl] + [k]\,\alpha + [kk]\,\beta = 0. \end{cases}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ezen egyenletek az α és β ismeretleneken kívül csupa ismeretes mennyiségeket illetve együtthatókat tartalmaznak:

$$\begin{aligned} -\ 176{,}16 + 9.00\ \alpha - \quad 6{,}90\ \beta &= 0. \\ -\ 169{,}24 - 6.90\ \alpha + 1534{,}19\ \beta &= 0. \end{aligned}$$

Ezekből meghatározható most már az α és β legmegbízhatóbb értéke:

$$\begin{aligned} \alpha &= +\ 19.727 \\ \beta &= +\ 0.1990 \end{aligned}$$

Ezen α és β értékeket a hibaegyenletekbe helyettesítvén, nyerjük — *ha szükségünk van rá* — a λ javításokat is.

Az itt bemutatott speciális példánál követett eljárás *sablonosan* alkalmazható mindenütt, ahol *közvetítő mérések kiegyenlítésével van dolgunk és ahol a hibaegyenletek jobb oldalán az ismeretlenek (a példában α és β) az első hatványon szerepelnek.*)*

Általában, például három ismeretlen (x, y, z) esetében a hibaegyenletek általános alakja tehát:

$$30. \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 &= -\ l_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \lambda_2 &= -\ l_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n &= -\ l_n + a_n x + b_n y + c_n z, \end{aligned} \right.$$

ahol n a mérések száma.

Az ismeretlenek (x, y, z) azon értékrendszere állapítandó meg, amely a

$$[\lambda\lambda] = \text{minimum}$$

feltételnek is megfelel, azaz amely mellett:

$$31. \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta\,[\lambda\lambda]}{\delta\, x} &= 0 \\ \frac{\delta\,[\lambda\lambda]}{\delta\, y} &= 0 \\ \frac{\delta\,[\lambda\lambda]}{\delta\, z} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Ezen feltételek mindegyike, ha a műveletet végrehajtjuk, *egy egyenletet* ad; tehát annyi ily egyenletünk lesz mindig, *ahány az ismeretlenek száma.* Ezen egyenleteket **normál egyenleteknek** nevezzük és ezek, valahányszor a 30. sémájára felírható *hibaegyenleteink* vannak, mindenkor a következő sablonos alakban írhatók fel a hibaegyenletek *állandóinak* és *együtthatóinak* felhasználásával:

$$32. \quad \left\{ \begin{aligned} [aa]\, x + [ab]\, y + [ac]\, z - [al] &= 0. \\ [ab]\, x + [bb]\, y + [bc]\, z - [bl] &= 0. \\ [ac]\, x + [bc]\, y + [cc]\, z - [cl] &= 0. \end{aligned} \right.$$

Ezen mindenkor gépiesen felírható lineáris normál egyenletekből pedig az ismeretlenek mindig meghatározhatók, mert ismételjük, annyi normál egyenlet írható fel mindig a hibaegyenletek alapján, ahány ismeretlen (x, y, z) meghatározandó.

A szabály, hogy miként kell a normál egyenletek együtthatóit és tiszta tagjait a hibaegyenletekből számítani, igen egyszerű:

---

*) Az a kifejezés **„közvetítő mérések"** azt jelenti, hogy nem a keresett ismeretleneket *mértük meg,* hanem azok függvényeit. Természetesen kiegyenlítésről csak akkor lehet szó, ha a mérések száma nagyobb, mint az ismeretlenek száma.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

$[aa]$ jelenti az *első* ismeretlen (x) összes (hibaegyenletbeli) együtthatóinak négyzetösszegét $[aa] = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2$;

$[ab]$ jelenti az első és második ismeretlen együtthatóinak (hibaegyenletbeli) szorzat összegét $[ab] = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ stb.

Látnivaló, hogy a normál egyenletek együtthatói symmetrikusan azonosak az *átlóhoz* (azaz a $[aa]$, $[bb]$, $[cc]$ négyzetes tagokon át képzelt vonalhoz) képest. Azért rendszerint csak *az átló feletti részt* irjuk le, a többit hozzáképzeljük:

$$33. \quad \begin{aligned} [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z - [al] &= 0. \\ [bb]\,y + [bc]\,z - [bl] &= 0. \\ [cc]\,z - [cl] &= 0. \end{aligned}$$

Ezen symmetrikus, lineár *normál* egyenletek legcélszerűbb sematikus megoldási módját később adjuk. (65. oldalon.)

Az ismeretlen — azaz a normál egyenletekből meghatározandó — mennyiségek (x, y, z) általában nagy számértékek, amiáltal a számítás *nehézkessé* válik. Ezt a nehézséget elkerülhetjük azáltal, hogy kiegyenlítés előtt kiszámítjuk az x, y, z ismeretlenek *közelítő* értékeit*) és most már nem a *teljes* x, y, z értékeket tekintjük ismeretleneknek, hanem a közelítő x_o, y_o, z_o számértékek *kiegészítéseit*, melyeket ξ, η, ζ betűkkel jelölünk. Tehát

$$34. \quad \begin{cases} x = x_o + \xi \\ y = y_o + \eta \\ z = z_o + \zeta. \end{cases}$$

Itt hangsulyozzuk, hogy sok esetben szükséges ez az eljárás, valamint az is, hogy az x_o, y_o, z_o a *lehetőségig megbízható* értékek legyenek már.

Ilyen eset az, amikor például a hibaegyenletek *közvetlenül nem lineáris* függvények. Lássuk ezt az esetet közelebbről.

Mi ismét az x, y, z mennyiségeket akarjuk nyerni és e célból mértük az L_1, L_2, L_3 . . . . függvényértékeket, tehát az

$$\begin{aligned} L_1 + \lambda_1 &= f_1(x, y, z) \\ L_2 + \lambda_2 &= f_2(x, y, z) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ L_n + \lambda_n &= f_3(x, y, z) \end{aligned}$$

egyenletekben az x, y, z-ket úgy akarjuk meghatározni, hogy a $[\lambda\lambda]$ minimum legyen.

Mivel a feltevés szerint nem lineáris függvényekkel van dolgunk, azért ezeket lineárissá kell tennünk. E célból vezessük be az x, y, z ismeretlenek (jól) közelítő értékeit, azaz helyettesítsük az:

$$\begin{aligned} x &= x_o + \xi \\ y &= y_o + \eta \\ z &= z_o + \zeta \end{aligned}$$

egyenlőségeket a hibaegyenletekbe:

$$\begin{aligned} L_1 + \lambda_1 &= f_1(x_o + \xi,\ y_o + \eta,\ z_o + \zeta) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_n + \lambda_n &= f_2(x_o + \xi,\ y_o + \eta,\ z_o + \zeta). \end{aligned}$$

*) Ez a kiszámítás *három* ismeretlen esetében úgy történhetik, hogy kiegyenlítés előtt az *első három* hibaegyenletben $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$-t téve: e három egyenletből számítjuk a közelítő x_o, y_o, z_o értékeket.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A hibaegyenletek jobb oldalait fejtsük *Taylor* sorba és feltéve, hogy az x_o, y_o, z_o közelítő értékek a lehetőségig jó értékei voltak x, y, z-nek, azaz hogy a ξ, η, ζ kicsiny mennyiségek: a *Taylor* sor első tagjaira szorítkozhatunk.

Eszerint a hibaegyenleteink uj alakja:

$$35. \quad \begin{cases} \lambda_1 = -L_1 + f_1(x_o, y_o, z_o) + \frac{\delta f_1}{\delta x_o}\xi + \frac{\delta f_1}{\delta y_o}\eta + \frac{\delta f_1}{\delta z_o}\zeta \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_n = -L_n + f_n(x_o, y_o, z_o) + \frac{\delta f_n}{\delta x_o}\xi + \frac{\delta f_n}{\delta y_o}\eta + \frac{\delta f_n}{\delta z_o}\zeta. \end{cases}$$

A rövidség okáért jelöljük az *ismeretes* tiszta tagokat l_1, l_2 . . . l_n-el, azaz legyen:

$$36. \quad \begin{cases} -l_1 = -L_1 + f_1(x_o, y_o, z_o) \\ -l_2 = -L_2 + f_2(x_o, y_o, z_o) \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

továbbá jelöljük a differenciál hányadosokat is egy-egy betűvel:

$$37. \quad \begin{cases} a_1 = \frac{\delta f_1}{\delta x_o}, b_1 = \frac{\delta f_1}{\delta y_o}, c_1 = \frac{\delta f_1}{\delta z_o} \\ a_2 = \frac{\delta f_2}{\delta x_0}, b_2 = \frac{\delta f_2}{\delta y_0}, c_2 = \frac{\delta f_2}{\delta z_o} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

akkor máris a 30. alatti lineáris alakra jutottunk:

$$38. \quad \begin{cases} \lambda_1 = -l_1 + a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta \\ \lambda_2 = -l_2 + a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_n = -l_n + a_n\xi + b_n\eta + c_n\zeta \end{cases}$$

amely hibaegyenletrendszerre alkalmazva, a legkisebb négyzetek módszerét a 32. alatt felírt normál egyenletekre jutunk, amelyekben az x, y, z helyett a ξ, η, ζ lesznek mint ismeretlenek irandók.

Hogy a feladat megoldásának — konkrét esetben — helyességéről meggyőződjünk, a normál egyenletekből kiszámított ξ, η, ζ értékeket helyettesítjük a 38. alatti hibaegyenletekbe és az így nyert λ_1, λ_2, λ_3 . . . λ_n javításokat és az $(x_o + \xi)$, $(y_o + \eta)$, $(z_o + \xi)$ értékeket az *eredeti* (nem lineáris)

$$L_i + \lambda_i = f_i(x, y, z)$$

hibaegyenletekbe helyettesítve, a jobb és baloldalon számszerű egyenlőségekre kell jutni.

Az itt előadott módon egyenlítjük ki például az *előmetszéseket* a háromszögelésekben. Ismeretlenekként $(x, y, \dots)$ az előmetszett pont *sík összrendezői* fognak szerepelni. Ott is első dolog lesz a hibaegyenleteket lineáris alakban felírni: ami *sablonosan* lesz mindenkor eszközölhető. (75. oldal.) E lineáris hibaegyenletek együtthatóiból pedig az előbbi oldalon mondottak szerint nyerjük a normál egyenleteket.

Ami az ezen pontban ismertetett eljárással való kiegyenlítés adta λ javításokat illeti, úgy be van bizonyítva, hogy n mérési eredmény és m ismeretlen esetében *egy mérés középhibája* μ, a

$$39. \quad \mu^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n-m}$$

képlettel számítandó a hibaegyenletekadta λ_1, λ_2, λ_3 . . . λ_n értékek négyzetei alapján.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ezen μ érték alapján számítható az ismeretlen x, y, z . . . -kre a kiegyenlítésből nyert legmegbízhatóbb értékek középhibái is a

$$4. \quad \begin{cases} \mu_x = c_1 \cdot \mu \\ \mu_y = c_2 \cdot \mu \\ \mu_z = c_3 \cdot \mu \end{cases}$$

általános képlet alapján, ahól a c értékek kiszámítása többféle módon eszközölhető : amivel azonban általánosságban itt nem foglalkozunk :

a) mert a kiegyenlítés után nyert irány vagy szög középhiba a megbízhatóságnak teljesen kielégítő mértékét adja;

b) mert a koordináta középhibák számítása nagyobb számu ismeretlenek esetében nagy munkát ad.

Végül megjegyezzük hogyha az L_1, L_2 . . . mérési eredmények nem egyenlő súlyúak, hanem az L_1 súlya g_1, L_2 súlya g_2 stb. akkor a hibaegyenletek alakja (és minden számértéke) ugyanaz marad mint 38. illetve 30. alatt; a normál egyenletekben (32.) azonban a [. . .] *szorzatösszegekben szerepelnek a súlyok is:*

$$40. \quad \begin{cases} [a\ a] \text{ helyett irandó } [a\ a\ g] \\ [ab] \quad \text{„} \quad \text{„} \quad [abg] \\ \text{stb.} \end{cases}$$

És mivel most nem a $[\lambda\ \lambda]$, hanem a $[\lambda\ \lambda\ g]$ van *minimummá* téve, azért egy mérés középhibája nem a 39. hanem ezen képlettel számítandó :

$$41. \quad \mu^2 = \frac{[\lambda\ \lambda\ g]}{n - m.}$$

5. Kiegyenlítés feltételi egyenletek esetében. (Korreláta módszer.)

Tegyük fel, hogy n számu (l_1, l_2, . . . l_n) mérési eredményeinknek r számu nem lineáris alakú feltételi egyenletet kell kielégítenie: természetesen feltételezve mindig, hogy $r < n$. Legyenek e feltételi egyenletek

$$42. \quad \begin{cases} f_1\ (l_1 + \lambda_1,\ l_2 + \lambda_2, \quad . \ . \ . \ . \quad l_n + \lambda_n) = 0. \\ f_2\ (l_1 + \lambda_1,\ l_2 + \lambda_2, \quad . \ . \ . \ . \quad l_n + \lambda_n) = 0. \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ fr\ (l_1 + \lambda_1,\ l_2 + \lambda_2, \quad . \ . \ . \ . \quad l_n + \lambda_n) = 0. \end{cases}$$

Feladat: úgy meghatározni a mért l_1, l_2, . . . -hez a λ_1, λ_2 . . . λ_n javítási rendszert, hogy az r számú feltételi egyenlet, és a $[\lambda\ \lambda] =$ minimum feltétel is ki legyen elégítve.

Mindenekelőtt és minden esetben itt is *lineáris* alakra kell hozni a *feltételi egyenleteket.* Taylor sorba fejtve a függvényeket és a λ_1, λ_2, . . . λ_n magasabb hatványait tartalmazó tagokat elhanyagolva az :

$$43. \quad \begin{cases} a_1\ \lambda_1 + a_2\ \lambda_2 + \quad . \ . \ . \quad + a_n\ \lambda_n + w_1 = 0. \\ b_1\ \lambda_1 + b_2\ \lambda_2 + \quad . \ . \ . \quad + b_n\ \lambda_n + w_2 = 0. \\ c_1\ \lambda_1 + c_2\ \lambda_2 + \quad . \ . \ . \quad + c_n\ \lambda_n + w_3 = 0. \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ (r) \end{cases}$$

alakra jutunk mindig, ahól

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

$$w_i = f_i(l_1, l_2, l_3 \ . \ . \ . \ l_n)$$
$$a_i = \frac{\delta f_1}{\delta l_i}\ ;\ b_i = \frac{\delta f_2}{\delta l_i}\ ;\ c_i = \frac{\delta f_3}{\delta l_i}$$

Hogy azon λ értékeket meghatározhassuk amelyeknek négyzetösszege minimum és a 43. alatti egyenleteket is kielégíti, szorozzuk a 43. alatti egyenleteket rendre — 2 k_1, $2k_2$ . . . $2k_r$ ismeretlen együtthatókkal és adjuk azokat a $[\lambda\,\lambda]$ kifejezéshez.

Egyszerűség kedvéért *három* feltételi egyenletre szorítkozva, előáll a

$$\begin{aligned}[\lambda\,\lambda] &- 2\,k_1\,(a_1\,\lambda_1 + \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . + a_n\,\lambda_n + w_1)\\ &- 2\,k_2\,(b_1\,\lambda_1 + \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . + b_n\,\lambda_n + w_2)\\ &- 2\,k_3\,(c_1\,\lambda_1 + \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . + c_n\,\lambda_n + w_3)\end{aligned}$$

függvény és ennek kell — a feltételes minimum tana szerint — a minimum megoldását keresni.

Ezen művelet a:

$$44. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ \begin{cases} \lambda_1 = a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \\ \lambda_2 = a_2\,k_1 + b_2\,k_2 + c_2\,k_3 \\ \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ \lambda_n = a_n\,k_1 + b_n\,k_2 + c_n\,k_3 \end{cases}$$

úgynevezett — és a 43. számu lineáris feltételi egyenletrendszer együtthatói alapján *mindenkor* gépiesen felirható — *korreláta egyenletekre* vezet.

Ha most már a 43. alatti feltételi egyenletekbe behelyettesítve képzeljük a korreláta egyenletek (számuk n) jobb oldalait a λ_1, λ_2 . . . λ_n javítások helyébe, előállanak az úgynevezett *normál egyenletek* (számuk r) amelyek mint ismeretleneket, a k_1, k_2 . . . kr (korreláta) értékeket tartalmazzák. E *normál* egyenletek alakja:

$$45. \ . \ . \ . \ \begin{cases} [a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + w_1 = 0. \\ [a\,b]\,k_1 + [b\,b]\,k_2 + [b\,c]\,k_3 + w_2 = 0. \\ [a\,c]\,k_1 + [b\,c]\,k_2 + [c\,c]\,k_3 + w_3 = 0. \end{cases}$$

Ezek, ha a 43. alatti lineáris feltételi egyenletek ismeretesek — úgy mint a korreláta egyenletek számszerűleg felírhatók.

Ezek megoldva — adják a k_1, k_2, . . . k_n korreláták értékeit. Ezeket a 44. alatti — és ugyancsak a 43. alapján gépiesen felírható *korreláta* egyenletekbe téve: nyerjük a *kivánt* (kiegyenlített és $[\lambda\,\lambda]$-ra nézve minimum) λ_1, λ_2 . . . λ_n javításokat, melyeket a közvetlenül mért l_1, l_2, . . . l_n értékekhez adunk.

A korreláta egyenletek száma mindig = n, azaz a mérési eredmények számával; a normál egyenletek száma mindig = r-rel, azaz a feltételi egyenletek számával. Ha tehát egy konkrét kiegyenlítésben sok a geometriai kényszer, azaz nagy a feltételi egyenletek száma, úgy nagy lesz a *normál egyenletek* száma is. Mivel pedig nagyszámú normál egyenletek együtthatóinak számítása és megoldása — daczára a sablonos voltának — *nagy munka,* azaz sok időt kiván, azért czélszerűbb lesz sokszor a kiegyenlítéseket az *előbbi pontban tárgyalt módon végezni, ahol a normál egyenletek száma egyenlő az ismeretlen mennyiségek számával, tekintet nélkül arra, hogy mekkora a geometriai feltételek* (ott a hibaegyenletek) *száma.*

Ha az ezen pontban tárgyalt kiegyenlítési esetben a mérések nem egyenlő, hanem rendre g_1, g_2, g_3, . . . g_n súlyúak, akkor a feltételi egyenletek alakja marad változatlan (43. képlet), a korreláta egyenletek alakja pedig:

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

$$46. \quad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{g_1}(a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3) \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{g_2}(a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n = \dfrac{1}{g_n}(a_n k_1 + b_n k_2 + c_n k_3) \end{cases}$$

és a normál egyenletek:

$$47. \quad \begin{cases} \left[\dfrac{a\,a}{g}\right] k_1 + \left[\dfrac{a\,b}{g}\right] k_2 + \left[\dfrac{a\,c}{g}\right] k_3 + w_1 = 0. \\ \left[\dfrac{a\,b}{g}\right] k_1 + \left[\dfrac{b\,b}{g}\right] k_2 + \left[\dfrac{b\,c}{g}\right] k_3 + w_2 = 0. \\ \left[\dfrac{a\,c}{g}\right] k_1 + \left[\dfrac{b\,c}{g}\right] k_2 + \left[\dfrac{c\,c}{g}\right] k_3 + w_3 = 0. \end{cases}$$

Az egységsúlyú eredmény középhibája most:

48. . . . . $\mu = \pm \sqrt{\dfrac{[\lambda\,\lambda\,g]}{r}}$, ha a mérések egyenlően megbízhatók voltak, akkor

49. . . . . $\mu = \pm \sqrt{\dfrac{[\lambda\,\lambda]}{r}}$ ahol r a feltételi egyenletek száma.

A normál egyenletek megoldása.

Akár a 4., akár az 5. pontban tárgyalt kiegyenlítéssel van dolgunk, a normál egyenletek mindig

a) lineáris egyenletek

b) symmetrikus egyenletek.

Ha kicsi a normál egyenletek száma, akkor a munkaidő szempontjából közömbös, hogy milyen módon oldjuk meg a normál egyenleteket. De ahol nagy ezen egyenletek száma, ott a *C. F. Gauss*-tól eredő *sématikus eliminációs* módszert alkalmazhatjuk. E módszer levezetése a jelzések komplikált volta miatt komplikáltnak látszhatik, de gyakorlati alkalmazásában, akár *számoló géppel* (szorzó táblával), akár logaritmus könyvvel dolgozunk, igen gépies munkát enged.

Legyen a normal egyenletrendszer:

$$50. \quad \begin{cases} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z - [a\,l] = 0. \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z - [b\,l] = 0. \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z - [c\,l] = 0. \end{cases}$$

Szorozzuk meg az első egyenlet minden tagját a $-\dfrac{[a\,b]}{[a\,a]}$ hányadossal és adjuk az így szorzott egyenletet a *második* normál egyenlethez; azután szorozzuk meg ugyancsak az első egyenletet a $-\dfrac{[a\,c]}{[a\,a]}$ hányadossal és az így szorzott első egyenletet adjuk a 3-ik egyenlethez. Ha több egyenlet volna úgy, a $-\dfrac{[a\,d]}{[a\,a]}$, stb.-vel ezt folytatjuk. Jelen esetben tehát nyertünk **két egyenletet:**

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

$$51. \quad \begin{cases} +\left([b\,b] - \frac{[a\,b]\,[a\,b]}{[a\,a]}\right) y + \left([b\,c] - \frac{[a\,b]\,[a\,c]}{[a\,a]}\right) z - \left([b\,l] - \frac{[a\,b]\,[a\,l]}{[a\,a]}\right) = 0. \\ +\left([b\,c] - \frac{[a\,b]\,[a\,c]}{[a\,a]}\right) y + \left([c\,c] - \frac{[a\,c]\,[a\,c]}{[a\,a]}\right) z - \left([c\,l] - \frac{[a\,c]\,[a\,l]}{[a\,a]}\right) = 0. \end{cases}$$

Vagy egyszerűbb jelzést vezetve be az *egyszer redukált* normál egyenletek alakja:

$$52. \quad \begin{cases} [b\,b\,1]\,y + [b\,c\,1]\,z - [b\,l\,1] = 0. \\ [b\,c\,1]\,y + [c\,c\,1]\,z - [c\,l\,1] = 0. \end{cases}$$

ahol

$$[b\,b\,1] = \left([b\,b] - \frac{[a\,b]\,[a\,b]}{[a\,a]}\right)$$

$$[b\,c\,1] = \left([b\,c] - \frac{[a\,b]\,[a\,c]}{[a\,a]}\right) \text{ stb.}$$

Hasonlóan redukáljuk most ezt az 52. alatti egyenlet rendszert, azaz szorozzuk meg az első egyenletet $-\frac{[b\,c\,1]}{[b\,b\,1]}$-el és adjuk hozzá a 2-ik egyenlethez.

Akkor a *kétszer redukált* normál *egyenlet:*

$$\left([c\,c\,1] - \frac{[b\,c\,1]\,[b\,c\,1]}{[b\,b\,1]}\right) z - \left([c\,l\,1] - \frac{[b\,c\,1]\,[b\,l\,1]}{[b\,b\,1]}\right) = 0$$

vagy egyszerü jelzéssel:

$$53. \quad \ldots\ldots\ldots \quad [c\,c\,2]\,z - [c\,l\,2] = 0.$$

Ha több normál egyenletünk lett volna, tovább kellene ezt a redukálást folytatni.

Végeredményben — az utolsó redukált egyenlet (53.) *már csak egy ismeretlent* (az x, y, z sorrendben az utolsót) tartalmaz, tehát egyszerűen megoldható:

$$54. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad z = \frac{[c\,l\,2]}{[c\,c\,2]}$$

Az így nyert z értéket az *előbbi* redukált alakba téve (52-be) nyerjük az y-t és így tovább az x-et.

Akárhány ismeretlen van, a számítási séma előre megrajzolható, és nagyobb számu normális egyenletek esetében egyszerre több *számoló egyént* lehet állandóan foglalkoztatni.

Itt bemutatunk egy ilyen sémát, amelynek alapján bárki, bármily nagyszámú normál egyenlet esetében elvégezheti a számítást:

Normál egyenletek:

$$(aa)\ \xi + (ab)\,\eta + (ac)\ \xi + \ldots + (al) = 0$$
$$(ab)\ \xi + (bb)\,\eta + (bc)\ \xi + \ldots + (bl) = 0$$
$$(ac)\ \xi + (bc)\,\eta + (cc)\ \xi + \ldots + (cl) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Az együtthatók összegei:

$$(aa) + (ab) + \ldots + (al) = (as)$$
$$(ab) + (bb) + \ldots + (bl) = (bs)$$
$$(ac) + (bc) + \ldots + (cl) = (cs)$$

Jegyzet: Korreláta kiegyenlítés esetében a normál egyenletek itt felírt képletében (al) helyett ω_1, (bl) helyett ω_2, stb. irandók, amely ω_1, ω_2, . . . értékek a *feltételi* egyenletek absolut tagjai. A gömbölyű zárjelek a sémában *summát* jelentenek.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A normál egyenletek feloldása:

ξ	η	ζ	. . . .			Összeg	Ellenőrzés
$+(aa)$	$+(ab)$	$+(ac)$	. . . .	$+(al)$	$=0$	$+(as)$	
$+1$	$+\frac{(ab)}{(aa)}$	$+\frac{(ac)}{(aa)}$	. . . .	$+\frac{(al)}{(aa)}$	$=0$	$+\frac{(as)}{(aa)}$	
$+(ab)$	$+(bb)$	$+(bc)$	. . . .	$+(bl)$	$=0$	$+(bs)$	
$-(ab)$	$-(ab)\frac{(ab)}{(aa)}$	$-(ab)\frac{(ac)}{(aa)}$	. . . .	$-(ab)\frac{(al)}{(aa)}$	$=0$	$-(ab)\frac{(as)}{(aa)}$	
0	$+(bb)-(ab)\frac{(ab)}{(aa)}$	$+(bc)-(ab)\frac{(ac)}{(aa)}$	. . . .	$+(bl)-(ab)\frac{(al)}{(aa)}$	$=0$	$+(bs)-(ab)\frac{(as)}{(aa)}$	
	$=+(bb\cdot 1)$	$=+(bc\cdot 1)$	. . . .	$=+(bl\cdot 1)$	$=0$	$=+(bs\cdot 1)$	$=(bb\cdot 1)+(bc\cdot 1)\ldots+(bl\cdot 1)$
	$+1$	$+\frac{(bc\cdot 1)}{(bb\cdot 1)}$	. . . .	$+\frac{(bl\cdot 1)}{(bb\cdot 1)}$	$=0$	$+\frac{(bs\cdot 1)}{(bb\cdot 1)}$	
$+(ac)$	$+(bc)$	$+(cc)$	. . . .	$+(cl)$	$=0$	$+(cs)$	
$-(ac)$	$-(ac)\frac{(ac)}{(aa)}$	$-(ac)\frac{(ac)}{(aa)}$	. . . .	$-(ac)\frac{(al)}{(aa)}$	$=0$	$-(ac)\frac{(as)}{(aa)}$	
	$-bc\cdot 1$	$-(bc\cdot 1)\frac{(bc\cdot 1)}{(bb\cdot 1)}$	. . . .	$-(bc\cdot 1)\frac{(bl\cdot 1)}{(bb\cdot 1)}$	$=0$	$-(bc\cdot 1)\frac{(bs\cdot 1)}{(bb\cdot 1)}$	
0	0	$+(cc\cdot 2)$	. . . .	$+(cl\cdot 2)$	$=0$	$+(cs\cdot 2)$	$=+(cc\cdot 2)+\ldots.+(cl\cdot 2)$
		$+1$	. . . .	$+\frac{(cl\cdot 2)}{(cc\cdot 2)}$	$=0$	$+\frac{(cs\cdot 2)}{(cc\cdot 2)}$	

A tört vonal alatti rész elmaradhat.

stb. . . . . .

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Amint e táblázatból látható, szerepelnek itt ugynevezett *„összegtagok“*, amelyek alkalmazását az általuk elérhető számítási ellenőrzés miatt feltétlenül ajánlhatjuk.

Látnivaló az *„összeg“* oszlopban, miként kell a normál egyenletek *„együtthatók összegei“*-ből ((*as*), (*bs*) stb.) a (*bs.* 1) összeget előállitani, és ezen (*bs* 1) összegnek azután *egyenlőnek kell lenni az első redukált* egyenlet együtthatóinak összegével.

Hasonló ellenőrzésre jutunk a második stb. redukált együtthatók összegére nézve is.

Különösen nagyszámú normál egyenletek megoldásakor ezen fontos ellenőrző számítás alkalmazása *feltétlenül szükségesnek* mondható.

Egy további — az egész kiegyenlítési műveletre nézve ellenőrző számítás — a $[\lambda\lambda]$-nak kétféle módon való számítása. Az egyik mód, hogy a normál egyenletek megoldása után a hibaegyenletekből, illetve a korreláta egyenletekből számíthatjuk a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ javításokat. Mindegyiket négyzetre emelve és összegezve nyerjük a $[\lambda\lambda]$ értéket.

Most már be lehet bizonyitani, hogy az *utolsó redukált* normál *egyenlet együtthatója és tiszta tagja* (a mi esetünkben $[cl\ 2]$ és $[cc\ 2]$ a következő képlet szerint adják a $[\lambda\lambda]$-t:

$$55. \ldots [\lambda\lambda] = (ll) - \frac{(al)^2}{(aa)} - \frac{(bl\ 1)^2}{(bb\ 1)} - \frac{[cl\ 2]^2}{[cc\ 2]}.$$

Ezen érték a normál egyenletek megoldásakor mindig kiszámíttatik: evvel kell azután egyeznie az egyes λ-k négyzeteiből számítható $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = [\lambda\lambda]$ összegnek. Az utolsó decimálisokban rendszerint lesz eltérés, ami onnan ered, hogy számításainkban az együtthatókat nem számíthatjuk végtelen sok decimális értékkel.

Például előmetszés *szabatos kiegyenlítésénél* előfordulhat ily két érték:

$$[\lambda\lambda] = + 185.23$$
$$\text{és } \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots \lambda_n^2 = + 184{,}11$$

és ezekre bizvást mondhatjuk, hogy egyeznek.

Végül még megjegyezzük, hogy vannak esetek, midőn a normál egyenletek megoldása — vagy mert a feltételi egyenletek együtthatói mind $= 1$, vagy más okokból — még az ismertetett Gauss-féle megoldásnál is *egyszerűbben* végezhető. Ilyen speciális *„számítási fogásokra“* is fogunk példákat adni: néha a számítási munka 3—4-szerte lesz kevesebb ezek alkalmazása által.

A legkisebb négyzetek módszerét tárgyaló irodalmi művek között különösen ajánlhatók:

a) Az *elméletre* vonatkozók:

Bodola Lajos: „A mérési hibák elmélete és a legkisebb négyzetek módszere.“ Budapest, 1905.

Emanuel Czuber: „Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig, 1891.“

b) A gyakorlati alkalmazásra nézve igen sok példát adnak:

E. Hegemann, Übungsbuch für die Anwendung der Ausgleichungsrechnung . . .“. Berlin, 1902.

C. Koppe: „Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate . . .“. Nordhausen, 1885.“

4. §. Városmérések háromszögeléseinek kiegyenlítése.

Az előbbi pontban előadott kiegyenlítési esetre példa az önálló városméréseknél fejlesztett *háromszögelési főhálózatnak* szokásos kiegyenlítése; a 4. pontban előadott kiegyenlítési esetre pedig példa az ugyancsak városméréseknél rendszerint előírt*) *„koordináták szerinti előmetszés kiegyenlítés.“*

A városi előmetszett (magas) pontokból *hátrametszéssel* nyert alappontoknak a legkisebb négyzetek módszere szerinti kiegyenlítését feleslegesnek tartom: azért ezt az esetet itt (alsó geodéziai méréseknél) nem is tárgyalom.

*) Lásd e kötet függelékének I. Fejezetét.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

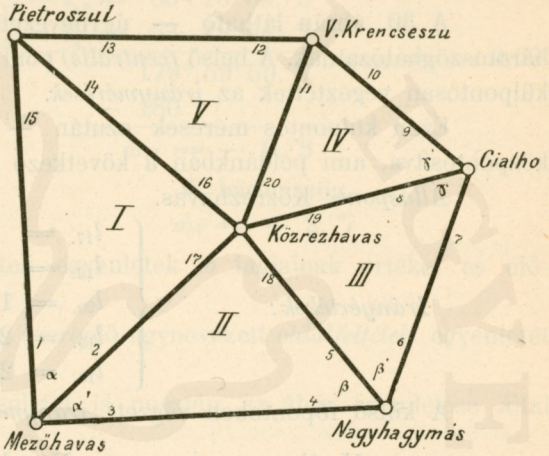
A szóban forgó két, gyakorlatilag fontos feladat *megoldásainak teljes ismerete ma már minden földmérőtől megkövetelhető:* ezért számpéldákkal kapcsolatosan egész részletességgel fogjuk azokat itt tárgyalni.

Az *első feladatnál* — anélkül hogy az oldalhosszakat vagy összrendezőket közelítőleg is számítottuk, vagy irányértékeinket tájékoztuk volna — a cél: az egyes pontokon mérésekkel nyert l_1, l_2, . . . l_n *irányértékeket* oly λ_1, λ_2, . . . λ_n javításokkal ellátni, amelyekre nézve a summa $\lambda\lambda = [\lambda\lambda]$ négyzetösszeg: *minimum* és amellett az összes geometriai feltételek úgy ki vannak elégítve, mintha az $l_1 + \lambda_1$, $l_2 + \lambda_2$, . . . $l_n + \lambda_n$ javított értékek teljesen hibátlan mérési eredmények volnának.

Ez tehát tényleg a *közvetetlen mérések* kiegyenlítésének esete: az ismeretlenek (λ_1, λ_2, . . . λ_n) száma mindig annyi, mint *ahány* irányértékünk van összesen; a kielégítendő *feltételi* egyenletek száma pedig annyi lesz mindig, *ahány fölös* irányértékünk van.

Látni fogjuk, hogy e feltételi egyenleteket mindenkor képesek leszünk a hálózati vázlat alapján (30. ábra) *gépies eljárással lineáris alakban* felírni: amikor azután a megoldás (azaz a λ-ák számítása) az 5. pontban ismertetett *sémák* szerint történhetik.

Ezen kiegyenlítés után az $(l_1 + \lambda_1)$, $(l_2 + \lambda_2)$, . . . $(l_n + \lambda_n)$ irányértékek állomásonkint tájékozva lesznek és egy *ismert háromszög oldalból**) kiindulva, számíttatnak háromszögről-háromszögre haladva a háromszögek csúcspontjainak végleges derékszögű sík összrendezői az előbbi fejezet 3. és 4. §-aiban előadott módon.

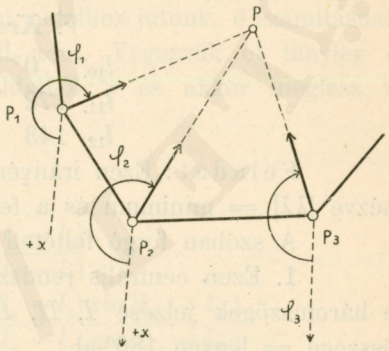


30. ábra.

Ismerve ily módon a városi főhálózat pontjainak (30. ábra) összrendezőit a szabadon választott vagy adott derékszögű koordináta rendszerre vonatkozólag, számíthatók lesznek (előmetszéssel) mindazon pontok összrendezői, amelyekre nézve legalább is két-két főpontból *irányméréseket* végeztünk.

Városméréseknél rendszerint *magaspontok*-ról van szó: toronycsúcsok, kupolacsúcsok, villámhárítók és elvétve jelrudak ezek.**)

Minthogy azonban nem két, hanem 4—5 főpontról is végeztünk (31. ábra) minden egyes ilyen magas pontra irányméréseket: nem *egy*, hanem *sok* háromszögből számíthatók minden egyes előmetszett pont összrendezői.



31. ábra.

Ezen összrendezői értékek — az elkerülhetetlen szögmérési hibák miatt, valamint a főhálózatnak nem absolut pontos volta miatt — nem lesznek azonosak, hanem *5—10 cm.-en* belül eltérnek egymástól az ugyanazon pontra nézve nyert y, és x értékek. A feladatot most már így ismertethetjük: irányértékeinket a főhálózat ismert délszögértékeinek felhasználásával **tájékozva**, (lásd a 31. ábrát) rendes előmetszés számítással (*két* háromszögből)

*) Ez az oldal vagy azért ismeretes, mert az országos háromszöghálózat egyik oldala, vagy azért, mert *alapvonalat* mértünk és a mért alapvonalból *az alapvonal fejlesztő* hálózattal ezen oldalhoz kapcsolódtunk.

**) *Dombos* vagy *hegyes* környékkel biró városoknál (pl. Kassa, Pécs) e pontok nagy része az *utcákan* felállított és kivülről observált jelrudak lesznek.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

kiszámítjuk az előmetszett pont összrendezőit és az így nyert (y) és (x) összrendező értékeket **előzetes** *(közelítő)* **összrendezőknek** tekintve, keressük — minden előmetszett pontra külön-külön kiegyenlítéssel — azokat a Δy és Δx koordináta javításokat, hogy az $(y) + \Delta y$, $(x) + \Delta x$ végleges összrendezők a méréseinkből egyáltalában nyerhető legmegbízhatóbb értékeknek legyenek tekinthetők. Tehát mi iránymméréseket végeztünk itt is, de azért *közvetlenül* nem ezeknek a javításait, hanem az előzetesen számított *derékszögű sík összrendezői* értékek *legmegbízhatóbb* javításait keressük. A mérések (l_1, l_2, . . . l_n irányértékek) száma egy-egy pontra nézve lehet *tetszőlegesen sok* ($n = 3, \ldots 10.$): a meghatározandó ismeretlenek (Δy, Δx) száma azonban mégis mindig **csak kettő** lesz. Tehát *„közvetítő mérések kiegyenlítése* **két** *ismeretlennel"* : ez a városmérésekben szereplő előmetszés kiegyenlítés esete.

I. Centrális (városi) háromszögelési főhálózat (korreláta) kiegyenlítése.

A 30. ábrán látható — úgynevezett *centrális hálózat* — tipikus alakja a városi háromszöghálózatnak. A belső *(centrális)* pont rendszerint magas torony, amelynek ablakaiból külpontosan végeztettek az *iránymérések.*

Ezen külpontos mérések azután — a külpontossági elemek felhasználásával — központosítva, ami példánkban a következő *irányértékeket* szolgáltatták:

Álláspont: Közrezhavas.

Irányértékek:

$$\left\{\begin{array}{lrrrr} l_{17.} = & 0^\circ & 0' & 0.''0 \\ l_{16.} = & 84 & 47 & 11.\ 0 \\ l_{20.} = & 154 & 11 & 53.\ 8 \\ l_{19.} = & 209 & 27 & 35.\ 8 \\ l_{18.} = & 274 & 43 & 4.\ 5 \end{array}\right.$$

A külső főpontokon végzett *iránymérések* eredményei pedig a következők voltak:

Mezőhavas.				*Nagyhagymás.*				*Cialho.*			
l_1.	0°	0′	0.″0	l_4.	0°	0′	0.″0	l_7.	0°	0′	0.″0
l_2.	49	11	33. 1	l_5.	53	18	54. 7	l_8.	55	18	34. 1
l_3.	90	35	42. 6	l_6.	112	44	51. 0	l_9.	107	27	20. 3

V. Krencseszu.				*Pietroszul.*			
l_{10}.	0°	0′	0.″0	l_{13}.	0°	0′	0.″0
l_{11}.	72	35	30. 1	l_{14}.	39	53	0. 3
l_{12}.	143	17	49. 7	l_{15}.	85	54	17. 6

Feladat: Ezen irányértékekhez oly λ_1, λ_2 . . . . λ_{20} javításokat keresni, amelyekre nézve $[\lambda\lambda]$ = minimum és a feltételi egyenletek is ki vannak elégítve.

A szóban forgó feltételi egyenletek gépiesen leírhatók.

1. Ezen centrális rendszer *öt egymástól független* háromszögből áll (a 30. ábrán e háromszögek jelzése *I, II, III, IV, V):* kell, hogy minden háromszögben a *belszögek* összege = legyen 180^0-al.

Ezen feltétel *öt* úgynevezett *„szögfeltételi"* egyenletre vezet. Például az I. háromszög szögfeltételi egyenlete:

$$(l_2 + \lambda_2) - (l_1 + \lambda_1) + (l_{16} + \lambda_{16}) - (l_{17} + \lambda_{17}) + (l_{15} + \lambda_{15}) - (l_{14} + \lambda_{14}) = 180^0,$$

azaz $(\lambda_2 - \lambda_1) + (\lambda_{16} - \lambda_{17}) + (\lambda_{15} - \lambda_{14}) + \{(l_2 - l_1) + (l_{16} - l_{17}) + (l_{15} - l_{14}) - 180^0\} = 0,$

amely egyenletben a $\{\ldots\}$ lévő részt *a háromszög záróhibájának* nevezzük és ω-val (jelen esetben ω_I-el) jelöljük. Ezen ω_I, ω_{II}, . . . ω_V értékek minden hárömszögre külön kiszámítandók.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Az öt szögfeltételi egyenlet a 30. ábra szerint lesz tehát:

1. . . . $\begin{cases} \text{I. háromszögre:} & (\lambda_2 - \lambda_1) + (\lambda_{16} - \lambda_{17}) + (\lambda_{15} - \lambda_{14}) + \omega_I = 0. \\ \text{II.} \quad \text{„} & (\lambda_3 - \lambda_2) + (\lambda_{17} - \lambda_{18}) + (\lambda_5 - \lambda_4) + \omega_{II} = 0. \\ \text{III.} \quad \text{„} & (\lambda_6 - \lambda_5) + (\lambda_{18} - \lambda_{19}) + (\lambda_8 - \lambda_7) + \omega_{III} = 0. \\ \text{IV.} \quad \text{„} & (\lambda_{19} - \lambda_{20}) + (\lambda_{11} - \lambda_{10}) + (\lambda_9 - \lambda_8) + \omega_{IV} = 0. \\ \text{V.} \quad \text{„} & (\lambda_{20} - \lambda_{16}) + (\lambda_{14} - \lambda_{13}) + (\lambda_{12} - \lambda_{11}) + \omega_V = 0. \end{cases}$

Látnivaló, hogy a *szögfeltételi* egyenletek ilymódon az ábra puszta szemlélete alapján mindig felírhatók: csak az ω_I, ω_{II}, . . . ω_V számértékeket (háromszögzáró hibák) kell most még *kiszámítani*. Végezzük tehát el ezt a művelet is mind az öt háromszögre:

2. .

I. háromszög.	II. háromszög.	III. háromszög.
$l_2 - l_1 = 49^\circ\ 11'\ 33.''1$	$l_3 - l_2 = 41^\circ\ 24'\ 9.''5$	
$l_{16} - l_{17} = 84\ 47\ 11.\ 0$	$l_{17} - l_{18} = 85\ 16\ 55.\ 5$	
$l_{15} - l_{14} = 46\ 1\ 17.\ 3$	$l_5 - l_4 = 53\ 18\ 54.\ 7$	$\omega_{III} = -\ 0.''9$
$180^\circ\ 0'\ 1.''4$	$179^\circ\ 59'\ 59.''7$	
$-\ 180$	$-\ 180$	
$\omega^I = +\ 1.''4$	$\omega_{II} = -\ 0.''3$	

IV. háromszög.	V. háromszög.
$\omega_{IV} = -\ 1.''7$	$\omega_V = +\ 2.''7$

Ily módon az 1. alatt felírt szögfeltételi egyenletek ω tagjainak értékei és előjelei ismeretesek.

Hátra van még a centrális rendszerben szereplő úgynevezett *oldalfeltételi* egyenletet felírni.

Tüstént látni fogjuk, hogy ezen egyenletet is pusztán az ábra szemlélése által *gépiesen* lehet mindig felírni.

Az ábrából látnivaló, hogy ezen hálózatban **egy fölös** oldal van: azaz akármely (de csak egy) oldalt hagyjuk el az ábrából, a többi oldalak, egy *ismert* oldalból kiindulva, a sinus tétel alapján számíthatók. A fölös oldal jelenlétét matematikailag ugy fejezhetjük ki, hogy kiindulva egy oldalból (például a Mezőhavas-Közrezhavas oldalból) és a sinus tételt alkalmazva rendre a háromszögekre, amig ismét a kiinduló oldalhoz jutunk, e számításnak végeredményben ugyanazt az értéket (oldalhosszérték) kell adni. Végezzük el tényleg e műveletet, kiindulva például a *Mezőhavas-Közrezhavas* oldalból:*) és akkor meglesz a keresett oldalfeltételi egyenlet.

$$KN = (KM)\frac{\sin(l_3 - l_2)}{\sin(l_5 - l_4)}, \text{ azután}$$

$$KC = (KN)\frac{\sin(l_6 - l_5)}{\sin(l_8 - l_7)} = KM\frac{\sin(l_3 - l_2)\sin(l_6 - l_5)}{\sin(l_5 - l_4)\sin(l_8 - l_7)}$$

$$KV = (KC)\frac{\sin(l_9 - l_8)}{\sin(l_{11} - l_{10})} = KM\frac{\sin(l_3 - l_2)\sin(l_6 - l_5)\sin(l_9 - l_8)}{\sin(l_5 - l_4)\sin(l_8 - l_7)\sin(l_{11} - l_{10})}$$

$$KP = (KV)\frac{\sin(l_{12} - l_{11})}{\sin(l_{14} - l_{13})} = KM\frac{\sin(l_3 - l_2)\sin(l_6 - l_5)\sin(l_9 - l_8)\sin(l_{12} - l_{11})}{\sin(l_5 - l_4)\sin(l_8 - l_7)\sin(l_{11} - l_{10})\sin(l_{14} - l_{13})}$$

és végül $\boldsymbol{KM} = KP\ \dfrac{\sin(l_{15} - l_{14})}{\sin(l_2 - l_1)} =$

$$= \boldsymbol{KM}\ \frac{\sin(l_3 - l_2)\sin(l_6 - l_5)\sin(l_9 - l_8)\sin(l_{12} - l_{11})\sin(l_{15} - l_{14})}{\sin(l_5 - l_4)\sin(l_8 - l_7)\sin(l_{11} - l_{10})\sin(l_{14} - l_{13})\sin(l_2 - l_1)}$$

*) Rövidség okáért a pontok neveinek *kezdőbetűit* fogom csak kiírni.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

vagyis az $l_1, l_2, l_3 \ldots l_{20}$ értékek akkor mondhatók kiegyenlítetteknek, hogyha az öt szögfeltételi egyenleten kívül ezt az egyenletet is kielégítik:

$$3. \ldots \frac{\sin(l_2-l_1)\sin(l_5-l_4)\sin(l_8-l_7)\sin(l_{11}-l_{10})\sin(l_{14}-l_{13})}{\sin(l_3-l_2)\sin(l_6-l_5)\sin(l_9-l_8)\sin(l_{12}-l_{11})\sin(l_{15}-l_{14})} = 1.$$

Ezen egyenlet — ily centrális rendszer esetében — mindenkor fejből tüstént felírható: a *számlálóban* ugyanis rendre a 30. ábrán α, β, γ . . .-val jelölt *szögek* sinusai, a *nevezőben* pedig az ábrán α', β', γ' . . .-vel jelölt szögek sinusai szerepelnek!

Az $l_1, l_2, l_3, l_4 \ldots l_{20}$ értékekhez oly $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_{20}$ értékeket akarunk meghatározni, hogy az ezekkel javított $(l_1+\lambda_1)$, $(l_2+\lambda_2)$, ... értékek a 3. egyenletet kielégítsék. Tehát a 3. egyenlet gyakorlati alakja lesz:

$$4. \ldots \frac{\sin\{(l_2+\lambda_2)-(l_1+\lambda_1)\}\cdot\sin\{(l_5+\lambda_5)-(l_4+\lambda_4)\}\ldots\sin\{(l_{14}+\lambda_{14})-(l_{13}+\lambda_{13})\}}{\sin\{(l_3+\lambda_3)-(l_2+\lambda_2)\}\cdot\sin\{(l_6+\lambda_6)-(l_5+\lambda_5)\}\ldots\sin\{(l_{15}+\lambda_{15})-(l_{14}+\lambda_{14})\}} = 1.$$

Ezen mindenkor gépiesen felírható egyenletet az 5. §-ban előadottak szerint *lineárissá* kell még tenni, hiszen a kiegyenlítés az 5. §-ban előadott gépies eljárással csak úgy foganatosítható, ha a *feltételi egyenletek mind:* elsőfokú (azaz lineáris) egyenletek alakjában ismeretesek.

E célból (t. i. hogy lineáris kifejezésre jussunk), írjuk fel a 4. egyenletet logaritmikus alakban:

$$5. \ldots \left[\log\sin\{(l_2+\lambda_2)-(l_1+\lambda_1)\}+\log\sin\ldots+\log\sin\{(l_{14}+\lambda_{14})-(l_{13}+\lambda_{13})\right]$$
$$-\left[\log\sin\{(l_3+\lambda_3)-(l_2+\lambda_2)\}+\log\sin\ldots+\log\sin\{(l_{15}+\lambda_{15})-(l_{14}+\lambda_{14})\right]=0.$$

A 4. §-ban és 5. §-ban ismertetett eljárással **sorba fejtve** e függvényt és csakis az **elsőrendű** tagokra szorítkozva lesz:

$$6. \begin{cases} \{\log\sin(l_2-l_1)+\log\sin(l_5-l_4)+\log\sin(l_8-l_7)+\log\sin(l_{11}-l_{10})+\log\sin(l_{14}-l_{13})\} \\ -\{\log\sin(l_3-l_2)+\log\sin(l_6-l_5)+\log\sin(l_9-l_8)+\log\sin(l_{12}-l_{11})+\log\sin(l_{15}-l_{14})\} \\ +\frac{M}{\varrho''}\cot g(l_2-l_1)(\lambda_2-\lambda_1)+\frac{M}{\varrho''}\cot g(l_5-l_4)(\lambda_5-\lambda_4)+\ldots+\frac{M}{\varrho''}\cot g(l_{14}-l_{13})(\lambda_{14}-\lambda_{13}) \\ -\frac{M}{\varrho''}\cot g(l_3-l_2)(\lambda_3-\lambda_2)-\frac{M}{\varrho''}\cot g(l_6-l_5)(\lambda_6-\lambda_5)-\ldots-\frac{M}{\varrho''}\cot g(l_{15}-l_{14})(\lambda_{15}-\lambda_{14})=0, \end{cases}$$

ahol $M = 0.43429$ azaz a logaritmikus modulust és λ_1, λ_2 : . . pedig a javításokat *másodpercekben* jelenti.

A gyakorlatban azonban a λ-k együtthatóit nem kell az $\left(\frac{M}{\varrho''}\cot g\right)$ értékek számítása által külön előállítani, mert ezen együtthatók nem egyebek, mint *a logaritmus táblában a log sin $(l_j - l_i)$ értékeknél 1''-nek megfelelő differencia-értékek.* Azaz

$(\lambda_2-\lambda_1)$ együtthatója a *log sin* (l_2-l_1) értéknél az 1''-nek megfelelő logaritmikus különbség, $(\lambda_5-\lambda_4)$ együtthatója a *log sin* (l_5-l_4) értéknél az 1''-nek megfelelő logaritmikus különbség stb.

Tehát centrális hálózat esetén az oldalfeltételi egyenlet számszerű felírásának gyakorlati eljárása:

a) felírjuk gépiesen a 6. alatti egyenletnek $\{\ldots\}-\{\ldots\}$ részét az ábra puszta megtekintése által;

b) most keresve logaritmus könyvvel rendre a $\{\ldots\}$ részekben szereplő *log sin* (l_j-l_i) értékeket, ugyanakkor *kiírjuk a 10''-eknek megfelelő logaritmikus különbségeket* és ezek

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

tizedrészei lesznek a megfelelő $(\lambda_j - \lambda_i)$ javításoknak együtthatói: és így a 6. alatti feltételi egyenlet *számszerűen felírható.* Megjegyezzük, hogy az oldalfeltételi egyenlet tiszta tagját (azaz a 6. egyenletben a $\{ \ldots \} - \{ \ldots \}$ rész számszerű értékét) jelen esetben ω_{VI}-al fogjuk jelölni.

Végezzük tehát el az itt *a)* és *b)* alatt leírt gépies műveleteket a mi példánkban:

				diff. 10″
$log\ sin\ (l_2 - l_1)$	$=$	$log\ sin\ 49°\ 11'\ 33.''1$	$=\ 9.879\ 0441.4$	18.2
$+\ log\ sin\ (l_5 - l_4)$	$=$	$log\ sin\ 53°\ 18'\ 54.''7$	$=\ 9.904\ 1386.8$	15.7
$+\ log\ sin\ (l_8 - l_7)$	$=$	$log\ sin\ 55°\ 18'\ 34.''1$	$=\ 9.914\ 9975.9$	14.6
$+\ log\ sin\ (l_{11} - l_{10})$	$=$	$log\ sin\ 72°\ 35'\ 30.''1$	$=\ 9.979\ 6380.7$	6.6
$+\ log\ sin\ (l_{14} - l_{13})$	$=$	$log\ sin\ 39°\ 53'\ 0.''3$	$=\ 9.807\ 0121.6$	25.2
		összeg	$=\ +\ 9.484\ 8306.4$	

				diff. 10″
$log\ sin\ (l_3 - l_2)$	$=$	$log\ sin\ 41°\ 24'\ 9.''5$	$=\ 9.820\ 4290.1$	23.9
$log\ sin\ (l_6 - l_5)$	$=$	$log\ sin\ 59°\ 25'\ 56.''3$	$=\ 9.035\ 0177.1$	12.4
$log\ sin\ (l_9 - l_8)$	$=$	$log\ sin\ 52°\ 8'\ 46.''2$	$=\ 9.897\ 3954.7$	16.4
$log\ sin\ (l_{12} - l_{11})$	$=$	$log\ sin\ 70°\ 42'\ 19.''6$	$=\ 9.974\ 8949.0$	7·4
$log\ sin\ (l_{15} - l_{14})$	$=$	$log\ sin\ 46°\ 1'\ 17.''3$	$=\ 9.857\ 0912.2$	20.3
		összeg	$=\ -\ 9.484\ 8283.1$	

Eredmény:

$+\ 9.484\ 8306.4$
$-\ 9.484\ 8283.1$
$+\ 0.000\ 0023.3$, tehát

$\omega_{VI} = +\ 2.33$ ez lesz az oldalfeltételi egyenlet tiszta tagja.

A $(\lambda_2 - \lambda_1)$ együtt hatója 1·82:
A $(\lambda_5 - \lambda_4)$ „ „ 1.57
A $(\lambda_8 - \lambda_7)$ „ „ 1.46
A $(\lambda_{11} - \lambda_{10})$ „ „ 0.66
A $(\lambda_{14} - \lambda_{13})$ „ „ 2.52

Hasonlólag a

$-(\lambda_3 - \lambda_2)$ együtt hatója 2.39
$-(\lambda_6 - \lambda_5)$ „ „ 1.24
$-(\lambda_9 - \lambda_8)$ „ „ 1.64
$-(\lambda_{12} - \lambda_{11})$ „ „ 0.74
$-(\lambda_{15} - \lambda_{14})$ „ „ 2.03

Ezek alapján a $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{15}$ együtthatóit (helyes előjellel) felírhatjuk: λ_1 csak egyszer szerepel (— előjellel), tehát

λ_1 együtt hatója $= -\ 1.82$:

λ_2 szerepel kétszer $(+\ \lambda_2$ és $-(-\lambda_2)$, tehát

λ_2 együtthatója $= 1.82 + 2.39 = +\ 4.21$ stb.

Ismeretesek tehát most már nemcsak a szögfeltételi egyenletek együtthatói ($+1$ vagy -1) hanem az oldal feltételi egyenlet együtthatói is: felírhatjuk tehát **rendezve,** azaz az

$$a_1 \lambda_1 + b_1 \lambda_2 + c_1 \lambda_3 + \ldots + \omega_I = 0.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_6 \lambda_1 + b_6 \lambda_2 + c_6 \lambda_3 + \ldots + \omega_{VI} = 0.$$

alakban a feltételi egyenleteket. Ezt legcélszerűbb ily előre készíthető séma szerint képezni:

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Feltételi

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9
— 1	+ 1							
	— 1	+ 1	— 1	+ 1				
				— 1	+ 1	— 1	+ 1	
							— 1	+ 1
— 1.82	+ 4.21	— 2.39	— 1.57	+ 2.81	— 1.24	— 1.46	+ 3.10	— 1.64

Most már az előbbi §-ban az 5. pontban adott gépies eljárás szerint képezhetők a normál egyenletek együtthatói, amelyek legczélszerűbben ily *sémába* írhatók:

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	w
+ 6	— 2	0	0	— 2	— 0.55	+ 1.4
	+ 6	— 2	0	0	— 2.22	— 0.3
		+ 6	— 2	0	+ 0.51	— 0.9
			+ 6	— 2	— 2.68	— 1.7
				+ 6	+ 4.93	+ 2.7
					+ 87.1954	+ 2.33

A normál egyenletek száma = a feltételi egyenletek számával.

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9
$k_1 = -0.416$	+ 0.416	— 0.416							
$k_2 = -0.019$		+ 0.019	— 0.019	+ 0.019	— 0.019				
$k_3 = +0.199$					— 0.199	+ 0.199	— 0.199	+ 0.199	
$k_4 = +0.174$								— 0.174	+ 0.174
$k_5 = -0.533$									
$k_6 = +0.004$	— 0.0073	+ 0.0168	— 0.0094	— 0.0063	+ 0.0112	— 0.0050	— 0.0058	+ 0.0124	— 0.0066
$\lambda =$	+ 0.409	— 0.380	— 0.028	+ 0.013	— 0.207	+ 0.194	— 0.205	+ 0.037	+ 0.168

E sémában ugyanazon sorok és oszlopok vannak számokkal kitöltve, a melyek a feltételi egyen-

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

egyenletek.

λ_{10}	λ_{11}	λ_{12}	λ_{13}	λ_{14}	λ_{15}	λ_{16}	λ_{17}	λ_{18}	λ_{19}	λ_{20}	w
				− 1	+ 1	+ 1	− 1				+ 1.4
							+ 1	− 1			− 0.3
								+ 1	− 1		− 0.9
− 1	+ 1								+ 1	− 1	− 1.7
	− 1	+ 1	− 1	+ 1		− 1				+ 1	+ 2.7
− 0.66	+ 1.40	− 0.74	− 2.52	+ 4.55	− 2.03						+ 2.33

A normál egyenletek (65. oldalon adott) megoldásaként nyerjük a $k_1\ k_2 \ldots k_6$ *korreláták* értékeit:

$$k_1 = -\ 0.416$$
$$k_2 = -\ 0.019$$
$$k_3 = +\ 0.199$$
$$k_4 = +\ 0.174$$
$$k_5 = -\ 0.533$$
$$k_6 = +\ 0.004$$

Most már gépiesen és sématikus alakban felírhatók (rendezve) a korreláta egyenletek:

$$\lambda = ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4 + ek_5 + fk_6,$$

amelyekből egyszerű összeadásokkal nyerjük a $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{20}$ értékeket:

λ_{10}	λ_{11}	λ_{12}	λ_{13}	λ_{14}	λ_{15}	λ_{16}	λ_{17}	λ_{18}	λ_{19}	λ_{20}
				+ 0.416	− 0.416	− 0.416	+ 0.416			
							− 0.019	+ 0.019		
								+ 0.199	− 0.199	
− 0.174	+ 0.174								+ 0.174	− 0.174
	+ 0.533	− 0.533	+ 0.533	− 0.533		+ 0.533				− 0.533
− 0.0026	+ 0.0056	− 0.0030	− 0.0101	+ 0.0182	− 0.0081					
+ 0.177	+ 0.713	− 0.536	+ 0.523	− 0.099	− 0.424	+ 0.117	+ 0.397	+ 0.218	− 0.025	− 0.707

letek fenti sémájában szerepelnek. A jelen séma kitöltése tehát igen gépies művelet.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A talált λ értékekkel megjavítjuk most a mért irányértékeket:

Irány száma	Észlelt irányok	Javitás λ	Kiegyenlített irányok	$\lambda\lambda$
1	0° — 0′ — 0.″0	+ 0.″41	0° — 0′ — 0.″00	0.1681
2	49 — 11 — 33. 1	— 0. 38	49 — 11 — 32. 72	0.1444
3	90 — 35 — 42. 6	— 0. 03	90 — 35 — 42. 57	0.0009
4	0 — 0 — 0. 0	+ 0. 01	0 — 0 — 0. 01	0.0001
5	53 — 18 — 54. 7	— 0. 21	53 — 18 — 54. 49	0.0441
6	112 — 44 — 51. 0	+ 0. 19	112 — 44 — 51. 19	0.0361
7	0 — 0 — 0. 0	— 0. 21	359 — 59 — 59. 79	0.0441
8	55 — 18 — 34. 1	+ 0. 04	55 — 18 — 34. 14	0.0016
9	107 — 27 — 20. 3	+ 0. 17	107 — 27 — 20. 47	0.0289
10	0 — 0 — 0. 0	— 0. 18	359 — 59 — 59. 82	0.0324
11	72 — 35 — 30. 1	+ 0. 71	72 — 35 — 30. 81	0.5041
12	143 — 17 — 49. 7	— 0. 54	143 — 17 — 49. 16	0.2916
13	0 — 0 — 0. 0	+ 0. 52	0 — 0 — 0. 52	0.2704
14	39 — 53 — 0. 3	— 0. 10	39 — 53 — 0. 20	0.0100
15	85 — 54 — 17. 6	— 0. 42	85 — 54 — 17. 18	0.1764
16	84 — 47 — 11. 0	+ 0. 12	84 — 47 — 11. 12	0.0144
17	0 — 0 — 0. 0	+ 0. 40	0 — 0 — 0. 40	0.1600
18	274 — 43 — 4. 5	+ 0. 22	274 — 43 — 4. 72	0.0484
19	209 — 27 — 35. 8	— 0. 03	209 — 27 — 35. 77	0.0009
20	154 — 11 — 53. 8	— 0. 71	154 — 11 — 53. 09	0.5041

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n}} = \sqrt{\frac{2.4810}{6}} = \pm\ 0.''64$$

$[\lambda\lambda] = \mathbf{2.4810}$

Ellenőrzés: $-wk = [\lambda\lambda]$

$-wk = -\ 2.4907$

amely összeg a fenti $[\lambda\lambda]$ értékkel eléggé egyezik. Most elvégezzük az utolsó ellenőrzést:

A háromszögek összeállítása kiegyenlítés után.

I.
(2—1) = 49° — 11′ — 32.″31
(16—17) = 84 — 47 — 10. 72
(15—14) = 46 — 1 — 16. 98
180° — 0′ — 0.″01

II.
(3—2) = 41° — 24′ — 9.″85
(5—4) = 53 — 18 — 54. 48
(17—18) = 85 — 16 — 55. 68
180° — 0′ — 0.″01

III.
(6—5) = 59° — 25′ — 56.″70
(8—7) = 55 — 18 — 34. 35
(18—19) = 65 — 75 — 28. 95
180° — 0′ — 0.″00

IV.
(9—8) = 52° — 8′ — 46.″33
(11—10) = 72° — 35 — 30. 99
(19—20) = 55 — 15 — 42. 68
180° — 0′ — 0.″00

V.
(12—11) = 70° — 42′ — 18.″35
(14—13) = 39 — 52′ — 59. 68
(20—16) = 69 — 24 — 41. 97
180° — 0′ — 0.″00

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Az így kiegyenlített irányértékek felhasználásával, kiindulva az ismert oldalból történhetik most már — háromszögről-háromszögre haladva — a pontok összrendezőinek kiszámítása az előző *fejezetben* előadott módon.

Miután így ismeretesek az összes főpontok összrendezői: most már az e főpontokon további (előmetszett) pontok meghatározása céljából végzett *iránymérések* tájékozhatók.

Az előmetszett pontok kiegyenlítése előtt tehát már nem egyszerű irányértékekkel, hanem mindig *tájékozott irányértékekkel* (délszögekkel) van dolgunk.

II. Koordináták szerinti előmetszés kiegyenlítés.

Adva vannak, azaz méréseink tájékozása által ismeretesek a főpontokról *az előmetszett pontra menő* irányok (31. ábra) délszögei:

1. . . . . $\delta_1, \delta_2, \delta_3$

Jelen esetben *három* pontról történt az előmetszés. Ha 5 pontról történt volna, akkor

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \text{ és } \delta_5$$

volnának a *mérési eredmények.*

Adva vannak — **előzetes** egyszerű előmetszés számítás alapján — a szóban forgó *előmetszett pontnak* közelítő (előzetes) összrendezői:

2. . . . . (y) és (x).

Továbbá adva vannak a főpontok (P_1, P_2, P_3), illetve öt irány esetében P_1, $P_2 \ldots P_5$ összrendezői:

3. . . . . $y_1, x_1; y_2, x_2; y_3, x_3$.

Ha a 2. és 3. adatok alapján megoldjuk rendre a

4. . . . . $\begin{cases} tg\ (\delta_1) = \dfrac{(y) - y_1}{(x) - x_1} \\ tg\ (\delta_2) = \dfrac{(y) - y_2}{(x) - x_2} \\ tg\ (\delta_3) = \dfrac{(y) - y_3}{(x) - x_3} \end{cases}$

képleteket, nyerjük az *előzetes ponthoz* (amelynek összrendezői (x) és (y)) *tartozó délszögértékeket:*

5. . . . . $(\delta_1), (\delta_2), (\delta_3)$

Ezeket a délszögeket *előzetes délszögeknek* nevezzük: ezeket *számítással* nyerjük mindig és ezeket **jól meg kell különböztetni** az 1. alatt felírt (ugynevezett) **mért délszögektől.**

Miként e cikk elején előadtuk, célunk: az *előzetes* (y) és (x) összrendezőkhöz oly Δy és Δx koordinátajavításokat találni, hogy ezáltal az

6. . . . . $\begin{cases} y = (y) + \Delta y \\ x = (x) + \Delta x \end{cases}$

végleges összrendezők az előmetszett P pontnak *legmegbízhatóbb helyét* szolgáltassák. Ez akkor következik be, ha az *adott főpontokról* az $(y) + \Delta y = y$, $(x) + \Delta x = x$ helyre (pontra) menő (végleges) *délszögértékek* φ_1, φ_2, φ_3 (31. ábra) a mért délszögértékektől δ_1, δ_2, δ_3 oly kis λ_1, λ_2, λ_3 értékekkel különböznek, hogy a $[\lambda\lambda]$ négyzetösszeg minimum.

Hogy **ezen** Δy és Δx koordinátajavítást a 3. §. 4. pontjában előadott gépies eljárással nyerhessük, a λ_1, λ_2, λ_3 illetve öt pontból való előmetszés esetében a λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 délszögjavításokat mint az ismeretlen Δy és Δx koordináta javítások *lineáris függvényét* fel kell írni. E lineáris függvények lesznek a 3. §. 4. pontja szerinti kiegyenlítésben szereplő **hibaegyenletek.** Irjuk fel tehát — illetve vezessük le — a hibaegyenleteket.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Az előbb adott definició szerint:

$$\delta_1 + \lambda_1 = \varphi_1, \text{ azaz } \lambda_1 = \varphi_1 - \delta_1$$
$$\delta_2 + \lambda_2 = \varphi_2, \text{ azaz } \lambda_2 = \varphi_2 - \delta_2$$
$$\delta_3 + \lambda_3 = \varphi_3, \text{ azaz } \lambda_3 = \varphi_3 - \delta_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Az előbbiekben bevezetett **közelítő** (előzetes) délszögértékeket is bevezetve, mivel $\varphi_i - \delta_i = \{\varphi_i - (\delta_i)\} + \{(\delta_i) - \delta_i\}$, lesz:

$$\lambda_1 = (\varphi_1 - (\delta_1)) + ((\delta_1) - \delta_1)$$
$$\lambda_2 = (\varphi_2 - (\delta_2)) + ((\delta_2) - \delta_2)$$
$$\lambda_3 = (\varphi_3 - (\delta_3)) + ((\delta_3) - \delta_3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

A hibaegyenletek ezen alakjában a *második* tagok mindenkor kiszámítható mennyiségek, amelyeket ω_1. ω_2, ω_3, . . . betűkkel fogunk jelölni, és így

$$7. \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \lambda_1 = \varphi_1 - (\delta_1) + \omega_1 \\ \lambda_2 = \varphi_2 - (\delta_2) + \omega_2 \\ \lambda_3 = \varphi_3 - (\delta_3) + \omega_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

ahol jól megjegyzendő az absolut tagok jelentése:

8. . . . . absolut tag ω = *előzetes délszög — mért délszög.*

A $\varphi_1 - (\delta_1)$, $\varphi_2 - (\delta_2)$, . . . különbségeket most már könnyű, mint az ismeretlen Δ_x és Δ_y lineáris függvényét felírni. Ugyanis be **fogjuk** bizonyítani, hogy:

$$9. \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \varphi_1 - (\delta_1) = a_1 \Delta_x + b_1 \Delta_y \\ \varphi_2 - (\delta_2) = a_2 \Delta_x + b_2 \Delta_y \\ \varphi_3 - (\delta_3) = a_3 \Delta_x + b_3 \Delta_y \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

azaz a 7. egyenletek végleges alakja:

$$10. \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \lambda_1 = a_1 \Delta_x + b_1 \Delta_y + \omega_1 \\ \lambda_1 = a_2 \Delta_x + b_2 \Delta_y + \omega_2 \\ \lambda_3 = a_3 \Delta_x + b_3 \Delta_y + \omega_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

ahol $a = -\frac{\varrho''}{s} \sin(\delta)$ és $b = +\frac{\varrho}{s} \cos(\delta)$ és (s) jelenti az illető irányusugár (oldal) hosszát.

Azaz a *10.* alatti egyszerü és lineáris *hibaegyenletek* felírhatók, ha az ω_1, ω_2 . . . absolut tagokat az előbb ismertetett módon, és az együtthatókat pedig ezen képletek szerint kiszámítjuk:

$$11. \ldots \begin{cases} a_1 = -\frac{\varrho''}{(s_1)} \sin(\delta_1) \text{ és } b_1 = +\frac{\varrho''}{(s_1)} \cos(\delta_1) \\ a_2 = -\frac{\varrho''}{(s_2)} \sin(\delta_2) \text{ és } b_2 = +\frac{\varrho''}{(s_2)} \cos(\delta_2) \\ a_3 = -\frac{\varrho''}{(s_3)} \sin(\delta_3) \text{ és } b_3 = +\frac{\varrho''}{(s_3)} \cos(\delta_3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Az együtthatók számítása *rendszerint* ezen itt felírt képletek alapján történik, de az esetben, ha van jó *vázlatunk,* amelyről méreteket levehetünk, célszerű az

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

12. . . $\begin{cases} a_1 = -\dfrac{\varrho''}{(s)_1^2}\left((y) - y_1\right) \text{ és } b_1 = +\dfrac{\varrho''}{(s_1^2)}\left((x) - x_1\right) \\ a_2 = -\dfrac{\varrho''}{(s)_2^2}\left((y) - y_2\right) \text{ és } b_2 = +\dfrac{\varrho''}{(s)_2^2}\left((x) - x_2\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$

képleteket használni. (E képletek 11-ből következnek, mert az előbbi *fejezetből* (29. oldal) tudjuk, hogy $s = \dfrac{y_B - y_A}{\sin \delta_{A,B}} = \dfrac{x_B - x_A}{\cos \delta_{A,B}}$.)

Ily módon a 8. és 11. vagy 8. és 12. képletek alkalmazása által mindenkor felírhatók a 10. alatti hibaegyenletek: lineáris alakban.

Annyi hibaegyenletet írhatunk, (illetve *irunk*) fel mindig, ahány irány által van az előmetszett pont mérve. (Tehát 3 irány esetében három, 5 irány esetében öt ily hibaegyenletet irunk fel.)

Mivel e hibaegyenletekben az ismeretlenek száma azonban *mindig csak kettő lesz:* azért ezen hibaegyenletek alapján mindig csak **két** normál egyenlet lesz leirandó a

13. . . . . $\begin{cases} [a\,a]\ \Delta_x + [a\,b]\ \Delta_y + [a\,\omega] = 0 \\ [a\,b]\ \Delta_x + [b\,b]\ \Delta_y + [b\,\omega] = 0 \end{cases}$

séma szerint. Ezen *két* ismeretlent tartalmazó *két* egyenletet megoldva: **meglesz** a keresett Δ_x és Δ_y koordináta javítás. Ezeket adva (saját előjelükkel) az előmetszett pont előzetes (x), (y) összrendezőihez: meglesznek az előmetszett pont végleges (kiegyenlített) összrendezői.

Fontos megjegyzés: a hibaegyenletek együtthatóinak számítását mindig akkor fogjuk (egyidejüleg) eszközölni, amidőn az előzetes (x), (y) ponthoz tartozó (előzetes) délszögeket (δ_1), (δ_2), (δ_3) . . . . számítjuk a

$$tg\ \delta_i = \frac{(y) - y_i}{(x) - x_i}$$

képlet alapján.

Amint 11.-ből látnivaló, az $a_1, a_2 \ldots$ együtthatók, a $\sin(\delta_1)$, $\sin(\delta_2) \ldots$ elöjeleivel *ellenkező* előjelűek; és a $b_1, b_2, \ldots$ a $\cos(\delta_1)$, $\cos(\delta_2) \ldots$ előjeleivel *azonos* előjelű. Illetve: amint 12.-ből látható, az a-k ellenkező előjelűek, mint az $\left((y) - y_i\right)$ *részösszrendezők* előjelei, és a b-k azonos előjelűek az $\left((x) - x_i\right)$ részösszrendezők előjeleivel.

Ezeket tudva, illetve ezekre ügyelve: az a-k és b-k előjeleit *mindig helyesen* fogjuk felírni.

Ha a 11. egyenletek jobb oldalait $^1/_{10}$-del szorozzuk, akkor a 10. egyenletekben szereplő Δx és Δy koordinátajavítások $\left\{\begin{matrix}\text{tized méter}\\ \text{tized öl}\end{matrix}\right.$-ekben helyettesítendők, azaz az

14. . . . $\begin{cases} a = -\dfrac{1}{10}\dfrac{\varrho''}{(s)}\sin(\delta) \\ b = +\dfrac{1}{10}\dfrac{\varrho''}{(s)}\cos(\delta) \end{cases}$ illetve: $\begin{cases} a_i = -\dfrac{0.1\,\varrho''}{(s)^2}\left((y) - y_i\right) \\ b_i = +\dfrac{0.1\,\varrho''}{(s)^2}\left((x) - x_i\right) \end{cases}$

képlet szerint számítva az együtthatókat, a normál egyenletek megoldásaként nyert Δx és Δy koordináta javítások *decimétereket* (illetve *tized* öleket) fognak jelenteni.

A 14. szerinti számítás azért célszerű, mert akkor az a és b együtthatók *kisebb* értékek és így a $[aa]$, $[ab]$ stb. szorzatok illetve szorzatösszegek egyszerűbben számíthatók. Az a és b értékek hibátlan számítására (14. képlet esetében) ellenőrzés az, hogy

$$a^2 + b^2 = \frac{\varrho''^2}{100} \cdot \frac{1}{(s)^2}$$

továbbá az, hogy

$$\frac{a_i}{b_i} = -\frac{(y) - y_i}{(x) - x_i}.$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Számpélda.

Három fő pontból ($P_1\ P_2\ P_3$) végeztünk előmetszést.

A P_1, P_2, P_3 főpontok összrendezői:

$y_1 = -\ 25014{,}26\ m$	$y_2 = -\ 23406{,}93\ m$	$y_3 = -\ 20728{,}34\ m$
$x_1 = +\ 42133{,}28\ m$	$x_2 = +\ 40493{,}76$	$x_3 = +\ 41632{,}97$

ezen pontokon végeztünk *iránymméréseket,* amelyek a számítandó P pontra nézve (tájékozás után) a következő *délszögértékeket* adták:

mért délszög $P_1\ P = \delta_1 = 61°\ 14'\ 24''$

„ „ $P_2\ P = \delta_2 = 16°\ 42'\ 15''$

„ „ $P_3\ P = \delta_3 = 316°\ 40'\ 03''$.

Kiszámítva (vagy **pontos** vázlatból kivéve) a P pont *előzetes összrendezőit,* az

$(y) = -\ 22501{,}20$

$(x) = +\ 43512{,}40$

értékeket nyertük.

a) Mindenekelőtt kiszámítjuk az adott összrendezők alapján a közelítő (x), (y) pontra menő *délszögeket* (δ_1), (δ_2), (δ_3) és az oldalhosszakat (s_1), (s_2), (s_3). Ez alkalommal 14. szerint nyerhetjük az a és b együtthatókat is.

Pontok			$log\ tang\ (\delta_i) = log\ ((y) - y_i) - log\ ((x) - x_i)$	Távolság: (s)	$a_i = -\frac{0.1\ \varrho}{(s)^2}\ ((y) - y_i)$	$b_i = +\frac{0.1\ \varrho}{(s)^2}\ ((x) - x_i)$
(P)	$-\ 22501.20$	$+\ 43512.40$	3.400203	3.4002	$log\ 0.1\ \varrho'' =$	4.3144
P_1	$-\ 25014.26$	$+\ 42133.28$	3.139602	9.9428	$log\ (s)^2 =$	6.9148
	$+\ 2513.06$	$+\ 1379.12$	0.260601	3.4574	7.3996 — 10	7.3996 — 10
					3.4002	3.1396
			$(\delta_1) =$		0.7998	0.5392
			$61°\ 14'\ 34''$		$a_1 = -\ 6.31$,	$b_1 = +\ 3.46$
(P)	$-\ 22501.20$	$+\ 43512.40$	2.956999	3.4798	$log\ 0.1\ \varrho'' =$	4.3144
P_2	$-\ 23406.93$	$+\ 40493.76$	3.479812	8.9813		6.9970
	$+\ 905.73$	$+\ 3018{,}64$	9.477187	3.4985	7.3174	7.3174
					2.9570	3.4798
			$(\delta_2) =$		0.2744	0.7972
			$16°\ 42'\ 6''$		$a_2 = -\ 1.88$,	$b_2 = +\ 6.29$
(P)	$-\ 22501.20$	$+\ 43512.40$	3.248674	3.2740		4.3144
P_3	$-\ 20728.34$	$+\ 41632.97$	3.274026	9.8618		6.8244
	$-\ 1772{,}86$	$+\ 1879.43$	9.974648	3.4122	7.4900	7.4900
					3.2487 (n)	3.2740
			$(\delta_3) =$		0.7387 (n)	0.7640
			$316°\ 40'\ 17''$		$a_3 = +\ 5.48$,	$b_3 = +\ 5.81$.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

b) Az így nyert *előzetes* délszögértékekből (δ_1), (δ_2), (δ_3) kivonva rendre a *mért* délszögeket δ_1, δ_2, δ_3, nyerjük (8. képlet szerint) a hibaegyenletek *absolut* tagjait ω_1, ω_2, ω_3 amelyek mellé írjuk a számított a és b-ket is:

Pont	mért δ	számított (δ)	$\omega = (\delta) - \delta$	a	b
P_1	61° 14′ 24″	61° 14′ 34″	+ 10″	— 6.3	+ 3.5
P_2	16 42 15	16 42 6	— 9	— 1.9	+ 6.3
P_3	316 40 3	316 40 17	+ 14	+ 5.5	+ 5.8

c) Most számítsuk ki az ω_1, a_1, b_1; ω_2, a_2, b_2; ω_3, a_3, b_3 ismeretes értékek alapján a 13. alatt felírt normál egyenletek együtthatóit:

a^2	b^2	ab	$a\omega$	$b\omega$	ω^2
40	12	— 22	— 63	+ 35	100
4	40	— 12	+ 17	— 57	81
30	34	+ 32	+ 77	+ 81	196
+ 74,	+ 86,	— 2,	+ 31,	+ 59	377

tehát a két normál egyenlet:

$$+ 74\,\Delta x - 2\,\Delta y + 31 = 0$$
$$- 2\,\Delta x + 86\,\Delta y + 59 = 0$$

Ezen egyenletekből az ismertetett séma (65. oldal) szerint számítva a Δx és Δy értékeket, a

$$\Delta y = - 0.70\ dm \text{ és } \Delta x = - 0.43\ dm$$

koordináta javításokra jutunk.

Tehát az előmetszett P pont végleges összrendezői:

$$y = (y) + \Delta y = - 22501{,}27\ m.$$
$$x = (x) + \Delta x = + 43512{,}36\ m.$$

A P pontot (ezen végleges összrendezőivel) most már P_1, P_2, P_3 ponttal összeszámítva, nyerjük a φ_1, φ_2, φ_3 végleges *délszögértékeket*. Ezekből kivonva a mért délszögeket δ_1, δ_2, δ_3 azon λ_1, λ_2, λ_3 értékekre kell jutnunk, amelyeket a *hibaegyenletekbe* $(\lambda_i = a_i\,\Delta x + b_i\,\Delta y + \omega^i)$ helyettesített Δy és Δx koordináta javítások adnak.

Ha az így *kétféle* módon nyert λ-k egyeznek, akkor *biztosan* hibátlan a kiegyenlítés. Ismerve a λ-kat kiszámítjuk a $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = [\lambda\lambda]$ négyzet összeget és azután a

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-2}}$$ képlettel, ahol n jelenti az *irányok* számát, nyerjük egy iránynak középhibáját.

Jelen példában azt találjuk, hogy

$$\varphi_1 = 61° 14′ 34″$$
$$\varphi_2 = 16° 42′ 2″$$
$$\varphi_3 = 316° 40′ 10″;$$

kivonva ezen *végleges* értékekből a δ_1, δ_2, δ_3 mérési eredményeket:

$$\lambda_1 = + 10″$$
$$\lambda_2 = - 13″$$
$$\lambda_3 = \quad 7″ \text{ értékekre jutunk.}$$

Tehát $[\lambda\lambda] = 100 + 169 + 49 = 318$, és így

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-2}} = \sqrt{\frac{318}{1}} = \pm 18.″$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Számpélda.

Három fő pontból ($P_1\ P_2\ P_3$) végeztünk előmetszést.
A P_1, P_2, P_3 főpontok összrendezői:

$y_1 = -\ 25014{,}26\ m$	$y_2 = -\ 23406{,}93\ m$	$y_3 = -\ 20728{,}34\ m$
$x_1 = +\ 42133{,}28\ m$	$x_2 = +\ 40493{,}76$	$x_3 = +\ 41632{,}97$

ezen pontokon végeztünk *irányméréseket,* amelyek a számítandó P pontra nézve (tájékozás után) a következő *délszögértékeket* adták:

mért délszög $P_1\ P = \delta_1 = 61°\ 14'\ 24''$
„ „ $P_2\ P = \delta_2 = 16°\ 42'\ 15''$
„ „ $P_3\ P = \delta_3 = 316°\ 40'\ 03''$.

Kiszámítva (vagy **pontos** vázlatból kivéve) a P pont *előzetes összrendezőit,* az

$(y) = -\ 22501,20$
$(x) = +\ 43512,40$

értékeket nyertük.

a) Mindenekelőtt kiszámítjuk az adott összrendezők alapján a közelítő (x), (y) pontra menő *délszögeket* (δ_1), (δ_2), (δ_3) és az oldalhosszakat (s_1), (s_2), (s_3). Ez alkalommal 14. szerint nyerhetjük az a és b együtthatókat is.

Pontok	$(y)-y_i$	$(x)-x_i$	$\log\ tang\ (\delta_i) = \log\ ((y)-y_i) - \log\ ((x)-x_i)$	Távolság: (s)	$a_i = -\frac{0.1\,\varrho}{(s)^2}\,((y)-y_i)$	$b_i = +\frac{0.1\,\varrho}{(s)^2}\,((x)-x_i)$
(P)	$-\ 22501.20$	$+\ 43512.40$	3.400203	3.4002	$\log\ 0.1\,\varrho'' =$	4.3144
P_1	$-\ 25014.26$	$+\ 42133.28$	3.139602	9.9428	$\log\ (s)^2 =$	6.9148
	$+\ 2513.06$	$+\ 1379.12$	0.260601	3.4574	7.3996 — 10	7.3996 — 10
					3.4002	3.1396
			$(\delta_1) =$		0.7998	0.5392
			$61°\ 14'\ 34''$		$a_1 = -\ 6.31$,	$b_1 = +\ 3.46$
(P)	$-\ 22501.20$	$+\ 43512.40$	2.956999	3.4798	$\log\ 0.1\,\varrho'' =$	4.3144
P_2	$-\ 23406.93$	$+\ 40493.76$	3.479812	8.9813		6.9970
	$+\ 905.73$	$+\ 3018,64$	9.477187	3.4985	7.3174	7.3174
					2.9570	3.4798
			$(\delta_2) =$		0.2744	0.7972
			$16°\ 42'\ 6''$		$a_2 = -\ 1.88$,	$b_2 = +\ 6.29$
(P)	$-\ 22501.20$	$+\ 43512.40$	3.248674	3.2740		4.3144
P_3	$-\ 20728.34$	$+\ 41632.97$	3.274026	9.8618		6.8244
	$-\ 1772,86$	$+\ 1879.43$	9.974648	3.4122	7.4900	7.4900
					3.2487 (n)	3.2740
			$(\delta_3) =$		0.7387 (n)	0.7640
			$316°\ 40'\ 17''$		$a_3 = +\ 5.48$,	$b_3 = +\ 5.81$.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

b) Az így nyert *előzetes* délszögértékekből (δ_1), (δ_2), (δ_3) kivonva rendre a *mért* délszögeket δ_1, δ_2, δ_3, nyerjük (8. képlet szerint) a hibaegyenletek *absolut* tagjait ω_1, ω_2, ω_3 amelyek mellé írjuk a számított a és b-ket is:

Pont	mért δ	számított (δ)	$\omega = (\delta) - \delta$	a	b
P_1	61° 14′ 24″	61° 14′ 34″	+ 10″	— 6.3	+ 3.5
P_2	16 42 15	16 42 6	— 9	— 1.9	+ 6.3
P_3	316 40 3	316 40 17	+ 14	+ 5.5	+ 5.8

c) Most számítsuk ki az ω_1, a_1, b_1; ω_2, a_2, b_2; ω_3, a_3, b_3 ismeretes értékek alapján a 13. alatt felírt normál egyenletek együtthatóit:

a^2	b^2	ab	$a\omega$	$b\omega$	ω^2
40	12	— 22	— 63	+ 35	100
4	40	— 12	+ 17	— 57	81
30	34	+ 32	+ 77	+ 81	196
+ 74,	+ 86,	— 2,	+ 31,	+ 59	377

tehát a két normál egyenlet:

$$+ 74\ \Delta x - 2\ \Delta y + 31 = 0$$
$$- 2\ \Delta x + 86\ \Delta y + 59 = 0$$

Ezen egyenletekből az ismertetett séma (65. oldal) szerint számítva a Δx és Δy értékeket, a

$$\Delta y = - 0.70\ dm \text{ és } \Delta x = - 0.43\ dm$$

koordináta javításokra jutunk.

Tehát az előmetszett P pont végleges összrendezői:

$$y = (y) + \Delta y = - 22501{,}27\ m.$$
$$x = (x) + \Delta x = + 43512{,}36\ m.$$

A P pontot (ezen végleges összrendezőivel) most már P_1, P_2, P_3 ponttal összeszámítva, nyerjük a φ_1, φ_2, φ_3 végleges *délszögértékeket*. Ezekből kivonva a mért délszögeket δ_1, δ_2, δ_3 azon λ_1, λ_2, λ_3 értékekre kell jutnunk, amelyeket a *hibaegyenletekbe* $(\lambda_i = a_i\ \Delta x + b_i\ \Delta y + \omega^i)$ helyettesített Δy és Δx koordináta javítások adnak.

Ha az így *kétféle* módon nyert λ-k egyeznek, akkor *biztosan* hibátlan a kiegyenlítés. Ismerve a λ-kat kiszámítjuk a $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = [\lambda\lambda]$ négyzet összeget és azután a

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-2}}$$ képlettel, ahol n jelenti az *irányok*

számát, nyerjük egy iránynak középhibáját.

