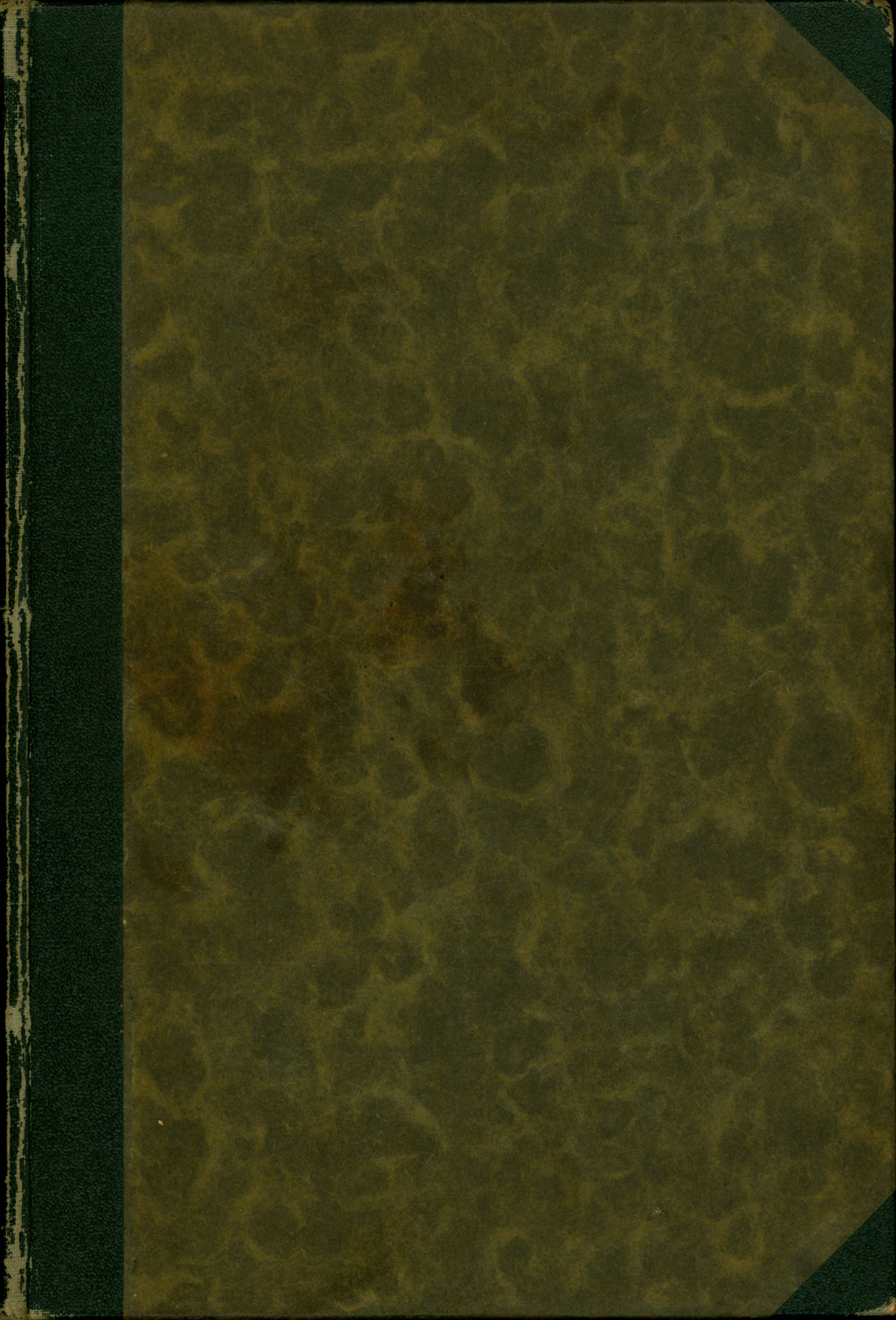
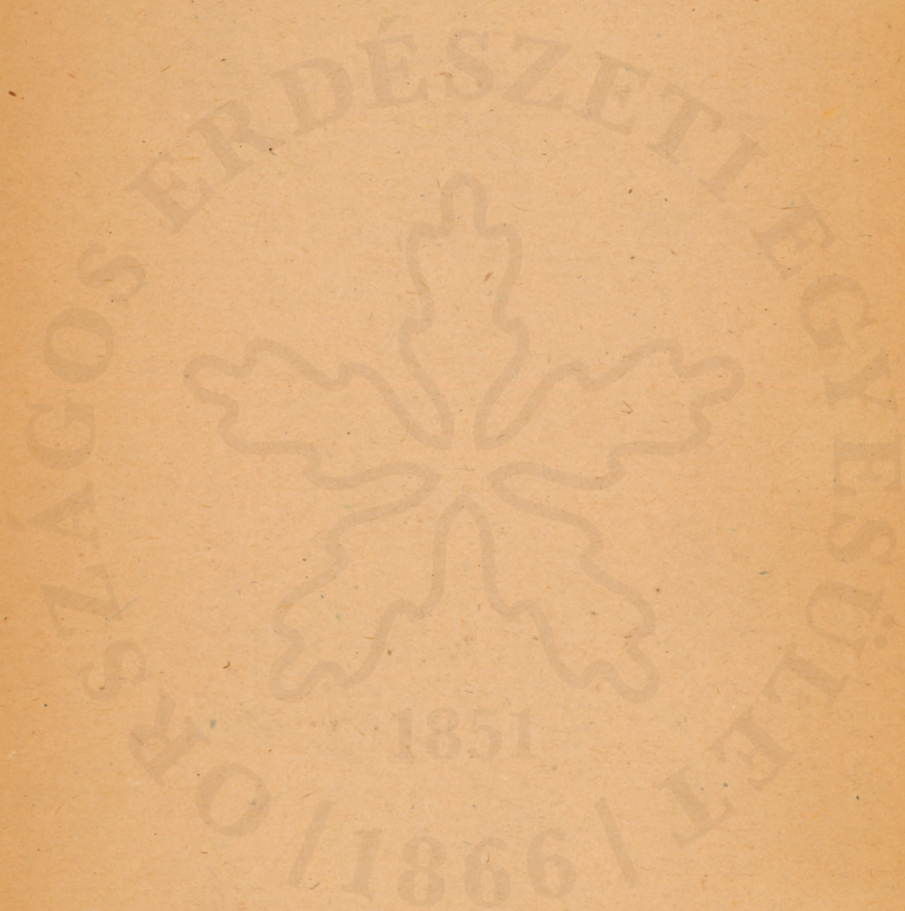
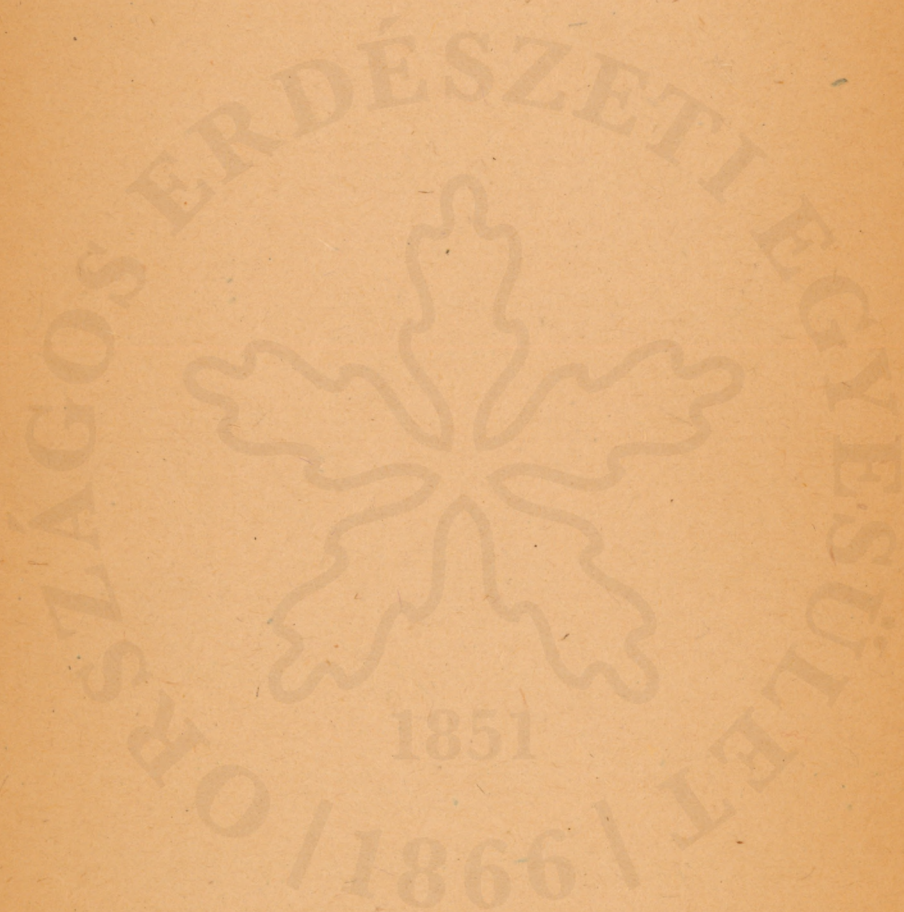