Jelen példában azt találjuk, hogy

$$\varphi_1 = 61° 14′ 34″$$
$$\varphi_2 = 16° 42′ 2″$$
$$\varphi_3 = 316° 40′ 10″;$$

kivonva ezen *végleges* értékekből a δ_1, δ_2, δ_3 mérési eredményeket:

$$\lambda_1 = + 10″$$
$$\lambda_2 = - 13″$$
$$\lambda_3 = \quad 7″ \text{ értékekre jutunk.}$$

Tehát $[\lambda\lambda] = 100 + 169 + 49 = 318$, és így

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-2}} = \sqrt{\frac{318}{1}} = \pm 18.″$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Megjegyezzük még, hogy a normál egyenletek együtthatóinak képzésénél előforduló szorzásokat (és hatványozásokat) vagy *számoló léccel* (Rechenschieber) vagy a *Jordán*-féle: *„Quadraten und Multiplikations-Tafel“* című kis táblázattal végezhetjük el legcélszerűbben. A normál egyenletek *megoldását* pedig legcélszerűbb *számoló léccel* vagy 4 jegyű logar. könyvvel végezni.

IV. FEJEZET.

Egyes konfigurációk és egész felvételek területszámítása.

Bármely vizszintes konfiguráció területe meghatározható:

I. a helyszinén nyert mérési eredményekből, az úgynevezett *„eredeti méretekből“*, amely esetben önértőleg az illető konfiguráció területi értékét a lehető legnagyobb megbizhatósággal nyerhetjük;

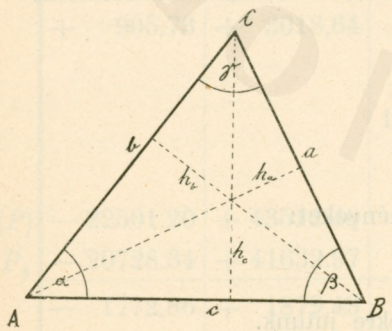
II. *térképek* illetve *tervek* alapján, amikor azonban csak korlátolt pontossággal nyerhetjük a területi értékeket.

Az I. esetben csakis *számítással* eszközölhető a területmeghatározás; a második esetben azonban *vagy számítással*, vagy tisztán *mechanikus* úton, úgynevezett *„planimeterekkel“* is juthatunk megfelelő területi értékhez. Minthogy a *számszerű* területmeghatározás általában több időt (tehát nagyobb költséget) igényel mint a mechanikus területmeghatározás; azért az előbbit csakis akkor fogjuk alkalmazni, amikor a mechanikus eljárás *nem adhat* a célnak teljesen megfelelő pontosságot, ami azonban csak kivételesen fog a gyakorlatban előfordulni. Ugyanis a *mechanikus területmérés megbizhatósága* napjainkban — amikor *tökéletes* planimeterek állnak rendelkezésre — már egyedül a térkép hibáinak és méretarányának függvénye.

I. §. Egyes konfigurációknak az eredeti méretekből való területmeghatározása.

A területszámításnál rendszerint egyenesekkel határolt idomokkal lesz dolgunk; ha görbékkel határolt idomok is szerepelnek, úgy ezen görbe vonalak *törött vonalakkal* helyettesíthetők és így a számitás sokszögű idomok esetére van visszavezetve.

1. A háromszög területe. Bármely konfiguráció területszámítása ezen elemi feladatra vezethető vissza: ha a konfigurációt háromszögekre bontjuk a helyszínén.



32. ábra.

Egy $A\ B\ C$ háromszögben az oldalhosszakat a, b, c-vel jelölve; az ezen oldalakra vont merőleges magasságokat h_a, h_b, h_c-vel jelölve; a belszögeket pedig α, β, γ-val jelölve: a terület T értékét szolgáltatják ezen képletek (32. ábra)

1. . . . $2\ T = a\,.\,h_a = b\,.\,h_b = c\,.\,h_c$

2. . $2\ T = ab \sin \gamma = ac \sin \beta = bc \sin \alpha$

2. . . . . $T = \sqrt{s\ (s-a)\ (s-b(\ (s-c)}$

ahól $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Az első egyenletet akkor használjuk, ha *egy oldalt*, és a szemközti csúcsból ezen oldalra vont merőlegesnek (a magasságnak) hosszát mértük.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A második képlet akkor jó: hogyha *két oldalt* és a *közbezárt* szöget mértük.

A harmadik képlet akkor szerepel: hogyha a *három* oldalt mértük.

Minthogy mérési hibákat mindig fel kell tételezni, azért a mérést is, a számítást is úgy kell mindig berendezni, hogy e hibák a területi értékre a lehető legkisebb hatással legyenek. Ezt szem előtt tartva, jegyezzük meg magunknak a következőket:

a) A *rövid* méreteket (akár oldal, akár magasság) mérjük *fokozott* figyelemmel.

b) Egyenlően megbízható mérések esetében az *első* esetben (1. képlet) nyerjük a legmegbizhatóbb eredményt, feltéve: *hogy a megmért magasság* majdnem *egyenlő hosszú* az illető oldallal.

c) A *második* esetet (2. képlet) csakis akkor használjuk fel, amidőn a kérdéses szög *60°-nál nagyobb;* illetve *150°*-nál nagyobb, hogyha tompa a szög.

Ezen alapvető szabályok illusztrálására minden vizsgára készülő, okvetlenül dolgozza ki a következő számpéldákat.

a) Egy háromszögben az oldalak hosszai:

$$a = 30.0\ m;\ b = 60.0\ m:\ c = 120.0\ m.$$

Az egyes oldalakhoz tartozó magasságok rendre:

$$h_a = 80.0\ m;\ h_b = 40.0\ m;\ h_c = 20.0\ m.$$

Hibátlan mérések esetében az 1. képlet mind a három esetben

$$2\ T = 2400\ m^2\text{-et}$$

fog eredményezni.

Kérdés: $\pm$ 10 centiméter hibát tételezve fel minden oldal-hosszmérésben és minden magasságmérésben: mely *oldal* és *magasság* révén nyerjük a legkisebb hibájú T értéket? Mi ebből a tanulság?

β) Egy háromszögben az egyik szög $\gamma = 12°$, a β szög pedig $= 92°$, amikor az $\alpha = 76°$. Feltéve, hogy a háromszög területe körülbelül

$$2400\ m^2,$$

és feltételezve, hogy az oldalhosszak hibátlanul ismeretesek, de minden szögben lehet $\pm$ 15" mérési hiba: körülbelül hány négyzetméter ingadozással nyerjük a 2 T értéket aszerint amint a 2. képletbe az α, vagy a β, vagy a γ szögeket helyettesítjük? Mi ebből a tanulság?

γ) Az *α)* számpéldát oldjuk meg a 3. képlet szerint három kombinációban:

1. amikor a és c hibátlan és a b hibás $\pm$ 10 cm.-re
2. „ a „ b „ „ „ c „ $\pm$ 10 cm.-re
3. „ mind a három oldal hibás vagy — 10 cm.-re

Mi a tanulság? Hasonlitsuk össze ezen értékeket az *α)* alatt nyert értékekkel.

2. A négyszög területe.

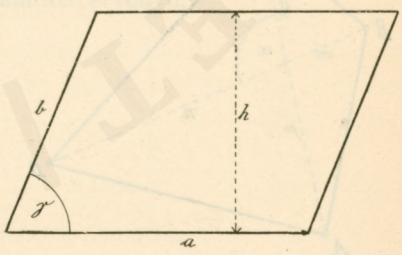
a) A parallelogramm. (33. ábra.) Ha a számítandó parallelogramm alapvonalát a-val, a magasságát h-val jelöljük, akkor

4. . . . . $T = a \,.\, h$

Ha b-vel jelöljük az a-val szomszédos oldalt, és γ-val a közbezárt szöget, akkor

5. . . . . $T = a\ b\ \sin\gamma$

Ha a h pontosan mérhető a helyszínén, úgy a 4. eset mindig megbizhatóbb eredményt ad mint az 5. eset, még ha másodpercre pontosan mértük is az γ szöget.



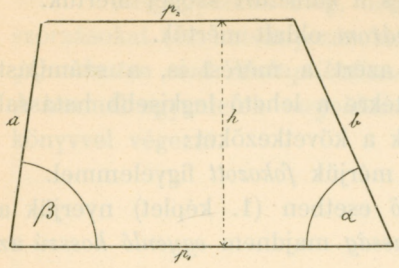
33. ábra.

Tanulságos számpélda: ha a h megmért magasság a helyszínén szögtükörrel $\pm$ 8 percre hibásan (azaz a valódi merőlegeshez képest ekkora hajlással) volt kitűzve, mekkora értékkel fog a mért h hosszértéke a valódi h értéktől emiatt eltérni, feltéve hogy h = *krb. 100 méter.*

Továbbá számítsa ki, hogy krb. **100** méteres h esetében mekkora szöghibával kell a merőlegest kitűzni, hogy ezáltal a h értéke *0.1 méterrel* változzék.

Mi ebből a tanulság?

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.



34. ábra.

b) *A trapéz.* Ha a két parallel oldalt (34. ábra) p_1 és p_2-őt és a magasságot h mértük, akkor

$$6. \ldots\ldots T = \frac{p_1 + p_2}{2} h.$$

Ha a trapéz magassága nem volt mérhető, úgy vagy *mind a négy oldalt* mérjük, amikor

$$7. \; T = \frac{p_1 + p_2}{4(p_1 - p_2)} \sqrt{\frac{((a+b)+(p_1-p_2))\,((a+b)-(p_1-p_2))}{((p_1-p_2)+(a-b))\,((p_1-p_2)-(a-b))}},$$

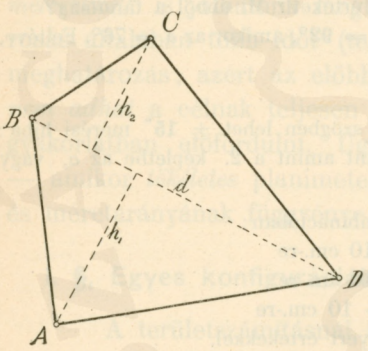
vagy mérjük a *két parallel* oldalt és a *nagyobbik* mellett fekvő két szöget (α és β-t), amikor:

$$8. \ldots T = \frac{1}{2} \frac{(p_1 + p_2)(p_1 - p_2) \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

A trapéz területével nem foglalkozunk tovább, mert a 6. képlet az egyedüli, amely a gyakorlatban szerepel. Ez a képlet szolgáltatja a legmegbízhatóbb területi értékeket is.

c) *A szabálytalan négyszög.* (trapezoid).

Képzeljük a BD diagonálist (35. ábra) megmérve (hossza d), továbbá legyenek a diagonálissal szemközt levő csúcsokból bocsájtott merőleges hosszak h_1 és h_2; akkor



$$9. \ldots\ldots T = d\frac{h_1 + h_2}{2}$$

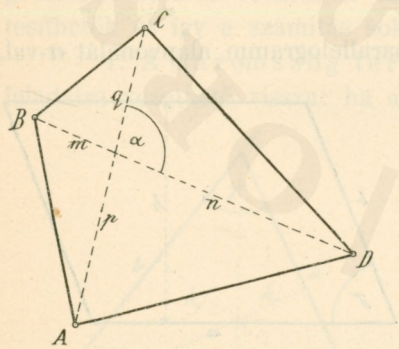
Számítható a terület a *két diagonálisból* és a két diagonális által bezárt szögből is ezen egyszerű képlettel:

$$10. \ldots\ldots T = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$$

amely képletben d_1 és d_2 a két diagonálisnak hosszát jelenti.

Ezen képlet levezethető a 35. ábrából. Ott $d_1 = p + q$, $d_2 = m + n$ részekre van bontva.

Előáll 4 háromszög, amelyek területei a $t_1 = n\,q \sin\alpha$ képlet mintájára kifejezhetők. Ha a négy háromszög területét így kifejeztük és figyelembe vettük, hogy $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, akkor a négy terület összegezése által nyerjük a 10. képletet.



35. ábra.

A 10. képlet csak akkor ad a 9-el egyenrangú eredményt, ha az α szög közel 90°: különben mindig megbizhatatlanabb.

Az eddig ismertetett *tíz* területi képlet logaritmikus számításra alkalmasak. A *tíz* képlet közül akármelyik megoldható *számoló géppel* vagy *szorzó táblával* és *sinus* táblázattal. *Cosinus* vagy *tangens* ugyanis nem szerepel egyetlen képletben sem: csak a *sinus*.

3. *Sokszög területszámítása.* Sokszögalakú zárt konfigurációt különböző módon lehet geometriailag meghatározni; általában tehát különböző *mérési adatok* fognak rendelkezésre állani, amelyek más-más területszámítási eljárást igényelnek.

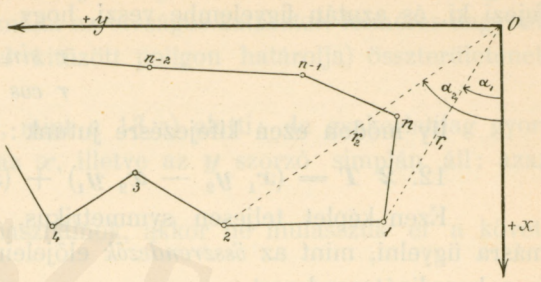
© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

a) *A sokszög poláris koordináták által van megadva.* Ekkor tehát (36. ábra) ismeretesek a törési pontok

radius vektorai: $r_1, r_2, r_3, \ldots r_{n-1}, r_n$;

és ezen *radius vektoroknak* egy kezdő irányra vonatkozó *sarkszögei:*

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots \alpha_{n-1}, \alpha_n.$$



36. ábra.

A kérdéses terület T oly polaris háromszögekből tevődik most össze, melyek két szomszédos radius vektor által vannak határolva; ezen poláris háromszögek területei (f) összegezve, megadják a *poligon* területét. Az ábra mutatja, hogy itt *negatív* előjellel összegezendő f területek is lesznek. Általában tehát lesz:

$$T = f_{1,2} + f_{2,3} + \ldots + f_{k,k+1} + \ldots + f_{(n-1)n,} + f_{n,1,}$$

$$\text{ahol } f_{1,2} = \frac{1}{2} r_1 . r_2 . \sin (\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$f_{2,3} = \frac{1}{2} r_2 . r_3 . \sin (\alpha_3 - \alpha_2)$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$f_{k,k+1} = \frac{1}{2} r_k . r_{k+1} . \sin (\alpha_{k+1} - \alpha_k)$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

A *sin*-ban szereplő *sarki szög* különbség mindig úgy képezendő, hogy a *nagyobb* indexxel ellátott irányból, kivonjuk a *kisebb* indexxel ellátott irány értékét.

Tehát nem α_1-ből az α_2-őt, hanem α_2-ből az α_1-et; α_k-ból α_{k-1}-et, és α_{k+1}-ből α_k-t. Ha ilyenkor *positív* eredményt kapunk, akkor a *sinus* is positív, az f is positív; ha ilyenkor *negatív* eredményt kapunk, akkor a *sinus* is negatív, az f terület is negatív. Tehát ha az $(\alpha_k - \alpha_{k-1})$-ben az $\alpha_k > \alpha_{k-1}$, akkor $f_{k-1,k}$ positív előjelü, ha $\alpha_k < \alpha_{k-1}$, akkor $f_{k-1,k}$ negatív előjelű.

Ezeket figyelembe véve, a végképlet ez:

$$11. \ldots\ldots 2T = \sum_{k=1}^{k=n} \left(r_k r_{k+1} \sin (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \right)$$

Ezen egyenlet teljesen symmetrikus és *egészen* általános érvényű.

Dolgozzuk ki gyakorlatul a következő számpéldát:

Pont.	α	r
1	8° 40′ 49″	533·59 *m.*
2	7° 51′ 35″	323.22 *m.*
3	30 27 43	314.03
4	71 47 51	131.00
5	324 13 18	160.52
6	297 41 46	290.25
7	312 48 40	365.46

a pontos eredmény: *211.935* m^2.

Végezzük el a számítást egyszer *4 jegyű*, egyszer *6 jegyű* logaritmusokkal.

Az adatok puszta megtekintése mutatja, hogy *negatív területű* lesz az $f_{1,2}$; az $f_{4,5}$ és az $f_{5,6}$ Az $f_{4,5}$ látszólag pozitív, de rögtön látjuk, hogy negatív, ha a 0°-ot 360°-nak veszem, amikor ugyanis $\alpha_4 = (360° + 71° \ldots) = 431° 47′ 51″$, míg az α_5 az $= 324° \ldots$. A távcső tényleg *negatív* irányban mozgott, midőn a *4.* pont után az *5.* pontra irányoztunk.

b) A *sokszög derékszögű sík koordináták által* van *megadva.*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Az idevonatkozó képleteket bárki levezetheti a 11. alatti képletből, ha a $sin\ (\alpha_{k+1} - \alpha_k)$-t, az ismert goniometriai képlettel az α_{k+1} és az α_k sinusa és cosinusa által fejezi ki, és azután figyelembe veszi, hogy

$$r\ sin\ \alpha = y$$
$$r\ cos\ \alpha = x.$$

Ily módon ezen kifejezésre jutunk:

12. $$2\ T = (x_1\ y_2 - x_2\ y_1) + (x_2\ y_3 - x_3\ y_2) + \ldots + (x_n\ y_1 - x_1\ y_n)$$

Ezen képlet teljesen symmetrikus, — tehát *könnyen fejben tartható.* Nem kell másra ügyelni, mint az *összrendezők* előjeleire. Ezen képlet érvényes — bárhol képzeljük is a koordinátarendszert.

Ezen képletet x illetve y szerint rendezve is írhatjuk fel:

13.
$$\begin{cases} x_1, x_2, x_3 \ldots x_n \textit{ szerint rendezve: } 2\ T = \sum_{k=1}^{k=n} (y_{k+1} - y_{k-1})\ x_k. \\ y_1, y_2, y_3 \ldots y_n \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 2\ T = -\sum_{k=1}^{k=n} (x_{k+1} - x_{k-1})\ y_k. \end{cases}$$

Ezen sorok tehát kifejtve így néznek ki:

13. a.
$$\begin{cases} 2\ T = (y_2 - y_n)\ x_1 + (y_3 - y_1)\ x_2 + \ldots + (y_1 - y_{n-1})\ x_k. \\ -2\ T = (x_2 - x_n)\ y_1 + (x_3 - x_1)\ y_2 + \ldots + (x_1 - x_{n-1})\ y_n. \end{cases}$$

Eszerint tehát bármely poligon területét megadja

1. *egy oly sor algebrai összege, amely sor annyi tagból áll, mint ahány csúcsa van a poligonnak;*

2. minden tag egy *szorzatból áll,* amelynek egyik eleme minden egyes pont *abcissája (ordinátája),* másik eleme a *következő* pont *ordinátája* (abcissája) és a *megelőző* pont ordinátája (abcissája) közötti különbség.

3. Tartsuk szem előtt az összrendezők előjeleit és jegyezzük meg, hogy az *utolsó* pont n után következik az *1* pont; illetve az *1*-et megelőző pont az n pont.

E három szabály igen könnyű fejben tartani.

Számítási ellenőrzés. Ismeretes tétel, hogy minden zárt poligonban, az összes részösszrendezők összege = 0. A *13.* illetve *13. a)* képletekben szereplő *abcissa,* illetve *ordináta* különbségek, így fogva fel, szintén algebrai *összegben* külön-külön 0-t kell hogy adjanak. Azaz:

14. . . .
$$\begin{cases} (X_2 - X_n) \\ +(X_3 - X_1) \\ +(X_4 - X_2) \\ +(X_5 - X_3) \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ +(X_1 - X_{n-1}) \\ \hline = 0. \end{cases} \qquad \text{hasonlólag:} \qquad \begin{cases} (Y_2 - Y_n) \\ +(Y_3 - Y_1) \\ +(Y_4 - Y_2) \\ +(Y_5 - Y_3) \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ +(Y_1 - Y_{n-1}) \\ \hline = 0. \end{cases}$$

Mielőtt a szorzásokat tényleg elvégeznők, *ne mulasszuk el* ezt az ellenőrzést megejteni.

A 12. alatti alapképletet nemcsak a **13.** alatti gyakorlati alakra lehet hozni. Rendezhetjük ugyanis a szomszédos pontok koordináta összege és különbsége szerint is.

Vagyis előállíthatjuk ezt az alakot:

15.
$$\begin{cases} 2\ T = (x_1+x_2)(y_2-y_1) + (x_2+x_3)(y_3-y_2) + (x_3+x_4)(y_4-y_3) + \ldots + (x_n+x_1)(y_1-y_n). \\ \text{vagy} \\ -2\ T = (y_1+y_2)(x_2-x_1) + (y_2+y_3)(x_3-x_2) + (y_3+y_4)(x_4-x_3) + \ldots + (y_n+y_1)(x_1-x_n). \end{cases}$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ezen sor szerkezete *igen könnyen* fejben tartható. Geometriai értelme világos: *az egyes tagok az illető sokszögoldal, és annak x, illetve y irányú vetületei által alkotott trapézok* kétszeres területét fejezik ki. Ezen képletet használta az országos kataszteri felmérés nagyobb méretarányban felmért *belsőségek* (egy *kövekkel* kitüzött poligon határolja) összterületének kiszámítására. (Lásd e fejezet utolsó cikkét.)

A 15. alatti sor ugyanannyi tagból áll, mint a 13. a) alatti: de gyakorlatilag gyorsabban vezet célhoz a *13. a)* alatti, mert ott az x, illetve az y szorzó simplán áll: azaz nem mint összeg, vagy mint különbség.

Ha valami okból mégis a 15. alattit használnók, akkor ne mulasszuk el a következő két kontroll számítást:

$$\alpha)\quad \begin{cases} (y_2 - y_1) \\ +(y_3 - y_2) \\ +(y_4 - y_3) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ +(y_1 - y_n) \\ \hline = 0. \end{cases} \qquad \text{illetve} \qquad \begin{cases} (x_2 - x_1) \\ +(x_3 - x_2) \\ +\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ +(x_1 - x_n) \\ \hline = 0. \end{cases}$$

$$\beta)\quad \begin{cases} (x_1 + x_2) \\ +(x_2 + x_3) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ +(x_n + x_1) \\ \hline = 2(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \end{cases} \qquad \text{illetve} \qquad \begin{cases} (y_1 + y_2) \\ +(y_2 + y_3) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ +(y_n + y_1) \\ \hline = 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \end{cases}$$

Az általános sokszögekre érvényes és előbb levezetett képletek a *háromszögre* alkalmazva, a következő képleteket szolgáltatják:

$$2T = (y_2 - y_3)x_1 + (y_3 - y_1)x_2 + (y_1 - y_2)x_3.$$

illetve: $$-2T = (x_2 - x_3)y_1 + (x_3 - x_1)y_2 + (x_1 - x_2)y_3.$$

Vagy: $$2T = (x_1 + x_2)(y_2 - y_1) + (x_2 + x_3)(y_3 - y_2) + (x_3 + x_1)(y_1 - y_3).$$

illetve: $$-2T = (y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_3 - x_2) + (y_3 + y_1)(x_1 - x_3).$$

Lehet azonban ezen képleteket úgy átalakítani, hogy csak *két* összeadó tagból álljanak:

16. .
$$\begin{cases} -2T = (x_1 - x_3)(y_1 - y_2) + (y_1 - y_3)(x_2 - x_1) \\ \text{vagy} \quad = (x_2 - x_1)(y_2 - y_3) + (y_2 - y_1)(x_3 - x_2) \\ \text{vagy} \quad = (x_3 - x_2)(y_3 - y_1) + (y_3 - y_2)(x_1 - x_3). \end{cases}$$

A másik két egyenlet az elsőből tisztán ciklikus felcseréléssel adódtak. Ezen 16. alatti képlet szerint számítja a háromszögelési hivatal a felsőrendű háromszögoldalakhoz tartozó *centrális* háromszögek területét a stereográfikus vetületi síkon a gömbi szögfölösleg levezetése céljából.

C) A zárt sokszög oldalhosszai és törési szögei ismeretesek.

(37. ábra.) Habár a gyakorlatban ez az eset ritkán fog előfordulni, mégis ismertetjük az idevonatkozó területi képleteket: melyek meglepően *szabályos* alakúak.

Egy n számú sarkpontot tartalmazó zárt sokszögnek bármely sarkpontjából $(n-3)$ számú diagonálist húzhatunk és ilymódon $(n-2)$ számú háromszögre lesz a sokszög területe felbontva. Ha sor szerint 1, 2, 3, . . . k . . . n-el jelöljük a sokszögpontokat, az oldalakat pedig s_1, s_2, . . . s_n-el és az *1* — pontból képzelem ezen diagonálisokat az összes

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

többi pontokra megvonva, akkor a sokszög kétszeres területe mint az $(n-2)$ számú háromszögek kétszeres területének összege, lesz:

$$2\,T = \sum_{k=2}^{k=n-1} s_k\,h_k = s_2 \,.\, h_2 + s_3 \,.\, h_3 + \ldots + s_{n-1} \,.\, h_{n-1};$$

ahol a h-k az egyes háromszögeknek *magasságait* jelzik, *alapnak* véve a *sokszögoldalakat.* (Az s_1 és az s_n oldalak a képletben nem szerepelnek, mert ezek az 1. pontot közrefogó oldalak.)

Ha a kérdéses sokszögnek külszögeit mértük, és ezen szögértékeket:

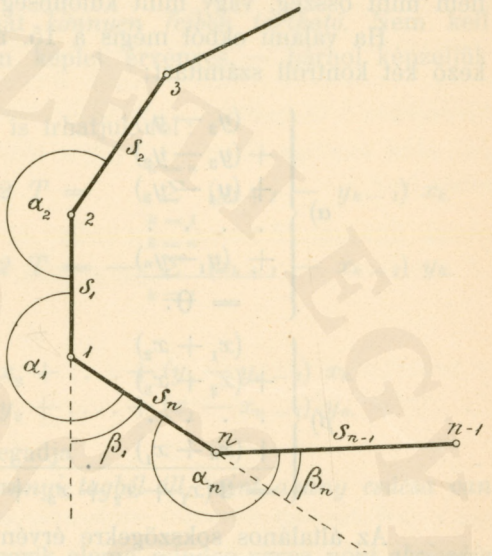
$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha_n$$

betükkel jelöljük. és

$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3\ \ldots\ \beta_n$-el jelöljük ezen szögeknek **180°**-al kisebbített értékeit, azaz

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 - 180° \\
\beta_2 &= \alpha_2 - 180° \\
\beta_3 &= \alpha_3 - 180° \\
&\ldots\ldots \\
\beta_n &= \alpha_n - 180°
\end{aligned}$$

amely kivonás szószerint értendő, azaz *negativ eredményt is adhat*, lesz a kétszeres terület képlete:



37. ábra.

$$17.\quad \left\{\begin{aligned}
2\,T = {} & s_2\,[s_1 \sin\beta_2] \\
& + s_3\,[s_1 \sin(\beta_2+\beta_3) + s_2 \sin\beta_3] \\
& + s_4\,[s_1 \sin(\beta_2+\beta_3+\beta_4) + s_2 \sin(\beta_3+\beta_4) + s_3 \sin\beta_4] \\
& + s_5\,[s_1 \sin(\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5) + s_2 \sin(\beta_3+\beta_4+\beta_5) + s_3 \sin(\beta_4+\beta_5) + s_4 \sin\beta_5] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + s_{n-1}\,[s_1 \sin(\beta_2+\beta_3+\ldots+\beta_{n-1}) + s_2 \sin(\beta_3+\beta_4+\ldots\beta_{n-1}) + \ldots + s_{n-2} \sin\beta_{n-1}]
\end{aligned}\right.$$

Ezen szabályos alakú képletben szerepelhetnek tehát *negativ szögértékek is:* amikor a *sin* is *negativ* lesz.

Számítási ellenőrzés: a területi képletben nem szerepelnek a β_1, β_n és s_n értékek. Ezen értékeket az ellenőrző számításnál célszerűen felhasználhatjuk. Ugyanis

$$\begin{aligned}
\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots\beta_n &= \Sigma\,\alpha - n \,.\, 180° = 180°\,(n+2) - n \,.\, 180° \\
&= 2 \,.\, 180° = \mathbf{360°}.
\end{aligned}$$

Az s_n-et pedig a területszámítás ismétlésénél visszük be a számításba, amikor egy más pontot választunk 1. pontnak.

2. §. Egyes konfigurációknak, térképek illetve tervek alapján való terület meghatározása.

Miként említettük, kétféle eljárás képzelhető:

1. lemérjük a terület meghatározó elemeket a térképről, és ezen adatokból — *mintha* eredeti mérési adatok volnának, az előbb részletesen ismertetett képletekből *számítás* utján nyerjük a területi értéket;

2. alkalmas planiméterekkel mérjük tisztán *mechanikus* úton a rajzolt idom területét.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Hangsúlyozzuk, hogy napjainkban rendelkezésre állanak oly planiméterek, melyekkel bármely szabálytalan vagy szabályos idom területét *legalább is oly pontosan,* de a legtöbb esetben *pontosabban* nyerhetjük, mint az 1. esetben. Gyorsaság szempontjából, különösen szabálytalan alakú idomoknál *összehasonlíthatatlanul* jobb a *mechanikus* eljárás.

ad 1. Az itt ismertetendő eljárásokat tehát akkor fogjuk csak használni, ha nincs megfelelő planiméterünk.

Feltétel egyébként: egy jó szorzó tábla vagy számoló gép.

A *háromszög* területi meghatározására itt alkalmazható képletek:

$$2\ T = a\ h_a = b\ h_b = c\ h_c$$

vagy $$T = \sqrt{s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)},$$ ahol

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

A *parallelogramm* legkényelmesebben és legélesebben az *alap* és a magasság lemérése által nyerhető:

$$T = g\ .\ h.$$

A *trapéz* a térképről lemért két parallel oldal és a térképről lemért vagy — és az helyesebb — a *természetben* mért *(h)* magasságból a

$$T = \frac{p_1 + p_2}{2}\ h = \boldsymbol{p\ .\ h}$$

képlettel lesz számítva. — Minthogy $\frac{p_1 + p_2}{2}$ nem egyéb, mint a két parallel oldaltól egyenlő távolban képzelt *középparallelnek* hossza $p = \frac{p_1 + p_2}{2}$, azért a trapéz területét ez a szabály fejezi ki:

„A trapéz területét adja a **magasság** és a **középső** parallelnek szorzata." A kataszteri felmérés hosszú, trapéz alakú részleteknél gyakran nem a *merőleges magasságot (h),* hanem az egyik nem parallel oldalt méreti a helyszinén szalaggal. Ha ezen oldalnak a merőleges magassággal bezárt szögét *(a)* a *térképről* lemérjük, úgy $h =$ oldalhossz $\times$ *cos a,* amely művelet ami *koordináta táblázatunkkal* számítható legcélszerűbben.

Ha a trapézben mind a négy oldalt mértük le a térképen, úgy a 7. képletet használjuk a számításhoz.

A szabálytalan négyszög: ha egy diagonálist *(d)* és az evvel szemközt fekvő csúcsból reá bocsájtott két merőlegest (h_1 és h_2) lemértük (35. ábra), úgy:

$$T = d\ \frac{h_1 + h_2}{2}.$$

Ezen feladat gyors és pontos megoldására szolgál a *„területszámító kettős háromszög"* (Neuhöffer, Wien), amelynek segélyével átló és magasság kirajzolás nélkül mérhető *d* és olvasható le noniuson a $\left(\frac{h_1+h_2}{2}\right)$ összeg. A szorzást számoló léccel célszerü azután végezni.

A zárt sokszög. — Itt sokféle eljárást alkalmazhatunk.

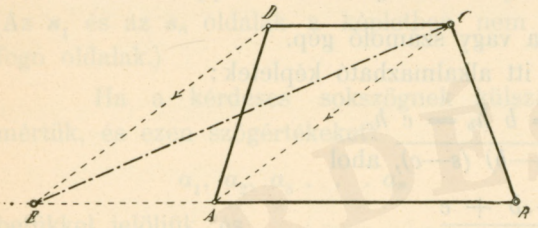
1. A poligont átlók segélyével *háromszögekre* és *négyszögekre* bontjuk: ezeket *egyenkint* az imént adott módon számítva, nyerjük azok összegében a területet.

2. A poligont, *terület azonos* háromszögre alakítjuk át az *úgynevezett „ismételt parallel eltolás"* segélyével.

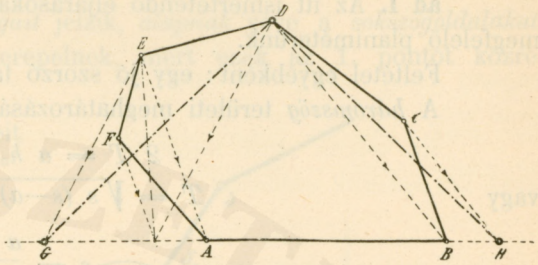
© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Két szabatos *fa-* vagy *fémháromszöggel* ez a művelet kényelmesen elvégezhető. — A mellékelt ábrák (38. és 39.) mutatják az eljárás lényegét.

Az $ABCD$ négyszög területe *azonos* az EBC háromszög területével.



38. ábra.



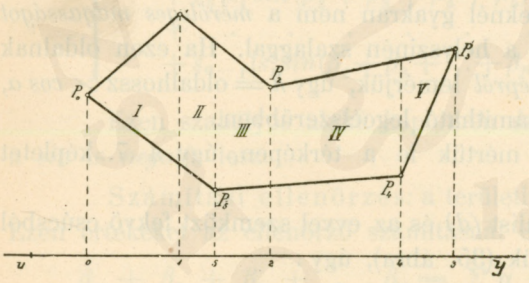
39. ábra.

Persze a szerkesztési vonalakat egészen elhanyagolhatjuk: csak az AB egyenes meghosszabbítását kell kihúzni ceruzával és az AC-vel párhuzamos DE-nek az AB folytatásával való *metszését.*

A másik ábrán $ABCDEF$ hatszög területével *azonos* a GHD háromszög területe.

Ezen módszer *keresztszelvények* területszámításánál alkalmaztatik ott, ahol planimeter nem áll rendelkezésre. Ha *hegyes* metszéseket el lehet kerülni, úgy ez a módszer (szalagszerű parcellákat kivéve) egyes földrészletek (birtokrészletek) területmeghatározására is alkalmas, ha *nincs* planimeterünk. — Ezen, röviden *„átalakításnak"* nevezett módszer gyakorlatilag igen fontos — mert kitünő — alkalmazását *egész községek szelvényes* térképeken való terület meghatározásánál fogjuk tüzetesen tárgyalni ezen fejezet utolsó pontjában.

3. A poligon *összes* pontjaiból tetszőleges irányú, de egymással szigorúan párhuzamos egyeneseket húzunk. Ezáltal a sokszög *háromszögekre* és *trapezekre* lesz bontva: ezen *elemi területek* most már az előbbiek szerint lesznek területileg meghatározva. Ez az eljárás, célszerűbb, mint az 1. alatt említett, mert *gyors* és igen *gépies* munkát (mérést és számítást) enged. Ha ugyanis a csúcspontokból vont párhuzamosokra bárhol vonunk egy merőlegest, (40. ábra) és ezen *merőlegesen* valahol választunk egy O pontot, és a 0, 1, 2, 3, ... talp pontoknak ezen O ponttól való távolait nevezzük y_1. y_1, y_2 . . . betűkkel, a párhuzamosoknak a poligonon *belüli* hosszait p_1, p_2, p_3 stb. betűkkel, akkor



40. ábra.

$T = \text{I} + \text{II} + \text{III} + \text{IV} + \text{V}$, részterületekre helyettesítve a p és y szorzókat, lesz

$2\,T = p_1\,(y_1 - y_0) + (p_2 + p_1)\,(y_5 - y_1) + (p_3 + p_2)\,(y_2 - y_5) + (p_4 + p_3)\,(y_4 - y_2) + p_4\,(y_5 - y_4)$, amely összevonás által ezt a *fontos* alakot ölti:

18. . $2\,T = p_1\,(y_5 - y_0) + p_2\,(y_2 - y_1) + p_3\,(y_4 - y_5) + p_4\,(y_3 - y_2)$

Igy *leírva,* ez a képlet csak a p-kre nézve mutat szabályosságot, de az y-okra nem. Szavakban kifejezve a szabály azonban annál egyszerübb:

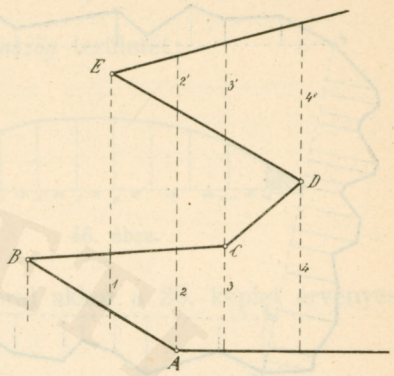
„A 2 T-t nyerjük, ha minden a rajzról lemért parallel darabot (p_1, p_2 stb.) megszorzunk az illető p ***után*** *és* ***előtt levő*** *két parallel közötti távolsággal."*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ha véletlenül egyes parallelek (beugró poligon esetében) ismételten metszik a poligont (41. ábra), úgy minden ilyen parallelből a róla *lemetszett darabok összhossza* veendő p gyanánt, tehát

$p_1 = 1$, $p_2 = 2 + 2'$, $p_3 = 3 + 3'$, $p_4 = 4$ stb.

Az $y - y$ irányt miként látszik, tetszőlegesen választhatjuk ugyan, de mindig *úgy választjuk,* hogy a poligon *hosszanti kiterjedési irányával* körülbelül párhuzamos irányban feküdjék: — amikor a párhuzamosak a poligon oldalakat nem fogják *hegyesen* metszeni, tehát a p-k pontosan lemérhetők; — arra is ügyeljünk az y—y irány választásánál, hogy az összetartozó *szorzók* ne legyenek túlságosan *egyenlőtlen* nagyságúak.



41. ábra.

Hangsúlyozzuk, hogy ha nem az y_0, y_1, y_2 stb. méreteket, *hanem mindjárt az* $(y_1 - y_0)$ $(y_5 - y_1)$ darabokat mérjük le, ami által sok időt takarítunk meg.

Ajánlom ezen igen célszerű módszer gyakorlását.

A szorzásokat természetesen *szorzó táblával* végezzük el.

4. A *rajzolt sokszög területét* a sarokpontoknak tetszőlegesen választott derékszögű koordináta rendszerre vonatkozó koordinátái által is lehet néha célszerűen meghatározni.

Az előbbi cikkben idevonatkozólag levezetett képletek között itt csakis a *13. a* képletet célszerű felhasználni: amikor közvetlenül az x-ek *különbségeit* mérjük le a rajzból.

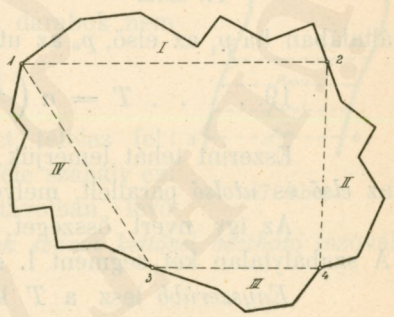
Célszerű néha az x tengelyt két sokszögponton keresztül fektetni, amikor e két pont y-jai zérusak, és így a $2\,T$ sorában két tag elmarad.

Ha például 7 szögű idom esetében az x tengelyt az ***1, 7*** oldalra fektetjük, akkor nem hét, hanem csak *5* tagból áll a sor:

$$-2\,T = (x_3 - x_1)\,y_2 + (x_4 - x_2)\,y_3 + (x_5 - x_3)\,y_4 + (x_6 - x_4)\,y_5 + (x_7 - x_5)\,y_6.$$

Az összrendezők előjeleire természetesen figyelni kell.

Ha egy *nagy területű* poligon *sok kis oldalt* tartalmaz, akkor igen egyenlőtlen nagyságú szorzó tényezőkkel lesz dolgunk; ami a pontosság rovására megy. Ilyenkor igen célszerű az adott poligonba diagonálisok segélyével egy 4—5 oldalú idomot belefektetni, ez idom területét az eddig ismertetett módok valamelyike szerint meghatározni, a fennmaradó területi részeket pedig a szóban forgó koordináta módszerrel meghatározni: alapul (azaz x tengelyül) választva mindig a beírt idom megfelelő oldalait. Igy a 42. ábrán, (1, 2, 3, 4) a beírt idom; és az I. sokszögre az *1—2;* a II. sokszögre pedig a *2—4* oldal lesz az x tengely.



42. ábra.

Néha célszerűbb az adott sokszög *közé* írni egy idomot és ennek oldalait venni rendre x tengelyekül.

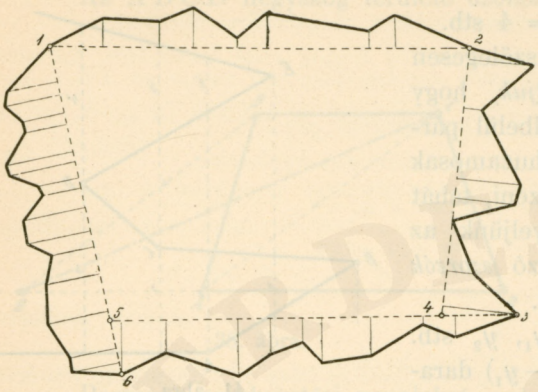
Görbékkel határolt rajzolt idomok területszámilása.

1. Minden görbe határolás tört egyenesekkel való határolásnak tekinthető, ha ügyelünk arra, hogy a görbe vonalat oly kis részekre osztjuk, hogy egy-egy ily kis rész gyakorlatilag még egyenesnek legyen tekinthető.

A területszámitás ekkor a *sokszög területszámitására* van vissza vezetve.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ha a kérdéses idom, csak helyenkint van görbékkel behatárolva, akkor az eljárás csak az marad: a görbe rész nehány húrral le lesz vágva, és az így keletkezett segmentek most elég sűrű felosztással az előbbi módon kezeltetnek. (Lásd 43. ábra.)



43. ábra.

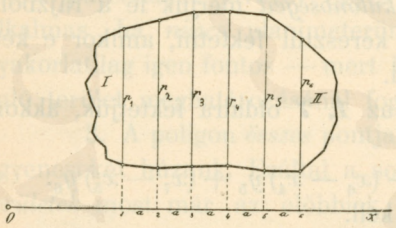
2. *Äquidistánsokkal* való számitás. Ugy görbével határolt segmentek, mint teljesen görbékkel határolt konfigurációk területszámitása lényeges egyszerüsitést enged, ha az ordinátákat (azaz a paralleleket) egymásközt *egyenlő távolban* vesszük fel.

Itt általában két esetet különböztetünk meg:

A. a parallel hálózat aránylag oly sűrű, azaz a sávok oly keskenyek, hogy a levágott görbe vonal darabok már *egyeneseknek* tekinthetők;

B. a levágott görbe vonal darabok nem tekinthetők egyeneseknek, amikor az egyes sávok görbe végződései mint *parabola ivek* lesznek figyelembe véve.

Ad. A. *A trapézformula.* A 44. ábrán a p_1, p_2 . . . p_6 parallelek egymásközti távola = a, azaz:



44. ábra.

$$x_2 - x_1 = a$$
$$x_3 - x_1 = 2a$$
stb.

A *sávokat* — kivéve az I. és II. részt — *trapéznek* tekintve, felírhatjuk a p_1, p_6 közti területre a **18.** képlet alapján:

$$T = a\left(\frac{p_1 + p_6}{2} + p_2 + p_3 + p_4 + p_5\right), \text{ és}$$

általában ha p_1 az első, p_n az utolsó äquidistáns parallelt jelenti:

$$19. \ldots T = a\left(\frac{p_1 + p_n}{2} + p_2 + p_3 + \ldots + p_n - 1\right)$$

Eszerint tehát lemérjük az összes parallelek hosszait, és azokat összegezzük, kivéve az *első* és *utolsó* parallelt, melyeknek csak a fél értéke veendő számitásba.

Az így nyert összeget szorozva az állandó sávszélességgel, adja a T területet. A szabálytalan két segment I. és II. területe külön számitandó: és T-hez adandó.

Egyszerűbb lesz a T képlete, hogyha minden *sáv*nak középparalleljét képzeljük meghuzva.

Ha μ_1, μ_2 . . . μ_{n-1} jelzi ezeknek hosszait, akkor

$$20. \ldots T = a\,(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots + \mu_{n-1}) = a.\ S$$

Ha ezen képlet szerint akarunk eljárni, akkor a sáv határvonalakat — kivéve az *elsőt* és *utolsót* nem is kell kihúzni, csak a μ vonalakat rajzoljuk meg. Evégből meghúzzuk a p_1 vonalat, attól $\frac{a}{2}$ távban a μ_1-et, és most rendre az a-t rakjuk fel ahányszor lehet: végül ismét $\frac{a}{2}$-et, miáltal az *utolsó* parallelt (jelen esetben p_6-ot) nyerjük.

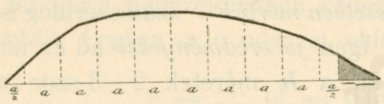
Az I. és II. *segmentek* területeit szintén äquidistánsokkal nyerhetjük. *Kétféle módon:*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

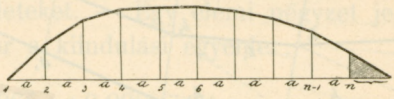
1. ha a p-ket húzzuk ki és mérjük, (46. ábra) akkor a képlet, mivel $p_1 = o$:

21. . . . . $T = a\left(\frac{p_n}{2} + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1}\right)$

de akkor külön kell még számitani egy *kis maradék háromszög* területét;



45. ábra.



46. ábra.

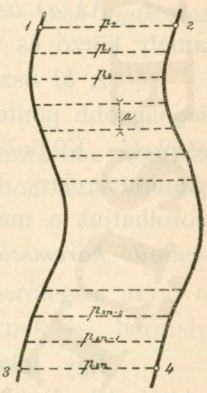
2. ha a μ-ket *húzzuk* ki és azokat mérjük (45. ábra) akkor a 20. képlet érvényes szószerint.

A kis maradékháromszöget itt is külön kell *mérni*.

Megjegyzés. Az a választásánál két szempontot kell figyelembe venni:

1. megfelelő kicsiny legyen ugyan, de túlságosan kicsiny semmi esetre sem.
2. a számításra lehetőleg *kényelmes* kerek szám legyen.

A 20. képleten alapszik az **„Alders planimeter“**, amely a hozzávaló százas körzővel és területi léptékekkel egy gyakorlatilag igen jól, gépiesen használható területszámitó berendezést képez. *Olcsóságánál és minden esetben való használhatóságánál* fogva a magyar országos felmérés ezt az egyszerű eszközt használja általában a részletek területszámítására Egy fémkeretben egyenlő távolban kifeszített különböző színű *lószőrszálak* képviselik a paralleleket. Az μ-ket oly körzővel mérjük folytatólagosan, amely a 100 öleket automatikusan jelzi. Gyorsan és pontosan csak az tud vele dolgozni, akinek *igen nagy* gyakorlata van benne. A különböző színű szálak lehetővé teszik, hogy az idomhoz képest *kisebb* vagy *nagyobb* „a“ értékkel dolgozzunk.



47. ábra.

ad B. „Amikor a sávok által levágott görbe vonal darabok nem tekinthetők egyeneseknek.“

Ilyenkor a *Simpson-féle formula nyer alkalmazást.*

Ennek levezetése felső matematikai ismereteket tételez fel: egészen szigorúan parabola ívecskékre érvényes. A Simpon-féle szabály ez:

Ha görbékkel határolt területből, egymástól a távolban levő parallelekkel sávokat vágunk ki, és feltéve, hogy a *parallelek száma kettővel osztható* (szóval páros számú sávokkal van dolgunk), akkor

$$T = \frac{a}{3}\Big((p_0 + p_{2n}) + 2\,(p_2 + p_4 + p_6 + \ldots + p_{2n-4} + p_{2n-2}) + 4\,(p_1 + p_3 + p_5 + \ldots + p_{2n-5} + p_{2n-3} + p_{2n-1})\Big)$$

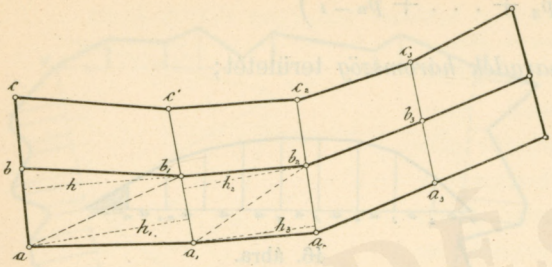
amely szabály igen könnyen fejben tartható, és ugyanazon $\frac{a}{2}$ esetében szabatosabb eredményt ad, mint a trapézformula.

Vegyes területmeghatározás.

Ezen esettel akkor van dolgunk, ha a meghatározandó idomok főméreteinek egy részét a helyszinén megmértük, másik részét azonban a térképből vesszük.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Jellemző példa erre az úgynevezett *szalag parcellák*. Ezek keskeny, hosszú földrészletek közel párhuzamos határolással. (48. ábra.)



48. ábra.

Háromszögekre bontás által történik a számítás.

A h *magasságokat* a *térképen* lemérjük; az *ab, bc,* $a_1 b_1$, stb. *alapokat* — miután azokat a *természetben mértük* — számszerűleg ismerjük.

Igen *jó eredményeket* ad ez az eljárás akkor, ha a h méretek 2—3-szor akkorák, mint az *ab;* $a_1 b_1$; stb. alapok. — Szalagparcelláknál ez tényleg úgy is lesz.

ad. 2. A mechanikus területmeghatározás.

Amidőn elégséges a konfigurációk területeit *térkép* alapján meghatározni — akkor, különösen tömeges munka esetében: *indokolt* a mechanikus területmeghatározás, úgynevezett *planimeterek segélyével.* A planimeterek két csoportba sorozhatók:

a) olyanok, melyek speciálisan *háromszögek, négyszögek* és görbe határolású *segmentek* területmérését engedik célszerűen elvégezni;

b) olyanok, melyek — pusztán a határvonalnak egy mérőcsúcscsal való körüljárása által — *bármely* alakú idomnak területét megadják.

Az *a)* osztályba tartozó eszközökkel a *legjobb esetben* azt a pontosságot érjük el, amely körző és vonalzó segélyével az előbbi cikkekben ismertetett módon elérhető.

A *b)* osztályba tartozó eszközök túlnyomó részével *egyszerű* és *gyors* eljárással a legnagyobb pontosságot érjük el, ami rajzolt idomok területmeghatározásánál *egyáltalában elérhető.* Különösen áll ez a *Coradi* cég (Zürich) által készített legujabb rendszerű planimeterekre. Lássuk először az *a* osztályba tartozó speciális eszközöket: amelyekhez sorolhatjuk a már tárgyalt *Alders* planimetert és a már szintén említett *„kettős terület-számító háromszög"*-et.

I. A négyzetosztású üvegtábla.

Egy tökéletesen *tiszta* és *sík* üveglapon vésett négyzethálózat van. Használata abból áll, hogy a kérdéses konfigurációra fektetjük ezen üveglapot, és megszámláljuk, hány ily négyzetet tartalmaz a konfiguráció; egyes négyzetrészek szemmérték szerint becsültetnek, és az egészhez hozzáadatnak. Lényeges, hogy a négyzetek elég kicsinyek legyenek, és az illető méretaránynak megfelelő kényelmes területi értékkel bírjanak.

Németországban rendesen *millimeter* hálózattal ellátott *üveg* táblákat használnak, melyek nemcsak területmérésre, hanem hosszak mérésére, *koordináta felrakásra* ($\pm$ 0.05 mm-re élesen) is alkalmasak. Ilyen üvegtábla különösen ellenőrző mérésekre és számításra rendkívül alkalmasak. Durvább ellenőrzésre, bármely méretarányhoz 50 fillérért gyártanak erős pauspapiroson ily planimetert. Az *osztrák* gyárak, tisztán területszámításhoz készítenek oly üveglapokat, ahol a négyzet mérete *4 mm.,* miáltal az *1 : 2500* méretarányban (osztrák kataszteri méretarány) egy ily négyzet területe = 100 m² = 1 ár. Készítenek oly négyzethálózatokat is, melyek segítségével az *1 : 2880* méretarányban egy négyzetnek ugyancsak egy *ár* felel meg. Itt az oldalhossz = *3.472 mm.*

Ha 1 : 2880 méretarányhoz akarunk *négyzetölekben,* illetve *holdakban* számoló négyzethálózatot készíteni, akkor célszerű az elemi négyzet területét $^1/_{100}$ hold = *16 négyzetölnek*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

választani: egy négyzetnek oldalhossza tehát 4-öl az 1 : 2880-as vonalzón mérve, aminek *2.634 mm* felel meg: tehát oly méret, mely még nem szemrontó, illetve zavaró. Minden 5-ik ily négyzet vastagabb — vagy szines — vonallal volna kihuzandó.

Igen célszerű ily négyzethálózatokat, ellenőrző számítások céljaira erős, átlátszó papiron szerkeszteni.

Feladat: Szerkesszünk oly négyzethálózatot, melynek segítségével 1 : 500 méretarányú térképről négyzetölekben vehessük le a területeket. — Egy elemi négyzet jelentsen 1 négyzetölt. Legyen x e négyzet oldalhossza, akkor a kiindulási egyenlet:

$$x = \frac{1}{500} \text{ öl} = 0.002 \text{ öl} = (1.8965 \times 0.002) \text{ méter}$$

$$x = \mathbf{3.7930\ mm.}$$

Feladat: Az *1 : 720* méretarányhoz oly négyzethálózatot, hogy az elemi négyzet területe *9 m²* legyen.

Tehát az elemi négyzet oldalhossza 3 méter a természetben, azaz 3/720 méter a térképen:

$$x = \frac{3000}{720} \text{ milliméter} = 4{\cdot}16\ mm.$$

Ezen példák nyomán akármily méretarányú térképhez akár *öles,* akár *méteres* rendszerű célszerű négyzethálózatot szerkeszthetünk. Ajánlom is ily *ellenőrző* hálózatok készítését.

Szabatos osztású négyzethálózattal az *Alders* planimeternél megbízhatóbban lehet sok esetben területméréseket végezni.

De a gyors, biztos munkához — akár az Alders planimeternél — *sok gyakorlat szükséges.*

II. A hyperbola tábla.

Ugy az eredmények megbízhatósága, mint a munka gyorsasága tekintetében *legalább is egyenrangú* az Alders planimeterrel; azonban csak háromszögekre bontható idomok területmérésére alkalmas.

Az alapelve a következő:

Minden olyan hyperbola, amelynek két asymptotája egymásra merőleges, avval a tulajdonsággal bír, hogy — a két asymptotát választva x és y tengelynek — bármely pontjának koordinátáira áll ez az egyenlet

$$x_1\ y_1 = x_2\ y_2 = \ldots = x_i\ y_i = C,$$

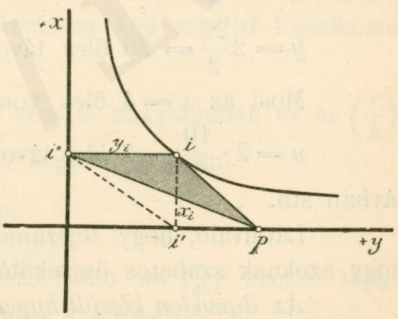
ahol **C egy állandó szám,** melyet az illető hyperbola *„területi parameterének"* nevezünk.

A 49. ábrából kitünik, hogy az

$$\frac{x_i\ y_i}{2} = \frac{C}{2} \text{ érték}$$

nem egyéb, mint az ($i\ i''\ i'$) háromszög területének mérőszáma.

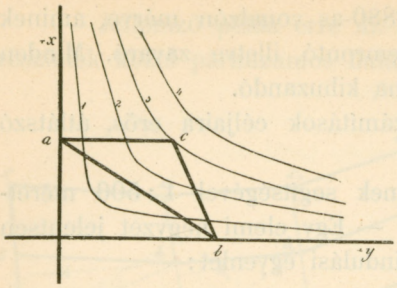
De egyszersmind területi mérőszáma a ($Pi''\ i$) háromszögnek is, ahol a P pont az y tengely bármely pontja. Ezért alkalmas egy ily hyperbola sereg *háromszögek gyors területmérésére.*



49. ábra.

Ha ugyanis átlátszó papirra, vagy üvegtáblára egy és ugyanazon $+x$, $+y$ derékszögű asymptota párhoz tartozó ily hyperbola sereget szerkesztünk és mindegyik hyper-

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

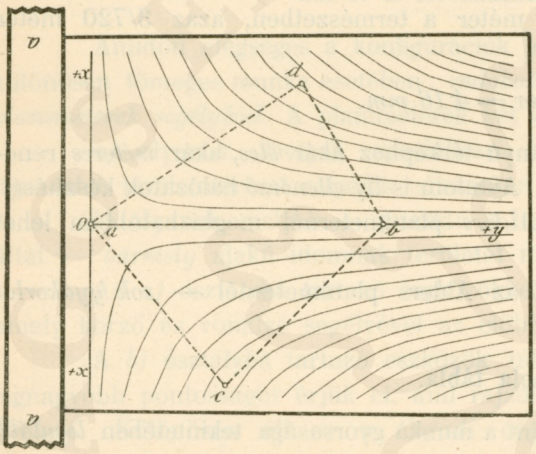


50. ábra.

bolához írjuk a megfelelő $C/2$ értéket, akkor (50. ábra) az ***a, b, c*** háromszög területét a ***c*** pontnál direkt leolvashatjuk, ha a táblát úgy *mozgatjuk* és *forgatjuk,* hogy az ***a*** és ***b*** pontok a $+ x$ és $+ y$ tengelyekre kerüljenek, az $a\,c$ oldal pedig párhuzamos legyen $+ y$-al.

Ha a ***c*** pont ekkor nem esik hyperbolára, akkor a két szomszédos hyperbolára írt területi értékek között egyszerűen interpolálunk. A hyperbolákat ezért sűrűn kell megrajzolni.

Legjobb ilynemű területmérő a *„Koth-féle hyperbola“* tábla.*) Ezen üveges hyperbola tábla *két* symmetrikusan fekvő, számozott hyperbola sereggel van ellátva. (51. ábra.) Az üveglap szélei, pontosan párhuzamosak az x és y asymptota irányokkal. Az — *a, b, c, d* négyszög (két szomszédos háromszög) területe a következő módon lesz mérve:



51. ábra.

1. Úgy fektetjük az üvegtáblát az idomra, amint azt az ábra mutatja: és az üvegtáblához illesztjük ekkor a $v—v$ súlyos fémvonalzót.

2. Most a vonalzóhoz illesztve addig toljuk lefelé az üvegtáblát, amig a $+ y$ tengely a ***c*** pontot metszi.

Ekkor a ***b*** pontnál leolvassuk a megfelelő hyperbolán az $a\,b\,c$ háromszög területét.

3. Most felfelé toljuk el a $v—v$ vonalzó mentén az üvegtáblát, amig $a + y$ tengely a ***d*** ponton megy át. A területet ismét ***b*** pontnál olvassuk le.

Bárki készithet azonban magának erős átlátszó papiron ily táblázatot. Pl. az 1 : 2880 méretarányhoz akarunk ilyent készíteni.

a) Megszerkesztjük a két tengelyt: szigorúan merőlegesen egymásra.

b) Az x tengelyre rakunk fel 2—2 öles közöket az 1 : 2880 vonalzó segélyével.

c) Ha a $c/_2 = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80$ stb. négyzetölnek megfelelő hyperbolákat akarjuk megszerkeszteni, akkor az $x = 2$ öles vonalon a 10-es hyperbola pontja az

$$y = 2\frac{10}{2} = 10$$ öles távolban lesz x-től, a 20-as hyperbola pontja az

$$y = 2\frac{20}{2} = 20$$ öles távolban lesz stb.

Most az $x = 4$ öles vonalat húzzuk meg, és ezen a 10-es hyperbola pontja az

$$y = 2 \cdot \frac{10}{4} = 5$$ öles távolban lesz x-től; a 20-asé 10 öles távban, a 30-asé 15 öles távban stb.

Látnivaló, hogy fejszámolással nyerhetők az összes hyperbolák pontjai oly *sürün*, hogy azoknak szabatos összekötése által pontosan megszerkeszthető a görbesereg.

Az ilymódon készült hyperbola tábla az Alders planimeterrel mért területek ellenőrzésére igen célszerűen felhasználható, persze csakis háromszögekre bontható idomokra nézve.

*) Ára a *Reiss* cégnél nagyság szerint 9—14 korona.

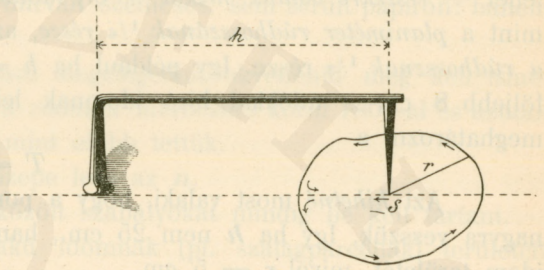
© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

III. A Prytz-féle rudas-planimeter.

Ezen bámulatosan *egyszerű*, és *olcsó* eszközt Prytz H. dán százados már *1886-ban* találta fel: de a mai napig sem használják még nálunk a gyakorlatban.

Pedig ezen olcsó és egyszerű műszerrel, ***10***-től ***90*** négyzetcentiméterig terjedő idomok területei, ha az alább közölt szabályokat szigorúan betartjuk: *megbízhatóbban lehet meghatározni, mint az äquidistáns szál planimeterrel, sőt megbízhatóbban mint a Simpson féle eljárással.***)

Mint az 52. ábra mutatja, e planimeter lényege egy fémrúd, amelynek egyik végén van a függőleges mérőcsúcs, a másik vége a rúdnak pedig le van görbítve és egy *íves, élesre* köszörült vágó élben végződik. A területmérés ezen eszközzel úgy történik, hogy a mérőcsúcsot az idom súlypontjába (az ábrán az *S* pont) helyezzük, és ugyanakkor kissé lenyomjuk a planimeter másik végét úgy, hogy ezáltal a *vágó él* gyenge, éles nyomot adjon a papiron. Most a csúcsot gyengén fogva körüljárjuk a mérőcsúcscsal az idomot, amint azt a nyilak mutatják. Midőn ilymódon a csúcscsal ismét az *S* pontba jutottunk, akkor a vágóélt ismét *lenyomjuk* kissé. A szóban forgó idom területét ezen gyakorlati képlettel fogjuk számítani:



52. ábra.

1. . . . . $T = n.\ h,$

ahól h a *rúdhosszt*, azaz a mérőcsúcsnak a vágóél központjától való távolságát jelenti; n pedig a vágóélnek előbb említett kétszeri megnyomásából nyert két *éles nyom* központjainak egymástól való távolsága: a *melyet pontos mércével lemérünk.*

Az 1. alatt közölt képlet azonban *nem szigorú.*

A szigorú képlet ugyanis:

$$T = n.\ h + e,$$

ahol e-t *„elhanyagolásnak"* nevezzük, amely e, feltéve hogy kiindulási pontunk a *súlypont vagy hozzá közelfekvő pont:*

2. . . . . $e = \frac{(n.\ h)}{4}\left(\frac{r^2}{h^2}\right)$, amely képletben

az r a kiindulási pontunkból az idom kerületi pontjaihoz húzott radiusok *átlagos* hosszát jelenti. Ez a planimeter gyakorlatilag nem érne semmit, ha az e-t, amely mint látjuk az idom *alakjának,* és *méreteinek* függvénye, minden esetben ki kellene számítani és figyelembe venni. Ezért a *2.* képletnek nincs gyakorlati értéke, de tüzetesen kell vele itt foglalkozni és kimutatni: mekkora adott esetben az e elhanyagolás!

Ez, miként a *2.* képlet mutatja, függvénye az $(n.\ h)$ szorzat nagyságának és az $\left(\frac{r}{h}\right)$ viszony nagyságának. Mivel itt $n.\ h = T$ irható, azért a *2.* képlet igy alakul:

$$e = \text{elhanyagolás} = T \cdot \left(\frac{r}{2h}\right)^2.$$

Ha T helyébe 100 területegységet képzelünk ideírva, akkor az $\left(\frac{r}{2h}\right)^2$ szorzó megadja, hogy bármely esetben az e elhanyagolás hány százaléka a területnek.

**) Érdekes munkát végezne az a kataszteri felmérési tisztviselő, aki nagyszámú ilynemű összehasonlító méréseket eszközölne!

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ha a szóban forgó idom *átlagos radiushossza* a *rúdhossznak* $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, akkor az elhanyagolások nagyságai a terület százalékaiban kifejezve:

$$100\left(\frac{1}{20}\right)^2 = \frac{100}{400} = \mathbf{0.25}\%$$

$$100\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{100}{100} = \mathbf{1.00}\%$$

$$100\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{100}{36} = \mathbf{2.8}\%$$

Amiből következik, hogyha 1%-nál többet nem akarunk elhanyagolni, akkor nem lehet — *részekre bontás nélkül* — oly idomot mérni, *amelynek átlagos rádiushossza* nagyobb, mint a *planiméter rúdhosszának* $^1/_6$ *része*, azaz *amely idomnak leghosszabb átlója legföljebb a rúdhossznak* $^1/_3$ része. Igy például ha $h = 25$ *cm*, (ekkora az eredeti Pritz) akkor legföljebb **8** cm-es átlókkal biró idomnak lehet 1%-nál kisebb elhanyagolással a területét meghatározni a

$$T = n \,.\, h \text{ képlettel.}$$

Azt *hihetné* most valaki, hogy a pontosságot a ∞-ségig fokozhatjuk, ha a h-t igen nagyra vesszük. Igy ha h nem 25 cm., hanem = 50 cm., akkor egy **10** cm.-es átlójú idom területét, mivel $r = 5$ cm.,

$$100\left(\frac{5}{2.50}\right)^2 = \frac{100}{400} = \mathbf{0.25}\%\text{-ra,}$$

vagy egy **6** cm.-es átlójú idomot:

$$100\left(\frac{3}{2.50}\right)^2 = \frac{100\,.\,9}{10.000} = \frac{9}{100} = \mathbf{0.09}\%\text{-ra}$$

pontosan lehetne mérni. Távolról sem! Az e tényleg kicsiny lesz, de *nagy lesz* ezáltal a *másik hibaforrás:* az n pontatlan leméréséből eredő hiba!

Ugyanis az n méret lefogása $\pm$ 0·1 milliméterre lehet mindenkor hibás. Ha $h = 100, 150, 200, 250, 500$ *mm*, akkor ezen egytized milliméteres hiba hatása a T értékre nézve:

(0·1) $h =$ **10** mm², illetve **15** mm², illetve 20, 25, 50 mm², tekintet nélkül arra, hogy *kicsiny* vagy **nagy** idomot mértünk-e?

Ha 1, 2, **stb.** négyzetcentiméteres idomokat mértünk ily ($h = 100, 150, 200, 250, 500$ mm) *különböző karhosszakkal*, akkor az n hibájából eredő területi hibák százalékokban kifejezve:

$T =$ 1 cm²	esetében:	*10%*,	15%,	20%,	25%, 50%
$T =$ 2 cm²	„	5%,	7·5%,	10%,	12·5%, 25%
$T =$ 10 cm²	„	1%,	1·5%,	2·0%,	2·5%, 5·0%
$T =$ 30 cm²	„	0·3%,	0·5%,	0·7%,	0·8%, 1·7%

Minél **rövidebb** a rúdhossz, annál élesebb — %-okban kifejezve — az *eredmény*, ha csak az n hibáját vesszük *figyelembe*. Viszont az e-t véve figyelembe, a *hosszú* kar kivánatos. A legjobb eredményeket tehát akkor érjük el, ha mindenkor egy helyes *középúton* haladunk. Ez pedig csak úgy érhető el, ha *a rúdhossz változtatható:* azaz ha vagy a vágóél vagy a mérőcsúcs *tolhatólag és rögzíthetőleg van a rúdra erősítve.* Ha ilyen planimeterrel rendelkezünk és ügyelünk arra, *hogy a kar sohasem legyen hosszabb mint az idom átlagos átlóhosszának háromszorosa* (de rövidebbre sem fogjuk venni), akkor 8—10 négyzetcentiméteres idomok területét is $\pm$ 1%-ra megbízhatóan lehet mérni. 30—40 négyzet cm.-es idomterületeit még élesebben nyerjük. Azonban 8 négyzetcentiméternél kisebb idomok területét **2—3**% átlagos megbizhatósággal fogjuk ily módon meghatározhatni: — mert a rúdhossz 4—6 cm.-nél *rövidebbre már nem vehető, még ha külön súlyokkal terheljük is a vágóélt*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Az itt kimutatott megbízhatóságot azonban csakis akkor érjük el, *hogyha a következő szabályokat tartjuk szem előtt:*

1. *Kiindulási* pont legyen az idom súlypontja illetve valamely hozzá közel fekvő pont; — a planimetert pedig oly *irányba állítsuk*, amely irány két lehetőleg egyenlő részre osztja az idomot területileg.

2. A körüljárás alatt a *mérőcsúcsot egészen könnyedén kell két ujjal, alul fogni,* nehogy esetleg a rúdra oly oldalnyomást gyakoroljunk, mely a *vágóélt* — amely a mérőcsúcs utjának *üldöző görbéjét* írja le — haladási irányára merőleges irányban csak egy gondolatnyival is kimozdítjuk.

3. Ugyanezen okból a vágóélnek sem durván szemcsés, sem sérült papiron: hanem *tiszta, síma* síkon kell mozognia.

4. Sohasem szabad egyszeri körüljárással megelégedni: okvetlenül meg kell ismételni a mérést, még pedig előbb forgassuk el a rudat a mérőcsúcs körül 180°-al és azután járjuk körül az idomot ugyanazon értelemben mint előbb tettük.

A nyert n_1 és n_2 értékek számtani közepe lesz az n.

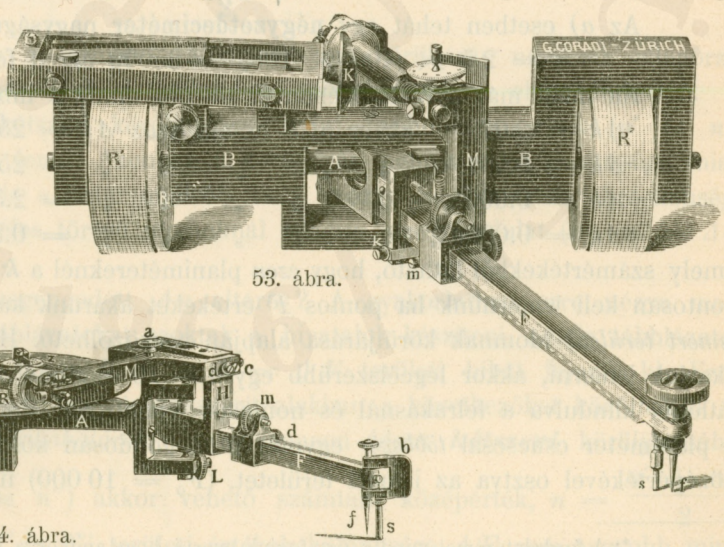
Ismételve hangsúlyozzuk, hogy az itt közölt szabályokat mindig be kell tartani.

Abban az esetben, ha sok *hasonló* alakú idomnak (pl. szalagparcellák) területeit meg akarjuk határozni, akkor egy ily idomnak határozzuk meg valami uton módon a területét (T), most járjuk körül kétszer ezen idomot rudas planimeterünkkel és a nyert n értékkel osszuk el az ismert (T) értéket. Nyerjük a h értéket — melyben már kifejezésre jut az e tag is: azaz *ezen* h-t használva **ezen** tipusu területekre az e hatásától *hibamentesített* területi értékeket nyerünk.

A Prytz planimeter vizsgálatánál csak azt kell megállapítani, hogy a *vágó él síkja* keresztül megy-e a mérőcsúcson. Ez elengedhetetlen feltétel. Ujabban vágó él helyett, **éles, forgó** kis fémkorongot is alkalmaznak. Az eredmények azonban ezáltal nem lesznek megbizhatóbbak.

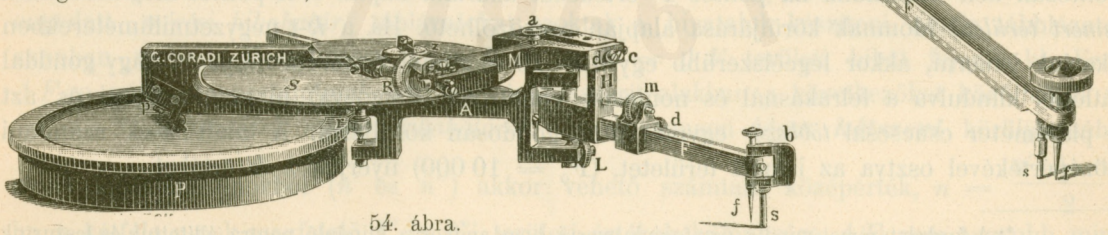
A Coradi-féle planiméterek.

Rajzolt idomok területeit semmiféle eljárással nem lehet megbizhatóbban meghatározni, mint az 53. ábrán látható Coradi-féle *„gömbplaniméterrel"* vagy az 54. ábrán átható Coradi-féle *„szabatos korong"*-planiméterrel.*)



53. ábra.

A gömbplaniméterrel *30 centiméter* széles és tetszőlegesen hosszú idom, a



54. ábra.

*) Az előbbinek gyári neve *„Kugelrollplanimeter"*, az utóbbinak neve pedig *„Präzisions-Scheibenplanimeter."*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

korongplaniméterrel 25 centiméter hosszú és 20 centiméter széles négyszögbe férő bármely idom területét lehet egyszerre megmérni.

Mindkét planiméternél a területmérés abból áll, hogy az 53. és 54. ábrákon *f* betüvel jelzett *„mérőtűt“* a mérendő idom *határvonalának* egy tetszőleges (megjelölt) pontjára állítva és az *s* (illetve *s* és *b*-vel jelölt) fogantyut két ujjal megfogva, körülvezetjük a *„mérőtűt“* az idom határvonalán, míg ismét a kiindulási pontba jutunk. Ezalatt a szerkezetnek úgynevezett *„mérőkereke“* (az 54. ábrán az *S* körlapon gördülő *R* kerék, az 53. ábrán pedig a *K*-val jelzett gömbszelettel érintkező vízszintes *fémhenger*) tengelye körül elfordulásokat végez, amelyek algebrai *összege*, *egy ezred elfordulásig pontosan*, a mérőkerékkel (hengerrel) kapcsolt számláló készüléken leolvasható.*) Ha *n* jelenti az elfordulások számát mialatt a *T területű* idomot körüljártuk, akkor a

1. . . . . $F = n\,k$

egyszerű képlet adja absolut szigorúan a körüljárt idom területi mérőszámát.

A képletben szereplő *„k“*-tag *„szorzó állandónak“* neveztetik: és jelenti az $n = 1$-nek, azaz az *egy ezred mérőkerék fordulatnak megfelelő területet.* (Coradi a *k*-t *„Wert der Noniuseinheit“*-nak nevezi azért, mert az *ezred* fordulat a számlálókészülék noniusának egysége).

Ezt a ***k*** szorzó állandót kell ismernünk, ha a planiméterrel területet akarunk mérni. Még pedig igen pontosan kell a ***k***-t ismernünk, mert egy minimális Δk hibának nagy ΔT területi hiba felelhet már meg nagy idom esetében. A kétféle **Coradi** planiméternél a *k* értéke ***0.4 és 2.0*** négyzetmilliméter között változik illetve ezen határok között fekvő bármely értéket veheti fel. A két szélső eset tehát

$$F = n \times 0{\cdot}4, \text{ illetve}$$
$$F = n \times 2.0$$

Tehát a fordulatszám (egység az ezred fordulat) ezen képletből nyerhető a két szélső esetben:

a) . . . . . $n_{max.} = \dfrac{F}{0{\cdot}4} = \dfrac{10\,F}{4} = \mathbf{2{\cdot}5\ F.}$

b) . . . . . $n_{min.} = \dfrac{F}{2}$.

Az *a)* esetben tehát egy **négyzetdeciméter** nagyságú idomnak

$n = 2.5 \times (100 \times 100) = 25000$ ezred fordulat felel meg.

Ha most már a ***k*** értékében ($k = 0.4$ mm²) a hiba

$\Delta k = 0.01$, akkor a T hibája azaz $\Delta t = 25\,000 \times 0.01 = 250$
$\Delta k = 0.001$, „ „ „ „ „ „ $= 25\,000 \times 0.001 = 25$
$\Delta k = 0.0001$, „ „ „ „ „ „ $= 2.5$ mm²
$\Delta k = 0.00001$, „ „ „ „ „ „ $= 0.25$ mm²,

amely számértékekből látható, hogy *ezen* planiméthereknél a ***k*** értékét legalább is $\pm$ **0.0001**-re pontosan kell ismernünk ha pontos F értékeket akarunk kapni. A ***k*** pontos meghatározása *ismert területű* idomnak körüljárása alapján eszközölhető. Ha a ***k***-t négyzetmilliméterekben akarjuk ismerni, akkor legcélszerűbb egy 10—10 centiméter méretű *négyzetet* nagy gonddal (átlóból kiindulva a felrakásnál és noniusos vonalzóval dolgozva) megszerkeszteni és azt a planiméter csúcscsal *többször* egymás után gondosan körüljárni. A talált *n*-ek számtani középértékével osztva az ismert területet, ($F_0 = 10\,000$) nyerjük a ***k*** értéket.

*) A fordulatszámot mindig úgy fogjuk nyerni, hogy amikor a kiinduló pontra állítottuk és leszurtuk a mérőtűt, ugyanakkor leolvassuk a számlálókészülék állását (például 3462); azután körüljárva az idomot a kiinduló pontba érve leolvassuk ismét a számláló készülék állását (például 5645). A két leolvasás különbsége adja a keresett elfordulási számot, amely mindig *positiv*. (Példánkban $n = 5645 - 3462 = 2183$.)

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ha a k értéket az 1 : 2880 méretarányra vonatkozólag akarjuk ismerni, úgy egy 200—200 öl (5 hüvely) méretű négyzetet készítünk:

$F_0 = 25$ hold $= 25 \times 1600$ négyzetöl és ezt az idomot járjuk körül. F_0/n adja a k-t négyzetölekben e méretarányra.

Az F_0/n osztást az 5-ik decimálisig kell mindig elvégezni!

Igen kellemetlen művelet volna azonban a mechanikus területmérés, hogyha a k érték egy öt decimálist tartalmazó szám volna. Mivel ugyanis n általában nagy szám lesz, az $n \times k$ szorzat számológéppel vagy 5—6 számjegyű logaritmus könyvvel volna minden esetben számítandó. Ezt elkerülendő mindkétféle planiméter szerkezet úgy van kieszelve, hogy a k szorzó állandó (bizonyos határok között) tetszőleges *kerekszámú* értékké tehető.

Például $k = 0{\cdot}5$ mm², $k = 1.0$ mm², $k = 2.0$ mm² vagy 1 : 2880 méretarányra vonatkoztatva elérhető a $k = 1.0$ négyzetöl, $k = 1.6$ négyzetöl, $k = 2.0$ négyzetöl

Ily módon az n. k szorzat fejszámolással lesz nyerhető.

A k kerekszámmá tételének gyakorlati eljárásait itt **a 6. pontban** fogjuk tüzetesen ismertetni; tehát a továbbiakban feltételezhető, hogy a k egy *ismeretes, kerekszámú érték.* Ezt feltételezve **utasításul** ismertetjük a Coradi planiméterrel való területmérés szabályait.

1. Nincs egyetlen geodéziai műszer, amely oly kényes, subtilis szerkezetű volna, mint a Coradi-féle planiméterek. Egyetlen hibás, durva fogással, ütődéssel, lökéssel a szerkezetet *minden időre pontatlanná tehetjük.* Ugyancsak tönkre tehetjük az eszközt, ha *gyorsan járjuk* körül az idomokat: eltekintve attól, hogy gyors körüljárással *szerkezeti okokból,* (szóval ha a határvonalon maradunk is gondosan a tűvel), *rossz* eredményeket kapunk. *Tíz másodperc alatt 5 centiméteres egyenletes haladás a mérőtűvel az a gyorsaság, amely begyakorolandó.* Éles törésű idomoknál a töréseknél még lassabban történjék a körüljárás.

2. Minden területmérés *kétszeri körüljárással* történjék: még pedig először az óramutató járásával egyező értelemben, *másodszor mindig ellenkező értelemben* kell az idomot körüljárni. A két körüljárásnak megfelelő fordulatszámokból (n' és n'') vett számtani középérték

$$n = \frac{n' + n''}{2}$$

adja k-val szorozva pontosan a területet. A másodszori körüljárás nemcsak ellenőrző, hanem *szerkezeti* okokból (azért *ellenkező* értelemben) szükséges illetve elengedhetetlen.

Elméletileg véve, a kétszeri körüljárással nyert fordulatszámoknak (n' és n'') szigorúan egyenlőknek kellene lenni. Azonban a körüljárás nem absolut pontossága miatt (hol befelé, hol kifelé térünk le a határvonalról) és a mozgó szerkezetnek tehetetlensége folytán mindig, de különösen éles törésű idomoknál *néhány ezred* fordulat ($n' - n'' = \Delta n$) eltérés fog jelentkezni.

Kérdés: mekkora a megengedett Δn eltérés? A gyakorlatban erre nézve megengedett *„mérési hibahatár"* táblázatokat szoktak a hivatalok készíteni, amely táblázatok azonban nem a Δn, hanem az $n'k - n''k = \Delta F$ területi hibát fejezik ki. Ezen ΔF-re nézve tapasztalataink alapján utasításszerű alakban a következőket közölhetjük.

3. Megengedett mérési hibahatárok. Az ugyanazon idom ***kétszeri*** körüljárásából nyert fordulatszámokból (n' és n'') akkor vehető számtani középérték, $n = \frac{n' + n''}{2}$, ha a kétféle n-nek megfelelő F' és F'' területi értékek különbsége ΔF nem nagyobb mint:

1. . . . . $\Delta F = 2k + 0.15\sqrt{F}$,

amely ***általunk*** tapasztalati adatok (kísérletsorozatok) alapján felállított képletben ΔF,

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

k és F ***négyzetmillimétereket*** jelentenek. Mivel a k érték a Coradi-féle szerkezeteknél ***0.4*** mm² és ***2.0*** mm² között váltakozhatik a karbeállítás szerint, azért átlagban a $k = 1.0$ mm²-nek vehető és így a gyakorlati képlet:

$$2. \quad \Delta F = 2.0 + 0.15 \sqrt{F},$$

amely számtáblázatok készítésére felhasználható.

Például: az *1 : 1000* méretarányban a térképen 1 mm²-nek a természetben 1 m² felelvén meg, a 2. képlet ezen méretarányra nézve *négyzetmétereket* jelent. Eszerint

Méretarány 1 : 1000.

F	ΔF	Alders planimeterre nézve osztrák utasítás szerint
1 00 m² . . .	$2 + 0.15 \times 10 = 3.5$ m² . .	—
4 00 m² . . .	$2 + 0.15 \times 20 = 5.0$ m² . .	4.4 m²
9 00 m² . . .	$2 + 0.15 \times 30 = 6.5$ m² . .	6.9 m²
16 00 m² . . .	$2 + 0.15 \times 40 = 8.0$ m² . .	9.6 m²
25 00 m² . . .	$2 + 0.15 \times 50 = 9.5$ m² . .	12.5 m²
36 00 m² . . .	$2 + 0.15 \times 60 = 11.0$ m² . .	15.6 m²
49 00 m² . . .	$2 + 0.15 \times 70 = 12.5$ m² . .	18.9 m²
64 00 m² . . .	$2 + 0.15 \times 80 = 14.0$ m² . .	22.4 m²
81 00 m² . . .	$2 + 0.15 \times 90 = 15.5$ m² . .	26.0 m²
1 00 00 m² . . .	$2 + 0.15 \times 100 = 17.0$ m² . .	30.0 m²
4 00 00 m² . . .	$2 + 0.15 \times 200 = 32.0$ m² . .	80.0 m²
9 00 00 m² . . .	$2 + 0.15 \times 300 = 47.0$ m² . .	150.0 m²

Például: az *1 : 500* méretarányra nézve, mivel itt *1 mm²*-nek a természetben $^1/_4$ m² felel meg, az 1. képletben — ha négyzetmétereket akarunk bevezetni — a ΔF, k és F számokat 4-el kell *szorozni*. Lesz tehát:

$$4. \quad \Delta F = 2\ k.\ 4 + 0.15 \sqrt{4\ F}$$

azaz:

$$\Delta F_{(m^2)} = 2\ k_{(m^2)} + 0.075 \sqrt{F_{(m^2)}}$$

Mivel a k érték 0.5 mm² $= {}^1/_8$ m² és 2.0 mm² $= {}^1/_2$ m² között változik, azért az 1 : 500 méretarányra átlagban k-ra $^1/_4$ m²-et téve, a képlet:

(Méretarány: 1 : 500.) $\Delta F = 0.5 + 0.075 \sqrt{F}$ négyzetméterekben.

Például: Vezessük le az 1. képletet az 1 : 2880 méretarányra, és fejezzük ki ΔF, k és F-et négyzetölekben.

Mivel a térképen 1 mm²-nek a természetben $(2880)^2 = 8.2944$ m² felel meg, ez pedig

8.2944 : 3.5967 $= 2.36$ négyzetöllel egyenlő, azért az 1. képletben ha ΔF, k és F helyébe négyzetöleket helyettesítünk, minden számot 2.36-al el kell osztani azaz:

$$\frac{\Delta F}{2.36} = \frac{2\ k}{2.36} + 0.15 \sqrt{\frac{F}{2.36}}$$

$$\Delta F = 2\ k + \frac{0.15 \times 2.36}{1.55} \sqrt{F} = 2\ k + 0.23 \sqrt{F}.$$

Tekintettel arra, hogy általában $k = 1$ négyzetöl állandóval dolgozhatunk, a gyakorlati képlet:

$$3. \quad \ldots \quad (\text{Méretarány } 1 : 2880);\ \Delta F = 2 + 0.23 \sqrt{F}.$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Látnivaló, hogy ezen képlet általában még kisebb hibahatárokat ad mint a „*Felmérési Utasítás*“ minták és mellékletek kötetének 7. számú számtáblázat *első oszlopa*.

Tehát a *Coradi*-planimeterek a magyar kataszteri felmérésnél a *részletes területszámításokra feltétlenül alkalmazhatók lesznek*.

A 3. képlet szerint a ΔF táblázat fő értékei a következők:

F	ΔF	Magyar kataszteri utasitás szerint
100 □-öl	4.3 □-öl . .	3 □-öl
400	6.6 . .	6
900	8.9 . .	9
1600 = *1* hold	11.2 . .	12
2500 = *1* „ 900 □-öl	13.5 . .	15
3600 = *2* „ 400 „	15.8 . .	18
4900 = *3* „ 100 „	18.1 . .	21
6400 = *4* „ —	20.4 . .	24
8100 = *5* „ 100 „	22.7 . .	27
10000 = *6* „ 400 „	25.0 . .	30
40000 = *25* „ —	48.0 . .	80

Ha nem 1 : 2880, hanem 1 : 1440 a méretarány és a ΔF, k és F négyzetölekben fejeztetik ki, akkor

$$\Delta F = 2\,k + 0.125\,\sqrt{F},$$

ha 1 : 720 a térkép méretaránya, úgy

$$\Delta F = 2\,k + 0.0625\,\sqrt{F}$$ a mérvadó képlet.

4. *A papiros méretváltozásának figyelembe vételére* igen nagy gond fordítandó.

Ugy az egyszerű rajzpapiros, mint a kartonlap a nedvesség és szárazság behatása folytán méreteit igen érezhetően változtatja. Általában 1000 milliméteres rajzolt hossznál *2—6 milliméterig* terjedő hosszváltozásra számíthatunk.

Minimális méretváltozást szenved a térkép, ha *aluminium* — vagy *horgonybádog* lemezre van a papiros ragasztva. (A lemez *mindkét* oldala ragasztandó.)

Minden körülmények között eltekinthetünk a papir méretarány változásától, hogyha a térkép üveglemezre ragasztott papiron készült. Az üveglemez, hogy törés, ütődés ellen védve legyen, erős fakeretbe foglaltatik.

Tapasztalat szerint a papiros a különböző irányokban *különbözően változtatja méreteit*, a területszámításnál azonban elegendő a szelvénykeret irányokban való méretváltozást figyelembe venni. A szelvénykeret irányokat *főirányoknak* nevezve: határozzuk meg e két főirányban a *percentuális méretarány változást*.

Ha az y (kelet-nyugat) irányban az eredeti szelvényhossz h megrövidült Δh mérettel és ha az x (észak-déli) irányban a szelvényszélesség sz megrövidült Δs mérettel (ami noniusos fémvonalzóval mérhető) akkor a *percentuális* rövidülések lesznek:

$$y \text{ irányban } p\,\% = \frac{\Delta h \times 100}{h}$$

$$x \text{ „ „ } q\,\% = \frac{\Delta s \times 100}{h}$$

Részletes területszámitás esetében a $p\,\%$ és $q\,\%$ értékek *naponta* meghatározandók az illető szelvényre nézve.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Például $h = 1000$ öl helyett most $h' = 995$ ölnek és $sz = 800$ öl helyett most $sz' = 798$ ölnek találjuk a szelvénykeretet, akkor

$$p = \frac{5 \times 100}{1000} = 0.5\,‰.$$

$$q = \frac{2 \times 100}{800} = 0.25\,‰.$$

Képezzük a $p + q$ összeget

$$(p + q) = \mathbf{0.75}$$

Be lehetne most már bizonyítani, hogy akármilyen alakú, fekvésű és terjedelmű idom, akár a *térképről lemért* méretek szorzása által, akár Coradi planimeterrel való körüljárás által mértük meg a területét e térképen, pontosan $(p + q)‰$-os javítást igényel. Tehát ha F jelenti a *talált* területet, akkor a *valódi* terület:

$$1. \ldots\ldots\ldots\ldots (F) = F + \left(\frac{p + q}{100}\right) F$$

tehát a jelen példában:

$$(F) = F + \frac{0.75}{100} \times F.$$

Például: $F = 3462$ négyzetöl esetében a valódi terület

$$(F) = 3462 + \frac{3462 \times 0.75}{100}$$

$$= 3462 + 25.97 = 3487.97 \text{ négyzetöl.}$$

$$= 2 \text{ hold } 288 \text{ négyzetöl.}$$

A magyar országos kataszteri felmérésnél a $h = 1000$ öl és $sz = 800$ öl szelvénykeret méretrövidülését lemérve, képezik a $(\Delta h \times sz) + (\Delta s \times h)$ szorzatok összegét, és azt elosztva a szelvényterülettel (500 hold) megvan a **holdankinti** területjavítás. A holdankinti területjavítás 16-al osztva adja a 100 □ ölre eső javítást. Például: a mérés a szelvénykeretre a $\Delta h = 5$ öl és $\Delta s = 2$ öl rövidülést mutatta; tehát

$$\Delta h \times sz = 5 \times 800 = 4000 \text{ □ öl}$$

$$\Delta s \times h = 2 \times 1000 = 2000 \text{ □ öl}$$

tehát *500 holdra:* összesen 6000 □ öl

és így *egy hold* papirbeszáradása:

$$6000 : 500 = \mathbf{12} \text{ □ öl;}$$

tehát *100 □ öl* beszáradása:

$$12 : 16 = 0.75 \text{ □ öl.}$$

Ha tehát egy idomot körüljártunk planimeterrel, és azt találtuk, hogy

$$F = 3462 \text{ □ öl} = 2 \text{ hold } 262 \text{ □ öl,}$$

akkor a valódi terület

2 hold javítása $= 2 \times 12 = 24$ □ öl

200 □ öl „ $= 2 \times 0.75 = 1.5$

62 „ „ közel 0.5

és így a valódi terület = 2 hold 288

amely érték *az 1. képlet szerint számítottal egyezik.*

A planimeterekkel való területmérésnél a papirméret változást mindig ilymódon fogjuk figyelembe venni. Ezt azért hangsúlyozzuk, mert lehetne — miként látni fogjuk — a planimeter k értékét mindig úgy szabályozni, hogy az

$$F = n.\ k$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

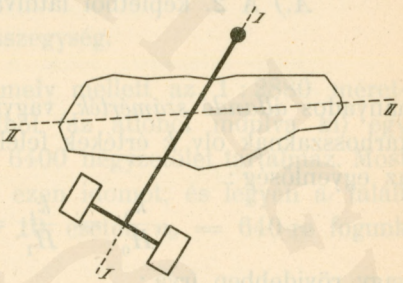
képlet a *helyes* területet *(a papirváltozás benfoglalásával)* adja. Ezt az elméletileg absolut szigorú eljárást azonban — mivel a gyakorlatban durva tévedésekre adhat alkalmat — *nem ajánljuk* de itt a 6. pontban részletesen ismertetjük.

5. *A planimeter elhelyezése a mérendő idomhoz képest is érdemel figyelmet.* Dacára annak, hogy elméletileg a mérés pontosságára **teljesen közömbös** a planimeter szerkezetnek a mérendő idomhoz képest adott elhelyezése, mégis — tekintettel a szerkezetnek *véges érzékenységére* — célszerű és ajánlatos a műszert úgy elhelyezni, hogy

a) a mérendő idom a műszer *alapvonala* által lehetőleg két *egyenlő részre osztassék*,

b) és hogy amellett az idom határvonalának pontjai lehetőleg messze feküdjenek az alapvonaltól.

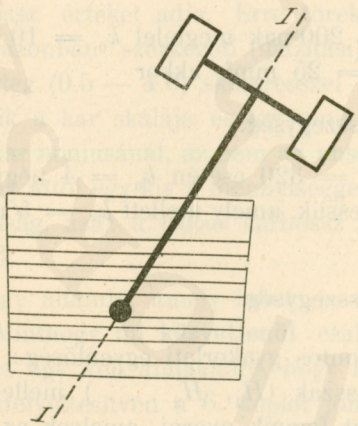
A *„gömbplanimeter"*-nek az alapvonalát képviseli a műszer rúdja, amikor a rúd *merőlegesen áll a szekérre.* Ha tehát az 55. ábrán látható idomot kell megmérni e planimeterrel, akkor a műszert úgy fogjuk az idomhoz képest elhelyezni, hogy az *alapvonal* (merőleges rúd) körülbelül az I — I vonalba essen. Az *a)* szabálynak a II — II helyzet is megfelelne, de ez a vonal ellenkezik a *b)* szabálylyal.



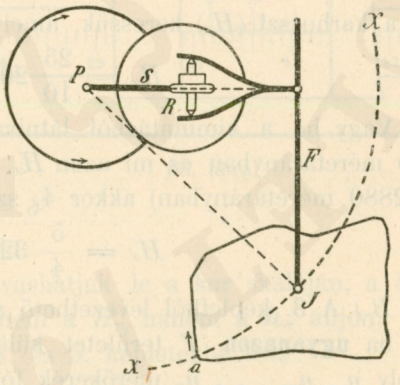
55. ábra.

Hosszú, keskeny szalagparcellák (56. ábra) esetében tehát a planimetert úgy kell elhelyezni, hogy *merőleges* rúd tartásnál az I — I vonal lesz a rúd helye. Természetesen ezen egy elhelyezéssel mérjük az **összes** parcella területeket.

A *korongos* planimeternél (57. ábra) az alapvonal egy **körív** amelynek központja a *(P) nyugvó lemez központja,* és amelyet leír a mérőtű ha úgy forgatjuk a szerkezetet, hogy az ***R*** mérőkerék az *S* korongon *sugárirányban* álljon amint az 57. ábra mutatja. Ezen ábrán $x - x$ az alapvonal (alapkör) : ez felezze lehetőleg a megmérendő idomot, ami az *egész* szerkezetnek elhelyezésével mindig elérhető.



56. ábra.



57. ábra.

6. A mérőkar hosszának szabályozása. A planiméterek területi képletében

1. . . . . $F = n \, . \, k$

szereplő k „szorzó állandó" vagy amint Coradi nevezi *„az ezred fordulatnak megfelelő terület"* értéke az illető planiméter szerkezeti alkatrészeinek függvénye.*) Mivel ezen alkat-

*) Az 1. képletben az n tehát a mérőkerék fordulatszámait jelenti *ezred* fordulatokban kifejezve. Például: 3.426 fordulat esetében $n = 3426$.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

részek között *a mérőkar (57. ábrán az F rúd) mérete* változtatható: tehát a k értéke is (bizonyos határok között) tetszőlegesen változtatható.

Ha H jelenti a mérőkarnak valódi hosszát (mérőcsúcstól a kar vertikális forgástengelyéig) milliméter vagy más hosszegységben kifejezve, akkor bármely Coradi-féle planiméterre érvényes ezen egyenlet:

$$2. \quad k = c \, . \, H,$$

ahol c egy általunk meg nem változtatható *állandó* számérték, amely a mérőkerék és más kerekek és alkatrészek méreteit tartalmazza.

Az 1. képlet tehát így írható:

$$3. \quad F = n \, . \, c \, . \, H.$$

A 2. és 3. képletekből két gyakorlatilag fontos egyenlőség vezethető le.

A.) A 2. képletből látnivaló, hogy egy és ugyanazon planiméterre nézve a

$$c = \frac{k}{H}$$

hányados *állandó számérték,* vagyis változtatva a H karhosszt (H_1, H_2, H_3 . . . H_x) ezen karhosszaknak oly k értékek felelnek meg (k_1, k_2, . . . k_x) hogy mindenkor érvényes ez az egyenlőség:

$$\frac{k_0}{H_0} = \frac{k_1}{H_1} = \frac{k_2}{H_2} = \frac{k_3}{H_3} = \ldots = \frac{k_x}{H_x} \ldots$$

vagy rövidebben írva:

$$4. \quad H_x = \frac{H_0}{k_0} k_x = \frac{k_x}{k_0} \, . \, H_0$$

amely képlet alkalmas arra, hogy tetszőleges k_x-nek megfelelő H_x mérőkarhosszt vele meghatározzunk, ha egy összetartozó k_0, H_0 értékpárt már ismerünk. Ilyen összetartozó értékpárokat közöl Coradi minden műszerhez: a műszer szekrény fedőlapjára ragasztott kimutatáson.

Például: ha ezen kimutatás szerint $H_0 = 200$-nak megfelel $k_0 = 10$ mm², és mi azt a karhosszt (H_x) keressük, amely mellett $k_x = 25$ mm², akkor

$$H_x = \frac{25}{10} \, 200 = 500 \text{ hosszegység.}$$

Vagy ha a kimutatásból látnivaló, hogy $H_0 = 320$ esetén $k_0 = 4$ négyzetöl az 1 : 2880 méretarányban és mi azon H_x karhosszt keressük, amely mellett $k_x = 5$ négyzetöl (az 1 : 2880 méretarányban) akkor 4. szerint:

$$H_x = \frac{5}{4} \, 320 = 400 \text{ hosszegység.}$$

B.) A 3. képletből levezethető a következő fontos gyakorlati egyenlőség:

ha **ugyanazon** T területet különböző karhosszak (H_1, H_2 . . .) mellett járjuk körül, oly n_1, n_2, . . . n_x mérőkerék fordulatszámokat fogunk nyerni, amelyek az

$$n_1 \, H_1 = n_2 \, H_2 = n_3 \, H_3 = \ldots = n_x \, H_x \ldots$$

egyenlőségnek eleget tesznek; amit rövidebben így irhatunk:

$$5. \quad H_x = \frac{n_1 \, H_1}{n_x} = \frac{n_1}{n_x} \, H_1,$$

amely képlet alkalmas arra, hogy egy tetszőleges k_x-nek megfelelő H_x mérőkarhosszt meghatározzuk, ha egy *ismert nagyságú,* idomot előzőleg bármely (H_1) karhossz mellett körüljártunk.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Például: azon H_x karhosszt akarjuk ismerni, amely mellett $k_x = 20$ mm². Szerkesztünk (az átlóból indulva ki) egy négyzetet, amelynek oldalhossza 1 dm. Tehát $T = 10\,000$ mm².

Most tetszőleges ($H_1 = 120$) karhossz beállítással körüljárjuk **kétszer** (ellenkező értelemben) az idomot és legyen a fordulatszám számtani közepe $n_1 = 865$.

Az 5. egyenlet szerint tehát:

$$H_x = \frac{865 \times 120}{n_x}.$$

Mivel $T = 10\,000$, azért a kivánt $k_x = 20$ mm² esetében

$$n_x = \frac{T}{k_x} \text{ értelmében}$$

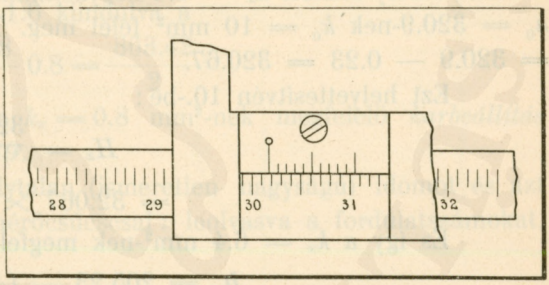
$$n_x = \frac{10\,000}{20} = 500 \text{ lesz, és így a keresett karhossz:}$$

$$H_x = \frac{865}{500} . 120 = 207.60 \text{ hosszegység.}$$

Például: azon H_x karhosszt akarjuk ismerni, amely mellett az 1 : 2880 méretarányú térképen $k_x = 10$ négyzetöl. Szerkesztünk e célból (az átlóból indulva ki) egy oly négyzetet, amely (1 : 2880 méretarányban) 4 hold = 6400 négyzetölet tartalmaz. Most tetszőleges $H_1 = 200$ karhossz beállításával járjuk körül ezen idomot, és legyen a talált fordulatszám $n_1 = 857$. Mivel $T = 6400$, azért $k_x = 10$ esetén $n_x = 640$-re fogunk jutni, tehát az 5. képlet szerint a keresett

$$H_x = \frac{857 \times 200}{640} = 261.81 \text{ hosszegység.}$$

Az itt *A.* és *B.* alatt ismertetett eljárással az esetben kapjuk a pontos H_x értéket, ha a mérőkaron levő skála, (58. ábra) illetve a hozzátartozó nonius indexe úgy van elhelyezve, hogy a kar leolvasás („*beállítás*") a valódi H karhossz értéket adja. Erre törekszik is Coradi, azonban szerkezeti (igazítási) okokból tényleg (0.5 — 4.0) skálaésszel eltolva jelentkezik a kar skálája és így amit leolvasunk a kar noniusánál, az nem az absolut H, hanem egy attól egy kis δ mennyiséggel eltérő h hosszúság, azaz a *valódi* karhossz:



58. ábra.

$$6. \quad H = h + \delta$$

ahol δ egy állandó, amely lehet + vagy — előjelű.

Minthogy mi **közvetlenül** csak a h-kat olvashatjuk le a kar skáláján, a 4. és 5. képleteket úgy kell átalakítani, hogy a baloldalon nem a H_x, hanem a h_x álljon.

Helyettesítvén a 6. képlet jobb oldalát a 4. és 5. képletekbe lesz:

4-ből: $h_x + \delta = \frac{(h_0 + \delta)}{k_0} k_x$, illetve

5-ből: $h_x + \delta = \frac{(h_1 + \delta)}{n_x} n_1$, amely egyenletek rendezve ezen alakot öltik:

$$7. \quad h_x k_0 + \delta k_0 = h_0 k_x + \delta k_x$$

$$8. \quad h_x n_x + \delta n_x = h_1 n_1 + \delta n_1$$

Karhossz szabályozást tehát csakis a δ ismerete esetén végezhetünk.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

De a talált képletek alapján a δ meghatározása egyszerü.

A.) Kiindulva a 7. képletből azt találjuk, hogy

$$9. \quad \delta = \frac{h_x k_0 - h_0 k_x}{k_x - k_0}$$

amely képletből a δ kiszámítható, ha két *összetartozó* h_0, k_0 és h_x, k_x értékpárt ismerünk. Ilyeneket találunk az említett (műszerláda tetejére ragasztott) kimutatáson.

Például: egy Coradi planiméterre nézve e kimutatás szerint

$$h_0 = 320.9\text{-nek } k_0 = 10 \text{ mm}^2$$
$$\text{és } h_x = 128.5\text{-nek } k_x = 4 \text{ mm}^2$$

felel meg. Mekkora ezen példány skálájának eltolása azaz mekkora a δ értéke?

Helyettesítve a 9. képletbe az értékeket:

$$\delta = \frac{128\,5 - 128\,3.6}{-6} = \frac{+1.4}{-6} = -\,\boldsymbol{0.23.}$$

Ezen műszeren tehát a mérőkar skálájának állandó eltolása — 0.23 skálarész, azaz ezen műszerre nézve a 6. képlet szerint:

$$H = h - 0.23.$$

Ezt tudva egy tetszőleges $\boldsymbol{k_x}$-hez a $\boldsymbol{h_x}$-et az eredeti 4. képlettel számíthatjuk:

$$10. \quad H_x = \frac{H_0}{k_0} k_x, \textit{ ha az így nyert } H_x \text{ (valódi karhosszból)}$$

a δ-t kivonjuk:

$$11. \quad h_x = H_x - \delta.$$

Például: az imént tárgyalt műszerre ($\delta = -0.23$) nézve azon h_x-et akarjuk ismerni, amely mellett $k_x = 6.4$ négyzetmilliméter. A műszerládában levő kimutatás szerint $h_0 = 320.9$-nek $k_0 = 10$ mm² felel meg. Tehát a *valódi* karhossz ekkor $H_0 = h_0 + \delta = 320.9 - 0.23 = 320.67$.

Ezt helyettesítvén 10.-be:

$$H_x = \frac{320.67}{10} \times 6.4$$
$$= 32.067 \times 6.4 = 205.23.$$

És így a $k_x = 6.4$ mm²-nek megfelelő *skálabeállítás* a 11. képlet értelmében:

$$\boldsymbol{h_x} = 205.23 - (-0.23) = \boldsymbol{205.46.}$$

Jegyzet: ha a δ-t nem ismertük volna és nem vettük volna figyelembe, azaz ha a h-kat absolut H-knak tekintettük volna, akkor a 4. képlet szerint a

$$\frac{320.9 \times 6.4}{10} = \boldsymbol{205.38} \text{ értéket nyertük volna.}$$

B.) A δ meghatározását, illetve ismert δ esetében ennek figyelembe vételét $\boldsymbol{h_x}$ meghatározásnál az 5. illetve 8. képlet szerint is eszközölhetjük.

Ugyanis a 8. képlet szerint

$$12. \quad \delta = \frac{h_1 n_1 - h_x n_x}{n_x - n_1}$$

amely képletből a δ számítható, ha egy tetszőleges **(ismeretlen nagyságú)** területet egyszer nagy karhossz (h_1) egyszer kis karhossz (h_x) mellett körüljárunk és a fordulatszámokat (n_1 és n_x) leolvassuk.

Igy tehát a δ a *Coradi* adta összetartozó h és k értékektől függetlenül lesz meghatározva.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ismerve igy egyszer és mindenkorra a δ-t, tetszőleges k_x-hez a megfelelő h_x-et az 5. képlet illetve eljárás szerint nyerhetjük, ha az *ismert idom* (T) körüljárásakor leolvasott h_1-hez adjuk (előjelével) δ-t és igy oldjuk meg az 5. képlet jobb oldalát; a nyert *eredményből* (H_x) kivonjuk (algebrailag) a δ-t. Azaz

$$H_x = \frac{n_1 (h_1 + \delta)}{n_x} \text{ és azután}$$

$$h_x = H_x - \delta.$$

A m. kir. háromszögelő hivatalnak Coradi-féle gömbplanimeterére (53. ábra) nézve a δ meghatározást az A. és B. módszer szerint végeztük el: és e meghatározást itt egész terjedelmében közöljük. A δ érték e műszernél igen nagynak adódott.

A.) módszer szerint.

A műszerládán levő kimutatás szerint

$h_0 = 273.0$-nak, $k_0 = 0.5$ mm² felel meg
$h_x = 866.6$-nak, $k_x = 1.6$ mm² „ „

tehát képezve a 9. képlet tagjait:

$$\delta = \frac{866.6 \times 0.5 - 273.0 \times 1.6}{+ 1.1}$$

$$= \frac{433.30 - 436.80}{1.1} = - 3.18.$$

Tehát ezen planimeternél a *valódi* karhossz a beállított karhosszból a $H = h + \delta = h - 3.18$ képlettel nyerhető.

Ha tehát ismerni akarjuk például azon *beállítást* (h_x) amely mellett $k_x = 0.8$ mm², akkor a műszerládán levő kimutatás egy összetartozó értékéből (h_0, k_0)

$h_0 = 866.6$; $k_0 = 1.6$ kiindulva a

$$H_x = \frac{866.6 - 3.18}{1.6} 0.8 = \frac{863.42}{2}$$

$= 431.71$ valódi karhosszra jutunk és igy a $k_x = 0.8$ mm²-nek megfelelő *karbeállítás* $h_x = H_x - \delta = 431.71 - (- 3.18) =$ ***434.89***.

B.) módszerrel. Rajzoltunk egy szabálytalan (ismeretlen nagyságú) idomot és azt két különböző karbeállitással körüljártuk a mérőcsúcscsal: leolvasva a fordulatszámokat.

Az összetartozó értékek voltak

$h_x = 428.6$, $n_x = 11950$
$h_1 = 229.6$, $n_1 = 22463$

tehát $\delta = \frac{h_1 n_1 - h_x n_x}{n_x - n_1} = - 3.39.$

Megismételtük a műveletet két más karbeállítással: amikor a

$h_1 = 435.3$, $n_1 = 11750$
$h_x = 243.2$, $n_x = 21159$ értékekre jutva,

a 12. képlet szerint a $\delta = - 3.41$ eltolást számítottuk.

Műszerünkre nézve tehát

$\delta = -$ ***3.40***, amely érték 0.2-re egyezik az A. módszer szerint megállapított értékkel. Természetesen az általunk (mert méréssel) megállapított δ értéket*) fogjuk elfogadni és az esetleges karbeállításoknál felhasználni.

*) Két további ellenőrző ily mérési sorozat a $\delta_1 = - 3.43$ és $\delta_2 = - 3.36$ értékekre: tehát középértékben ugyancsak a $\delta = - 3.40$ értékre vezetett.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Megjegyzések.

a) Az ezen pontban elmondottakból világos, hogyha az előadott módon bizonyos k_x-nek megfelelően meghatároztuk (δ figyelembe vételével) a h_x karhosszt és ha most oly térképszelvényen dolgozunk, amelynél az x és y irányú percentuális papirváltozás $p\%$ és $q\%$ ismert számok, amelynél tehát $(p+q)\%$ a területi *beszáradás* akkor h_x-et $(p+q)\%$-al **rövidítve** és ezen karral járva körül az idomokat az

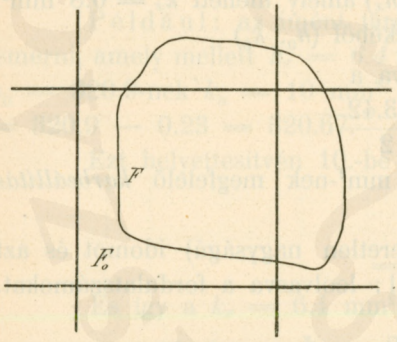
$$(F) = n\ k_x$$

képlet adja, a papirbeszáradást is magában foglaló **valódi** területet.

Például: ha az y irányban *1%* és az x irányban *0.5%* a papirbeszáradás; ha továbbá megállapítottuk, hogy $k_x = 1$ □ ölnek a $h_x = 320.65$ karbeállítás felel meg, akkor $(1 + 0.5) = 1.5$ %-al változtatva h_x-et $(320.65 \times 0.015 = 4.81)$ azaz a $h'_x = 320.65 - 4.81 = 315.84$ karbeállítást elvégezve, a k_x ezen a beszáradt papiroson fog *aznap* 1 □ ölet jelenti.

Ez az eljárás azonban — miként a 4. pontban említettük: nem ajánlatos. A karnak százalékos arány szerinti változtatását alkalmazhatjuk azonban akkor, midőn a kart a Coradi által adott h-ra állítva, általunk szerkesztett ismert területi idomot körüljárva látjuk, hogy k nem pontosan a kivánt érték illetve azt látjuk, hogy $n.\ k$ nem egyenlő F_0 hanem $n\ k = F_0 + \Delta t$. Ezen Δt-t az F_0-ra %-okban kifejezve a h-t ezen %-os arányban változtatjuk és ujra ismételjük a mérést.

b) Lehet a külön papirbeszáradás számítást úgy is elkerülni, hogyha nem direkt területeket, hanem *területek viszonyait* mérjük: feltéve, hogy a térképen akkor, amidőn a térkép készült, koordináta négyzetek rajzoltattak meg.



59. ábra.

Ha például (59. ábra) decimeteres koordináta négyzetek vannak a térképre rajzolva, amikor tehát a négyzet *eredeti* területe $f = 10000$ mm², és meg akarjuk ismerni az F eredeti területet, akkor *tetszőleges* (h_x) *karbeállítással* (k_x-et nem kell ismerni) körüljárjuk a négyzetet (fordulatszám n_0) és ugyanezen karral körüljárjuk a mérendő idomot (fordulatszám n_x) és most az

$$\frac{F_0}{n_0} = \frac{F}{n_x}$$ egyenlőségnél fogva a keresett F **eredeti** területet az

$$F = \frac{F_0}{n_0} n_x = \frac{10000 \text{ mm}^2}{n_0} n_x$$

képlet adja.

Ezen módszerrel **igen pontosan** nyerhetjük direkt az *eredeti* területeket: de a mérés és számítás hosszadalmas voltánál fogva csak *kivételesen* fogjuk alkalmazhatni.

A Coradi gömbplanimeter területi képletének levezetése.

Mivel ezen planimeter ujabban általánosan lesz nálunk alkalmazva, helyénvalónak látszik működésével közelebbről megismerkedni. A 60. ábrán vázlatosan az egész szerkezet lényege látható.

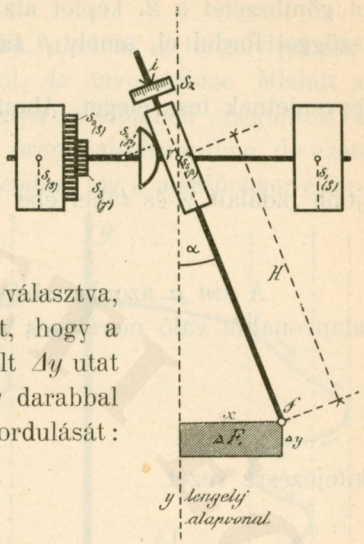
Amikor az f mérőtűvel a Δy utat leírjuk, az egész szerkezet az y irányban előre mozog.

Gördülnek az $s_1 - s_1$ súlyos, széles hengerek, forog a hengerrel kapcsolt s_2 fogaskerék; ez forgatja az s_3-al jelzett fogaskereket, amely az s_4 sugárú gömbszelettel egy ten-

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

gelyre lévén ékelve ezt a gömbszeletet forgásba hozza. Az s_5 sugarú *vízszintes mérőhengert* két rugó szorítja állandóan a forgó gömbszelethez: tehát a mérőhenger is forogni fog és forgásait mutatja a kapcsolt *sz* számlálókészülék.

Ha y irányban bármily x mellett leír (előre vagy hátra) az f csúcs egy akármily nagy vagy akármily kicsiny utat: a *mérő*henger forogni fog, kivéve azt az esetet, amidőn a csúcs az y *alapvonalon* van (61. ábra) amikor az f-et rajta előre-hátra mozgatva a gömbszelet forog ugyan, de a *mérőhenger* — mivel a gömbszelet csúcsával érintkezik ekkor — nem jöhet forgásba.



60. ábra.

Az ilymódon definiált alapvonalat y tengelynek választva, lássuk *milyen nagy* elfordulást végez a mérőhenger azalatt, hogy a mérőtűvel az y tengelylyel párhuzamosan (x távolban) képzelt Δy utat járjuk be. Ezalatt az egész szerkezet (szekér) y irányban Δy darabbal előre gördül, tehát ϱ-val jelölve az s_1 sugarú henger szögelfordulását:

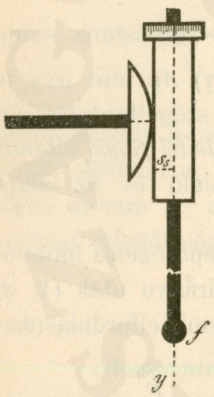
$$s_1 \cdot \varrho = \Delta y \text{ azaz}$$

$$1. \quad \varrho = \frac{\Delta y}{s_1}$$

Az s_2 sugarú (a hengerre ékelt) fogaskerék is ϱ szög elfordulást végez ezalatt, tehát ezen fogaskerék osztó körének bármely pontja a

$$\varrho \; s_2 = \left(\frac{\Delta y}{s_1}\right) s_2$$

kerületi utat írja le.



61. ábra.

Ezen utat írja le tehát az s_3 sugarú kis fogaskerék minden kerületi pontja is, és igy ezen kis fogaskerék szögelfordulása (γ) az

$$s_3 \cdot \gamma = \left(\frac{\Delta y}{s_1}\right) s_2$$

egyenletnek tartozik eleget tenni.

Tehát mialatt a mérőcsúcs a Δy utat írja le, azalatt a kis fogaskerék szögelfordulása:

$$2. \quad \gamma = \frac{\Delta y}{s_1 \cdot s_3} \; s_2$$

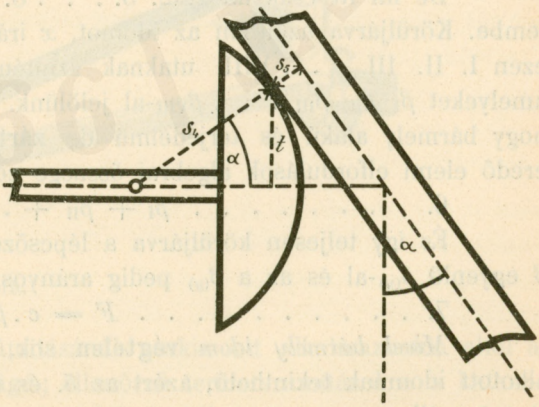
Ezen szögelfordulást végzi a gömbszelet is — hiszen a kis fogaskerék a gömbszelet vízszintes forgástengelyével egy testet képez.

Kérdés: a gömbszelet γ szögelfordulása micsoda β szögelfordulást okoz a mérőhengerre nézve? Ez azon α szögnek amely alatt a mérőkar az alapvonalhoz hajlik függvénye, mert a 62. és 60. ábrából láthatólag a mérőhenger és gömbszelet *érintkezési pontjának* a gömbszelet forgási tengelyétől való távola t az α szögnek függvénye: (62. ábra)

$$\frac{t}{s_4} = \sin \alpha \text{ azaz}$$

$$3. \quad t = s_4 \sin \alpha$$

Ezen t-t az érintkezési pont *futókör sugarának* nevezve, ha a mérőhenger és gömbszelet közt **csúszás nincs,** belátható, hogy



62. ábra.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

(a futókör sugár szorozva a gömbszelet szögelfordulásával γ-val) a γ-nak megfelelő *futókörív* egyenlő lesz a mérőhenger érintkezési pontjának *köríves útjával*. Azaz amikor a gömbszelet a 2. képlet alatti γ szöget írja le tengelye körül, azalatt a mérőhenger oly β szöggel fordul el, amely β szög a

$$\beta \,.\, s_5 = t \,.\, \gamma$$

egyenletnek tesz eleget. Ahonnan

$$\beta = \frac{\gamma}{s_5}\, t,$$ és helyettesítvén a 2. és 3. egyenletek

jobb oldalait γ és t helyébe lesz:

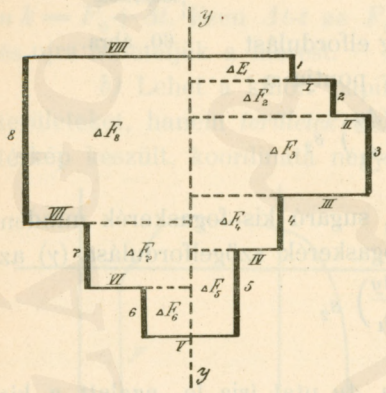
$$\beta = \frac{\Delta y\, s_2 \,.\, s_4}{s_1\, s_3\, s_5} \sin\, \alpha$$

A $\sin\, \alpha$ azonban kifejezhető (60. ábra) a mérőkarhossz (H) és a mérőtűnek az alapvonaltól való merőleges x távolsága által:

$$\sin\, \alpha = \frac{x}{H},$$ amit az előbbi képletbe helyettesítve, a

$$\beta = \frac{s_2\, s_4 \,.}{s_1\, s_3\, s_5\, H}\, (x \,.\, \Delta y)$$

kifejezésre vezet.



63. ábra.

Az ezen egyenlet jobb oldalán álló zárjeles mennyiség a 60. *ábrán sfraffozott területelem területét jelenti:*

$$x \,.\, \Delta y = \Delta F,$$ amit figyelembe véve:

$$4.\ \Delta F = \beta \left(\frac{s_1\, s_3\, s_5\, H}{s_2\, s_4}\right) = \beta \times (\text{constans szám})$$

azaz, az y irányban (kicsiny vagy nagy) Δy utat írva le a mérőtűvel, a mérőhenger ezalatt oly szögelfordulást (β) végez, amely *szorozva egy a műszer méreteitől függő állandó számmal*, megadja a Δy utnak megfelelő és az alapvonalig terjedő **elemi** területet.

Ha tehát a 63. ábrán látható lépcsőzetes idomon végigvezetjük a mérőtűt, akkor az y irányu utak (1, 2, 3, 4, . . . 8) bejárása alatt a mérőkerék oly β_1, β_2, β_3, . . . β_8 elemi elfordulásokat végez, amely elfordulások algebrai *összege*

$$5.\ \ (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_8) = \beta_{(y)} = \frac{\Delta F_1 + \Delta F_2 + \ldots + \Delta F_8}{\text{constans}} = \frac{F}{c}$$

arányos az idom területével.

De mi itt csak az 1. 2. 3. . . . 8. azaz az y irányú útszakaszokat vettük figyelembe. Körüljárva azonban az idomot, x irányú utakat is járunk be a mérőcsúcscsal: és ezen I. II. III. . . . VIII. utaknak szintén fognak mérőhenger elfordulások megfelelni, amelyeket β_{I}, β_{II}, β_{III}, . . . β_{VIII}-al jelölünk. Elemi módon be lehet most már bizonyítani, hogy bármely alakú és terjedelmü de **zárt** lépcsőzetes idomnál ezen x irányú utakból eredő elemi elfordulások algebrai összege zérussal egyenlő, tehát jelen esetben is

$$6.\ \ldots\ \beta_{\text{I}} + \beta_{\text{II}} + \ldots + \beta_{\text{VIII}} = 0.$$

És így teljesen körüljárva a lépcsőzetes idomot: a mérőhenger eredő elfordulása β egyenlő $\beta_{(y)}$-al és az a $\beta_{(y)}$ pedig arányos a területtel, azaz

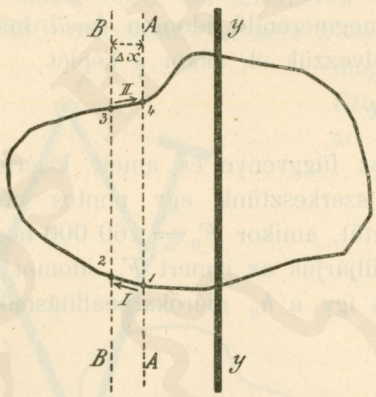
$$7.\ \ldots\ F = c \,.\, \beta_{(y)} = c \,.\, \beta.$$

Mivel bármely idom **végtelen** sok, végtelen **keskeny** derékszögű négyszögekből alkotott idomnak tekinthető, azért az *5.* és *6.* képlet tehát a 7. képlet bármely idom körüljárására áll.

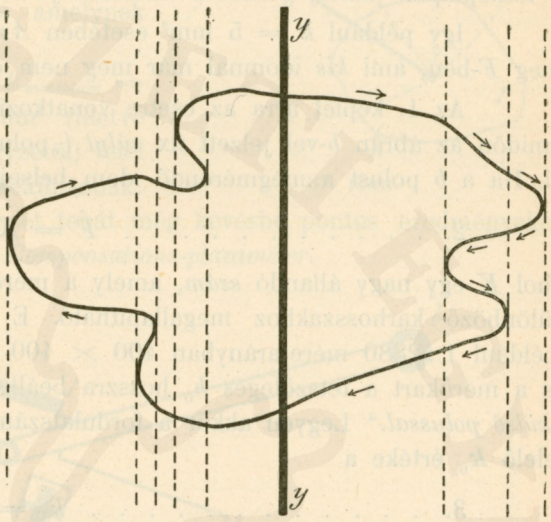
© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A levezetésből látni való, hogy igen fontos a *mérőhenger* és *gömbszelet* szabatos, (csúszás nélküli) érintkezése: amiért is a gömbszelet és mérőhenger felszíne mindig *gondosan* tisztán tartandó.

Megjegyzés: A 6. képlet bizonyítása a 64. ábrából adódik, ahol az y tengelylyel párhuzamosan húztunk két egyenest $A—A$ és $B—B$ egymástól Δx távolságban. Mialatt a mérőtűvel 1-től 2-ig haladunk, azalatt x irányban és az I. nyíl értelmében megtettük a Δx utat. Ezalatt valami $\Delta\beta$-val forgott a mérőhenger, például óramutató irányában, de ezen $\Delta\beta$-t le fogja rontani, azaz pontosan $\Delta\beta$-val de *ellenkező értelemben* fog a mérőhenger elfordulni, mialatt 3-tól 4. pontig visszük a mérőtűt azaz mialatt az $A—A$ és $B—B$ egyenesek között ugyanazon Δx utat tesszük meg a II. nyíl irányában. És ez a szabály áll tetszőleges alakú idomra — amint azt a 65. ábra mutatja, ahol az egymást *megsemmisítő* Δx utak parallel elhatárolásait egy igen szabálytalan idom esetére rajzoltuk meg.



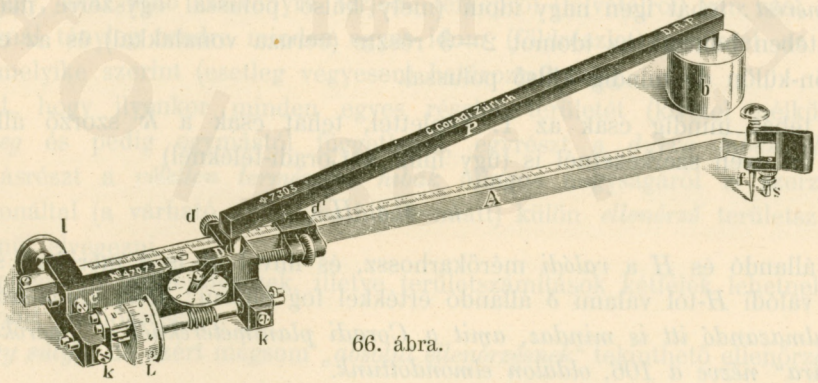
64. ábra.



65. ábra.

Az Amsler-féle polár planiméter. (66. ábra).

Olcsóságánál fogva a legelterjedtebb planiméterszerkezet — dacára annak, hogy az elérhető pontosság $^1/_5$—$^1/_{10}$-része a Coradi-planiméterekkel elérhető pontosságnak.



66. ábra.

Szabatos vízszintes felvételek területszámításánál csakis ott alkalmazható, ahol a legkisebb földrészlet legalább is **20 cm²** nagyságú; ellenőrző területszámításokra a kataszteri felvételeknél azonban minden esetben célszerűen felhasználható.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Elméletileg ugyan ez a szerkezet is *absolut pontosan*, azaz elméleti elhanyagolás nélkül adja a területet az

$$1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad F = n.\ k.$$

képlet alapján: de gyakorlatilag *kis* idomoknál 1% is lehet a várható pontatlanság azért, mert a k állandó a legkisebb mérőkar (A) beállításnál **5—10-szer** akkora mint a Coradi-féle planimétereknél és mert (66. ábra) a *mérőkerék* (L) itt nem mesterséges pályán, hanem a térképlapon (amely sohasem ideálisan jó felület) gördül.

Igy például $k = 5$ mm² esetében $\Delta n = \pm$ 3-nak már $\pm$ 15 mm² hiba felel meg F-ben, ami *kis* idomnál már meg nem engedett elhanyagolás.

Az 1. képlet arra az esetre vonatkozik, amikor *„külső polussal"* dolgozunk, azaz amidőn az ábrán b-vel jelzett fix *súlyt* („polus") a megmérendő idomon *kívül* helyezzük el. Ha a b polust a megmérendő idom belsejében helyezzük el, akkor a képlet

$$2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad F = K + n\ k$$

ahol K egy nagy állandó *szám*, amely a mérőkarhossz függvénye és amely kisérletileg a különböző karhosszakhoz megállapítható. E célból szerkesztünk egy pontos négyzetet (például 1 : 2880 méretarányban 400 × 400 öl méretüt, amikor $F_0 = 160\,000$ négyzetöl) és a mérőkart a tetszőleges h_0 hosszra beállítva, körüljárjuk az ismert F_0 idomot először *„külső polussal."* Legyen akkor a fordulatszám n_0; és így a h_0 mérőkarbeállításnak megfelelő k_0 értéke a

$$3. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad k_0 = \frac{F_0}{n_0}$$

képlettel kiszámítható. Most helyezzük a polust az F_0 idom belsejébe és így járva körül a mérőcsúcscsal az idomot: legyen a leolvasott fordulatszám n_1. Tehát a 2. képlet szerint most:

$$F_0 = K_0 + n_1\ k_0, \text{ ahonnan a}$$
$$K_0 = F_0 - n_1\ k_0 \text{ kiszámítható.}$$

Ismerjük tehát a h_0 karbeállításnak megfelelő K_0 állandó értékét. Dacára annak, hogy a K értéket ily módon meg lehet határozni, és dacára annak, hogy belső polussal sokkal nagyobb idom járható körül mint külső polussal, mégis *kerüljük a belső polussal való területmérést:* tehát igen nagy idom (mely külső polussal egyszerre már körül nem járható) esetében bontsuk az idomot 2—3 részre (ceruza vonalakkal) és az egyes részeket mérjük külön-külön de mindig **külső** polussal.

Igy tehát mindig csak az 1. képlettel, tehát csak a k szorzó állandóval lesz dolgunk. Mivel ezen szerkezetnél is (úgy mint a Coradi-féléknél)

$$k = c.\ H$$

ahol c egy állandó és H a *valódi* mérőkarhossz, és mivel itt is a mérőkar skáláján leolvasott h a valódi H-tól valami δ állandó értékkel fog eltérni: *azért szóról-szóra alkalmazható és alkalmazandó itt is mindaz, amit a Coradi planimétereknél a „mérőkar hosszának szabályozására" nézve a 106. oldalon elmondottunk.*

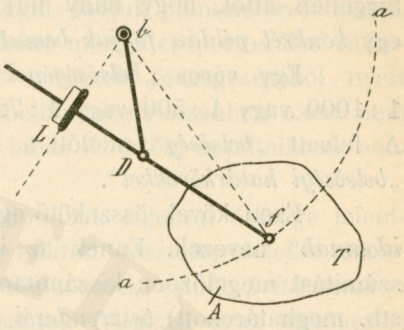
A mérések végrehajtása is szószerint az előbbi pontban adott *„utasítás"* szerint eszközlendők, csak a polus legcélszerűbb helyére nézve kell külön útmutatást adni. Szerkezeti tökéletlenségek folytán a lehető legjobb eredményt csak akkor fogjuk nyerni, ha

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

1. a polust úgy helyezzük el a mérendő idomhoz képest, hogy a műszer *„alapköre“* lehetőleg symmetrikusan felezze az idomot*), (67. ábra).

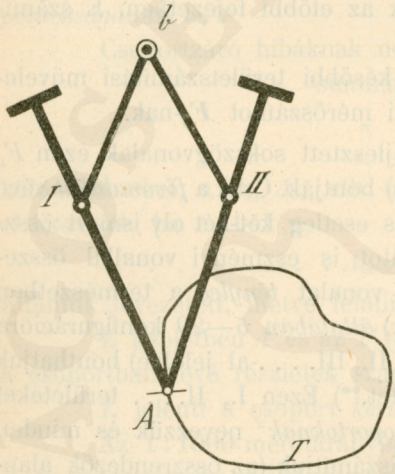
2. ha az idomot ugyanazon polus állás, de *átcsapott* mérőkerék mellett, *még egyszer* körüljárjuk. (68. ábra).

A 66. ábrán látható amsler planimétert is a *Coradi* cég gyártja és *„Compensations-Planiméternek“* nevezi. Ugyanezen cég ujabban egy még egyszerűbb (és olcsóbb) Amsler-féle planiméter szerkezetet szállít, amely azonban csak **egyetlen karbeállításra** alkalmas és amelynek lényege a 69. ábrából kivehető.

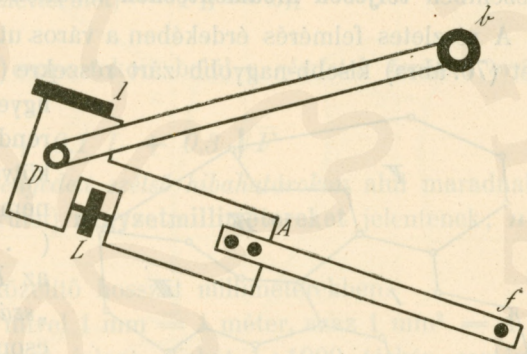


67. ábra.

Míg a 66. ábrán látható szerkezetnél $k_{minimum}$ = 2 mm² addig ezen szerkezetnél k = 10 mm² (illetve az 1 : 2880 méretarány részére k = 16 négyzetöl) felel meg a karbeállításnak. Ezen szerkezet tehát még kevésbé pontos eredményeket ad mint a *Compensations-planiméter*.



68. ábra.



69. ábra.

3. §. Nagyobb felvételek részletes területszámítása.

Az előzőkben előadtuk, miként lehet *egyes* (szabályos vagy szabálytalan alakú, kicsiny vagy nagy) rajzolt idomok területét meghatározni.

Akár egy, akár több szelvényre terjedő térképről (felvételről) van szó, a részletes területszámításnál tényleg rendre minden egyes idom (földrészlet) területét az ismertetett eljárások valamelyike szerint (esetleg vegyesen) határozzuk meg.

Azáltal, hogy ilyenkor minden egyes részlet területét (kivétel nélkül) **kétszer** *határozzuk meg* és pedig egymástól függetlenül, egyrészt a *durva hibák ellen* védve vagyunk és másrészt a *véletlen természetű hibák* átlagos nagyságáról is szerzünk tudomást: mindazonáltal (a várható *szabályos* hibák miatt) külön *ellenőrző* területszámításokat is kell okvetlenül elvégezni.

Ezen ellenőrző területmérések, illetve területszámitások kétfélék lehetnek:

1. *absolut* ellenőrzések,
2. *nagy súlyú,* de azért mégsem *„absolut ellenőrzésnek“* tekinthető ellenőrző mérések.

*) A 67. ábrán a mérőkar (és vele az L mérőkerék) úgy van D körül forgatva, hogy a *mérőkerék síkja* a b polusra mutat. Ekkor az f mérőcsúcsal a b körül leírva képzelt koncentrikus kör (a—a) az úgynevezett alapkör. Kezdeni a körüljárást akárhol, például (A. pontnál) lehet.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

1. eset. *Számszerű felmérés* esetén absolut ellenőrzésnek tekinthető minden az **összrendezők alapján** *számított területi mérőszám.*

A tisztán *„absolut ellenőrzésekkel"* végrehajtott területszámítást — amely egészen független attól, hogy hány térképlapon (szelvényen) jelentkezik a térkép — most már egy *konkrét példán fogjuk bemutatni.*

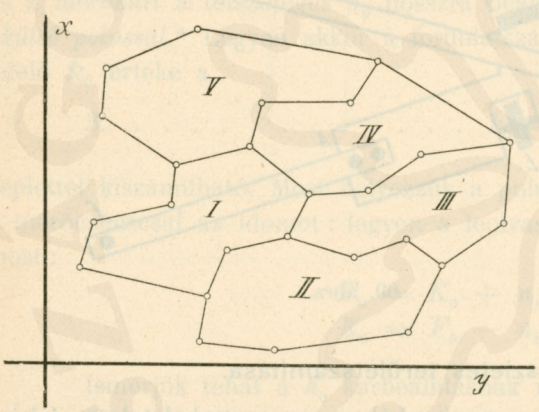
Egy város *„belsőségének"* szabatos számszerű felmérését eszközöltük: a térkép 1 : 1000 vagy 1 : 500 vagy 1 : 720 méretarányban tetszőleges számú szelvényen elkészült. A felvett *„belsőség"*, mielőtt a felvételhez hozzá fogtunk: a természetben elhatároltatott *„belsőségi határkövekkel"*.

Ezen kövek összekötő egyenesei egy zárt idomot alkotnak, amelyet *„belsőségi felvételi idomnak"* nevezek. Ennek az idomnak területét kell illetve szokás a részletes területszámítást megelőzően kiszámítani a *„belsőségi határkövek"* (előmetszéssel, hátrametszéssel, stb. meghatározott) *összrendezői alapján.**)

Ezen poligonnak területszámítási képletét előadtuk az előbbi fejezetben. E számítást *egymástól függetlenül két egyén végzi.*

Nevezzük az ily módon nyert és absolut, azaz a későbbi területszámítási műveletekkel szemben **teljesen hibamentesnek** tekintendő területi mérőszámot F_0-nak.

A részletes felmérés érdekében a város utcáiban fejlesztett sokszögvonalak ezen F_0 területet (70. ábra) kisebb-nagyobb zárt részekre (idomokra) bontják. Csak a *fővonalakat* véve figyelembe (és esetleg két-két oly ismert összrendezői pontot is eszményi vonallal összekötve, amely vonalat *tényleg* a természetben nem mértünk) *általában 5—20* konfigurációra (. ábrán I., II., III. . . .-al jelölve) bonthatjuk az F_0 területet.**) Ezen I., II. . . . területeket *„számítási csoportoknak"* nevezzük és minden csoportnak kiszámítjuk (az összrendezők alapján) a területét.



70. ábra.

Az ily módon nyert F_I, F_{II}, F_{III} . . . . *„csoportterületek"* összegének szigorúan egyezni kell az F_0 *„belsőségi idom"* területtel.

A jelentkező különbözet csakis a *véges számú* tizedesekkel való számolási műveletek (szorzások, összeadások) által keletkezik, tehát kis határok között fekszik (az összterület $^1/_{20000}$—$^1/_{30000}$ része lehet) és így eloszthatő az F_I, F_{II}, stb. csoportterületi mérőszámok között.

Most veheti kezdetét (planímeterrel, stb.) a *részletes területszámítás:* az egyes csoportokon belül.

Hogy esetleges durva hibák gyorsabban felfedezhetők legyenek, továbbá, hogy a *véletlen természetű hibák* racionális kiegyenlítését is eszközölhessük: a részletes, azaz idomról-idomra haladó területszámítás alkalmával 10—15 szomszédos idomot *összefoglalva* és *„alcsoportnak"* nevezve, minden alcsoport területét (planimeterrel vagy más módon) külön is mérjük és az így mért alcsoport területi *mérő számokra* (f_a, f_b, f_c, . . .) kiegyenlítjük

* Hangsúlyozzuk, hogy a *„belsőségi felvételi idom"* határvonalai csak a legritkább esetben lesznek egyuttal *birtokhatár vonalak.* Ez rendszerint egy eszményi konfiguráció, amelynek kitűzésénél arra törekszünk, hogy lehetőleg hosszú oldalai legyenek és hogy az egész felveendő területet magába zárja.

**) Hangsúlyozom, hogy a csoportképzésnél egyáltalában nem vagyunk tekintettel a *szelvény beosztásra;* továbbá, hogy egy-egy csoport legalább is *50—60* hold (*30 hektár*) területű legyen.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

az alcsoportban levő részletek mért területi összegét. Ez az eljárás, azaz a mért részletterületeknek a *mért* alcsoport területre való kiegyenlítése nevezhető *„nagy súlyú*, de azért mégsem *absolut* ellenőrzésnek. Nagy súlyú azért, mert *nagyobb* rajzolt idomnak területét *percentuálisan* mindig sokszorosan nagyobb megbízhatósággal tudjuk planimeterrel mérni, mint kisebb rajzolt idomok területét: és így az **egy idomként** mért alcsoportterületi mérőszám **megbízhatóbbnak** tekinthető, mint a mért részlet területek összegezéséből nyert alcsoport terület. Absolut ellenőrzésnek az alcsoporton belüli mérés azonban azért nem tekinthető, mert az *állandó hiba* (például planimeternél a hibás *k* érték) egyáltalában nem jelentkezik ezen ellenőrzésnél.

Az *állandó* hibák és az összes többi még fenmaradó hibák algebrai összege jelentkezni fog, midőn most már az alcsoportokon belül kiegyenlített részletterületeket összeadva a *főcsoport* területeket nyerjük. Az itt jelentkező különbözetek valódi *kritériumai a végzett részletes területszámítás és egyszersmind* az alappontok felrakási azaz térképezési *pontosságának is.*

Csoportzáró hibáknak nevezve a

summa (I. részletterület) — $F_I = \Delta_I$
„ (II. részletterület) — $F_{II} = \Delta_{II}$
. . . . . .

különbözeteket, a Δ_I, Δ_{II}, stb. az egyes csoportokon belül a *részletek területe arányában elosztandók,* ha e Δ-ák a

1. . . . . $\Delta_{max.} = \sqrt{n} + 0.1\ L + 0.3\ \sqrt{F}$

általunk levezetett, illetve felállított, *megengedett szélső hibahatárokon* alul maradnak.

E képletben Δ és az F (csoportterület) **négyzetmilliméterekben** jelentenek; n jelenti a csoportban levő részletek számát.

L jelenti a csoport *kerületének* közelítő hosszát milliméterekben.

Az 1 : 1000 méretarányban tehát, mivel 1 mm = 1 méter, azaz 1 mm² = 1 m², az 1. képlet métereket, illetve négyzetmétereket jelent. Tehát 1 : 1000 térkép esetén, F = 49 hektár, = 490 000 négyzetméter területű csoportnál, amelynek kerülete L = 3200 méter és amely n = 100 részletet tartalmaz, a megengedett szélső csoportzáró hiba:

$$\Delta_{max.} = \sqrt{100} + (0.1 \times 3200) + 0.3\ \sqrt{490\,000}$$
$$= 10 + 320 + 210 = \mathbf{540\ m^2}$$

ami körülbelül $^1/_{1000}$ pontosságnak felel meg. Ha például tényleg *490* négyzetméteres Δ-ra jutottunk volna jelen esetben, úgy minden *1000* négyzetméterre 1 m² javítás fog esni e csoportban.

Nyomatékosan hangsúlyozzuk, hogy az 1. képlet csak akkor mérvadó, ha az F_I, F_{II}, stb. csoportterületi mérőszámokat a számított (nem a térképről lefogott) összrendezőkből számítottuk: azaz, ha az F_I, F_{II}, . . . értékek *„absolut ellenőrző“* értékeknek tekinthetők.

És rámutatunk arra, hogy az itt előadott *szigorú ellenőrző* terület számítási eljárásnál semmi tekintetben nem jut szerep a szelvénybeosztásnak, illetve hogy itten a *térképszelvények „elméleti szelvény területe“* nem lesz figyelembe véve.

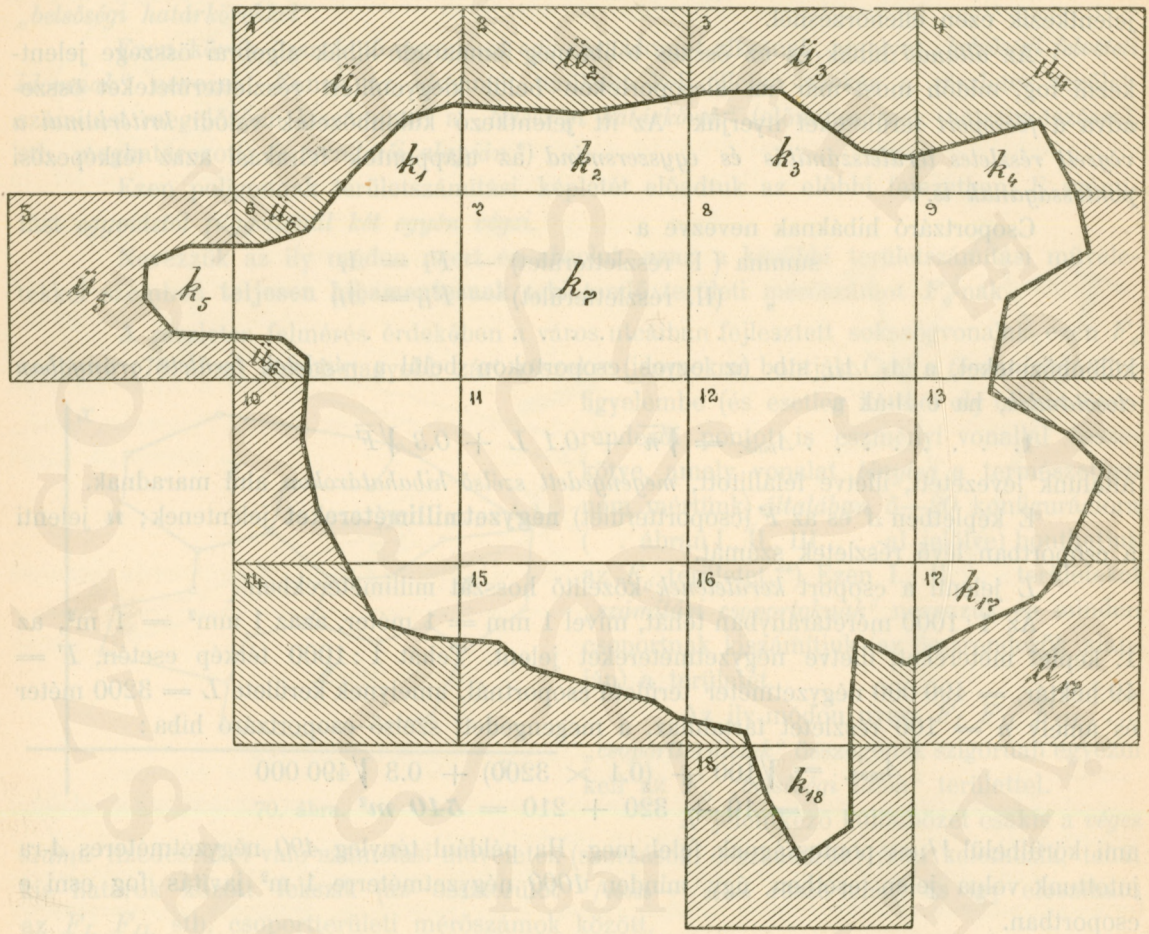
2. eset. Abban az esetben, amikor a *rajzolt térképet* vesszük az egész *területszámítás* (részletes és ellenőrző) alapjául, úgy *„absolut ellenőrző értéknek“* a térkép szelvények elméleti területét tekintjük. (Például *1 : 1000* méretarányban a magyar kataszter 60/50 cm = 600 × 500 = 300.000 m² = *30* hektar elméleti területű szelvényekkel dolgozik: 1 : 2880 méretarányban 1000 × 800 = 800.000 □ öl = 500 hold a magyar kataszteri szabványos szelvénykeret által bezárt elméleti terület.)

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Jelöljük az elméleti szelvény területet F_0-*al*: akkor a *„szelvényes ellenőrzés“* elve most már az, hogy minden egyes szelvényben a szelvénykereten belül levő konfigurációk területi összege (azaz a szelvényenkinti részletes területszámítás) az elméleti F_0 területre egyenlitendő ki.

Egy egész község térképi területszámítása eszerint az eljárás szerint (71. ábra) a következőleg alakul.

A 71. ábrán látható községi (kataszteri) térkép 18 szelvényen jelentkezik.



71. ábra.

Az *„elméleti szelvény összterület“* tehát jelen esetben:

1. . . . . $18 \times F_0 = Sz.$

Ezen Sz összeg két részből tevődik össze:

2. . . . . $Sz = K + \ddot{U}$, ahol K jelenti a községi határvonal által bezárt területet, $\ddot{U}$ jelenti a községi határvonalon túl eső, (az ábrán sraffozott, a gyakorlatban *üres tér*nek nevezett) és *részletes* területszámítás tárgyát már nem képező területet.

Az 1. szerinti Sz megállapítás után következik a K és $\ddot{U}$ meghatározása: szelvényről szelvényre haladva.

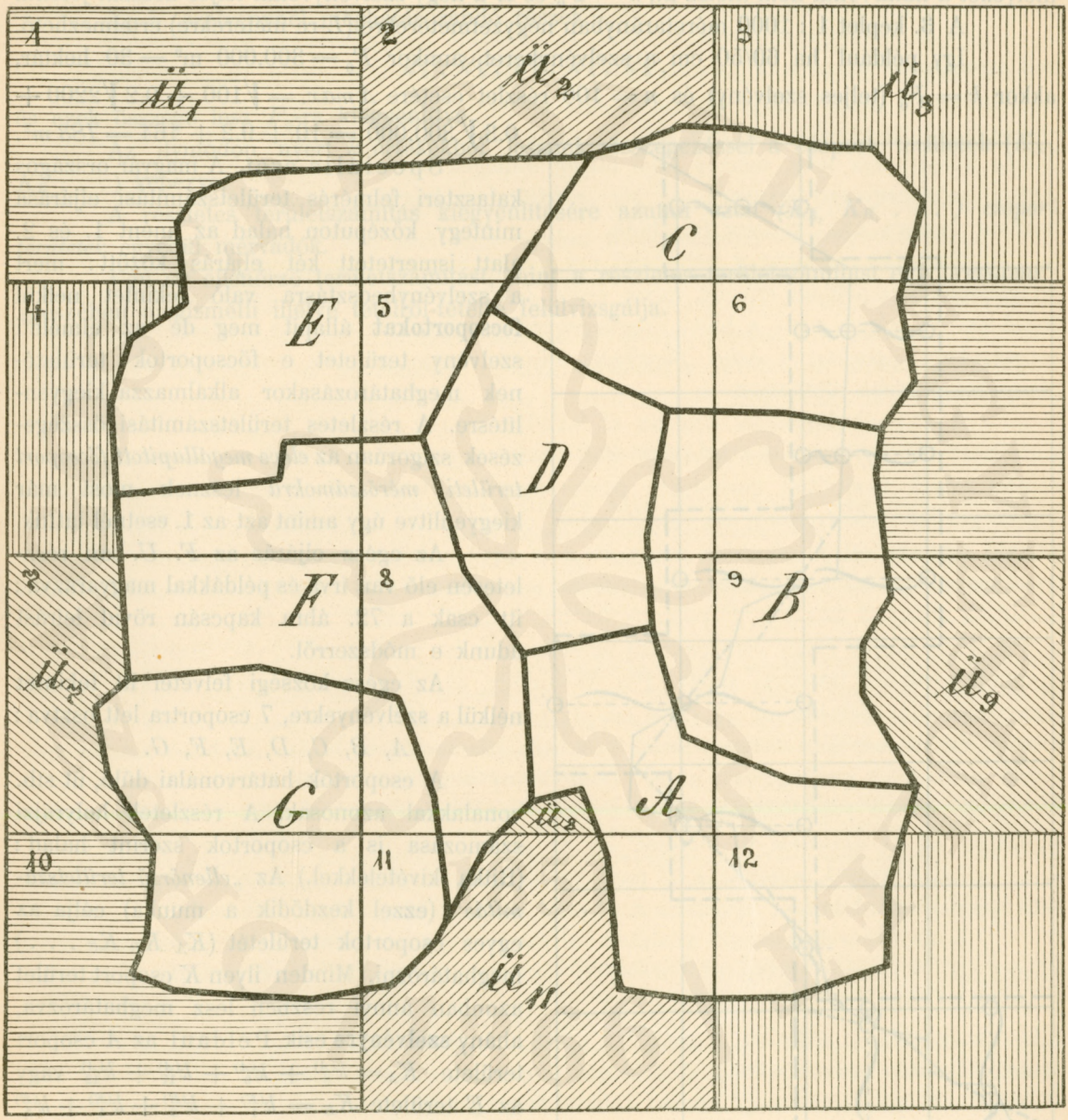
Az ábra szerint az 1. szelvényben **egy idomként** meghatározzuk az $\ddot{u}_1$ és egy idomként a k_1 területet.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A kettő összegét az elméleti szelvényterületre (F_0) állítjuk azaz egyenlítjük:

tehát $ü_1 + k_1 = F_0$,

és így tovább minden szelvényre nézve. Az ilymódon nyert k_1, k_2 . . . k_{18} területeket tekintjük most már *absolut értékű* ellenőrzéseknek: a szelvényenkinti *részletes* területszámítás eredményét mindig az illető k-ra fogjuk kiegyenlíteni.



72. ábra.

A részletes területszámításnál természetesen — mint az 1. esetnél előadtuk — kisebb csoportok szerint fogunk munkaközben egy-egy szelvényen belül részleges kiegyenlítést alkalmazni.

Ezen **„szelvények szerinti“** területszámítást különösen nagy belsőségeknek nagy méretarányban való felvétele alkalmával lehet igen *gazdaságosan* alkalmazni.

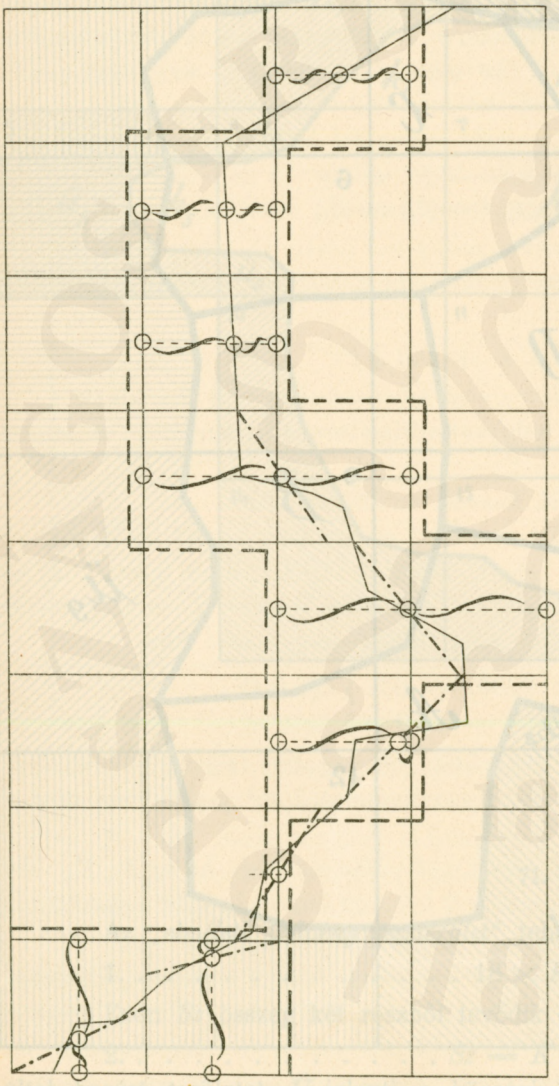
© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A szelvények szerinti részletes területszámítás összegének az ellenőrző számításnál megállapitott k területi mérőszámtól most a

3. . . . . $\Delta max = \sqrt{n} + 0.2\sqrt{L} + 0.3\sqrt{k}$ szélső határokon belül szabad eltérni. E képletben Δ, és k négyzetmillimétereket, L (a k terület határvonalának hossza) millimétereket jelent és n a k-ban levő részletek száma. Azon szelvényeknél, a melyeket a határvonal nem metsz át, $k = F_0$ és L a négy szelvényvonal teljes hosszát jelenti.

A 3. képlet 1 : 1000 méretarányban négyzetméterekre (L-re méterekre) értelmezhető.

Igy például ha 60/50 cm a szelvénykeret, amikor $F_0 = 300.000$ m^2 $= 30$ hektár, akkor $k = F_0$ (teljes szelvény) és $n = 100$ részlet esetére $\Delta max. = \sqrt{100} + 0.2\sqrt{2200} + 0.3\sqrt{300.000} = 10 + 9.2 + 164 = 183\ m^2$.



73. ábra.

Speciális eset. A magyar országos kataszteri felmérés területszámitási eljárása mintegy középuton halad az imént 1. és 2. alatt ismertetett két eljárás között: mert a szelvénybeosztásra való tekintet nélkül **főcsoportokat** állapit meg de az elméleti szelvény területet e főcsoportok területének meghatározásakor alkalmazza kiegyenlítésre. A részletes területszámítási összegezések szigorúan az *eleve megállapított főcsoport területi mérőszámokra* lesznek most már kiegyenlítve úgy amint azt az 1. esetnél láttuk.

Az egész eljárás az *F. U.*-ban részletesen elő van írva és példákkal magyarázva: itt csak a 72. ábra kapcsán rövid leirást adunk e módszerről.

Az egész községi felvétel itt tekintet nélkül a szelvényekre, 7 csoportra lett osztva:

A, B, C, D, E, F, G.

A csoportok határvonalai dűlő, út stb. vonalakkal azonosak. A részletek helyrajzi számozása is a csoportok szerint halad: (Ritka kivételekkel.) Az *„ellenőrző területszámítás“* (ezzel kezdődik a munka) célja az egyes csoportok területét (K_A K_B K_C . . .) meghatározni. Minden ilyen K csoport terület azonban annyi részben lesz meghatározva, ahány **szelvényre** esik. Például az A csoport területe $K_A = k_8^{(A)} + k_9^{(A)} + k_{11}^{(A)} + k_{12}^{(A)}$ vagy az E területe $K_E = k_1^{(E)} + k_2^{(E)} + k_4^{(E)} + k_5^{(E)}$

Közvetlenül a k_1, k_2, k_3, . . . idomok illetve területek*) lesznek megmérve még

*) Ezen k idomok területének meghatározását ugy eszközlik, hogy finom ceruzavonásokkal kihúzzák (1 : 2880 méretaránynál) a *hüvely* vonalakat miáltal az egész szelvény *holdakra* van bontva. Kiszámlálják hány ily egész hold van az illető k illetve $ü$ részben és a határvonal (csoportvonal) által *metszett* ily négyzeteken belül, a határvonal grafikus *„átalakításával“* úgy amint azt a 73. ábra mutatja, meghatározzák a *lemetszett részek* területeit.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

pedig *szelvényenkint* a szelvény területre való kiegyenlítéssel. Például az 1. szelvénynél: meghatározzuk az $\ddot{u}_1$ és a $k_1^{(E)}$ területeket és kiegyenlítjük F_0-ra az elméleti szelvény területre.

A 2. szelvénynél: meghatározzuk az $\ddot{u}_2$, $k_2^{(E)}$ és $k_2^{(C)}$ területeket és kiegyenlítés után:

$$\ddot{u}_2 + k_2^{(E)} + k_2^{(C)} = F_0.$$

Az 5. szelvénynél meghatározandó részek:

$$k_5^{(E)},\ k_5^{(C)},\ k_5^{(B)},\ k_5^{(D)},\ k_5^{(F)},$$

és ezek összege lesz F_0-ra kiegyenlítve.

Az ilymódon nyert k értékekből lesznek összegezéssel a csoport területek (K_A, K_B . . .) képezve.

A részletes területszámítás kiegyenlítésére azután ezen *(K_A, K_B, . . .) csoport területek* egyedül mérvadók.

Ugy az ellenőrző területszámítást, mint a részletes területszámítást egy *„revidens“* egészében megismétli illetve tételről-tételre felülvizsgálja.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

V. FEJEZET.

Bevezetés az országos felmérésekbe.

1. §. A föld tömegének, továbbá az égitestek tömegeinek egy földi P pontra gyakorolt vonzása és az ezen P pontra ható — a föld forgásából eredő — centrifugális erő együttesen azt az *eredő erőt* eredményezik, amelyet *nehézségi erőnek* nevezünk.*) A nehézségi erő iránya minden pontban más és más; ezen irányok *matematikailag* csak megközelítőleg állapíthatók meg, mert a földi anyag tömegek elosztása — amely első sorban mérvadó a nehézségi erő irányára — oly *szabálytalan*, hogy az *szigorúan* semmiféle matematikai formula által ki nem fejezhető.

Fizikailag azonban a nehézségi erő iránya bármely földi pontban egészen pontosan előállítható. Igy például vékony, egyik végén felfüggesztett, a másik végén pedig megterhelt fonal ezt az irányt, azaz a helyi *függőleges irányt* adja; mig a *libella* segítségével a műszertengelyeket szigorúan a *helyi függőleges* irányba, vagy az arra merőleges azaz a helyi vízszintes irányba állíthatjuk.

A P pont *függőleges* vonalán át fektetve képzelt síkokat *függőleges iránysíkoknak* nevezzük: két ily *függőleges iránysík által bezárt szöget vízszintes szögnek nevezünk.* A *vízszintes szögek* teodolittal másodperc pontossággal mérhetők. A P ponthoz tartozó azon függőleges iránysíkot, amely az égboltozaton csillagászati mérésekkel szabatosan megállapítható ugynevezett *sarokponton* megy át: a P pont *valódi meridiánsíkjának nevezzük.* Azt a szöget, melyet a P pontbeli és egyszersmind a tetszőleges földi A pontot is magában foglaló *vertikális iránysík* bezár a P pontnak (előbb definiált) valódi *meridiánsíkjával:* nevezzük a PA irány *valódi* (vagy csillagászati) *azimutjának* és jelöljük $\omega_{P,\,A}$-val. Hasonlóan az A pontbeli vertikális iránysík, amely P-n is átmegy, az A pontbeli meridiánsíkkal az AP irány azimutját (jelzése $\omega_{A,\,P}$) zárja be. Az $(\omega_{P,\,A} \pm 180°) - \omega_{A,\,P}$ különbség az A és P közötti valódi *meridián konvergencia.* A m. kir. háromszögelő hivatal ujabban tényleg mér *valódi azimutokat* (csillagászati uton): kezdő irány a helyi meridiánsík *déli* iránya és onnan haladnak, illetve számíttatnak az óramutató irányával egyező forgási értelemben (tehát nyugaton át) az *azimutok* 0°-tól 360°-ig. Az azimutok tehát mindig pozitiv előjelüek.

Azt a szöget, amelyet a P pont valódi meridiánsíkja a *kezdőmeridiánsíknak választott* meridiánsíkkal bezár: nevezzük a P pont *valódi földrajzi hosszúságának.*

Kezdő meridiánsíknak általában a *ferrói* vagy a *grenvichi* csillagda meridiánja választatik: a magyar országos felmérésekre tekintettel mi gyakran a *volt gellérthegyi csillagda* meridiánját vesszük kezdő meridiánnak és ilyenkor a Budapesttől *keletre* fekvő pontok *földrajzi hosszát* + előjellel, a nyugatra fekvő pontok földrajzi hosszát pedig — előjellel visszük további számításokba. A földrajzi hosszúság eszerint vagy 0°-tól 180°-ig, vagy 0 órától 12 óráig (plus vagy minus) haladó szög: jelzése λ.

---

*) A *tömegvonzás* nagyságát *Newton* törvénye állapitja meg, mely szerint két m_1 és m_2 tömegü pont kölcsönös vonzása r távolságban:

$P = f \frac{m_1 \, m_2}{r^2}$, ahol f a gravitatió *állandója* = 0.0000000663, a centiméter — gramm — secunda mértékrendszerben; a földi ekvatorral párhuzamos centrifugális erő nagyságát pedig a

$C = m \, \varrho \, \omega^2$, ahol ϱ a forgási sugár, ω pedig a szögsebességet fejezi ki. Az ekvatornál $C_0 = m \cdot$ 3.391 a c. g. s. mértékrendszerben; és $C_{45^0} = m.\ 2{,}402$; $C_{90^0} = 0$.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A valódi földrajzi hosszúság — illetve földrajzi hosszkülönbség mérése két (*A* és *B*) távoli pont között — oly módon eszközöltetik, hogy *egyazon időcsillagnak* átmenete a helyi valódi meridiánsíkon figyeltetik meg az *A* és a *B* pontokon, az átmeneti pillanatokat *telegrafice* jelzi a két állomás egymásnak és az ily módon megállapított *időkülömbség* adja időmásodpercekben a valódi földrajzi hosszkülönbséget.

Ilyen méréseket végez ez idő szerint hazánkban a cs. és kir. katonai földrajzi intézet több a 48° parallel kör mentén fekvő I. rendű háromszögelési ponton.

E mérések *tized másodpercre* (ívmásodperceket értve) megbízhatók.

Azt a szöget, amelyet a *P* pontbeli helyi *függőleges vonal* a földi forgási tengely irányával bezár: nevezzük a *P* pont *valódi zenittávolságának*. Ezen szögnek 90°-ra való pótszögét *a P pont valódi* (csillagászati) *földrajzi szélességének* (vagy sarkmagasságának) *nevezzük* és φ-vel jelöljük.

A m. kir. háromszögelési hivatal 1909. év óta hazánkban I. rendű háromszögelési pontokon mér csillagászati uton sarkmagasságokat *tized másodpercre* megbízhatóan.

2. §. A valódi földrajzi helyhatározóknak (szélesség és hosszúság) csillagászati uton való mérése által a helyi vertikális vonalak azaz a nehézségi erő eredőinek *térbeli irányai* jellemeztetnek. De a nehézségi erőnek nemcsak az iránya, hanem a *nagysága* is mérhető: vagy fizikai ingákkal, ha ugyanazon ingának ugyanazon nivófelület különböző pontjain megfelelő lengésidejét mérjük pontosan, vagy a báró Eötvös József-féle torzió mérleggel.*)

---

*) *Helmert* az *Eötvös*-féle eljárásról, a nemzetközi földmérés legujabb sikereire vonatkozó cikkében, ezeket írja:

„Mindenkép meg kell emlékeznünk e helyütt báró Eötvös Loránt különös berendezésü mérlegéről, melynek segítségével a nivó felületek helyi mathematikai állandói meghatározhatók.

A nehézségi variométernek nevezett műszer egy majdnem láthatatlan platinsodronyon horizontálisan csüngő rudacskából áll, mely mindkét végén aránylag súlyos aranydarabkákkal van megterhelve, még pedig az egyik vége közvetlenül, a másik finom sodrony közvetítésével, úgy hogy az egyik súly mélyebben csüng mint a másik.

A nehézségi erő a rúd két végén levő súlyon nagyság és irány szerint különböző, és különösen befolyásolja ezt a rudacskának azimutalis helyzete. Ha a rúd különböző azimut helyzeteit viszonylag az állványhoz észleljük, lehetséges lesz a nehézségerő potenciáljának bizonyos második különbözeti hányadosait kifürkésznünk, t. i. g-nek vízszintesen változó sebességét a dg/ds-ben, továbbá a helyi nivószintek főgörbületi mértékeinek különbségét és a főgörbülési vonalak azimutjait.

Természetes, hogy mindez igen subtilis észleléseket igényel, mindazonáltal sikerült báró Eötvös Lorántnak. azokat ahogyan azt a kongresszusnak bejelentette, hála a magyar kormány bőkezüségének, Arad környékén mintegy 400 négyzetkilométer síkságon végrehajtani. A nivófelületek görbülésének teljes meghatározásához természetesen szükség van asztronomiai és geodeziai mérések utján nyert ív közép görbületének értékére. Ezek magukban azonban nem alkalmasak arra, hogy a görbület egyes részei közti összefüggést megadják.

Ép oly kevéssé vagyunk képesek az inga mérésekkel (értve a fizikai ingákat) közvetlenül nyert g értékeknek dg/ds kölömbzeti hányadát pontosan kifürkészni, oly pontosan, mint amennyire az a földkéreg tömegeloszlásának bizonyos szemlélődései céljából kivánatos volna.

Természetes, hogy a rendszer, eltekintve helyi alkalmazásától csakis vízszintes területekre alkalmas. Báró Eötvös azonban vizsgálódásai eredményeinek pontosságára reámutathatott, miután azok csillagászati-geodéziai és nehézségi erőmérések által ellenőriztettek.

Dr. Hecker ennek kapcsán kilátásba helyezte, hogy a potsdami kir. porosz geodéziai intézet műhelyeiben felügyelete alatt készülő fotografiai nehézkedési variométerrel már a jövő évben kisérleteket fog tenni.

Báró Eötvös Lorántnak sikerült módszerével számos anyagra nézve kimutatnia, miszerint azok az 1 : 100.000.000-od rész bizonytalanság határán belül egyenlő erővel vonzatnak a föld által. Ezen munkájáért a göttingeni tudományos társaság úgy neki, mint két munkatársának rövid idő előtt pályadíjat osztott ki.“

Kiegészítésül megjegyezzük, hogy Eötvös báró itt említett két munkatársa *Pekár* és *Fekete* urak, és hogy az emlitett csillagászati-geodéziai és ingaméréseket *Oltay Károly* műegyetemi adjunktus végezte a nemzetközi geodéziai intézetben nyert eljárások szerint.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ezen meghatározások a nehézségi *erő gyorsulásának* (jelzése g) értékét bármely helyen **5** decimálisra élesen szolgáltatják.

A nehézségi erő mérések lényegileg kétfélék:

a) az úgynevezett *absolut* nehézségi erőmérések, amelyek a g teljes értékét szolgáltatják a megfigyelés helyén,

b) az úgynevezett *relalív* nehézségi erőmérések, amelyek a g értékének pontról-pontra való *változását* adják teljes megbízhatósággal.

Ilyen méréseket hazánkban *Eötvös* báró és a műegyetem geodéziai tanszéke végez ezidőszerint nagyobb számban. A cs. és kir. katonai földrajzi intézet *Sternek*-féle ingákkal végzett hazánkban nagyszámú — de nem feltétlenül megbízható — relatív *nehézségi erőméréseket.*

3. §. Azt a felületet, amelyet egy teljes nyugvásban és egyenlő légköri nyomás alatt levő folyadék felszine képez: *szintfelületnek (nívófelületnek)* nevezzük.

Matematikailag a nívófelület az a felület, amelyen a nehézségi erő potenciálja (W) *állandó* értékű vagy geometriailag: ez az a felület, *amely a nehézségi erő irányaira*, azaz az átmetszett helyi függőlegesekre, *minden pontban merőleges.* Minthogy a tengerek és óceánok felszine hidrostatikai okokból *megközelítőleg* valódi nívófelületnek tekinthető; minthogy a föld felszinének *túlnyomó* részét a tengerek felszinei alkotják; minthogy végül bizonyos, hogy a legmagasabb kontinentális emelkedések (hegységek) igen kis méretűek a *földi tömeg méreteihez képest:* világos, hogy *földünk alakja* első közelítésben *a földi nívófelület alakja által lesz definiálva.* Azaz ismerni fogjuk földünk alakját, ha *a tengerek és oceánok átlagos vízállásának* megfelelő, és a kontinensek belsejében is folytatva képzelt nívófelület alakját ismerjük. Ezen speciális nivófelületet *„geoid"*-nak nevezte az irodalom: a *tudományos* (vagy úgynevezett felső) *geodéziának* célja illetve törekvése ezen felület megismerése, és az ezen megismerésből a *gyakorlati geodézia* számára, első sorban az országos felmérések számára, használható gyakorlati következtetések levonása.

4. §. A geoid megismerésére irányuló évszázados törekvéseknek két korszakát különböztetjük meg:

a) Az első korszak az, amidőn *főcél* sőt a kizárólagos cél volt *a geoidhoz* (ezen szabálytalan felülethez) *alakra és nagyságra legjobban simuló szabályos (azaz matematikailag definiálható, egyenletrendszerrel kifejezhető)* felületet, — illetve ezen szabályos felület főméreteit — meghatározni.

b) Az ujabb, azaz a második korszak törekvése a nivófelületek *egyes részeit* nemkülönben a különböző magasságokban képzelt nivófelületek egyes részeinek egymással szemben való fekvését, elhajlását stb. tüzetesen számszerüleg vizsgálni.

A dolog természetében fekszik, hogy az itt elsőnek említett korszaknak meg kellett előznie az itt másodiknak említett korszakot.

Az első korszak a *fokmérések korszakának nevezhető;* a második korszak inkább a *nehézségi erőmérések* korszakának nevezhető, jóllehet e nehézségi erőmérések is rendszerint geodéziai és astronomiai helymeghatározásokkal kapcsolatosan végeztetnek el szükségszerüen.

A tudományos geodézia *első korszakának* végeredménye: a geoidot legjobban megközelitő *matematikai (azaz szabályos) felület egy oly forgási ellipsoid, amelynek kistengelye azonos a föld forgástengelyével* és amely ellipsoid fő méretei:

fél nagytengely: $a = 6\,378\,388$ méter

lapultság: $p = 1/298.4$

ahol $p = \frac{a-b}{a}$, ha b a forgási ellipsoid fél kistengelyének hosszát jelenti.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Az itt közölt a és p értékek az 1909. évig Európában és Amerikában végzett fokmérések eredményeinek középértékei.

Bessel a mult század elején végzett fokmérések alapján a következő — az országos felmérésekben sok helyen *(nálunk is)* még ma is alkalmazott — méreteket számította ki:

$$a = 6\,377\,397 \text{ meter}$$
$$p = 1/299.15$$

amely értékek közül a p érték a legujabb p értékkel igen jól egyezik; az a érték azonban **közel** *1000* méterrel kisebb a közölt legujabb értéknél. Ez az eltérés talán nem annyira a régebbi mérések gyengébb voltára, mint inkább a geoíd *rendetlen alakjára* vezethető vissza. Igy például a nyugateurópai szabatos fokmérési hálózatban az *északi rész* az a-t (Helmert szerint) 643 méterrel nagyobbnak adja, mint e hálózat déli része. Mindazonáltal az uj a értéket *tényleg* megbízhatóbbnak tartja a *„nemzetközi földmérés"*, mint a Bessel-féle értéket.

A p érték helyes voltát, ugyszintén a forgási ellipszoidnak, mint a geoid szabályos képviselőjének helyes voltát *nehézségi erőmérések is igazolják.* Ugyanis már 60 évvel azelőtt kimutatta *Stokes* angol fizikus, hogy a nehézségi erőnek sok helyen való pontos ismerete (számszerű mérése) által még akkor is, ha a földet első közelítéssel (megfelelő sugarú) gömbnek tekintjük *nemcsak* a *(Clairaut* által már régen ismertetett módon)*) *földi lapultság* pontos értéke, hanem a valódi geoid pontos alakja t. i. a valódi geoídnak egy lapult forgási ellipszoidtól való eltérései *megbízhatóan kiszámíthatók*, illetve megállapíthatók.

Több mint *2000* szabatos nehézségi erőmérés eredményéből *Helmert* az imént említett Stokes-féle eljárással a lapultságra a $p = 1/298.3$ értéket vezeti le és kimutatja, hogy a *geoid a simuló forgási ellipsoíd felülettől általában igen kis mértékben és szélső értékben mintegy 100 méterrel tér csak el.*

5. §. A magasságmérések alaptételei. Az imént közölt számszerű adatból tüstént azt a gyakorlati következtetést vonhatjuk le, hogy amidőn földi pontoknak a *valódi geoid* feletti magasságait akarjuk mérni, illetve meghatározni, hogy akkor a g nivófelületet *nem tekinthetjük forgási ellipsoídnak, mert akkor 100 méteres hibákat is követhetünk el a magassági adatokban.* A szabatos magasság mérésekben tehát a valódi nivófelületet nem helyettesíthetjük semmiféle *szabályos felülettel,* ami azonban nem zárja ki azt, hogy a nivófelületek rövid (nehány kilométeres esetleg csak 100—200 méteres) metszeteire bizonyos (szabályosságra vonatkozó) feltevések meg lesznek engedve még a legszabatosabb magasságmérésnél is.

Clairaut és *Stokes* tételein kívül még számos más módon használhatók fel a *nehézségi erőmérések* a geoíd, illetve általában a földi nivófelületek közelebbi megismerésére.

Igy például nehézségi erőmérések alapján volt kimutatható a *nivófelületeknek a polusok irányában való convergenciája,* azaz a különböző magasságban képzelt *nivófelületeknek nem párhuzamos volta,* amely körülménynyel — és azért említjük itt — számolni kell a gyakorlatban, nevezetesen az országos I. rendű szintezéseknél.

A nehézségi erő nagysága egy és ugyanazon nivófelületen a φ *földrajzi szélességgel változó értékű.*

Már több mint *200* éve ismeretes, (ingalengésekből), hogy a sarkok felé haladva: *a nehézségi erő nő.* (Sőt *Jérome de Lalande* már *1785* évben az addig ismeretes nehézségi

---

*) *Clairaut* hydrostatikai alapon levezetett nevezetes tétele képletbe foglalva:

$$p = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{g_0} - \frac{g_{90} - g_0}{g_0}$$

ahol g_0 a $\varphi = 0^0$, g_{90} pedig a $\varphi = 90^0$-nak megfelelő g; ω pedig a föld forgási szögsebessége.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ezen meghatározások a nehézségi *erő gyorsulásának* (jelzése g) értékét bármely helyen **5** decimálisra élesen szolgáltatják.

A nehézségi erő mérések lényegileg kétfélék:

a) az úgynevezett *absolut* nehézségi erőmérések, amelyek a g teljes értékét szolgáltatják a megfigyelés helyén,

b) az úgynevezett *relalív* nehézségi erőmérések, amelyek a g értékének pontról-pontra való *változását* adják teljes megbízhatósággal.

Ilyen méréseket hazánkban *Eötvös* báró és a műegyetem geodéziai tanszéke végez ezidőszerint nagyobb számban. A cs. és kir. katonai földrajzi intézet *Sternek*-féle ingákkal végzett hazánkban nagyszámú — de nem feltétlenül megbízható — relatív *nehézségi erőméréseket.*

3. §. Azt a felületet, amelyet egy teljes nyugvásban és egyenlő légköri nyomás alatt levő folyadék felszine képez: *szintfelületnek (nívófelületnek)* nevezzük.