KÖVESI: SZILÁRD SÁGTTAN







SZILÁRDSÁGTAN

ÉS GYAKORLATI PÉLDÁK
GYÜJTEMÉNYE

TANKÖNYV
FŐISKOLAI HALLGATÓK SZÁMÁRA

ÍRTA

KÖVESI ANTAL

A M. KIR. BÁNYAMÉRNÖKI ÉS ERDŐMÉRNÖKI FŐISKOLA R. TANÁRA
OKL. GÉPÉSZMÉRNÖK

A SZÖVEG KÖZÉ NYOMTATOTT 392 ÁBRÁVAL

KIADJA

A M. KIR. BÁNYAMÉRNÖKI ÉS ERDŐMÉRNÖKI FŐISKOLA
KÖNYVKIADÓ ALAPJA

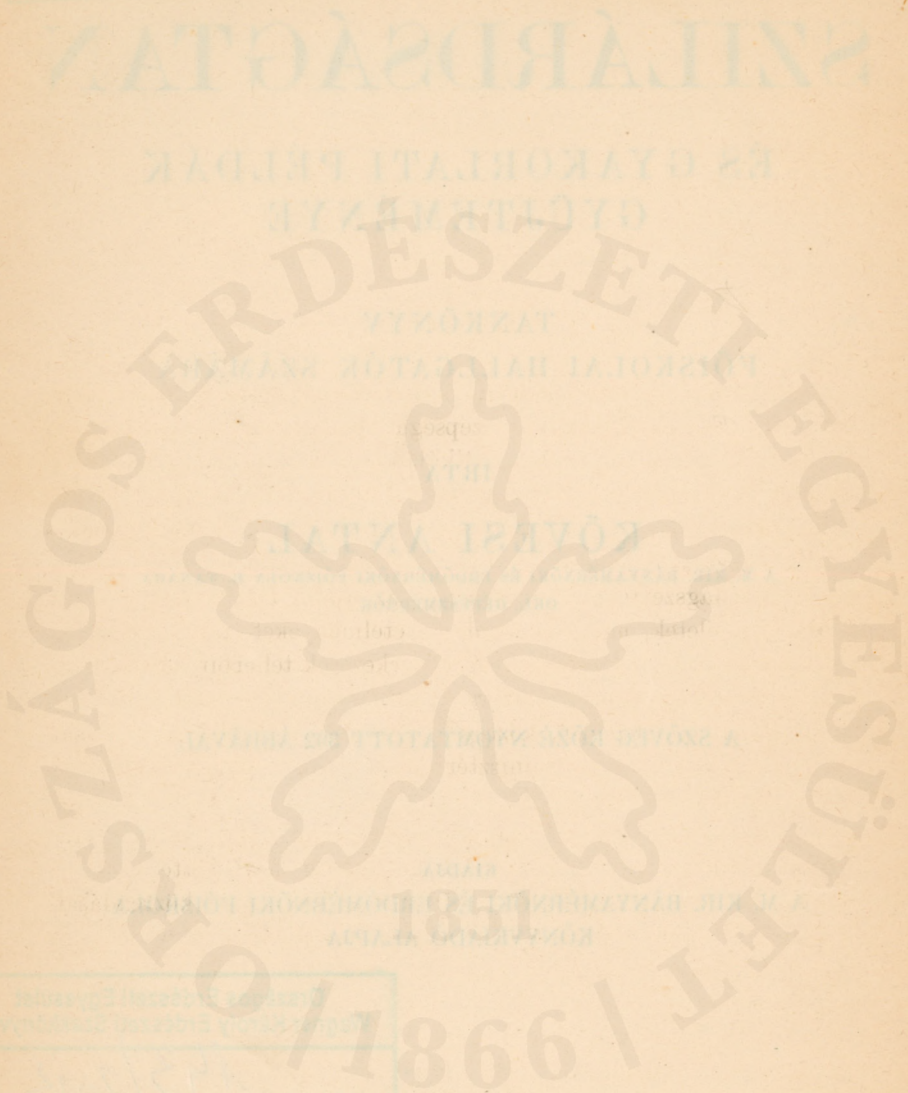
Országos Erdészeti Egyesület Wagner Károly Erdészeti Szakkönyvtár	
Leltári szám:	143/2013
Csoport szám:	I.
Raktári jelzet:	S. III. III.

BUDAPEST

AZ ATHENAEUM IRODALMI ÉS NYOMDAI R.-T. NYOMÁSA

1927

OEE KÖNYVTÁR
AR EL 2020



37902. — Budapest, az Athenaeum r.-t. könyvnyomdája.

ELŐSZÓ.

Közel 34 év előtt jelent meg nagynevű tanszéki elődömnek, *Herrmann Emilnek* klasszikus szépségű »Szilárdságtan« című munkája, mely a rugalmas testek sztatikáját — a bánya- és kohómérnök-hallgatók igényeit szem előtt tartva — nagy alaposággal és kiváló felkészültséggel tárgyalja. Az utolsó évtizedekben a technikai tudományok rohamos fejlődése, az anyagvizsgálattal kapcsolatos és széles mederben, világszerte folyó kísérletek, az újabb feszültségi és alakváltozási elméletek, mind nagyobb követelményeket támasztottak a bányászat és kohászat körébe vágó szerkezetek teherbírásának megállapítására és ez vezette a szerzőt arra, hogy e szaktudományok mai nívójának megfelelően, közreadja munkáját, melynek kiadását a nagym. m. kir. Pénzügyminisztérium kegyes anyagi támogatása tette lehetővé.

A nagy világháború s az ezt követő szomorú emlékű forradalmak, majd a trianoni gyászos béke sokáig késleltette ezen — a szakoktatás szempontjából kívánatos — tankönyv közreadását, jóllehet mint régi főiskolai tanár nagyon jól tudom, hogy az előadások figyelmes hallgatása mellett mennyire megkönnyítik az ifjúság részére az anyag elsajátítását a speciális igényeket szem előtt tartó szakmunkák is.

Egyes szerkesztéseket, melyek a tehetetlenségi és centrifugál nyomatókrokra, a fõtehetetlenségi tengelyekre, a csuklós tartókra, rácsos művekre, mozgó terhelésekre, magszelvényekre stb. vonatkoznak, azért nem vettem itt fel, mert azok a »Grafosztatika és Vasszerkezetek« című könyvemben megtalálhatók.

Munkát és fáradságot nem kímélve, szeretettel és nagy buzgósággal iparkodtam a szakmunkák és folyóiratok gondos áttanulmányozása után könyvemet megírni és a szakértő könnyen felismeri az újonnan kidolgozott részleteket és elméleteket, továbbá egyes

praktikus feladatok kidolgozásának célját is. Főtörekvésem volt a legelméletibb fejezeteket is a hallgatóság részére mentől inkább hozzáférhetőbbé tenni és meggyőződésem, hogy az ifjú mérnöki generáció is haszonnal forgathatja e könyvet.

A szilárdságtani ismeretek alapját képezik a gépészetnek és építészetnek és hazánk rekonstruálása idejében fokozott mértékben kell súlyt helyezni az ökonómia elveire is, a biztosság feltételeinek kidomborítása mellett. Amikor azonban azt látjuk, hogy pl. a mennyezet oly erősen van megterhelve, hogy a födémgerendák besüllyedése folytán már a vakolat lehull; avagy ha figyelemmel kísérjük azokat a félelmetes rezgéseket, melyeket a mozgó járóművek a hídpálya szerkezetében kiváltanak, ha azokra a katasztrófákra gondolunk, melyeket gátszakadások, beomlások, robbanások, kétélszakadások stb. okoznak: akkor mindenki azonnal belátja, hogy milyen szerepet játszanak a mérnöki munkakörben az elaszticitási és deformációs elméletek, ismeretek, — de ezek egyúttal felkeltik a tervező szakemberben a felelősség érzetét is.

A szerkesztési ábrák pontos elkészítésénél és a korrektúra fáradságos munkájában, nagy szorgalommal és buzgó törekvéssel — *Gyulay Zoltán* és *Milasovszky Béla* főisk. tanársegéd urak és *Kövesi Pál* III. éves kohómérnök-hallgató úr — voltak segítségemre, akiknek ezúton is leghálásabb köszönetemet fejezem ki. A könyv esetleges hiányaiért az érdekelt körök szíves elnézését kérem.

A mű szép kiállítását az *Athenaeum* nyomdájának köszönheti.

Sopron, 1927. június hó 15-én.

Kövesi Antal.

MECHANIKA II. ÉVFOLYAM.