Matematikailag a nívófelület az a felület, amelyen a nehézségi erő potenciálja (W) *állandó* értékű vagy geometriailag: ez az a felület, *amely a nehézségi erő irányaira*, azaz az átmetszett helyi függőlegesekre, *minden pontban merőleges.* Minthogy a tengerek és óceánok felszine hidrostatikai okokból *megközelítőleg* valódi nívófelületnek tekinthető; minthogy a föld felszínének *túlnyomó* részét a tengerek felszinei alkotják; minthogy végül bizonyos, hogy a legmagasabb kontinentális emelkedések (hegységek) igen kis méretűek a *földi tömeg méreteihez képest:* világos, hogy *földünk alakja* első közelítésben *a földi nívófelület alakja által lesz definiálva.* Azaz ismerni fogjuk földünk alakját, ha *a tengerek és oceánok átlagos vízállásának* megfelelő, és a kontinensek belsejében is folytatva képzelt nívófelület alakját ismerjük. Ezen speciális nivófelületet *„geoid"*-nak nevezte az irodalom: a *tudományos* (vagy úgynevezett felső) *geodéziának* célja illetve törekvése ezen felület megismerése, és az ezen megismerésből a *gyakorlati geodézia* számára, első sorban az országos felmérések számára, használható gyakorlati következtetések levonása.

4. §. A geoid megismerésére irányuló évszázados törekvéseknek két korszakát különböztetjük meg:

a) Az első korszak az, amidőn *főcél* sőt a kizárólagos cél volt *a geoidhoz* (ezen szabálytalan felülethez) *alakra és nagyságra legjobban simuló szabályos (azaz matematikailag definiálható, egyenletrendszerrel kifejezhető)* felületet, — illetve ezen szabályos felület főméreteit — meghatározni.

b) Az ujabb, azaz a második korszak törekvése a nivófelületek *egyes részeit* nemkülönben a különböző magasságokban képzelt nivófelületek egyes részeinek egymással szemben való fekvését, elhajlását stb. tüzetesen számszerüleg vizsgálni.

A dolog természetében fekszik, hogy az itt elsőnek említett korszaknak meg kellett előznie az itt másodiknak említett korszakot.

Az első korszak a *fokmérések korszakának nevezhető;* a második korszak inkább a *nehézségi erőmérések* korszakának nevezhető, jóllehet e nehézségi erőmérések is rendszerint geodéziai és astronomiai helymeghatározásokkal kapcsolatosan végeztetnek el szükségszerüen.

A tudományos geodézia *első korszakának* végeredménye: a geoidot legjobban megközelitő *matematikai (azaz szabályos) felület egy oly forgási ellipsoid, amelynek kistengelye azonos a föld forgástengelyével* és amely ellipsoid fő méretei:

fél nagytengely: $a = 6\,378\,388$ méter

lapultság: $p = 1/298.4$

ahol $p = \frac{a-b}{a}$, ha b a forgási ellipsoid fél kistengelyének hosszát jelenti.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Az itt közölt a és p értékek az 1909. évig Európában és Amerikában végzett fokmérések eredményeinek középértékei.

Bessel a mult század elején végzett fokmérések alapján a következő — az országos felmérésekben sok helyen *(nálunk is)* még ma is alkalmazott — méreteket számította ki:

$$a = 6\,377\,397 \text{ meter}$$
$$p = 1/299.15$$

amely értékek közül a p érték a legujabb p értékkel igen jól egyezik; az a érték azonban **közel** *1000* méterrel kisebb a közölt legujabb értéknél. Ez az eltérés talán nem annyira a régebbi mérések gyengébb voltára, mint inkább a geoíd *rendetlen alakjára* vezethető vissza. Igy például a nyugateurópai szabatos fokmérési hálózatban az *északi rész* az a-t (Helmert szerint) 643 méterrel nagyobbnak adja, mint e hálózat déli része. Mindazonáltal az uj a értéket *tényleg* megbízhatóbbnak tartja a *„nemzetközi földmérés"*, mint a Bessel-féle értéket.

A p érték helyes voltát, ugyszintén a forgási ellipszoidnak, mint a geoid szabályos képviselőjének helyes voltát *nehézségi erőmérések is igazolják.* Ugyanis már 60 évvel azelőtt kimutatta *Stokes* angol fizikus, hogy a nehézségi erőnek sok helyen való pontos ismerete (számszerű mérése) által még akkor is, ha a földet első közelítéssel (megfelelő sugarú) gömbnek tekintjük *nemcsak* a *(Clairaut* által már régen ismertetett módon)*) *földi lapultság* pontos értéke, hanem a valódi geoid pontos alakja t. i. a valódi geoídnak egy lapult forgási ellipszoidtól való eltérései *megbízhatóan kiszámíthatók*, illetve megállapíthatók.

Több mint *2000* szabatos nehézségi erőmérés eredményéből *Helmert* az imént említett Stokes-féle eljárással a lapultságra a $p = 1/298.3$ értéket vezeti le és kimutatja, hogy a *geoid a simuló forgási ellipsoíd felülettől általában igen kis mértékben és szélső értékben mintegy 100 méterrel tér csak el.*

5. §. A magasságmérések alaptételei. Az imént közölt számszerű adatból tüstént azt a gyakorlati következtetést vonhatjuk le, hogy amidőn földi pontoknak a *valódi geoid* feletti magasságait akarjuk mérni, illetve meghatározni, hogy akkor a g nivófelületet *nem tekinthetjük forgási ellipsoídnak, mert akkor 100 méteres hibákat is követhetünk el a magassági adatokban.* A szabatos magasság mérésekben tehát a valódi nivófelületet nem helyettesíthetjük semmiféle *szabályos felülettel,* ami azonban nem zárja ki azt, hogy a nivófelületek rövid (nehány kilométeres esetleg csak 100—200 méteres) metszeteire bizonyos (szabályosságra vonatkozó) feltevések meg lesznek engedve még a legszabatosabb magasságmérésnél is.

Clairaut és *Stokes* tételein kívül még számos más módon használhatók fel a *nehézségi erőmérések* a geoíd, illetve általában a földi nivófelületek közelebbi megismerésére.

Igy például nehézségi erőmérések alapján volt kimutatható a *nivófelületeknek a polusok irányában való convergenciája,* azaz a különböző magasságban képzelt *nivófelületeknek nem párhuzamos volta,* amely körülménynyel — és azért említjük itt — számolni kell a gyakorlatban, nevezetesen az országos I. rendű szintezéseknél.

A nehézségi erő nagysága egy és ugyanazon nivófelületen a φ *földrajzi szélességgel változó értékü.*

Már több mint *200* éve ismeretes, (ingalengésekből), hogy a sarkok felé haladva: *a nehézségi erő nő.* (Sőt *Jérome de Lalande* már *1785* évben az addig ismeretes nehézségi

*) *Clairaut* hydrostatikai alapon levezetett nevezetes tétele képletbe foglalva:

$$p = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{g_0} - \frac{g_{90} - g_0}{g_0}$$

ahol g_0 a $\varphi = 0^0$, g_{90} pedig a $\varphi = 90^0$-nak megfelelő g; ω pedig a föld forgási szögsebessége.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

erőmérésekből már *a nehézségi erő változási törvényét is felállította és alkalmazva e törvényt Clairaut* tételére: levezette a földi (sarki) lapultságot 1/320 értékkel.)

A legujabb időkben végzett szabatos nehézségi erőmérésekből (körülbelül 1400 adatból) *Helmert* a nehézségi gyorsulásnak a *geoidon* való változását ezen képlettel fejezi ki:

$$\gamma = 978,046\ (1 + 0,005302\ \sin^2 \varphi - 0,000007\ \sin^4 \varphi).$$

Ezen képlet a *normális nehézségi erő* képletének neveztetik: azért a baloldalon nem a g (azaz a *valódi* gyorsulás) hanem a γ (normális gyorsulás) szerepel.

A *valódi* g-nek a geoid felületen való változása matematikai képlettel, minden helyre teljes szigorusággal *érvényesen* nem fejezhető ki, mert a földi tömegek szabálytalan eloszlása a földkéregben, valamint a föld felszinének szabálytalan volta a normális γ-tól eltérő helyi g-ket eredményeznek.

Ezen eltérések azonban a fenti képlettel számítható γ (normális) értékekhez képest mindig *másodrendű* és ennél is *alacsonyabb rendű* értékek: amint azt számtalan tényleges mérés bizonyítja. Valamely helyre nézve a mért g és számitott γ közötti eltérést: *nehézségi rendellenességnek* nevezzük.

Helmert az ismertetett γ (számszerű) képletet kizárólag a szárazföldön, a föld felszinén végzett *és bizonyos feltevésekkel (kondensátiós módszer) a geoidra redukált ingamérésekből* vezette le.

Igen nagy jelentőségű tehát az a tény, hogy az utolsó évtizedben *Heckert* által a különböző *oceánokon* a *„forrponti termometer és higanybarometer"* módszerrel végzett nagyszámú nehézségi erőmérések — amelyek a valódi g-ket legalább ***1/40 000***-ezred, azaz a negyedik decimális 2 egységére élesen adták — *teljesen igazolták a közölt Helmert-féle* γ *képletet.*)*

Az ezek után megbízhatónak mondható γ képlet szerint a nehézségi erő a *geoidon* növekedő φ-vel (azaz a sark felé haladva) nő: és ennek következménye most már az, hogy a geoid felett képzelt más földi nivófelület *nem lehet szigorúan párhuzamos a geoiddal.* Ugyanis ***dh***-val jelölve a szóban forgó két nivófelület normális távolságát, a fizikából ismeretes, hogy két nivófelület között a *gdh szorzat* (amely nem egyéb, mint az egységnyi tömegre vonatkozó munka) *állandó, azaz* $gdh = \text{constáns}$; mivel azonban a szorzat két tagja közül a g a Helmert-féle γ képlet szerint a φ-vel változik, tehát a ***dh***-nak is kell, még pedig *ellenkező értelemben, változnia.*

A g a sark felé **nő,** tehát a *dh* a sark felé fogy: azaz a *különböző magasságokban képzelt nivófelületek nem párhuzamos,* hanem tényleg *a sarkok irányában egymás felé konvergáló felületek.*

---

*) Hogy a *Helmert*-féle γ képlet a valódi tengerszinén is beválik, azt először *Nansennek* a jeges tengeren (amikor a hajó jégtömbökhöz fagyva uszott) eszközölt rendes ingamérései igazolták. Ez az *ingamódszer* azonban szabad hajón egyáltalában nem alkalmazható.

Nansen földije *Mohn* ez időben a higanybarometer oszlopnak ugynevezett nehézségi erő korrektióját forrponti termometerekkel kezdte meghatározni, meteorologiai célokra. De már Mohn sejtette, hogy ezen módon uszó hajón g meghatározások lesznek eszközölhetők. Tényleg *Helmert* és *Hecker* tanárok ezt a módszert ily célokra ki is fejlesztették.

Az elv a következő:

a víz forrponti hőmérséklete független a nehézségi erőtől; de oly szervesen függ a légnyomástól, hogy laboratoriumi kisérletek alapján pontosan meg lehet állapítani *a különböző forrponti hőmérsékekhez tartozó barometer-higanyoszlop magasságokat* egy bizonyos g_n esetére. Ha most már az oceánon uszó hajón időnkint megállapítjuk a forrponti hőfokot és ugyanezen pillanatban a *tényleges* barometer-higanyoszlop magasságot, amely a helyi g-nek függvénye: úgy a $(g_n - g)$ mértékét kapjuk ezáltal. Nehézséget okozott a barometer leolvasása mozgó (ingó) hajón: de *Hecker* ezt a nehézséget a barometerállás fotografálása által küszöbölte ki.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Az egyes országok I. rendű szintezéseiben ezen konvergencia figyelembe vétele *100 milliméterig* terjedő javításokat, illetve a várható (megengedett) *mérési hibáknál is nagyobb értékeket* eredményezhet.

E *javítások* kétféle alakban: vagy mint *ortométeres,* vagy mint *dinamikai* javítások alkalmaztatnak a magasságmérésekben.

Az *alsó geodéziai* magasságmérésekben, ide értve a legszabatosabb *városi* szintezéseket, a nivófelületek *parallel felületeknek tekinthetők,* mert itt a szóban forgó *javítások* a várható *mérési* hibáknál *sokszorta kisebbek.*

Igy például szigorúan bizonyitható hogy egy, *500 méteres* magasságokat is tartalmazó szintezés, amely *3 km. hosszú* (észak-déli) vonalon eszközöltetett: **1.0 mm**-es javítást nyerne, *legrosszabb esetben a nivóconvergenciából* kifolyólag.

6. §. A vizszintes mérések alapvető tételei. A 4. §-ban közöltük azon forgási ellipszoíd méreteit, amely az egész *geoidot* a *szabályos* felületek végtelen sokasága közül *legjobban képviselheti.* A tudományos geodézia ma már oly — később tüzetesebben ismertetendő — eljárásokat is ad, amelyek segítségével *egy bizonyos országra* nézve az illető országnak megfelelő geoídrészhez *legjobban simuló* szabályos felületet, illetve forgási ellipszoídfelületnek *kardinális méreteit* (*a* és *p*) és *elhelyezését* lehet egyértelműen megállapítani.

Akár a közölt méretű, akár a speciálisan megállapított méretű és speciálisan elhelyezett forgási ellipszoídot tekintsük is: egyik sem lesz ugyan *azonos* a *geoíd* felülettel, de igen sok esetben, *számos műveletnél azonosnak tekinthető.* Ilyen esetek, illetve ilyen műveletek: *az országos (és helyi) vízszintes felmérések.*

A vízszintes mérések geometriai célja: *térszini konfigurációk, illetve pontok természetes vetületének helymeghatározása.* Természetes vetület alatt értve azt a képet, amely a *geoidon* előáll, hogyha a térszini konfigurációk összes meghatározandó pontjait a *helyi függőleges* irányokkal a *geoidra vetítve képzeljük.* A geoid maga az országos felméréseknél úgy van megrögzítve, hogy a tengerpartokon évek hosszú során át megészlelt vízállások *középmagassága fizikailag megjelöltetik* (közvetlenül vagy közvetve) és geoid felület alatt az ezen ponthoz, illetve pontokhoz tartozó *valódi nivófelületet értjük.**) Az országos (vagy

---

*) Azon kérdés eldöntése, hogy a tengerek egy közös nivófelületet alkotnak-e, elsősorban az úgynevezett *középvízállások* kisérleti megállapítását (megrögzítését) követeli.

Á tengerfelszín a nap és a hold vonzása, valamint a földnek tengelye körüli forgása miatt folytonos *ingadozásoknak* van alávetve, amelyeket *ár-apály* néven ismerünk és amelyekkel egyesül változó meteorologiai elemek hatása mint szelek, hőmérsék, légnyomás, csapadékok, ugyszintén a tengeráramlások stb. *Ezen mozgásokból az eredőt igyekszünk meghatározni* azáltal, hogy jól megalapozott, osztásos mércéken, — amelyeknek *nulla pontja* egy feltétlenül biztosan elhelyezett parti őrponttal össze van szintezve — rendszeresen napi vízállásleolvasásokat végzünk. Ilyen leolvasásokat *már évszázadok óta végeznek,* mert az ár-apálylyal változik a víz mélysége és a partok menti hajózásra igen fontos ezen periodikus változás pontos ismerete. Hogy a leolvasások lehetőleg megbízhatók legyenek, ugy kell a mércéket felállítani, hogy a tengerrel szabadon közlekedjenek, de a hullámveréstől meg legyenek kimélve, ami *aknáknak* illetve *csöveknek* (az apály vizszíne alatt mintegy 3 méter mélységben) alkalmazása által elérhető. *Angolországban* 1831. óta önműködő tengerszinmérőket — ugynevezett *mareográf*-okat — használnak. Lényege e készüléknek, hogy egy az aknában a vizszínen elhelyezett *„uszótest"*-nek *vertikális* mozgása emeltyűkar áttétellel egy — óraműszerkezettel forgatott — hengerfelületre vitetik át oly *görbe vonal* alakjában, melynek ordinátái az *„uszótest"* emelkedéseivel és süllyedéseivel arányosak, abscissái pedig közvetlenül az időt adják úgy, hogy a *napi* tengerszínállás e diagrammokból megállapítható. Franciaország *1843* óta használ mareográfokat; Németországban Baeyer tábornok *1870*-ben állította fel *Svinemündében* az első mareográfot. Ez idő szerint mintegy *140* mareográfon végeznek Európában rendszeres megfigyeléseket. Az Adriai tenger középvízszine a *polai* mareográf segitsé-

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

helyi) magasságméréseknek célja pedig *ezen térszini pontoknak* a nivófelülettől való függőleges távolságainak meghatározása.

Most azonban csakis a *vízszintes felmérésről lesz szó.* Feladatunk tehát a megrögzitett *geoidon* azaz egy adott ponton áthaladó eszményi felületen *levő pontok* helymeghatározása: de a méréseket mi tényleg a föld felszinén a valódi, térszini pontokra és nem a természetes vetület pontjaira vonatkozólag végezhetjük *közvetlenül.* Miként lehet most már a térszinén végzett méréseket a természetes vetület pontjaira nézve, *a megrögzitett geoid felületen végzett méréseknek tekinteni,* azaz röviden: *miként lehet a térszini geodéziai méréseket a geoidra* redukálni?

A térszinén, a térszini pontokra nézve teodolittal mérhető, illetve mért *vízszintes szögeket* a geoidon, a természetes vetület pontjaira nézve elvégzetteknek tekinthetjük. Ha tehát három térszini ponton (*A, B, C,*) vízszintes szögméréseket végeztünk ugy, hogy *A*-ból a $CB = \alpha$ vízszintes szöget, *B*-ből az $AC = \beta$ vízszintes szöget és *C*-ből a $BA = \gamma$ vízszintes szöget mértük, akkor ezen α, β, γ szögeket a *geoidon* közvetlenül a természetes vetület pontjaira nézve elvégzetteknek tekinthetjük.

Vízszintes *szögek külön redukciója a geoidra tehát nem létezik.*

De igenis van vízszintes *hosszredukció a geoidra.* A gyakorlatban 10 kilometernél nagyobb hosszúságot nem szoktunk *közvetlenül* hosszmérő eszközökkel mérni. Az ily hosszmérés *(bázismérés)* egy adott, ismert *fizikai mérőhossznak* (rúd, vagy feszitett drót 4—100 meter hosszal) egymásutánban való lerakásából áll; legyen τ a fizikai mérőhossz, és legyen i ezen fizikai mérőhossznak az egyes fekvésekben a vízszintes iránytól való libellával megmért elhajlás szöge. Feltéve, hogy ***A*** volt a mérés kezdőpontja és ***B*** volt a mérés végpontja: akkor az *AB*-nek megfelelő *természetes vetületbeli* hossz a geoid *felszinén* mérve:

$$1. \ldots\ldots A'B' = L' = \Sigma\tau - \tfrac{1}{2}\Sigma\tau i^2 - \Sigma\tfrac{\tau H}{R}$$

amely képletben H a *mérőhossz* magassága a geoid felett, és R a geoid megfelelő *görbületi sugara.* Ezen képletben az

$\frac{1}{2}\Sigma\tau i^2$ tag „*a horizontra való redukciónak*“ neveztetik, amelyet *Bouquer* alkalmazott első ízben a perui felmérésnél és amely tagot szigorúan $\frac{1}{2}\Sigma(\tau - \tau\cos i)$ alakban kellene irni; a $\Sigma\frac{\tau H}{R}$ tag pedig a *geoidra való redukciónak* neveztetik. Ezen redukció tag bármely gyakorlati célra elegendő pontossággal ezen egyszerű alakból is számítható:

$L\frac{H_k}{R_A}$ ahol R_A jelenti a bázisvonal irányára (azimutjára) vonatkozó ***A*** pontbeli görbületi sugarat; H_k pedig a mért bázis átlagos tengerszintfeletti magasságát jelenti, amely szintezéssel megállapitható. Nem szükséges, hogy e szintezés minden „*mérőhossz*“ magasságát adja: mindenkor elegendő a legjellemzőbb térszini törés pontok magasságaiból középértéket venni. Igy a H_k-ben elkövetett *640* mm-es hibának $^1/_{10000000}$ (tizedmilliomod) *bázishossz* hiba felel meg.

Ami az R_A értékét illeti, úgy itt nyer *mint segédeszköz* első izben alkalmazást a *földi forgási ellipszoid;* aménnyiben R_A-at mint *azon görbületi sugár értékét* számítjuk, mely az *A* pont földrajzi szélességének és az ***AB*** irány valódi azimutjának a földi forgási ellipszoidon megfelel.

---

gével lett megállapítva: *Dr. Farolfi* tanár által **1875.** évben 609 ár és 614 apály megfigyelésből. Őrpont a *Molo-Sartorion* levő pénzügyőri épületbe helyezett magassági jel, amely *alatt* 3.352 méterre van a *középtenger szintje.* Ujabban a katonai földrajzi intézet egy-egy évre 7 különböző helyen (Fiumében is) alkalmazott mareográfot; az eredmények még nem közöltettek.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Bremiker a „*Studien über höhere Geodäsie*“ (Berlin 1869) című művében számtáblázatot ad, melyben a fokról-fokra haladó φ és a fokról-fokra haladó α (azimut) argumentumhoz kikereshetjük a megfelelő R_A görbületi sugarat.

A φ földrajzi szélességhez és ω azimuthoz tartozó R_A görbületi sugarat egyébként ezen képletből számíthatjuk:

$$2. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R_A} = \frac{1}{N}\left(1 + \frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi\cos^2\alpha\right) \\ \text{ahol } e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \\ \text{és } N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \end{array} \right.$$

amely képlet egyes tagjainak értékei legcélszerűbben a *Th. Albrecht Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen. Leipzig 1908.* című táblázati gyüjteményből vehetők ki.

Az a körülmény, hogy az 1. képletben szereplő R illetve R-ek helyett a bázis-végpontbeli R_A-t vettük csak figyelembe, gyakorlatilag nem okoz *semmiféle érezhető* hibát, mert ha B az A-tól 10 km-re van (gyakorlatilag ez a maximális hossz) és R_A helyett R_B-t használjuk, úgy *Pizetti* szerint a hosszredukció 0,000016 $\frac{H_m}{R_A}$-val ad más eredményt, aminek $H_m = 2000$ méter esetében is még csak

$$\frac{1}{200\,000\,000},$$

tehát *minden mérhetőnél* —azaz a várható *mérési* hibánál — legalább *200*-szor kisebb hiba felel meg.

A hosszredukció nagyságára tanulságos, tájékoztató *közelítő* számtáblázatot lásd: F. U. I. rész 16. oldal.

Mivel az országos vízszintes felmérés alapművelete — *az országos elsőrendű háromszögelés* — lényegileg abból áll, hogy a térszín kimagasló pontjain egymástól (távcsővel) látható távolságban levő pontokat (jeleket) tüzünk *illetve választunk* ki és az azok által alkotott háromszög hálózat háromszögeinek minden egyes szögét *vízszintes szögméréssel*, továbbá egynehány — de *10 km*-nél nem hosszabb — háromszögoldalnak (az úgynevezett) *bázisoknak* vízszintes hosszait *közvetlenül mérjük* és e hosszakat *az imént ismertetett módon a megrögzített geoidra redukáljuk:* ennélfogva az I. rendű háromszögelésre vonatkozó α, β, γ stb. vízszintes szögértékek, továbbá a redukált L_1, L_2 stb. bázishosszértékek a geoidra, *azaz a természetes vetületre vonatkozó méréseknek tekinthetők, a mérési hibáknál sokszorosan kisebb és így soha számításba nem veendő elhanyagolásokkal.*

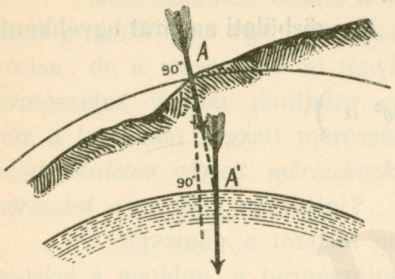
Azaz a gyakorlati élet szempontjából *absolute szigorúan* az α, β, γ stb. továbbá a redukált L_1, L_2, L_3 stb. értékeket a megrögzített geoidra vetített háromszögelési pontokra vonatkozólag *közvetlenül* a geoidon elvégzett méréseknek tekinthetjük.

Ha azonban, miként azt a m. kir. háromszögelő hivatal és a katonai földrajzi intézet sok pontra nézve ma már meg is teszi — az I. rendű háromszögelési pontokon valódi azaz csillagászati φ, λ és α méréseket is végzünk*), azokat is minden további redukció nélkül a *geoidon*, a természetes vetület pontjaira nézve elvégzetteknek képzelhetjük-e? Ez igen fontos kérdés — de már az eddig elmondottakból is következik, hogy itt *bizonyos redukciók léteznek.* Elég csak arra mutatni rá, hogy a nivófelületek konvergenciája miatt a függővonalak mint a nivófelületekre *merőleges* vonalak, szükségszerüen *görbe*

*) Az ilyen pontot *Laplace*-féle pontnak nevezzük.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

vonalak, sőt szigorúan nem is *sík-*, hanem *térgörbék;* hogy tehát a térszini A pontban más a vertikális irány mint az A pontnak geoidpontjában azaz az A' pontban. (74. ábra).



74. ábra.

Helmert kimutatja, hogy ha a szóban forgó *Laplace* pontok *igen kis magasságban feküsznek* a *megrögzített geoid* felett: úgy a térszinén mért φ, λ és α astronomiai szögek a *geoidon* mérteknek tekinthetők minden redukció nélkül. Például a magyar-alföldön ez az eljárás alkalmazható a legszigorúbb munkálatoknál is. (Eötvös báró szerint Budapest tájékán 5842 meter emelkedésnél ér el a függőlegesnek elgörbülése 1″-et, még pedig déli irányban.)

De ha nagyobb magasságok szerepelnek, (és ez a gyakoribb eset) úgy már a *redukciók* **szigorú** munkálatokban el nem hanyagolhatók. E redukciók azonban hypothesis mentesen csakis *nehézségi erőmérések* alapján eszközölhetők. Le is vezettettek képletek e redukciók számítására:

$$d\varphi = \frac{H}{ag}\left(\frac{\delta g}{\delta \varphi}\right)$$

$$d\lambda = -\frac{H}{ag}\left(\frac{\delta g}{\delta \lambda}\right) sec^2\ \varphi$$

ahol a zárjeles differenciál hányadosok az A pontra vonatkoznak. Azonban *Pizetti* itt arra figyelmeztet, hogy e képletek azon feltevésen alapulnak, hogy az A és A' pontok között *folytonos* sűrűségváltozás létezik, ami a valóságban általában nem talál. Már pedig *Pizetti* kimutatta, hogy esetleges rendetlen sűrűségváltozás hatása a redukcióra ugyanoly rendű mennyiség lehet, mint amily rendű mennyiség maga a képlet adta redukció érték. Azonban a *közölt képletek jól alkalmazhatók* a redukcióhoz, hogyha a természetes vetületet *nem a mélyen fekvő* geoidon, hanem egy célszerűen a föld felszíne *fölött haladó nivófelületen képzeljük előállítva*, ami különösen akkor, midőn a *nivófelületek helyi rendellenességeinek* tanulmányozása a cél — más okból is indokolt. Ilyenkor természetesen a mért bázisokat is erre a felszíni nivóra redukáljuk.

Hangsulyozzuk azonban, hogy az esetben, ha *2000* méter magasságban is vagyunk a geoid felett, az itt említett — és szabatosan meg sem határozható redukciók — *csak tized másodperc rendű mennyiségek.* Ezt mutatja például egy már Gauss által adott **közelítő** képlet:

$$d\varphi = -\ 1070.''\ \frac{H}{a} sin\ 2\varphi;$$

vagy a *Helmert* által levezetett ugyancsak *közelítő* képlet szerint:

$$d\varphi = -\ \frac{H}{5820}\ sin\ 2\varphi$$

amely képletben $d\varphi$ másodpercekben, H pedig méterekben helyettesítendő.

Az itt említett minimális elhanyagolásokkal tehát a térszinén mért csillagászati φ, λ és α szögeket is a természetes vetületen, *a természetes vetület pontjaira vonatkozottan mérteknek lehet tekinteni.*)*

---

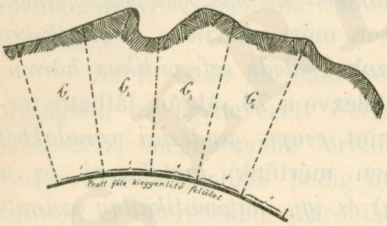
*) A térszinén mért φ, λ és α szögértékeknek egészen uj *redukálását* alkalmazta napjainkban *John F. Hayford* az *„Egyesült-Államok"* területén 19 fok észak-déli és 57 fok kelet-nyugati irányban kiterjedő fokmérési-háromszögelési adatok feldolgozásánál. *Hayford* az *úgynevezett Pratt*-féle hypothesist alkalmazza a redukálásnál. Ezen hypothesis szerint a földkéreg látszólag egészen szabálytalan anyagbeosztása olyan, hogy létezik a *geoid* (tengerszint) alatt bizonyos mélységben egy *úgynevezett kiegyenlítő* felület,

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

7. §. A forgási ellipszoid mint összehasonlító felület. A *vízszintes felmérések* szempontjából *mikor* és miként cserélhető fel a nivófelület a földi forgási ellipszoiddal?

Anélkül, hogy azon a definición: *a vízszintes felmérés célja a megrögzített geoidon levő természetes* vetület pontjainak helymeghatározása valamit változtatnánk, hajtsuk végre a következő müveleteket:

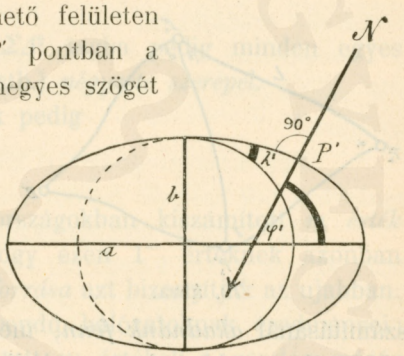
1. Mérünk *egy* alapvonalat és abból fejlesztünk egy nehány száz kilométer terjedelmű háromszöghálózatot (76. ábra) és ezt az előbbi pontban ismertetett módon *redukáljuk* a megrögzített geoid felületre.



75. ábra.

2. Legyen P_1 a bázis egyik végpontja, P_2 a másik végpont, és tegyük fel, hogy astronomiai uton mértük a φ_{P_1}, λ_{P_1} és $\omega_{P_1 P_2}$ csillagászati szögeket a P_1 pontban.

3. Képzeljük most el — egészen függetlenül a geoidtól — a földi forgási ellipszoidot például a *Bessel*-féle méretekkel. Ezen a szabályos, tehát egyenlettel kifejezhető felületen pontokat úgy definiálhatunk, hogy megadjuk az illető P' pontban a felületi normálisnak az ellipszoid nagytengelyével bezárt hegyes szögét (77. ábra) φ'-őt és megadjuk ezen felületi normális *meridián síkjának***) a kezdő meridiánsíknak választott meridiánsíkkal való szögét: λ'-őt. Az azonos φ'-vel biró pontok tehát a b tengelyre merőleges sík által kivágott körökön feküsznek *(parallel körök)* az azonos λ'-vel biró pontok pedig meridiánsíkmetszeteken (*meridiánellipszisekenröviden meridiánokon)* fekszenek.



77. ábra.

A φ' szög neveztetik *szferoidikus szélességnek*, a λ' szög neveztetik *szferoidikus* hosszúságnak.

---

amelynek területegysége felett (a földfelszínig számítva) mindenütt *ugyanaz a súlyú tömeg fekszik.* (A 75. ábrán tehát $\varsigma_1 = \varsigma_2 = \varsigma_3 = \varsigma_4$ stb.) Ha tehát minden függőlegesben a tömeget a *geoid* és e *„kiegyenlítési"* felület között egyenletesen elosztva képzeljük, úgy a *földkéreg* egy *egyenletesen sürü burkolattá* lesz: megfelel tehát annak az állapotnak, amelyet a föld belsejében feltételezünk. A kiegyenlítési felület mélysége (T) még ismeretlen. Azért *Hayford 162, 121* és *114* kilométer mélységbe helyezte és mindegyikhez számította az ezen tömegelosztásoknak megfelelő $d\varphi$, $d\lambda$ és da redukciókat. Ezen redukciókkal megjavítva a térszinén mért φ, λ és a értékeket: kereste hogy a háromféle φ, λ, a értékrendszerhez milyen méretű és lapultságú *forgási ellipsoid* simul legjobban azaz ad legkisebb vertikális elhajlási értékrendszert. Ezen kisérletek végeredménye: ha a T-t *122.2* kilométernek vesszük, és annak megfelelőleg redukáljuk a mért φ, λ és a értékeket *jutunk a legkisebb vertikális elhajlási értékrendszerhez* még pedig az

$$\begin{cases} a = 6\,378\,388 \text{ méter} \\ p = 1/297 \end{cases}$$

méretű forgási ellipszoidnál. Tanulságos most már az, hogy

a) a nyers φ, λ és a értékek esetén bármely mérettel vegyük is a forgási ellipszoidot, mindig nagyobb vertikális elhajlásokra jutunk;

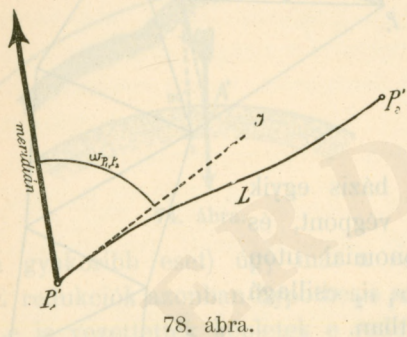
b) az így levezetett a és p értékek más ujabban levezetett értékekkel szépen egyeznek;

c) a $T = 122.2$ km. érték megfelel annak az értéknek, amelyet Helmert nehézségi erőmérésekből a valószinü T-re kapott. Tehát a Hayford-féle $d\varphi$, $d\lambda$, da redukció eljárásnak lehet létjogosultsága.

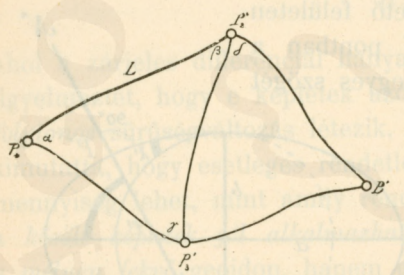
**) A forgási ellipszoidon meridiánsíknak minden a b (kis) tengelyen átmenő síkot nevezünk.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

4. Tekintsük most már a 2. alatt említett P_1 pontot azonosnak a forgási ellipszoid azon pontjával (P_1) ameiynek φ_1', λ_1' szferoidikus helyhatározói *azonosak* a térbeli P_1 ponton mért φ_{P_1}, λ_{P_1} szögekkel, továbbá képzeljük a szferoidon levő *meridiánellipsistől* ugyanazon forgási értelemben felrakva az ω_{P_1, P_2} szöget, mint ahogy ezen valódi azimutot valóban mértük. A forgási ellipszoid P_1' pontjának érintősíkjában így előállítva képzelt (*78. ábrán* a pontozott y irány) irányhoz *érintőlegesen* képzeljük a forgási ellipszoidra rajzolva az L hosszúságú *geodéziai vonalat.**) A térbeli P_1 P_2 alapvonalhoz (76. ábra) csatlakozó és sorakozó háromszögidomokra nézve mért *vízszintes* **szögeket** *tekintjük most már* a forgási ellipszoidon képzelt és *geodéziai vonalak által alkotott háromszögek belszögeinek.* (79. ábra.) Azaz a térszinen mért *vízszintes szögértékekre* (α, β, γ) ráfogjuk, hogy azok *„valódi szferoidikus háromszögek belszögei"*. Ezt feltételezve a 76. ábrán látható térszini háromszöghálózat mint *csupa geodéziai vonalakból* (mint amit a természetben mértünk) *tartalmazó,* és a felvett méretű ellipszoidon *egyértelmüleg elhelyezett* (79. ábra) *és igy matematikailag számítható konfiguráció jelentkezik.* **)



78. ábra.



79. ábra.

8. §. Kérdés: szabad-e mindezt tennünk? *Nem fognak-e itt érezhető kényszerek vagy szakadások előállani?* Mert ugyebár az mindenki előtt világos, hogyha például egy papir-gömb pontjaira nézve e gömbre rajzolt valódi gömbháromszögekből alkotott háromszöghálózatot egy *síkra* akarnók így vonatkoztatni, tehát azt is kikötnénk, hogy a síkon mint geodéziai vonalak, azaz mint egyenesek jelentkezzenek a háromszögek *ugyanazon belszögekkel:* akkor már a legelső háromszög rajzolásánál, illetve számításánál *akadnánk fenn*, mert hiszen a gömbi háromszög három szögének összege 180°-nál nagyobb, mig egy valódi síkháromszög belszögei összegben csak 180°-ot adhatnak!

Nem-e áll ez az eset itt is elő, amidőn a geoidra vonatkoztatott szögméréseinkre és hosszméréseinkre ráfogjuk, hogy azok *valódi szferoidikus háromszögek belszögei?*

A tapasztalat azaz számtalan ily mérés és számítás igazolta, hogy itt *kényszerről szó sincs, hogy kényszer egyáltalában nem jelentkezik, nem mutatható ki:* amint azt tüstént *számszerű* adatokkal kétségtelenül *igazolni fogjuk.*

Tekintsük az átlag *60—80* kilométeres távolban fekvő *A, B, C* térbeli pontokra nézve $^1/_{10}$ *másodpercek* leolvasására berendezett teodolittal mért α, β, γ vízszintes szögek *összegét.* (80. ábra.)

Legyen ez az összeg:

$$\alpha + \beta + \gamma = \ddot{O}.$$

---

*) L jelenti a 6. §. szerint a geoidra redukált bázishosszt, *Geodéziai* vonal alatt általában két felületi pont között a felületen megrajzolható *legrövidebb* vonalat értjük. A *síkon* az egyenes, a hengeren a csavarvonal, a gömbön a legnagyobb (központi) gömbi körök ivei és a forgási ellipszoidon *térgörbe* (tehát nem síkmetszet) alkotja a geodéziai vonalat.

) A P_1 pontot. amelyre nézve φ, λ és *azimut*-mérés eszközöltetett és *amely e hálózatot a forgási ellipszoidra szögezi:* **országos astronomiai fixpontnak nevezzük. Ez a pont — miként később látni fogjnk — nem szükségszerűen *bázisvégpont is egyszersmind.* Lehet az a *mért* bázistól messze fekvő háromszögelési pont is.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

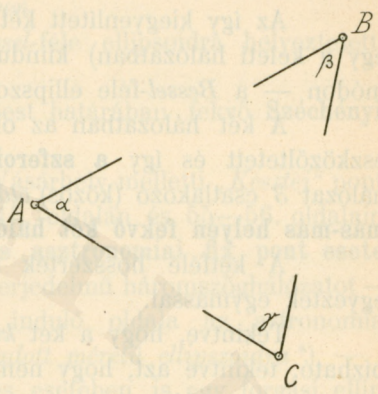
Egy *geodéziai vonalakkal határolt szferoidikus háromszög* belszögeinek összege pedig: $180° + szferoidikus\ szögfölösleg\ (\varepsilon)$.

Kérdés: gyakorlatilag a tényleg mért $Ö$ érték egyezik-e a megfelelő $180° + \varepsilon$ értékkel?

Felelet: *kivétel nélkül mindig egyezik: sőt minél pontosabban mérünk, annál jobban egyezik, jeléül annak, hogy az esetleges Δ eltérések*

3. . . . $\Delta = (180° + \varepsilon) - Ö$

elsősorban, azaz *értékük túlnyomó részében a mérés véges pontosságának és nem* a hypotezis adta *kényszernek* a következményei. Lássunk idevonatkozó bizonyító számadatokat.



80. ábra.

Az I. rendű háromszögeléseknél 1887 óta minden országban az úgynevezett *Ferrero-féle középhibát* szokás nemzetközi megállapodás értelmében kiszámítani. Ez a *Ferrero*-féle középhiba pedig nem egyéb, mint az előbb *definiált* Δ eltérésekből (záróhibákból) alkotott középérték:

4. . . . . $m = \sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{3n}}$

ahol n jelenti az *összes I. rendű háromszögek számát*, a $\Sigma\Delta^2$ tagba pedig minden egyes háromszögre nézve kiszámított Δ érték (tehát Δ_1, Δ_2, Δ_3 stb.) *négyzete szerepel.*

A Ferreró-féle m tehát a Δ-ák függvénye; a Δ-ák pedig

a) a mérési hibák,

b) a szóban forgó *kényszer hatásának* függvényei.

Sok száz elsőrendű háromszögből a különböző országokban kiszámított *m érték* ezideig átlagban alig érte el az *egy másodperc* értéket. Hogy ezen 1″ értéknek azonban nem a szferoidikus kényszer, hanem a mérési hibák a *főforrása* azt bizonyítják az ujabban, *bámulatos gondossággal* végrehajtott *porosz és francia* elsőrendű hálózatoknak eredményei: illetve az a tény, hogy az ezen háromszögelésekből számított m értékek a gondos mérés miatt **4**-szer *kisebbek az előbb közölt átlagos* (régebbi) m **értéknél**. A porosz nyugati hálózatból

$$m = \pm\ 0.''242,$$

A porosz keleti hálózatból

$$m = \pm\ 0.''272\ *)$$

A legujabb francia háromszögeléseknél $m = \pm\ 0.''26$.

Ezen számadatok azt bizonyítják, hogy *egy-egy* háromszögben illetve az egyes elsőrendű háromszögekben *kimutatható szferoidikus kényszer nem jelentkezik.*

De még ennél az adatnál is többet bizonyítanak a következő tények.

Az említett két porosz hálózat (keleti és nyugati) mindegyike kiegyenlítésnek lett alávetve. A kiegyenlítésekről külön fejezetben részletesen fogunk megemlékezni, itt csak azt említjük meg, hogy egy háromszöghálózatnak, mint *egyetlen, egész konfigurációnak* kiegyenlítésénél a *fölös* (azaz ellenőrző) *mérésekből kifolyólag* — amelyek több rendbeli feltételi egyenletek felállítására vezetnek — az esetleges *szferoidikus kényszerek* természetszerűleg *sokkal erősebb mértékben jelentkezhetnek, mint* egy-egy háromszögnek számításában.

*) Ezen m értékeknek — egyenlő nagyságú záróhibák esetében — alig felel meg $\Delta = 1''$-nél nagyobb érték, mert ha $\Delta = 1''$, akkor $m = \sqrt{\frac{1}{3}}$ tehát $= \pm\ 0.''18$.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A két nagy porosz hálózat kiegyenlítéséből a szöghibák középértéke a nyugati hálózatban ± 0.″462, a keleti hálózatban ± 0.″363, kicsiny értékekkel adódott; de itt is megjegyezhetjük, hogy még ezen *kis értékek is* elsősorban az elkövetett *mérési hibák hatásának* és csak másodsorban *a szferoidikus kényszernek* lesznek *betudva.*

Az így kiegyenlített két hálózat szögértékeiben és a mért bázisokból (egy a nyugati, egy a keleti hálózatban) kiindulva számíttattak — a következő fejezetben ismertetendő módon — a *Bessel*-féle ellipszoíd méreteivel a háromszögek összes *oldalhosszai.*

A két hálózatban az oldalhosszszámítás müvelete egymástól egészen függetlenül eszközöltetett és így **a szferoidikus kényszer szempontjából is** igen tanulságos a két hálózat *3* csatlakozó (közös) *oldalának hosszértékére* egymástól függetlenül azaz **az ellipszoid más-más helyén fekvő két hálózatból,** levezetett értékeket összehasonlítani.

A kétféle hosszérték az oldalhosszak **1/130 000, 1/300 000** és **1/435 000** részére egyeztek egymással.

Tekintve, hogy a két *kiinduló* háromszög oldalhossza 1/1000 000-modra volt megbízható, tekintve azt, hogy nem absolut, hanem *véges pontosságú* szögértékekkel történt a számítás és tekintve, hogy egyik háromszög a másik után, mint az előbbi háromszög következménye számittatik szükségszerűleg és hogy *sok* ily háromszög következett egymásra: a *hosszértékek egy milliomodról átlag egy kétszáz-ezredre való csökkenése a mérési hibák hatásának* **eredőjeként** fogható fel *egészen.* *) De feltéve, hogy itt a *szferoidikus kényszer is közreműködik,* akkor is azt mondhatjuk: *e kényszer és a mérési hibák hatása együttesen több száz kilométeres hálózatban sem eredményeznek 1/100 000-nél megbízhatatlanabb hosszértékeket.*

Egy százezrednek 10 kilométer hosszban *10 cm* felel meg, ami már *semmiféle gyakorlati célt szolgáló feladat megoldásánál szerepet nem játszhatik, észre nem vehető.*

Ha itt még megjegyezzük, hogy az említett két porosz háromszög-hálózatban a *közös* szögek a két hálózatból számítva *0.″028* illetve *0.″061*-ben tértek csak el egymástól, akkor beigazolva látjuk az *országos vízszintes felmérések alaptételét: „A megrögzített geoídra* a 7 §. szerint *vonatkoztatott I. rendű háromszöghálózatot bármely* ***gyakorlati*** *feladat*

---

*) Erre nézve rendkívül tanulságosak a *Pizetti* által összeállított következő adatok:

Képzeljünk több száz kilométeres háromszögláncolatot, amelynek két legtávolabbi oldala mérve van (***a*** és ***b***).

Ezen oldalak értékei sem absolut pontosak: középhibáik legyenek μ_a és μ_b.

A hálózat egyes szögeinek (átlagos) középhibája legyen μ, és a háromszögek száma legyen n.

Ezen adatok — illetve ezen *mérési hibák* — alapján ki lehet számítani *à priori* azon M záróközéphibát, amelylyel az ***a*** bázisból indulva a számítással, a (mért) ***b*** bázisra jutnánk.

Pizetti kiszámította *à priori* a μ-eket több Európai láncolatra és közli az M-eket és a *tényleg* talált δ-kat az oldalhossz *logaritmusának 7-ik decimálisában.*

	δ	M
Ostende—Lommel	+ 32	± 46
Lommel—Bonn	+ 38	± 31
Bonn—Göttingen	— 12	± 14
Berlin—Königsberg	— 23	± 32
Königsberg—Strehlen	— 23	± 35
Strehlen—Czenstochan	+ 4	± 34

Látnivaló, hogy a tényleges δ-ák ugyanoly rendű (sőt kisebb) értékek, mint amilyeneket *tisztán a mérési hibák* hatásából (függetlenül szferoidikus kényszertől) *a priori* le lehet vezetni.

Hazánkban az *„erdélyi“* hálózat a *„magyarországi“* hálózattól egészen függetlenül van számítva. A közös oldalakra nézve tehát itt is különbségek jelentkeznek:

19-től 76 egységig a logaritmus 7 helyén, de itt a pontok *kétes azonossága* okozza a nagy eltérést.

E csatlakozásra nézve bővebbet közlök a *V. U.*-ban a *61—70.* oldalokon.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

megoldása céljából absolut szigorúan a földi forgási ellipsoidon elhelyezettnek képzelhetjük, azaz az országos ***vízszintes felmérések*** szempontjából *a geoid absolute szigorúan azonosnak tekinthető a forgási ellipsoiddal.* Ami az ellipsoid legmegfelelőbb méreteit illeti, azok közöltettek (a 4. §-ban) itt csak azt hangsúlyozzuk, hogy a **Bessel**-féle ellipsoid méretek azért még *ma is feltétlenül alkalmazhatók az országos felmérésekben.*

A magyar országos háromszöghálózat is a *Bessel*-féle ellipsoidra helyeztetett; *Asztronomiai fix pont:*

a) a **„magyarországi"** főhálózatra nézve a Budapest határában fekvő **Széchényi**-hegy pont illetve az ebből levezetett *„Gellérthegy"* pont;

b) az „**erdélyrészi**" főhálózatra nézve pedig a Maros-Vásárhely melletti *„Kesztej"* pont.

Az idevonatkozó részletes adatokat lásd: a *V. U.* 15. oldalán és 55—56. oldalain.

9. §. A vertikális vonal elhajlásai; két országos asztronomiai fix pont esete. Számszerű adatokkal bebizonyítottuk, hogy egy tetszőleges terjedelmű háromszöghálózatot — ha e hálózat egy pontja (P_1) és egy ezen pontból induló oldala az astronomiai uton nyert φ, λ és ω szögértékek szerint helyeztetett *az adott méretü ellipszoidra* *) — a *legszabatosabb* adatokat kivánó gyakorlati vízszintes felmérés esetében is egy forgási ellipszoidon, geodéziai vonalakból álló háromszögekre nézve végzett műveletnek tekinthetjük. Ha ezt tudva, a $P_1 P_2$ oldalból (76. ábra) illetve az erre megadott L és ω értékből kiindulólag a kiegyenlített α, β, γ *stb. belszögek* alapján a következő pontban egészen részletesen ismertetendő képletek segitségével háromszögről-háromszögre haladva kiszámítottuk az *összes háromszögoldalak* (geodéziai vonalak) *oldalhosszait* (méterekben vagy ölekben) akkor a P_1 pontra nézve megállapított φ, λ értékekből és a $P_1 P_2$ oldalra megállapított ω értékből kiindulva, kiszámíthatjuk először is, a P_2' pont *szferoidikus* φ_2', λ_2' értékét és a $P_2' P_1'$ geodéziai vonal szferoidikus azimutját P_2' pontban $(\omega'_{2,1})$; most (79. ábra)

$$\text{az } \omega'_{2,1} - (\beta + \delta) = \omega'_{2,4} \text{ azimut}$$

és a $P_2' P_4'$ oldalhossz valamint φ_2', λ_2' alapján számíthatók a P_4' pont *felületi normálisának* helyhatározói azaz a φ_4', λ_4' és az $\omega'_{4,2}$; és így tovább oldalról-oldalra haladva, számíthatók az összes elsőrendű háromszögelési pontok (melyek ebben a *szerves* hálózatban vannak) *szferoidikus földrajzi összrendezői* (φ', λ') *és az oldalak* (geodéziai vonalak) *szferoidikus azimutjai.* Ezen, németül *„Azimutübertragung"*-nak nevezett számítás részleteit e könyvben nem közöljük, **) de megemlítjük, hogy e számításoknak a *Bessel ellipszoidon való legszabatosabb és gépies* végrehajtására készültek a *„Formeln und Tafeln zur Berechnung geographischer Coordinaten, von General Dr. O. Schreiber. Berlin"* című számtáblázatok.

Három ilyen táblázat van; aszerint, hogy I. rendű (50 kilométernél hosszabb), vagy II. rendű (25 kilométernél hosszabb) vagy III. rendű (5 km.-nél hosszabb) háromszögoldalakról van szó, a számítás aszerint egyszerűbb és rövidebb képletekkel és egyszerűbb táblázattal történik.

Ezen táblázatokkal a φ' és λ' *értékek a másodperc 4-ik decimálisára élesen* $(\pm\ 0.''00005)$ *számíthatók.* Mivel $d\varphi' = 1''$-nek körülbelül **35** méteres ívdarab felel meg a forgási ellipszoidon, azért

---

*) Tényleg ez a *„helyeztetett"* szó azt jelenti, hogy a háromszöghálózatnak az ellipszoidon való *számításánál,* a P_1 pontnak ezt a φ és λ értéket és a $P^1{}_1$—$P^1{}_2$ geodezíai vonalnak ezt az ω-t tulajdonítjuk az **ellipszoidon** is.

**) Mivel mi mindent *„vetületi"* alapon számítunk, azért nálunk Magyarországon ezen szferoidikus számításnak nincs jelentősége. Különben is a *Schreiber* táblázatok alkalmazása — ha szükség volna rá — egészen *gépiesen* történik, előtanulmányt nem kiván.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

$d\varphi' =$ 0.″1-nek körülbelül 3.5 *m*
$d\varphi' =$ 0.″01-nek „ 0.35 „
$d\varphi' =$ 0.″001-nek „ 0.035 „
$d\varphi' =$ 0.″0001-nek „ 0.0035 „
tehát $d\varphi' =$ *0.″00005*-nek „ *0.0015* „

azaz ± **1.5** milliméter felel meg. A $d\lambda' \pm$ 0,″00005-nek pedig a mi földrajzi fekvésünk mellett csak körülbelül ± 0.8 milliméter felel meg.

Az azimutokat ezen táblázatokkal az I. rendűnél 0.″0005
a II. „ 0.″005
a III. „ 0.″05-re

élesen számíthatjuk ami a legszabatosabb célra is elegendő, mert például egy *10* kilométeres oldalnak végpont-ingadozása $d\omega' = +$ 0.″05 esetében = ± **2.4** milliméter.

A háromszögelési pontok helyzete a forgási ellipszoidon az így gépiesen számított φ' és λ' értékek által tehát *milliméterre élesen* lesz definiálva.

Ha most már ezen így számított háromszöghálózatnak egy tetszőleges háromszögelési pontjában *tényleg* végzünk csillagászati φ, λ és ω méréseket. tehát ha például a P_i pontban mérjük csillagászati uton a *valódi* φ_i és λ_i szögeket és mértük a $P_i\ P_h$ oldal valódi azimutját $\omega_{i,\,h}$-t is, akkor azt fogjuk tapasztalni, hogy ezen csillagászati uton megállapított φ_i, λ_i és $\omega_{i,\,h}$ adatok a Schreiber-féle (vagy akármiféle más) módszer szerint számított φ'_i, λ'_i és $\omega_{i,\,h}$ szferoidikus szögértékekkel nem egyeznek és az eltérések *10—20* másodpercet is tehetnek ki.

Azaz a

$$5. \quad \begin{cases} \Delta\varphi = \varphi'_i - \varphi_i \\ \Delta\lambda = \lambda'_i - \lambda_i \text{ és} \\ \Delta\omega = \omega'_i - \omega_i \end{cases}$$

különbözetek mindig jelentkeznek: helyenkint kisebb, helyenkint nagyobb értékkel. Lássunk nehány hazai példát.

Igy az *Oltay* Károly műegyetemi adjunktus által *Arad* vármegyében 1908—1909. évben végzett csillagászati azimutmérések az *Otkovác - Kuvin* oldal azimutjára $\omega_{O.\,K.} = 41°\ 55'\ 36.''52$-et eredményeztek, míg a „magyarországi“ háromszögelési hálózatból általunk számított azimut:

$$\omega'_{O.\,K.} = 41°\ 55'\ 51.''36.$$

Ezen háromszögelési pontban tehát:

$$\Delta\omega = +\ 14.''84.$$

Oltay ugyanezen oldalnak valódi azimutját *Kuvin pontban* is mérte, és az

$$\omega_{K.\,O.} = 221°\ 52'\ 44.''31$$

értéket nyerte. Ezzel szemben a „magyarországi“ háromszögelési hálózatból számítva a szferoidikus azimutot, az

$$\omega'_{K.\,O.} = 221°\ 53'\ 0.''04$$

értékre jutok.

Ezen háromszögelési pontban tehát:

$$\Delta\omega = +\ 15.''73.$$

Ezen példából az is látható, hogy nemcsak az *azimutértékek* nem egyeznek különböző pontokban, hanem egy és ugyanazon oldalra nézve az *azimutkonvergencia* is (1. §. 2. bekezdés) más értékkel bír ha csillagászati, és más értékkel, ha geodézial uton lett megállapítva. Ugyanis jelen esetben

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

$$(\omega_{K.\,O.} - 180°) - \omega_{O.\,K.} = -\ 2'\ 52.''21$$
$$\text{és } (\omega'_{K.\,O.} - 180°) - \omega'_{O.\,K.} = -\ 2'\ 51.''32$$

az eltérés a konvergencia-értékben tehát

$$\text{(geod.-astron)} = -\ 0.''89.$$

Ugyanezen vidéken az *Oltay* által mért

Otkovác-Mikalaka

azimutja $\Delta\omega = +$ **17.''12**-el tér el a geodéziaitól, és a *Mikalaka-Otkovác* azimut pedig $\Delta\omega = +$ *12.''34*-el tér el a geodéziai azimuttól.

Ezen háromszögoldalra nézve tehát már + **4.''78** a *meridián konvergencia különbség.*

De nemcsak az azimutokban, hanem a földrajzi *szélességek* kétféle módon levezetett értékeiben is találunk hasonló különbözeteket

Igy például a *Kesztej* nevű háromszögelési pontban a cs. és kir. katonai földrajzi intézet csillagászati uton a

$$\varphi_K = 46°\ 33'\ 9.''12$$

értéket mérte ; levezetve e pont szferoidikus földrajzi szélességét a *„magyarországi"* háromszöghálózatból, a

$$\varphi'_K = 46°\ 33'\ 6.''427\ 3$$

értékre jutunk, tehát itt

$$\Delta\varphi = -\ 2.''69.$$

Ugyanott mért a katonai földrajzi intézet csillagászati azimutot is :

$$\omega_{(Kesztej\text{-}Tiglamor.)} = 146°\ 57'\ 38.''84\ ;$$

míg a geodéziailag általunk levezetett azimut :

$$\omega'_{(K.\text{-}T.)} = 146°\ 57'\ 41.''052.$$

Tehát ezen pontban

$$\Delta\omega = +\ 2.''212.$$

Érdekes idevágó adat a *„Gellérthegy"*-pont földrajzi összrendezőinek levezetése is.

A *bécsi* esillagda (Türkenschanze) astronomiai adataiból geodéziailag levezetve *„Gellérthegy"* adatait :

$$\varphi'_G = 47°\ 29'\ 14.''97$$
$$\lambda'_G = 36°\ 42'\ 51.''69 \quad \text{(ferró)}$$

A budapesti *„Széchényi"*-hegy pontban mért csillagászati adatokból indulva ki, a

$$\varphi'_G = 47°\ 29'\ 9.''6380$$
$$\lambda'_G = 36°\ 42'\ 53.''5733$$

értékekre jutottunk.

Tehát a földrajzi szélesség 5.''332-el, a földrajzi hosszúság pedig 1.''8833-el, más értékű aszerint, amint a *bécsi* vagy a *budapesti Laplace*-féle pontból vezetjük le geodéziailag a poziciót.

A *„Gellérthegy"* pontból induló oldalak azimutjaira pedig a *bécsi* astronomiai pontból való levezetés *6.''44*-el más értékeket ad, mint a *„Széchényi-hegy"* pont astronomiai adataiból eszközölt levezetés. (E levezetések egész terjedelemben a *V. U.* 55—60. oldalain közöltetnek).

Az itten közölt $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$, $\Delta\omega$ számértékekhez *hasonló rendű* számértékek mutatkoznak minden országban : a föld minden helyén. Az ily módon megállapítható $\Delta\varphi$ és $\Delta\lambda$ kicsiny szögértékeket *vertikális elhajlásnak* nevezzük :

$\Delta\varphi$ adja a *helyi vertikális vonalnak* (azaz a nivófelület normálisának) *elhajlását* az alapul választott *ellipszoid* felületi normálisától az észak-déli irányban ;

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

$\Delta\lambda$ pedig megadja a helyi vertikális vonalnak (azaz a nivófelület normálisának) elhajlását az alapul választott ellipszoíd felületi normálisától a kelet-nyugati irányban.

A $\Delta\varphi$ és $\Delta\lambda$ szögek tehát a P pontbeli helyi függőleges irány és a P' pontbeli ellipszoídikus normális irány közötti *„térbeli teljes elhajlásnak"* (totale Lotabweichung, déviation, attraction locale), *két komponense, illetve derékszögű vetülete.*

Az a százszorosan beigazolt tény, hogy ezen $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$ értékek mindenütt (de hol kisebb, hol nagyobb értékkel) fellépnek, azt mutatja, hogy *a forgási ellipszoíd geometriailag tényleg nem azonos felület a geoíddal,* azaz a földi nivófelülettel. De nagyszámu kisérletek azt mutatták, hogy a *szabályos felületek* (azaz az egyenletrendszerrel definiálhatók) között *a forgási ellipszoíd* adja a $\Delta\varphi$ és $\Delta\lambda$ elhajlási értékekre a *legkisebb értékrendszereket.* (Ha például gömböt veszünk alapul, nagyobb $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$-ákra jutunk; hasonlólag ha három tengelyű ellipszoídot veszünk, szintén nagyobbak az eltérések.)

De van végtelen sokféle méretű és végtelen sokféle lapultságú forgási ellipszoid. Valamely ország geoid részének legmegfelelőbb forgási ellipszoidját meghatározni most már annyit tesz, mint azt az a és p méretet megállapítani, amely mellett a $\Delta\varphi$ és $\Delta\lambda$ elhajlások rendszere *minimum* lesz (zérus soha sem lesz.) *Ezzel megmagyaráztuk az úgynevezett fokméréseknek célját,* amelyekről a *4.* §-ban bővebben írtunk, és amelyekre — miként ugyanott kifejtettük — legujabban a *Pratt*-féle hypothesis alapján a geoidra redukált csillagászati φ, λ és ω értékeket, nem pedig a tényleg mért φ, λ és ω szögértékeket használják fel.*)

---

*) A *fokmérések* fejlődéstörténetét a következőkben ismertetjük.

Az első időben *gömbnek* tételezték fel a földet és e gömb mérete ismeretes lesz, ha az 1°-nyi földrajzi szélességkülönbségnek megfelelő meridián ív hossza ismeretes.

Az első ilynemű mérést *Eratosthenes* végezte (Krisztus sz. e. 276 évvel) Ägyptomban: az Alexandria és Syene közti földrajzi szélességkülönbséget 7° 30'-nek mérte napátmenetekből, a távolságot pedig a karaván haladó sebességéből, 5000 stadionnak találta. A meridiánkör kerülete eszerint 2 500 000 stadion.

Posidonius (Kr. sz. e. 135 évvel) a Rhodus-Alexandria ívből 2 400 006 stadionnak találta a meridiánkör kerületét. Méterekben kifejezve a meridiánkör negyede (quadráns) eszerint *11 562 000* illetve *11 100 000* méter.

(A legujabb érték körülbelül 10 000 000 meter.)

A *középkorban* csak *1525*-ben találkozunk az első fokméréssel: *Fernel* orvos a *Paris-Amiens* ívből (a távolságot a kocsi kerekének fordulatszámával mérte) *10 011 000* meternek megfelelő hosszuságunak számította a quadránst.

Snellius Willebrord (1580—1626) alkalmazta először a *háromszögelést:* Hollandiában igy mérte az Alkmaar-Bergen ívet ($\varphi_A - \varphi_B = 1°11'$) és a quadránst *10 004 000* méternek találta.

Pikard J. a francia tudományos akadémia megbizásából *1670* körül háromszögeléssel mérte a *Malvoisine.Amieus* ($\varphi_M - \varphi_A = 2° 35'$) ívet. Itt alkalmaztatott első izben a vizszintes szögek mérésére az irányszálakkal ellátott távcső és itt eszközöltetett az első *szabatos bázismérés.* A *Pikard*-féle hálózatot folytatták *Cassini* és később *J. M. de Chazelles* és *1718*-ban a következő eredményekre jutottak:

a déli ivből	$1° =$	57098	Toise.
a középső „	$1° =$	57060	„
az északi „	$1° =$	56960	„

Tehát e mérések szerint a foknak hossza észak felé fogy és így kimondották, hogy a föld nem *gömbalakú*; de nem sarki *lapultságra,* hanem sarki *megnyultságra* következtettek — nem eléggé pontos geodéziai mérések alapján.

Ezen időben már *fizikai* vizsgálatok alapján is többen kimutatták a *gömbhypothesis* lehetetlen voltát. *Newton* és *Clairaut* a nehézségi erő változásából sarki lapultságra következtettek, *Laplace* pedig a Méch. cél. cimü művében matematikai uton kimutatja, hogy ami naprendszerünkben a *forgási ellipszoid* két esetben lesz *egyensúlyi* felület

a) ha az illető égi test homogén

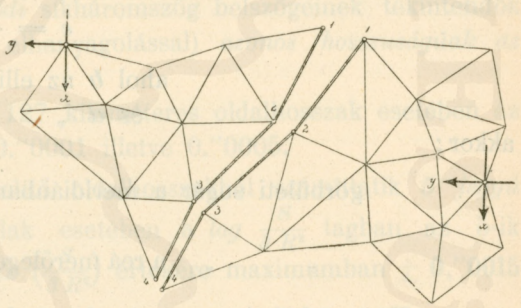
b) ha az illető égi test cseppfolyós halmazállapotú és nem homogén, de a sűrűség a magból kifelé csökken és ha az egyenlő sűrűségű rétegek nem nagyon különböznek a gömbalaktól.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Visszatérve most már az országos felmérésekhez, az itt közöltekből a következő gyakorlati tanulságot vonhatjuk le. Ha azt akarjuk, hogy az egész ország területét beborító I. rendű háromszög hálózat az *ellipszoidon* mint egy összefüggő, és szigorúan szerves konfiguráció feküdjék: úgy csak *egyetlen astronomiai fixpontot* (azaz egyetlen csillagászati φ, λ értéket) *és egyetlen astronomiai azimutot* szabad szferoidikus φ', λ' és ω' értékek gyanánt bevezetni. Ha tehát úgy járunk el, mint ahogy a m. kir. háromszögelő hivatal járt el annak idején, hogy az egyébként a természetben folytatólagos, összefüggő hálózat egyik részét (az *erdélyi*-t) egy *külön* astronomiai fixpont és oldal adataiból kiindulva, számítjuk a szferoidon: akkor a két hálózat geometriailag két különvált, az azonos oldalakra nézve eltolt és elforgatott konfigurációként jelentkezik a forgási ellipszoidon. (81. ábra) *Gyakorlatilag ez az elforgatás és elszakadás mikor és miben fog nyilatkozni?*

a) Először is abban, hogy *ugyanazon* pontra nézve más φ', λ' értékpárt és ugyanazon oldalra nézve más szferoidikus ω' azimutot fogunk nyerni aszerint, hogy melyik hálózatból számítjuk ezen értékeket. Ez azonban a *gyakorlati* földmérő szempontjából egészen közömbös lehet, *mert a földméröi gyakorlatban földrajzi összrendezők sohasem szerepelnek.*

b) Másodszor abban nyilvánul, hogy amidőn *a háromszöghálózatokat bizonyos matematikai törvény szerint síkra vetítjük azon célból, hogy a gyakorlati felmérések részére a háromszögelési pontok derékszögű sík összrendezőit megadhassuk:* akkor a két hálózat a síkon is mint egymáshoz képest eltolt és elforgatott két konfiguráció fog jelentkezni és így külön derékszögű sík koordináta rendszere lesz szükségszerűleg az egyik hálózatnak és külön koordináta rendszere lesz a másik hálózatnak is (81. ábra). A gyakorlat szempontjából azonban ez sem okoz bajt, hiszen egy nagyobb országnál, *később részletesen előadandó okokból úgyis kell több sík koordináta rendszert* alkalmazni. A két különvált hálózatnak gyakorlati hátránya csak abból áll, hogy *a két hálózatban közös oldalak* mentén képzelt 25—30 kilométer széles területsávon levő felsőrendű háromszögelési pontokat és 5—10 kilométeres sávon az alsórendű háromszögelési pontokat is mind a két koordináta rendszerre nézve kell külön-külön kiszámítani, még pedig nem az ezen könyv 2. fejezetében előadott egyszerű koordináta transformációval, hanem *a háromszögelések közvetlen mérési eredményei*, azaz szferoidikus oldalhosszak és a mért belszögek alapján. Ezt az eljárást a következő kötetben tüzetesen fogjuk tárgyalni.



81. ábra.

A franciaországi fokmérések tehát *„citrom“* a fizikai mérések és mechanikai levezetések pedig *„narancs“* alakot tulajdonítottak a földnek, illetve a tengerek felszínének. A vita eldöntésére a francia akadémia *Peruban* és *Lapplandban* végeztetett egy-egy szabatos fokmérést (1736—1737) : az ekvator menti fok tényleg kisebbnek bizonyult mint a sark közelében mért fok és igy kétségtelenné lett a *sarki lapultság*, melynek értéke — e mérések szerint — $^1/_{215}$.

A francia nemzetgyűlés 1790-ben egy természetes (örök) hosszegységet akarván megállapítani, uj fokmérést határozott el oly célból, hogy a nyerendő ellipszoid quadránsának $^1/_{10\,000\,000}$ része legyen a jövőben örökre a hosszmérések egysége. Igy keletkezett a *„meter“*; e fokmérést *Dünkirchentől—Barcelonáig* ($9\,^1/_2°$) végezték. A *„meter“* azaz a meridián kvadráns ^{1}/tízmilliomod része itt 443, 296 parisi vonal hossza gyanánt adódott.

Később nemcsak meridiánok, hanem parallel körök mentén is fejlesztettek hálózatokat; ma már az 1864-ben alakult *„nemzetközi földmérés“* intézményének vezetése mellett az összes I. rendű országos hálózatok szervesen összekapcsolva használtatnak fel az a és p méretek meghatározására.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ez hosszadalmas, de lényegileg egyszerű sablonos munka, úgy hogy kimondhatjuk: *célszerű ugyan az egész országos elsőrendű hálózatot egyetlen asztronomiai pont és azimut alapján elhelyezni* (számítani) *az elfogadott méretű és lapultságú ellipszoidon, de az országos felmérés gyakorlati célja és végrehajtása szempontjából* — nem lényeges munkatöbbletektől eltekintve — *úgyszólván közömbös, hogy egy vagy két vagy esetleg több* asztronomiai fixponttal rögzítettük-e az egyébként azonban *összefüggően mért háromszöghálózat egyes nagyobb részeit.* Hogy tehát az erdélyi hálózat külön elhelyezést nyert, azt figyelembe kell ugyan venni, az a m. kir. háromszögelő hivatalnak bizonyos számítási munkatöbbletet ad, de egyébként *az országos felmérés gyakorlati végrehajtását egyáltalában nem zavarja.* Hasonlóan vagyunk a cs. és kir. katonai földrajzi intézet I. rendű hálózatával is, amely ugyanazon pontokat tartalmazza, mint a mi I. rendű hálózatunk, de a mi összrendezőink — *mivel más a csillagászati kiindulásunk — a katonai összrendezőkkel összefüggésbe nem hozhatók közvetlenül.* Közvetlenül csak az oldal *hossz-* és a *vízszintes-*szögértékeket használhatjuk fel kölcsönösen, ami gyakran meg is történik.

10. §. A szferoidikus háromszög. Az előbbi §-ban említettük, hogy az I. rendű hálózatra vonatkozólag a térszinén mért vízszintes szögek *valódi* (azaz a forgási ellipszoidon fekvő és *geodéziai vonalakból* alakuló úgynevezett) szferiodikus háromszögek belszögeinek tekintetnek. *Ezen háromszögeknek oldalhossz-számítása visszavezethető valódi síkháromszögek oldalhossz-számítására* ha **100** kilométernél nagyobb oldalhossz nem szerepel. Tényleg már 90 kilométernél hosszabb háromszögoldal sem található az országos háromszögelésekben: tehát az itt mondandók *a gyakorlatban* szereplő háromszögekre *mindig érvényesek lesznek.*

Ha e jelenti a forgási ellipszoid *meridián ellipszisének numerikus* excentricitását

$$e = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$$

ahol b az ellipszis fél kis tengelye

és a „ „ „ nagy „ ,

akkor:

görbületi sugár a meridiánban $= R_1 = \dfrac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$

„ „ a reá merőleges irányban $= R_2 = \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$.

Középgörbületi vagy *„simuló gömb"* sugárnak nevezzük az imént felírt két főgörbületi sugárnak geometriai középarányosát:

6. . . . . $R_0 = \sqrt{R_1 R_2}$. Helyettesítvén az R_1 és R_2 értékeit:

7. . . . . $R_0 = \dfrac{a\sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$,

ahol φ az illető pontnak *szferoidikus* földrajzi szélességét jelenti.

Idevonatkozó matematikai vizsgálatok azt mutatták, hogy a *legszigorúbb számítás* (fokmérések) szempontjából is megengedett elhanyagolással *valódi gömbháromszögnek tekinthetjük az I. rendű szferoidikushár omszögeket* akkor, amikor az **oldalhosszakat** akarjuk számítani. *Gömbsugárul* a háromszög központjának megfelelő *szferoidikus* R_0 középgörbületi sugarat választjuk. De még itt is megengedhetjük magunknak azt az egyszerűsítést, hogy nem minden háromszöghöz számítunk külön R_0 értéket, hanem sok háromszög *oldalhossz számítására* ugyanazt az R_0 sugarat használjuk. És e tekintetben a legszigorúbb számítás esetén is elmehetünk egészen *200 kilométer távolságig*, azaz kiszámítjuk valamely *„O"* pontra nézve az R_0-ot és *mindazon háromszögek, melyek ezen „O" pont* körül *200* kilométeres sugárral az ellipsoidon leírva képzelt körön belül feküsznek, mint ezen R_0 sugarú gömbön fekvő valódi gömbháromszögek *számíthatók* (de csakis az oldalhosszak) az elemi gömb-

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

háromszögtan tételei szerint. Számítás alatt mindig az *oldalhossz-számítást* értve: kiindulva a mért bázisból, háromszögről-háromszögre haladva.

Ezen *200* kilométeres határon belül szélső értékben 1/29 000 000-odra hibásan nyerjük az oldalhosszt, ami körülbelül *50-szer* nagyobb pontosság, mint amily pontos a háromszögelés mérése.

Eszerint tehát egy egész országra terjedő hálózat *oldalhossz-számítására* elegendő lesz célszerűen elosztva 4—5 ily R_0 értéket kiszámítani, illetve felhasználni. *Kérdés most már*: miként történik legcélszerűbben *az oldalhosszaknak gömbháromszögtani* számítása. Ezen feladat megoldására többféle eljárás található a tankönyvekben: a *legracionálisabb ezek közül ma már Legendre tételének alkalmazása.*

Ha α, β, γ alatt a szóban forgó háromszög mért belszögeit, S alatt pedig ezen *gömbháromszög* területét értjük, úgy minden egyes szögből kivonva az

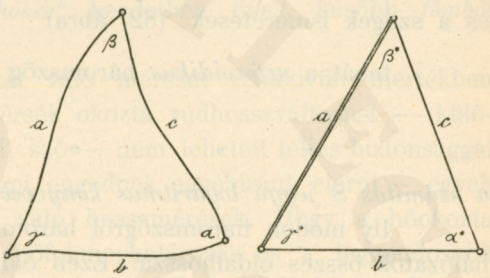
$$\left(\frac{S}{3R_0^2}\right) \text{ értéket,}$$

azaz képezve az:

$$\alpha - \frac{S}{3R_0^2} = \alpha^*$$

$$\beta - \frac{S}{3R_0^2} = \beta^*$$

$$\gamma - \frac{S}{3R_0^2} = \gamma^*$$



82. ábra.

redukált (segéd) szögértékeket, azok egy oly *valódi* síkháromszög belszögeinek tekintendők amely *síkháromszög oldalhosszai* (negyedrendű elhanyagolással) *azonos hosszuságúak az illető gömbháromszög oldalhosszaival.* (82. ábra.)

Az említett *negyedrendü elhanyagolások* 127 kilométeres oldalhosszak esetében az α^*, β^*, γ^* elméletileg szigorú értékeihez képest 0.″0001 illetve 0.″0005.

Az $\left(\frac{S}{3R_0^2}\right)$ tag előzetesen számított közelítő oldalhosszakból számíttatik *5 jegyü logaritmusokkal.* Ugyanis *120* kilométeres oldalak esetében a *log* $\frac{S}{3R^2}$ tagban az 5-ik decimálisban elkövetett 2 egységnyi hibának az $\left(\frac{S}{3R^2}\right)$ értékére maximumban $\pm$ **0,″0015** hatása van.

Mivel $\alpha^* + \beta^* + \gamma^* = 180°$, azért az $\left(\frac{S}{R_0^2}\right)$ tag a *szferoidikus háromszög* szögfölöslege. Másodpercekben kifejezve:

$$8. \ldots\ldots\ldots\ldots \varepsilon'' = \left(\frac{S}{R_0^2}\right)\varrho'',$$

ahol ϱ'' = az absolut szögegységben levő másodpercek száma.*)

---

*) Tájékozásul közöljük, hogy

$$\varphi_0 = 45°\text{-ra } log\ \frac{\varrho''}{R_0^2} = 1{,}7051—10.$$

$$\varphi_0 = 50°\text{-ra } log\ \frac{\varrho''}{R_0^2} = 1{,}7046—10.$$

Ezen értékeket alapul véve:

1. egy 2, 10, 50 km. oldalú egyenoldalú háromszög szögfölöslege a 8. képlet szerint: 0,″009; 0,″22; 5.″48,

2. ha a háromszög területe $S = 10$; 100; 1600 km², akkor a szögfölösleg = 0,″05; 0,″51; 8,″11.

Ami az S számítását illeti, az mint síkháromszög területe eszközölhető, de lehet mint gömbháromszögi területet is számítani és akkor:

$$tang\ \frac{\varepsilon''}{2} = \frac{tg\ \frac{a}{2}\ tg\ \frac{b}{2}\ sin\ \gamma}{1 + tg\ \frac{a}{2}\ tg\ \frac{b}{2}\ cos\ \gamma}$$

ahol a és b két oldal és γ a közbezárt szög.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ha a szferoidikus ε'' értéket *120* kilométeres oldalhosszak esetében $\pm$ 0,"0005-re élesen akarjuk számítani, akkor az R_0-t a háromszög középföldrajzi szélességéhez számítjuk az ellipszoid méretekből. A közép szélességet még 120 kilométeres oldalak esetében is elégséges *10'*-re pontosan megválasztani, ami tehát fokhálózattal ellátott átnézeti térképből is eszközölhető.

Legendre tétele által tehát a *szferoidikus háromszögek oldalhosszszámítása* vissza van vezetve a *síkháromszögtan* elemi tételére, azaz a *sinus* tételre:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha^*}{\sin \beta^*}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha^*}{\sin \gamma^*},$$

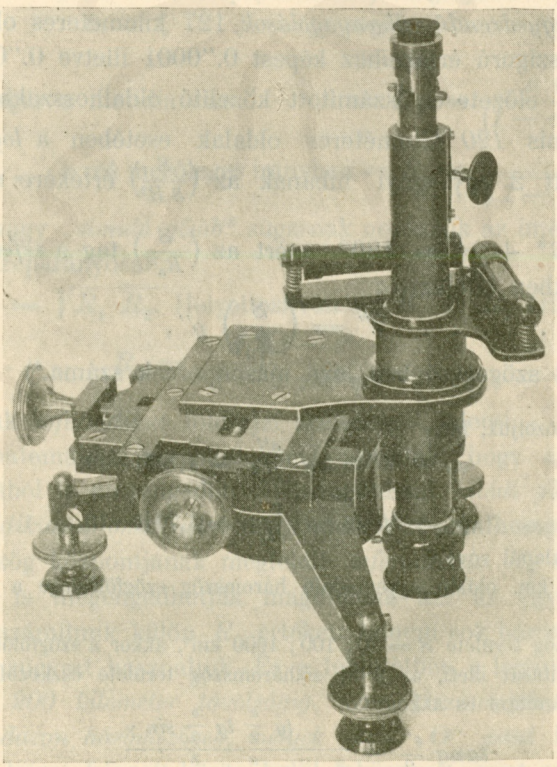
azaz, mivel a háromszögláncolat folytatólagos oldalhossz számításánál mindig egy oldal (a) és a szögek ismeretesek: (82. ábra)

tehát a *szferoidikus* háromszög b oldalának hossza $= \left(\frac{a}{\sin \alpha^*}\right) \sin \beta^*$

„ „ „ c „ „ $= \left(\frac{a}{\sin \alpha^*}\right) \sin \gamma^*$;

a számítás 8 jegyü logaritmus könyvvel végeztetik el.

Ily módon háromszögről háromszögre haladva számíthatók az országos I. rendű hálózatok összes oldalhosszai. Ezen oldalhosszak felhasználásával, kiindulva az astronomiai fix pontból és a kezdő azimutból (lásd 76. és 78. ábrát) számíthatók — a 9. §-ban leírt módon — a pontok szferoidikus φ' λ' helyhatározói és az oldalak szferoidikus ω' értékei.



83. ábra. Süss-féle vetitő távcső.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

VI. FEJEZET.

Az I. rendű háromszöghálózatra vonatkozó mérések.

I. §. Bázismérés.

Mielőtt az I. rendű hálózat eredményeinek további átalakítását, *gyakorlati felhasználását* tüzetesen tárgyalnók, ismerkedjünk meg az I. rendű hálózat fejlesztésének és mérésének gyakorlati végrehajtásával.

Az egyik alapvető művelet a *bázismérés* (alapvonalmérés), amelynek a tengerszintre való redukálását az V. Fejezet 6. §-ban előadtuk és amelynek gyakorlati eljárásait itt részletesen fogjuk ismertetni.

A bázismérő készülékek, illetve a *„mérőhossz“* kezdetben *fából*, később *fémből* készült *rudak* voltak.

Nagyobb földi hosszaknak ily fémrudakkal való mérését rendkivüli mértékben károsan befolyásolta az a körülmény, hogy a hőmérsék okozta rúdhosszváltozást — különösen ha nagy és gyors temperaturaváltozásról volt szó — nem lehetett teljes biztonsággal oly pontosan ismerni (kiszámítani), amily pontosságot engednek egyébiránt elérni — egyéb hibaforrások hatásait tekintve — a fémrudakkal való hosszmérések. Hogy a hőokozta tágulás számszerű figyelembevétele a leggondosabb hőfokmeghatározás és a leggondosabb előzetes komparálási kisérletek dacára is mennyivel nagyobb hibahatárok közt volt csak lehetséges, mint amily hibahatárok között mozognak e hosszmérések többi hibaforrásaiból eredő hibasorozatának szélső értékei, azt mutatják a következő tapasztalati adatok. A *Bessel*-féle bimetalikus hosszmérési berendezéssel (cink és acélrúd) 1·5 milliomod; az *Ibanyez-Brunner*-félével (rézrúd és platinarúd) 0·6 milliomod; az angol kompenzálttal (sárgaréz és vasrúd) 1·4 milliomod; az amerikai 100 méteres acélszalagos berendezéssel pedig 0·8 milliomod középhibával lehet 6—10 km hosszú országos háromszögelési alapvonalakat mérni, ha eltekintünk a hőmérsék hatásának bizonytalan figyelembevételétől. E számok azonban sor szerint 2·1; illetve 1·6; illetve 4; illetve *3. 2* milliomodra növekednek, hacsak $\pm$ 0·2° *R* átlagos hőmérsékleti bizonytalanságra számítunk, ami — mint a tapasztalat igazolta — nagyon reális feltevés.

E két tizednyi bizonytalanság úgy a *mono-*, mint a *bimetallikus* bázismérő készülékeknél tényleg bekövetkezhetik.*) Az első esetben azáltal, hogy a fémrúd nem veszi fel egyidejüleg azt a hőmérsékletet, — melyet a rúdra erősített termométer higanykészlete, — vagyis, melyet a termométer mutat; a másik esetben pedig, amikor nem higanymérővel, hanem a *két különböző anyagból készült rúd viszonylagos hosszváltozásából* következtetnek a hőmérsékletre, a bizonytalanság ugyancsak abból ered, hogy a két különböző fém nem veszi fel *egyidejüleg* ugyanazt a hőmérsékletet és nem *változtatja méreteit* egyenlő gyorsasággal. Igyekeztek és igyekeznek ezen hőmérsékleti elősietést *számszerüleg meghatározni* és figyelembe venni, de a tapasztalat mutatta, hogy $\pm$ 0·2° *R* bizonytalanság úgy sem kerülhető el nagy és gyors hőmérsékváltozások alkalmával. Az amerikaiak úgy igyekeztek e bajon segíteni, hogy *kizárólag csak éjjel*, — amikor sokkal enyhébb hullámzású a hőváltozás görbéje, — végezték méréseiket, de igy is — miként a közölt számok mutatják, — még mindig négyszerte akkora a hőmérséklet okozta hiba, mint az összes többi hibaforrások eredő hatása.

*) A *monometallikus* készüléknél a mérőrúd egyetlen fémrúdból, a *bimetallikus* készüléknél a mérőrúd két különböző anyagú fémrúdból áll.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A legnagyobb baj ugyanis az volt, hogy az alkalmazott fémek hő okozta tágulása igen nagy volt és így még kicsiny hőmérsékleti bizonytalanságok is aránylag igen nagy hosszhibát eredményeznek: *Bessel* készülékénél 1^0 *R* hőmérsékletváltozásnál a léchossz 22 milliomoddal, az Ibanyez-Brunner-félénél 21 milliomoddal, az angolnál 39 milliomoddal, az amerikainál pedig 10 milliomoddal változik meg.

Ezen számokkal szembeállítva az ujabban feltalált és invar-öntvénynek) nevezett anyag 1^0 R-nyi tágulását — $^1/_{24\ 000\ 000}$ — tüstént belátjuk ezen anyag korszakos fontosságát a szabatos hosszmérések terén.* Ebből az anyagból készítve el az eddig használt hosszmérő berendezések rúdjait — nemcsak $\pm$ $0{\cdot}2^0$ *R*-nek, *de még* $\pm$ 5^0 *R-nyi bizonytalanságnak sem lesz számbavehető hatása.* Így pl. egy 24 m. hosszú invardrót 10^0-tól 15^0-ig 0·004 milliméterrel hosszabbodott meg. Egyetlen termometerrel mérve a hőmérsékletet, *1 milliomodot meg sem közelítő hibát* fog a hőokozta tágulás nem szabatos figyelembe vétele okozni. *Szóval a hőokozta tágulás ezen anyaggal dolgozva, egyáltalában nem képez már többé hibaforrást.*

Hogy ez a szerencsés természetű öntvény mennyire szolgál rá a *„invar"* elnevezésre, azt legjobban látjuk, ha szembe állítjuk vele például a nemzetközi normalméterek eddigi anyagát, az iridiumos platinát.

Így pl. a 13. számú nemzetközi normalméter — melyet Párisban őriznek, — tágulási együtthatója:

$$\frac{8{,}582 + 0.00170\ t}{1{,}000.000}$$

amely képletben a mérvadó tag a 8, . . . összeadó állandó. Ezzel szemben készítettek már oly invar-öntvényt, melynek tágulási együtthatója:

$$\frac{(0{,}028 - 0{,}00232\ t)}{1{,}000.000}$$

A legkevésbbé sikerült invar-öntvény tágulási együtthatója pedig:

$$\frac{(+\ 0{,}468 - 0.00400\ t)}{1{,}000.000}$$

tehát még mindig 15-ször kisebb, mint az eddig e téren legjobbnak ismert iridiumos platina tágulási hajlama.**)

Miután ezen szerencsés nikkel-acél öntvény feltaláltatott, a legtermészetesebb látszólag az lett volna, *ha az eddigi bázismérő készülékeket ilyen anyagból készült rudakkal szerelték volna fel* s akkor az eredmények megbizhatósága szempontjából kétségkívül tökéletesnek mondható bázismérő készülékek álltak volna rendelkezésre: *hiszen a Bessel-féle készülékkel 1·5, a Brunner-el pedig 0·6 milliomod effektiv megbizhatósággal mérhetnénk ilyen átalakítással 5—6 km hosszú térszíni bázisokat.*

---

*) Az invar-öntvény 36% nikkel és 64% acélból áll. Ezen keverési arány szoros betartása mellett is azonban igen különböző a hőokozta tágulása a különböző öntvényeknek, — amiért is minden egyes öntvényből egy-egy próbarúdnak a párisi nemzetközi mértékintézetben való komparálása által határoztatik meg a hő okozta tágulás képlete. Ez a képlet azután érvényes az *ezen öntvényből készült minden egyes rúdra,* drótra vagy szalagra.

**) *A tágulási együttható* jelentése, ha α jelenti az együtthatót, l_0 pedig a kérdéses rúdnak hosszát 0^0 mellett és l_t a rúd hosszát t^0-nál:

$$l_t = l_0\ (1 - \alpha t)$$

Ezen α — *szigoruan* véve — nem állandóan ugyanaz bármely t^0-nál, hanem funkciója a t-nek is:

$$\alpha = a + b\ t.$$

Az α kisérletileg állapittatik meg; ily meghatározásra nálunk a műegyetem geodéziai szertára van berendezve.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A francia katonai „Service Geographique“, amely jelenleg új háromszögeléseket végez egész Franciaország területére nézve, ezt meg is cselekedte: *a mikroskopos Brunner-féle bázismérő- készülék régi rúdját ily invar-rúddal pótolták.* Az eredmények, melyeket az eddig Franciaországban mért 4 bázison, úgyszintén az 1906. évben Peruban mért geodeziai alapvonalakon ily módon elértek, *megbizhatóság tekintetében felülmúlhatatlanok*, mert átlag 5 km hosszú mérés effektiv középhibája mindenkor *milliomodrendünek* találtatott.