A RUGALMAS TESTEK SZTATIKÁJA.

Bevezetés.

A Mechanika I. évfolyamában a testeket mereveknek tekintettük, azaz feltételeztük, hogy alakjuk a külső erők behatására nem változik meg. Megfigyelve azonban valamely testet, melyre külső erők működnek, azt tapasztaljuk általában, hogy a test kétféle változást szenved. *Az egyik a test helyzetváltozásával járó tünemény a térben, vagyis a mozgás, ami igen könnyen észlelhető. A másik változás az alakváltozás (deformáció), azaz a test egyes részeinek (anyagi pontjainak) egymáshoz képest történő helyzetváltozása,* ami azonban már nem olyan szemebetűnő és rendszerint csak nagyon pontos műszerekkel állapítható meg. A deformációt az anyagrészecskék rövidebb-hosszabb ideig tartó rezgésszerű mozgása kíséri és annak megszűntével a részecskék ismét nyugalomba jönnek, ha eredetileg is sztatikai állapotban voltak.

I. FEJEZET.

Szilárdságtani alapfogalmak és a tartó terhelése.

1. §. A rugalmasság és szilárdság fogalma.

Ha egy test külső erők hatása alá kerül, a test alakja megváltozik, utána ismét egyensúlyba jut, amikor is a külső erők egyensúlyt tartanak a belső erőkkel. Felszabadítva a testet a külső erők hatása alól, az alakváltozás egészen, vagy részben elmú-

lik. Ezt a tüneményt a szilárd test rugalmasságának tulajdonítjuk. *A rugalmasság tehát a test azon tulajdonsága, melynél fogva a külerők hatásának felfüggesztése után újból fölveszi eredeti alakját.*

A test tökéletesen rugalmas, ha teljesen visszanyeri eredeti alakját; ellenkező esetben tökéletlenül vagy részben rugalmas. Ennek megfelelően az alakváltozás is vagy múló, vagy maradó. A valóságban sem tökéletesen rugalmas (maradó alakváltozás zéró), sem tökéletesen rugalmatlan (múló alakváltozás zéró) test nincs, tehát minden alakváltozás egy múló és egy maradó részből áll. Tapasztalás szerint egy bizonyos határig a maradó alakváltozás elenyésző kicsi a múlóval szemben. Ezen ú. n. rugalmassági határon túl a maradó alakváltozás már nem hanyagolható el, a rugalmassági határon belül azonban a testeket gyakorlatilag teljesen rugalmasaknak tekinthetjük. *A rugalmassági határ tehát az a megterhelés (H), amelynél kisebb csak múló, amelynél nagyobb pedig maradó alakváltozást idéz elő.*

A rugalmasság jelenségeit a testek legkisebb részei között működő belső erőkkel (kohézió) magyarázzuk. Ezen erők a részecskék egymástól való távolságának, s így a test alakjának függvényei. Ha a testet például valamely húzóerővel megnyújtjuk, a részecskék egymástól való távolsága nő, ezen növekedéssel bizonyos törvény szerint arányos vonzóerők lépnek fel, míg végre a külső húzóerő és a belső, ellenkező irányban ható vonzóerők között egyensúly jön létre.

Mint a fizikából ismeretes, a kohézió a molekuláris erők egyik faja, s csak igen kis távolságokon belül működik. Ha tehát a molekulák egymástól való távolsága bizonyos határig nőtt, ezen túl a kohézió már rohamosan csökken, sőt teljesen megszűnik, a test elszakad, eltörik. Míg tehát a külerőket minden határon túl növelhetjük, addig a belsőerőknél van egy, az anyag minőségétől függő határ, melyen túl már törés jön létre. Így valamely 1 mm² kereszt-szelvényű folytacéldrót 120 kg húzóerőnek még ellenáll, de ha például 130 kg súlyt akasztunk rá, elszakad. Hasonló kereszt-szelvényű sárgarézdrót már 13 kg terhelésnél elszakad, mert itt a maximális terhelés csak 12,4 kg.

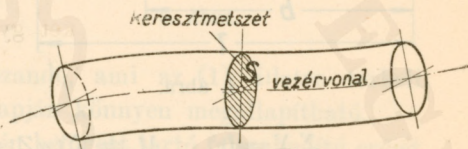
Szilárdság alatt azon ellenállást értjük, amelyet az anyag a szétválasztással szemben kifejt.

A belső erőknek a területegységre jutó részét *feszültségnek* nevezzük.

A szilárdságtan feladata megállapítani a külerők és a belső feszültségek közti egyensúly feltételeit. Általános alakú testeknél ezen feltételek igen komplikáltak s csak nehezen vehetők számításba, ezért a gyakorlatban csak ú. n. tartókat (rudakat) szokás alkalmazni, melyeknél a viszonyok egyszerűbbek és pontosan megállapíthatók.

2. §. A tartókról általában.

Tartónak nevezzük az olyan szilárd testet, melynek alakját egy adott síkterület írja le, ha súlypontja egy adott vezérvonalon mozog, s e közben a síkterület mindenkor merőleges a vezérvonalra. *A vezérvonal a tartó középvonala, a síkterület pedig a tartó kereszt-szelvénye (1. ábra).* A tartó egyenes vagy görbe, aszerint, amint maga a vezérvonal egyenes vagy görbe. A görbe tartó ismét lehet sík- vagy térbeli, aszerint, amint a vezérvonal sík- vagy térbeli görbe. Mi főleg az egyenes tartókkal fogunk foglalkozni.

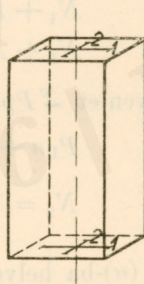


1. ábra.

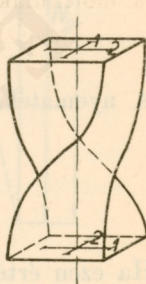
Ha a leíró síkterület alakja és nagysága mozgás közben változatlan, a tartó állandó szelvényű, — ellenkező esetben változó kereszt-szelvényű. Az egyenes és állandó kereszt-szelvényű tartót prizmának nevezzük, ha a szelvények főtehetetlenségi tengelyei mind ugyanazon síkban fekszenek (2. ábra). Ha ellenben a leíró síkterület főtehetetlenségi tengelye mozgás közben görbe felületet ír le, akkor a tartó lehet egyenes és állandó szelvényű, de nem prizmás (3. ábra).

A tartó mindenkor más szilárd testekkel van összekapcsolva és pedig:

1. alátámasztás,
2. befogás,
3. csukló ízület,



2. ábra.



3. ábra.

illetőleg ezek kombinációja által. Ha tehát a tartó valamely szelvényére ható külső erőket meg akarjuk határozni, azt előbb a

sztatikából ismeretes módon fel kell szabadítanunk. A felszabadítás a következő elvek szerint történik:

1. *Alátámasztott tartók felszabadítása (4. ábra).* Az alátámasztást deréknyomással helyettesítjük, mely a támasztólappra merőlegesen hat s iránya összévág a normális azon részével, mely a

támasztólappnak ugyanazon oldalán fekszik, mint a tartó. A működő és a felszabadító erők egyensúlyban vannak, tehát alkalmazhatjuk a sztatika következő alapegyenleteit:

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= 0 \\ \sum Y &= 0 \\ \sum P_p &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

a síkban, illetőleg

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= 0 & M_x &= \sum (yZ - zY) = 0 \\ \sum Y &= 0 & M_y &= \sum (zX - xZ) = 0 \\ \sum Z &= 0 & M_z &= \sum (xY - yX) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

a térben szétszórva működő erőknél. Egyenes tartóknál leggyakrabban egy síkban működő parallel erőkkel van dolgunk. Így a 4. ábrában feltüntetett viszonyok között az N_1 és N_2 felszabadító erőket következőképpen határozhatjuk meg:

Mivel az erők az x tengelyre merőlegesek, ennek irányában szállítóhatásuk egyáltalában nincsen, s így a $\sum X = 0$ egyenletnek nem vehetjük hasznát. A $\sum Y = 0$ egyenlet esetünkben ilyen alakot ölt:

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 - P_1 - P_2 &= 0 & \text{vagyis} \\ N_1 + N_2 &= P_1 + P_2 \end{aligned} \quad (\alpha)$$

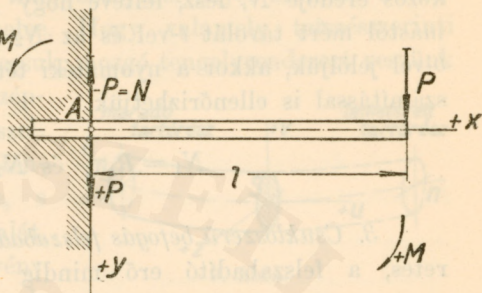
A nyomatéki egyenlet $\sum P_p = 0$ a következő lesz:

$$\begin{aligned} P_1 a + P_2 b - N_2 l &= 0 & \text{miből} \\ N_2 &= \frac{P_1 a + P_2 b}{l} \end{aligned} \quad (\beta)$$

Ha ezen értéket (α) -ba helyettesítjük, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} N_1 &= P_1 + P_2 - N_2 = \frac{P_1 l + P_2 l - P_1 a - P_2 b}{l} & \text{vagyis} \\ N_1 &= \frac{P_1 (l - a) + P_2 (l - b)}{l} \end{aligned} \quad (\gamma)$$

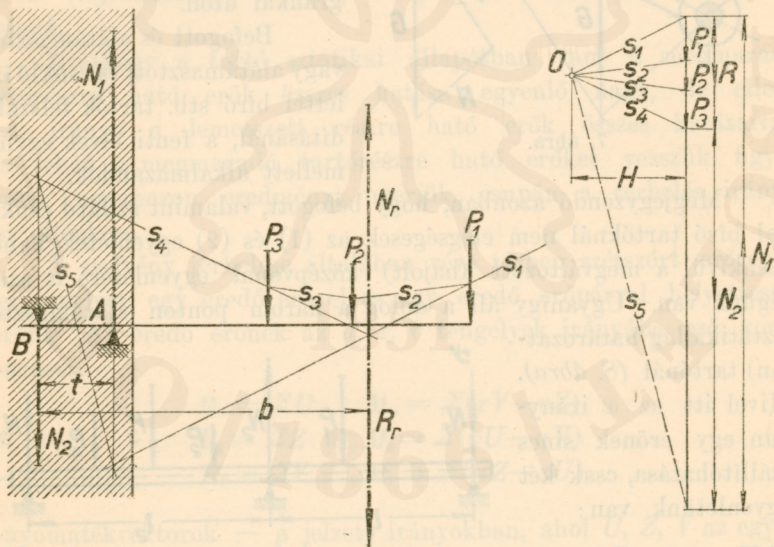
2. Befogott tartó felszabadítása (5. ábra). Ha a befogott A szelvényre a P erőt $+$ és $-$ értelemben átvisszük, az egyensúly nem változik. Ekkor „ $+P$ ” a „ $-P$ ”-vel erőpárt alkot, melynek forgatónyomatótéka M ; s így a felszabadításnál egy ezzel egyenlő nagy, $-M$ ellen-nyomatótékat kell alkalmaznunk. A $+P$ csupán nyomást gyakorol a falra, s így N felszabadító erővel ellensúlyozható.



5. ábra.

A befogást tehát alátámasztással és ellennyomatótékkal helyettesíthetjük, s így a felszabadításnál egy deréknomás és egy erőpár ellensúlyozandó, ami az (1), illetve térbeli viszonyoknál a (2) egyenletek alapján könnyen megállapítható.