Dacára ezen kedvező eredményeknek, az invar-anyagot már jelenleg is és a jövőben előreláthatólag még fokozottabb mértékben *drótok és szalagok* alakjában használják szabatos hosszmérésekre, jobban mondva országos bázismérésekre. Ennek a ténynek, — t. i., hogy nem a régi készülékekre szerelnek invar-rudakat, hanem új rendszerű készülékeket is eszeltek ki: — nemcsak nagy gyakorlati, hanem igen nagy elvi jelentősége is van.

Ez a tény szakítást jelent a múltnak egy nem gyakorlatias elvével. Ugyanis az első szabatos bázismérő készülék keletkezésétől, (1750-től) egészen napjainkig Európában folyton csak azon elv vezette a geodétákat, — akik bázismérő-készülékeket találtak ki, — hogy *tekintet nélkül a szerkesztendő új eszköz előállítási költségére és tekintet nélkül a vele való mérés költségesebb voltára,* — minél nagyobb pontosság legyen elérhető. A pontosság fokozása volt a fő: hogy az elért és a legtöbb esetben — a hőhatás megbizhatatlan figyelembevehetősége miatt — amúgy is csak névleges pontosság-fokozásnak mi volt az ára, illetve ártöbblete, azzal egyáltalában nem törődtek. A netovábbja ennek a téves, azaz nem racionális felfogásnak az a bázismérő készülék volt, melyet a Brunner Testvérek a nemzetközi geodéziai intézet (Postdam) számára készítettek 1887-ben, amely 40.000 márkába került, melylyel egy 5 kilométeres bázis mérése hetekig eltart és 18—20.000 márkába kerül, de helyes eredményt csak akkor fog adni, ha a mérés *makadamos* és külön e célra előkészített homokozott, öntözött országúton történik és az időjárás is nagyon kedvező. Szóval nemcsak óriási beszerzési- és munkaköltségeket okozó berendezés, — hanem amellett már nem is mezei, hanem inkább laboratóriumi jellegű kényes eszköz ez, oly korlátolt a használata.

Ezzel szemben az 1830 körül Bessel porosz geodéta által készített bimetallikus bázismérő készülék beszerzési ára volt nehány ezer márka, munkaköltsége félakkora mint az említett Brünneré, jó és rossz időben, mezőkön, utakon, egyaránt geodeziai célokra feltétlenül elegendő pontosságú, mert 1·5 milliomod középhibájú eredményeket ad. Pontosabb eredményeknek azonban már semmi értéke, mert a geodéziában a hosszmérések mindig szögméréseknek szolgálnak alapul, a szögmérések megbizhatósága pedig nem milliomod, hanem százezred jellegű: *a milliomodok iránt a szögmérő műszerek már érzéketlenek. Bessel* és *Brünner* között szakadatlanul ilyen nem racionális irányú törekvések szültek újabb és újabb készülékeket; — amint azt a bázismérő eszközök fejlődésének most adandó rövid története mutatja.

Borda francia bázismérő eszköze — a legrégibb ilynemű készülék — négy vonalzóalakú *platina*-rúdból állott, *sík* végződésekkel. Minden egyes léc egy teljes fémtermométert alkot, amennyiben a skálával ellátott platinarúd felett egy noninusskálával ellátott rézrúd van — egy ponton rögzítve, — odahelyezve. Ha l jelenti a *„mérőhosszt“* azaz a platinarúd két végének egymástól való távolát t hőfoknál, a pedig a leolvasást a rézrúd *noniusán*, úgy az

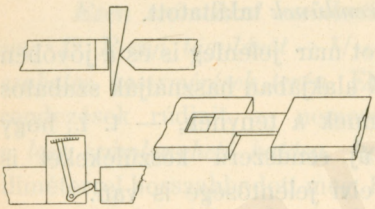
$$l = \lambda - m\,a$$

képlet, melyben λ és m két *kisérleti* úton egyszer és mindenkorra meghatározott állandót jelentenek, — adja meg a platinarúdnak a mérés pillanatának megfelelő hosszát.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A mérés alkalmával a *négy* mérőrúd egy nivóba lesz helyezve, úgy hogy a rudak végei között kis hézagok maradjanak.

Két rúdvég közti hézag egy a platinarúd végébe beeresztett nonius osztású *tolóka* által lesz mérve. Ez a tolóka ugyanis addig lesz kihúzva, míg a következő rúdnak véglapjához ér. (84. ábra.)



84. ábra.

Egészen a mult század 80-as éveig — tehát több mint száz éven át — ezt a berendezést használták a franciák bázismméréseikhez.

Igen nehézkessé tette a munkát az a körülmény, hogy mind a négy rúdnak egy *vízszintes*ben kellett feküdnie és így lejtős talajon *gyakori vetítés* vált szükségessé: szóval *lépcsős* mérés vált szükségessé.

Struve az oroszországi bázismérésekhez egészen hasonló berendezést konstruált, azzal a különbséggel, hogy nem toló *noniussal,* hanem emeltyűkarral járja be a két léc közti hézagot és ezen utat áttételekkel erősen megnagyítva, olvassa le egy körskálán mutató segélyével. (84. ábra.)

A *Repsold-Schumacher*-féle készülék, melyet a holsteini bázis mérésére használtak: négy *vas*-mérőrúdból áll. Minden rúdnak egyik vége *sík,* a másik *félgömb* alakú. A mindig egy *nivó*ban levő rudak végei közötti hézagok *skálával* ellátott *üveg-ékkel* lesznek megmérve, ami élesebb leolvasást enged, mint a legvégsőig menő nonius.

A rudaknak hőmérsékletét higanytermométerekkel határozták meg; négy ily termométer volt minden rúdhoz állandóan erősítve.

Tökéletesebb és ezeknél *gyorsabb* munkát engedő berendezést készített magának *Bessel* a königsbergi bázismméréshez körülbelül egy évszázaddal azelőtt.

4. egyenkint 2 öl hosszú vas mérőrúd; a rúd egyik vége *vertikális él*, másik vége *vízszintes él*. Két rúd közti hézag *üvegékkel* méretik meg, miközben a rudak lehetnek *ferde* (azaz nem vízszintes) fekvésüek is. (84. ábra.) A rudak hajlása a vízszintestől *libellával* lesz *percre* pontosan mérve; a hőmérsék hatásának figyelembevétele *zink*-rudak segítségével történik. Ugyanis minden vasrúdra van *fektetve* egy zinkrúd, mely egyik végén a vasrúdhoz van csavarral erősítve, a másik vége pedig szabadon terjeszkedik és ***vertikális*** élben végződik.

Szemben ezen vertikális zinkéllel van a vasrúdra erősítve egy kis *vasprisma,* mely vertikális élét a zinkél felé fordítja.

A nevezett *üveg-ékkel* megmérve minden léclefektetés alkalmával e *vas*- és *zink*-él közti távolságot, *a*-t, az előbb ismertetett

$$l = \lambda - m\,a$$

képlet adja *mindenkoron* a rúdhosszt. λ az a rúdhossz, mely az $a = o$-nak megfelelő hőfoknak felel meg.

A rudak fatokokban vannak, hamuval burkoltan elhelyezve, csak a rúdvégek és a libella látszanak kívülről. Minden ilyen tokra két vállszíj van erősítve és ezek segélyével viszik ezen **50** kg nehéz, 2 öles mérőrudat egyik bakról a másikra.

A mi *katonai földrajzi intézetünk* 1810-ben készült készüléke 4 vasrúdból áll (fagerendákra fektetve), amelyek hőmérséke termométerrel méretik; a rudak közel vízszintesen lesznek csavaros bakokra fektetve: a hajlás (*i*) libellával, a két rúd közti kis köz noniusos tolókával méretik. (85. ábra.)

Alkalmunk volt látni, mily rendkívül *fárasztó, nehéz* munka ez a bázismérés úgy a *Bessel*-féle, mint a mi katonai földrajzi intézetünk készülékével. Polgári napszámosokkal

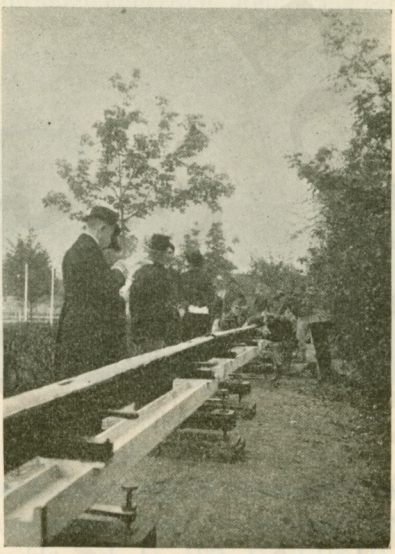
© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

alig lehetne boldogulni: csak erős szubordináció alatt álló és amellett *jól fizetett* katonákkal lehet eredményt elérni.

Egészen más elven alapszik az ***angol*** bázismérő eszköz, amely különösen Indiában nyert jelentős alkalmazást. 6 mérőrúdból áll. Minden egyes mérőrúd két *egymás mellett* (2 cm. távolságban) *fekvő (favályúban)* rúdból áll, melyek *középen* mereven vannak egymással összekötve. Az egyik rúd *vas*, a másik *sárgaréz*.

A *kettős rúd* mindkét végén *kereszt* irányban van egy-egy fémléc, forgathatólag a két rúdhoz erősítve. E nyelvek végén lecsapott élen *indexvonás*. Van tehát a rúd mindegyik végén *egy indexvonás:* e kettő távolsága a vas és sárgaréz különböző tágulási hajlama miatt *állandóvá* volt tehető. Szóval *kompenzált* rúddal van dolgunk: ahogy vannak kompenzált *óraingák*.

Ilyen *hat* kompenzált és favályúkban elhelyezett rudat egy *niveauba* hozva, csak két szomszédos rúd indexeinek távolát (amit eddig *hézagnak* neveztem) kell tulajdonképen mérni, mert a rúdhosszak állandóak. Ezen indextávolokat *mikroskopokkal* (2 drb) mérik, melyek egymással *vas-* és *sárgaréz*-rácsozattal vannak — *ugyancsak* ***kompenzációsan*** — összekötve.



85. ábra.

A két mikroskop *(csavaros mikrométeres,* olyan, mint ami nagy teodolitjainkban van) indextávola állandó és ismert, tehát a mérés abból áll, hogy *közrefogva* az egyik mikroskop látmezejének kettős *fonalával* az egyik és a másik mikroskop kettős fonalával a másik rúd indexét: leolvassák a mikrométer-csavarok állását és e két leolvasás — és a két mikroskop kompenzált távola — adják a kivánt köznek (hézagnak) mértékét. (Lásd a III. kötetben a *„mikroskopok"* cikket.)

Drága berendezés, *drága,* hosszadalmas munka és kisebb pontosságú eredmények, mint a Bessel-félével.

Valamivel egyszerűbb azegyetlen rúddal dolgozó *francia monometallikus* de szintén mikroskopos berendezés.

Egy **T** alakú erős acéltartó (80 kgr.) a mérőrúd. Annak felszinén, a végekhez közel, éles karc beeresztett platinalemezen. A végkarc fölé (külön állványon) egy mikroskop lesz helyezve és a mikrométer-csavarral a mikroskopnak két szála pontosan a kar fölé hozva.

A rúd hőmérsékét két, a mérőrúdhoz szervesen kötött termométerrel mérik.

Most — ügyelve, hogy a mikroskop *abszolut nyugalomban* maradjon a helyén állva — elviszik a mérőrudat a következő bakra, vigyázva, hogy a rúdnak elülső *végvonása* a mozdulatlan mikroskop *látmezejébe* jusson. Most addig csavarják a mikroskop csavarát, *amíg a kettős szál* szigorúan közrefogja a mérőrúd *vonását*. A csavarás fordulatszáma adja pontos mérőszámát az *előbbi* és *mostani* lécfekvés közti kis távolságnak. Most nyugodtan marad a léc és a mikroskop lesz a léc hátsó vége föle állítva. Két mikroskoppal dolgoznak rendesen, *de csak egy rúddal.*

Rendkívül sok gondot okoz a mikroskopoknak *szilárd* felállítása; csak hengerelt úton lehet jó eredményeket elérni.

Az *Ibanyez-Brunner*-féle készülék áll egy *platinarúdból,* mely egy *rézrúddal* kap-

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

csolatosan fémtermométert alkot. A két rúd teljesen egyforma méretű. A szabad (surlódásmentes) terjeszkedés kedvéért a két rúd külön-külön hengereken nyugszik: alul van a rézrúd. Az egész felszerelés súlyos, erős, I alakú vasasztalon nyugszik.

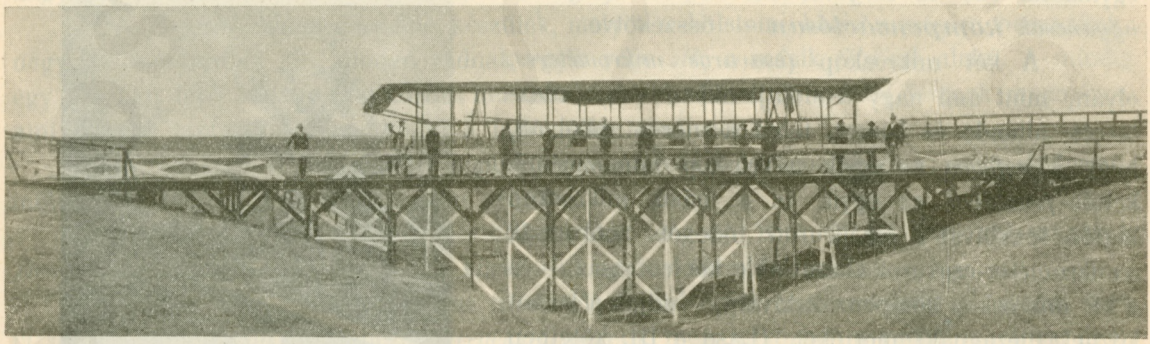
Külön végvonások vannak a platina- és külön végvonások vannak a rézlécen.

Két, a fém lécektől független állványon felállított mikroskoppal történik most a mérés, teljesen úgy, mint előbb a francia készüléknél elmondtuk, csakhogy külön a *réz-* és külön a *platina*-rúd végvonásaira vonatkozólag történnek beállítások.

Az egész mérés nap és szél ellen védő, mozgatható sátor alatt történik; a leolvasók és segédek külön *munkadobogón* mozognak. A mérés csak makadamos, elsőrangú úton ad a rendkívül fáradsággal és költséggel aránylagos jó éredményeket.

Ennél a nehézkes, kényes készüléknél még komplikáltabbnak és nehézkesebbnek igérkezett a *Bruhns*-féle, mely azonban csak terv maradt és az is fog maradni.

Egészen más irányú fejlődést mutatnak az amerikai hosszmérő eszközök. A legelső amerikai bázismérő eszköz, melyet *Hasler* szerkesztett az északamerikai tengerparti felmérések céljából, lényegében európai szabású volt: erős prizmatikus fa mérőrúd, a két



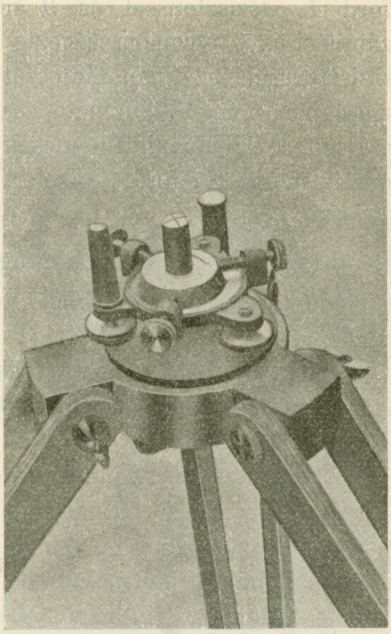
86. ábra.

végén villa alakú kivágásokkal. Ezek közt finom pókhálószál kifeszítve. Egy — a mérőrúdtól független — erős állványon nyugvó csavaros mikroszkop két szála állíttatott élesen a pókháló szál fölé. A léc ekkor tovább vitetett, hátsó vízszintes szála körülbelül a mikroszkop szála alá hozatott és e szál távolsága a mikroszkop két szálának középvonalától a két szálat mozgató mikrométercsavar segítségével méretett. (A 86. ábra mutatja a mélyedéseken át való mérés nehézségeit.) Az amerikaiak nem ezt a módszert tökéletesítették, amidőn arról volt szó, hogy fokmérési célokból végezzenek sűrűbben szabatos méréseket, hanem nem kímélve fáradtságot, oly berendezést igyekeztek konstruálni, *amely a szögmérésnél megbízhatóbb legyen, de lehetőleg egyszerű, gyors és olcsó méréseket engedjen.* *Hayford* amerikai geodéta évek hosszú során át tartott gondos kisérletek alapján a következő egyszerű és teljesen megfelelő pontosságú eljárást találta ki.

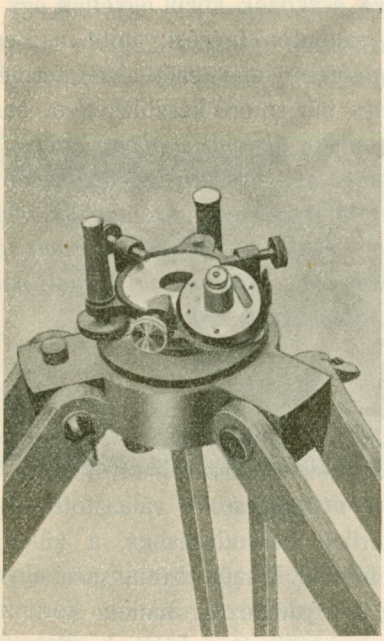
A megmérendő alapvonalba pontosan beirányozva 100—100 m távolságban mintegy 15—20 cm keresztmetszetű, 2 méter hosszú karókat ver a földbe. Minden egyes ilyen karó tetejére szegez egy négyszögalakú rézlemezkét és azon egy hosszirányú karccal megjelöli a bázisvonalat. Ezen rézlemezeknek viszonylagos, illetve tengerszín feletti magasságait szintezéssel meghatározza nehány milliméter pontossággal. Ezen 100—100 m-es távolságban elhelyezett *„indexkarók" közé 25—25 m távolságban kisebb keresztmetszetű durva karókat ver a földbe és minden egyes karóba (oldalt) bever egy több centiméterre kiálló szöget vízszintesen.* E szögek helyét kézi távcsővel határozza meg úgy, hogy a szögeket összekötő

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

egyenes vonal két *indexkaró* tetejét összekötő egyenessel legyen azonos. *Az itt leírt munka nappal végeztetik el. A mérés mindig éjjel történik:* még pedig egy 100 méternél néhány deciméterrel hosszabb erős *acélszalaggal,* amelynek két végén egy-egy merőleges végvonás jelzi a hosszúságot és mindegyik végvonástól körülbelül 2 m távolságban van a szalagra — egyszersmindenkorra elválaszthatatlanul — egy-egy higany termométer erősítve, amelyek a szalag hőmérsékletének meghatározására szolgálnak. A szalag mindkét végéhez köttetik egy közönséges *rugós mérleg* (dynamométer), amelyek viszont egy-egy két méteres — egyik végén meghegyezett — rúdhoz vannak kötve, s e két rúdnak a földbe szúrása és felső végüknek kézzel való meghúzása által — megfigyelve ugyanakkor a dynamométer mutatójának állását — a szalagnak tetszőleges feszültséget lehet adni. A méréstől most már az acélszalagot ráhelyezik a (25—25 méter távolban levő) vízszintes szegekre úgy, hogy az acélszalag két végén levő végvonások a két indexkaró rézlemeze fölé pontosan a bázisvonalat jelző hosszirányú karc mellé jusson. Ekkor a szalagnak a nevezett módon pontosan *15 kgmnyi feszültséget adnak* és a mérést vezető mérnök egy finom hegyes vésővel keresztirányú karccal jelzi a szalagvégvonások helyét az indexkarókon elhelyezett rézlemezen. *Ez a karc pótolja a leolvasást.* A következő 100 m mérése hasonló módon történik, de a szalag végvonása nem lesz az imént nyert karcra állítva pontosan (azt lehetetlen pontosan megcsinálni), hanem egy újabb karccal jeleztetik az újabb szalagfekvés kezdőpontja. A kétkarc egymástól való távolsága a mérés befejezésével otthon könnyű szerrel $^1/_{10}$ mm pontossággal megméretik. Ez a $\pm$ $^1/_{10}$ mm-es hiba a 100 méteres szakasznak pontosan $\pm$ egy milliomoda, tehát mindenesetre türhető hiba. A mérést *négyszer* végzik el oda-vissza, tehát egy-egy rézlemezen 16 karc lesz. A rézlemezek, a szalaghosszak száma, a leolvasott hőmérsékletek és a szintezés adatai képezik tehát a mérésnek közvetlen eredményeit. Meg kell még jegyeznem, hogy minden egyes bázismérés előtt és után a szalagok teljesen hasonló körülmények közt, mint a hogy használják a mérésnél, egy — ott a helyszinén megmért — körülbelül 600 méter hosszú próbabázison komparáltatnak. Ezen 600 m-es próbabázis egy állandóan olvadó jég között fekvő 4 m hosszú acélrúddal (végvonásos, mikroszkopos berendezés hasonlóan a Hasler-féléhez) méretik meg pontosan. Ezen itt nem minden ok nélkül rész-



87. ábra.



88. ábra.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

letesen leírt hosszmérési berendezés, illetve eljárásnak racionális voltát az elért eredmények mutatják. Hayford az adatokat az 1906. évi nemzetközi földmérési gyülés alkalmával volt szíves velem közölni és *Helmert tanár az adatok megbízhatóságát megerősítette.* Az adatok tehát hitelesek. 1903-ban, tehát 1 év lefolyása alatt mért Hayford *1* asszisztenssel és *9* munkással 10 — egyenkint átlag 6 km hosszú bázist. A számítást is ő egymaga végezte még ugyanazon évben. 1906-ban, ugyancsak Hayford 1 asszisztenssel és 7 napszámossal megmért áprilistól julius végéig 6 bázist átlag 10 km hosszúságban nem 100, hanem csak 50 méteres szalagokkal, miáltal 2 munkást takarítottak meg. Ezen rövid idő alatt nemcsak a bázisokat, hanem mind a 6 bázisfejlesztő hálózatnak szögeit is mérte Hayford. Az elért pontosság: a közép véletlen hibája egy-egy 10 km-es bázisnak $\pm \frac{1}{1200000}$; a közép teljes hiba pedig, amelybe tehát a hő okozta tágulás figyelembe vételének bizonytalansága is be van tudva, $\pm \frac{1}{500000'}$, tehát a hosszmérés legalább *3-szorta oly megbízható, mint a legszabatosabb szögmérés adta háromszög-oldalhosszértékek.*

Ezen amerikai eredményekkel szembeállítva *legújabb európai* mérések eredményeit, igen érdekes tanulságot meríthetünk: a racionalis és nem racionalis mérésre vonatkozólag. Az 1906. évben ugyanis alkalmam volt Kelet-Poroszországban *Gumbinnen* mellett a Besselféle készülékkel végzett porosz hivatalos országos bázismérésben résztvenni. Dolgozott azon 70 ember, köztük 16 háromszögelő (vezérkari tisztek). Egyetlen 5300 m hosszú bázismérésről volt szó. Költsége 15.000 M, azaz 18.000 K. A végleges eredmény számítása pedig csak hónapok mulva volt befejezhető, dacára annak, hogy 2 háromszögelő folyton végezte a számítást. Minthogy e készülékkel már évtizedek óta sok bázist mértek, az eredmények megbízhatóságát már most is ismerhetjük. A *teljes* középhiba ugyanis az eddigi mérések alapján átlag $\frac{1}{800.000}$-re tehető, azaz *gyakorlatilag véve, az amerikai eredményekkel egyenrangú. De mekkora pénz-, erő- és időbeli áldozat árán érik el ezt az eredményt a poroszok, szemben az amerikaiak észszerű eljárásával!*

Minthogy az eddig Európában használt bázismérő eszközök közül egyetlen egy sem enged olcsóbban, kevesebb idő- és erőbeli fáradsággal szabatos mérést, mint a Besselberendezés, sőt ellenkezőleg, drágábbak, kényesebbek valamennyien: ezért igen természetesnek találom, hogy az invaranyag előnyeit nem a rendes bázismérő készülékeken, hanem Hayford geniális, praktikus berendezésén, vagy *ahhoz hasonlóan akarják újabban értékesíteni.*

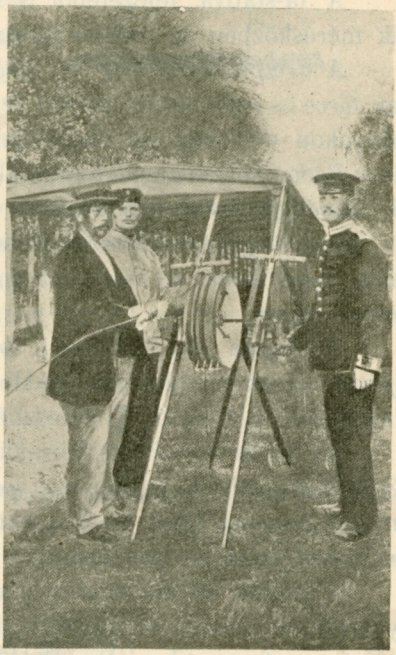
Az amerikaiak, jobban mondva Hayford felismerve az invaranyag nagy előnyeit, ezen anyagból készíti most már szalagjait. (50 m.) Az 1906. évben ezen szalagokkal végzett mérések azt igazolták, *hogy nappal végezve a méréseket, épen oly megbízhatóságú eredményeket ér el, mint az acélszalagokkal éjjeli mérések alkalmával. Minthogy a nappali munka gyorsabb és olcsóbb: Hayford a jövőben kizárólag invarszalagokat használ.*

Invárdrótok.

A párisi nemzetközi mértékintézet, mely a nemzetközi földmérési szövetség óhajára foglalkozik 7 év óta az invaranyag célszerű alkalmazásának módszereivel, nem a leírt amerikai rendszert, hanem ***Jäderin*** stockholmi tanár ***drótmódszerét*** választotta alapul. A Jäderin-féle eredeti eljárás lényegileg hasonlít az amerikai berendezéshez, a különbség csak az, hogy nem acélszalaggal, hanem két *különböző* fémből készült dróttal méri egymásután a szakaszokat, melyeket nem a földbe vert karók és rézlemezek, hanem hordozható harántvonásos állványok képviseltek. A drótok végeihez milliméter-skálával ellátott kis lemezek voltak erősítve, melyeken a szakaszállvány harántvonásának állását leolvasták.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ezen Jäderin-féle berendezéssel réz- és platinadrótok alkalmazása mellett is igen gyors és olcsó módon tűrhető eredménynyel lehetett *igen rossz térszini viszonyok mellett is dolgozni.* Az a bázismérő berendezés, amelyet a párisi nemzetközi mértékintézet, azaz *Guillaume* és *Carpentier* terveztek és készítettek, nem egyéb, mint a Jäderin-féle *berendezésnek* célszerűbbé tétele és a réz- és acéldrótoknak *invaranyagból készült drótokkal* való helyettesítése. Ez a Guillaume-Carpentier-féle berendezés a jelenkor legracionalisabb bázismérő berendezése: ezt a berendezést szerezte meg a magyar országos kataszteri felmérés is. A 87., 88., 89. és 90. ábrákon láthatók ezen egyszerű és elmés berendezés minden részletei.



89. ábra.

A 87., 88. ábra a hordozható ***index-állványokat*** mutatja be, a 89. ábra mutatja az *aluminium-dobot,* amint róla az invarmérődrótot lecsavarják, végül a 90. ábra mutatja a *drótfeszítő-állványt* és a leolvasás elvégzését a feszített invardrót skáláján, az indexállvány indexe segítségével.

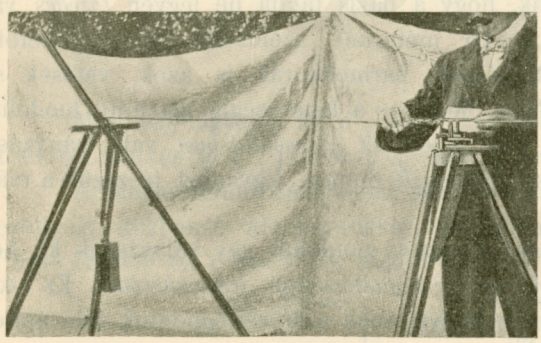
Lássuk ezen itt említett eszközök szerkezetét és aztán magát a mérési eljárást.

Az ***index-állvány*** áll:

1. egy rendes, háromlábú teodolit *fa-stativából,* melynek fejezetében egy körülbelül 10 cm átmérőjű körlyuk van;

2. egy körülbelül 12 cm átmérőjű, 2 mm vastag, középen lyukas *acéllemezből,* amely a faállvány fejezetén fekszik és ahhoz egy vertikális, rugós szorítócsavarral erősíthető;

3. ezen *acéllemezre* 3 sugárirányú vágásba van állítva egy *három vertikális talpcsavaron* nyugvó, középen 4 cm átmérőjű furattal ellátott *fémhenger,* amelynek tetőlapján, szimmetrikus elosztásban, *3 vízszintes állítócsavar* van elhelyezve;



90. ábra.

4. az imént leírt fémhengerre tehető az *indextest,* amely egy szélesebb, *csonkakúp alakú alapból* és az *index-nyulványból* (körülbelül 5 cm hosszú, 1 cm átmérőjű henger) áll.

Az index-nyulvány felső befejezése egy *acélfélgömb,* amelyre *két,* egymást 90° alatt metsző, legnagyobb félkör van *vésve.* Ezen két meridián metszéspontja képezi az *indexet.*

Az index-nyulvány és annak talpa (a csonkakúp) körülbelül 4 mm átmérőjű hengerüreggel van ellátva, centrikusan átmegy rajta egy *függőzsinór,* melynek egyik végén acélfüggő lóg a földig, a másik vége pedig az index-nyulvány acélgömbje által van megfogva.

Az indextest *csonkakúp-lemeze* egy *libellával* van ellátva, az indextest a talpcsavaros fémhengeren a három vízszintes állítócsavar által *tologatható* és *rögzíthető.* (87. ábra.)

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Minden bővebb magyarázat nélkül be lehet látni, hogy ezen itt leírt és az ábrán világosan látható szerkezettel *az indexet (a félgömb csúcsát) mm-re pontosan lehet egy talajpont fölé szilárdan — azaz egykönnyen el nem mozdítható módon — felállítani.* Az ábrán látható még egy, a talpcsavaros fémhengerhez erősített, külpontosan elhelyezett, hosszúkás csonka-kúpnyulvány. Ez a később leirandó *szintező távcsőnek* vertikális forgástengelyül szolgál.

A fa-stativa fejezetéből is kinyulik egy hosszú *fémhenger* (az ábrán *hátul),* erre teszik mérésközben az index-nyulvány *védőcsövét.*

A *drótfeszítő-állvány* a *súlylyal.* (90, ábra.) Egy hosszú farúd, amely egy helyen át van *törve* és ezen áttört helyen fémmel burkolva. Ezen fémburkolatú áttörésben — *golyós* csapágyakon — forog egy függőleges csiga, amely *zsinór*-vályúval van ellátva.

Ezen mérésközben ferdén álló és a földbe beszúrt rudat támasztja két mozgatható *faláb,* amelyek szorítócsavarokkal vannak ellátva. Minden bővebb magyarázat nélkül be lehet látni, hogy ezen berendezéssel el lehet érni azt, hogy *a csigát beállítjuk egy adott vonalba úgy, hogy a csiga síkja amellett közel vertikális legyen és az egész állvány szilárdan álljon.*

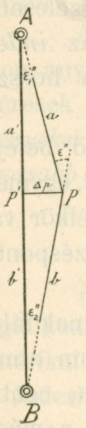
A csigára van fektetve a *drótfeszítő-zsinór,* melynek egyik vége *csuklós karabélykampóval* van az invardrótnak csuklós-gyűrűs végződéséhez kapcsolva, a másik végén pedig lóg az ábrán is látható, T keresztmetszetű *10 kilogrammos* súly.

Az invar-drótok. A normális drót hossza körülbelül 24 méter. A drót mindkét végéhez körülbelül 8 cm hosszú, *lecsapott élű és mm-skálával ellátott acéllemez van erősítve.* Ezen skálalemezek (lásd 90-ik ábrán) a végükön gyűrűvel vannak ellátva, amiben minden egyes mérés előtt be lesz akasztva a feszítőzsineg karabélykampója.

A drótok 50 cm sugarú aluminium-dobra csavarva őriztetnek meg. A lecsavarás nagy figyelmet igényel és úgy történik, amint az a 89. ábrán látható. Szabad kézzel magát a drótot *megfogni* tilos. Egy dobon négy drót fér el. Hangsúlyozzuk, hogy a méréshez csak *egyetlenegy drót kell,* több drótot azért használunk, hogy egymástól független eredményekre tegyünk szert. A továbbiakban tehát mindig csak egyetlen drótról fogunk beszélni.

A bázismérés előkészitése.

A megmérendő — több kilométer hosszú bázis — két végpontját feltétlenül úgy kell megválasztani, illetve felépíteni, hogy azok *teodolittal összelátást engedjenek.* A térszínre nézve csakis arra ügyeljünk, hogy a bázis talaja ne legyen *tőzeges* vagy *mocsaras* és hogy a bázist 15—16 méternél szélesebb patak (lehetőleg) ne szelje át.*) Térszíni egyenetlenségek bármekkorák is azok, vetések stb. egyáltalában nem képeznek akadályt. Most — a lehetőségig igazított teodolittal felállunk az egyik bázisvégpont fölé — és *két távcsőállásban* való irányzással beintünk a bázis vonalába néhány *kimagasló* pontot. Ugyanazt teszszük a másik bázisvégpontról is.



91. ábra.

Ezen lehetőleg egyenletesen elosztott pontokat úgy válaszszuk ki, hogy azokról a *bázisvégpontokra* (gúlákra) is végezhessünk irányzásokat. Ez okból esetleg igen magas gúlákat leszünk kénytelenek a bázisvégpontok fölé építeni. Ezen közbenső alappontok csak *durván* fognak a bázis vonalában állani, bármily gondosan jártunk is el a beintéseknél.

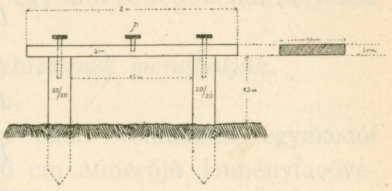
Az egymástól — átlag 1·5—2 km távolban így nyersen kitűzött alappontokat — legcélszerűbb a 92. ábrán feltüntetett módon megépíteni. Ezen

*) A 86. ábra mutatja, miként kellett a régi rudas bázismérőkkel dolgozva a térszini egyenetlenségekkel (patakmeder) megküzdeni.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

pad merőlegesen áll a bázis vonalára: — a „P"-vel jelölt *vasszeg* képviseli a szóbanforgó, egyenlőre csak nyersen beintett *közbenső alappontot.*

Most következik a „P" pontok szabatos *vonalbeállítása.* Evégből megmérjük durván, közönséges szalaggal ezen P pontok távolait a bázis-végpontoktól, és azután felállunk teodolittal rendre a beintett P pontok fölé és végzünk *szabatos szögmérést a bázisvégpontokra.* Ha szigorúan 180_0-ot nyerünk, úgy a pont benne van a vonalban. Ha azonban 180^0-tól *eltérő* eredményt kapunk, úgy a pont nincs az ***„alignement"***-ban, de igen elemi módon, igen szigoruan számíthatjuk a pontnak a bázis vonalától való merőleges kitérését és ennek megfelelőleg helyezzük el a pontjelző vasszeget. Feltéve, hogy meg van mérve közönséges acélszalaggal (91. ábra) az a és b távolság, és megméretett teodolittal az ε'' szög egyszerű iránymérésse l:



92. ábra.

$$(P\,A) \text{ irány} = 0^0\ 0'\ 0''$$
$$(P\,B) \text{ irány} = 180^0\ 0'\ 0'' + \varepsilon''$$

kerestetik — milliméterre élesen a Δp méret.

$$1 \ldots\ldots\ldots \Delta p = \frac{1000}{\varrho''} \frac{a\,b}{(a+b)} \varepsilon''$$

ahol a

ϱ'' jelenti az absolut szögegység másodperceinek számát,
ε'' másodpercekben
Δp milliméterben
a és b méterekben értendők.

Egyébként $\log. \frac{1000}{\varrho''} = 7{,}6855749 - 10$

Levezetése az 1. alatti képletnek

$$\Delta p = a' \frac{\varepsilon_1''}{\varrho''} = b' \frac{\varepsilon_2''}{\varrho''}, \text{ tehát}$$

$$\frac{\varepsilon_1''}{\varrho''} + \frac{\varepsilon''_2}{\varrho''} = \varepsilon'' = \frac{\Delta p}{a'} + \frac{\Delta p}{b'}$$

$$= \frac{\Delta p\,(a' + b')}{a'\,b'}$$

$$= \frac{\Delta p\,(a+b)}{a\,b}$$

Minthogy ugyanis az ε''_1 és ε''_2 szögek igen kicsinyek, azért lehet a' és b' helyett a-t és b-t irni és $tg\ \varepsilon''_1$ illetve $tg\ \varepsilon_2''$ helyett arcus ε_1'' illetve arcus ε_2''-et vinni a számításba.

A megmérendő bázisvonal szabatos kitűzése egymástól 1—1·5 km távolban elhelyezett ily közbenső alappontokkal, semmi nehézséget nem okoz. Pl. Ha $a = 2835\ m$ és $b = 4320\ m$ és $\varepsilon'' = 3'',8$, akkor

$$\log. \Delta p = \begin{cases} \log. \frac{1000}{\Delta\varrho''} = 7{,}6855\ \ 749 - 10 \\ + \log. \frac{a\,b}{a+b} = 7{,}088\ \ 0368 \\ + \log. \frac{1}{a+b} = 6{,}145\ \ 3904 - 10 \\ + \log. 3{,}8 = 0{,}579\ \ 7836 \end{cases}$$

$$= 21{,}498\ \ 7857 - 20$$

és így $\Delta p = 31{,}5\ mm.$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Feltéve, hogy az a és b méretek közül az a 3 méterrel hosszabb, mint a valódi méret, a b pedig 5 méterrel hosszabb, mint a valódi hossz,*) akkor a Δp-re ezt az értéket nyernők:

$$\begin{aligned} log.\ \frac{1000}{\varrho''} &= 7{,}6855\ 749{-}10 \\ log.\ 3{,}8 &= 0{,}579\ 7836 \\ log.\ a\,b &= 7{,}088\ 9985 \\ log.\ \frac{1}{a\,b} &= 6{,}144\ 9085{-}10 \\ \hline & 21{,}498\ 2655{-}20 \end{aligned}$$

Tehát ezen 3, illetve 5 méterre hibásan mért a és b méretekkel végezve el a számítást, a Δp-re 31,497 értéket nyerünk, azaz ismét csak **31,5** értéket, tehát tizedmilliméterre azonosak.

Ha az $\varepsilon'' = 10,''$ akkor a a és b-re ismét feltételezve az *előbbi két* esetet

$$log.\ \Delta p = \begin{cases} 7{,}685\ 5749{-}10 \\ 7{,}088\ 0368 \\ 6{,}145\ 3904{-}10 \\ 1{,}025\ 3059 \\ \hline 21{,}944\ 3080{-}20 \end{cases} \qquad \Delta p = 87{,}79$$

$$log.\ \Delta p = \begin{cases} 7{,}685\ 5749{-}10 \\ 7{,}088\ 9985 \\ 6{,}144\ 9085{-}10 \\ 1{,}025\ 3059 \\ \hline 21{,}944\ 7878{-}20 \end{cases} \qquad \Delta p = 88,\ 06,$$

azaz kikerekítve **88,0** mm értékekre jutunk.

Ha az $\varepsilon = 10''$ esetben $+15$ és $+25$ méteres hibákat tételezek fel, akkor

$$log.\ \Delta p = \begin{cases} 7{,}685\ 5749{-}10 \\ 7{,}092\ 8347 \\ 6{,}142\ 9692{-}10 \\ 1{,}025\ 3059 \\ \hline 21{,}946\ 6847{-}20 \end{cases}$$

$\Delta p = 88,\ 447$, azaz 88,4 mm.,

azaz a hiba még akkor is 0·5 mm rendű.

Az imént bemutatott példából azt a tanulságot vonhatjuk le, *hogy a közbenső alappontok távolait elég közönséges acélszalagokkal mérni és mindennemű redukálást a horizontra elhanyagolhatunk.* De igenis, nem lehet elég gondot fordítani az ε szög szabatos mérésére!

Ha $a = 2835$ m és $b = 4320$ m és $\varepsilon'' = 10''0$, akkor a $\Delta p = 87{,}97 = 88{,}0$ mm.

Ha az ε'', ezen példában $+1''$-re hibásan van mérve, azaz ha ε'' tényleg $= 9,''0$, akkor

$$log.\ \Delta p = \begin{cases} 7{,}685\ 5749{-}10 \\ 7{,}088\ 0368 \\ 6{,}145\ 3904{-}10 \\ 0{,}982\ 2712 \\ \hline 21{,}901\ 2733{-}20 \end{cases}$$

$\Delta p = 79{,}67$, azaz 80,0 mm, tehát

már $\pm$ 8 mm-re hibás.

*) azaz $a = 2838$; $b = 4325$ méter.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

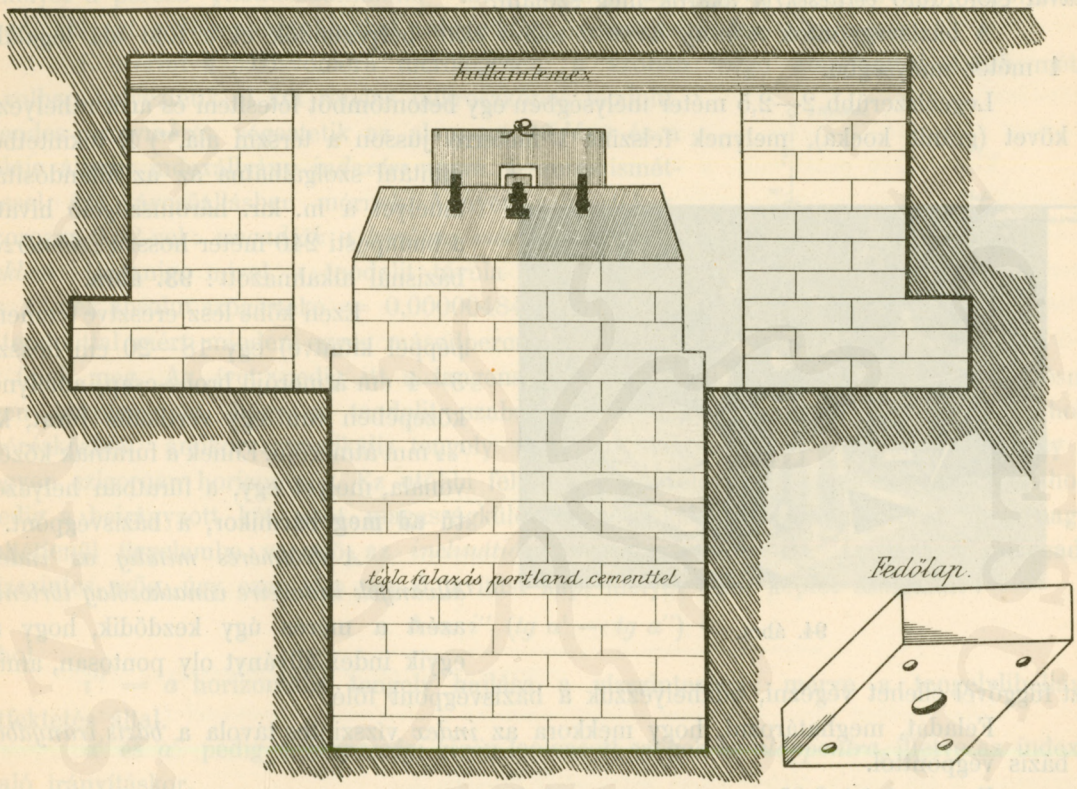
A $180^0 + \varepsilon''$ szöget és annak 360^0-ra való kiegészítését tehát az elsőrendű háromszögeléseknél használatos teodolittal (lásd a könyv végén a 4. rajzmellékletett) kell, legalább is 8-szoros ismétléssel, megmérni.

Ily módon elérjük azt, hogy a közbenső alappontok $\pm$ egy mm-re feltétlenül helyesen a bázis vonalában fognak állani.

Az imént leírt módon eljárva, a bázist *szabatosan kitűzöttnek mondhatjuk.*

Következik a bázismérés tulajdonképpeni előkészítése.

Támaszkodva a *közbenső alappontokra,* kitűzünk a bázis vonalában egymástól 24 méter ($\mp$ 2—5 cm) távolban 30—40 cm hosszú, 5—6 cm átmérőjű keményfacöve-



93. ábra.

keket, melyekbe azután a bázisvonalba élesen beintett szegeket verünk. A munka legcélszerűbben úgy elvégzendő, hogy a *közbenső alappontok* kitűzéséhez hasonlóan, mindig két közbenső alappontra támaszkodva, teodolíttal kitűzünk 200—250 méter távolban *másodrendű alappontokat* (cövekek) és ezek között rendre egy *zsinórt* kifeszitve, a zsinor adta vonalba kitűzzük a 24 meteres cövekeket: acélszalag segélyével.

Ezen módszert alkalmazva, maximumban $\pm$ 10 mm kitéréseket nyerünk a bázisvonaltól jobbra és balra. Egy 300 szakasz hosszúságú, azaz $300 \times 24 = 7200$ méter hosszú bázis esetében, **minden** szakaszpontra nézve feltételezve a $\pm$ 1 cm. oldalkitérést, a törött — azaz kitűzött — bázis, $300 \times \frac{2^2}{2.2400} = 300 \times 0{,}0083 = 2{,}49$ *mm*-el lesz hosszabb, mint a valódi egyenes bázis. Azaz ezt a törött bázist mérve $\frac{1}{2{,}800.000}$ hibát hozunk a mérésbe, ami háromszorta kisebb, mint az invarmérés *középvéletlen* hibája, amely $\frac{1}{1{,}000.000}$-od rendű.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Hegemann tanár szerint*) *nem baj,* ha a szakaszpontok felváltva ± 2 cm-re nem állanak a bázis vonalában, 300 szakaszos ($300 \times 24 = 7{,}2$ km) bázis esetében az ebből eredő maximális állandó hiba:

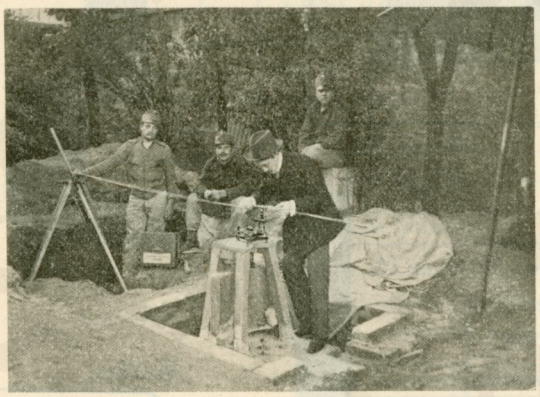
$$300 \times \frac{4^2}{2.2400} = 0{,}003 \times 300 = \mathbf{9\ mm.}$$

Ezt a hibát nem tartom tűrhetőnek, mert egyenlő rendű az *invarmérés középvéletlen* hibájával, amennyiben a teljes hossznak kb. $\frac{1}{700{,}000}$-ét teszi.

Mielőtt most a mérés leírására térnénk át, a *bázisvégpontokról* és a mérés alkalmával előforduló *vetítésekről* akarok még szólani.

A bázisvégpontok *néhány héttel a mérés előtt* helyezendők el a föld alá legalább is 1 méter mélységbe.

Legcélszerűbb 2—2,5 méter mélységben egy betontömböt létesíteni és arra ráhelyezni a követ (gránit kocka), melynek felszíne 1 méterre jusson a térszin alá.**) E tekintetben mintául szolgálhatna az az állandósítás, amelyet a m. kir. háromszögelő hivatal a budapesti 240 méter hosszú *„ellenőrző"* bázisnál alkalmazott: **93. ábra.**



94. ábra.

Ezen kőbe lesz eresztve (cementpéppel kiöntve) egy 18—20 cm hosszú, 3—4 cm átmérőjű bronz-csap, amelynek közepében van egy vertikális fúrat, kb. $^1/_2$ mm átmérőjű. Ennek a fúratnak középvonala, melyet egy, a fúratban helyezett **tű ad meg** bármikor, a bázisvégpont.

A drótmérés mindig az index-állványok indexeire vonatkozólag történik, azért a mérés úgy kezdődik, hogy az egyik index-állványt oly pontosan, amint azt függővel ellehet végezni, odahelyezzük a bázisvégpont fölé.

Feladat, meghatározni, hogy mekkora az *index* vízszintes távola a *bázis irányában* a bázis végponttól.

Ezen mérést 0,05 mm-re pontosan kell elvégezni, ami nem könnyű feladat.

Hangsúlyozom, hogy ily *vetítés* még szükséges:

a) valahányszor a mérést *megszakítjuk* (délben és este) vagy *zivatar* stb. alkalmával;

b) valahányszor *„ellenőrző alapponthoz"* jutunk. Ezen ellenőrző alappontok oly pontjelző rézcsappal ellátott *kövek,* melyeket 1—1,5 km távolban egymástól helyezünk el 40—50 cm mélységben a talaj alatt a bázis vonalába és amelyek rendeltetése a mérés *középhibájának* számítását lehetővé tenni. Ugyanis *imételt* mérés vagy *több* dróttal való *egyszeri* mérés által ezeknek egymástól való távolságaira több, egymástól függetlenül nyert értékre jutunk és így reális középhibaszámítást végezhetünk.

c) Végül szükséges a vetítés, valahányszor a munkát (mérést) megkezdjük.

A vetítésre nézve különböző módszer van alkalmazásban.

---

*) Lehrbuch der Landesvermessung. Berlin, 1906.

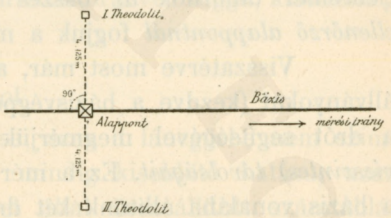
**) Tapasztalat szerint ugyanis a nedvesség és a téli fagyok 1 méterre a föld felszíne alá hatolhatnak érezhetően. Azon alul eltolódástól már nem kell tartani.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Borass tanár — a porosz geodéziai intézet egyik osztályfőnöke — *merev* függőt használ, melyet e célra szerkesztett. Ezen — érzékeny libellával ellátott és úgynevezett vertikális átforgatást engedő szerkezettel — századmilliméterekre élesen mérhetünk: — de a beszerzése igen költséges. A m. kir. háromszögelő hivatal egy három talpcsavarral *vertikálissá tehető* kereszttel és paránycsavarral vízszintes értelemben is tologatható távcsövet használ (83. ábra): ennek vertikális irányvonala lesz pontosan a bázisvégpont fölé helyezve. Ekkor az okulárra tehető egy fémkupak, amelynek központja meg van jelölve: *onnan* indul a mérés. (94. ábra.) A vetitő távcső egy erős, nehéz négylábu faállványon áll.

Legegyszerűbbnek és legpontosabbnak véljük azonban azt az eljárást (95. ábra), amelyet a porosz „Landesaufnahme" által láttunk alkalmazva és *Schreiber* tábornoktól ered, aki azt a Bessel-készülékkel való eddigi összes mérésekre alkalmazta.

E szerint a bázisvonalra merőlegesen, a szóban forgó alapponttól 4,125 méter távolban helyeztetik el két rendes mikroszkópos teodolit. Rendes iránymérés végeztetik az alappont *tűjére* és a föléje állított indexállvány *indexére* nézve. 4-szeres ismétléssel, két távcsőállásban mérnek. A nyert szögértékek, szorozva 0,02-vel: *megadják a kérdéses méretet milliméterekben.* Ugyanis, mivel a teodolit távola *4,125* méter és *1″*-nek absolut szögértéke = 0,00000484 . . . , azért a teodolittal mért minden egyes másodpercnek 0,02 mm ív felel meg. Az ívet pedig itt a tangenssel identikusnak lehet venni. Ezen mérésnél igen lényeges az, hogy a teodolit szabatosan ki legyen igazítva: elsősorban, hogy mérésközben, amikor a vertikális tengely szigorúan vertikális, a horizontális tengely is legyen szigorúan horizontális. Ez utóbbi feltétel ki sem elégíthető teljes szigorral. Minthogy pedig a beirányzott két pont magasságkülönbsége a kis távolsághoz képest igen nagy: feltétlenül figyelembe veendő az *inclinátióból* származó hiba. Ha $\Delta\varphi$ volt a mérésadta vízszintes szög, úgy ezen $\Delta\varphi$ egy δ javítást kap, melyet ezen képlet szolgáltat:



95. ábra.

$$\delta = i'' \ (tg\ \alpha' - tg\ \alpha'')$$

ahol

$i'' = a$ horizontális tengely hajlása a vízszinteshez: mérve a tengelylibellával átfektetés által.

α' és α'' pedig a *magassági körön* leolvasott szögek az *alappontra,* illetve az indexre való irányításkor.

Ezen δ korrekció nagyságát mutatják a következő értékek. Feltéve, hogy 4,125 m távolban állunk a teodolittal, ha az index az alappont *fölött* van: 0,804 m, 1,299 m és 1,919 méterrel

$$\text{akkor } (tg\ \alpha' - tg\ \alpha'') = 0{,}20,\ 0{,}32,\ 0{,}47$$

Tehát ha ezen három esetben (és ezek közt a harmadik a gyakori) a horizontális tengely ferdesége 2″-et tesz ki, azaz ha $i = 2''$, akkor:

$$\delta = i\ (tg\ \alpha' - tg\ \alpha'') = 0{,}4'', \text{ illetve } 0{,}64'', \text{ illetve } 0{,}94''.$$

Ha az $i = 5''$, akkor már:

1″, illetve 1,6″, illetve **2,35** a korrekció.

A δ korrekció tehát még az itt közölt határesetben sem eliminál nagyobb lineáris hibát mint $0{,}02 \times 2{,}35 = 0{,}0470 \doteq 0{,}05$ *mm-et,* de mivel igen könnyen számítható ezen δ, azért célszerű belehozni.

Nem érdektelen, ha megemlítem, hogy a poroszok a vetítést akkor fogadják csak el, hogyha a két teodolittal nyert két eredmény *2″-re* vág össze. Különben megismétlendő a mérés.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ez a vetítés tehát ilymódon $\pm 0{,}05$ *mm-re* megbízható eredményt ad.

Ha a rendelkezésre álló teodolitok nem engednének éles tárgybeállítást 4,125 méter távolságra, akkor *8,250* méter távolságra volnának a teodolitok felállítandók, amikor a mért $\Delta\varphi$ szög 0.04-el szorzandó, hogy az eltérést *milliméterekben kapjuk.*

A vetítésnek ezen módja, semminemű külön beszerzést nem involvál: elég gyorsan megy és pontos is. Ezért ezt ajánlom alkalmazásra.

Ha például *délben* vagy *este* meg kell szakítani a munkát a nyilt pályán, akkor is vetítésre van szükség. Ilyenkor egy erős (60 cm hosszú, 10 cm átmérőjű) fakaró, teljesen *vassal* burkolva veretik a *földbe.* Egy rendkívül finom acélvarrótű — kénsav és tintába mártás által koromfeketévé festve — beszúratik a rúdvég közepébe és erre történik az utolsó *index* vetítése. A rúd a mérés újrafelvételéig a *földben* marad: faszekrényt állítunk föléje, amit egy ember őriz meg. Egyszerű olcsó eljárás, szabatosság tekintetében kifogástalan. Schreiber tábornok az összes Bessel-méréseknél ezt használta. Ha lehet, mégis mindig *ellenőrző alappontnál* fogjuk a mérést abbahagyni.

Visszatérve most már, a tulajdonképpeni mérés abból áll, hogy felállítjuk az index-állványokat (kezdve a bázisvégponton) a 24 méteres *szakaszcövekek* szögei fölé *) és most a drót segítségével megmérjük egymásután az *indexeknek egymástól való térbeli (nem vízszintes) távolságait.* Ez a mérés úgy végeztetik, hogy a kérdéses két indexállvány mögé a bázis vonalába állítunk két drótfeszítőállványt, kifeszítjük a 10 kgr-os súlyok segítségével a drótokat, a két drótvégen levő skálákat egy ujjal leszorítja mindegyik észlelő az indexre és az *„olvasni"* parancsszóra mindkét leolvasó egyidejűleg végez leolvasást a drótvég milliméter skáláján. (94. ábra.) A *„tovább"* jelszóra a leolvasók néhány milliméterrel előre mozgatják a feszített drótot és azután ismét leolvasnak. Igy megy ez 5-ször. Pl:

1.	18·7	22·9	különbség	+ 4·2
2.	25·45	29·7	„	+ 4·25
3.	34·3	38·55	„	+ 4·25
4.	48·15	52·35	„	+ 4·2
5.	62·9	67·2	„	+ 4·3

középérték + 4·24 milliméter.

Jelen esetben ezen 4.24 mm méret adandó a drótnak 0 vonástól 0 vonásig való hosszához, értve hossz alatt a 10 kilogrammos súlylyal feszített láncgörbe húrhosszát, hogy megkapjuk a két index térbeli (nem vízszintes) távolát.

Kérdés: Hogyan ismerhetjük a momentán-dróthosszt?

Erre nézve a következőket közlöm e helyt:

1. A nemzetközi métermérték-intézet Sèvresben (Páris mellett) megállapítja szabatos és huzamos időkön át végzett mérésekkel, hogy mekkora a drót két „0" vonásának egymástól való távolsága, feltéve, hogy

a) a két drótvég *egyenlő magasságban* van *) és 10—10 kilogrammos súlyok feszítik;

b) feltéve, hogy a hőmérséklet = 15^0 R.

2. Ugyancsak a nevezett francia intézet állapítja meg a drótnak hőokozta tágulási együtthatóját is.

Ezen 1. és 2. alatt közölt adatok alapján egyszer és mindenkorra számíthatunk egy táblázatot, melyből 2^0-ról 2^0-ra kiolvassuk a dróthosszt. Hangsúlyozom, hogy ezen

*) Ezt a pontraállítást még a bázisvonalára merőleges irányban is teljesen elegendő 3—4 mm-re élesen elvégezni. Mi 10 indexállványt állítunk fel egyszerre.

*) Amikor tehát szimmetrikus a láncgörbe.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

megadott dróthosszak vonatkoznak arra az esetre, ha a két drótvég egyenlő magas és ha a feszültsége a drótnak pontosan 10 kilogramm. Minthogy az indexek — épúgy mint a térszín — nem lesznek egy niveauban, sőt rendezetlen pályán ± 1—2 méter magasságkülönbség is lesz köztük, másrészt mivel a drótfeszitő-állvány csigájának lesz csapsúrlódása, azért kétrendbeli korrekció lesz alkalmazandó. Ha az előbbi példa esetében a hőmérséklet a leolvasások idejében + 19 *R* lett volna (a hőmérsékletet elég egyetlen a levegőben pörgetett termométerrel mérni), akkor táblázatban megtaláljuk a normális dróthosszt ezen hőfokra. Például:

$$l_{19R} = 24000{,}37 \text{ } mm,$$

akkor a nyert $+ 4{,}24$ „ hozzáadva,

nyerjük a $24004{,}61$ *mm* nyers értéket,

melyet még *két* korrekcióval kell ellátni. Az egyiket *táblázatból* nyerjük, ha ismerjük a két index magasságkülönbségét, a másik pedig csakis a csapsurlódástól lévén függő, kisérletileg megállapítható.

Példánkban tehát

$$l = 24004.61 + \delta_1 + \delta_2, \text{ ahol}$$

a δ_1 korrekciót, a két index nem egy szintben való fekvése, azaz a láncgörbe nem szimmetrikus volta teszi szükségessé. Ezen javítás ennélfogva mindig kisebbítő hatásu, azaz negativ előjelű. Kiszedhető egy a nemzetközi mértékintézet által összeállított számtáblázatból. E tábla argumentumai a drót hossza és a két index magasságkülönbsége *(m)*, kifejezve a hajlásszög közelítő tangense által:

$$tg\alpha = \frac{m}{\text{nyers dróthossz}}.$$

Példánkban azt találtuk, hogy a nyers húrhossz-érték: 24004,61 mm. Ha

$$tg\alpha = 0{\cdot}06,$$

(ami körülbelül 1·5 méteres magasságkülönbségnek felel meg), akkor a nevezett táblázatban a 240004·00 oszlopban és a 0·06 sorban

$$\delta_1 = -0{\cdot}071,$$

a 24005·00 oszlopban pedig ugyanazon sorban

$$\delta_1 = -0{\cdot}075$$

és igy 24004·61-nak megfelel a

$$\delta_1 = -0.073_4 \text{ érték.}^{*})$$

A két index magasságkülönbségét, amelyből a *tgα* kiszámítható táblázattal, egyszerű szintezéssel állapitjuk meg. *Guilleaume elmés* kis szintező távcsövet készített, mely közvetlenül a *tgα* argumentumot adja, de célszerűbb a 24 méteres szakasz cövekeket rendesen beszintezni és minden egyes felállított indexállvány magasságát a cövek felett egy milliméter osztással ellátott merev pálcával mérni. **)

A δ_2 korrekció, mely egész napon át állandó értéknek tekinthető ugyanazon lálványra nézve, meghatározható, mihelyt megállapítottuk grammokban kifejezve a csapsurlódást.

---

*) A katonai földrajzi intézet oly δ_1 táblázatot készített, amely a kényelmetlen *tgα* argumentum helyett a szintezéssel nyert *m* szerint halad.

**) Érdekés rámutatni arra a körülményre, hogy mily rendkívül nagy, szinte hihetetlenül nagy befolyása van a δ_1 értékre a dróthossznak. Igy pl. a nevezett táblázat szerint 24000·00 mm dróthossznak $tg\alpha = 0{\cdot}09$ esetében $\delta_1 = 0{\cdot}269$ mm felel meg. Ugyanazon *tgα* mellett egy 9 mm-el hosszabb, azaz 24009·00 mm hosszú drótnak már $\delta_1 = 0{\cdot}389$ érték felel meg.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ha ugyanis F a drótot feszítő súly, ΔF pedig ennek változása, akkor a láncgörbének megfelelő húrhossz változását a

$$\delta_2 = \frac{1}{3} a_2 L_3 \frac{\Delta F}{F}$$

képlet fejezi ki, ahol az a és L a nemzetközi mértékintézet által megadott mennyiségek. Az a-ra és L-re nézve szokásos (átlagos) értéket tételezve fel, $F = 10$ kg és $\Delta F = 1$ kg esetében

$$\delta_2 = 0{\cdot}38 \text{ mm.}$$

Tehát 1 kg feszültségkülönbség körülbelül *négytized* milliméter hibát okoz. Lineáris függvényről lévén szó, 0·01 kg = 1 dekagramm csapsurlódás okozna 0·004 mm hibát, ami elhanyagolható mennyiség. Tehát ha a csapsurlódást ± 1 dekagrammra pontosan meghatározzuk, úgy teljesen szabatosan lehet már a δ_2 korrekciót számítani. Sem e számítás, sem a csapsurlódás meghatározása nem okoz tehát nehézséget.

A csigák szabatos, könnyű járására nagy gondot fordítanak, gömbökön gördülő csapokkal látják el. Rendesen zérus ennélfogva a δ_2 tag. A leolvasások, hőmérsék figyelembevétel és a δ_1 és δ_2 korrekciók által nyertük *a két index térbeli távolságának* mérőszámát. Ezen távolság vízszintes vetületét $L\,(1-\cos\alpha)$ táblázatból nyerjük, melynek argumentuma a mért magasságkülönbség: m.

Ily módon megkapjuk a bázis hosszát a térszíni niveaura vonatkoztatva: szintezéssel — mely az országos szintezéshez kapcsolódik — megkapjuk az adatokat a tengerszintre való redukcióhoz.

Egy *5—6 km.* hosszú bázisnak ellenőrzéssel való mérése két nap alatt eszközölhető és két nap alatt el lehet végezni minden számítást is. Egy teljes országos bázismérés, beleértve az összes előkészületeket, építéseket, 14 nap alatt elvégezhető. Három mérnök és 10 napszámos elegendő hozzá.

Egy országos kontroll bázismérése, a szükséges bázisfejlesztő hálózat összes munkálatait is beleértve, 3000 korona összes költséggel eszközölhető. Evvel szemben a Bessel-készülékkel 18,000 korona költséget okoz pusztán maga a bázismérés. Városmérés céljára az invardróttal való bázismérés nem költségesebb, mintha farudakkal mérnénk.

Ami az elérhető eredmény megbizhatóságát illeti, úgy mértékadó körökben, az eddigi nagyszámú mérések alapján a $\pm \frac{1}{100{,}000}$ értéket tekintik reálisnak. Azaz egy 10 km. hosszú bázist ± 10 centiméterre tényleg pontosan meg lehet mérni. Mivel a szögmérés a háromszögelésekben $\pm \frac{1}{100{,}000}$ lineáris hosszhibát is eredményezhet, *azért az invárdrótokat az országos háromszögelésekben nemcsak ellenőrző, hanem kiinduló bázisokként is használhatjuk.* A német-afrikai háromszögelések invárdrótokkal mért bázisokra támaszkodnak.

Nem lesz érdektelen, ha néhány eddigi mérési eredményt ismertetünk.

A Simplon-alagút hossza körülbelül 20 km. Ezen hosszt invár-berendezéssel oda-vissza 3×24 óra alatt mérték.

Az alagúton kívül hóban, az alagútban + 38° C. melegben dolgoztak; közben egy 70 méteres dróttal a befagyott Rhône folyón is kellett át mérni. A talált eredmények megbizhatóságát Guillaume $\pm \frac{1}{250.000}$-re teszi.

Hasonló megbizhatóságú a *Spitzbergákon* (Baklund mérései) végzett bázismérés, mely óriási hidegben, *sziklás, egyenetlen* talajon eszközöltetett. Az itt említett két esetben

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

rudas bázismérőkkel egyáltalában nem lehetett volna dolgozni. Részint azért, hogy a δ_2 korrekcio külön számítását elkerüljük, részint azért, hogy a drótok **esetleges hosszváltozásait** figyelembe vehessük: *bázismérés előtt és bázismérés után* a drótok hosszait ugynevezett *ellenőrző-alapvonalon meghatározzuk.* Ilyen ellenőrző alapvonalat létesített a m. kir. háromszögelő hivatal 1910-ben a budapesti „Ludovika-Akadémia" kertjében.

Az alapvonal két végpontja 240 méter távolságban van egymástól elhelyezve. A két végpont távola a katonai földrajzi intézet rudas bázismérő készülékével megméretett 8-szor egymásután. A két pont vízszintes távola L tehát egy milliomodra pontosan ismeretes. Ha már most azon módon, ugyanazon feszítő állványok alkalmazásával mérjük e bázist, mint ahogy a nagy alapvonalakat szoktuk mérni, úgy az ily módon levezetett *dróthossz értékben a δ_2 korrekció és az esetleges dróthosszváltozás is benfoglaltatik.* Természetesen évente vagy két évenkint rudas bázismérővel meg kell győződnünk a két ellenőrző bázis-végpont helytállóságáról.

Bemutatjuk itt a m. kir. háromszögelő hivatal tulajdonában levő 192. számú invárdrótnak ellenőrző alapvonalon eszközölt komparálását.

Elfogadva a *nemzetközi mértékintézet* adta dróthosszt, 4-szeri méréssel ezen értékekre jutottunk:

I.	mérés	240.036 58	méter
II.	„	240.036 76	„
III.	„	240.036 52	„
IV.	„	240.036 86	„

A négy mérés számtani középértéke:

240.036 680 méter.

Képezve a középértéktől való eltéréseket:

$$v_1 = + 0.10 \text{ mm.}$$
$$v_2 = - 0.08 \text{ mm.}$$
$$v_3 = + 0.16 \text{ mm.}$$
$$v_4 = - 0.18 \text{ mm.}$$

Ezek négyzetei:

$$v_1 v_1 = 0.0100$$
$$v_2 v_2 = 0.0064$$
$$v_3 v_3 = 0.0256$$
$$v_4 v_4 = 0.0324$$

tehát $[v\,v] = 0.0744$ eszerint *egy mérésnek* várható középvéletlen hibája:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{0.0744}{3}} = \pm \mathbf{0.157 \text{ mm.}}$$

és a számtani középérték gyanánt nyert eredmény várható közép véletlen hibája:

$$M = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{0.157}{2} = \pm 0.078 \text{ mm.}$$

Mérésünk *középvéletlen* hibája tehát kerekszámban

$\pm$ 0.1 milliméter, ami a *240* méterhossznak $^1/_{2\,400\,000}$ része.

Rudas bázismérő készülékkel sem lehetne kisebb középvéletlen hibára jutni. Szóval az ínvárdrótokkal a *mérés művelete maga igen szabatosan hajtható végre.*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Azonban a *dróthossz* maga már nem tekinthető *milliomod* rendig pontosnak illetve *állandónak*. Jelen esetben a katonai földrajzi intézet rudas bázismérője ugyanis az ellenőrző bázisra 240.0387 méterhosszt adott.

Tehát a különbség *2.08 milliméter*, amely 10 dróthossznak felelvén meg, egy *dróthossznak* tehát

0.2 mm javítás esik, ami a dróthossz

$^1/_{120000}$ részének felel meg. Ugyanekkor komparáltatott a 193. számú drót is, amely *0.3 mm* javítást kapott. Igaza van tehát *Borrass* tanárnak midőn azt mondja: *„az invárdrót berendezésnek feltétlenül szükséges szerves alkatrésze egy ellenőrző alapvonal."*) Saját tapasztalatunk pedig: nem egy dróttal sokszor, hanem* ***több*** *dróttal egyszer-egyszer mérni a bázisokat.*

---

*) Tanulságosak a nemzetközi mértékintézetben a drótok sajátságaira vonatkozó következő kisérletek. 20 kgros súly 45 óra hosszat feszítette a drótot. Ezután ismét 10 kgr-al feszítve, ugyanazt a húrhosszt találták, mint amit találtak volt a 20 kgros feszítés előtt. Azonban ugyanezen drótot 30 kgr erőnél feszítve, 5 óra mulva már *0·03 mm állandó* hosszváltozás volt kimutatható.

40	kgr.	6	óra alatt	0·12 mm.
50	„	8	„ „	0·19 „

állandó hosszváltozást okoz.

Akár dobra csavarjuk a drótokat, akár pedig engedjük, hogy szabadon csavarodjanak köralakúra, csavarás után a hossz nem lesz azonos a csavarás előtti hoszszal. Minden egyes felcsavarás örök időre változtatja a dróthosszt.

Erre vonatkozó kisérletek a következőket eredményezték:

	24 méter
0-szori csavarásnál a hossz volt	+ 0·36 mm.
1-szeri csavarás után a hossz lett	+ 0·23 „
2 „ „ „ „ „	+ 0·22 „
5 „ „ „ „ „	+ 0·20 „
10 „ „ „ „ „	+ 0·18 „
20 „ „ „ „ „	+ 0.16 „
30 „ „ „ „ „	+ 0.20 „
40 „ „ „ „ „	+ 0·21 „
50 „ „ „ „ „	+ 0·19 „
60 „ „ „ „ „	+ 0·19 „

E táblázat azt mutatja, hogyha a drót sokszor van már felcsavarva, akkor további csavarásoknak már alig, vagy egyáltalában nincs hatása.

Befolyása van a dróthosszra a felcsavarás időtartamának is, ezt kisérletek igazolták. Abban az esetben azonban, ha a drótok előzetesen sokszor (100—200-szor) lettek fel- és lecsavarva és így tétettek el, akkor 1, 2, 5 és 7 hónapi felcsavarodott állapotban való fekvés után a hosszak azonosak maradtak. A drótok — az eddig mondottakra való tekintettel — mielőtt a forgalomnak átadatnak, nehány százszor fel- és lecsavartatnak, azután összecsavart állapotban egy évig maradnak egy helyiségben, amely 0°-tól + 50°-ig lesz lassankint felmelegítve és aztán lassan 0°-ra lehűtve.

Most lesz csak a drót hossza a nemzetközi intézet által meghatározva: 10 kgr. feszültség és 15° Celsius hőmérséklet mellett.

Érdekes a drótnak a viselkedése erős rázásokkal és ütésekkel szemben:

100	erős	rázás	által	rövidül	. . . . .	0·03 mm.-el
300	„	„	„	„	. . . . .	0·13 „
500	„	„	„	„	. . . . .	0·20 „
700	„	„	„	„	. . . . .	0·23 „
1000	„	„	„	„	. . . . .	0·31 „
1500	„	„	„	„	. . . . .	0·37 „
2000	„	„	„	„	. . . . .	0·45 „

A rázás okozta rövidülést avval magyarázzák, hogy a molekulák jobban összetömörülnek ezáltal. Fontos, hogy *500* rázás után további *200* rázás csak *0·03 mm.* rövidülést okoz, míg *100* rázás után további *200* rázás még *0·1 mm.* rövidülést eredményez.

Ezen oknál fogva minden drót, mielőtt a nemzetközi intézet a hosszát megállapítaná, 500 erős rázásnak lesz alávetve, miáltal esetleges rázások ellen biztosítva van, azaz egy-egy rázás mérésközben a drót hosszát nem fogja megváltoztatni.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

2. §. A bázismérések megbízhatóságának mérőszáma.

A 192. számú invárdróttal az ellenőrző bázison végzett mérések közlésénél számpéldán bemutattuk, miként szokás *többszörösen* (azaz fölös számban) *végzett* mérések eredményeiből a mérési művelet megbizhatóságát jellemző *középvéletlen hibákat,* nevezetesen

a) egy mérés középvéletlen hibáját (m)

b) a végeredmény (azaz a számtani középérték) középvéletlen hibáját (M) meghatározni.

A *rudas* bázismérő készülékeknél, mivel a mérés igen költséges, a megmérendő 6—8 km. hosszú bázist csak *egyszer oda és egyszer vissza* szokás mérni. Hogy ily esetben is lehessen a mérés műveletének pontosságát középvéletlen hibaszámítással jellemezni — miként említve volt, — 2—2.5 km.-es szakaszokra szokás a bázist osztani*) és így a egyes szakaszokra nyert v-kből lehet középhibaszámítást eszközölni. Rendesen az *úgy, nevezett „kilométeres középvéletlen hibát"* szokás ilyenkor számítani ezen képlet szerint:

$$M_I = \sqrt{\frac{1}{2n}\left[\frac{\Delta^2}{l}\right]}$$

ahol n jelenti a szakaszok számát, Δ_1, Δ_2, Δ_3 . . . Δ_n jelentik az egyes szakaszok oda-vissza mérésénél nyert különbségeket és l_1, l_2 . . . . l_n jelentik a szakaszok hosszait kilométerekben.

Az egész bázismérés *középvéletlen hibája* eszerint:

$$M = \sqrt{M_I^2\, l}$$

ahol l jelenti a bázishosszt kilométerekben kifejezve.

Az egész bázismérés *középteljes hibáját* ezen képlet szerint szokás számítani:

$$\mu = \sqrt{A_I^2\, l^2 + M_I^2\, l}$$

ahol A jelenti a kilométeres *szabályos középhibát,* amely a használt bázismérő eszköznek és annak *komparálásának* függvénye.

Az invárdrótoknál az M_I nem nagyobb, mint a merev bázismérőknél, de az A_I és így a μ is nagyobb. Az invárdrótoknál M_I milliomod rendű μ azonban $^1/_{100\,000}$-rendű lehet. Az invárszalagoknál (*Hayford* módszere) a μ már $^1/_{250\,000}$-re tehető. Mivel *Hayford* módszere amellett olcsó és gyors mérést enged még rossz talajviszonyok mellett is: ezidőszerint ez a módszer mondható a *legracionálisabb* bázismérő eljárásnak.

A gyakorlat szempontjából azonban nem a *mért* bázis középteljes hibája, hanem az abból *levezetett* első I. rendű háromszögoldalnak μ-je a mérvadó. Ezen *számított* alapvonal μ-je, ha a bázismérés μ-je *milliomodrendű* is, tapasztalat szerint $^1/_{200\,000} — ^1/_{100\,000}$-re tehető. Ennek oka a *bázisfejlesztő* hálózat szögméréseiben elkövetett mérési hibák, amelyek — mivel a bázisfejlesztő hálózatban igen hegyes szögek is szerepelnek — hatásukat erősen éreztetik az oldalhosszszámításban.

A tapasztalat lesz most már hivatva eldönteni, hogy $^1/_{150\,000}$-re megbízhatóan mért bázisból levezetett I. rendű oldal megbízhatósága sokkal kisebb-e mint az egy *milliomod* megbízhatósággal mért bázisból levezetett háromszögoldalhossz megbízhatósága. Különböző bázisokból fejlesztett háromszöghálózatok *csatlakozásai* fognak erre nézve a jövőben felvilágosításokat adni.

---

*) Azaz 2—2.5 km. távolban jól állandósított fix pontokat létesítenek és ezeknél is *„vetítenek"*

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

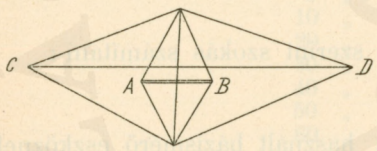
Mindenesetre célszerű lesz, ha invárdrótokkal mérünk országos alapvonalat, nem 6—8 km. hosszú, hanem 15—20 km. hosszú vonalat mérni: miáltal a *bázisfejlesztő hálózat* alakja kedvezőbb lehet és így kevesebbet veszítünk a pontosságból a bázisfejlesztés által. Mivel a drótmérés olcsó, gyors és kedvezőtlen talajviszonyok mellett is végrehajtható: nincs akadálya annak, hogy a régieknél 2—3-szorta hosszabb alapvonalakat mérjünk.

3. §. A bázisfejlesztő hálózat.

A háromszögelésekre nézve végzett vízszintes szögmérések — mint minden mérés — a legszabatosabb műszerek és a leggondosabb munka dacára *másodpercek tizedeire* menő hibákkal lesznek terhelve. Ezen hibák kihatnak a háromszögek oldalhosszszámítására: *de aszerint, hogy mily alakúak a háromszögek, nagyobb vagy kisebb hosszhibákat eredményezhetnek ugyanazon mérési szöghibák.* (Lásd a II. fejezetben mondottakat 33. oldal.)

Pizetti szerint a háromszög *legcélszerűbb alakjának* problemája általában meg nem oldható; csak speciális esetekre és nagyszámú korlátozásokkal lehet megoldásokat adni. Anélkül hogy itt részletes számításokra, amelyek különben is *csekély gyakorlati és elméleti értékkel birnak* rátérnénk, megjegyezzük, hogy egy háromszögben, amelyben *egy oldal* és két szög ismeretesek, a szögmérési hibának a másik két oldalra való hatása közelítőleg a mért szögek *cotagensével* arányos. Egy kis szög tehát, ha oldalhosszszámításra felhasználandjuk, az illető hálózatnak gyenge helyéül tekintendő, tehát elkerülendő. *Ezen szempontból legcélszerűbb lehetőleg az egyenlő oldalu háromszög* alakkal dolgozni, *illetve erre tekintettel kitűzni* az I. rendű háromszögelési pontokat.*)

Az imént hangsúlyozott tétel azonban nem alkalmazható az I. rendű hálózat azon részére, amely *„bázisfejlesztő hálózatnak“* neveztetik és amelynek célja a *mért bázist* a rendes I. rendű oldalhosszig megnagyítani. Minthogy a multban mért bázisok átlag alig 10 km. hosszuak, az I. rendű háromszögoldalak azonban 30 kilométernél hosszabbak voltak: azért a mért bázishoz szükségszerüleg *növekedő oldalakkal biró hálózat* csatlakozik. A bázisfejlesztő hálózat legáltalánosabb alakja az úgynevezett **rhombikus** alak (95. ábra).



95. ábra.

Helmert tanár szerint elméletileg akkor kapjuk a legkedvezőbb kifejlesztést, ha minden *rhombus* átlója körülbelül **1·5**-szer akkora, mint az előző rhombus átlója.

Egy másik — de ritkán alkalmazott — rendszer az úgynevezett *„rácsoshálózat“* (96. ábra) amelynél a bázis egy közelítőleg egyenlő oldalú háromszögekből álló hálózat által lesz meghosszabbítva.

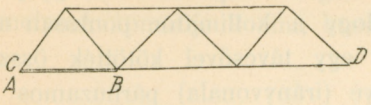
---

*) Ami az I. rendű háromszögek nagyságát illeti, úgy egyrészt célszerű volna minél *kevesebb* (tehát minél nagyobb) háromszöggel dolgozni, hogy lehetőleg kis számu szögmérés kerüljön a számításba; de másrészt szem előtt kell tartanunk, hogy a szögmérések középhibája a távolsággal növekszik. Különösen az úgynevezett *„Lateralrefrakció“* érvényesül itt vagyis az iránysugárnak a levegő okozta *sugártörés folytán* való vízszintes irányú eltérítése. Ez a sugárelhajlítás *kedvezőtlen* légköri viszonyok mellett *Pfaff* szerint 18″ sőt 19″ értéket is eredményezhet.

Tapasztalat szerint — és ezen tétel első sorban *Schreiber* tábornok érdeme — a vízszintes elhajlás, *ha a mérést csak kedvező körülmények közt végezzük* (napkeltekor és napnyugtakor), igen kis mértékben fogja az eredményeket befolyásolni még 100 kilométeres távolságok esetében is. (*Schreiber* az ő tisztviselőinél esetleges nagy *Ferrero*-féle záróhiba esetén *sohasem fogadta el mentségül* a sugártörést.) Tehát — ha egyéb gátló körülmények nem forognak fenn: 90 sőt 100 kilométeres háromszögekkel képezhetnők az I. rendű hálózatot. A további (II. és III. rendű) hálózatok *beiktatása* szempontjából azonban célszerű átlag 50—60 kilométeres oldalhosszakkal dolgozni.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Jordan tanár szerint ezen rendszer nagyobb szögmérési munkát igényel, mint az első, de *megbízhatóbb* mint a rhombikus rendszer.



96. ábra.

Régente komplikált hálózatok voltak a bázisfejlesztő hálózatok és az I. rendű hálózat *szerves* részének tekintve azokat az egész I. rendü hálózat kiegyenlítésébe be is foglalták.

Schreiber tábornok kimutatta*) ezen eljárásnak egészen téves voltát és szerinte a helyes eljárás:

a) a bázisfejlesztő hálózat legyen a lehető legegyszerűbb alakú,

b) mivel célja csakis az, hogy egy I. rendű oldalnak hosszát számítsuk, azért a bázisfejlesztő hálózat *önmagában külön egyenlíttessék ki* a legkisebb négyzetek módszere szerint. (Korreláta kiegyenlítés.)

A bázisfejlesztő hálózat szögmérése mindig *falazott pilléreken történik:* az éles pont jelzésre és a műszernek absolute szigorú pontra állítására a legnagyobb gond fordítandó.

Ha városmérés céljára külön háromszöghálózat fejlesztetik külön mért bázisból, úgy a háromszöghálózat szögeit esetleg noniusos teodolittal mérhetjük, de a bázisfejlesztő hálózat szögeit mindenesetre *mikroskopos teodolittal* kell mérni és a szögmérést legalább 8-szor kell megismételni. *Városi bázisfejlesztő hálózat háromszögeire nézve a megengedett Ferrero-féle szöghiba ± 1.''0-ben* állapítandó meg, míg a városi hálózatra a szöghiba ± 2'' is lehet. Városméréseknél 1000—2000 méter hosszú bázist volt szokás farudakkal mérni: *invárdrótokkal* a jövőben hosszabb városi alapvonalak is lesznek mérhetők.

4. §. Az I. rendű háromszögelési pontok jelzése.

1. Fényjelzések.

Hegyi vidékeken az I. rendű pontok rendszerint a legmagasabb hegycsúcsokon választatnak. Ilyenkor rendszerint egy **egyszerű gula** esetleg egy (a hegycsúcson levő és ki nem vágható élő fák fölé érő) kisebb *állványos gula* (lásd ezen §. 2. pontját) *függőleges rúdja (tokja)* jelzi a pontot messziről láthatólag. Tapasztalat szerint *hegyi vidékeken 50—60* kilométer távolban levő ily jelek 40-szeres nagyítású távcsővel jól láthatók illetve élesen beállíthatók. Egészen tiszta, napsütéses időben a *gúla rúd fehérre meszelt része* (a fehér keresztdeszkák), nem egészen tiszta vagy nem napsütéses időben pedig a *fekete rész* (tok) látható élesen.

Hegyvidéken mesterséges fényjelzésre általában szükség nincs, amint azt a felsőmagyarországi és az erdélyrészi elsőrendű háromszögelések igazolják.

Síkvidéken vagy meglevő *magas templomtornyok* vagy *magas állványos gulák* lesznek az I. rendű pontok. (Lásd ezen §. 2. pontját.) Templomtornyok azonban a legritkább esetben lesznek 50—60 kilométer távolságból távcsővel élesen beirányíthatók, sőt síkvidéken még a *(fehér-fekete)* gulák sem láthatók élesen (vagy egyáltalában nem) a levegő azaz a föld felszinéhez közel fekvő levegő rétegek párás, ködös volta miatt.

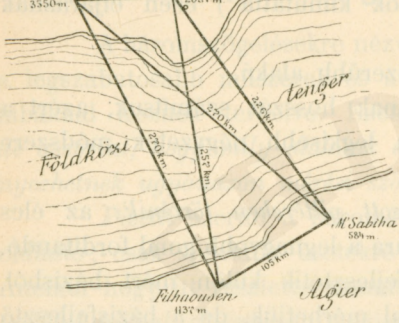
Ez a körülmény kényszerítette a geodétákat már *egy évszázaddal* azelőtt arra, hogy sík illetve dombos vidéki háromszögeléseknél a teodolittal beirányozandó pontokat *ha éjjel történik a mérés mesterséges fénynyel, ha nappal történik a mérés, apró tükörrel visszavert napfénynyel* jelezzék illetve tegyék 100 kilométer távolságból is beirányozhatóvá.

*) Lásd Zeitschrift für Vermessungswesen 1882. évfolyam 129. oldal, ahol *Schreiber* a bázisfejlesztő hálózat helyes kiegyenlítését is ismerteti.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Az I. rendű háromszögelési pontoknak éjjeli mérésekre alkalmas jelzése *„optikai kollimatorok“* segítségével történik.

Lényege egy egyszerű *petroleumlámpa*, amely egy 2 dm. átmérőjű és 6 dm. gyujtótávolsággal bíró gyüjtőlencsének *fokuszába* lesz állítva. Hogy a kollimator pontosan az irányba legyen állítható, egy távcsővel kötötték össze amelynek irányzó tengelye (irányvonala) párhuzamos a kollimator tengelyével. Az itt leírt berendezést használják Franciaországban és ott tapasztalták, hogy tiszta időben 50—60 kilométer, nem egészen tiszta időben 30 km. távolságra láthatók a fényjelzés 20-szoros nagyítású távcsővel. A kolimatorfény képe vöröses, kerek, élesen határolt fénypont gyanánt jelentkezik. Napnyugta után 1 órával a kép már nem rezeg: ekkor tehát már lehet mérni körülbelül éjfélig, amikor a fénypontok ismét táncolni kezdenek. A franciák 1875-ben tíz állomáson végeztek *éjjeli és nappali* méréseket és az éjjeli mérésekből számított *Ferrero*-féle szöghiba + 0.″26 volt szemben a nappali mérések + 0.″39 szöghibájával szemben, ami arra vezethető vissza, hogy éjjel a légköri viszonyok (sugártörés is) kedvezőbbek.*)



97. ábra.

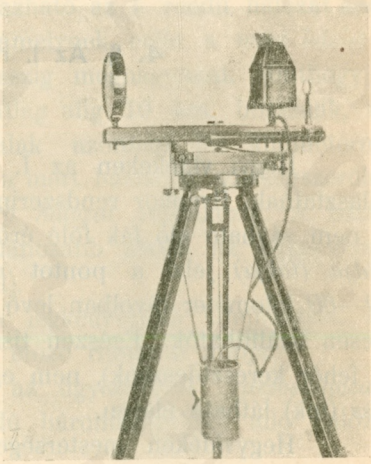
Az éjjeli méréseknél kellemetlen az észlelő teodolit szálkeresztjének és mikroskopjainak megvilágítása, ami azonban modern akkumulátoros villanyfény berendezéssel ma már igen tűrhetően van megoldva. Ujabban Bajorországban kisérleteznek egyszerű lámpajelzésekkel; Hayford az amerikai fokméréseknél egyaránt használta az *éjjeli* és *nappali* fényjelzéseket. A m. kir. háromszögelő hivatal *„Acetylen“* fényvetője a 98. ábrán látható.

A nappali fényjelzések eszköze a **heliotrop** amelyet *Gauss* használt először 1818-ban.

Az eredeti *Gauss*-féle szerkezet azonban ma már sehol sem használtatik. Legelterjedtebb napjainkban a *Bertram*-féle heliotrop, amely a.99. és 100. ábrán látható.

Ezen egyszerű készülék áll egy *alapdeszkából* (*A*) amelynek méretei *52, 10* és *2* cm.

E deszka elején van két rövid láb (*a*) és hátsó részén (középen) a *c*-vel jelzett *emelő csavar;* e csavarral (a két láb körül) változtatható a deszka hajlásszöge a vízszinteshez. A deszka hátsó részén *vertikális* és *horizontális* értelemben forgathatóan van


98. ábra.

*) A legnagyobbszerü fényjelzéses háromszögelést 1879-ben *Perrier* és *Ibanez* végezték Spanyolország és Afrika (Algier) között.

A 97. ábra mutatja a szóban forgó háromszögeket és a nagy távolságokat, melyekkel itt meg kellett küzdeni.

A háromszögelési pontok nevei alá azoknak tengerszintfeletti magassága van beírva.

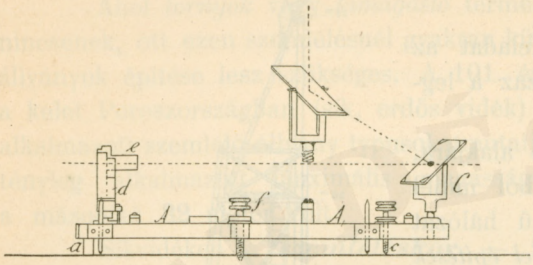
Kisérletek mutatták, hogy a napfénynek tükrökkel való visszaverődésével itt nem boldogulnak a ködök miatt.

Körülbelül 2 lóerős gőzgépekkel előállított villamos fényt vetítettek *„kollimátorok“* és *„projekteur“*-ök által a kérdéses irányokba. Másfél hónap alatt minden szög külön-külön 40-szer volt mérhető.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

elhelyezve a (*C*) vetítő (ezüstözött) *tükörlap,* amely 8/8 cm. méretű, és amelynek *közepén*jában van egy 4 mm. átmérőjű lyuk.

A deszka másik végén egy állványon (*d*) van az úgynevezett *világító csövecske* (*e*) amelynek átmérője 2 cm., hossza pedig 4.5 cm. A világító csövecskének a tükör felé eső végében van egy *szálkereszt* kifeszítve, a másik vége pedig felemelhető fedővel van ellátva és e fedőlap belseje fehér papirossal van leragasztva. E fedőlap közepén *1 mm.* átmérőjű lyuk van.



99. ábra.

Végül körülbelül a deszka közepén van az *f*-el jelzett erős — kézzel forgatható csavar — amelynek segélyével az egész eszköz a szóban forgó *háromszögelési pont* fölé lesz szilárdan csavarva, ha az eszköz a kivánt irányba van beállítva.

A heliotrop akkor van beállítva, ha az *f* csavar a *pont* vertikálisában van és a *tükörlyuk* és *szálkereszt* adta *irányvonal,* ± 30′-re pontosan arra a pontra mutat, amelyre világítani akarunk.

Az első beállítást — minden irányra nézve — előzetes, közelítő adatok alapján maga a háromszögelő végzi. Ugyanakkor a pont körül őrpontokat helyez el a kérdéses irányokban és most már egy *gyakorlottabb napszámos* is végezheti naponta a felállítást ezen őrpontok segítségével.

Maga a fényvetés a beállított irányba úgy történik, hogy a tükör *C* úgy forgatandó, hogy a reá eső napfény a világító csövecske (fehér) fedőlapját megvilágítsa úgy, hogy a *tükörlyuk* okozta kerek árnyékfolt a világító csövecske fedőlapja közepén levő kis lyukra essék. De a nap járása folytán a *C* tükröt **percenkint** apró kalapácsütésekkel el kell forgatni, ha azt akarjuk, hogy az árnyékfolt a kis lyukra essen mindig.

Ha a heliotropot nem tudjuk úgy felállítani, hogy a napfény közvetlenül érje a tükröt, úgy — amint a 99. ábra mutatja — egy külső segédtükörrel vetítjük a napfényt *C* vetítő tükörre.

Fontos, hogy az észlelő a heliotropot kezelő emberrel jelekkel érintkezhessen is. Ezt *Morse*-féle jelekkel érik el: kis lemezt tartva hosszu (ez vonást jelent) vagy rövid (ez pontot jelent) ideig a heliotrop elé.

100. ábra.

Ha egy pontból pl. 5 más pontra kell mérni, úgy mind az 5 ponton lesz heliotrop felállítva: feltéve, hogy heliotrop nélkül vagy egyáltalában nem, vagy csak ritkán látjuk a pontokat.

A heliotrop fény gyakran nem *éles* pontként, hanem elmosódott szaggatott határú táncoló képként jelenik meg.

A poroszok ilyenkor nem mérnek; az amerikaiak akkor is mérnek — de hogy *elfogadható* eredményeket kapjanak, 2—3-szor annyi ismétléssel mérik a szöget, mint mérnék

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

normális körülmények között. *Tapasztalat szerint legnyugodtabbak a képek reggel 4 óra és este 1/2 7 óra körül: a porosz Landesauf nahme csakis ezen időpontokban mér I.-rendű hálózatot.*

Ha a fénypont nem éles (nem *mag*-szerű), akkor a teodolit távcsöve elé tartott (karikára erősített) átlátszó *vékony szöveten* át nézve a fénypontot — az *éles* határolású lesz.

2. Gúlaépités.

Rendkívül nehéz és felelősségteljes feladat az elsőrendű hálózatnak *úgynevezett szemlélése*, azaz a legcélszerűbb pontok kiválasztása.

Ügyelni kell a háromszögek lehető jó alakjára, ügyelni kell arra, hogy a kiválasztott pontokból minél nagyobb *területeket belássunk* (II. és III. rendű hálózat miatt) és ügyelni kell arra, hogy a *szükséges jel építések ne legyenek túlságosan költségesek.* Ezen munkához felszereljük magunkat

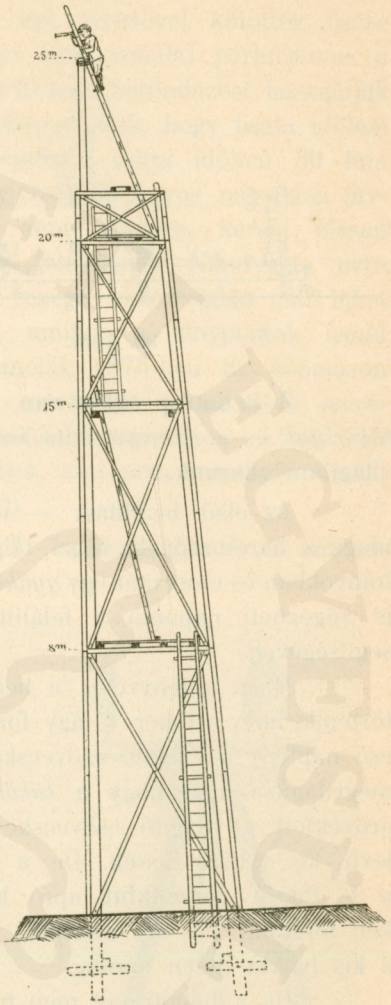
a) az egész vidék átnézeti (topográfiai) térképével (nálunk 1:200000 és 1:75000 katonai térkép);

b) esetleg előzetesen ezen vidéken végrehajtott háromszögelések adataival (összelátásokat feltüntető vázlatokkal és irányértékekkel) amilyenek nálunk a katonai mérések adatai;

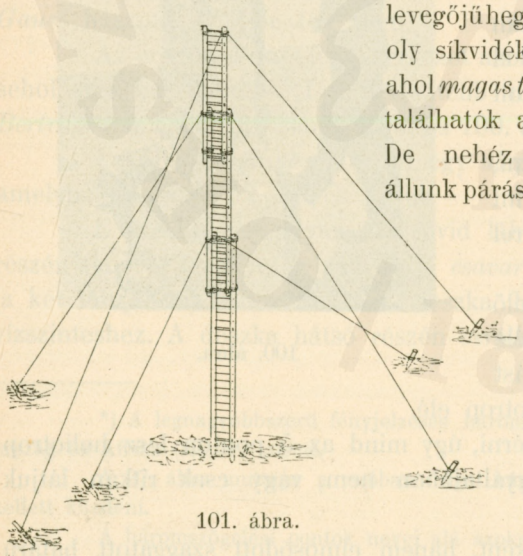
c) egy kis úgynevezett *kitűző asztalkával* (primitív kis mérőasztal) és egy kis, úgynevezett *utiteodolittal.* *)

A kitűző asztalkán kifeszített rajzlapra kivonulás előtt összrendezőik alapján felrakjuk azon I. rendű pontokat, amelyekből indulólag vagy melyekhez végeredményben kapcsolólag kell fejleszteni hálózatunkat. **)

Egyszerű lesz a szemlélés művelete, ha tiszta levegőjű hegyi vidéken vagy oly síkvidéken dolgozunk, ahol *magas templomtornyok* találhatók a községekben. De nehéz feladat előtt állunk párás, ködös vidéken és oly sík vagy kissé dombos vidéken, ahol nincsenek magas tornyok és ahol sok az erdős, befásított terület.



102. ábra.


101. ábra.

Mindenesetre tartsuk szem előtt azt az elvet, hogyha egy ponton felállunk és körülnézünk, a kis teodolittal való irányzás, a térképek és más adatok alapján minden látható, kimagasló pontot (hegycsúcs, kémény, torony, szélmalom stb.) rakjunk fel irányra,

*) Az itt elmondottak *majdnem szószerint* alkalmazandók a *város mérések* önálló háromszögeléseinek előmunkálatainál.

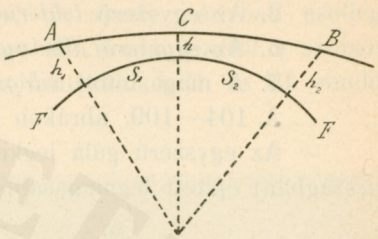
**) Városmérési hálózatnál például az országos háromszögelés felsőrendű pontjai lesznek ezek.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

sőt lehetőleg méretarányra helyesen a kitűző asztallapra: (lásd a 2. rajzmellékletet) feltüntetve az összelátásisugarakat is.

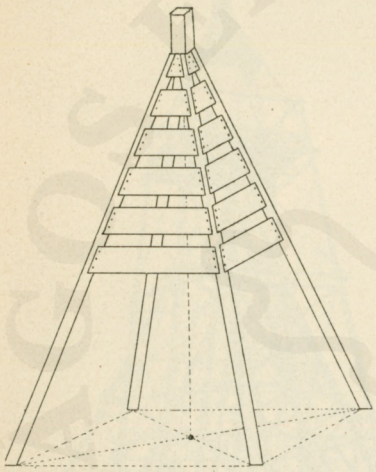
Nemcsak a közvetlenül fejlesztendő I. rendű (vagy városi alaphálózat) hálózat, hanem a később fejlesztendő II. és III. hálózatokhoz is *igen értékes* adatokat szerzünk be így és sok (haszontalan) utazgatást és járkálást *megtakarító* munkát végzünk ezáltal.

Ahol *tornyok* vagy *kimagasló* természetes pontok nincsenek, ott ezen szemlélésnél gyakran külön ***szemlélő*** állványok építése lesz szükséges. A 101. és 102. ábrák a kelet Poroszországban (sík, erdős vidék) nagyszámban alkalmazott szemlélő állvány typusokatmutatja: az elsőnek tényleg alkalmazott maximális magassága 15 méter, a másodiké **32** meter volt.



103. ábra.

Síkvidéken a ***szemléléskor*** — különösen ha *fák gátolják a kilátást — az összelátás elméleti lehetőségének megállapítása céljából* gyakran a föld görbültségével kapcsolatos közelítő számításokat is kell végezni a következő eljárás szerint.


104. ábra.

Síkvidéken egy ***m*** meter magas toronyból ***S*** mértföld távolságra láthatunk:

$$9. \ldots\ldots S = {}^1/_2 \sqrt{m}.$$

Igy pl. 25 méter magas toronyból, ha sík a vidék és *akadály* nincs, 2·5 mértföldre láthatunk; vagy egy 36 méter és egy 64 méter magas pont, még 7 mértföld távolságban engedne összelátást teljesen sík vidéken.

Közbenső akadály hatásának megitélésénél ez a feladat szerepel. (103. ábra.)

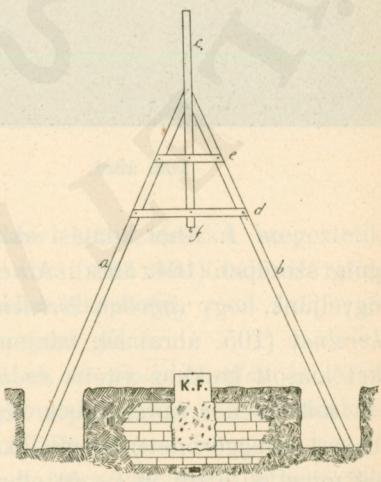
Ha $F\,F$ jelenti a földmetszetet (nivó metszet) az egy síkban fekvő $A\,B\,C$ pontokon át, és h_1 h_2 h jelentik a pontok magasságait a térszín felett (méterekben) $S_1 = A\,C$ és $S_2 = B\,C$ pedig *kilométerekben* a távolságokat úgy áll ez a képlet:

$$h = \frac{S_1\,h_2 + S_1\,h_1}{S_1 + S_2} - \frac{4\,S_1\,S_2}{51}$$

Alkalmazva: arról van szó, hogy a katonai térképen $h_1 = 640$ méter magasnak feltüntetett ***A*** pont, a $h_2 = 515$ méternek feltüntetett B pontot láthatja-e a közben levő **360** méter magas C domb miatt. C domb adatai a térképből:

$$S_1 = 30 \text{ km}, \quad S_2 = 45 \text{ km}.$$

Helyettesítve $h = 484$ méterre jutunk, tehát a *látvonal* (484—360) = 124 meterrel megy el a C domb felett, tehát a C-n levő erdőségek sem gátolhatják az összelátást.



105. ábra.

Síkvidéken a földi görbültség és közbenső — *ki nem vágható* — előfák kényszeríthetnek magas gúlák építéséhez; hegyes vidéken azonban rendszerint alacsony gúlák fognak szerepelni — kivéve amikor *közvetlenül a pont körül* magas és ki nem vágható előfák vannak. Ez azonban

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

csak lapos hegytetőkön és akkor is ritkán fog előfordulni. Ilyenkor a gúlát ott a helyszinén beszerzett faanyagból készítjük.

Síkvidéken, rendesen megmunkált (faragott, fűrészelt) *puhafából* készülnek a gúlák.

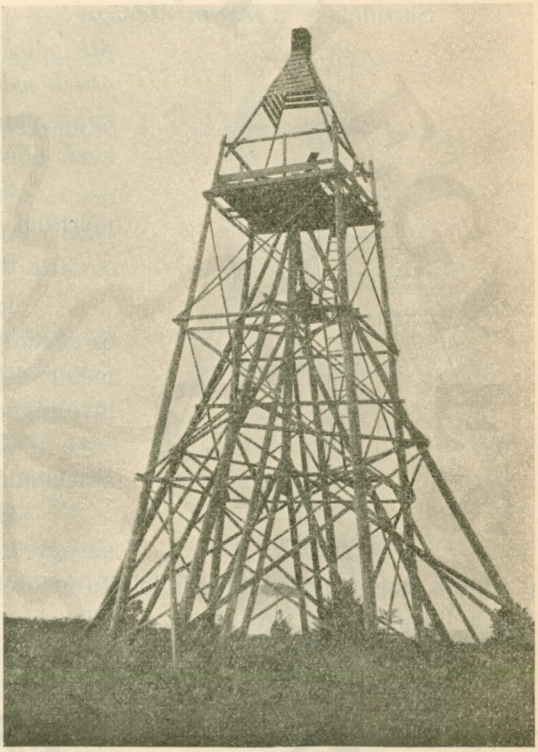
A gúlák *négy*félék:

1. Az egyszerű, *tokos gúla.*
2. Az egyszerű *toldórudas* gúla.
3. Az *egyszerű állványos* gúla.
4. A magasbított *világító* állással ellátott állványos gúla.

A 104—109. ábrákon láthatók a szokásos typusok.

Az egyszerű gúla legkisebb méretei: **5** méter *toktető* magasság; az eddig (Poroszországban) épített legmagasabb állványos gúla *toktető* magassága pedig **61** méter. (109. ábra.)

106. ábra.



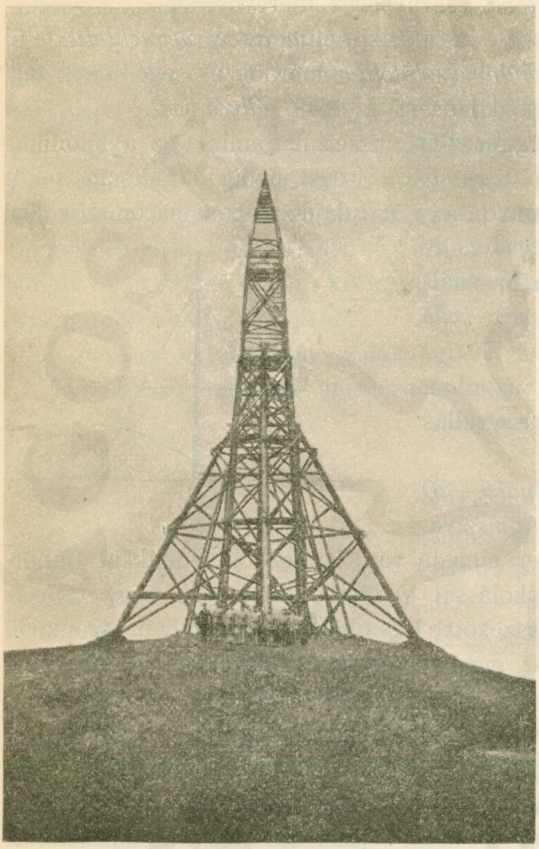
107. ábra.

ad 1. Ahol kilátási akadályok egyetlen irányban sincsenek, ott az egyszerű tokos gúla szerepel. (104. ábra). A négy láb elhelyezésére szolgáló lyukak helyeinek kiválasztásánál ügyeljünk, hogy *egyetlen észlelendő irányba se essék gúlaláb.* A gúla építése az egyik *diagonális keretnek* (105. ábra) sík talajon eszközölt összeszegezésével kezdődik. Most ez a keret a két kiásott lyukhoz vitetik és a ***c*** rúd (***e*** és ***d*** között) köré *csavart* hosszú, erős kötéllel — miközben a kötél másik végét a mérnök tartja — felállíttatik a keret. Az ***f*** pontnál bevert (meggörbített) szegre akasztott függő mutatja, hogy a pont (kő) fölött áll-e a ***c*** rúd és mivel a lábak (***a*** és ***b***) elhelyezésére kiásott lyukakat rendesen jó nagyra készítjük, az egész keret tologatásával a függő pontosan a pont fölé állítható. Most az ***a*** és ***b*** lábak végére szegezett *keresztgerenda-darabok* (horgonyfák), valamint *köveknek* és a földnek sulykolása által a keretet ezen helyzetében megrögzítjük. Ezután a két másik gúlaláb lesz a

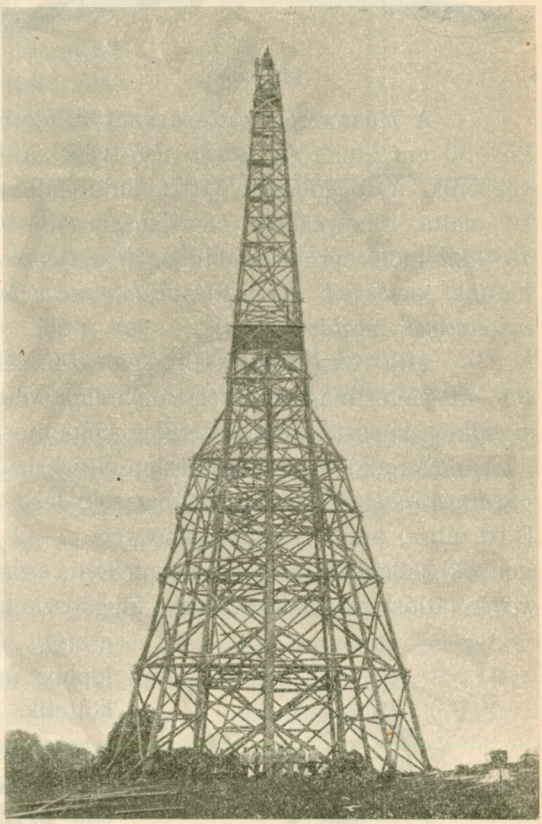
© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

lyukba állítva, óvatosan a *kerethez* támasztva és megsulykolva. Ezután következik (alulról felfelé) a deszkasorok (deszkakoszorú) felszegezése, *a feketére festett tok ráhelyezése* és végül a gúla bemeszelése.

ad 2. Hasonlóan épül *az egyszerű toldó rudas gúla is.* Toldó rúdra akkor van szükség, ha a gúla mellett épület vagy ki nem vágható élőfák állanak oly irányban, *mely ugyan nem esik elsőrendű háromszögelési pont irányába,* de amely irányban esetleg II. vagy III. rendű pont később létesülhet, amikor e II. vagy III. rendű *pontból* a szóban forgó elsőrendű pontra tehát csakis ily módon lehetséges az irányzás. A II. és III. rendű



108. ábra.



109. ábra.

hálózatban a toldó rúdra fekete tok és nehány (4—6) *fehér* keresztdeszka szegeztetik. I. rendűnél a *toldó rúd* úgy lesz kiképezve, amint azt a 106. ábrán (de mint önálló II. rendű jel) bemutatott építmény mutatja. Ezt kell egy gúla *fölé toldva* elképzelni.

10—12 méter magas toldó rúd is alkalmazható egyszerű gúlán.

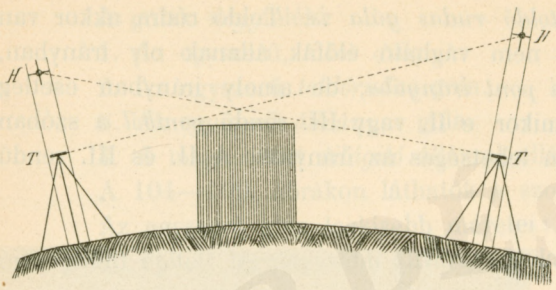
Az *egyszerű*, vagy *egyszerű* toldó rudas gúla esetében a *teodolit állás* is és a *heliotrop állás* is a térszinen létesíttetik. A teodolit (és a heliotrop is) vagy erős hordozható műszerállványon vagy téglából falazott (100. ábra) pilléren áll ilyenkor.

ad 3. és *ad 4.* Ha akár épületek vagy erdők, akár a nagy távolság (illetve a föld görbültsége) miatt kénytelenek vagyunk *magas* műszerállásból dolgozni, akkor építünk egyszerű állványos *gúlát.* (107. ábra).

Ha síkvidéken közbenső erdőkön vagy városokon kell átnézni és a távolság is igen

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

nagy, *úgy túlságosan magas* (40—50 méteres) műszerállás elkerülése végett lehetőleg alacsony műszerállást és föléje (de tőle függetlenül) *magasbított világító állást építünk.* (A 110. ábrán két ily gúla van vázolva: ***T*** a teodolit helyét, ***H*** a heliotrop helyét mutatja; e berendezés célszerű voltát az ábra is mutatja.)



110. ábra.

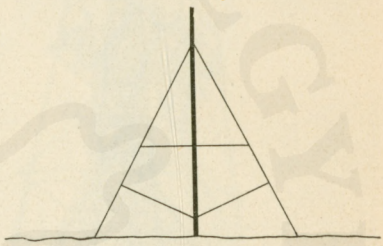
Lássuk az *állványos gúla* szerkezetét.

Két egymástól *teljesen független építményből* áll:

az egyik építmény a *műszerállás oszlopa* a szükséges merevítéssel,

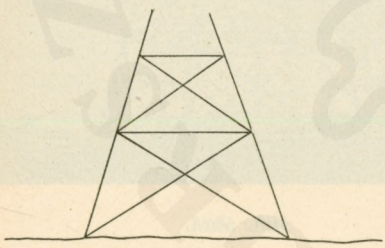
a másik építmény a *négyoldalú,* felül *gúlával ellátott,* a mérnök és segédjének tartózkodására szolgáló *állványzat.*

A *műszerállás oszlopa* vagy **álló** vagy **függőoszlop,** aszerint, amint ez a hatalmas 25—30 cm átmérőjű *szálfa* alsó vége a *földbe van ásva,* vagy pedig a térszín felett végződik. A függőoszlop (107. ábrán látható) előnye, hogy a tulajdonképeni háromszögelési kő alatta elhelyezhető centrikusan, de hátránya, hogy *10—12* méternél hosszabb függő oszlopot nem használhatunk, *mert azt semmiféle módon nem lehet már kellő merevséggel megtámasztani.*


111. ábra.

Álló oszloppal (108. és 109. ábra.) azonban *25—30* méter magasságig is mehetünk; de a műszerállás a kőhöz képest szükségszerűleg külpontos lesz.

Az álló- vagy függőoszlop elsősorban *négy 15—20 cm átmérőjű szálfával* (ferde támaszok) lesz megtámasztva, (110. ábra) amely szálfák alsó vége 1—2 méter mélyen van kereszt gerendákkal (fahorgonyok), kövekkel és locsolás melletti erős sulykolással a földbe erősítve. A négy támasz *kettős* (átlós) gerendákkal lesz a függőoszloppal összekötve különböző magasságban, azonkivül a *négy támasz* egymáshoz keresztekkel es a függőoszlophoz merőleges *feszítő gerendákkal* (112. és 107. ábra) köttetik. Lényeges, hogy minden gerenda *feszített* (mesterségesen hajlított) *állapotban* legyen megerősítve és hogy nem szegekkel, hanem *vaskapcsokkal* és *csavarokkal* erősítsük egymáshoz a fákat: csak így lesz a műszerállás merev, állandó feszültségben levő szerkezet. Inkább kevesebb — de szinte a törésig feszítettgerendákkal — mint sok, csak egyszerűen egymáshoz erősített gerendával dolgozzunk. Nagyobb állványokon az építés után csak 3—4 hét mulva lehet — a feszültség miatt kiegyenlítődésre törekvő mozgások miatt — műszerrel észleléseket végezni; 4—5 méteres oszlopon az építés után 2 nappal lehet már mérni.


112. ábra.

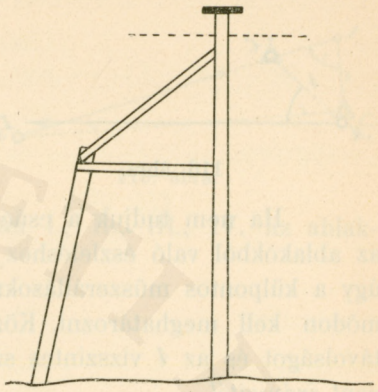
Mivel az I. rendű gúlákra 4—5 évig van szükség, azért a földbe eresztett gerendavégeket korhadás ellen feltétlenül impregnálni kell.

Igen magas műszeroszlop esetében nem egyszerű, hanem a 109. ábrán látható összetett támaszokat használjuk és nem négy, hanem *nyolc ilyen* támasz lesz alkalmazva *(„Poligongerüst“). A támaszok csak úgy merevíthetnek,* ha *kellő ferdeséggel* (nem nagyon hegyes szög alatt) *találják a műszeroszlopot,* amit *toldott* (megtört) támaszokkal lehet csak elérni (113. ábra) igen magas műszeroszlop esetében.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A 114. ábra hegyes toldása tehát igy mindig elkerülhető.

Az építmény másik (független) része, azaz a tulajdonképeni *gúla-állvány* (107. és 108. ábra) 4 darab 1 : 15 hajlással (ferdeség a függélyeshez) felállított szálfából készül, és emeletenkint koszorúkkal és andrás-keresztekkel van összekötve: tetején pedig egyszerű gúlával ellátva. Ez az építmény nem oly merev, mint a *műszerállás:* ezen az építményen van a *padlózat 1. 1 — 1. 2* méterrel a műszeroszlop felső vége alatt. Természetesen a padozat oly nagy mérettel van középen kivágva, hogy még erős szélben se érintkezhessen a padlózata műszeroszloppal.

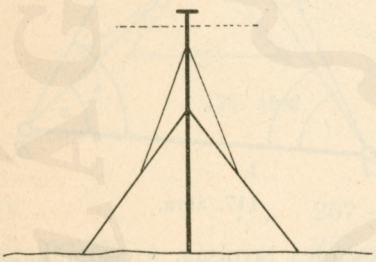


113. ábra.

A műszeroszlop teteje 9 cm. vastag 50/50 cm. méretű, csavarokkal ráerősített tölgyfa lap, letompított sarkokkal: erre helyeztetik a teodolit. Magasbított világító állás esetén (108., 109. ábra) a négyoldalú gúla-állványzaton 10—20 méterrel a műszerállás padlója felett egy másik padló létesíttetik, amelynek közepébe egy erős (ládaszerű) asztal csavartatik. Erre helyeztetik a heliotrop: amely tehát szeles időben kis mozgásokat fog végezni, *ami azonban a mérésre* (50—60 km-ről irányzunk) *nincs befolyással.*

Ami az állványos gúlák építési költségét illeti, úgy:

4—10 méteres műszermagasság esetén összköltség 150—500 korona; 10—20 méteres műszermagasság esetén 500—1000 korona.



114. ábra.

Magas építmény esetében 20 méter műszermagasságig folyó méterenkint 1 napot, azonfelül minden folyó méterre 2 napot számíthatunk építési idő gyanánt: intelligens munkások és ácsok esetén.

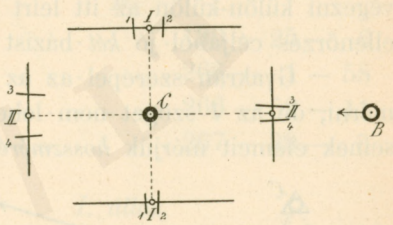
Tornyokon a toronycsúcs a tulajdonképeni három szögelési pont — amely bent a toronyban — a falakba eresztett *4 vascsap* (illetve az azokat összekötő kétegyenes metszése) által lesz állandóan megjelölve. (Ez azért szükséges, mert tapasztalat szerint a legtöbb torony csúcsa idővel *centiméterekkel* elhajlik.)

Tornyokban az észlelések *mindig külpontosan* végeztetnek vagy

a) az erre a célra átalakított *toronyablak párkányon,*

b) vagy a toronyerkély *mell* falán,

c) vagy a toronyablakból esetleg az erre a célra átlyukasztott toronytetőből kiépített faállványról a toronyfal *folytatásaként (kéményszerüleg) megépített téglapillér tetején.* A *c* eset gyakran költségesebb építkezést igényel, mint egy nagyobbszerű gúlaépítés.



115. ábra.

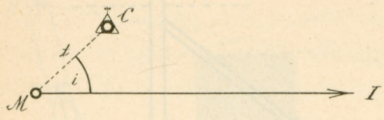
3. A vetítések és központosítási elemek meghatározása.

Gúláknál vagy oly tornyoknál, melyeknél a földről az ablakokon át a szemközti ablaknyilást is láthatjuk, a *gúla* illetve *toronycsúcsot* levetíthetjük (a földre, illetve a torony ablaksor szintjére) *két teodolit állásból.* (115. ábrán *A.* és *B.* pontokon.)

Gondosan igazított teodolittal felállunk a térszínen (*A.* ponton) lehetőleg messze a jeltől és (amikor szigorúan vízszintes a teodolit horizontális tengelye,) beirányozzuk a vetítendő

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

csúcsot, aztán lehajtjuk a távcsövet és a kivánt szintben felszegelt vízszintes léceken ott, ahol a vertikális szál metszeni látszik a két lécet, jelet csináltatunk. Ezt megismételjük átfektetett távcsővel is: így kapunk két másik jelet ugyan azon két lécen (115. ábrán az 1. és 2. jelek). Az 1. és 2. jelek középvonalán I.—I. feszítünk ki zsinórt.

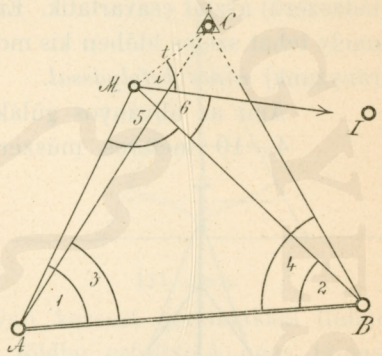


116. ábra.

Most ezt a műveletet a *B* pontból végezzük két más lécre, nyerjük a 3. és 4. jeleket, illetve a II.—II. vonalat, melyet zsinórral előállítunk. I. és II. zsinórmetszés pontja a kivánt *C* centrum: ez alá helyezzük a *követ*, illetve (toronyban) ezt *mérjük* be *négy* ellenőrző falicsaptól.

Ha nem tudjuk a csúcsot ezen módon levetíteni, vagy ha le tudjuk vetíteni, de az ablakokból való észleléshez a levetített centrumot nem tudjuk beirányítani távcsővel: úgy a külpontos műszerállásokra vonatkozó úgynevezett *„központosítási elemeket"* speciális módon kell meghatározni. Központosítási elemek alatt értve (116. ábra) a *t* vízszintes távolságot és az *i* vízszintes szöget, számítva egy *fix iránytól például az I. háromszögelési pont irányától.*

Az eljárás ekkor a következő. (117. ábra). A toronytól lehetőlag nagyobb távolságban mérünk egy lehetőleg hosszú *(A—B)* alapvonalat (szalaggal).

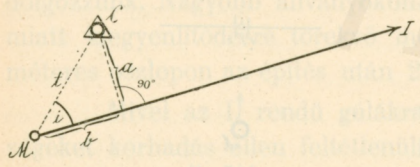


117. ábra.

Megmérjük teodolittal (okvetlenül két távcsőállásban) az 1, 2 és a 3, 4 vízszintes szögeket, továbbá az 5-el jelzett szöget és *M*-ből (*M* a külpontos mérés pontja) ugyanakkor egy messze fekvő háromszögelési pontot is beirányozunk: tehát mértük a *6*-al jelzett szöget is. Számithatók lesznek most már az *M* pont és a *C* pont (vízszintes vetületének) derékszögű sík koordinátái az *A B* egyenesre mint *y* tengelyre és az *A* pontra mint kezdő pontra. Ezen x_M, y_M és x_c, y_c összrendezők alapján számítható a megkivánt $M\ C = t$ vízszintes távolság, és számítható a *C M A* szög, illetve a *C M B* szög és ez utóbbiból kivonva a mért *6.* szöget, nyerjük a kivánt *i* szöget.

Ha ugyanazon toronynak több *ablakából mérünk,* minden ablakra nézve el kell végezni külön-külön az itt leírt műveletet. Sőt ha csak egy ablakból mérünk is, akkor is ellenőrzés céljából jó *két* bázist mérni.

Gyakran szerepel az az eset, hogy a *t* méretet közvetlen hosszméréssel meg tudjuk mérni, de az *i* szöget nem lehet szögmérő műszerrel megmérni. Ekkor az *i* szög tangenseinek elemeit mérjük *hosszméréssel*, amint azt a 118. ábra mutatja:



118. ábra.

tehát

$$tg\ i = \frac{a}{b} \text{ azaz}$$

$$i = arc.\ tg\ \frac{a}{b}$$

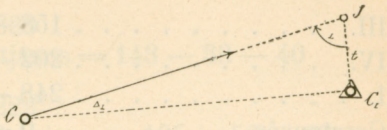
Ez az eljárás a III. és IV. rendű hálózat fejlesztésénél nyer sűrű alkalmazást, *amidőn* a kővel már megjelölt pont mellé (külpontosan) állítjuk fel a jelet szándékosan, vagy nem sikerül a gúlát pontosan a kőnek keresztje fölé hozni.

Az így megállapított *t* és *i* értékek felhasználásával az *M*-ből mért háromszögelési

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

irányoknak a *C*-re vonatkoztatott redukciói minden egyes irányra nézve e könyv II. Fejezetében előadott módon számithatók.

Ha a *megirányzott* pont külpontos, akkor (119. ábra) az *i* és *t*-nek az előbb ismertetett módon való megállapítása után a II. Fejezetben előadott módon számitható a redukció.

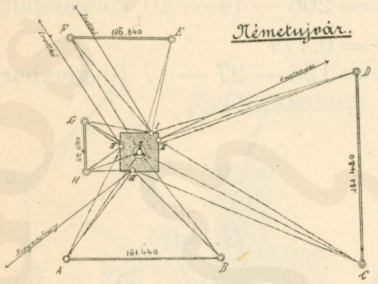


119. ábra.

Gyakorlatul ajánljuk a dunántuli hálózat *„Németujvár“*, *„Hegyeshalom“*, *„Boldogasszony“* elsőrendű pontjaira vonatkozólag végzett külpontos mérések külpontossági elemeinek kiszámítását a vázlatokhoz közölt adatok alapján. Itt az észlelések *több* ablakból történtek és igy mindenütt több *segèdalapvonal* szerepel. Például a 120. ábrán I., II., III., IV. az ablakpontok, *A B, C D, E F, G H* az utcán mért alapvonalak.

A szögmérés és számítás eredményei:

Németujvár.



120. ábra.

A.

IV. . . . . 257 — 1 — 39
△ torony . . . . . 257 — 12 — 24
III. . . . . 257 — 17 — 34
B. . . . . . 329 — 29 — 4

B.

A. . . . . . 105 — 32 — 45
III. . . . . 169 — 39 — 0
△ torony . . . . . 169 — 44 — 4

C.

III. . . . . 83 — 58 — 53
△ torony . . . . . 84 — 8 — 31
II. . . . . 84 — 13 — 12
D. . . . . . 140 — 25 — 46

D.

C. . . . . . 316 — 51 — 11
△ torony . . . . . 44 — 27 — 18
II. . . . . 44 — 27 — 48
I. . . . . 44 — 33 — 35

E.

I. . . . . 268 — 51 — 31
△ torony . . . . . 268 — 53 — 45
F. . . . . . 313 — 59 — 21

F.

I. . . . . 134 — 20 — 50
△ torony . . . . . 134 — 31 — 50
E. . . . . . 32 — 10 — 30

G.

I. . . . . 124 — 4 — 47
△ torony . . . . . 124 — 42 — 39
IV. . . . . 124 — 58 — 3
H. . . . . . 164 — 46 — 58

H.

G. . . . . . 190 — 25 — 6
IV. . . . . 266 — 1 — 58
△ torony . . . . . 266 — 52 — 11
III. . . . . 267 — 39 — 5

I. állás.

Irottkő . . . . . 120 — 7 — 2
F. . . . . . 112 — 52 — 54
E. . . . . . 145 — 34 — 53
G. . . . . . 76 — 49 — 56

Irottkő . . . . . 149 — 59 — 39
II. . . . . 295 — 50 — 57
III. . . . . 7 — 53 — 36
IV. . . . . 52 — 31 — 48

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

II. állás.

Gesztenyés	0	0	31
D.	5	4	51
C.	41	15	46
III.	158	16	40
IV.	202	40	24
I.	248	21	12
Gesztenyés	0	1	56

III. állás.

B.	122	39	14
A.	166	21	47
Riegersburg	171	9	34
Hochstraden	143	57	19
IV.	278	32	38
I.	324	24	23
II.	343	1	56

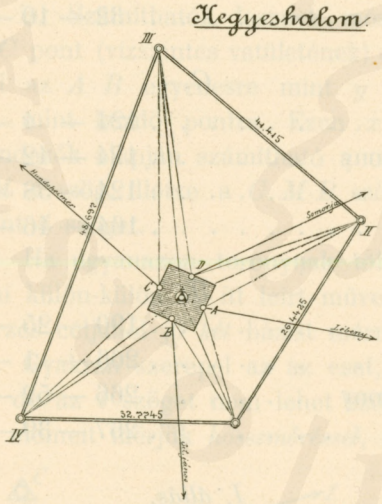
IV. állás.

Irottkő	210	43	1
H.	103	45	1
G.	168	19	3
I.	293	1	25
II.	311	30	53
A.	270	30	56

Eredmény:

I.	$t = 0.656$		
	$i = 143$	43	30 Irottkőre
II.	$t = 0.668$		
	$i = 177$	56	58 Gesztenyésre
III.	$t = 0.885$		
	$i = 206$	14	10 Riegersburgra
IV.	$t = 0.777$		
	$i = 126$	27	7 Riegersburgra

Hegyeshalom.



121. ábra.

I. karó.

IV. karó	82	44	56.9
B.	150	41	11.9
△ torony	153	8	1.0
A.	155	17	57.3
II. karó	198	14	45.7

II. karó.

I. karó	282	5	52.7
A.	337	53	51.8
△ torony	340	11	35.1
D.	343	23	49.3
III.	21	35	15.9

III. karó.

II. karó	8	54	53.8
D.	32	10	45.7
△ torony	34	9	40.0
C.	35	36	55.3
IV.	76	2	10.0

IV. karó.

III. karó	284	11	42.9
C.	319	11	54.4
△ torony	321	7	54.9
B.	322	3	39.3
I. karó	2	4	28.1

A.

II. karó	154	13	22.5
Lébeny	194	35	35.3
I. karó	235	29	8.8

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

B.

I. karó	348	23	15.9
Szentjános	0	2	31.5
IV. karó	60	26	1.7

C.

IV. karó	8	21	13.2
Hundsheimer	90	36	40.1
III. karó	112	55	48.0

D.

III. karó	312	6	11.6
Somorja	8	55	40.9
II. karó	70	38	22.3

Eredmény:

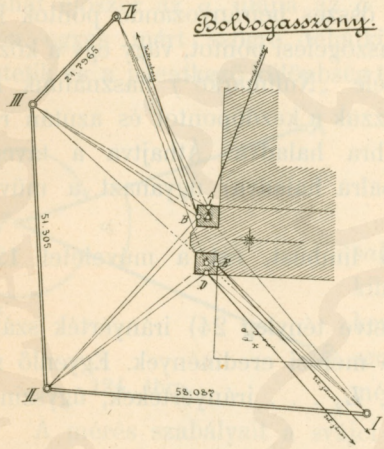
A. $t = 1.263$; i Lébeny $= 182 - 40 - 6$

B. $t = 1.323$; i Szentjános $= 143 - 33 - 40$

C. $t = 1.222$; i Hundsheimer $= 195 - 56 - 27$

D. $t = 1.227$; i Somorja $= 179 - 41 - 20$

Boldogasszony.



122. ábra.

I. karó.

II. karó	30	34	41.5
D.	66	59	47.0
♁ torony	68	53	34.6
E.	70	46	48.3
II. karó	30	34	37.9

II. karó.

III. karó	207	3	16.8
B.	251	18	23.8
△ torony	252	52	29.3
♁ torony	261	15	51.4
D.	263	29	58.8
I. karó	304	8	49.8
III.	207	3	17.8

III. karó.

II. karó	289	20	59.5
IV. karó	155	47	54.7
A.	233	7	45.5
△ torony	235	6	19.3
B.	236	32	56.3
♁ torony	244	45	55.3
II. karó	289	21	21.0

IV. karó.

A.	328	18	31.3
△ torony	329	12	38.3
B.	331	22	16.9
♁ torony	333	43	26.4
III. karó	37	10	19.2
A.	328	18	31.3

„*A.*“

III. karó	282	9	58.0
IV. karó	315	58	32.0
Hundsheimer	0	1	10.4

„*B.*“

II. karó	25	31	24·7
III. karó	108	28	0.8
IV. karó	141	54	43.2
„*A.*“	208	52	23.6
Kaltenberg	142	56	4.7
II. karó	25	31	46.7

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

„D.“				Eredmény:
Szentjános	292	— 6	— 54.0	$t_A = 1.519$
I. karó	294	— 48	— 10.9	$i = 199 - 53 - 42.3$ Hundsheimer
II. karó	37	— 44	— 16.1	$t_B = 1.590$
				$i = 250 - 45 - 19.4$ Kaltenberg
„E.“				$t_D = 9.950$
Szentjános	206	— 37	— 42.0	$i = 125 - 59 - 6.5$ Szentjános
I. karó	212	— 32	— 59.5	$t_E = 8.557$
				$i = 136 - 36 - 2.8$ Szentjános

5. §. Az I. rendű háromszögelések szögmérései és az állomás kiegyenlítés.

Dacára annak, hogy egy-egy elsőrendű pontból nem kell soha 5—6 elsőrendű iránynál többet mérni — a legritkább esetben leszünk abban a helyzetben, hogy egyszerű iránymérést végezzünk: *egy fordulóba foglalva a mérendő 5—6 irányt.*

Ha véletlenül lehetséges volna így — azaz ily teljes fordulókkal mérni — *akkor feltétlenül iránymérést végzünk 12-szeres ismétléssel és mindkét távcső állásban.**)

Iránymérés esetében *kezdő iránynak* vagy az összes beirányozandó pontok között *(minden körülmények között)* legélesebben látható háromszögelési pontot, vagy egy a közelben *e célra létesített,* élesen irányozható jelzést (Struve-féle „Nullmarke“) használunk kezdő irány gyanánt. A mérés tehát abból áll, hogy beirányozzuk a kezdőpontot és azután rendre az I. rendű háromszögelési pontokat — balról-jobbra haladva. Áthajtva a távcsövet, átforgatva az alhidádét *vissza felé***) (azaz jobbról-balra haladva) ugyanazt a műveletet végezzük el.

Most $180°/12 = 15°$-al elforgatva mindig a limbust, ezt a műveletet 12-szer megismételjük.

Az ily módon *minden irányra* nyert 12 (illetve tényleg 24) irányérték számtani középértékei lesznek a *hálózati kiegyenlítésbe* bevihető mérési eredmények. Egyenlő súlyú, egymástól független mérési eredmények ezek az L_1, L_2 . . . irányértékek, úgyszintén a belőlük képezhető bármely szögérték.

Ismételve hangsúlyozzuk, hogy az itt elmondottak csakis akkor állanak, ha az **összes** irányokat *teljes* fordulókban tudtuk mérni, vagy ha **ugyanazon kezdőpontot** megtartva, külön fordulókba foglaltuk is a pontokat anélkül azonban, hogy — a kezdőpontot kivéve — ugyanaz az irány két különböző fordulóban előfordulna. (123. ábra).

---

*) A távcsőnek a pont irányába való közelítő beállítása *sohasem kereséssel, hanem mindig a szemlélés alkalmával* nyert *szögértékek* (azaz egy közeli jól látható pontra vonatkoztatott, közelítő irányértékek) segélyével történik.

*) Ez különösen állványos gúláknál fontos: az oszlop elcsavarásának hatása csakis *egyenlő gyorsasággal ellenkező értelemben* végzett méréssel küszöbölhető ki az eredményből. Minél több irány van azonban a fordulóban, azaz minél hosszabb ideig tart egy forduló, annál kevésbbé *segíthet* a módszer jó eredményekbez.

Magas állványon ez okból két, legfeljebb három iránynál többet semmi esetre sem szabad egy fordulóba foglalni: és ez is egyik oka a tüstént ismertetendő *Schreiber*-féle módszer alkalmazásának.

Egy 8 méter magas műszeroszlopon kora reggeltől déli 2^h-ig (nyugat-dél-kelet értelemben) $15'$ elfordulást mértek; délután ellenkező értelemben visszaforgott az oszlop.

Bayer oszlopelhajlást (napfelé görbülést) is tapasztalt, de pontos vizsgálatok azt mutatták, hogy ezt a *praxisban* egyáltalában nem kell még figyelembe venni. Ugyszintén nem veendők figyelembe a falazott műszerállás elfordulásai sem.

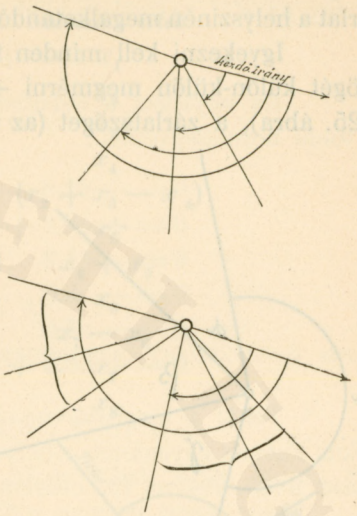
© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ez az egyszerű, ideális megoldás azonban a legritkább esetben lesz lehetséges, a következő okokból:

a) tornyokból 2—3 műszerállásból is vagyunk kénytelenek dolgozni,

b) magas műszeroszlopon az elcsavarodás miatt nem szabad hosszú időt igénylő fordulókkal dolgozni,

c) a legritkább esetben fogunk ködök, rezgések, váltakozó napsütés miatt 2—3 pontnál többet látni, illetve beirányozhatni egyidőben.



123. ábra.

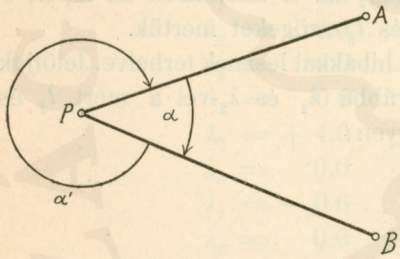
Ezek az okok egyenkint és kombinálva, *különleges szögmérési eljárások alkalmazására vezették a geodétákat.* Ezen eljárások között egészen részletesen a *svájci* és a *porosz* (Schreiber-féle) eljárást fogjuk ismertetni.

a) A svájci szorzó szögmérés.

Egyszerre csak **két** pontra történik mérés: *tehát egyes szögeket mérnek.* De mindig megmérik külön az illető szögnek (124. ábra) 360°-ra való kiegészítő szögét külön is. Tehát először az α, utána az α' szög lesz megmérve. Minden egyes mért szögre tehátkülön *„horizontzárlat"* képeztetik és a jelentkező különbség tüstént kiegyenlittetik:

$$(\alpha + \alpha') - 360° = E'', \text{ és ebből}$$

$$\alpha \text{ elfogadott értéke} = \alpha \pm \frac{E''}{2}.$$



124. ábra.

Az egyes szögek mérése, hogy a *munka minél gyorsabban menjen,* azaz hogy a kedvező összelátási időpontok kihasználhatók legyenek és hogy a mérnöknek minél kevesebbszer kelljen a műszerállvány körül járkálnia: *szorzó méréssel eszközöltetik, amiáltal* (az egyszerű irányméréshez képest) *sok mikroskop leolvasás lesz megtakarítva.*

A mérés szabályait a svájci utasítás szószerint így adja:

„Minden szög n-szer *szorozva* méretik, azaz $\frac{n}{4}$-szer mindkét távcsőállásban közvetlenül és $\frac{n}{4}$-szer mindkét távcsőállásban 360°-ra való kiegészítése által a következő szabályok betartásával:

Irányzás az I. távcsőállásban a baloldali (A) pontra (124. ábra) és leolvasás mindkét mikroskopon.

Irányzás a jobboldali pontra (B) és egyszerű leolvasás az 1. mikroskopon.

$\left(\frac{n}{4} - 1\right)$-szeri szorzása az α szögnek és az utolsó irányzásnál a szög-$\frac{n}{4}$-szeresének leolvasása *mindkét* mikroskopon. *(Ezen leolvasás esetleg el is maradhat.)*

Távcső áthajtás és ismét ugyanezen α szögnek $\frac{n}{4}$-szeri szorzása és az utolsó irányzáskor az α szög $\frac{n}{4}$ $\left(\text{illetve } \frac{n}{2}\right)$-szeres értékének leolvasása *mindkét* mikroskopon.

Most B ponttal kezdve a leírt módon az α' szög mérése $\frac{n}{4}$-szeres szorzással a II. és $\frac{n}{4}$-szeres szorzással az I. távcsőállásban.

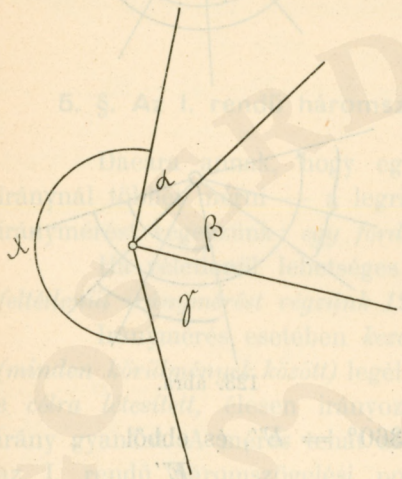
© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Elsőrendű pontokon és általában 25 kilometernél távolabbi pontokon n legalább 24 legyen; 5—25 km távol II. és III. rendű pontokra nézve $n = 8 - 16$. Minden szögre nézve az

$$(\alpha' + \alpha) - 360^0 = E''$$

zárlat a helyszínén megalkotandó, és ha az E'' értéke nagy, úgy a szög mérése ujból végzendő.

Igyekezni kell minden egyes — a kérdéses pontban találkozó háromszögek csúcsszögét külön-külön megmérni — és feltéve, hogy ezáltal 360^0-ra való zárlatra nem jutunk (125. ábra), a zárlatszöget (az ábrán x) is megmérjük — miáltal ujabb ellenőrzés adódik."



125. ábra.

Az a körülmény, hogy különböző időpontokban különböző jelek válnak az irányzásra alkalmassá, másrészt a magas hegyeken való kellemetlen (sokszor életveszélyes) tartózkodást is minél rövidebbre kell szabni, okozzák, hogy programm nélkül mindig azt a szöget mérik az előadott módon, amely éppen kinálkozik.

Ez eredményezi aztán azt, hogy nemcsak a megmérendő α, β, γ szögek, hanem azok kombinációi is mérettek, szóval *fölös számú mérések* is vannak és *állomáskiegyenlítésre* van szükség.

E kiegyenlítés a legkisebb négyzetek módszere szerint eszközöltetik az itt ismertetendő módon. (126. ábra.)

„Képzeljük el, hogy az S állomáson az A, B, C irányokra vonatkozó l_1 és l_2 szögeket mértük.

Ezen szögértékek hibákkal lesznek terhelve. Jelöljük a *keresendő legvalószinübb* szögértékeket x_1 és x_2-vel, továbbá λ_1 és λ_2-vel a mért l_1 és l_2 értékeken alkalmazandó megfelelő javításokat, azaz legyen:

$$\left.\begin{aligned} l_1 + \lambda_1 &= x_1 \\ l_2 + \lambda_1 &= x_2 \end{aligned}\right\} \text{ vagyis}$$

$$1. \quad \left.\begin{aligned} \lambda_1 &= x_1 - l_1 = \xi_1 \\ \lambda_2 &= x_2 - l_2 = \xi_2 \end{aligned}\right\}$$

Feltéve most már, hogy az A és a C közötti szöget is mértük és erre az l_3 értéket találtuk, ez a szögérték is hibás lesz, továbbá $l_1 + l_2$ nem lesz egyenlő l_3-al, hanem

$$l_1 + \lambda_1 + l_2 + \lambda_2 = l_3 + \lambda_3$$

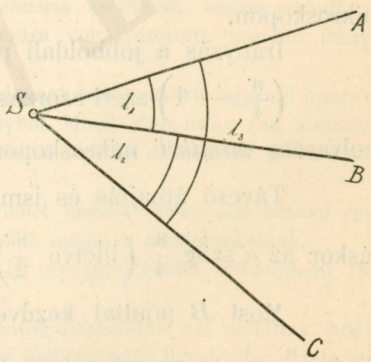
$$\text{vagy } \lambda_3 = (l_1 + l_2 - l_3) + (\lambda_1 + \lambda_2).$$

Az 1. alatti egyenlet szerint helyettesítsük λ_1 és λ_2-öt ξ_1 és ξ_2-vel, amikor tehát

$$2. \quad \lambda_3 = (l_1 + l_2 - l_3) + \xi_1 + \xi_2.$$

Az imént 2. alatt felírt egyenletben a *zárjeles rész összege* ismeretes, mert csak mérési eredményeket tartalmaz.

Ezen képlet által tehát az l_3 *kombinált* szögnek javítása az l_1 és l_2 javításai által van kifejezve. Tehát annyi 1. és 2. szerinti egyenletet állíthatunk fel ahány szöget mértünk. Ezen egyenletekben a λ szögjavítások a ξ_1, ξ_2 . . . ismeretlen mennyiségek által, amelyeknek száma akkora, **mint a nem kombinált (de mért) szögek száma,** vannak jelképezve. Hogy tehát a λ-knak legvalószinübb javításait megkaphassuk, azért az ismeretlen ξ_1, ξ_2, . . . stb. értékeket ugy kell meghatározni, hogy a



126. ábra.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

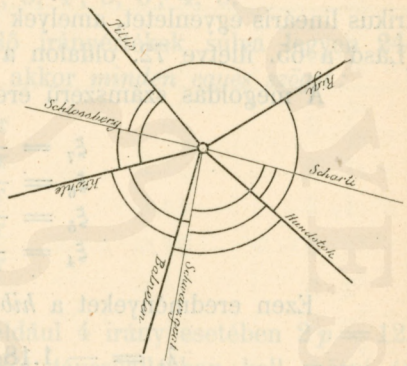
$\Sigma(p\,\lambda\,\lambda)$ négyzetösszeg minimum legyen, ami a *közvetítő mérésekre* (III. Fejezet 56. oldal) vonatkozó általános eljárás szerint eszközölhető.

Egy számpélda különben az egész eljárást világosan mutatja. (127. ábra.)

Az „*Urirotstock*“ állomáson mérettek az ábrán körívekkel jelölt következő szögek:

	súly			*valószínű érték*
l_1	8	Rigi—Hundstock	$64^0\ 50'\ 30.''2$	x_1
l_2	8	Hundstock—Balmeten	$52^0\ 4'\ 13.''2$	x_2
l_3	8	Balmeten—Krönte	$56^0\ 37'\ 40.''9$	x_3
l_4	6	Hundstock—Schwarzgrat	$50^0\ 58'\ 12.''6$	x_4
l_5	6	Schwarzgrat—Krönte	$57^0\ 43'\ 36.''9$	$(x_2 + x_3 - x_4)$
l_6	6	Scharti—Hundstock	$23^0\ 15'\ 22.''0$	x_5
l_7	6	Scharti—Schwarzgrat	$74^0\ 13'\ 35.''2$	$x_4 + x_5$
l_8	6	Krönte—Schlossberg	$21^0\ 54,\ 48.''5$	x_6
l_9	6	Schlossberg—Titlis	$31^0\ 54'\ 23.''3$	$x_7 - x_6$
l_{10}	6	Krönte—Titlis	$53^0\ 9'\ 12.''3$	x_7
l_{11}	8	Titlis—Rigi	$133^0\ 18'\ 30.''3$	x_8

A súlyoknál **1** jelenti egy *kétszer* szorzott szögnek súlyát: 8 tehát egy 16-szor szorzott szög súlya.



127. ábra.

A felírt értékek alapján a következő *(2 szerinti)* hibaegyenletek írhatók fel:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0.0 + \xi_1 \\
\lambda_2 &= 0.0 + \xi_2 \\
\lambda_3 &= 0.0 + \xi_3 \\
\lambda_4 &= 0.0 + \xi_4 \\
\lambda_5 &= +4.6 + \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 \\
\lambda_6 &= 0.0 + \xi_5 \\
\lambda_7 &= -0.6 + \xi_4 + \xi_5 \\
\lambda_8 &= 0.0 + \xi_6 \\
\lambda_9 &= +0.5 - \xi_6 + \xi_7 \\
\lambda_{10} &= 0.0 + \xi_7 \\
(\lambda_{11} &= 0.0 + \xi_8)
\end{aligned}$$

Ezen 11 hibaegyenleten kívül még egy *feltételi egyenlet* is kielégítendő, amennyiben

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_7 + x_8 = 360^\circ \text{ kell hogy legyen}$$

vagyis $(l_1 + l_2 + l_3 + l_7 + l_8) + (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_7 + \xi_8) = 360^\circ$

mivel pedig a zárjeles rész értéke tényleg $= 360^0\ 0'\ 6.''9$ tehát:

$$0 = +6.''9 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_7 + \xi_8;$$

ezen egyenletben a ξ_8-at a többi ξ által fejezhetjük ki, úgy tehát a λ_{11}-re felírt hibaegyenlet (azért tettük zárjelbe) így írható:

$$\lambda_{11} = -6.''9 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 - \xi_7.$$

A felírt 11. hibaegyenletben szereplő együtthatók alapján felírhatók most már gépiesen a *normál*-egyenletek, amelyeknek száma — mivel 7 ismeretlen ξ mennyiségünk van — tehát hét lesz.

A normálegyenletek felállításának szabálya egyébként: az *első* normálegyenlet felállítása céljából a hibaegyenletek jobboldalai az illető szög súlyával és ξ_1 együtthatójával szoroztatnak, összeadatnak és az összeg 0-al tétetik egyenlővé. Ilymódon az első hibaegyenlet jobboldala ezt adja:

$$8 \times 1 \times 0.0 + 8\,\xi_1.$$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Mivel a következő hibaegyenletekben (2-től 10-ig) a ξ_1 együtthatója $= 0$, azért e tagok eltünnek; csak a 11. hibaegyenlet ad értékeket

$$+ 55{\cdot}2 + 8\,\xi_1 + 8\,\xi_2 + 8\,\xi_3 + 8\,\xi_7$$

és így az *első* normálegyenlet:

$$0 = + 55{\cdot}2 + 16\,\xi_1 + 8\,\xi_2 + 8\,\xi_3 + 8\,\xi_7.$$

Ha ugyanezt a műveletet sorban elvégezzük $\xi_2\ \xi_3\ \ldots\ \xi_7$-re nézve akkor előáll a többi normálegyenlet:

$$\begin{aligned}
0 &= + 82.8 + 8\,\xi_1 + 22\,\xi_2 + 14\,\xi_3 - 6\,\xi_4 + 8\,\xi_7\\
0 &= + 82.8 + 8\,\xi_1 + 14\,\xi_2 + 22\,\xi_3 - 6\,\xi_4 + 8\,\xi_7\\
0 &= - 31.2 - 6\,\xi_2 - 6\,\xi_3 + 18\,\xi_4 + 6\,\xi_5\\
0 &= - 3.6 + 6\,\xi_4 + 12\,\xi_5\\
0 &= - 3.0 + 12\,\xi_6 - 6\,\xi_7\\
0 &= + 58.2 + 8\,\xi_1 - 6\,\xi_6 + 20\,\xi_7
\end{aligned}$$

Tehát a meghatározandó 7 ismeretlenre ($\xi_1\ \xi_2\ \ldots\ \xi_7$) előállítottunk hét symmetrikus lineáris egyenletet, amelyek *táblázatosan*, (egyidejű összegellenőrzésekkel) megoldatnak. (Lásd a 65. illetve 72. oldalon a sémát).

A megoldás számszerű eredménye:

$$\begin{aligned}
\xi_7 &= - 1.2151 & \xi_3 &= - 1.6629\\
\xi_6 &= - 0.3576 & \xi_2 &= - 1.6629\\
\xi_5 &= - 0.0148 & \xi_1 &= - 1.1795\\
\xi_4 &= + 0.6296
\end{aligned}$$

Ezen eredményeket a *hibaegyenletekbe* téve, nyerjük a λ javításokat:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= - 1.18 & \lambda_5 &= + 0.64 & \lambda_9 &= - 0.36\\
\lambda_2 &= - 1.66 & \lambda_6 &= - 0.01 & \lambda_{10} &= - 1.22\\
\lambda_3 &= - 1.66 & \lambda_7 &= + 0.01 & \lambda_{11} &= - 1.18\\
\lambda_4 &= + 0.63 & \lambda_8 &= - 0.36
\end{aligned}$$

Ezen λ-kat adva a *mért* szögértékekhez, nyerjük méréseink legvalószinűbb és egyúttal kiegyenlített szögértékeit. Ezen kiegyenlített eredmények súlyai természetesen már *nagyobbak*, mint a nyers eredmények súlyai. Nem közöljük a súlyszámítást, csak megjegyezzük, hogy jelen esetben a *6.* és *8.* súlyértékekből *9.* és *12.* közt változó súlyértékek lettek jeléül annak, hogy a kiegyenlített értékek megbizhatóbbak mint a mért nyers értékek.

b) A Schreiber-féle szögmérés.

Úgy a mérést, mint a számítást illetőleg *klassikus* eljárás.

Előre felírt *programm* szerint történik a mérés*), mindig *egyszerű* szögméréseket végzünk (két pontra), a kiegyenlítés klassikusan egyszerű: és az eredmény *egymástól független egyenlő súlyú irányértékek, vonatkoztatva tetszőleges kezdő irányra.* Szóval az állomás kiegyenlítés eredményeként *egy fordulóban mért irányértékekkel* azonosnak tekinthető irányértékeket nyerünk. (Mintha 123. a.) ábra szerint mértünk volna).

*) Az éppen a geniális ebben a módszerben, hogy az előre leírt programm a legkedvezőtlenebb viszonyok között is betartható.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A Schreiber módszer elméletét közölte *Bodola* tanár a „Magyar Mérnök és Építész-Egylet Közlönyének 1894. évfolyamában“ ; azért itt csak magát *az eljárást és a kiegyenlítést* fogjuk részletesen ismertetni. Az egész oly gépies, hogy az itt adandók alapján bárki megtanulhatja.

Előkészítés.

Minden szög minden kombinációban lesz mérve.

Tehát **2** irány esetében (1 és 2 irány) méretik *egy* szög: *1, 2;*

három irány esetében méretik *három* szög:

1, 2; 1, 3; 2, 3;

négy irány esetében mérünk *hat* szöget:

1, 2; 1, 3; 1, 4; 2, 3; 2, 4; 3, 4;

öt irány esetében mérünk *10* szöget (ennyi kettős kombináció csinálható 5 elemből) azaz:

1, 2; 1, 3; 1, 4; 1, 5; 2, 3; 2, 4; 2, 5; 3, 4; 3, 5; 4, 5.

Ha azt akarjuk, hogy a végeredményben nyerendő irányértékek súlya legyen **24,** — amikor egy szög egyszerű mérésének súlya = 1, — akkor *minden egyes szöget:*

2 irány esetében 24-szer
3 „ „ 16-szor
4 „ „ 12-szer
5 „ „ 10-szer
6 „ „ 8-szor

kell mérni.

Jelöljük az így nyert számokat **2** p-vel, tehát például 4 irány esetében $2p = 12$.

Hogy a műszer hibák hatását kiküszöbölhessük, két távcsőállásban kell mérni és minden egyes szöget a limbus különböző helyein is kell mérni. Közöljük itt *Schreiber* táblázatait, amelyekben minden egyes *méréshez a limbusállás és távcsőállás van* előre megállapítva és amely táblázat méréskor előttünk van. (A római számok a távcsőállást jelzik).

Két irány esetében.

Szög	I	I	I	I	I	I	II	II	II	II	II	II
1, 2	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°

Három irány esetében.

Szög	I	I	I	I	II	II	II	II
1, 2	0	22.5	45	67.5	90	112.5	135	157.5
1, 3	7.5	30	52.5	75	97.5	120	142.5	165
1, 4	15	37.5	60	82.5	105	127.5	150	172.5

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Négy irány esetében.

Szög	I	I	I	II	II	II
1, 2	0	30	60	90	120	150
1, 3	10	40	70	100	130	160
1, 4	20	50	80	110	140	170
2, 3	20	50	80	110	140	170
2, 4	10	40	70	100	130	160
3, 4	0	30	60	90	120	150

Öt irány esetében.

Szög	I.	I.	I. II.	II.	II.
1, 2	0	36	72	108	144
1, 3	7.2	43.2	79.2	115.2	151.2
1, 4	14.4	50.4	86.4	122.4	158.4
1, 5	21.6	57.6	93.6	129.6	165.6
2, 3	14.4	50.4	86.4	122.4	158.4
2, 4	21.6	57.6	93.6	129.6	165.6
2, 5	28.8	64.8	100.8	136.8	172.8
3, 4	28.8	64.8	100.8	136.8	172.8
3, 5	0	36	72	108	144
4, 5	7.2	43.2	79.2	115.2	151.2

A római számok mindig a távcsőállást jelentik és minden szög *ugyanazon limbus állásban* kétszer (oda és vissza) méretik.

Itt bemutatjuk egy később példaként kiegyenlítendő ily mérésnek számszerű eredményeit, megjegyezve, hogy a *„szögérték“* oszlopban a mért szögeknek csak a *másodperc* értékei vannak beírva.

A következő *négy* irányról van szó:

1. számú irány Balverwald — Soester Warte.
2. „ „ „ — Billstein.
3. „ „ „ — Velbert.
4. „ „ „ — Stimmberg.

Mivel négy irányról van szó, minden mért szögre (1, 2; 1, 3; 1, 4; 2, 3; 2, 4; 3, 4) a fentiek szerint **12** szögérték található a kimutatásban.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Szög-kimutatás.

Év: 1890.	Limbus állás	Távcső állás	Szögmérés eredménye (szögérték)	Év: 1890.	Limbus állás	Távcső állás	Szögmérés eredménye (szögérték)
julius 10.	150° 2'	II.	3, 4 = 34."3	julius 25.	60° 1'	I.	3, 4 = 35."9
		II.	34."4		90° 3'	II.	34."5
	150° 4'	II.	1, 2 = 38."2			II.	33."9
		II.	37."9		120° 3'	II.	35."2
	120° 1'	II.	34."7			II.	35."4
		II.	36."0		160° 4'	II.	2, 4 = 43."8
	89° 58'	II.	37."2			II.	45."0
		II.	36."3		130° 3'	II.	44."0
	59° 59'	I.	36."4			II.	44."7
		I.	37."6		160° 2'	II.	1, 3 = 45."6
	30° 1'	I.	37."4			II.	46."0
		I.	38."7		130° 1'	II.	46."1
	359° 58'	I.	37."4			II.	45."7
		I.	37."9		100° 1'	II.	45."8
julius 16.	20° 0'	I.	1, 4 = 20."3			II.	45."5
		I.	19."3	julius 27.	20° 2'	I.	2, 3 = 8."1
	50° 2'	I.	18."8			I.	8."3
		I.	20."6		50° 1'	I.	9."6
	80° 1'	I.	19."6			I.	9."9
		I.	20."1		80° 4'	I.	7."6
	110° 0'	II.	20."5			I.	7."9
		II.	20."6		70° 1'	I.	1, 3 = 44."8
	140° 3'	II.	22."2			I.	44."7
		II.	22."0		40° 1'	I.	48."4
	170° 5'	II.	22."5			I.	46."5
		II.	22."2	julius 29.	10° 0'	I.	46."2
	9° 59'	I.	2, 4 = 43."8			I.	46."3
		I.	42."5	augusztus 1.	70° 2'	I.	2, 4 = 43."0
julius 24.	40° 1'	I.	41."9		100° 2'	II.	42."2
		I.	42."6			II.	43."1
	70° 2'	I.	43."4		110° 3'	II.	2, 3 = 7."5
julius 25.	0° 0'	I.	3, 4 = 35."2			II.	8."1
		I.	35."2		140° 3'	II.	9."4
	30° 2'	I.	35."1			II.	9."2
		I.	35."2		170° 4'	II.	8."2
	60° 1'	I.	35."9			II.	8."3

Megjegyzés: Látnivaló, hogy csak az 1, 2 és 1, 4 szögek voltak egy napon egészen mérhetők (12-szer).

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A mérés befejeztével az állomás kiegyenlítést a mérnök a helyszinén végzi a következő gépies eljárás szerint.

1. Mindenekelőtt kiszámítja a nyert szögértékekből vett középértékek alapján az egyes irányok *előzetes* irányértékeit (kerek másodpercekkel) az 1. irányra mint 0° 0′ 0″ kezdőirányra.

A számítandó példában ezen *előzetes* irányértékek:

az	1.	irányra	0°	0′ 0″
a	2.	„	65°	52′ 37″
a	3.	„	247°	3′ 46″
a	4.	„	290°	38′ 21″

2. Ezen irányértékekhez keressük a legkisebb négyzetek módszere szerint a *legmegbízhatóbb javításokat.* Jelöljük ezeket x, y, z, t betükkel. Világos, hogy az x-et *tetszőlegesen* választhatjuk pl. 0″-nek például 1°-nak 2°-nak, mert a *kezdő-irány* irányértéke az tetszőleges. Ügyes fogása *Schreibernek*, hogy az x-*et* így ajánlja választani:

$$x = -(y + z + t) \text{ azaz } x + y + z + t = 0.$$

Vagy ha p jelent egy tetszőleges számot, úgy

$$px + py + pz + pz = 0.$$

Ez az önként (illetve célszerűen) választott *feltételi egyenlet* a normál egyenletek megoldását fogja nagyon megegyszerűsíteni.

Az egyes mért szögek javításait λ_1, λ_2, . . . -vel jelezve, annyi hibaegyenletet írhatunk fel, ahány **szöget** mértünk. A mi példánkban *6* szög méretett, tehát hat hibaegyenletet irunk fel ezen alakban:

$$\lambda_1 = \frac{-(1,2)}{2 \times 6} - x + y \qquad \text{súly} = 6$$

$$\lambda_2 = \frac{-(1,3)}{2 \times 6} - x + z \qquad \text{„} = 6$$

$$\lambda_3 = \frac{-(1,4)}{2 \times 6} - x + t \qquad \text{„} = 6$$

$$\lambda_4 = \frac{-(2,3)}{2 \times 6} - y + z \qquad \text{„} = 6$$

$$\lambda_5 = \frac{-(2,4)}{2 \times 6} - y + t \qquad \text{„} = 6$$

$$\lambda_6 = \frac{-(3,4)}{2 \times 6} - z + t \qquad \text{„} = 6$$

Ezen gépiesen felírható hibaegyenletekben a (1, 2) jelenti az 1, 2 szögre vonatkozólag mérés által nyert *12 szögérték összegét kivonva* belőle a felvett *előzetes* irányértékből adódó 1, 2 szögérték 12-szeres értékét. Itt mindig csak a másodperceket kell számításba venni és így a mi számpéldánkban

összeg 1, 2-re = 445.″7

1, 2 szögnek értéke az előzetes irányértékekből pedig:

2. irányérték — 1. irányérték = 37″, ezt szorozva 12-vel . . . . . = 444.″0

tehát a hibaegyenletben (1, 2) = + 1.″7.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Hasonlólag állítandó elő az (1, 3) (1, 4) (2, 3) stb. számláló tag.

Számpéldánkban ezen értékek:

$$(1,2) = +1.''7 \qquad (2,3) = -5.''9 \qquad (3,4) = +0.''2$$
$$(1,3) = -0,''4 \qquad (2,4) = -8.''0$$
$$(1,4) = -3,''3$$

Ami a minden egyes hibaegyenletben szereplő nevező tagot 2×6 illeti, úgy ennek általános képlete $= 2p$, ahol $2p$ jelenti a minden egyes szögre végzett mérések számát.

Hangsúlyozzuk, hogy p **egyszersmind** a szögmérés (a 2 p-szerinek) *súlyát jelenti:* amely a jelen példában tehát $= 6$. Az *egyszeri* szögmérés (oda-vissza) súlya pedig $= 1$.

A felírt hibaegyenletekből a rendes séma szerint előállíthatjuk a normál egyenleteket: ilyen *négy* lesz a mi példánkban, mert *négy* ismeretlenünk van (x, y, z, t).

A normálegyenletek lesznek:

$$0 = \frac{+(1,2)+(1,3)+(1,4)}{2} + 18x - 6y - 6z - 6t$$
$$0 = \frac{-(1,2)+(2,3)+(2,4)}{2} - 6x + 18y - 6z - 6t$$
$$0 = \frac{-(1,3)-(2,3)+(3,4)}{2} - 6x - 6y + 18z - 6t.$$
$$0 = \frac{-(1,4)-(2,4)-(3,4)}{2} - 6x - 6y - 6z + 18t$$

Ha az előbb választott feltételi egyenletet

$$px + py + pz + pt = 0,$$

hozzáadjuk minden egyes normálegyenlethez és p helyébe a példának (azaz négy irány $= 12$ mérés) megfelelő súlyértéket

$p = 6$ helyettesítjük, normálegyenleteink ezen egyszerű alakot öltik:

$$0 = \frac{+(1,2)+(1,3)+(1,4)}{2} + 24x$$
$$0 = \frac{-(1,2)+(2,3)+(2,4)}{2} + 24y$$
$$0 = \frac{-(1,3)-(2,3)+(3,4)}{2} + 24z$$
$$0 = \frac{-(1,4)-(2,4)-(3,4)}{2} + 24t$$

Ezen egyenletekből sorban megkapjuk már a keresett x, y, z, t legmegbízhatóbb irányérték-javításokat:

$$24x - 1{,}00 = 0$$
$$24y - 7{,}80 = 0$$
$$24z + 3.25 = 0$$
$$24t + 5.55 = 0 \text{ és így}$$

$$x = +0,''042 \qquad y = +0.''325 \qquad z = -0.''136 \qquad t = -0.''231$$

ellenőrzés lesz:

$$x + y + z + t = 0.$$

Most már, mivel a kezdő irány (az 1. irány) irányértékét 0° 0′ 0″-nek akarjuk,

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

az itt felírt y, z, t értékből *kivonjuk* a talált x értéket és az így nyert javításokat adjuk az **előzetes** irányértékekhez — mindegyiket a maga előjelével — lesz:

1.	irány	0°	0′	0,″000	súlya 24.
2.	„	65°	52′	37.″283	„ 24.
3.	„	247°	3′	45.″822	„ 24.
4.	„	290°	38′	20.″727	„ 24.

Ha a nyert x, y, z, t értékeket a hibaegyenletekbe helyettesítjük, nyerjük a λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6 értékeket. Képezzük most a

summa $p\lambda\lambda$ négyzetösszeget (jelen példában = 0.3996)

és így az egységsúlyú eredmény középhibája lesz:

$$\mu_1 = \pm \sqrt{\frac{0.3996}{3}} = \pm \mathbf{0.''36.}$$

Úgy a mérésnek gyakorlati végrehajthatósága, mint az állomáskiegyenlítés egyszerűsége, mint pedig az egész módszernek elméletileg kimutatható szabatos, öntudatos volta miatt az ezidőszerint ismert eljárások között a *Schreiber*-féle a legtökéletesebb.

Ahol fényjelzésekkel kell dolgoznunk az összes irányokban, ott azonban ez a módszer akkor — és *csakis* akkor — lesz *gazdaságos*, ha minden pontra tudunk egyidejüleg heliotropot felállítani.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Függelék az első kötethez.

I. FEJEZET.

Modern városfelmérések szokásos műszaki feltételei.*)

(Az itt közölt példa *Szesztay László* magánmérnöknek *Ujvidék* sz. kir. várossal kötött szerződéséből van kivéve.)

A munkálatok célja és kiterjedése.

1. §. A felvétel és szintezés célja az, hogy a város belsőségének, utcái, utjai és tereinek helyes szabályozására, azok területének, felszínének pontos megállapítására, a város kövezésére, csatornázására, esetleg viz-, légszesz- és egyéb vezetékek okszerű beosztására és elhelyezésére, uj utvonalak kitűzésére, vagy más célokra a szükséges megbizható adatokat szolgáltassa. E célból következő munkálatok végrehajtása szükséges:

A. A város beépített és beépítetlen s a szerződéshez fűzött **átnézeti térképen** vörös színnel körülhatárolt területének pontos térfelvétele és térképezése oly módon, hogy az út, tér és utcahálózat, a telkek közterület felé eső határpontjai és az épületek utcavonalai pontosan felmérve és térképezve és e mellett a gyalogjárók, folyókák, vizárkok, nyilt csatornák, Dunapart, hidak, csatornaszemek, csatornavizsgáló aknák, vasutak sintengelyhálózatai, állandó jellegü oszlopok, emlékművek, kandeláberek, kutak stb. világosan ábrázolva legyenek. Minden egyes birtok, meglevő háztelek kő-, tégla- és állandó jellegű faépületeikkel, udvar, kert stb. minden határvonalaikkal együtt szintén pontosan felmérendő és térképezendő.

B. A város ily módon felvett és térképezett belterülete és az utcák, utak és terek felszínének, továbbá a létező vizlevezető árkok, nyilt csatornák medrének, zárt csatornák fenék és záradék magasságának pontos szintezése, végül a Duna folyam partjának és medrének szintezése oly terjedelemben, hogy a létező partművek kitünjenek és további partművek a felvétel alapján tervezhetők legyenek. A zárt csatornák magassági és helyszinrajzi adatai olyan pontossággal veendők fel, amint ezek az adatok a tisztitó aknák fedelének felnyitásával megállapíthatók. Az aknák felkereséséhez kinyitásához s a csatornák e pontjainak esetleges tisztításához szükséges munkásokat a város saját költségén bocsájtja a megbízott mérnök rendelkezésére.

C. az *A.* pontban körülirt fölvételek és térképezések befejezése után a város kibővítés céljaira szolgáló új útvonalak kitűzése, szintezése és térképezése.

*) Közlését indokolja azon körülmény, hogy városoknak magánmérnökök által való felmérését gyakran kataszteri mérnökök hitelesitik, továbbá, hogy az országos kataszteri felmérés is külön megállapodás esetén hasonló munkaprogrammal, a műszaki kivitelt illetőleg azonban saját szabályai szerint (lásd III. kötet, VIII. fejezet, 4. §.) végez városfelméréseket.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A.) A térfelvétel.

A háromszögelés.

2. §. A térfelvétel céljából a város területe a szerződéshez füzött térképen vörös szinnel kijelölt kiterjedésben egy háromszögelési hálózattal vonandó be. Ennek pontjai számító háromszögeléssel határoztatnak meg s nemcsak a felvétel pontos eszközölhetésére szolgáljanak, hanem azonkivül ugy állítandók elő, hogy ha a jövőben a felvételeknek bármely irányban való kibővitése vagy folytatása válnék szükségessé, az e pontok segélyével mindig eszközölhető legyen.

3. §. Hogy a hálózat az országos felmérés háromszög hálózatával összefüggésben álljon, *szükséges, hogy a hálózat pontjai közül legalább is kettő egyszersmind az országos hálózat főpontja is legyen.*

A hálózat egyik oldalának hosszusága egy önállóan megmért „alapvonal“ és megfelelő „alapvonal fejlesztő hálózat“ közvetitésével meghatározandó.

Az „alapvonal“ hosszúsága legalább is **600 m.** legyen. A mérés végeiken acél élekkel ellátott alapvonal mérő lécekkel eszközlendő s annyiszor ismétlendő, hogy az igy rendelkezésre álló fölös számu mérésekből kiszámitott **középhiba ± 5 mm.**-nél nagyobb ne legyen.

A mérő lécek (2 drb., ütköző végekkel ellátva) pontos hosszuságát közvetlenül a mérés előtt s azonnal a mérés befejezte után ismét egy **„komparátor“** segitségével meg kell határozni.

A „komparátor“ berendezése, a hozzátartozó hitelesitett acél normál méterek, mérő ékek és az alapvonalmérő lécek a mérés megkezdése előtt az ellenőrző bizottságnak bemutatandók.

Ugy az alapvonal fejlesztő hálózat, mint a háromszög hálózat szögeit olyan pontossággal kell megmérni, hogy az **egyes háromszögek záróhibája ± 6″-nál** nagyobb ne legyen.

A szögméréshez mikroskóppal felszerelt teodolit alkalmazandó, melyen még egy másodperc közvetlenül leolvasható és mely a mérés megkezdése előtt az ellenőrző bizottságnak bemutatandó.

Ugy az alapvonal fejlesztő hálózat, mint a háromszöghálózat a **„legkisebb négyzetek módszere“ szerint egyenlítendők ki.** A rendszeresen összefoglalt és táblázatosan csoportosított kiegyenlítési számítások a munkálathoz melléklendők.

A háromszög hálózat pontjainak összrendezői egy tengelyrendszerre vonatkoztatva számítandók ki.

A tengelyrendszer egyik tengelyét a városháza tornyán, vagy a hálózat középső pontján áthaladó **meridián,** másik tengelyét pedig az erre merőleges vonal képezi.

(Megjegyzés: a meridián irányának meghatározására vonatkozó számitásokat lásd a II. kötetben).

A tengelyrendszer kezdőpontjának az országos háromszög hálózathoz viszonyitott fekvése, továbbá az összrendezői tengelyeknek az országos felmérés tengelyeitől való elhajlása kiszámitandó, hogy igy a városmérés és az országos felmérés között lévő összefüggés ismeretes legyen.

(Megjegyzés: ezt a számitást előadtuk e kötet II. fejezetében).

4. §. A háromszögelési alappontokra támaszkodva határozandók meg a „kapcsolt alappontok. Kapcsolt alappontokul elsősorban a város „magas pontjai“ használandók fel. (Tornyok, villámháritók, gyárkémények, egyes épületek kiemelkedő pontjai.)

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A magas pontok összrendezői „a legkisebb négyzetek módszerével“ kiegyenlített előmetszéssel határozandók meg. Minden egyes magas pont kiegyenlítésére legalább is négy háromszögelési alapponton mért szögek értéke lesz bevonandó.

5. §. A magas pontok szolgálnak a további pont meghatározások alapjául s belőlük „a legkisebb négyzetek módszere“ szerint kiegyenlített hátrametszéssel vezetendők le az „utcaszinti alappontok“.

(Megjegyzés: Ezt a kiegyenlitést fölöslegesnek tartjuk.)

6. §. Ugy a magas pontokra, mint az utcaszinti alappontokra vonatkozóan végzett összes kiegyenlítési számítások a munkálathoz melléklendők.

A kiegyenlített pontok összrendezőinek legmegbízhatóbb értéke s ez értékek kiszámitott középhibája külön táblázatban is feltüntetendő.

Mind e pontok mérése oly pontossággal eszközlendő, hogy egy-egy pont összrendezőinek középhibája úgy a rendezőre, mint a metszékre nézve legfeljebb ± 40 mm legyen.

A sokszögelés.

7. §. A sokszögelés célja a pontsűrüsitést addig fejleszteni, mig minden utcakeresztezésre, utcatalálkozásra, utcatörés pontra, utak, utcák és zsákutcák törési és végpontjaira, továbbá minden a felvételhez szükséges egyéb helyre egy-egy „sokszögelési alappont“ jut. A sokszögelés kiterjesztendő a városbővitésre szánt mintegy 200 hektárnyi területre is.

A sokszögelési alappontokat összekötő egyenesek képezik az utca és térhálózat és a város kibővítésére szolgáló terület felvételének alapvonalait, valamint ez a hálózat képezi a későbbi idők folyamán bekövetkező helyszini változások felvételének s az eredeti munkálathoz való pontos hozzákapcsolásának s minden tervezett szabályozási, utcarendezési, vagy épitési vonal helyszini kitüzésének alapját. A sokszöghálózat menetei a már háromszögeléssel meghatározott pontokból indulnak ki s azokban záródnak be. Ha a sokszögmenet a kiinduló és csatlakozó pontok között egy ismert pont mellett haladna el, abba is bekapcsolandó lesz.

A sokszögoldalak hosszúsága **acélmérőszalaggal** mérendő. Az acélmérőszalagok valódi hosszusága a „komparátor“ segitségével folytonosan ellenőrizendő s azok valódi hosszuságáról az ellenőrzés időpontjának feljegyzésével pontos jegyzék készitendő.

A sokszögelés olyan pontossággal eszközlendő, hogy az egyes menetek lineáris záróhibája legfeljebb ± 15 cm. legyen.

(Megjegyzés: itt helyesebb lett volna a záróhibát *bizonyos* hosszra vonatkoztatni.)

A sokszöghálózat pontjainak táblázatos kiszámítása a munkálathoz melléklendő. Az egyes menetek sorszámmal látandók el s a számítások végén az összes menetek sorszáma, hosszúsága és lineáris záróhibája külön táblázatban is összefoglalandó.

A pontjelölések.

8. §. A háromszöghálózat pontjai 30/30 cm. átmérőjű, 1·20 m. hosszuságú és a földből 20 cm.-nyire kiemelkedő kőoszlopokkal jelölendők meg. A meghatározott pont egy-egy a kőoszlop alá sülyesztett gázcsővel is megjelölendő.