Az előzőekben az egyik végén befogott tartó felszabadító erőjét a veszélyes szelvény helyén vettük fel. Minthogy azonban az egyen-



6. ábra.

súlyban levő tartónál a külerők a felszabadító erőkkel egyensúlyt tartanak, következik az, hogy a felszabadító erőnek (N -nek) nemcsak egyenlő nagynak kell lennie a működő külerők R_r eredőjével, hanem vele közös támadóponttal is kell bírnia (6. ábra). Tehát

ezen utóbbi erő irányába kell esni a felszabadító erők N_r eredőjének is. Ez természetesen csak akkor lehet, ha a falazatban két különböző értelmű N_1 és N_2 reakcióerő keletkezik, amelyeknek közös eredője N_r lesz, feltéve hogy $N_1 > N_2$. Ha N_1 és N_2 egymástól mért távolsát t -vel és az N_2 felszabadító erő távolsát R_r -től b -vel jelöljük, akkor a nyomatéki tétel alapján a felszabadító erőket számítással is ellenőrizhetjük.

$$N_1 = R_r \frac{b}{t} \text{ és } N_2 = -R_r + N_1$$

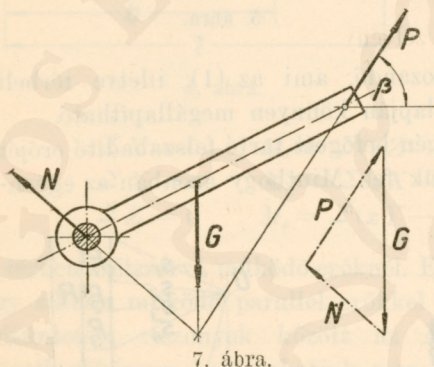
3. *Csuklószerű befogás felszabadítása.* Mint a sztatikából ismeretes, a felszabadító erő mindig a csukló középpontján megy keresztül. Ezenkívül egyensúly esetén az erők egy közös pontban metszik egymást (7. ábra). Ezek alapján a felszabadító erő irányra és nagyságra nézve meghatározható, legegyszerűbben grafikai úton.

Befogott és alátámasztott, vagy alátámasztott és csukló ízülettel bíró stb. tartók felszabadításánál, a fenti elvek egymás mellett alkalmazandók.

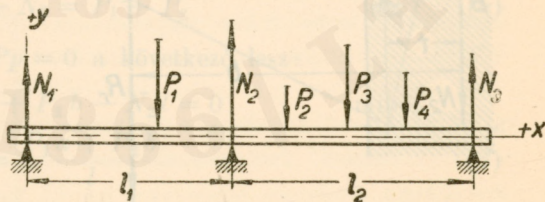
Megjegyzendő azonban, hogy befogott, valamint szilárd csuklóval bíró tartóknál nem elégségesek az (1) és (2) egyenletek, hanem ezenkívül a megváltozott (hajolt) középvonal egyenletére is szükségünk van. Ugyanígy áll a dolog a három ponton alátámasztott (sztatikailag határozatlan) tartónál (8. ábra). Mivel itt az x irányban egy erőnek sincs szállítóhatása, csak két egyenletünk van:

$$\sum Y = 0 \text{ és } \sum Pp = 0$$

ami három ismeretlen (N_1 , N_2 , N_3) kiszámítására elégtelen. A még szükséges harmadik egyenletet a középvonal alakja szolgáltatja. Ilyen tartók felszabadítását tehát csak később tárgyalhatjuk.



7. ábra.

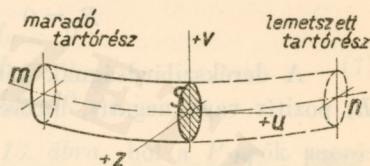


8. ábra.

3. §. A tartó és szelvény terhelése.

A tartóra ható erőket a tartó terhelésének nevezzük.

Egy és ugyanazon tartó különböző szelvényei azonban különbözőképpen lehetnek megterhelve. Hogy valamely tetszőszerinti szelvény terhelését megállapíthassuk, mozgó tengelyrendszert veszünk fel. A koordinátarendszer középpontja összeesik a választott szelvény súlypontjával (S). Az u tengely merőleges a szelvényre, s érinti a tartó mn középvonalát, míg a z és v tengelyek a szelvény főtehetetlenségi tengelyeivel esnek



9. ábra.

össze (9. ábra). A tartót a szelvényben elmet szve képzeljük s azon Sn részt, mely a $+u$ tengelyt magában foglalja, lemet szett tartórésznek, a másikat (Sm) pedig megmaradó tartórésznek nevezzük.

A szelvény terhelését azon külső és felszabadító erők és erőpárok (nyomatékok) képezik, melyek a lemet szett tartórészre hatnak.

Mint hogy a tartó sztatikai állapotban van, a megmaradó tartórészre ható erők összes hatása egyenlő nagy, de ellenkező irányú a lemet szett részre ható erők összes hatásaival. Ha tehát a megmaradó tartórészre ható erőket vesszük figyelembe, ugyanazon eredményt nyerjük, csupán a terhelés iránya lesz ellenkező.

A szelvény terhelése általában véve térben szétszórt erőrendszer, melyet egy eredő erővel és egy eredő erőpárral helyettesíthetünk. Az eredő erőnek az u , z , v tengelyek irányába eső komponensei:

$$\begin{aligned} R_u &= \sum U & M_u &= \sum (zV - vZ) \\ R_z &= \sum Z & \text{és } M_z &= \sum (vU - uV) \\ R_v &= \sum V & M_v &= \sum (uZ - zU) \end{aligned} \quad (3)$$

a nyomatékvektorok — a jelzett irányokban, ahol U , Z , V az egyes P erőknek az illető tengelyekre vonatkozó összetevői.

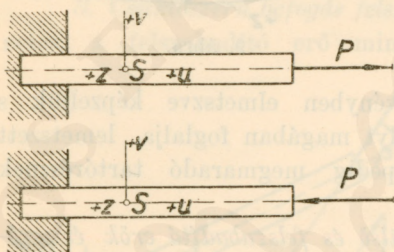
A tartó lehet derékszárúvá, nyírásra, hajlításra és csavarásra igénybevételre. Ha ezen egyszerű igénybevételek közül kettő vagy több egyidejűleg fordul elő, *összetett igénybevétel* van dolgunk.