Az összes utcaszinti pontok tekintet nélkül meghatározásuk módjára, amennyiben azok kövezetben feküsznek, a kövezet alá sülyesztett 25/25 cm. keresztmetszetű és 40 cm. hosszú betontömbbe helyezett gázcsővel jelölendők meg. A kövezet alá sülyesztett pont egy kinyitható fedelü öntött-vas szelence közvetítésével hozzáférhetővé teendő. Ha a pont nem

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

kövezett utcarészen fekszik, akkor a megjelölést egy a földbe sülyesztett 1·0 m. hosszuságú gázcső fogja képezni.

A felveendő terület határpontjain elhelyezendő **határkövek** *20/15 cm. átmérővel és 90 cm. hosszusággal készítendők.*

A határpontok ezenkivül a kő alatt a földben elsülyesztett gázcsővel is állandósitandók. *A városbővitésre szánt 200 hektárnyi területen az egyes* **telektömbök sarokpontjai a város által beszerzett határkövekkel jelölendők meg.**

9. §. A rendszeresen vezetendő számítások, jegyzőkönyvek, a kiszámított szögek és hosszak, valamint az összrendezők táblázata az ellenőrző szakbizottságnak lesznek bemutatandók.

Készítendő egy **háromszögelési térkép** vászonra ragasztott rajzpapiron 1 : 5000 arányban, mely a háromszögelési pontokat összrendezőikből felrakva és ezek kiszámítására felhasznált háromszögeket graphikusan, a közvetlen mért és kiszámított hosszakat és szögeket beírva, a **szelvénylapok beosztásával** együtt feltüntesse.

A szelvénybeosztás az egész felvételi határt magában foglaló négyszög keretnek a helyi nullponton átmenő összrendezői tengelyektől kiinduló **800 méter hosszú és 600 méter** *széles négyszögszelvényekre való osztásából áll.* A szelvények 1, 2, 3 stb-vel jelölendők, a szelvényszélekre a kereten a megfelelő helyi coordináták 0, 800, 1600 stb., 0, 600, 1200 stb. ráirandók.

Készítendő továbbá egy **sokszöghálózati térkép** szintén vászonra ragasztott rajzpapiron 1 : 3000 arányban szintén a szelvénybeosztás feltüntetésével. E térképre az összes kiszámított pontok összrendezőikből felrakandók, a pontok kiszámítására szolgált tengelyvonalak behuzandók és a közvetlenül mért hosszak és azon szögek is beirandók. A pontok számaikkal, a tengelyek az utcák nevével láttatnak el.

10. §. Készitendő egy **alappontok főkönyve** *(2 példányban),* mely az összes meg határozott pontok szorszámát, kiszámítási könyvét és lapját, térképszelvényszámát, összrendezőit, állandósításának jelét, helyi fekvésének leírását és rajzát tartalmazza.

11. §. A háromszögelés befejeztével az erre vonatkozó összes adatok, számítások, táblázatok, térképek, törzskönyvek az ellenőrző bizottságnak átadandók. E bizottság javaslatára azután a *városi tanács* egy hónapon belül aziránt intézkedik, hogy a háromszögelési munkálatok a m. kir. háromszögelési hivatal egy mérnöke által felülvizsgáltassanak.

A részletes felvételek.

12. §. A méterrendszerben teljesítendő részletes felvétel alatt értendő az utak, utcák és terek és ezek által határolt telektömböknek oly felvétele, hogy minden egyes teleknek az út, utca vagy tér határvonalába eső határpontjai, a telek homlokzatába eső hajlások, törések, **5 cm.-nél** nagyobb kiszögelések, minden kő-, tégla-, vagy állandó jellegű faépület, minden fal, kerítés, palánk részletesen és pontosan felméressenek.

Felveendők ezeken kivül az utak, utcák, vagy tereken létező fasorok, sétányok, járdák, folyókák, utcakövezetek, emléktárgyak, állandó jellegű lámpa- vagy egyéb oszlopok és vízlefolyásra szolgáló árkok, hidak, kutak, csatornaszemek, nyilt csatornák, vasutak vágányhálózatának tengelyvonalai stb.

13. §. Az utcák, utak, terek, stb. felvétele által a határtelektömbök teljesen be nem záratnak, ezért azok teljes bezárása illetőleg a felveendő belterület behatárolása végett szükséges a belsőséget övező határvonalat is teljes pontossággal felvenni. E cél elérésére és megkönnyítésére a műszaki bizottság által kijelölt határpontokon (minden töréspontón), amennyiben még állandó jellegű megjelöléssel nem birnának (épület-, palánk-, kerítés-sarkok),

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

szilárdan a földbe a földszine felett 0·2 méternyire kiálló kőoszlopok helyezendők el. A kőoszlopokat a város adja.

Az ujonnan elhelyezett, valamint a már előzőleg létezett állandó jellegü határpontok a természetben (és később a térképen) folyó számokkal láttatnak el és róluk egy **határleirási jegyzőkönyv** készitendő. A határpontoknak ugy összrendezői, mint magassági fekvése meghatározandó.

(Megjegyzés: Ez a belsőségi határvonal, amelyről e könyvnek IV. Fejezetében az „ellenőrző területszámitásnál megemlékeztünk.)

Utcafelmérés.

14. §. A részletes felvételek a sokszögelési hálózat alapján eszközlendők oly módon, hogy a pontokat összekötő vonalakra, mint tengelyekre az egyes utcatörési pontok teljes szabatossággal felvétetnek, azután a törési pontok közti távolságok pontosan megméretnek.

Telekfelmérés.

15. §. A beépitett területen a telkek közti határvonalak és az egyes épületek oldalai és az utcafelőli homlokzatok (belülről tagozva ujra) közvetlen megmérendők és az *utcatengelyhez való viszonylagos fekvésük* az utcatengelyből, vagy utcapontok segélyével akár szögtükörrel, akár műszerrel *minden egyes telekbe bevetett tengelyhez szögtükörrel vagy metszéssel való kapcsolás által rögzitendő.*

Be nem épitett nagyobb, szabad területek, sétaterek, temetők, szőlők, folyók, patakok, a határ stb. felvétele (az előforduló viszonyokhoz és körülményekhez képest) metszési módszer utján vagy tachymetrikusan eszközlendő.

Fölvételi vázlatok.

16. §. A *részletes utca és telekfelvétel* összes adatairól legalább is 1 : 500 léptékben felvételi vázlatok készitendők, melyeken az összes felvett — a térképezéshez, földkönyv készitéséhez és felülvizsgálathoz szükséges — adatok feltalálhatók legyenek.

Térképezés.

17. §. A háromszögelés eredményei és a részletes felvétel adatai alapján a 9. §-ban megnevezett háromszögelési és sokszög hálózati térképen kivül még a következő térképek készitendők:

a) Minden utcáról vagy utvonalról formátum magasságú (34 cm.) vászonra ragasztott rajzpapiron **1:200 arányban tengelyenkinti utcahelyszínrajz, (szalagtérkép),** melyen az utcatengely számozott végpontjai közt, az ezekből elágazó többi tengelyek irányai rajzban és szögmérési adatokban (hogy több tengelyből álló utca vagy a több utcából álló tömb ezekből az adatokból 1 : 200 léptékben egy egészszé összerakható legyen), a tengely mért hossza, a találkozó utcák sarkai, az utcasorok, a telekmesgyék tagozva és megfelelően színezve, a házszámok, a járdák, folyókák, vízárkok, hidak, állandó jellegü lámpa- vagy egyéb oszlopok, és a földből kiálló tárgyak — megállapitandó jelzéssel — feltüntetve legyenek. Ezen szalagtérképen kivül, amennyiben az egész utca összefüggő rajza egy szalagtérképen nem lenne ábrázolható, az *egész* utca összefüggő helyszinrajza is elkészitendő papir vászonra áttéve az egyes tengelyekből összerakva. Ezen helyszinrajzokon megjelölendők a külön kirajzolandó *utcakeresztszelvények* vetületei. Ugyancsak a tengelyenkinti helyszinrajzok és keresztszelvények alapján lesznek készitendők az *utcahossz-szelvények* 1 : 200 arányban és lehetőleg ugyanazon lapon. (E célból a helyszinrajzok a formátum alsó részére rakandók, hogy felettük a hossz-szelvények lehetőleg elférjenek).

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

b) **Részletes térkép 1 : 1000** arányban üveglapokra felragasztva. E térképnek egyes részeit az úgynevezett *üvegszelvények* képezik.

Az üvegszelvények beosztása megfelel a háromszögelési és sökszöghálózati térképekben feltüntetett szelvénybeosztásnak.

Az üvegszelvények nagysága úgy állapítandó meg, hogy azokon 800/600 méter hosszak által bezárt területnek megfelelően 80/60 cm. oldalú symetrikusan elhelyezendő derékszögű négyszög keretbe eső térképrészletek kényelmesen elférjenek. E célból 90 cm. hosszú és 70 cm. széles, 7—9 miliméter vastag, csak az egyik és pedig a használandó lapján megfelelően simára csiszolt üvegtáblák veendők és ezekre a legjobb minőségű rajzpapir ragasztandó.

Minden egyes üveglap a *kataszteri térképeknél használatos fakeretbe* illesztendő és az összes szelvények rekeszekre osztott szekrényekbe helyeztetnek.

Az üvegszelvényekre a térképszelvénykeretek sarokpontjai, a szelvényszélek *50 méteres beosztásai,* az összes illető lapra való és ráférő háromszögelési pontok összrendezőikből a legnagyobb pontossággal felrakandók olyan műszerrel, melyen a miliméter *20*-ad része leolvasható legyen.

Ép oly pontossággal rakandók fel az utca felvételi adatok a helyszinrajzokból, valamint a telek és területfelvételi adatok. Az *irányszög felrakásokhoz* noniussal ellátott olyan szögfelrakó műszer használandó, melylyel a szöget 20 másodpercnyi pontosságig lehet felrakni.

Az üvegszelvényeken az összes felrakások fekete tussal vékonyan huzatnak ki, a szinezés mellőzendő, az egyes parcellákba (ház és udvar, kert, házhely, rét stb.) csak a *helyrajzi számok iratnak be.* A parcellákhoz tartozó részek (pl. épületek) az illető parcellákhoz kapcsoló jellel csatolandók; szelvény, kerület, utca, tér, középület névfelírást kapjanak, a fixpontok és határpontok számokkal látandók el.

c) Az üvegszelvényekről és az 1 : 500 arányú részlettérkép minden lapjáról 5—5 *teljes másolati példány* készítendő legjobb minőségű vászonra feszített rajzpapirra, oly eljárás szerint, mely a másolatok teljes pontosságát biztosítja — az eredeti térképek sérülése nélkül. Ezenkivül az 1 : 500 arányú részlettérképek, minden lapjáról további 5—5 példány készítendő rajzpapiroson.

Az egyik másolati példány a városi mérnöki hivatal kézi használatára s a mindenkori változások regisztrálására szolgál. E példány szelvényein az üvegen lévő feliratok, számok és jelzéseken kívül az egyes telkekbe a házszámok is beirandók; épületek, vizek stb. szinezendők; kertek, rétek, stb. a mívelési ág kezdő betűjével tétetnek felismerhetővé. Ugyane térképen az utcai közlámpák és utcai zárt csatornák is feltüntetendők.

Egy másik másolati példányon a háromszögelési pontok, a felrakott magassági főpontok és az összes egyéb magassági pontok mellé azok magassági adatai beiratnak (kék téntával).

d) A részletes (1 : 1000) térképekről pantograph segélyével **1 : 3000 arányban átnézeti térkép** készítendő 100 példányban rajzpapirra — a szelvény beosztás feltüntetésével. Az átnézeti térképeken az utca-hálózaton kivül a meglevő telkek, birtokrészletek, épületek és vasuti vágányok is kitüntetendők.

Ezen kivül **1 : 500 arányú részlettérképek** készítendők 100/80. cm. méretű kartonlapokon (tényleg azonban horganybádogra ragasztott papiron készültek) a szerződéshez fűzött térképen kék számmal beirt 1—19. számú szinezett háztömbökről az egyes kartonlapok összefüggésének biztosítására a szomszédos lapok mindegyikén a sokszöghálózati alappontok teljes pontossággal feltüntetendők — ezen kivül — amennyiben a kartonlapok

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

terjedelme megengedi, mindegyik kartonlapon a szomszédos szelvényre felrajzolt tömbök külső határvonalai is feltüntetendők, hogy a különböző szelvényeket elválasztó utcák határvonalai egy-egy lapon ábrázolva legyenek. A kartonlapok anyaga olyan legyen, hogy az összehúzás ± 1/1000 méretváltozást meg ne haladjon s térképek feliratai, számozása és szinezése tekintetében megbízott mérnök javaslata alapján a műszaki bizottság határoz.

Területszámítás.

18. §. A részletesen felmért belterület minden egyes parcellája az üvegszelvényeken történt felrakás és kihuzás után — sorszám szerint haladó — helyrajzi számot kap. (Ugyanaz a helyrajzi szám csak egyszer fordulhat elő, tehát alosztályozás kerülendő.) Minden parcella területe az üvegszelvényeken történő térszámítás alapján külön-külön meghatározandó — **legalább kétszeri jó számítási eredmény** után nyert középértékből. Kell, hogy egy szelvényen lévő összes egész parcellák és parcellarészek területei az egész szelvény területét, vagyis 800 × 600 = *480.000 m²-t eredményezzék.* Azért a számítás nagyból kicsinybe történjék. Először kiszámítandók minden szelvényen legalább kétszer az egyes tömbök és tömbrészek egészben vagy parcellacsoportokban, az utak, utcák, terek, folyók stb., esetleg határon kivüli részek területei. A területek összege, a megengedett határok közt 480.000 négyszögméterre egyenlítendő; a különbözet minden külön számított területre a terület arányában elosztandó. Azután az egyes csoportokban levő parcellák területei számíttatnak külön-külön és egyenlíttetnek ki, a csoport kiegyenlített területére, területarány szerint.

(Megjegyzés: itt hiányoznak a megengedett területszámitási hibahatárok.)

A térszámításhoz oly rovatozott nyomtatványok használandók, melyeken a számítás módja, menete, az egyenlítés stb. kitünjék és egyszersmind látható legyen, hogy minden parcella mely szelvényre vagy szelvényekre esik és a több szelvényre jutott parcellának az egyes szelvényekre eső terület része és a parcellák egész területe is hektár és m²-ben kitüntethető legyen.

A területszámítás szelvényenkint és összesen is lezárandó és az összesítés elkészítendő.

Ennek megtörténte után alkalmas táblázat segélyével a hektárak és m²-ek kataszteri holdakra és □-ölekre változtatandók.

Törzskönyvkészítés.

19. §. Már a részletes felméréskor minden telek vázlatánál bejegyzendő a kerület, utca, hol a telek fekszik, a házszáma, a tulajdonos neve, lakhelye és a parcella mívelési ága. Ezekből az adatokból és a térszámítási eredményekből állítandó össze *törzskönyv, (földkönyv),* melynek a vállalkozó által kitöltendő rovatai a következők: 1. helyrajzi szám, 2. térképszelvény szám, 3. kerület vagy dűlő megnevezése, 4. az út, utca, vagy tér neve, 5. házszám, 6. tulajdonos neve, 7. lakhelye, 8. a birtok mívelési ága a felmérésnél, 9. a parcella területe hektár és □-méterben, 10. területe hold és □-ölekben. Egyéb rovatoknak a nyomtatványokba való felvétele felett a műszaki bizottság határoz, de utólagos kitöltésük a városi mérnöki hivatal gondját fogja képezni.

A törzskönyvet lezárja az oldalok összesítése, melynek a térszámítási jegyzőkönyv lezárásával egyeznie kell.

B. Szintezés.

20. §. A szintezés úgy lesz eszközlendő, hogy a városban lévő és az adriai tenger színére vonatkoztatott *országos vízrajzi magassági* főpontból kiindulva teljesen zárt körökben

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

präciziós színtező műszerrel legalább is kétszeri pontos színtezés utján a városban elhelyezett magassági főpontok, továbbá az alkalmas szilárd pontok (templom és középület, küszöb, kőkereszt, emlékoszlop, közkutak alapjai stb.) magassága a kiindulási főpont magasságához viszonyítva megállapíttatik. A város kibővítés céljaira szolgáló területre is kiterjesztendő.

21. §. A főbb utcák keresztezésénél, tereken alkalmas szilárd épületeknek falába erősítendő **50 drb. öntött vastárcsa** magasságai pontos színtezés utján állapíttatnak meg. A vastárcsák helyéről a városi hatóság fog a megbizott mérnök javaslata meghallgatásával utasítást adni.

22. §. A főpontok magasságai 3 tizedesre egyenlítendők.

A magassági főpontokról és a magassági vastárcsákról helyi fekvésük leirása és vázolása mellett az alappontok főkönyvében külön kimutatás készitendő, a pontok az adriai tenger színe feletti magasságának feltüntetésével.

23. §. A főpontokból kiindulva, ezekhez kötendő a **részletes színtezés** vagyis az *utcakeresztszelvények* színtezése is, amihez egyszerű színtezés elegendő. A részletes szintezésbe a régi városi magassági jegyek (vastáblák) is bevonandók.

Ezeknél a számítási eredmények 2 tizedesnyi pontossággal állapítandók meg.

Az utcakeresztszelvények.

24. §. A keresztszelvények egymástól rendszerint **30—40 méter** távolban veendők fel és azokban a tengelyvonaltól mindkét oldalra minden szembetünő töréspont beszíntezendő, tehát az utca közepe, a két oldali folyóka vagy vizárok partjai és feneke, a járdák útfelőli és falfelőli széle. 30 méternél szélesebb utcáknál az utcaközép és folyóka vagy árok közti távolság felében egy pont, valamint a legmagasabb utcapont (ha ez nem volna egyúttal az utca középpontja) szintén beszintezendő.

Két-két keresztszelvény közt beszíntezendő minden az utca homlokvonalába eső épület sarka, telekmesgyepont, kapubejáró, továbbá felveendők és nivellálandók, az utcán szemmel látható minden terraintörés, hidak, átereszek szélei és feneke, fedett csatornák, beömlőinek rostélya, nyilt csatornák felső szélei és mederpontja stb.

Tereknél, melyeknek szélei többnyire az utcák folytatását képezik, a keresztszelvények a házsorvonalak közelében hasonló módon veendők fel és szintezendők mint az utcák; belső magjuknál a területi szintezés alkalmazandó.

Az utcakeresztszelvények lehetőleg úgy veendők fel, hogy azok helye úgy a természetben, mint a helyszínrajzok és részletes térképeken mindenkor utánmérés nélkül feltalálhatók legyenek.

Keresztszelvényeket képezhetnek tehát az egymással szemben levő utcasarkok összeköttetései és körülbelül a megkivánt 30—40 m. távolságokban egymással szemben levő telekmesgye, épület- vagy kerités-sarkok stb. közt vont egyenesek, szóval oly a tengelyre való merőlegestől nem igen eltérő egyenesek, melyeknek végpontjai a felmérés és térképezés folytán már ismeretesek és feltalálhatók.

Ha a keresztszelvények ily módon nem vehetők fel (pl. egyoldalulag kiképzett vagy szórványosan beépitett utcáknál vagy be nem épitett utaknál stb.), akkor legkedvezőtlenebb esetben a tengelyben mért távolságokban emelt merőlegesek képezzék a keresztszelvény vonalát, melyben a magassági pontok 50 méter szélességben veendők föl. A színtezési jegyzőkönyvben az utcasorok és a keresztszelvények helyei világosan és érthetően *vázolandók*.

25. §. A keresztszelvények vonalai azután az 1: 200 arányú helyszínrajzokba megfelelő helyükre (piros tentával) behuzatnak; maguk a szelvények a helyszínrajzba beirt magassági adatok alapján 1 : 200 léptékben külön kirajzolandók az uttengely pontjának megjelölésével.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Utcahosszszelvények.

26. §. Az utcahelyszínrajzok elkészítése és a keresztszelvények és egyéb szintezett utcapontok magasságának beirása után készítendők az utcahosszszelvények. Lehetőleg a helyszínrajzok felett ugyanazon lapon **1 : 200 hossz és 1 : 20 magassági arányban** szerkesztendő a kétoldali házsor, kétoldali folyóka- vagy vizárokfenék- utcai zart középcsatornák fenék- és záradékvonala és az utca középvonala és minden vonal megfelelő módon és színnel teendő felismerhetővé. A házsorok vonalában a telkek merőleges vonalakkal elválasztandók és a házszámok beirandók, úgyszintén a találkozó és keresztező utcák nevei is. Ezen hosszszelvényen *minden kapubejárat küszöbmagassága- is kitüntetendő.* A jobb és baloldali adatok jelzése egymástól megkülönböztetendő. Ha a hossz-szelvény a helyszínrajz felett nem fér el, külön formátum nagyságú miliméterpapiron lesz szerkesztendő. Minden hossz-szelvény elé a megfelelő magassági mérték teendő, a hosszmérték az alapsikon tüntethető fel.

Általában a hossz-szelvény az utca magassági viszonyairól világos és átnézetes képet nyujtson.

Vízfolyások szintezése.

27. §. A Ferenc-csatorna és nyílt vízlevezető árkok a part hosszában lemért 100—100 méter távolságokban keresztszelvényezendők. E keresztszelvényekben a töltések, a két part és a meder két-két méterenkint meghatározandó. A Duna folyam újvidéki partja és a part közelében levő mederrészlet a partművek megtervezéséhez szükséges terjedelmében veendő fel.

Magassági pontok fölrakása.

28. §. Az utca és telekszintezés befejeztével a részletes térkép egyik másolati szelvényeire a szintezett pontok felrakatnak, és pedig a helyszínrajzokból az utcaszéli, utcaközép és folyókák, vízárkok és vízfolyások magassági pontjai.

29. §. Az összes az Adria tenger színéhez viszonyított magasságok azonban a *térképekbe való felrakásuk előtt az eredeti szintezési jegyzőkönyvekkel, vázlatokkal és kimutatásokkal és egyéb szintezési adatokkal együtt a városi hatóságnak bemutatandók, mely azokat az ellenőrző műszaki bizottság által megvizsgáltatja.* Csak az esetleges hibák kijavítása és a jóváhagyás után rakhatók fel az eredmények az utcák helyszínrajzába és a másolat részletes térképekre. Minélfogva természetesen az utca és vízfolyások hossz-szelvényeinek szerkesztése is csak a jóváhagyás után következhetik.

A felvételi adatok és kimutatások.

30. §. Valamennyi felvételi adat, t. i. a háromszögelésre, felmérésre, térszámításra, törzskönyvezésre, szintezésre vonatkozó jegyzőkönyvek, külön vázlatok, számítások, szóval mindazok az adatok, melyek a munkálatoknál felhasználtattak, eredetiben minden díj nélkül a város rendelkezésére bocsátandók lesznek.

Ezenkívül készítendő

1. *Egy kimutatás* az alfabetikus rendben összeállított *utcák, utak és terekről*, melyben ezek folyószáma, a tengelypontok, tengelyhosszak a felvételi és szintezési jegyzőkönyvek és lapok száma külön rovatokban feltüntetendők.

2. *Egy kimutatás a telektömbökről*, mely kimutatásban külön rovatokban ezek folyószámai, térképszelvényszáma, a tömböt befoglaló utcatengelypontok száma, a felvételi és szintezési jegyzőkönyv és lapszáma és a tömbben foglalt parcellák helyrajzi számai tüntetendők ki.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A felülvizsgálat.

31. §. Az egész munka befejeztével az összes adatok, térképek, kimutatások, az ellenőrző szakbizottságnak rendelkezésére bocsáttatnak. E bizottság javaslatára a városi tanács 1 hónapon belül intézkedik, hogy a behatárolási, felmérési, színtezési külső munkák, a térképezés, térszámítás és törzskönyvek; kereszt- és hossz-szelvények szerkesztése szakszerűleg felülvizsgáltassanak és pedig a pénzügyminister ur által kiküldendő mérnök közbenjöttével.

A háromszögelési munkák felülvizsgálatáról már a 11. §. intézkedik.

Pontossági határok.

32. §. Azok a határok, melyeken belül a végrehajtott munkák a felülvizsgálatnál pontosaknak nyilváníthatók, hosszméretekre $(0{,}03 + 0{,}002 \sqrt{\text{hossz}})$ méter; területszámításokra $0{,}03 \sqrt{\text{terület}}$ négyszögméter; színtezésnél pedig a hossz $^1/_{300.000}$ része, 100 méternél közelebb fekvő pontok kőzött azonban az eltérés $3^{m}/_{m}$ lehet. Minden távolság centiméter pontossággal mérendő.

Műszerek, szerelvények, személyzet, munkások stb.

33. §. A háromszögeléshez, térfelvételhez és színtezéshez szükséges összes műszereket és szerelvényeket az előbbiekben tett meghatározások szemmel tartása mellett — a megbizott mérnök saját költségén szerzi be és megvizsgálás végett az ellenőrző műszaki bizottságnak bemutatja. A mérések megkezdése előtt tartozik azonkívül hitelesített 2 darab 5 méteres és 2 darab 1 méteres mérőrúdat beszerezni és ezeket ellenőrzési célokra az ellenőrző műszaki bizottságnak bármikor rendelkezésére bocsátani.

Kitüző rúdakat, szintező léceket, léceket, zsindelyeket, cövekeket, rajz- és írószereket, nyomtatványokat, üveglapokat az üvegszelvények részére a kemény fakerettel és szekrényeket, a részletes térképszelvényekhez szintén ő adja.

34. §. Tartozik a megbizott mérnök a munka kivitelére szükséges műszaki személyzetről és irodahelyiségről a városban gondoskodni, s az irodai munkákat az ellenőrizhetés végett egészen a *felülvizsgálatig a városban végeztetni.* Tartozik továbbá ugyancsak saját költségén a munkálatokhoz szükséges napszámosokat és fuvart előállítani.

Köteles a határbejárás és kijelölésnél, valamint a felülvizsgálatnál díjtalanul közreműködni, de e müveletek személyi és dologi kiadásait a város fedezi. *A felülvizsgálat költségén felül a várost más költségek nem terhelik.*

Hibák folytán netalán szükséges *pótfelülvizsgálat* költségei azonban a megbizott mérnököt terhelik.

35. §. E műszaki feltételekben említett háromszögelési pontok állandósítási jelei, a pontokhoz esetleg szükséges tokok és póznák, és a 21. §. szerint a falakba erősítendő magassági táblák beszerzése helyszínére szállítása, elhelyezése és beerősítése a megbizott mérnök kötelessége. *A városbővítésre szánt 200 H területen az új telektömbök sarkai a város által beszerzett határkövekkel jelölendők meg.*

Arról, hogy a jelek pontosan megfelelő helyen és magasságban — megállapítandó módon legyenek beállítva és beerősítve, szintén a megbizott mérnök tartozik külön díjazás nélkül gondoskodni.

Az esetben, ha az elhelyezésben hibák találtatnának, az újabb elhelyezés költsége is ugyanőt terheli.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

II. FEJEZET.

Birtokrendezés.

A birtokrendezésről szóló 1908. évi VII. és XXXIX. t.-cikkek végrehajtása iránt kiadott rendeletek (összegyüjtve Sebess-Börcsök-féle „Erdélyrészi birtokrendezés“ és „Magyarországi birtokrendezés“ cimü munkákban) részletesen előirják a földmérői munkák tekintetében is követendő eljárást.

Kiegészitésül szolgálhatnak az alábbi fejezetek.

A.

A birtokrendezési helyszini eljárásokra vonatkozó kataszteri mérnöki teendőknek tájékoztató ismertetése.

Összeállította a m. kir. 22. felmérési felügyelőség.

I. Hasznosság és célszerüség megállapitása céljából kiküldött bizottsági tárgyalás.

A kiküldött kataszteri mérnök lehetőleg még a tárgyalás előtt a szintén megidézett községi jegyző által rendelkezésre bocsájtott földadókataszteri munkálatokból megállapítja és kijegyzi:

1. Hány egész, $^1/_2$, $^1/_4$ vagy $^1/_8$ telek volt az urbérrendezéskor?
2. Hány külterületi birtokos, hány hold és hány részlet van a községben?
3. Ebből a szántóföld s ha sok rét van, az külön hány hold és hány részlet?
4. A birtokosok közül hány van

a) 5 holdon alul,
b) 5—20 holdig,
c) 20—50 holdig,
d) 50—100 holdig és
e) 100 holdon fölül?

5. A 4. szám alatt részletezett birtoktipusok mindenikéből kiveendő 2—2 kataszteri birtokív, az összetartozó családi birtokkal együtt. Ezeknél feljegyzendő a birtokív száma, a tulajdonos neve, összes birtokának területe, ebből a szántó hány hold, hány részlet és hány dülőben van, mekkora a legkisebb és a legnagyobb részlet területe. Figyelni kell arra, hogy ha több részlet egymás mellett fekszik, akkor azt csak egy birtoktestnek kell venni.

A 100 holdon felüliek mindenikéről összeállítandók a fenti adatok.

6. Az esetben, ha a tárgyalás alkalmával az adómunkálat nem állana rendelkezésre, úgy a fenti adatok a jelenlévő birtokosoktól bemondás alapján (megközelítőleg) szerzendők be.

7. A tárgyalás rendjén kijelenti és jegyzőkönyvre véteti, hogy kivánatosnak és szükségesnek tartja-e a 30/909. I. M. rendelet 199. és 200. §. értelmében teljesítendő kiegészítő munkálatoknak — ha ilyen van — a tagositással kapcsolatos elvégzését. Ha azok a tagosítás előhaladását nem akadályozzák, vagyis ha nem aránytalanul nagyobb területről van szó, mint a mekkora tagositás tárgyát képezi, a kiegészítő munkálat elvégzése mindenkor, tehát még részleges tagosítás esetén is.

8. Ha a tagosítás hasznos és célszerű volta, vagy annak általános vagy részleges keresztülvezetése iránti véleménye a tárgyaló bizottság többségének véleményétől eltér, külön véleményét indokolással jegyzőkönyvre adja.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

9. Megállapítja esetleg a községi jegyző bemondása alapján azt is, hogy a kataszteri telekkönyv margoján a régi kataszteri telekkönyvek részletszámai bejegyezve vannak-e s ezt jelentésébe is befoglalja.

10. Felvilágosítja az érdekelteket, különösen a községi előljáróságot, hogy a kiegészítő munkálatoknak a földmérő által való egyidejű elkészítése általában a községre és az egyes birtokosokra milyen előnyös úgy a telekkönyvezés, mint az adókataszter szempontjából.

11. Kiszálláskor a község átnézeti vázlatát magával viszi s a bizottság elnökének átadja.

12. Érdeklődik az iránt, hogy a kataszteri felmérés óta történt-e és milyen nemű birtokrendezés, vagy történt-e oly nemű birtokmegjelölés melynek következtében a természetbeni állapot a kataszteri térképtől olyan mértékben eltér, hogy a kataszterí térkép ennek következtében további munkálkodásra nem alkalmas.

II. A kiegészítő munkálatok költségeinek megállapítása, ha azokat az állam viseli.

Azon esetben, midőn a kiegészítő munkálatokat a tagosító érdekeltség nem végezteti, a földmérő által ajánlatba hozott egységár, vagy átlagárra nézve, hogy az elfogadható, illetve azzal szemben mekkora összeg állapítható meg állami szempontból, a következő eljárás követendő azon kataszteri mérnökök által, kik ennek megállapítása végett a felmérési felügyelőség részéről kiküldetnek vagy megbizatnak.

Ezen esetben a felmérési felügyelőség kiküld egy kataszteri mérnököt, hogy a helyszinén győződjék meg a munka minőségéről és a változások mennyiségéről s tegyen arról olyan jelentést, hogy annak alapján a felmérési felügyelőség úgy a teljesítendő munka mennyiségéről és minőségéről, mint annak költségeiről tiszta áttekintést nyerhessen.

Ennek eszközölhetése végett a kataszteri mérnök a meglévő kataszteri térképek, esetleg még a változási jegyzékek segítségével a községi előljáróság (leginkább a jegyző) közreműködésével megállapítja azon dűlőket és helyeket, melyek a tagosítási eljárásba a m. kir. földmívelésügyi minister határozata értelmében nem lettek bevonva (pl. a belsőség, majorsági birtokok, szőlők, erdők, legelők stb.) és hogy azokon birtok-megosztás vagy egyéb szabályozás folytán milyen mérvű változás állott elő a kataszteri felmérés óta. Ez utóbbinál csupán azon esetek jönnek tekintetbe, melyek még a telekkönyvi betétben, illetve a kataszterben még nem érvényesíttettek.

Ezután a kiküldött kataszteri mérnök a községi előljáróság egyik tagjának közreműködése mellett bejárja azon területeket, melyek kiegészités tárgyát képezik, s a magával vitt kataszteri térképet összehasonlítja a természetbeni állapottal, megállapítja az előállott változásokat, úgy a birtokmegosztások, mint a művelési ág változások tekintetében, úgy hogy azokról magának tiszta képet alkothasson, s azokat a maga részére dülőnkint fel is jegyzi.

Tudakozódik az iránt, hogy a . . . . . községben, k. b. mennyibe kerül egy napszámos, fuvar stb. más, a munka elvégzésénél igénybe veendő szolgálmány. Ezzel helyszini működését be is fejezte.

Azután megállapítja, hogy középszerű munkaerővel minden egyes dűlőben mennyi idő alatt lehet ezen változásokat bemérni, térképezni, területét kiszámítani, mennyi idő alatt lehet az összes kiegészítő munkálatokat képező részleteket a földkönyv, birtokív és összesítésben átvezetni, mennyi idő alatt lehet ezen részleteket a helyszinén megvizsgálni, a kiosztási térképre átmásolni, mind a három példányra, valamint az új földkönyvbe, birtokívbe és azoknak összesítésébe bevezetni.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Egyenkint megállapítja lehetőleg az ottani viszonyok figyelembe vétele mellett ezeknek munkadíját, a felméréshez szükséges napokra a napszámos, esetleg fuvardíjakat, az azonosítással eltöltendő időre eső költséget, a felhasználandó anyagok (papir stb.) költségeit. A kiegészítő munkálatok teljesítése folytán előálló időtöbbletre, irodahelyiség fentartási költségeit (esetleg fűtés, világítás) és műszerkopási költségeket stb., ha még valami egyéb költség felmerülhetne és mindezeket összegezve, jelentésében egy összegbe foglalva kimutatja, hogy körülbelül mennyi kiadást okozhat földmérőnek a kiegészítő munkálatoknak elkészítése.

A felszámításban a felmérés, térképezés, területszámítás és azonosítás mérnöki munka szerint, az irásbeli munkálatok olcsóbb irodai személyzet dijazása szerint veendők számításba.

Az iránt is érdeklődik a kiküldött kataszteri mérnök, hogy hasonló vállalatra vonatkozólag történt-e már kiszállás más községbe, s annál a vállalatnál milyen szerződés jött létre az állam és a földmérő között, nehogy ugyanolyan minőségü vállalatok egységárai között nagy eltérés legyen.

Figyelembe veendő az is, hogy ugyanarra a megyére vonatkozólag hasonló terepü munkálat az államnak milyen kiadásaiba került.

III. Régi kataszteri térképek használhatóságának megvizsgálása.

Az eredeti kataszteri térképek segélyével megállapitandó, hogy a korábbi időben de vetületi alapon történt háromszögelés alapján eszközölt felmérés a helyszinelési és nyilvántartási szabályok szigorú betartása és figyelembevétele mellett az esetleg elpusztult háromszögelési pontok hiányában más állandó jellegü pontok felhasználása mellett mennyiben volnának a tagosítás czéljára felhasználhatók.

Nem lenne-e szükséges új háromszögelés még a helyszínelés eszközlése előtt, vagy pedig a szükséges háromszögelési új pontok csak a kihasítás részére lennének-e meghatározandók és rendelkezésre bocsájtandók.

A terep vizsgálásánál figyelembe veendők: léteznek-e kőoszlopok, keresztek, régi határhalmok vagy egyes épületek, amelyekből próbamérés útján meggyőződés szerzendő, van-e eltolás az egyes mesgyék között, vagy változtak-e a mesgyék a felmérés óta s a változás milyen mérvü. A változások olyan természetüek-e, hogy azok következtében a határ újból való felmérése indokolt és szükséges.

IV. Határleirás.

Minden birtokrendezésnél, legyen az arányositás, urbéri elkülönítés, erdő, legelő felosztás, részleges vagy általános tagositás, a 30/909. I. M. rendelet 88. §-a értelmében a rendezendő terület mindenkor bizottságilag bejárandó, behatárolandó, leírandó és arról vázlattal ellátott határleírási jegyzőkönyv szerkesztendő.

A határbejárás foganatositása alkalmával egyidejüleg történik jelenlevő eljáró kir. törvényszéki biró által a földmérőnek a munkálatokba való bevezetése, tehát a földmérőnek is jelen kell lennie (30/909. I. M. rend. 90. §-a).

Az eljárás a határleírás szerkesztésénél 3 mód szerint történik:

1. Ahol még nem volt kataszteri felmérés.

2. Ahol már volt kataszteri felmérés, de a határleírási jegyzőkönyv nem az állam hivatalos nyelvén lett szerkesztve, azonban a határleírási jegyzőkönyv a térképtárak által másolatban kiadatott.

3. A rendezendő, avagy a kiegészítési munkálat tárgyát képező területre nézve.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

1. Ahol még nem volt kataszteri felmérés, a határleírás készitéséhez a felmérési felügyelőség által az illető térképtárból bekért és a kiszálláskor kivitt concretalis térkép, vagy ennek határszélmásolata, vagy ha létezik a község határát feltüntető régebbi térkép is, hogy vitás esetekben, egyéb okmányok hiányában irányadóul szolgáljanak. Ezeknek, illetve a háromszögelési alaplapoknak segélyével szerkesztendő a határleírási jegyzőkönyv és határvázlat: kellő figyelemmel a felmérési utasítás 38—56. §-aira és a 8., 9. és 10. számú mintáira.

A határbejáráshoz a 30/909. I. M. rendelet 90. §-ának 4. bekezdése értelmében a korábbi birtokrendezési térképek eljáró biró által beszerzendők és a határvonal, ha nem vitás, ezen térképek alapján jelölendő ki és írandó le.

Azon esetben, ha a szomszédos község bárminemű birtokrendezése kataszteri alapon, illetve a 30/909. I. M. rendelet alapján lett volna már végrehajtva, a csatlakozó határvonal leírása a csatlakozó szomszédos község meglevő határleírási jegyzőkönyvéből veendő át, illetve írandó le, és a határvonal a már hitelesített térképekről, avagy határszélmásolatokról, a szelvényekben levő terület fentartásával, változatlanul veendő át a község felvételi térképeibe határváltozás vagy téves határmegállapítás eseteit kivéve, mely esetben határleírási pótjegyzőkönyv szerkesztendő.

Nem kataszteri alapon készült térkép adatai csak annyiban veendők figyelembe, amennyiben azok a természetben az új felvétellel megegyeznek, vagy ha a főbb irányokban megegyeznek, s csak apróbb, oly jelentéktelen eltérést mutatnak, melyek a természetben meg nem állapíthatók, pl. erdőben, utaknál, patakoknál stb., hol a határvonal a természetben pontosan nem állapítható meg.

2. Azon községek határbejárásánál, amelyeknél a kataszteri felmérés részére szerkesztett, s a térképtárak által másolatban kiadott régebbi határleírási jegyzőkönyv alapján lesz az új határbejárás végrehajtva, amennyiben az a tényleges állapotnak megfelel, változatlanul hagyandó, esetleg a változott birtokosok nevei, avagy egyéb nemű eltérések vagy bővebb értelmezések vörös tintával helyesbitendők.

Azon községeknél, melyeknek határbejárása és felmérése az 1860. években eszközöltetett, de a határleírási jegyzőkönyv nem az állam hivatalos nyelvén van szerkesztve, az új bejárásnál a határleírási jegyzőkönyv újból szerkesztendő a felmérési utasítás szerint.

Ha pedig ezen régi határleírási jegyzőkönyv szövegezése rossz magyarsággal van szerkesztve, vagy az egyes halmok helyszíni leírása felületesen van megadva, figyelem fordítandó arra, hogy ezen hiányok az új határbejárásnál kiküszöböltessenek, illetve a jegyzőkönyvben vörös tintával helyesbittessenek, s a határhalmok és határvonalak adatai tüzetesebben leírassanak.

Ha a régi határhalmok elpusztultak, akkor azok a kéznél levő kataszteri térkép segélyével a lehetőségig pontosan kitűzendők, s ujonnan felhányandók. Miután a határbejárások és határleírási jegyzőkönyvek az 1904. évi felmérési utasitás alapján lesznek végrehajtva, vagy megengedhető, hogy nemcsak a régi halmok felujittassanak, hanem szükség esetén új halmok is felhányattassanak. Ez esetben a közbeiktatott dombok az előtte levő dombok számának ·/*a*, ·/*b*, ·/*c* stb. betűkkel levő aláosztásával számozandók. Ha pedig a közbeiktatott halmok a hármas határpont után kezdődnek, akkor az 1-es szám aláosztásával lesznek számozva, s ha ezen közbeiktatás csak az 1. számú halomig tart, akkor a régi 1-es szám változatlanul meghagyandó, ha pedig a régi 1. és 2. számú halom között is lesznek új halmok felhányva, akkor azok, valamint az egyes szám folytatólagos aláosztással számozandók. A régi halmoknál a régi szám megtartandó.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Azon esetben, ha a határvonal bejárása alkalmával a már korábban megállapított számozott határjelek, határhalmok között a határvonal megváltoztatása következtében vagy a törések esetleg az erdei utak pontosabb megjelölése céljából ujabban felhányt határhalmok találtatnak, figyelembe veendők, aláosztással számozandók és nem pótjegyzőkönyvbe, hanem a meglevő határleirási jegyzőkönyv megfelelő helyén, esetleg helyszüke miatt külön iven leirandók s a jegyzőkönyvhöz csatolandók.

Földmérő által a kiosztási munkálat hitelesítésekor bemutatandó új határleírási jegyzőkönyvben ezen határhalmok az eredeti számozás megtartásával a megfelelő sorrendben lesznek külön leírandók, ugyszintén a határvázlaton feltüntetendők.

Azon községeknél pedig, ahol az új határbejárás régibb keletű határleirási jegyzőkönyv alapján történik és a javitások vörös tintával eszközöltetnek, a jegyzőkönyv minden csatlakozó község határvonala leirásának befejezése után a következő, veres tintával irt záradékkal látandó el: „Ezen határvonal újból bejáratott és a jegyzőkönyvben vörös tintával eszközölt javitások figyelembe vételével (vagy: a vörös tintával eszközölt stiláris helyesbités vagy bővebb, részletesebb leírás figyelembe vételével az eredeti határleírás fentartásával) helyesnek találtatott.“ Az aláirások pedig az előző pontban leírtak szerint szintén vörös tintával eszközlendők.

Határleírási pótjegyzőkönyv csak határvonalváltozás esetén veendő fel.

Ha a régi elpusztult határhalom a kataszteri térkép alapján egész pontosan kitűzhető nem volt, földmérő utasítva lesz vélemény alakjában annak a háromszögelés, felmérés és azonosítás helyszini megvizsgálásáig műszerrel való bemérésére vagy meghatározására s ha az igy bemért vagy meghatározott határhalom vagy jel az eredeti határtól, határúttól vagy jeltől eltér s ezen eltérés pontosan megállapítható, a határhalom vagy jel az előmunkálatok hitelesítése alkalmával az eljáró biró és mindkét község bizalmi férfiai jelenlétében arra a helyre helyezendő át, ahol annak az eredeti meghatározásakor, vagy felvétel szerint lenni kell.

3. Arányosítás, erdőlegelő-elkülönités és részleges tagosítás esetén, ahol a rendezendő terület községi határvonalat is érint, a rendezendő területnek a szomszédos községgel érintkező részénél a határvonal leírása mindig az illető község hármas határpontjától a másik hármas határpontig terjed. Amely község határát a rendezendő terület egyáltalán nem érinti, arról határleírás nem készül, illetve ott határjárást nem kell eszközölni. Az ily csonka határleírási jegyzőkönyv is vázlattal látandó el és aláirandó az 1904. évi felmérési utasitás szabályai szerint.

A rendezendő területnek községi határral nem érintkező határvonala külön jegyzőkönyvben irandó le, vázlattal ellátandó és a bizottság által aláirandó.

Azon esetben, ha a földmérő a kiegészítő munkálatokat nem végezi és azok az állam által később eszközöltetnek, a tagosítás alá nem eső terület behatárolandó ugyan oly módon, mintha részleges tagosítás határoltatnék be és iratnék le, a kiegészítés tárgyát képező terület vagy annak még le nem irt vonala hasonlóképpen behatárolandó s arról a dülők megnevezésével külön jegyzőkönyv két példányban készítendő és vázlattal ellátandó. A határjelek és halmok minden különálló darabban 1-től számozandók. Ezen részekről felvett jegyzőkönyv egyik példánya eljáró kir. törvényszéki birónak átadandó, másik példánya a területszámitási jegyzőkönyv címlapjához csatolva a felügyelőséghez beterjesztendő.

Általában ha a határvonal vitás, akkor mindkét határvonal leirandó és eljáró biró figyelme felhivandó arra, hogy ezen vitás határvonal eldöntésére a határozatot minél előbb hozza meg, mivel az eljáró birói határozat a Curiáig is megfelebbezhető lévén, annak

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

eldöntése több időt vehet igénybe, mint a mennyi a kiosztási munkálatok elkészítéséig eltellik s a késedelmes birói határozat miatt a munka fennakadást szenvedhet.

A határjárás befejeztével a felvételi, illetve a helyszinelési vagy nyilvántartási munkálatok miként való végrehajtása, szükség esetén földmérővel közlendő s ennek megtörténte a felmérési felügyelőséghez intézett jelentésbe foglalandó. Ha a földmérő kioktatására szükség nem volt, az a jelentésben külön kiemelendő.

Ugyanakkor megállapítandó azon eljárás is, amely szerint a felmérendő község határában a 30/909. I. M. rendelet 91. §-ában leirt területek kezelendők lesznek és azon részletek területi adatai, amelyek a rendesnél kisebb vagy nagyobb méretarányban mérendők, ez a határleirási jegyzőkönyv megfelelő helyén feljegyzendő és eljáró birónak jegyzőkönyvre adandó lesz.

A kataszteri mérnök a földmérőt a munkálatok mikénti elkészítésénél arra is utasítja vélemény alakjában, hogy olyan esetekben, mikor kataszteri térképen, külön kataszteri és ettől eltérő telekkönyvi számokkal dolgozik, a telekkönyvi számokat zöld szinű tussal vagy tintával vezesse rá a térképre.

Ugyanilyen szinű tussal vagy tintával tüntesse fel a kataszteri térképen mindazokat a változásokat, amelyekkel a 30/909. I. M. számu rendelet 65. §-a értelmében kiadott térképmásolatokat kiegészíteni tartozik. Betétes községeknél csak a részletekben előálló változás vezetendő a térképre zöld szinnel, a részletszámoké feketével, mig egészen új felmérésnél a térkép és részletszámozás fekete tussal eszközlendő.

Ha földmérőnek kataszteri térkép áll rendelkezésére, a részletek megosztása esetén mindig csak a telekkönyvi részletszám osztandó alá, a kataszteri részletszám nem.

Utasitás adandó földmérőknek arra az esetre is, ha a tagositási munkálatok a 30/909. I. M. rendelet 63. §-ának *c)* és *d)* pontjai szerint szerkesztendők s esetleg a kiegészítendő nagy területű urasági birtokon oly nagymérvű változások vannak, amelyek terjedelmük miatt mérőszalaggal pontosan be nem mérhetők és valamely oknál fogva háromszögelési pontok rendelkezésre nem állanak, hogy ezen területek háromszögelését esetleg a felmérési felügyelőségnél kérelmezhetik, amikor az illető terület felmérését a háromszögelés eszközléséig, illetve a felügyelőség értesítéséig tartsák függőben, minthogy a háromszögelő hivatal annak foganatosítását lehetőleg teljesíti.

Határváltozás esetén, ha a község határa növekedik s a növekedő területnek ezen községben még telekkönyvi száma nem lenne, az azon levő részlet vagy részletek a községben levő utolsó telekkönyvi helyrajzi szám után következő számmal vagy számokkal számozandók. Az ilyen részletek kataszteri részletszámot nem kapnak.

V. A részletes háromszögelés, felvétel és azonositás vizsgálása.

A tagositandó és kiegészítés tárgyát képező területet földmérő a 30/909. I. M. rendelet 94. §. értelmében az országos kataszteri felmérés szabályai szerint méri fel, és a 63. §. *c)* és *d)* pontjainak alkalmazása esetén pedig a felmérési felügyelőség utasitása szerint egészíti ki, azért annak megvizsgálása a fentiek szem előtt tartásával eszközlendő.

Helyszini vizsgálatnál a hitelesítő kataszteri mérnök uj felmérés esetén a szelvényvonalak és háromszögelési pontok felrakását, a határleirási jegyzőkönyvet a felvett határvonallal, az esetleg létező határcsatlakozást és a szelvényeknek egymás közötti csatlakozását még a helyszinére való kimenetel előtt megvizsgálja, ahol arra is kiterjeszti figyelmét, hogy a közbeiktatott háromszögelési pontok a szükséghez képest elég sűrűen és a szelvényvonalak közelében is kellő mennyiségben vannak-e elhelyezve. Kataszteri térképeken, ha nagyobb terjedelmű s rendszeres felmérést igénylő változások vannak, ezek nem lánc-

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

méréssel, hanem háromszögelés alkalmazásával felvétel utján vagy sokszögelési eljárással mérendők fel a földmérő által.

Az azonositási lajstrom helyes szerkesztése még az irodában megvizsgálandó, hol ellenőrzésképen néhány telekkönyvi ívvel is összehasonlítandó annak ellenőrzése végett, hogy az egyes részletek a megfelelő ívszámmal és a tulajdonos nevének helyes feltüntetésével vannak-e kimutatva, s hogy az asszonyoknál ugy a férj, mint a születési név, fel legyen tüntetve.

A helyszíni vizsgálatnál az azonosítás igen széles alapon eszközlendő, hogy az azonosítási lajstrom adatainak helyessége és a tényleges birtokosok bejegyzése minél nagyobb mérvben ellenőrizhető legyen, mert az érdekelteket hibás azonosítás folytán érheti a legérzékenyebb károsodás.

A háromszögelés és felmérés helyszíni vizsgálatánál a földmérő eljárása követendő. Vagyis a rajzi háromszögelés és felmérés rajzi, a számszerű háromszögelés és felmérés számszerű méréssel, utánszámítással és mindkét felmérés láncméréssel vizsgálandó.

Csak teljesen kész szelvények vehetők vizsgálat alá és csak a teljesen megvizsgált és helyesbített szelvények láthatók el záradékkal és írhatók alá.

Ha a határban vasutak, törzskönyvezett útak, töltések stb. léteznek és ezeknek adatai rendelkezésre állanak, hitelesítő mérnök által megvizsgálandók, s ezen tény a hibaíven is felemlítendő, hogy már megtörtént. Ha pedig az adatok még nem lennének kéznél, földmérő utasítandó, hogy ezeknek beszerzését eljáró birótól a 30/909. I. M. rendelet 78. §. értelmében kérje.

A helyszíni vizsgálatra földmérő a 30/909. I. M. rendelet értelmében térképmásolatot készit, mely tartalmazza a térképen levő összes részleteket, azoknak telekkönyvi, illetve ha van, kataszteri számait, a művelési ágakat színezve, a tulajdonosok, vagy tényleges birtokosok nevét, a határvonal jelzését. Ezen másolatot hitelesítő kataszteri mérnök a helyszini vizsgálatra magával viszi és az azonositást ebből hasonlitja be az azonositási lajstromba. Kétséges azonositás esetén a hitelesítő kataszteri mérnök által az illető terület tulajdonosai mindig meghallgatandók a birtoklásra nézve.

Arra is kiterjeszti vizsgálatát a hitelesítő kataszteri mérnök, hogy a határleírás címlapjának belső oldalára bejegyzett utasítást a méretarányra nézve földmérő betartotta-e? Mert attól eltérés legfeljebb a kisebb méretarányról a nagyobbra van megengedve.

A helyszínén hitelesítő kataszteri mérnök szigoruan ügyel arra, hogy minden birtokmesgye felmérve legyen. Nincsen megengedve, hogy különféle telekkönyvbe tartozó birtoktestek csoportonkint, mint egy részlet legyen felmérve s az összterület az egyes telekkönyvi területek arányában legyen megosztva. Ezen eljárás csak ott engedhető meg, ahol a természetben a mesgye meg nem állapítható. (30/909. I. M. rendelet 98. §.) Ily összemérések a természetben is megvizsgálandók.

A felmérési felügyelőség azon határozatához, hogy a tagositás vagy urbéri elkülönités, vagy arányosításhoz új felmérés szükséges-e, avagy a meglevő kataszteri térkép, vagy más régebbi felvétel szolgáljon alapul mint felmérési térkép, földmérő alkalmazkodni tartozik.

Új felmérés esetén az egész térkép fekete tussal szerkesztendő, ha pedig kataszteri térkép vagy más régi felvétel használtatik fel, az időközben előállott változások és a telekkönyvi számok zöld színnel vezetendők a térképre. A hitelesítő kataszteri mérnök vizsgálata alapján eszközölt helyesbítések ugy a felmérési mint a kiosztási munkálat vizsgálása vagy hitelesítésekor vörös színnel eszközlendők, úgy a térképen, mint az irásbeli munkálatokban.

Ugyancsak veres szinnel lesznek a mért vizsgálati vonalak a térképen szakgatott

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

vonallal berajzolva és minden vonalnál a mérés végösszege bejegyezve, úgy a felvételi, mint a kiosztási térképen.

Azon esetben, ha földmérő a kiegészítő munkálatokat is teljesíti, különös figyelem fordítandó a belsőség és a többi, kicserélés alá nem eső területek megvizsgálására is úgy a felmérés, mint az azonosítás szempontjából, valamint a kataszteri szabályok szempontjából, mert ezen munkarészek változatlanul lesznek a kiosztási munkálatokba átvéve.

Arra is kiterjeszti figyelmét a hitelesítő kataszteri mérnök, hogy a művelési ágak, vízfolyások, vízmosások, partszakadások, hegygerincek, stb. egyéb esetek, melyek vagy a becslésre, vagy a tagok elhelyezésére befolyással lehetnek, felmérettek és kirajzoltattak-e?

A részleges háromszögelés alkalmával meghatározott főbb pontok, melyekre a kiosztásnál előreláthatólag szükség lehet, tartósan megjelölendők, esetleg állandósítandók, nehogy a kiosztásig megsemmisüljenek.

Olyan esetben, mikor a rendezés tárgyát képező területről nem kataszteri, hanem idegen, régibb felvételi térkép áll rendelkezésre, és használhatóságának megvizsgálása végett kataszteri mérnök kiküldetik, a térkép helyessége szigorúan megvizsgálandó, s miután a cél az, hogy minden birtokrendezésről a kataszter céljaira használható munkarészeket nyerjünk, az is szem előtt tartandó, hogy az új munkálat a kataszteri szelvénybeosztásnak megfelelően legyen elkészíthető.

A megvizsgált szelvények száma, ha nem az egész község képezte vizsgálat tárgyát, valamint a külön, vizsgálatot képező esetek, pl. a vasuti térkép és területi kimutatás adatainak ellenőrzése, valamint a talált eltérések és hibák mindenike hibaívbe foglalva, földmérőnek átadandó, hogy azokat, ha nem sok időt igényelnek, azonnal javítsa ki, mert a térkép a helyesbítés előtt záradékkal és aláírással el nem látható. Ha pedig a helyesbítés hosszabb időt igényel, földmérő utasítandó, hogy a hibás munkarészt bizonyos idő alatt helyesbítse, és az után annak megvizsgálását újra kérje. Vagy ha nem lett a község egész területe megvizsgálva, akkor a hibás munkarészt a folytatólagos vizsgálat idejére helyesbítse.

Miután a vizsgálat eredményéről a felmérési felügyelőség a kir. törvényszéket értesiti, hitelesitő kataszteri mérnök a megejtett vizsgálatra vonatkozó szakvéleményét a felmérési felügyelőségnek nyujtja be, amelyben felsorolandók a hibák természetük szerint csoportosítva, melyek miatt a szelvény záradékkal ellátva nem lett.

A felmérés folytatólagos vizsgálatánál a földmérőnek az előző vizsgálatnál átadott hibaív helyes átvezetése ellenőrizendő.

Úgy a felvételi, mint a kiosztási munkálatok megvizsgálásánál az eszközölt mérések adatai mérési füzetbe bejegyzendők; ezen füzet a felmérési felügyelőségnek a területszámítási jegyzőkönyvhöz csatolva benyújtandó.

Azon háromszögelési pontok, melyek nem esnek a változás alá eső területre, hitelesitő mérnök által már ezen alkalommal bemérendők, és a tereprajz feltüntetésével $^1/_4$-rét nagyságú füzetbe berajzolandók úgy, hogy ennek alapján a háromszögelési pontok helyszínrajzi leírása elkészíthető legyen. Ezen füzet szintén a területszámítási jegyzőkönyvhöz csatolandó és a felmérési felügyelőséghez benyujtandó.

Ha a felvételi munkálat kataszteri térképmásolat alapján készült, a fentiek figyelembevétele mellett még a következők tartandók szem előtt:

A felvételi térkép kiegészítése a helyszínelési szabályoknak megfelelően történik az esetben, ha a község határának helyszínelése kataszteri célokra még nem eszközöltetett; ha a község határa már helyszineltetett, vagy ha a kataszteri munkálatok a betétszerkesztés

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

céljaira előkészíttettek, avagy ha a községről közforgalomnak átadott telekkönyvi betétek vannak, a nyilvántartási szabályoknak megfelelően.

Helyszinelési eljárás esetére úgy a tagosítandó, mint a kiegészítés tárgyát képező területen történt birtokosztások, művelési ág változások bemérendők és térképezendők, megszünt mesgyék és művelési ágak törlendők, hibás felvétel kiigazítandó. Mesgye eltolódások, ha azok elszántásból erednek, figyelembe nem vétetnek. Útépítések, csatornák létesítése, folyók szabályozása, vagy bárminő hasontermészetű birtoktesteket vagy birtokhatárokat érintő állandó jellegű változás a térképen is helyesbítendő.

A helyszínelés leghelyesebben akként hajtandó végre, hogy a kataszteri térképről a földmérő által készített másolat segélyével a féligmeddig szabályos alakú dülők közötti párhuzamos birtokrészletek egyik vége 150—200 ölnél nem hosszabb méretekkel acélszalaggal folytatólagosan megméretik, s e közben a felfedezett birtokmegosztások művelési ág változások beméretnek és a tényleges birtokosok nevei a másolatba bejegyeztetnek. Ez által elértük azt, hogy az osztások, művelési ág változások és főképen a birtokos iktatások a tényleges állapottal mindenben megegyezők lettek. Ugyancsak akkor eszközli földmérő az azonosítást is künn a helyszinén a részletlajstrom segélyével (amelyben már a telekkönyvi részletszámok sorrendben és a telekkönyvi tulajdonosok nevei is bejegyezve vannak) megállapítja, hogy melyik részletnek melyik telekkönvi helyrajzi szám felel meg.

Ha földmérő a szabályos alakú részleteknek csak egyik végét mérte, hitelesitő mérnök ezen méreteknek legalább egy részét az irodában a térképpel egyeztesse össze, hogy földmérő eljárásának helyességéről meggyőződést szerezzen, a helyszinén pedig a vizsgálati méreteket lehetőleg ott eszközölje, ahol földmérő nem mért, mert így több mesgye megosztásra vagy kihagyott művelési ág változásra akadhat, valamint a birtokos iktatások helyességét is legbiztosabban ellenőrizheti.

Rendetlenebb alakú birtokrészleteknél többé-kevésbbé hasonló eljárás követendő, kivéve a folytatólagos hosszmérést. Az egész terület részletről-részletre bejárandó a birtokosok nevei beirandók, az egyes birtokmegosztások művelési ág változások biztos alappontok között bemérendők.

Nagyobb mérvű változások vagy birtokosztások esetén az illető szelvénylap táblára feszítése mellett a kérdéses terület graphicus, vagy számszerű háromszögelési úton meghatározandó és a változások eme pontok között bemérendők. Magától értetődvén, hogy ezen új pontok a csatlakozó régibb pontokkal összhangba hozandók.

Nagyobb házcsoportok, kiterjedtebb osztások, uradalmi birtokban történt ujabb gazdasági beosztások, folyók, patakok által okozott változások, vasútak, csatornázások felmérése azonban mindenkor sokszögelés vagy táblára feszített lapon rajzi, vagy számszerű háromszögelés, cövekelés és ezek közötti bemérés alapján hajtandó végre.

Ha részletek határai nem változtak, a kataszteri terület megtartandó. Változás esetén a területek kiegyenlítendők, illetve kisebb, változatlan határú csoportok összterületére állítandók.

A nyilvántartás szabályai szerint lesznek a változások elkészítve azon községek munkálatainál, melyeknél a helyszínelés már megtörtént, vagy ahol a kataszteri munkálatok a telekkönyvi betét részére előkészíttettek, vagy ahol a telekkönyvi betétek a közforgalomnak már átadattak. Ezen változások átvezetése kiterjed nemcsak a birtokmegosztások eseteire, hanem az esetleges eredeti felmérési hibák és művelési ág változások helyesbítésére is.

Bemérendők tehát mindazon birtokmegosztások, melyek telekkönyvi elintézést már nyertek, de térképezve még nincsenek. Úgyszintén az oly megosztások, melyek telekkönyvi

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

elintézést még nem nyertek. Végül különös gonddal bemérendők azon, a térképen szakgatott volnallal feltüntetett megosztások, melyek a természetben tényleg megosztva vannak, de térképi elintézést tényleges bemérés alapján még nem nyertek.

Tehát a betétes község egész területe részletről-részletre bejárandó, és az arra alkalmas részletek egyik végükön 150—200 öl hosszúságban folytatólagosan megmérendők, s ugyanakkor a birtokosok nevei is a térképmásolatra bejegyzendők a tényleges birtoklások megállapítása végett. A birtokosztások és művelési ág változások a meglevő telekkönyvi helyrajzi számok aláosztásával számoztatnak. A részletekben előálló változások a térképen zöld színnel eszközlendők. A részletszámok aláosztása pedig feketével (mert itt nincs kétféle részletszámozás).

Nagyobb változások, mint belsőség növekedése, korábbi birtokrendezések okozta változások, uradalmi területeken gazdasági beosztás megváltoztatása, patakok, folyóvizek által létrejött nagyobbmérvű új alakulások, sokszögelési vagy részletes háromszögelési alapon mérendők fel és egészítendők ki a térképen. Itt is, mint a helyszinelésnél, ha a félmértékű részletes háromszögelés a régi háromszögelési pontok hiányában nem lenne eszközölhető, úgy az illető terület sürgős háromszögelése a felmérési felügyelőségtől esetleg kérhető.

Ezen változott részletek területeinek kimutatása a felmérési munkálatokhoz az irodai vizsgálatra való beküldés idejére a nyilvántartás részére kiadott „Eljárási utasításban“ meghatározott Változási jegyzékbe foglalva csatolandó. A felvételi földkönyvben ezen részletek a változási jegyzékben feltüntetett területtel fordulnak elő „A földrészlet területe“ rovatban.

Ha földmérő a kiegészítő munkálatokat is végezi és a belsőségben nincs változás, figyelme már itt felhívandó arra, hogy a kiosztási munkálatokban levő részletszámozást változatlanul vegye át.

Ha határváltozás folytán a község összterülete megváltozik, úgy ez feltüntetendő a változási jegyzékben. Az ellenőrzési területszámításban pedig úgy a határváltozás, mint egyéb dülő, vagy számítási csoportváltozás helyesbitendő.

A felmérési munkálat vizsgálása nemcsak a változott, de a nem változott részletekre is kiterjed annak ellenőrzése céljából, hogy az esetleges mérési hibák kiküszöböltettek-e, a művelési ág változások bemérettek-e, főképen pedig hogy a birtokiktatás a telekkönyvi állapotnak és a tényleges birtoklásnak megfelelően eszközöltetett-e.

A térképek vizsgálatát megelőzőleg megvizsgálandó az azonosítási jegyzék is, hogy meggyőződés szereztessék arról, vajjon a telekkönyvi hatóságtól áttett végzések szabályszerűen átvezetve lettek-e. Úgy ez esetben, valamint mindazon esetekben, amikor a földmérő az azonosítási jegyzéket és térképet a felmérés megvizsgálása után a 30/909. I. M. rendelet 78. §-a értelmében megváltoztatta, tartozik az azonosítási jegyzék „Jegyzet“ rovatában az illető végzés számára hivatkozni.

A felvétel vizsgálata és a háromszögelési pontok bemérése alkalmával felmerült fuvar- és napszámos-költségeket hitelesítő kataszteri mérnök a vett előlegből kifizeti és a napszámosok által aláirt s a községi előljáróság által láttamozott nyugták alapján az igy felmerült költségeket uti számlájában elszámolja.

Felvételi munkálatok hitelesítése.

A felvételi munkálat hitelesítésénél szem előtt tartandó :

Arányosítás és urbéri elkülönítésnél az 1000 kataszteri holdon aluli terület felmérésének vizsgálása annak hitelesítésével egyidejűleg történhet.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ha az arányosítandó terület több község tulajdonát képezi, azok egymástól minden esetben községenkint külön elkülönítendők és a munkarészek községenkint külön készítendők. Ez utóbbi akkor is szem előtt tartandó, ha egy község tulajdonát képező terület több község határában fekszik.

A vizsgálat egyébként olyan, mint a tagosításnál.

Tagosításnál, valamint az 1000 holdat meghaladó arányosítandó vagy elkülönítés tárgyát képező területeknél a 30/909. I. M. rendelet 103. §-a értelmében a hitelesítést mindenkor megelőzi a részletes háromszögelés és felmérés vizsgálása és az annak utána megejtett becslés alapján készült felvételi előmunkálat irodai vizsgálása.

Csakis ezen vizsgálatok után alkalmasnak talált felmérési munkálat képezheti hitelesítés tárgyát. Azért a helyszini hitelesítésnél első sorban megvizsgálandó, vajjon az előző irodai vizsgálat alkalmával lett-e felvéve hibaív, s ha igen, az abban foglaltak helyesbítve lettek-e? Ha nem, úgy első sorban a feljegyzett hiányok és eltérések pótolandók.

Ezek megtörténte után vizsgálandók meg műszaki szempontból a felszólalások, melyek eljáró biró által jegyzékbe foglalva véleményezés végett hitelesítő kataszteri mérnöknek kiadatnak.

Ezen felszólalások a telekkönyvi állapot és a ténylegesség figyelembe vétele mellett intézendők el. Ha a terület ellen adatott be a felszólalás, az illető részlet felmérése és azonosítása megvizsgálandó. A szakvéleményben az összes elintézésre vonatkozó adatok felsorolandók és pedig birtokív- és helyrajzi-szám, művelési ág, régi és helyesbített terület a tényállásnak megfelelően.

A szakvéleményben felsorolt hibák és eltérések az eljáró biró által elrendelt helyesbítés után az összes munkálatokban vörös tintával helyesbítendők, kivéve azon oldalösszegezéseket, ahol a becsértékből való megkülönböztetés végett a terület feketével, a becsérték vörössel helyesbítendő.

Egyéb eset a felszólalásokon kivül vizsgálat tárgyát nem képezi, kivéve, ha hitelesítő kataszteri mérnök nyilvánvaló hibákat fedez fel. Akkor ezeknek helyesbítését is véleményezi.

Ha az elrendelt változások az összes munkálatokban átvezettettek és a munkarészek egymással teljesen megegyeznek, a felvételi térkép, földkönyv, birtokív és összesítés hitelesítési záradékkal ellátandó és eljáró biró és hitelesítő kataszteri mérnök által aláirandó.

Kiosztási munkálatok helyszíni megvizsgálása és hitelesítése.

A kiosztási munkálat helyszíni vizsgálása a korábban eszközölt irodai vizsgálat alkalmával felvett hibaív átvezetésének megvizsgálásával és az itélet vagy egyezség áttanulmányozásával veszi kezdetét.

Ezek után az eljáró bírótól átvett jegyzék alapján megvizsgálja hitelesítő kataszteri mérnök az irodában a felszólalásokat, minden felszólalásnál beidézi és meghallgatja az összes érdekelt feleket, s úgy ezeknek nyilatkozatait, mint a jegyzőkönyvek adatait jegyzékbe foglalja. Minden felszólalás számát a megfelelő részletre a térképen feljegyzi irónnal, s akár külön, akár a kiosztásnak helyszíni vizsgálata alkalmával útba ejti s a helyszínén is megvizsgálja, ahová érdekelteket is lehetőleg meghívja és nyilatkozataikat meghallgatja. Úgy a tényállás, mint érdekeltek kivánsága mindig azonnal jegyzőkönyvre veendő, sőt lehetőség szerint a felszólalásra adandó vélemény is.

Igén célszerű a vizsgálatnál előforduló minden esetet jegyzékbe venni, hogy sem azoknak elintézése, sem a szakvéleményben való felsorolása ki ne maradjon, mert a

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

elintézést még nem nyertek. Végül különös gonddal bemérendők azon, a térképen szakgatott volnallal feltüntetett megosztások, melyek a természetben tényleg megosztva vannak, de térképi elintézést tényleges bemérés alapján még nem nyertek.

Tehát a betétes község egész területe részletről-részletre bejárandó, és az arra alkalmas részletek egyik végükön 150—200 öl hosszúságban folytatólagosan megmérendők, s ugyanakkor a birtokosok nevei is a térképmásolatra bejegyzendők a tényleges birtoklások megállapítása végett. A birtokosztások és művelési ág változások a meglevő telekkönyvi helyrajzi számok aláosztásával számoztatnak. A részletekben előálló változások a térképen zöld színnel eszközlendők. A részletszámok aláosztása pedig feketével (mert itt nincs kétféle részletszámozás).

Nagyobb változások, mint belsőség növekedése, korábbi birtokrendezések okozta változások, uradalmi területeken gazdasági beosztás megváltoztatása, patakok, folyóvizek által létrejött nagyobbmérvű új alakulások, sokszögelési vagy részletes háromszögelési alapon mérendők fel és egészítendők ki a térképen. Itt is, mint a helyszinelésnél, ha a félmértékű részletes háromszögelés a régi háromszögelési pontok hiányában nem lenne eszközölhető, úgy az illető terület sürgős háromszögelése a felmérési felügyelőségtől esetleg kérhető.

Ezen változott részletek területeinek kimutatása a felmérési munkálatokhoz az irodai vizsgálatra való beküldés idejére a nyilvántartás részére kiadott „Eljárási utasításban“ meghatározott Változási jegyzékbe foglalva csatolandó. A felvételi földkönyvben ezen részletek a változási jegyzékben feltüntetett területtel fordulnak elő „A földrészlet területe“ rovatban.

Ha földmérő a kiegészítő munkálatokat is végezi és a belsőségben nincs változás, figyelme már itt felhívandó arra, hogy a kiosztási munkálatokban levő részletszámozást változatlanul vegye át.

Ha határváltozás folytán a község összterülete megváltozik, úgy ez feltüntetendő a változási jegyzékben. Az ellenőrzési területszámításban pedig úgy a határváltozás, mint egyéb dülő, vagy számítási csoportváltozás helyesbitendő.

A felmérési munkálat vizsgálása nemcsak a változott, de a nem változott részletekre is kiterjed annak ellenőrzése céljából, hogy az esetleges mérési hibák kiküszöböltettek-e, a művelési ág változások bemérettek-e, főképen pedig hogy a birtokiktatás a telekkönyvi állapotnak és a tényleges birtoklásnak megfelelően eszközöltetett-e.

A térképek vizsgálatát megelőzőleg megvizsgálandó az azonosítási jegyzék is, hogy meggyőződés szereztessék arról, vajjon a telekkönyvi hatóságtól áttett végzések szabályszerűen átvezetve lettek-e. Úgy ez esetben, valamint mindazon esetekben, amikor a földmérő az azonosítási jegyzéket és térképet a felmérés megvizsgálása után a 30/909. I. M. rendelet 78. §-a értelmében megváltoztatta, tartozik az azonosítási jegyzék „Jegyzet“ rovatában az illető végzés számára hivatkozni.

A felvétel vizsgálata és a háromszögelési pontok bemérése alkalmával felmerült fuvar- és napszámos-költségeket hitelesítő kataszteri mérnök a vett előlegből kifizeti és a napszámosok által aláirt s a községi előljáróság által láttamozott nyugták alapján az igy felmerült költségeket uti számlájában elszámolja.

Felvételi munkálatok hitelesítése.

A felvételi munkálat hitelesítésénél szem előtt tartandó :

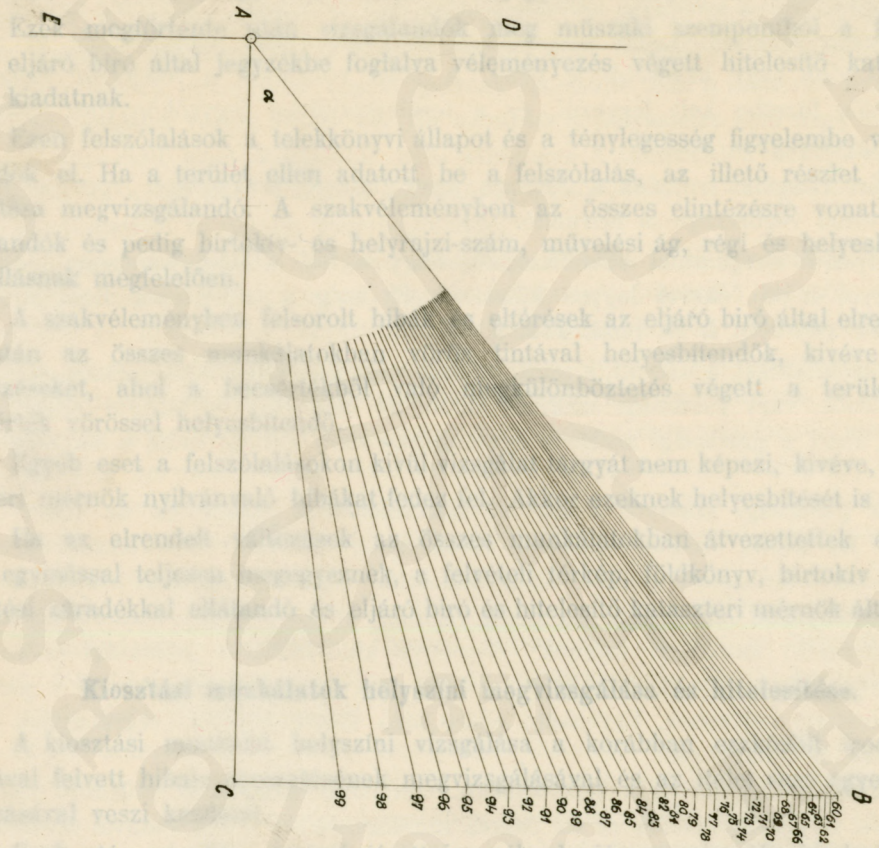
Arányosítás és urbéri elkülönítésnél az 1000 kataszteri holdon aluli terület felmérésének vizsgálása annak hitelesítésével egyidejűleg történhet.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ha az arányosítandó terület több község tulajdonát képezi, azok egymástól minden esetben községenkint külön elkülönítendők és a munkarészek községenkint külön készítendők. Ez utóbbi akkor is szem előtt tartandó, ha egy község tulajdonát képező terület több község határában fekszik.

A vizsgálat egyébként olyan, mint a tagosításnál.

Tagosításnál, valamint az 1000 holdat meghaladó arányosítandó vagy elkülönítés tárgyát képező területeknél a 30/909. I. M. rendelet 103. §-a értelmében a hitelesítést mindenkor megelőzi a részletes háromszögelés és felmérés vizsgálása és az annak utána megejtett becslés alapján készült felvételi előmunkálat irodai vizsgálása.



Úgy a tényállás, mint érdekeltek kívánsága mindig azonnal jegyzőkönyvre veendő, sőt lehetőség szerint a felszólalásra adandó vélemény is.

Igén célszerű a vizsgálatnál előforduló minden esetet jegyzékbe venni, hogy sem azoknak elintézése, sem a szakvéleményben való felsorolása ki ne maradjon, mert a

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

szakvéleményben minden olyan eset, mely elintézés tárgyát képezi, felsorolandó, még ha nem képezte is felszólalás tárgyát.

Az irodai vizsgálat elintézése után következik a helyszíni vizsgálat, mely a kiosztási munkálat első példányán eszközlendő.

E célból a térkép táblára feszítve, asztalállásokkal megvizsgálandó, vajjon az uj dűlő útak, dűlőhatárok, vízlevezető árkok helyesen lettek-e felmérve és térképezve. Ezen vizsgálat számszerű háromszögelés által is eszközölhető. Ez esetben a szükséges pontok a helyszínén előre megjelölendők, s azokról a megfelelő vázrajz szerkesztendő.

Vizsgálati vonalak mérése által meggyőződés szerzendő, vajjon az egyes tagok kijelölése a térképnek és a földkönyvbe bejegyzett hossz- és szélességi adatoknak megfelelően történt-e. Ennek ellenőrízhetése végett lehetőleg derékszög alatti metszetekkel kell az egyes részleteket átmérni.

Vizsgálati vonal lehetőleg minden szelvényben mérendő, s lehetőleg mindig háromszögelési ponthoz kötendő. Egész szelvényben átlag 10 vonal mérendő, de ez a szükséghez képest több vagy kevesebb is lehet. A mért vonalakat a felmérési vizsgálathoz hasonlóan külön füzetbe kell jegyezni, és a területszámítási jegyzőkönyvhöz csatolva a felmérési felügyelőséghez beadni.

A mért vizsgálati vonalak a térképre veres tintával szakadozott vonallal felrajzolandók, s a vonal végösszege is beirandó.

A helyszíni vizsgálatnál ellenőrizendő, hogy a hol a talaj minősége megengedi, minden mesgye, út stb. ekével legyen kihasítva. Ez még a birtokosság hozzájárulásával sem mellőzhető (30/909. I. M. rend. 172. §.)

A felszólalásokat a szerint, a mint műszaki vagy gazdasági természetűek, a hitelesitő kataszteri mérnök, vagy gazdasági szakértő külön, de lehetőleg együttesen vizsgálja meg már azért is, mert a gazdasági szakértő egymagában nem mindig tudja a helyzetet tisztán megitélni.

Ha a gazdasági szakértő külön ad szakvéleményt, akkor ez az eljáró birótól elkérendő és ha abban valahol változást véleményez, és eljáró bíró annak átvezetését elrendeli, hitelesítő kataszteri mérnök ezen átalakítás végrehajtása után előálló állapotot saját szakvéleményében letárgyalja. Ha pedig valamely kérdés mindkét szakértő hatáskörébe tartozik, s hitelesítő kataszteri mérnök véleménye különbözik a gazdasági szakértőétől, akkor ezt a szakvéleménybe beveszi és reá mutat arra is, miért nem tartja a gazdasági szakértő véleményét helyesnek. Egyébként eljáró biró intézkedésének végrehajtása folytán előálló helyzetet is letárgyalja.

A kiosztási vizsgálat és a felszólalások elintézése alkalmával előállott változások a természetben is helyesbítendők és az összes munkarészeken vörös tintával átvezetendők. Minden helyesbítést igénylő eset egyszersmind szakvéleménybe foglalandó, hogy a hitelesítő tudta és hozzájárulása nélkül eszközölt bármiféle javítás vagy változás megkülönböztethető legyen.

Ha a hitelesítő kataszteri mérnök szakvéleménye alapján a munkálatot eljáró biró hitelesíthetőnek találja, úgy mindhárom példányú térképet, földkönyvet, birtokíveket és azoknak összesítését hitelesítési záradékkal látja el, melyet eljáró biró, hitelesítő kataszteri mérnök és gazdasági szakértő irnak alá.

Ezen aláirást megelőzőleg azonban az összes változások keresztül legyenek vezetve a munkálatokban, azok egymással tökéletesen egyezzenek, és azután a másod- és harmadpéldányokon is átvezettessenek.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Bár az összehasonlító okirat nem lesz aláírva, az összes változások annak *A.* és *B.* lapján is átvezetendők, hogy az a birtoknak mindig hű képét adja. Itt azonban a terület fekete, a becsérték veres tintával irandó.

Ha a másod- és harmad-példány valamely oknál fogva nem készült el, annak elkészülte után az a felmérési felügyelőséghez beküldendő s a megejtett szabályszerű átvizsgálás után lesz aláirandó.

Ha a kiosztási munkálatoknak oly nagy mérvű átalakítása vagy helyesbítése szükséges, hogy az jelentékenyen hosszú időt vesz igénybe, hitelesítő kataszteri mérnök a hitelesítésnek bizonyos időre való elhalasztását véleményezi.

Hitelesítő kataszteri mérnöknek és gazdasági szakértőnek akkor is véleményt kell adni az összes felszólalásokra, ha az esetleg szükséges átdolgozásokat földmérő a helyesbítésekkel együtt eszközli.

Ha ezen változások a munkálatok oly nagy mérvű átalakítását vonnák maguk után, hogy azoknak a munkálatokban való átvizsgálása hosszabb időt igényelne, hitelesítő kataszteri mérnök szakvéleményébe foglalja azt is, hogy földmérő a munkálatokat a helyesbítések átvezetésének ellenőrzése végett azoknak elkészülte után a felmérési felügyelőséghez ujabb irodai vizsgálat végett küldje be. Ha azonban a helyesbítés nem nagy mérvű, hanem azt néhány nap alatt lehet átvizsgálni, nem szükséges a munkálatok beküldése iránt intézkedni, hanem az a helyszíni vizsgálat alkalmával eszközölhető. A helyesbítések foganatosítása a természetben is mindig megvizsgálandó.

A hitelesítés folyamán földmérő bemutatja 30/909. I. M. rendelet 176. §-a alapján készített új határleirási jegyzőkönyvet. Ennek helyességét hitelesítő mérnök ellenőrzi, azt az eljáró biró és földmérővel együtt minden csatlakozó község határvonalának lezárása után aláirja, és az eredeti példánynyal egybefüzve a kiosztási munkálatokhoz csatolja.

A kiosztási munkálatok hitelesítése után hitelesítő kataszteri mérnök az előmunkálatok vizsgálásakor be nem mért háromszögelési pontokat a helyszínén természetes méretek alapján bemérési, esetleg ha ezen pontok közül valamelyik az új kiosztás folytán egy tag közepébe vagy a mesgye közelébe esik, hitelesítő kataszteri mérnök által áthelyezendő a mesgye vonalra, útszélre vagy más alkalmasabb helyre, lehetőleg más háromszögméreti pont irányában.

Az áthelyezett pontok bemérése a legnagyobb pontossággal úgy eszközlendő, hogy ezen méretek alapján az áthelyezett pontok összrendezői kiszámíthatók legyenek.

Az állandósítási jegyzékbe a pontok helyszínrajzi leirása és helyszíni vázlata az 1904. évi felmérési utasítás szabályai szerint bevezetendők, illetve berajzolandók és a méretek vörös tintával bevezetendők.

Olyan állandósított pontok, amelyeknek helyszínrajza bemérés vagy áthelyezés után már többé nem helyesbíthető anélkül, hogy a rajz érthetetlenné ne válna, a pont teljes leírása, ha arra ugyanazon jegyzékben az utolsó pont után hely van abban, ha pedig arra alkalmas hely nem lenne, külön jegyzékbe foglalandó s helyszínrajzzal ellátandó; az eredeti leirás és rajz pedig veressel áthuzandó azzal, lásd hátul az n számú pont leirása után, vagy lásd külön ívet.

Az így szerkesztett külön helyszínrajzi leirás az eredeti leiráshoz csatolandó.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

B.

Eljárás kiosztási munkálatok elkészítésénél.

Összeállította a 21. és 22. m. kir. felmérési felügyelőség.

Az előmunkálatok befejezése után a munkálat sorrendje szerint következik a birtokváltozások (birtoktisztázás) felvétele.

Mielőtt földmérő a birtokváltozások felvételét megkezdi, szükséges a telekkönyvi másolatot a telekkönyvben előállított változások miatt helyesbíteni azért, mert a földmérő egyrészt nem kap meg biztosan minden telekkönyvi végzést, másrészt sok esetben ezen végzésekben nem lehet mindent jól elolvasni, s e miatt hiba támadhat, mig a kiigazításnál földmérő mindent pontosan tud helyesbíteni. A helyesbítés után arról betűsorost készít, úgy hogy cédulára kiir minden nevet, ahol valaki társbirtokos, azt a cédulát megjelöli, pl. +-el, s betűrend szerint sorozza és leirja az 1. számú minta szerint, az abban feltüntetett adatokkal.

1. számú minta.

A tulajdonos neve	Jelzése	Ház-száma	Lakhelye	Gyüjtő birtokíve	Saját birtokíve	Közös birtokíve

A birtoktisztázásnál a birtokosokat egyenkint vagy házszám, vagy ívszám szerint fel kell hívni, s megállapítani, hogy a birtokívben meg van-e minden egyes részlete. Minden részletet a birtokosnak a térképmásolaton meg kell mutatni, szomszédosítani és számított területét vele közölni, hogy tudja, melyikről van szó és az nincs-e esetleg tévesen felmérve?

Ugyanazt a külbirtokosokkal is pontosan le kell tárgyalni, és minden alkalommal beirni, ki hova való lakos.

Lehet bázszám sorrendjében is letárgyalni a birtokváltozásokat, s arról a 2. számú minta szerint jegyzéket vezetni, ahol egy házszám alatt le van tárgyalva: a férj, férj és neje, vagy a neje birtoka külön, vagy mint összetartozó birtok és esetleg ugyanazon házszám alatti fiu vagy más birtok. Ennek előnye az, hogy az összetartozó birtok egyidejüleg lesz letárgyalva, és már itt be lehet jegyezni, kinek tagja milyen sorrendben legyen egymás mellett kiadva.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

2. számú minta.

Ház-szám		Helyrajzi szám	A birtokos neve	Birtokív száma gyűjtőív	Jegyzet

Ha a birtokívekből valamely részlet más birtokívbe megy át, a birtokívek észrevételek rovatába beirandó: mi alapon, melyik ívnek, mely névre és a vonatkozó *J. M.* rendeletek melyik §. szerint megy el. Amelyik részlet ott marad, arra is ráirandó, hogy marad. Ily eljárás mellett elintézetlen részlet nem maradhat.

Ugyanakkor összeirandó, hogy mely íveket és melyik birtokívben kell egyesíteni s a közös ívből kit mennyi illet meg, hogy illetményét mindenkinek saját ívébe lehessen átvinni, s hogy mely íveket lehet, vagy kell egymás mellé helyezni. Pl. férj, feleség; és férj és feleség (ez középre) mindig egymás mellé teendő, vagy más családtag, ha kivánja, s hogy milyen címen és ki mellé kivánja az elhelyezést: a birtokívbe mindig bejegyzendő.

Ezen adatokról igen célszerű a 3. minta szerinti nyomtatványon a birtokosnak ott mindjárt jegyzéket adni, amelyen áll a neve, a gyűjtőív száma, a többi ívben levő részlete is beirandó a megfelelő osztályrovatba, (az osztályszám a becsértékkel is feltüntetendő.) Így mindig tudja az illető birtokos, hogy mely részleteket kapta meg, milyen osztályú, mennyi a becse. Ez a kiosztásnál is nagy tájékozódására és megnyugtatására szolgál, s földmérőt felesleges kérdezősködéssel nem zaklatja.

Ha a birtokívek mind levannak tárgyalva, a változott részletekről külön jegyzék készítendő, s mint birtokváltozási jegyzék, az eljáró bíró aláírásával földmérőnek lesz kiadva.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

3. számú minta.

Kolozsvár szab. kir. város határának általános tagosítási ügyében eszközölt birtokosztozás utáni birtok-kimutatás.

A birtokos neve .... lakása ....
kerület ....
utca ....
házszám ....
gyűjtő birtokív száma ....

Birtokív száma	Helyrajzi szám	A dülő száma	Kicserélés tárgyát nem képező terület		Szántó			Kaszáló			Legelő			Temékettlen	
			hold	□-öl	hold	□-öl	osztálya	hold	□-öl	osztálya	hold	□-öl	osztálya	hold	□-öl

Dülők kimutatása:

5. Borjumál és Fellegvár megett
6. Nádas innenső melléke
7. Nádas tulsó melléke
8. Tuzokmál és aszupatak között
9. Asszúpatak
10. Asszúpatak mellett
11. Asszúpatak felett
12. Tuzokmál
13. Csere alatt
14. Hegyes domb
15. Csatorna
16. Bietfű
17. Lomb
18. Nádas tere
19. Bietfű és Nádas tere
20. Kajántói völgy innenső oldala, I. rész.

Becsosztályok átnézete:

Szántó 1. osztályból 900 □-öl = 1 becs. hold
Szántó 2. osztályból 1000 □-öl = 1 becs. hold
Kaszáló 1. osztályból 1000 □-öl = 1 becs. hold
Szántó 3. osztályból 1200 □-öl = 1 becs. hold
Kaszáló 2. osztályból 1200 □-öl = 1 becs. hold
Szántó 4. osztályból 1600 □-öl = 1 becs. hold
Kaszáló 3. osztályból 1600 □-öl = 1 becs. hold
Szántó 5. osztályból 2000 □-öl = 1 becs. hold
Kaszáló 4. osztályból 2000 □-öl = 1 becs. hold
Szántó 6. osztályból 3200 □-öl = 1 becs. hold
Kaszáló 5. osztályból 3800 □-öl = 1 becs. hold
Legelő 1. osztályból 6000 □-öl = 1 becs. hold
Legelő 2. osztályból 10000 □-öl = 1 becs. hold
Legelő 3. osztályból 24000 □-öl = 1 becs. hold

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

A helyesbített telekkönyvi másolat adatai szerint helyesbítendő a statusquo birtokívekben a tulajdonos neve, de csak ironnal és odajegyzendő a végzés száma is. Erről készül a Combinatórium *A.* oldalán a birtokívek számsorrendjében a birtokosok neve, hol az eredeti állapot mindig feketével irandó, az irónnal történt helyesbítés pedig, veres tintával, utalva a végzés számára. Ugyanakkor beirandó a birtokívben levő terület és becsösszege az utóbbi veres tintával, és az ívszám előtt irónnal az egyesítendő ívek száma. Ezzel egyidejüleg a birtokváltozásnál bejegyzett és elviendő részleteket a Combinatórium *A.* oldalának apadás rovatába be kell vezetni.

Mikor így az összes íveken átment, akkor az apadás rovatot a Combinatórium végén főösszegezi egészen, és azután elölről kezdve minden elvitt részletet bevezet az illető birtokívben a növekedés rovatba, azokat is összegezi és a végén főösszegezi és összehasonlítja az apadás rovatával, s ha a két összeg talál, a munka jó, ha nem egyezik, meg kell a hibát keresni.

Ezután *előkészíti az elhelyezkedést* az elhelyezkedési tárgyalás előtt.

Nagyon gyorsítja és tiszta áttekintést nyújt ennek elvégzésénél, ha földmérő már előzőleg dülőnkint jegyzékbe szedi a tagosítás alá nem eső és nem osztályozott részleteket, az osztályozott, de valamely okból kicserélés alól kiveendő részleteket. Ő maga előre nagyjából megjelöli a közhelyekre, (temető, faiskola, dögtér, csatorna, utak, itatók, agyaggödör stb.) legelőre vagy erdőre stb. alkalmas helyeket, hogy az 50 becsholdon felüli nagybirtokosokat hol legcélszerűbb elhelyezni s mekkora helyet foglal el. Az összes külbirtokosokat pontosan összeszedi, községenkint külön megállapítja iletményüket és hogy hol, mennyi helyet fog elfoglalni, stb. Szóval előre tanulmányoz minden kérdést, ami az elhelyezkedésnél szóba jöhet, hogy előre fogalma legyen arról, hogyan lehet vagy nem lehet és minél célszerűebben az elhelyezkedést megcsinálni.

Ezután következik az elhelyezkedési vagyis *érdemleges tárgyalás.* Ezen tárgyaláson vagy létrejön az egyezség az elhelyezkedésre nézve, vagy ha ez nem sikerül, az eljáró biró utasítja földmérőt, hogy a tárgyalás folyamán előadottak figyelembe vételével földmérő *tervjavaslatot* készítsen az elhelyezkedésre nézve. Ebben feltétlenül betartja azokat a kérdéseket, melyekre az érdemleges tárgyaláson megegyezés jött létre s ezt nem is kell indokolnia. Amire nézve megegyezés nem jött létre, ott az érdemleges tárgyaláson felhozott érvek alapján készíti az elhelyezést, mindig figyelembe véve a sulyosabb okokat s azt indokolja is, kit miért helyez el valahova, miért nagyobb annak érdeke, hogy oda helyeztessék, mint másnak, aki szintén oda kérte uj tagjának az elhelyezését. Szóval érvel mellette és ellene.

Ezeket a térképen közelítőleg kiszámítja és az átnézeti vázrajzra berajzolja. Erről a törvényszék itéletet hoz.

Ha pedig létre jön az egyezség, még ott az érdemleges tárgyaláson bejegyzi földmérő az átnézeti vázrajzba a tagok elhelyezését és lehetőleg a közhelyek helyét is.

Az egyezség vagy itélet jogerőre emelkedése után következik az *úthálózat* megállapitása. Az érdemleges tárgyaláson erre a célra kijelölt bizottsággal földmérő a határt bejárja s megállapitják az utak és egyéb közhelyek elhelyezését és hogy szükséges-e valahol erdő vagy legelő szélének szabályozása stb. Földmérő a becslési vázrajzon már akkor jelzi, hogy a terepviszonyok miatt a tagokat hogyan célszerű elhelyezni, hogy ne menjenek hegynek fel, hogy nagyon hosszuak s e miatt keskenyek ne legyenek stb. Ezen utakat s az esetleg kijelölt dülővégeket rajzi háromszögeléssel vagy számszerű háromszögelés és sokszögelési eljárással felméri és térképezi.

Ezek megállapitása után következik a *tervezés.* Itt földmérő a tagosítandó egész határt főcsoportokra, vagy dülőkre osztja. Különösen a dülőutak közé eső területeket

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

mindig külön kiszámítja területre és becsre. Arról magának jegyzéket csinál a 4. számú minta szerint, amelyben feltünteti a kataszteri területet és becsosztályt. Ha egy vagy több dülő önmagában lesz tagosítva, azokat egyenkint kimutatja és ráállítja az egész határ területére és becsértékére.

Rávezeti a térképre a kijelölt és bemért utakat és egyéb közhelyeket, azoknak területét és becsét előre kiszámítja és azt magának külön feljegyzi, hogy később ne kelljen ujra számítani. Akkor azoknak becsértékét a combinatoriumban az egyes ívekből a birtok arányában levonásba hozza. Lehetőleg valamivel több vonandó le, hogy maradjon valami felesleg esetleges kártalanitásra, ha pl. valahol az osztályozás óta földcsuszamlás, vízmosás stb. keletkezett, minek folytán az uj birtokost kártalanítani kell. Ha pedig pl. a vízmosás nagyobb területet tesz ki, azt még tervezés előtt beméri s esetleg ennek fedezésére szükséges becsértéket is levonásba hozza a többi birtokostól, hogy ne egy-két birtokost érjen az egész károsodás. Éppen azért ezen területet a jobb minőségű helyen kell kiadni a község neve alatt.

Ezek után a combinatorium *A.* oldala lezárandó. Azután az egyes dülők az utak vagy más taghatárok között aldülőkre vagy kisebb csoportokra lesznek osztva lehetőleg úgy, hogy tervezéskor azt ellenőrzésre lehessen felhasználni. Az utakra, közhelyekre eső becset és területet külön kell kimutatni és az egészet állítani a főcsoport-kimutatásban levő területre. Ez az 5. sz. minta.

4. számú minta.

Sorszám	A csoport megnevezése	Szelvény-szám	Összesen		I. Sz. 1. 800		II. Sz.2. K.1. 1000		III. Sz.3. K.2. 1200		IV. Sz.4. K.3. 1600		V. Sz.5. K.4. 2000		VI. Sz. 6. 3200		VII. K. 5. 3800		T	
			h.	□-öl	h.	□-öl	h.	□-öl	h.	□-öl	h.	□-öl	h.	□-öl	h.	□-öl	h.	□-öl	h.	□-öl
1	Kicserélés tárgyát nem képező és tagositás alól kiv. ter. stb-																			
2	Borgumál és fellegvár mögötti határrész																			
3	Nádas melléke																			
4	Berek																			
5	Kölesföld																			
6	Kövespad																			
7	Békás																			

5. számú minta.

Csoportszámitás.

Csoport-szám	Dülő neve	Szelvény-szám	Összesen		I. Sz. 1. 800		II. Sz.2. K.1. 1000		III. Sz.3. K.2. 1200		IV. Sz.4. K.3. 1600		V. Sz.5. K.4. 2000		VI. Sz. 6. 3200		VII. K. 5. 3800		T	
			h	□-öl	h.	□-öl	h.	□-öl	h.	□-öl	h.	□-öl	h.	□-öl	h.	□-öl	h.	□-öl	h.	□-öl

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ezen eljárásnál szigoruan ügyelni kell arra, hogy a főcsoportok megállapításánál lehet ugyan a földkönyv területi és becsadatait elfogadni és a hozzá-, vagy a levágást ezzel kiegészíteni, az alcsoportnak azonban minden darabját osztályszámítás alapján kell megállapítani, figyelembe véve a papirbeszáradást, mert csak igy lehet rájönni arra, ha akár a csoportok megállapításánál, akár a statusquo részletek számításánál valami hiba történt a bécsérték számításában.

Számítási hibánál, ha a tervezésnél rájönnek, a különbözet kiegyenlítése a combinatorium *A.* oldalán apadás és növekedéssel egyenlítendő ki az illető ívekben. Ugyanigy egyenlítendő ki az utólag osztályozott részletek folytán előálló értékkülönbség, vagy ha érdekeltek valamely terület becsértékét közös megegyezéssel többnek vagy kevesebbnek állapítják meg egymás között, pl. harmadik osztályu területet elfogadnak első osztály értékben. Mindezen esetek a combinatorium végén az összegezés lezárása után, ív és helyrajzi szám megjelölésével és indokolással az *A.* oldalon esetenkint felsorolandók s a *B.* oldal is ezzel egyeztetendő.

Ezek után összeállítja a határbeli főbirtokcsoportokat, a 6. sz. minta szerint. Külön az 50 becsholdon felüli birtokosok, az 50 becsholdon aluliak, községenkint a külbirtokosok, fordulások, 1 tagos kisbirtokosok, közhelyek, legelők stb. csoport szerint, s ennek összegét ellenőrzi a község összterületével. A tervezésnél minden birtokcsoportot külön jegyzéken vezet a 7. és 8. sz. minta szerint. Az egyes birtokosokat azon kimutatja és a végén összegezvén, ellenőrzi a főbirtokcsoporton levő birtokcsoport összegével.

6. számú minta.

Kolozsvár határbeli illetmények összesitése.

A kimutatás		Összes illetmény	Tagositás alól kivett terület	Sánc-oldal		Nádas-mellék		Berek		Kölesföld		Köves-pad		Egyéb		Kerület
száma	neve			illetmény	kiadatott	illetmény	kiadatott	illetmény	kiadatott	illetmény	kiadatott	illetmény	kiadatott	illetmény	kiadatott	
	50 holdon felüli birtokosok															
	50 holdon aluli birtokosok															
	Papfalvi birtokosok															
	Kajántói birtokosok															
	Fejérdi birtokosok															
	Bácsi birtokosok															

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

7. számú minta.

Kolozsvári 50 holdon felüli birtokosok illetményeinek kimutatása.

A birtokos			Összes illetmény	Tagosítás alól kivett terület	Sáncoldal		Nádasmellék		Berek		Kölesföld		Egyéb		Kerület	Jegyzet
birtokív-száma	neve	lakása			illetmény	kiadatott	illetmény	kiadatott	illetmény	kiadatott	illetmény	kiadatott	illetmény	kiadatott		
2661	Albert Dénes kn. Szigeti Berta	Postakert	4·793													77·079
4685	Albert Dénes és neje Szigeti Berta	„	72·286													

8. számú minta.

Kolozsvári 50 holdon alóli birtokosok illetményeinek kimutatása.

A birtokos			Összes illetmény	Tagosítás alól kivett terület	Sáncoldal		Nádas mellék		Berek		Kölesföld		Egyéb		Kerület	Jegyzet
birtokív-száma	neve	lakása			illetmény	kiadatott	illetmény	kiadatott	illetmény	kiadatott	illetmény	kiadatott	illetmény	kiadatott		

Tervezésnél először kitervezendő minden részlet, mely az itéletben elhelyezést nyert. Ezeknek számítása a 9. sz. mintán történik, és ha egy tag ki van tervezve, arról annak adatait bevezeti a 10. számú minta szerint kezelendő dülőkimutatásba, a dülő ellenőrzésére és a 7. és 8. számú mintába az illető birtokcsoport ellenőrzése végett, de ide csak az egyes tagok összegét.

A nagybirtokosok tagjának tervezésénél ki kell számítani az egyes osztályokat egyenkint és a földkönyv adatait csak a számítás ellenőrzésére lehet használni azért, hogy a status quoban esetleg előforduló számítási hiba felfedezhető legyen.

Mikor minden egyes tag, mely külön elhelyezést nyert, ki van tervezve, lehet osztani a többit lehetőleg a megállapodás értelmében. A fordulós birtokosoknál rendesen

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

megmondja az egyezség, hogyan, milyen feltételek mellett legyenek kiadva, melyik fordulóban legyen a faluhoz közel a kisebb, melyikben a nagyobb birtokos.

Összetartozó birtoknak csak a férj és feleség közös, vagy külön birtoka vehető, vagy ha bejelentik, a fiué is, mely a birtok nagyságára irányadó. Távolabbi rokonság mindig külön birtoknak számítandó és a fordulósok közül az oda, vagy oda nem tartozókat csak akkor lehet ki- vagy bevenni, ha erről az egyezség vagy itélet rendelkezik.

9. sz. minta

Tervezési jegyzék.

Összesen	I. Sz. 1. 400	II. Sz. 2. 600	III. Sz. 3. 800	IV. Sz. 4. K. 1. 1000	V. Sz. 5. K. 6. 1200	VI. Sz. 6. K. 3. 1600	VII. Sz. 7. K. 4. 2000	VIII. Sz. 8. 3200	IX. K. 5. 3800	X. Sz. 9. K. 6. 5000	XI. Sz. 10. K. 1. 6000	XII. L. 2. 10000	XIII. L. 3. 24000	T.

10. sz. minta.

Kolozsvári tervezési füzet (kövespusztai tagokra) vonatkozólag.

Birtokiv száma	A birtokos neve	szelvény	düllő	Cs. szám	Összesen		I. Sz. 1. 800		II. Sz. 2. K. 1. 1000		III. Sz. 3. K. 2. 1200		IV. Sz. 4. K. 3. 1600		V. Sz. 5. K. 4. 2000		VI. Sz. 6. 1200		T.	
					h.	□-öl	h.	□-öl	h.	□-öl	h.	□-öl	h.	□-öl	h.	□-öl	h.	□-öl	h.	□-öl

A tényleges birtokoknál szem előtt tartandó, hogy az ne az összetartozó birtokok közé, hanem annak szélére legyen tervezve, akinek ténylegességét képezi és hogy úttal érintkezzék. Legjobb a ténylegességet a magánbirtokkal összevonva kiszámítani, s azután őket egymástól elkülöniteni, s ha a ténylegesség kevés, lehet rövidebbre is tervezni a tagban.

Egymásmellé helyezéseknél lehetőleg az érdemleges tárgyaláson el kell dönteni, hogy miként kezelendő az olyan eset, mikor egymásmellé kérnek olyan birtokokat, melyek közül az egyik nagy tagos, s a melléje helyezett a fordulósok közé számítódnék illetményének nagysága után, vagy ha fordulós mellé kéri olyan, akinek nincs annyi birtoka, hogy azok közé számítódjék s azt is megállapítani, hogy ez esetben csak egy fordulóban, vagy mindenikben kapjon-e?

Egyes tagok tervezésénél előbb a tagosítás alól kivett, de osztályozott területeket kell kiszedni, a térképen árnyékolni, hogy könnyen felismerhető legyen és a 7. és 8. minta szerinti csoport kimutatásba bevezetni, s többi illetményét az egyezség vagy itélet szerinti feltételek mellett kiadni, ahol, ha külön szántó, rét, kaszáló, vagy fordulóban adandó ki illetménye, a megállapított összegtől némi eltérés meg van engedve. Pl. hogy egyik fordulóban valamivel több vagy kevesebb lehet a becs, mint a másikban, de ez persze a többi illetményénél számításba veendő. Erre nézve már az egyezség megkötésénél figyelni kell arra, hogy a fordulóba osztás alapjául egyenlő becs, vagy egyenlő nagyságú terület veendő-e, mert bár rendesen becs szerint történik, többször előfordul, hogy terület szerint

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

akarnak osztozni. És ha becs szerint történik az osztás, célszerű ott, ahol jobb tagot kap, valamivel több becset kiadni, és hogy lehetőleg arányban legyen előbbi birtoka minőségével.

A tag fekvése lehetőleg vízszintes legyen, ne hegynek fel, alakja szabályos téglány, túlhosszú ne legyen, amire már az útak megállapításánál ügyelni kell, s ha az utak egymástól messze esnek, közben vak dülővonalat lehet csinálni, a tag az útat lehetőleg ép szög alatt érintse, és vonalai párhuzamosak legyenek.

A tervezéskor minden egyes tagba beírandó a statusquo térképen az ívszáma ironnal. A ténylegesség íve tört alakban, és az egybirtokosnak kiadott tagszéle *—* vonallal jelzendő, s minden segédmunkarészen a legelső rovat könnyebb áttekintés végett az ívszámot tüntesse fel.

Tervezésre nézve részletes útmutatással szolgál Naszluhácz értekezése. (Lásd a következő [*C.* alatti) cikket]. Ez alkalommal csak arra akarom a figyelmet felhívni, ha az osztályvonalak oly rendetlenek, hogy számítással nem lehet dolgozni, s oly eset adja elő magát, hogy valamely osztály már szemmel láthatólag teljesen be fog esni a tervezendő részletbe, azt vagy a körülvevő, vagy érintkező becsosztályba átszámítjuk, s a tényleges és átszámított osztály szerinti becsérték különbséget, vagy hozzáadjuk, vagy levonjuk a tervezendő részletből, aszerint amint alacsonyabb osztályait számítottunk magasabban, vagy ellenkezőleg, s az átszámított becsosztályt, míg a részlet véglegesen nincs tervezve, az átszámított osztályba tartozónak vesszük. Mikor a tervezés ellenőrizve lett, a tervezési jegyzékbe az eredeti becsosztályt vezetjük be.

Mikor a csoport egészen ki van számítva, s az előállott kezelési különbözet elosztva, az egyes részletek adatait a dülő megnevezésével mindjárt be lehet vezetni a combinatoriumba. Rajzi tervezés közben időnkint ellenőrizni kell a hátralevő kiosztandó területet, hogy ha a számításban hiba történik, lehetőleg korán legyen felfedezve. Különösen a csoportnak vége felé, hol a még tervezendő tagoknál a kiadandó becs mennyiségét már módositani nem lehet.

Mikor az egész község ki van tervezve, s az összes részletek bevezetve a combinatoriumba, abban az egyes íveket és a combinatorium *B.* oldalát egészen összegezni kell és a főösszeállítást megcsinálni, s ha ez jó, lehet a többi munkarész elkészítését megkezdeni.

A tervezés után a térképek pontosan lemásolandók, s egészen elkészítendők. A másolás már előbb felragasztott s azután levett és jól beszáradt vászonra húzott papirra történik. Lemásolandók és külön szinezendők a művelési ágak, határszél, megjelölendő a dülőhatár, megírás és egyéb felszerelés.

A további teendők menete legrendszeresebben az országos kataszteri felmérésnél követett gyakorlat szerint történhetik.

Ugyanis a kész új térképen számozandók az egyes részletek. Erről célszerű készíteni vagy másoló vászonra, vagy másoló papirra egy másolatot — utóbbit kéregpapirra ragasztva — melybe elég a részletszámot és birtokív számát bevezetni szinezés nélkül és be lehet jegyezni a tervezési könyvből a részletek szélességeit. Igy elkészítve ezen másolatot lehet használni úgy a kiosztási földkönyv szerkesztésénél, mint a természetben való kihasításnál. Mig a földkönyv készül terület nélkül, addig a combinatoriumot lehet a statusquo; és új térkép igénybevételével kiegészíteni a részletszámok és dülők neveinek bejegyzésével, s ugyanekkor lehet a több művelési ágból, illetve részletből álló tagok részeit kiszámítani; azt külön füzetbe jegyezve, hogy a földkönyv kiegészítésénél fel lehessen használni. A földkönyv lezárása után abból minden birtokívről külön cédula készül részletszámainak feljegyzésével, melyből készül a birtokív, s ebből végre a birtokívek összesítése.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Kihasítás, illetve az új tagoknak természetbeni kimérése a tervezési füzetből, a rendetlen alakú részleteké a statusquo térképről eszközlendő mindig a háromszögelésnél meghatározott állandó jellegű pontokra támaszkodva. Minden vonalat előbb egészen és pontosan végig kell mérni, annak hosszát a térképpel összehasonlítani, s csak ha megengedett különbség van, lehet a papirbeszáradás és terepviszonyokból előálló mérési különbség előzetes elosztása után a második mérésnél az egyes tagvégeket megjelölni és mindjárt a részletszámokat tartalmazó karóval ellátni, mert mikor mindkét mesgyefej ki van jelölve, azoknak összehantolásánál a szám jó ellenőrzés arra, hogy hibás összekötés ne történjék.

Ha a tagok nem mennek merőlegesen az utra, vagy vak dülőre, célszerű egy oly segédvonalat felvenni, mely a tagokat lehetőleg közepén merőlegesen metszi. Ez esetben elég a segédvonalon mérni és a végpontokat kitűző műszerekkel jelöljük meg.

Jó ellenőrzést nyujt e tekintetben az is, ha a térképen levő mivelési ágakat megfigyeljük, hogy a mesgyevonal által elvágott rész megfeleljen a természetnek. És csak azután hasítandó ki a mesgye ekével.

A hantolást jó mindig téglány alakban csinálni abban az irányban, amelyikben a mesgye halad stb. mert igy mindjárt lehet tudni, mely irányban van a többi jel.

C.

A becsleges földosztásról.

Naszluhácz Lajos mérnök értekezése.*)

(Revidiálta Majzik József hitelesitő kataszteri főmérnök.)

Birtokrendezési és tagosítási munkálataink leghosszadalmasabb és legfárasztóbb részét képezi kétségkivül a több osztályzatu dülőknek apró darabokra beosztása. Nem azért, mintha erre vonatkozó theoriák hiányában volnánk, hiszen minden tankönyv nyujt többkevesebb sikerrel alkalmazható képletet, hanem azért, mivel mindezek oly bonyolódottak, hogy a sok szorzásnak, osztásnak, hatványozásnak, gyökvonásnak vége nincs, s tagozott alakjuk miatt tisztán logaritmikus számitást nem engednek s ennélfogva előnynyel nem használhatók ott, hol gyakran alig 100 holdas dűlőt 100, sőt több darabra kell elaprózni. Pedig éppen az ily apró darabokkali bibelődés veszi különben is silányul dijazott munkásságunkat igénybe, és alig fizeti meg a ráfordított idő alatt elpipázott dohány árát, — míg nagyobb kiterjedésü táblák osztásánál bármennyire is legyenek részleteikben külön-külön minöségüek, — a mindennapi kenyér ára legalább megkerül. Ezt — nem kétlem — mindegyikünk igen is mélyen érezte, és többen igyekeztek oly módszert kifejteni, mely által ezen háladatlan munka egyszerüsítendő volna. Tudtomra azonban csak Gáthy Istvánnak sikerült e cél megközelítése az által, hogy a legközönségesebben ismert és jelen értekezésnek is alapjául vett képletek kezelését táblák által elősegité. (Gyakorlati földmérés tükrökkel. Szerzette Gáthy István, Pápán a ref. főiskola betüivel 1845.) Ajánlom ezen, minden legkisebb részleteiben is igen jeles és páratlan munkát t. kartársaim figyelmébe.

Én e feladat graphikus megoldását kisérlem meg. Sikerült-e, és mennyiben fejtegetésem? azok itéletére bizom, kik elég szerencsések voltak 30—40 különböző osztálylyal megáldott határ kiosztásával mulathatni.

---

*) Bár több tekintetben elavult: mégis mint érdemes eredeti, történelmileg pedig becses értekezést egész terjedelmében közöljük.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Az általam felállított módszer oly egyszerű, s tán ép azért hasznavehetősége oly felötlő, hogy szükségesnek tartom ezt előre megemlíteni, nehogy valami fellengző analysist gyanítva, kellemetlenül kiábrándulva tegye félre tisztelt olvasóm igénytelen értekezésemet.

Hogy azonban azoknak is, kik a gyakorlati téren is theoretikus hajszálhasogatásban gyönyörködnek, s minden műtételtől, mely körző és léptékkel végeztetik — irtóznak — eleget tegyek, igyekeztem az úgynevezett *rendetlen*, vagy inkább *össze-*, és *széttartó* (convergens, divergens) dűlők kiosztására szolgáló egyszerű, csak egyetlen tagból álló, s azért a kényelmes logaritmusokkali számításra alkalmas képletet felállítani, még pedig akár egy, akár több minőségű legyen is a dülő.

Végre adalékul legtöbb esetben végtelen előnnyel használható *logaritmikus* (számszeres) léptékemet, és a rézsút szélességeknek megfelelő merőlegesek és viszont kiszámítására szolgáló és általam kitünő sikerrel alkalmazott módszert ajánlom t. szaktársaim figyelmébe.

Grécben, 1856. évi december hó 1-én.

ELSŐ SZAKASZ.

A becsleges földosztás graphikus módja.

A földet kétfélekép szokás osztályozni, *a)* nagyság, vagyis négyszögölekben kifejezett és nálunk kizárólag szokásban levő holdas osztályozás által, vagy *b)* pénzérték szerint.

a) Becs-holdas osztályozás.

Ha az osztályozás holdak nagysága szerint történt, a kiosztandó terület egysége nem □öl, hanem *becshold* leszen. Az osztályszám megmondja, hogy egy becshold hány □-ölet tartalmaz.

A B C D dülőben (1. ábra) három különféle osztály fordul elő, u. m. c_1 c_2 c_3. Ezen dülőből kihasítandó egy bizonyos terület T becsholdakban. Kerestetik a közös szélesség x. Nevezzük az *A I L E* darabot t_3-nak, és ebben a középhosszat h_3-nak. Az *E L M G* darabot t_1-nek, a középhosszát h_1-nek, a *G M K B* darabot t_2-nek, középhosszát h_2-nek, lesz: $t_1 = \frac{h_1\, x}{c_1}$ (becsholdakban), $t_2 = \frac{h_2\, x}{c_2}$, $t_3 = \frac{h_3\, x}{c_3}$, és minthogy $T = t_1 + t_2 + t_3$, ugyancsak $T = \frac{h_1\, x}{c_1} + \frac{h_2\, x}{c_2} + \frac{h_3\, x}{c_3}$ és innen

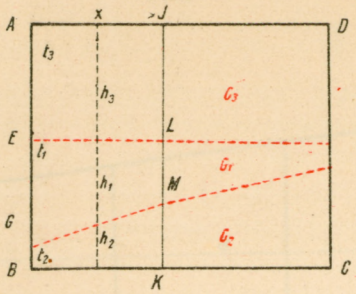
$$x = \frac{T}{\frac{h_1}{c_1} + \frac{h_2}{c_2} + \frac{h_3}{c_3}} \quad \ldots \; 1.$$

Ez azon képlet, mely eddig tán kizárólag használtatott. Első pillanatra azonban az emberben azon óhaj támad, bárcsak ezen képletnek oly alakja volna, hogy a különnemü törtek $\frac{h_1}{c_1} + \frac{h_2}{c_2} + \frac{h_3}{c_3}$ közös nevezővel jelennének meg. És tulajdonképpen az egyenlet numerikus számításánál ugyis az történik, t. i. elosztjuk szépen egymásután h_1-et c_1-el, h_2-őt c_2-vel, h_3-t c_3-al, s ez által egynemű, t. i. tizedes törteket kapunk. Az így nyert közös nevezővel annak rendje és módja szerint a T-t szorozzuk s a h_1 h_2 h_3 számok helyett kapott H_1 H_2 H_3 becsholdak összegével a képlet értelmezésénél fogva teljesítvén az elosztást, megkapjuk a keresett x szélességet.

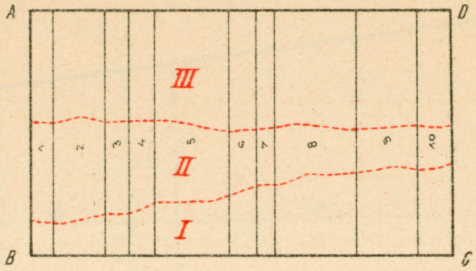
Ez magában véve igen helyesen van, de bezzeg keservesen jutottunk hozzá, kivált ha mit elmulasztani nem lesz tanácsos, biztosság és önmegnyugtatásunkra az egész számítást ismételjük. Ezen hosszas számítást elkerülendő, Gáthy István fent említett munkájában tabellákat dolgozott ki 1100, 1200, 1300 □-öles becsholdakra, melyekben a képlet által

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

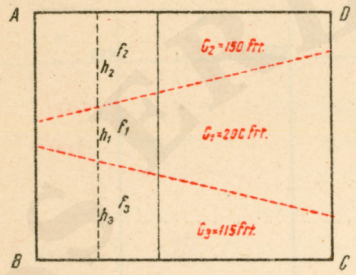
1.ábra



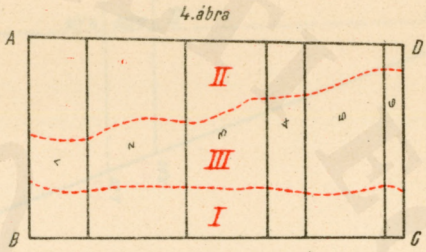
2.ábra



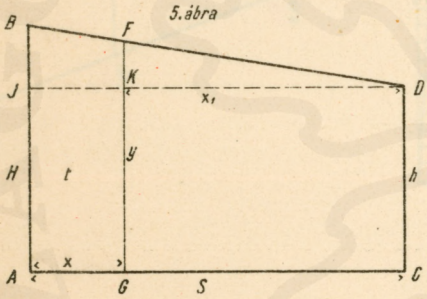
3.ábra



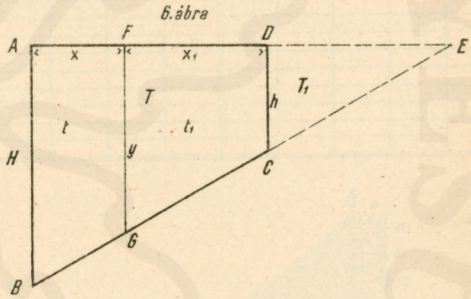
4.ábra



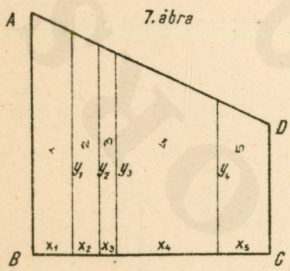
5.ábra



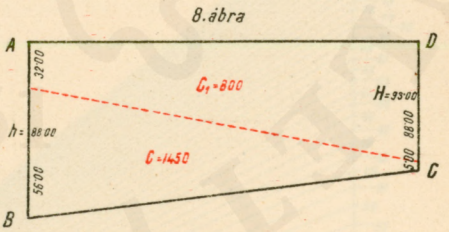
6.ábra



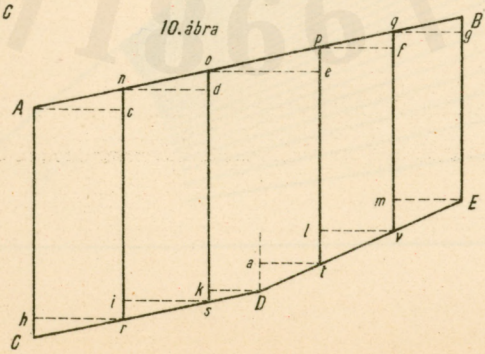
7.ábra



8.ábra



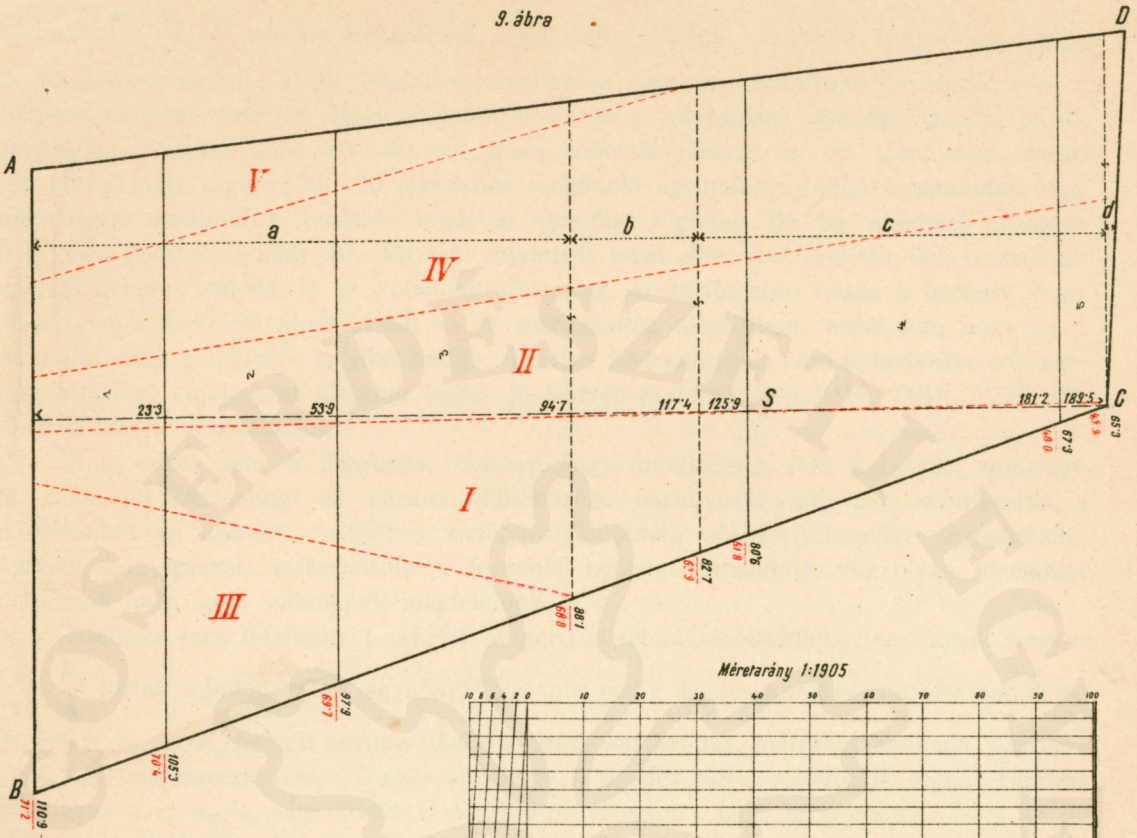
10.ábra



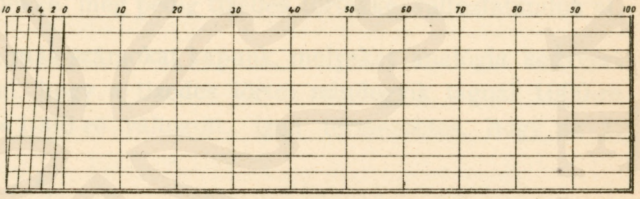
© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

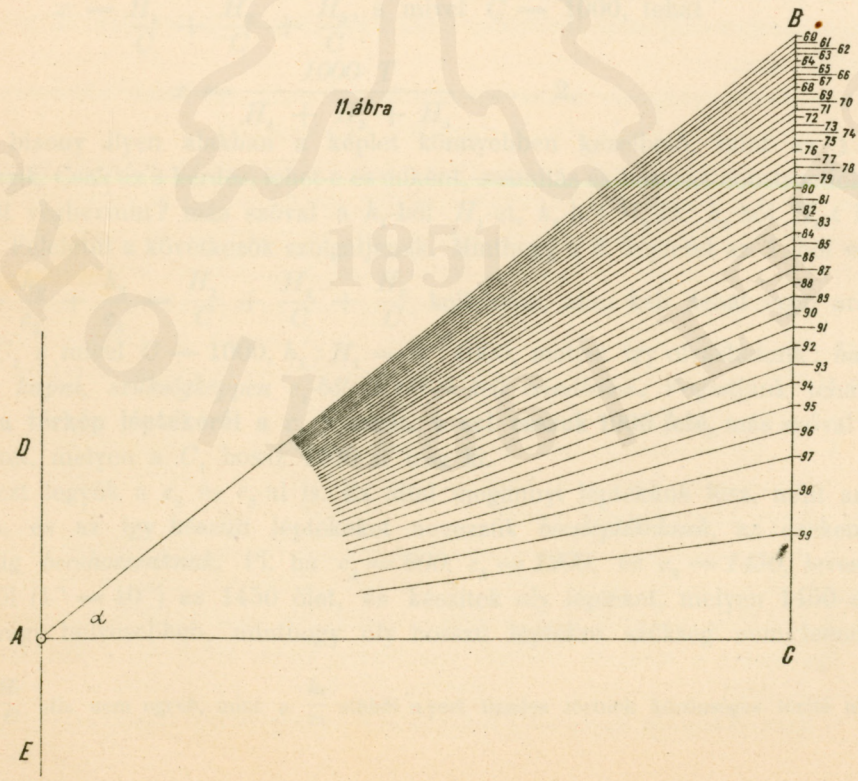
9. ábra



Méretarány 1:1905



11. ábra



© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

ORSZÁGOS ERDÉSZETI EGYESÜLET
1851
1866

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

parancsolt $\frac{h_1}{c_1}, \frac{h_2}{c_2}, \frac{h_3}{c_3}$ osztás eredményét kiszámítva találjuk. Azonban tudjuk azt, hogy ezen három osztálylyal, kivált közbirtokosságokban, sem az osztályozó becsűsök, sem a birtokosok be nem érik, és hogy a jóból a szegény mérnöknek gyakran igen is bőven kijut, kapván a nyaka közé 20—30, sőt talán többféle classist is. Itt tehát nem marad egyéb hátra, mint vagy a 20—30 classisnak megfelelő ugyanannyi táblát kiszámítani, vagy minden egyes darabnál a fentebbi képleten sine-fine rágódni. De ha mindjárt elkezdve 800 □-öles holdnál, s akár 50—50 ölre folytatva, tehát 850, 900, 950 stb. öles holdaknak megfelelő ilynemű táblák ki is volnának dolgozva, ki tartóztatja vissza a becsűst, hogy ha csak csupa szakértői fitogtatásból — és már szintén megtörtént, tudva azt, hogy az a cifra osztályozás a mérnök megölő betüje, ártatlan boszantásból, nem is hederítve a kerekszámú holdakra kidolgozott táblákra széles jó kedvében ne pl. 845, 947, 1148, 1777 stb. □-öles holdakra classifikáljon?

Hogy tehát sem a fitogtatás, önkény, vagy tudatlanság, sem a helyzet sajátsága által előidézett bármennyi és bármely különbségű osztályozás meg ne zavarhasson, s működésünket az annyira szükséges kedélynyugalommal, sőt kényelemmel végezhessük, vizsgáljuk, bontogassuk, változtassuk a fentebbi képletet mindaddig, míg olyan formában nem jelenik meg, mely célunknak megfelelőbb.

Midőn a fent felállított 1. képlet numerikus feloldásáról emlékeztem, láttuk, hogy a $\frac{h_1}{c_1}, \frac{h_2}{c_2}, \frac{h_3}{c_3}$ törtek mindenekelőtt egyneműekké, még pedig tizedes törtekké változtatandók át, hogy így a h_1, h_2, h_3 helyett egymásután más számokat kapunk, melyeket analógia kedvéért H_1, H_2, H_3-nak nevezhetünk. Tegyük fel, hogy a tizedes törtet mindegyik tagnál 1000-re vettük, azaz a c_1, c_2, c_3 egy közös $C = 1000$-ré változott, igen természetes, hogy az 1. képletnek ez által ilyen formát adtunk:

$$x = \frac{T}{\frac{H_1}{C} + \frac{H_2}{C} + \frac{H_3}{C}} \text{ *), s mivel } C = 1000, \text{ tehát}$$

$$x = \frac{1000\ T}{H_1 + H_2 + H_3} \quad \ldots \quad 2.$$

Ugy-e bizony ilyen alakban a képlet könnyebben kezelhető, mint az 1 alatti, melyből származik. Csak az a kérdés, lehet-e és miként, számítás és hosszas constructiók nélkül ezen átalakítást végbevinni? más szóval a h_1-ből H_1-et, h_2-ből H_2-őt, h_3-ból H_3-t könnyű szerrel kapni? Feleletül a következők szolgáljanak. Minthogy a 2. képletet az 1.-ből vezettük le, tehát $\frac{h_1}{c_1} + \frac{h_2}{c_2} + \frac{h_3}{c_3} = \frac{H_1}{C} + \frac{H_2}{C} + \frac{H_3}{C}$ kell lenni, állni kell tehát ezen aránynak $h_1 : H_1 = c_1 : C_1$ s mivel $C = 1000$, $h_1 : H_1 = c_1 : 1000$, melyet így olvashatunk: *ha h_1-ből H_1-et akarunk kapni, szükségképpen c_1-ből 1000-et kell csinálnom.* Fogadjunk tehát szót, **és vegyük le a térkép léptékéről a c_1 hosszát, s ezt osszuk 1000 felé,** más szóval csináljunk oly léptéket, melyen a C_1 hossz 1000-et tesz ki.

Ugyanezt tegyük a c_2 és c_3-al is. Ez által megannyi léptékünk lesz, mint amennyi osztályunk van, és az így készült léptékeket nevezzük *becsléptékeknek,* az ezeken levett méreteket pedig *becshosszaknak.* Pl. ha $c_1 = 800$, $c_2 = 1200$, és $c_3 = 1450$, leveszem a rendes léptékről ($1'' = 40°$) az 1450 ölet, és készítek oly léptéket, melyen 1450 öl csak 1000-et tesz, vagy helyesebben, minthogy oly hosszú léptékre szükség nem leend, csak

*) Hol $\frac{H_1}{C}$ stb. nem egyéb, mint a $\frac{h_1}{c_1}$ stbből nyert tizedes törtnek közönséges törtté alakítása.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

145 ölet veszek le, s csinálok belőle 100-at. Ugyancsak így a többi c-vel, s ezen új léptékek az illető clasisnak megfelelő *becsléptékei.*

Ezen becsléptékekkeli munkálat egyszerűen abból áll, hogy az egyes osztályokba eső hosszakat körzőnk nyilásába véve, a méreteket nem a térképi léptéken, hanem az illető becsléptéken olvassuk le, s az így egyenként kapott becshosszak összegével az 1000-el szorzott területet elosztjuk. (Lásd 2. képletet.) Pl. ha h_1 (1. ábra) az illető 800 öles becsléptéken 64·5, h_2 az 1200 ölesen 24·5, végre h_3 az 1450 öles becsléptéken 47·5, összesen tehát 136·5 becshosszat tesz, és ha $T = 5{\cdot}390$ becshold, akkor a 2. képlet szerint $x = \frac{1000 \times 5{\cdot}390}{136{\cdot}5} = \frac{5\,3900}{136{\cdot}5} = 39{\cdot}5$. Az 1. képlet szerint pedig a számítás így lesz:

$$x = \frac{5{\cdot}390}{\frac{h_1}{800} + \frac{h_2}{1200} + \frac{h_3}{1450}}, \text{ és mivel a térkép léptékén } h_1 = 51{\cdot}5,\ h_2 = 29{\cdot}5,\ h_3 = 69{\cdot}0,$$

$$x = \frac{5{\cdot}390}{\frac{51{\cdot}5}{800} + \frac{29{\cdot}5}{1200} + \frac{69{\cdot}0}{1450}} = \frac{5{\cdot}390}{0{\cdot}064{,}4 + 0{\cdot}024{\cdot}6 + 0{\cdot}0476} = \frac{5{\cdot}390 \times 1000}{64{\cdot}4 + 24{\cdot}6 + 47{\cdot}6} =$$

$$\frac{5\,390}{136{\cdot}9} = 39{\cdot}4$$

Az eredményben 0·1 ölnyi különbséget látunk, minek oka a lépték tökéletlenségében rejlik, melynél fogva pl. $1'' = 100°$ léptékről csak 0·5 ölet lehet, mint legkisebb mértéket megbecsülni. És éppen azért a nagyobb tökéletességet számítás tekintetéből is az általam előadott becsléptékekkeli módszernek praetendálom. Ugyanis többnyire 1000 ölön felül történvén az osztályozás, a becsléptékek egysége is nagyobb és így a tökély, melylyel a méreteket megkapjuk szintén jobban van megközelítve.

Hogy mennyivel gyorsabb, s miután a sok osztás mellőzve van, mennyivel biztosabb ezen mód az 1. képletteli számításnál, sőt az említett táblákból felkeresésnél, ítélje meg t. kartársaim részrehajtatlan kisérlete. Csak a következő eljárást ajánlom még, mint fortélyt figyelembe venni.

1. Mielőtt valamely határ kiosztásához fognál, mindenek előtt készítsd el a fentebbiek nyomán minden classisnak megfelelő becsléptékét.

2. Ezen becsléptékek mindegyikét külön szelet papirra készitsd el, hogy előforduló speciális esetekben azon sorban rakhasd elődbe, aminő sorban az egyes osztályok a dülőben feküsznek. Ezen elrendezés előnye abban áll, hogy figyelmed nem leend munkaközben megosztva, t. i. nem kell a léptékek legiói közül a megfelelőt keresgélni.

3. A körződ nyilásába fogott méretet, vagy hosszat azon esetre, ha ez egyes minőségű, vagy osztályzatú darabok területe, tehát hossza is telekkönyvileg kimutatandó, egyúttal a térkép léptékéről is olvasd le, és a telekkönyv megfelelő rovatába írd be, nehogy utólagosan ezen hosszak levétele ujabb dolgot adjon.

4. A becshosszakat nem volna ugyan szükség a könyvbe bevezetni, azonban a később előfordulható kérdések, vagy kétségek elhárítása kedvéért nem fog ártani ezek számára is egy külön rovatot nyitni.

5. A becsholdaknak a becshosszakkali osztása tüstént teljesítendő és a nyert szélesség a térképre rávezetendő, mely célból e helyütt „Földosztó tábláim“*) kitünő szolgálatot teendenek, minthogy azokban ezen osztások eredménye igen hamar és egyszerűen feltalálható.

Ha ezeket a működő mérnök figyelembe veszi, kivált ha a földosztó táblák birto-

*) Már nem kapható. Magánosok birtokában még van. Helyette használható a Crelle-féle „*Rechentafeln.*“

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

kában van, az egész eljárása következő lesz: leveszi a középhosszakat a megfelelő becsléptékeken, azután ezeket összeadja, s felüti a földosztó táblákban az ezen hossznak és kiosztandó becsterületnek megfelelő szélességet. Ha nincs földosztó táblája, akkor az elosztást természetesen végrehajtja, de még igy is mily könnyen jutott a szélességhez s mily szaporán megy a dolog, néhány próba után mindenki be fogja látni. Minden attól függ tehát, vajjon eltalálja-e a középhosszat tökéletesen. Erre nézve szabad legyen megjegyeznem, hogy kivált, ha az osztályokat elválasztó vonalak igen rézsútosak, alig találja el a legelső fogásra, de kérdem, ha az 1 képlettel dolgozik, nem-e szintén ezen helyzetben van?

Azután csak az első darabnál van bizonytalanságban, mert ha már egyet kivágott a dülőben pl. egy 4 becsholdas darabot, és utána egy 3 holdasat kell kivágnia, már az előbbi darabhoz viszonyitva könnyebben találja fel a középhossz fekvését. Azután hála istennek! nem vagyunk ott, hogy a földeket egész hüvelykre kellene osztanunk, mert az ilyféle pedantéria csak azt eredményezné, hogy pl. mig én 15·4 öl szélességet kapok az előadott mód szerint, addig a formulák hőse talán 15·374, vagy 15·408 öl szélességet kapna; de mikor a mezőre megy, kérdem nem affektátio-e azt állitani, hogy e gyönyörüséges számot ott ki is jelölendi, vagy ha ez meg is történt volna az eke szintén ezen mathematikai vonalat fogja barázdálni? Elégedjünk meg tehát belső munkánknál is azon tökélylyel, melynek praktikus kivitele is lehetséges, és tartsunk bizonyos összhangzást munkálataink egész folyamában.

Lássuk azonban a leírt módszert példában. 2. ábra.

ABCD dülő három osztályból áll, u. m. I = 800, II = 1200, III = 1450 öl. Legyen ezen dülőben az

I. oszt.	= 10640	□-öl	á	800 = 13·300	becshold
II. „	= 10032	„	„	1200 = 8·360	„
III. „	= 17400	„	„	1450 = 12·000	„
				33·660	becshold

Ezen területet 10 részletre kell felosztani, a táblázat második oszlopába írt becsterületekkel.

Részlet szám	Becsterület	Egyes becsközép hosszak	Összes hosszak	x szélesség	$x+x_1+$stb. összes szélesség
1	2·020	I. 78·0 II. 18·0 III. 45·5	141·5	14·3	
2	4·300	77·0 19·5 45·0	141·5	30·4	44·7
3	1·960	73·6 22·0 44·4	140·0	14·0	58·7
4	2·240	71·0 25·0 44·0	140·0	16·0	74·7
5	6·350	61·5 28·5 46·0	136·0	46·7	121·4
6	1·950	50·2 34·0 47·8	132·0	14·8	136·2

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Részletszám	Becsterület	Egyes becsközép hosszak	Összeg	x szélesség	$x+x_1+$stb. összes szélesség
7	1·300	46·0 36·5 48·0	130·5	10·0	146·2
8	6·300	37·7 41·0 48·8	127·5	49·4	195·6
9	4·900	33·4 44·6 48·5	126·5	38·7	234·3
10	2·360	31·0 46·0 48·0	125·0	18·9	253·2
Σ	33·660			253·2	

A 2 képlet szerint $x = \frac{1000\ T}{H_1+H_2+H_3}$. A jelen esetben $T_1 = 2{\cdot}020$, $T_2 = 4{\cdot}300$ stb. $h_1 = 78{\cdot}0$, $h_1 = 18{\cdot}0$ $h_1 = 45{\cdot}5$, stb. $h_2 = 77{\cdot}0$, $h_2 = 19{\cdot}5$, $h_2 = 45{\cdot}0$, stb. $h_3 = 74{\cdot}0$. $h_3 = 22{\cdot}0$, $h_3 = 44{\cdot}0$ stb., és $H_1 = 141{\cdot}5$, $H_2 = 141{\cdot}5$, $H_3 = 140{\cdot}0$ stb. Feltéve, hogy a léptékek a lehető legnagyobb pontossággal és tökélylyel készítvék, a próbaszámítás szigorát kétségkivül kiállandják az eredményezett szélességek.

Ezen próbaszámítás abból áll, hogy az egyes középhosszakat a térkép léptékéről levéve a kijött szélességgel szorozzuk és az eredményt az illető osztály négyszögölével elosztjuk.

Az így kiszámított becsholdak összege adni fogja az egész dűlő becsholdjainak számát. Pl. az 1 darabnak középhossza a térkép léptékéről levéve ad

az I-ben	62·4	ölet	× 14·3 = 891	□-öl :	800 = 1·114	becshold
a II „	21·5	„	× 14·3 = 307	„ :	1200 = 0·256	„
a III-ban	65·9	„	× 14·3 = 942	„ :	1450 = 0·650	„
			Összesen		2·020	becshold

Igen jó a szélességeket (x) $\frac{1}{100}$ ölig. és a becsholdakat $\frac{1}{1000}$ részig kiszámitani, különösen ha egy dűlőben igen sok apró részletet kell kihasitani, mert ha a természetben csak tized öleket osztunk bár ki, mégis a sok század öl egészet, a sok ezred hold becsholdakat tesz ki.

b) **Pénzérték szerint becsült földosztás.**

Ha valamely határ nem holdszám, hanem pénzérték szerint lett megbecsülve, ezen esetben is csak igen kevés módosítással alkalmazható a föntebb előadott becsléptékkeli földosztás módja. 3. ábra.

ABCD dűlőben három külön minőségü földterület van, még pedig az *I.* olyan, hogy abból egy 1200 □-öles hold föld ára 200 frt, a *II*-ból 150 frt, a *III*-ból 115 frt. Ezen dűlőben *AB* vonallal párhuzamosan, tehát mindhárom minőségü részen keresztül kihasítandó egy 450 frt = *F* értékü terület. Kerestetik a közös szélesség *X*.

Nevezzük az *I*-be eső terület **értékét** f_1-nek, a *II*-be f_2-nek, a *III*-ba f_3-nak. továbbá a középhosszakat h_1, h_2, h_3-nak és végre egy holdnak (azaz 1200 □ ölnek) az

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

értékét e_1, e_2, e_3-nak, Lesz az *I*-ben a kihasitandó terület értéke $f_1 = \frac{e_1 x}{1200}$, a *II*-ben $f_2 = \frac{e_2 x}{1200}$, a *III*-ban $f_3 = \frac{e_3 x}{1200}$, s miután $f_1 + f_2 + f_3 = F = \frac{x}{1200}(h_1 e_1 + h_2 e_2 + h_3 e_3)$, innen

$$x = \frac{1200\ F}{h_1 e_1 + h_2 e_2 + h_3 e_3} \quad \ldots\ldots\ 3$$

Vizsgálva e képletet ismét látjuk, hogy ha a külön értékű e_1, e_2, e_3 tényezőket valami úton-módon egy közösre pl. $E = 1200$-ra változtathatnók, mellőzve lenne az egymásután feltételezett szorzás. Csakhogy ezen esetre természetesen a h_1, h_2, h_3-nak is más értékei lesznek, melyeket addig is H_1, H_2, H_3-nak nevezzünk. A képlet tehát ilyen forma lenne $x = \frac{1200\ F}{E\ (H_1 + H_2 + H_3)}$ és mivel $E = 1200$-nak vettük, tehát

$$x = \frac{F}{H_1 + H_2 + H_3} \quad \ldots\ldots\ 4$$

Ámde miként jutottunk ezen uj H_1, H_2, H_3 értékéhez? Azt kivántuk, hogy $h_1 e_1$ legyen $1200\ H_1$, $h_3 e_2 = 1200\ H_2$, $h_3 e_3 = 1200\ H_3$. Ezen egyenletekből áll egyenként $h_1 : H_1 = 1200 : e_1$ stb., mely azt mondja, hogyha h_1-ből H_1-et akarok, 1200-ból e_1-et kell csinálni, és így tovább.

E célt elérem, ha a térkép léptékéről leveszek 1200 ölet s ezt külön-külön e_1, e_2, e_3 egységekre osztom. Pl. a fentebbi esetben

az I-re nézve 1200-ból 200,
II-re „ 1200-ból 150,
III-ra „ 1200-ból 115.

Az ekként elkészült léptékekkel egészen azon mód szerint találjuk meg a szélességet, mint a holdas osztályozásnál láttuk, t. i. levesszük egyenként a középhosszakat az illető becsléptéken s ezen becshosszak összegével elosztjuk az adott F értéket.

4. ábra. Osszuk be az *ABCD* dülőt következő értékű darabokra: 1 = 550·2 frt, 2 = 895·2 frt, 3 = 711·5 frt, 4 = 336·5 frt, 5 = 660·6 frt, 6 = 171·5 frt, Σ = 3325·5 frt. Az *I-ben* egy holdnak értéke 200 frt, a *II-ben* 150 frt, a *III-ban* 115 frt.

Mindenekelőtt a becsléptékeket kell elkészíteni. Tudjuk már, hogy az I-re nézve 1200-ból 200-at kell csinálni és így tovább; de mivel ily hosszú léptékre szükség nincs, és különben is tudjuk, minő nagyság tesz 100 vagy 10 ölet a következő arányokból:

I. $200 : 1200 = 100 : x$, $\quad x = 600$
II. $150 : 1200 = 100 : x$, $\quad x = 800$
III. $115 : 1200 = 100 : x$, $\quad x = 1043{\cdot}5$.

Tehát az *I-nek* léptékét úgy készitem el, ha a térkép léptékéről a 600 ölet beosztom 100 felé, vagyis 60-at 10 felé. A *II.*, *III-at* ugyanily módon.

Elkészitve így a szükséges léptékeket, a közös szélességek a 4. képlet szerint kerestetnek ki, t. i. levesszük a középhosszakat minden egyes osztályban és az illető léptékről leolvassuk. Az így nyert becshosszakat összeadjuk és ezen összeggel az adott (F) értékeket elosztjuk, vagy a földosztó táblákban a megfelelő szélességet felkeressük.

A példaként felhozott esetben

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Részletszám	Becs-terület	Egyes becsközéphosszak	Összes becsközéphosszak	x szélesség	$x + x_1 +$ összes szélesség
1	550·2	I. 5·0 II. 7·5 III. 2·9	15·4	35·7	
2	895·2	5·55 6·10 3·55	15·2	58·9	94·6
3	711·5	5·34 4·80 4·70	14·84	47·9	142·5
4	336·5	4·88 3·76 5·60	14·3	23·5	166·0
5	660·6	4·8 2·7 6·6	13·8	47·8	213·8
6	171·5	5·30 1·65 6·85	13·8	12·5	226·3
Σ	3325·5			226·3	

Itt megjegyzem, hogy ha az osztással a dülő végére értünk és egy-két forintnyi értékkülönbség mutatkozik, megijedni nem kell, mert 1 frt pl. olyan földnél, melyből 1200 □-öles hold 150 frtba kerül, 8 □-öllel ér fel $\left(\frac{1200}{150}\right)$, már pedig, ha egy holdnál 8 □-ölet hibázunk, ezt már csak azért sem sokalhatni, mert pl. egy 180 öl hosszú földnél a 8 □-ölnek megfelelő szélesség $\frac{8}{180} = 0{\cdot}04$ öl, amelynél a barázda szélessége háromszorta nagyobb.

Hogy az előadott módszer csak ott célszerű, hol egész határt, vagy legalább egy dülőt kell kiosztani, talán mondanom sem kell, mert egy-két drb miatt nem érdemes a becsléptékeket készíteni. Ellenben egész határ kiosztásánál mennyi előny- és időnyereséggel jár, mindenkinek saját belátására bizom és erősen hiszem, ha egyszer megpróbálta, be fogja látni, hogy az a néhány óra, mit a lépték készítésére fordított, a későbbi gyors és biztos munkálat által igen is bőven lesz kárpótolva.

Egyébiránt nemcsak az osztásnál, hanem a becshold (T), vagy érték (F) kiszámításánál is használhatjuk ezen eljárást. Ugyanis a

$$\text{2-ből } T = \frac{x}{1000}\,(H_1 + H_2 + H_3) \ldots\ldots 5$$

$$\text{a 4-ből } F = x\,(H_1 + H_2 + H_3) \ldots\ldots 6$$

MÁSODIK SZAKASZ.

Rendetlen, vagyis össze- és széttartó dülők felosztása.

Két esetet különböztetünk meg: 1. ha az egész dülő egyminőségű, vagy 2. több minőségű részekből áll.

1. Egyminőségű rendetlen földosztás. 5. ábra.

$ABCD$ dülőből, melynek nagyobb hossza $AB = H$, kisebb hossza $CD = h$, szélessége $AC = S$, és területe $T = \frac{H + h}{2} \cdot S = {}^1/_2\, S\,(H + h)$, kihasítandó egy darab föld, melynek területe $= t$, kisebb hossza $FG = y$. Kerestetik y és $AG = x$.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ezen ismeretlenek felkeresésére több képlettel rendelkezünk, de mindannyi igen hosszas számítást igényel, anélkül, hogy a logaritmikus számításra eléggé alkalmasak volnának. Én ezennel két képletet állítok fel, mindegyike az y hosszúság meghatározására alkalmas s ha így y ismeretes lesz, x szélesség könnyen kiszámítható. Ugyanis $t = \frac{H+y}{2} . x$, ebből $x = \frac{2t}{H+y}$.

A rendetlen dülőket vagy a hosszabb ($A B$), vagy a rövidebb ($C D$) végén kezdhetjük felosztani, tehát a képletnek mindkét esetre alkalmasnak kell lenni.

I. Ha hosszabb végén kezdődik az osztás.

Húzzunk D-ből $A C$-vel párhuzamosan egy segédvonalat $D I$-t, úgy áll a következő arány $IB : KF = ID : KD$, de miután $IB = H—h$, $KF = y—h$, $ID = AC = S$, $KD = S—x$; lesz $(H—h) : (y—h) = S : (S—x)$, és innen $x = S\left(1 — \frac{y-h}{H-h}\right)$; de fentebb láttuk, hogy $x = \frac{2t}{H+y}$, tehát $S\left(1 — \frac{y-h}{H-h}\right) = \frac{2t}{H+y}$, s innen végre $y = \sqrt{H^2 — \frac{2(H-h)}{S}t}$ vagy, ha az állandót $\frac{2(H-h)}{S} = k$-nak nevezzük lesz $y = \sqrt{H^2 — kt} =$

$$\sqrt{(H + \sqrt{kt})(H — \sqrt{kt})} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7.$$

mely utóbbi alakban e képlet logaritmikus számításra alkalmas.

Ha több darab osztandó egymásután, t helyett mindazon darabok összege helyettesítendő. Tehát, ha a második darab területe t_1, lesz $y_1 = \sqrt{H^2 — k(t + t_1)}$, az n-ik darab területe $y_n = \sqrt{H^2 — k(t + t_1 + t_2 + \ldots . t_n}$, vagy logaritmusban kifejezve

$$log\ y = {}^1/_2\ log\ (H^2 — kt) = \frac{log\ (H + \sqrt{kt}) + log\ (H — \sqrt{kt})}{2}$$

$log\ y_n = {}^1/_2\ log\ (H^2 — k(t + t_1 + t_{11} \ldots . t_n))$ s ha például $t = t_1 = t_{11} \ldots . t_n$ ez esetben $y_n = \sqrt{H^2 — k, kt}$ és $log\ y_n = {}^1/_2\ log\ (H^2 — {}_n kt)$.

II. Ha rövidebb végén kezdődik az osztás.

Áll ez az arány $IB : KF = ID : KD$, s mivel $IB = H—h$, $KF = y—h$, $ID = AC = S$, $KD = x_1$, lesz: $(H—h) : (y—h) = S : x_1$ és innen $x_1 = S\frac{y-h}{H-y}$, de egyszersmind miután előbb láttuk, hogy $x = \frac{2t}{H+y}$, lesz $S\frac{y-h}{H-h} = \frac{2t}{H+y}$ és innen $y = \sqrt{h^2 + \frac{2(H-h)}{S}t}$, vagy ha az állandó $\frac{2(H-h)}{S} = k$,

$$y = \sqrt{h^2 + kt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8.$$

Ha több darab osztandó, t helyett szintén az összes értékek teendők; és logaritmusban kifejezve $log\ y = {}^1/_2\ log\ (h^2 + k . t)$ *stb.*

Összehasonlítva a 7 és 8 egyenleteket, látjuk, hogy az egész különbség a + és — jelben van, t. i. mindenkor azon hossz (H vagy h) jön számításba, melynél az osztás kezdődik és ennek négyzetéhez a $k . t$ hozzáadandó, ha a rövidebb és levonandó, ha a hosszabb végén kezdünk osztani.

Ezen képletek szerint elég gyorsan megy a munka, csak az a baj, hogy mielőtt a logaritmus táblákhoz nyúlhatunk, a $k . t$ szorzást végre kell hajtanunk, azonban ezt a következő képletek szerint mellőzhetjük:

6. ábra. $AB = H$, $CD = h$, $AD = S$, a kihasítandó terület $ABFG = t$. Hosszabbítsuk meg az AD és BC vonalat, míg egymást E pontban metszik, s nevezzük a DEC háromszög

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

területét T_1-nek, lesz $H : y = \sqrt{T + T_1} : \sqrt{T + T_1 - t}$, vagy $h : y = \sqrt{T_1} : \sqrt{T + T_1 - t}$,

ezekből $y = \frac{H}{\sqrt{T + T_1}} . \sqrt{T + T_1 - t}$ . . . . *a*

$$y = \frac{h}{\sqrt{T_1}} \cdot \sqrt{T + T_1 - t} \quad . \; . \; . \; b \text{ és ha}$$

$\frac{H}{\sqrt{T + T_1}}$, $\frac{h}{\sqrt{T_1}}$ állandót m-el jelöljük:

$y = m \sqrt{T + T_1 - t}$ . . . . 9. melyben a $T + T_1$ az egész dülőben szintén állandó maradván, csupán a $t + t_1$; $t + t_1 + t_{11} + \ldots$ stb. darabok vonandók le, s így a legegyszerűbb logaritmikus számításunk van, t. i. $log\ y = log\ m + {}^1/_2\ log\ (T + T_1 - t)$.

Kezdődjék azonban az osztás a dülő rövidebb végén, úgy itt is az előbbi eljárást követve lesz $h : y = \sqrt{T_1} : \sqrt{T_1 + t}$ és innen $y = \frac{h}{\sqrt{T_1}} \cdot \sqrt{T_1 + t}$.

Az állandót $\frac{h}{\sqrt{T_1}} = m$-el jelölve

$$y = m \sqrt{T_1 + t} \quad . \; . \; . \; . \; 10.$$

$$\text{és } log\ y = log\ m + {}^1/_2\ log\ (T_1 + t).$$

Hátra van csupán T_1 értékének meghatározása, mely a dülő kiosztásánál csak kezdeményező munka lévén, nem sokat vet a latba, és vagy rajz után a térképről kiszámítható, vagy ha erre a térképen elég hely nincs, így is megkapjuk: $T_1 = \frac{DE.h}{2}$, ámde $DE : AE = h : H$, vagy miután $AE = DE + S$, lesz $DE : (DE + S) = h : H$ és innen $DE . H = (DE + S)\ h = DEh + S.h$, vagy $DE(H—h) = S.h$, tehát $DE = \frac{S.h}{H—h}$,

$$\text{e szerint } T_1 = \frac{S.h^2}{2\ (H—h)} \quad . \; . \; . \; . \; 11.^*)$$

Lássuk a mondottak alapján egy példát, még pedig mind a két (7·9, 8·10) képlet szerint.

7. ábra. $ABCD$ dülő nagyobb hossza legyen $146{\cdot}0$ öl $= H$, kisebb hossza $h = 80.0$, szélessége $BC = S = 143{\cdot}0$ öl, tehát $T = \frac{146 + 80}{2}\ 143 = 16\ 159$. Kiosztandó ezen dülő a következő 5 darabra:

1. $t_1 = 3600$
2. $t_2 = 2045 \quad 5645$
3. $t_3 = 1100 \quad 6745$
4. $t_4 = 6666 \quad 13411$
5. $t_5 = 2748 \quad 16159.$

I. A 7. képlet szerint $y = \sqrt{H^2 - k.t}$, ez esetben $k = \frac{2\ (H—h)}{S} = 0{\cdot}923$ és $H^2 = 21316$.

1. $y_1 = \sqrt{21316—0{\cdot}923 . 3600} = \ldots\ldots 134{\cdot}1$
2. $y_2 = \sqrt{21316—0{\cdot}923 . 5645} = \ldots\ldots 126{\cdot}9$
3. $y_3 = \sqrt{21316—0{\cdot}923 . 6745} = \ldots\ldots 122{\cdot}8.$

*) Önkéntelenül felmerült azon kérdés, mért nem az x-et számítja ki, amikor arra van első sorban szükség? Ki lehet az x-et is számítani, de már ennek magának számítása több időt igényel, azonkívül az y-t ismét csak ki kell számítani, hogy a kihasítandó tag középhosszát be lehessen jegyezni a földkönyvbe.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

4. $y_4 = \sqrt{21316 - 0{\cdot}923.13411} = \ldots\ldots 94{\cdot}5$

5. $y_5 = h = \sqrt{21316 - 0{\cdot}923.16159} = \ldots 80{\cdot}0$

Tehát t helyett egymásután $t_1 + t_2 + \ldots t_n$-et tettük, mi igen egyszerü munka, csupán a *0·923*-mali szorzás ad dolgot.

II. Ugyanezen példa a 8 képlet szerint $y = \sqrt{h^2 - k t_1}$ hol k szintén $= 0{\cdot}923$, és $h^2 = 6400$.*)

5. $t_5 = 2748$

4. $t_4 = 6666 \quad 9414$

3. $t_3 = 1100 \quad 10514$

2. $t_2 = 2045 \quad 12559$

1. $t_1 = 3600 \quad 16159$

$146 - 80 = 66 \times 2 = 132 \quad 2{\cdot}12057$

$S = 143 \quad -2{\cdot}15534$

$0{\cdot}96523 - 1 = \log k.$

$\log k = 0{\cdot}96523 - 1$

$\log 2748 = 3{\cdot}43902 \quad 6400 = h^2$

$3{\cdot}40425 \quad +2536$

$8936 = 3{\cdot}95114/2 = 1{\cdot}97557 = 94{\cdot}5 = y_4$

$h = 80{\cdot}0$

$y_4 = 94{\cdot}5 \quad \frac{h+y_4}{2} = \frac{2748}{87{\cdot}25} = -1{\cdot}94077$

$174{\cdot}5 \qquad 1{\cdot}49825 = 31{\cdot}5 = x_5$

$\log 9414 = 3.97377$

$y_3 = 122{\cdot}8 \quad 3{\cdot}93900 = +8690$

$202{\cdot}8 \qquad 15090 = 4{\cdot}17869/2 = 2{\cdot}08934 = 122{\cdot}8 = y_3$

$\frac{h+y_3}{2} = 101{\cdot}4 = -2{\cdot}00604$

$1{\cdot}96773 = 92{\cdot}8 = x_5 + x_4 \ldots x_4 = 61{\cdot}3$

$\log 10514 = 4{\cdot}02175$

$3{\cdot}98698 = +9705$

$16105 = 4{\cdot}20697/2 = 2{\cdot}10348 = 126{\cdot}9 = y_2$

$y_2 = 126{\cdot}9 \quad \frac{h+y_2}{2} = 103{\cdot}45 = -2{\cdot}01473$

$206{\cdot}9 \qquad 2{\cdot}00702 = 101{\cdot}6 = x_5 + x_4 + x_3 \ldots x_3 = 8{\cdot}8$

$\log 12559 = 4{\cdot}09898$

$4{\cdot}06421 = +11591$

$17991 = 4{\cdot}25505/2 = 2{\cdot}12752 = 134{\cdot}1 = y_1$

$y_1 = 134{\cdot}1 \quad \frac{h+y_1}{2} = 107{\cdot}05 = -2{\cdot}02958$

$214{\cdot}1 \qquad 2{\cdot}06940 = 117{\cdot}3 = x_5 + x_4 + x_3 + x_2 \ldots \quad x_2 = 15{\cdot}7$

és végül ellenőrzésül

$\log 16159 = 4{\cdot}20841$

$4{\cdot}17364 = 14916$

$21316 = 4{\cdot}32870/2 = 2{\cdot}16435 = 146{\cdot}0 = H$

*) Értekező a 7 és 8 egyenletekkel való számítást nem végzi logarozással, pedig azzal az igen gyorsan megy. Előnyt ad a 9. és 10. képletekkel való számításnak. Tapasztalatom szerint pedig alkalmasabb a 7. 8., mert azt más 3. 4. tag tervezésénél is igen előnyösen lehet alkalmazni, mig a 9. 10-nek kezdeményező számítása más a T_1-nek kiszámításával több, azonkivül csak akkor egyszerü ezen T_1 kiszámítása, ha a kiosztandó terület trapéz, ha trapézoid akkor körülményesebb. A 8. képlet szerinti kidolgozást logarral fogom bemutatni, mint magam szoktam végezni.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

$$\frac{H+h}{2} = 113{\cdot}0 = \frac{2{\cdot}05308}{2{\cdot}15533} = 143{\cdot}0\ S \ . \ . \ . \ x_1 = 25{\cdot}7$$

III. A 9. képlet szerint $y = m\sqrt{T + T_1 - t_1}$ hol $m = \frac{h}{\sqrt{T_1}}$

Mindenekelőtt a T_1 terület számitandó ki a 11. képlet szerint.

$$T_1 = \frac{S.\ h^2}{2\,(H-h)} = \frac{143.80^2}{2\,(146-80)} = 6933 \text{ és } m = \frac{80}{\sqrt{6933}} = 0{\cdot}96.$$

Az egyes darab összeget az I. alatt látjuk. A 9. képlet szerint logarban:

1. $log\ y_1 = log\ 0{\cdot}96 + ½\ log\ (23092 - 3600) = \ . \ . \ . \ . \ 134{\cdot}1$
2. $log\ y_2 = log\ 0{\cdot}96 + ½\ log\ (23092 - 5645) = \ . \ . \ . \ . \ 126{\cdot}9$
3. $log\ y_3 = log\ 0{\cdot}96 + ½\ log\ (23092 - 6745) = \ . \ . \ . \ . \ 122{\cdot}8$
4. $log\ y_4 = log\ 0{\cdot}96 + ½\ log\ (23092 - 13411) = \ . \ . \ . \ . \ 94{\cdot}5$
5. $log\ y_5 = log\ 0{\cdot}96 + ½\ log\ (23092 - 16159) = \ . \ . \ . \ . \ 80{\cdot}0$

IV. Szintén ezen módon történik a számítás a 10. képlet szerint.

5. $log\ y_4 = log\ 0{\cdot}96 + ½\ log\ (6933 + 2748) = \ . \ . \ . \ . \ 94{\cdot}5$
4. $log\ y_3 = log\ 0{\cdot}96 + ½\ log\ (6933 + 9414) = \ . \ . \ . \ . \ 122{\cdot}8$
3. $log\ y_2 = log\ 0{\cdot}96 + ½\ log\ (6933 + 10614) = \ . \ . \ . \ . \ 126{\cdot}9$
2. $log\ y_1 = log\ 0{\cdot}96 + ½\ log\ (6933 + 12559) = \ . \ . \ . \ . \ 134{\cdot}1$
1. $log\ H = log\ 0{\cdot}96 + ½\ log\ (6933 + 16159) = \ . \ . \ . \ . \ 146{\cdot}0$

Ezek meg levén, az egyes szélességeket már könnyen megkapjuk. $x_1 = \frac{\frac{t_1}{H + y_1}}{2}$ stb.

A *III. IV.* alatti számítást „Logaritmus léptékkel igen egyszerűen és kellő pontossággal lehet végezni.

Ha a felosztandó darab háromszöget képez, a

$$h = 0: \text{ akkor } T_1 = 0 \text{ és a } k = \frac{2H}{S} \text{ és } m = \frac{H}{\sqrt{T.}}$$

Az *a* és *b* egyenletek különbségéből találjuk, hogy $\frac{H}{\sqrt{T + T_1}} = \frac{h}{\sqrt{T_1}}$; ámde $\frac{h}{\sqrt{T_1}} = m$, tehát $\frac{H}{\sqrt{T + T_1}}$ is $= m$, s a jelen esetben $T_1 = 0$ levén következik, hogy $m = \frac{H}{\sqrt{T+0}} = \frac{H}{\sqrt{T.}}$ Ennélfogva a 9. képletből marad $y = m\sqrt{T - t}$ 12

a 10. „ „ $y = m\sqrt{t}$ . . . . 13.

HARMADIK SZAKASZ.

Több minőségű dülők felosztása.

Az első és második szakaszban előadottak nyomán átmehetünk a több osztályzatú dülőknek tisztán számítás által való felosztására. Ennek természetesen csak ott van helye, hol a külön értékü darabokat, vagyis osztályokat elválasztó vonal egyenes, minden más esetben bizony csak az úgynevezett tapogató rendszerhez kell folyamodnunk.

Az egész számítás a maga egyszerűségében a 7. 8., vagy ha tetszik a 9. 10. képletek szerint történik, csupán a H és h értékét kell előbb megállapítani. Ezt pedig megkapjuk az 1. szakaszban előadott módon a becsléptékek által és nevezni fogjuk H-nak azon becshosszat, mely nagyobbnak, és h-nak azt, mely kisebbnek találtatott, mert megeshetik, hogy a természetben hosszabb vonal becsértékre nézve rövidebb lesz, mint a 8. ábrán látható.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

8. ábra. AB hosszabb CD-nél, mégis AB-nek becshossza $32 + 56 = 88$, CD pedig $5 + 88 = 93$, tehát CD veendő H-nak és $AB = h$.

Ha valamely osztály-elválasztó vonal előbb elfogy, még mielőtt a dülő végére kiér, akkor a számítást több részben végezzük.

9. ábra. Errre nézve kidolgoztam egy példát: $ABCD$ dülő felosztandó AB oldaltól és azzal párhuzamosan öt részre és pedig $t_1 = 1{\cdot}650$, $t_2 = 2{\cdot}142$, $t_3 = 4{\cdot}870$, $t_4 = 3{\cdot}038$, $t_5 = 0{\cdot}489$ becsholdas darabokra.

A dülő területe már meg van állapítva a csoport összeállításban és pedig:

Szelvény	Csoport szám		Σ		I 1000		II 1200		III 1500		IV 1800		V 2500		VI	
			hold	□-öl °/₀₀	hold	□-öl °/₀₀	hold	□-öl °/₀₀	hold	□-öl °/₀₀	hold	□-öl °/₀₀	hold	□-öl °/₀₀	hold	□-öl °/₀₀
3	26		10 850 ***12 189***		2 303 ***3 503***		2 996 ***3 497***		1 1037 ***1 758***		3 511 ***2 950***		1203 ***0 481***			

Ezután a dűlőt annyi trapézre bontjuk, a hányszor határát az osztályvonalak metszik és a trapezoid alak követeli

3	26	*a*	5 1422 ***6 626***		1 365 ***1 965***		1462 ***1 219***		1 1037 ***1 758***		1 600 ***1 221***		1158 ***0 463***			
		b	1 338 ***1 505***		648 ***0 648***		532 ***0 443***				713 ***0 396***		45 ***0 018***			
		c	3 535 ***3 959***		890 ***0 890***		1 556 ***1 797***				1 689 ***1 272***					
		d	155 ***0 099***				46 ***0 038***				109 ***0 061***					
	Σ		10 850 ***12 189***		2 303 ***3 503***		2 996 ***3 497***		1 1037 ***1 758***		3 511 ***2 950***		1203 ***0 481***			

Miután kiszámítottuk és a csoportszámítás területére állítottuk a dűlő *a b* stb. darabjainak területét, kezdetét veheti az egyes részletek tervezése.

A dűlő felosztandó a következő darabokra az AB oldaltól kezdve.

1. *1·650*
2. *2·142* *3·792*
3. *4·870* *8·662*
4. *3·038* *11·700*
5. *0·489* *12·189*

$$y = \sqrt{H^2 - k.\ t.},\quad k = \frac{2\ (H-h)}{S}$$

$$x = \frac{T}{\frac{H+y}{2}}$$

$H = 71{\cdot}2$, $h = 68{\cdot}8$, $S = 94{\cdot}7$, $H^2 = 5063{\cdot}7$

$2\ (H-h) = 5{\cdot}72$ $\quad 0{\cdot}75740$

$94{\cdot}7$ $\quad 1{\cdot}97635$

$\overline{0{\cdot}78105} - 2$

$t_1 = 1650 = 3{\cdot}21748 \quad 5063{\cdot}7$

$1{\cdot}99853 - \quad 99{\cdot}6$

$\overline{4964{\cdot}1}$ $\quad 3{\cdot}69584/2 = {}^1/_2 \log\ (H^2 - K t_1)$

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

$H = 71{\cdot}2$ $\quad$ $1{\cdot}84792 = 70{\cdot}5 = y_1$

$y_1 = \dfrac{70{\cdot}5}{141{\cdot}7}$ $\quad \dfrac{H+y}{2} = 70{\cdot}8$ $\quad 1{\cdot}85003$

$1{\cdot}36745 = 23{\cdot}3 = x_1$

$3{\cdot}792 - \quad 3{\cdot}57887$

$2{\cdot}35992 = - \quad 229{\cdot}0$

$4834{\cdot}7 = 3{\cdot}68437/2$

$y_2 = \dfrac{695}{140{\cdot}7}$ $\quad \dfrac{H+y_2}{2} = 70{\cdot}35$ $\quad 1{\cdot}84726$ $\qquad 1{\cdot}84218 = 69{\cdot}5 = y_2$

$1{\cdot}73161 = 53{\cdot}9 = x_1 + x_2$ $\qquad x_2 = 30{\cdot}6$

Most már tervezendő volna 8·662 becshold, azonban ez már nem adható az a darabból, hozzá kell még venni a b darabot, s a c darabból

$a + b = - 8.131$

$1 + 2 + 3 = \quad 8.662$

$0{\cdot}531$ becsholdat kell a 3 részlethez tervezni.

A c darabnál $H = 639$, $h = 459$, $S = 72{\cdot}1$, $H^2 = 4083{\cdot}2$

$2\,(H - h) = \dfrac{36{\cdot}0}{72{\cdot}1} = 1{\cdot}55630$

$1{\cdot}85794$

$0{\cdot}69836 - 1 = k$

$H = 63{\cdot}9$ $\qquad 531$ $\qquad 2{\cdot}72509$ $\qquad 4083{\cdot}2$

$y_3 = \dfrac{61{\cdot}2}{125{\cdot}1}$ $\qquad 2{\cdot}42345 = \dfrac{265{\cdot}1}{3818{\cdot}1} = 3{\cdot}58185/2$

$\dfrac{H+y_3}{2} = 62{\cdot}55$ $\quad 1{\cdot}79623$ $\qquad 1{\cdot}79092 = 61{\cdot}2 = y_3$

$0{\cdot}92886 = 8{\cdot}5 = \underset{c}{x_3}$ $\quad \underset{a}{x_3} + x\,b + \underset{c}{x_3} = 72{\cdot}0$

$531 + 3038 = \quad 3{\cdot}55255$

3569 $\qquad 3{\cdot}25091 = \dfrac{1782{\cdot}0}{2301{\cdot}2} = 3{\cdot}36196/2$

$1.68098 = 48{\cdot}0 = y_4$

$y_4 = \dfrac{48{\cdot}0}{111{\cdot}9}$ $\quad \dfrac{H+y_4}{2} = 5595$ $\quad 1{\cdot}74780$

$1{\cdot}80475 = 63{\cdot}8 = \underset{c}{x_3} + x_4$ $\quad x_4 = 55{\cdot}3$

A fennmaradó rész a c darabbal az 5. részletet adja.

Csoport	Birtokív szám és a tag neme	Szelvény szám	Szélessége	Középhossza	Összesen		I 1000		II 1200		III 1500		IV 1800		V 2500			
					hold	□-öl	hold	□-öl	hold	□-öl	hold	□-öl	hold	□-öl	hold	□-öl		
						‰		‰		‰		‰		‰		‰		
26/1	55 szántótag	3	23·3	108·1	1	918		278		246		1139		425		430		
					1	*650*	*0*	*278*	*0*	*205*	*0*	*759*	*0*	*236*	*0*	*172*		
26/2	464 „	„	30·6	101·3	1	1498		569		435		1008		666		420		
					2	*142*	*0*	*569*	*0*	*363*	*0*	*672*	*0*	*370*	*0*	*168*		
26/3	451 „	„	72·0	89·3	4	32	1	363		1529		490	1	497		353		
					4	*870*	*1*	*963*	*1*	*274*	*0*	*327*	*1*	*165*	*0*	*141*		
26/4	310 „	„	55·3	74·1	2	896		681	1	56			1	159				
					3	*038*	*0*	*681*	*1*	*380*			*0*	*977*				
26/5	260 „	„	rendetl.			706		12		330				364				
					0	*489*	*0*	*012*	*0*	*275*			*0*	*202*				
	Összesen				10	850	2	303	2	996	1	1037	3	511		1203		
					12	*189*	*3*	*503*	*3*	*497*	*1*	*758*	*2*	*950*	*0*	*481*		

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ki levén számítva az egyes részletek szélessége, minden részletnél az egyes becsosztályok értékét számítjuk ki, úgy hogy levesszük az egyes becshosszakat, s összeadjuk és állítjuk a számított y-ok összegére. Csekély különbség mindig lesz benne. Az egyes osztályok adataiból kiszámítjuk azok becsértékét. (Szorzó könyvvel igen gyorsan megy.) A nyert becsértékeket bevezetjük a számítási könyvbe. Az egyes becsosztályok összege nem fogja kiadni a részlet pontos becsösszegét, de ezt most figyelmen kivül hagyjuk. Minden részletnél ezt elvégezve, a becsterületeket szorozzuk az osztály arányszámával (szorzókönyvből), kiszámítjuk a kataszteri területeket. Mikor ezzel készen vagyunk, összegezzük, s összehasonlítva a csoportszámítás eredményével, a mutatkozó különbséget ennek megfelelően eloszlatjuk. Most már az egyes részletek valódi területeit megállapítjuk, s ezt a meglevő szélességgel elosztva kiszámítjuk a részletek középhosszait.

NEGYEDIK SZAKASZ.

A számszeres (logarithmusos) léptékről.

Ezen szakasz a számszeres lépték (logarléc) használatát tárgyalja. Minden logarléchez van használati utasitás, azért ezen szakasznak itteni közlését fölöslegesnek találom.

ÖTÖDIK SZAKASZ.

Rézsút szélességeknek függélyesekre változtatása.

10. ábra.

$ABCDE$ dülőben levő földek szélességeit a dülő mentében t. i. AB és CDE vonalakon mértük meg és ezen mérések után raktuk fel a szélességeket térképünkön.

Ámde ezen szélességeket számítási adatokul nem használhatjuk, miért is a függélyes szélességeket vagy megmérjük a mezőn, ami mindenesetre több, mint kétszeres munka, vagy levesszük ugyane szélességeket a térképről.

Hogy tehát egyrészt a kétszeres mezei munkát elkerülhessük, de másrészt mégis kielégitő pontossággal kaphassuk meg a számítási adatul használandó függélyes szélességeket, más módhoz kell fognunk.

11. ábra.

Legyen AB a megmért rézsút szélesség, és AC a függélyes, úgy $AC = AB \cos \alpha$.

Azonban ez nem igen lenne kényelmes eljárás, ha trigonometrikus számításba kellene keverednünk.

E végett szögmásolót állítottam össze (11. ábra), mely azon szögeket tartalmazza, melyeknek cosinusai egész számot képeznek 100 öles félátmérőre, t. i. 99, 98, 97 stb. 60-ig. Tehát a fenti képletben $\cos \alpha$ helyett ezen számot, AB helyett a mért szélességeket téve lesz $AC = AB \frac{m}{100}$, hol m a szögmásoló száma.

Ezen szögmásoló átlátszó papirra rajzolandó és az egész munkálat abban áll, hogy A pontot rátesszük a föld sarkára, AD, vagy AE vonalat a hosszoldalára és megnézzük, hogy a rézsút szélesség iránya melyik számnak felel meg. Ezen számmal szorzom a megmért szélességeket, elosztom 100-al és megvan a függélyes szélesség. Pl. a rézsút szélesség $AB = 8{\cdot}7$, a szögmásoló mutat 89-et, tehát a függélyes szélesség $= \frac{8{\cdot}7 \times 89}{100} = 7{\cdot}74$.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

Ha több darab földnek hajlása ugyanazon szög alatt van, úgy mindvégig megmarad a 89, s amint a dülő szélén törés fordul elő, újra alkalmazzuk a szögmásolót. Ez már magában is könnyű munka, de a számszeres lépték segítségével könnyen, úgy szólva játszva juthatunk a kivánt eredményhez.*)

Hogy egyébiránt ezen módot a kiosztásnál is használhatjuk, magától értetődik, csakhogy ez esetben a kiszámított függélyes szélességet kell a szögmásoló számával elosztani. Pl. $\frac{15{\cdot}4 \times 100}{95}$.

*) Logarléccel mindenesetre igen gyorsan megy ezen számítás, de ha az nincs kéznél, egyszerű iskolai szögmérővel is levehetjük α szöget s az így levett α szögekre eső reductio a felmérési utasitásban és geodéziai naptárban feltalálható.

ERDŐRENDEZŐSÉG * Szombathely * M. KIR. SZÁMVIZSZÉKI ÁLLAMI

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

III. Rajzmellékletek.

I. melléklet: Magyarország I. rendü szintezése.
II. és III. melléklet: Országos háromszögelési vázlatok.
IV. melléklet: A Süss-féle nagy teodolit metszete.

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

MAGYARORSZÁGOS ERDÉSZETI EGYESÜLET
1851 / 1866

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.

wandecz

M. KIR. SZOMBATHELYI ÁLLAMI ERDŐRENDEZŐSÉG Szombathely

© OEE Wagner Károly Erdészeti Digitális Szakkönyvtár 2020. Támogató: Agrárminisztérium szerz.sz.: EGF/68-1/2020.