Az egyes igénybevételek analitikai ismertetőjelei a következők:

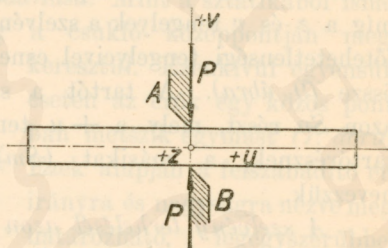
a) Ha a külerőknek nincs forgatóhatásuk és szállítóhatásuk is csak az u tengely irányában van, akkor ezen erők a szelvényt *derékszilárdságra* veszik igénybe. Ez esetben tehát:

$$\begin{aligned} R_u &\geq 0 & M_u &= 0 \\ R_z &= 0 & \text{és} & M_z = 0 \\ R_v &= 0 & M_v &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

A derékszilárdságnak két faja van és pedig aszerint, amint R_u pozitív vagy negatív, húzásra, illetőleg összenyomásra vették a



10. ábra.



11. ábra.

szelvény igénybe. Ilyen igénybevételt hoz létre minden erő, mely a súlypontban hat, s melynek iránya összeesik a tartó középvonalával (10. ábra).

b) Ha a külerőknek nincs forgatóhatásuk, sem pedig a tartó középvonalába eső szállítóhatásuk, úgy a szelvény *nyírószilárdságra* van igénybevéve. Ilyenkor:

$$\begin{aligned} R_u &= 0 & M_u &= 0 \\ R_z &\geq 0 & \text{és} & M_z = 0 \\ R_v &\leq 0 & M_v &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Ilyen igénybevételt tüntet fel a 11. ábra, ahol A és B valamely szerszámgép két kése. A feltüntetett esetben csakis a v tengely irányában van szállítóhatás.

c) Ha szállítóhatás semilyen irányban nincs, de van forgatóhatás valamely, a szelvény síkjában fekvő tengely körül, akkor *hajlító igénybevétellel* van dolgunk. Ennek egyenletei:

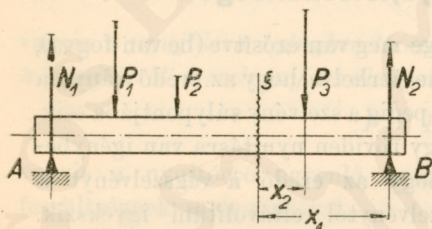
$$\begin{aligned} R_u &= 0 & M_u &= 0 \\ R_z &= 0 & \text{és} & M_z \geq 0 \\ R_v &= 0 & M_v &\leq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Ilyen igénybevételt tüntet fel a 12. ábra, az ábrán jelölt esetben csak a z tengely körül van forgatóhatás. A ξ szelvényre a nyomaték $M_\xi = N_z x_1 - P_3 x_2$

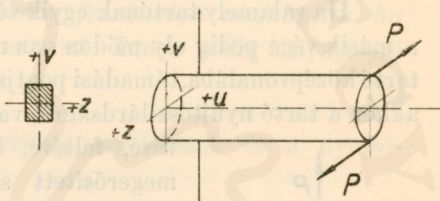
d) Ha végül szállíthatóság nincs, csupán a tartó középvonala, mint tengely körül van forgatóhatás, az igénybevétel *csavarásra* történik. Ennek egyenletei:

$$\begin{aligned} R_u &= 0 & M_u &\geq 0 \\ R_z &= 0 \text{ és } & M_z &= 0 \\ R_v &= 0 & M_v &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Ilyen igénybevételt mutat a 13. ábra, hol a P erők merőlegesen a tartó középvonalára és erőpárt alkotnak.



12. ábra.



13. ábra.

e) Az egyszerű igénybevételek közé számítják még a *kihajlás elleni* (visszaható) szilárdságot. Ez hosszú, vékony tartók összenyomásánál fordul elő. Ilyenek a hajtórudak, oszlopok stb.

Az összetett igénybevétel két vagy több egyszerűből származik, s könnyen felismerhető a terhelés egyenleteiből. Így ha valamely szelvényre nézve azt találjuk, hogy:

$$\begin{aligned} R_u &\geq 0 & M_u &= 0 \\ R_z &= 0 \text{ és } & M_z &\geq 0 \\ R_v &= 0 & M_v &= 0 \end{aligned}$$

akkor $R_u \geq 0$ derékszilárdságra, $M_z \geq 0$ pedig hajlításra való igénybevételt mutat. Gyakorlati szempontból legfontosabbak azon esetek, midőn valamely tartó húzásra és hajlításra, vagy hajlításra és csavarásra van egyidejűleg igénybevéve.

A szilárdságtan feladata:

1. meghatározni azon terheléseket, melyeket adott anyagú és alakú tartó bizonyos körülmények között elbír;

2. meghatározni a terhelés folytán bekövetkező alakváltozásokat.

Derékszilárdság.

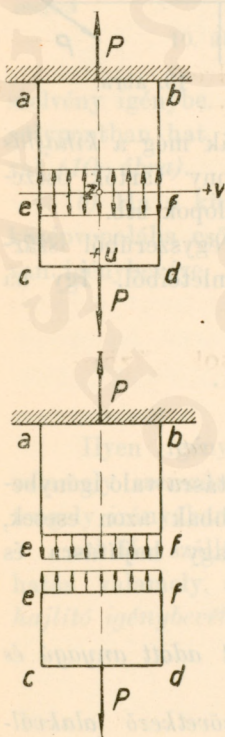
4. §. Egyenes tartó derék- (normális) szilárdsága és a rövid prizma nyújtófeszültsége.

Ha valamely tartónak egyik vége meg van erősítve (be van fogva), a másik vége pedig oly módon van megterhelve, hogy az eredő iránya a tartó középvonalába, támadási pontja pedig a szelvény súlypontjába esik, akkor a tartó nyújtószilárdságra, vagy röviden nyújtásra van igénybevéve, feltéve, hogy az eredő a végszelvényt a megerősített szelvénytől eltávolítani igyekszik.

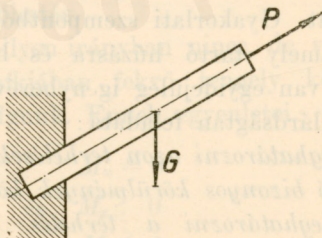
Súlytalan tartót bármely állásban lehet nyújtásra igénybevenni, míg ellenben súllyal bírót csak akkor, ha a középvonal függélyes állású (14. ábra), mert ellenkező esetben a tartó G súlya hajlítónyomatékokot okoz (15. ábra). Rövid tartó lényegtelen hibával súlytalanak tekinthető.

$a-b$ a befogott szelvény,
 $c-d$ a terhelt szelvény,
 $e-f$ a változó szelvény.

Ha a tartót a felvett $e-f$ változó szelvényben elvágva képzeljük, akkor a lemetezett tartórész $cdef$, erre hat a P erő merőlegesen.



14. ábra.



15. ábra.

Ennél a terhelési módnál az erő egyenletesen oszlik el a szelvény területén. A lementszett tartórész pótlására kis belső erőket kell működtetni, hogy az egyensúly fennmaradjon. A szelvény terhelése $R_u = P$, ami megfelel a nyújtószilárdság alapegyenleteinek, mert csupán R_u különbözik nullától és pedig $R_u > 0$.

A szelvény területegységére jutó erőt általában feszültségnek (fajlagos feszültség σ) nevezzük. Ha csupán nyújtóerő hat a szelvényre, akkor a felébresztett belső erőknek a terület egységére jutó részét nyújtófeszültségnek (szakítófeszültség) nevezzük.

Ha P a nyújtóterhelés, F a szelvény területe, σ a keletkezett feszültség, akkor

$$\sigma = \frac{P}{F} \quad (8)$$

vagyis a nyújtásra igénybevett szelvény feszültségét megkapjuk, ha a nyújtóerőt a szelvény területével osztjuk. Innen pedig a nyújtóerő

$$P = F \cdot \sigma \quad (9)$$

vagyis a nyújtóerő egyenlő a szelvény területének és a nyújtófeszültségnek a szorzatával.

Ha a belső erő egyenlőtlenül oszlik el a szelvényen, akkor a szelvény végtelen kis területelében a feszültséget egyenletesnek tekinthetjük, s így e kis dF részre is érvényes a fenti törvény.

Ha tehát az elemi felületrészre jutó erő dP , úgy $\sigma = \frac{dP}{dF}$. Ez az eset azonban a tiszta nyújtószilárdságnál nem fordul elő, itt σ az egész F területre nézve állandó.

5. §. Derékfeszültség és alakváltozások közötti összefüggés. (Hooke törvénye.)

A derékfeszültség meghosszabbítja vagy megrövidíti azon éleket, melyek a feszültség irányával párhuzamosak aszerint, amint a derékfeszültség pozitív azaz nyújtó, avagy negatív azaz összenyomó. A feszültségre merőleges élek pedig megrövidülést, illetve meghosszabbodást szenvednek.

A rugalmasság határan belül történő alakváltozások bizonyos törvényszerűséget követnek, amint a szakítógépeken végzett szilárdsági próbák is igazolják.

Ha valamely prizmatikus rugalmas testet középvonala irányában lassan növekedő erőhatásoknak vetünk alá és megmérjük a

különböző terheléseknek megfelelő hosszváltozásokat, azt találjuk, hogy *bizonyos határig a hosszváltozás arányos az erővel*. Ezt a törvényt *Hooke* angol fizikus fedezte fel 1676-ban, s ma is ezen róla elnevezett törvény képezi a szilárdságtan alapját.

Azt a legnagyobb igénybevételt, mely mellett a Hooke-törvény még érvényes, az illető anyag arányossági határának nevezzük. Nem tévesztendő ez össze a rugalmassági határral. Vannak ugyanis oly rugalmas anyagok, melyeknek arányossági határa igen csekély, míg a rugalmassági határ nagy; másrészt előfordul, hogy az arányossági törvény oly igénybevételekig is kiterjed, melyek már túlfeküsznek az illető anyag rugalmassági határán, vagyis amelyek már maradó alakváltozást hoznak létre.

A tapasztalás azonban azt bizonyítja, hogy a technikailag fontos anyagoknál az arányossági határ közel összeesik a rugalmassági határral, s mivel reánk nézve csupán ezen anyagok bírnak fontossággal, a következőkben a fenti, inkább csak elvi jelentőségű megkülönböztetésre nem fogunk súlyt fektetni, hanem egyszersmindenkorra feltételezzük, hogy az arányossági határ egyenlő a rugalmassági határral.

Legyen a hatóerő P kg, a szelvény területe F cm², a prizma P -vel parallel élének hossza l cm, akkor *Hooke* törvénye szerint a megnyúlás λ cm:

$$\lambda = \frac{Pl}{FE} \quad (10)$$

amely képletben E az anyag rugalmassági modulusza (derékelaszticítási tényezője), amely érték szintén a kísérletekből állapítható meg.

Mivel $\frac{P}{F} = \sigma$ a derékfeszültség, azért

$$\lambda = \frac{\sigma l}{E} \quad (11)$$

és a *hosszegységre eső megnyúlás, vagy viszonylagos megnyúlás (fajlagos hosszváltozás)* ε :

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l} = \frac{\sigma}{E} \quad (12)$$

Jelöljük a feszültségegységre eső viszonylagos megnyúlást α -val (*Bach* szerint a hosszváltozás tényezője), akkor:

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{1}{E} \quad (13)$$

azaz a rugalmassági modulus reciprok értéke a terjedési számot (*Dehnungszahl*) adja.

Ha a megnyúlás (λ) egyenlő a rúd eredeti hosszával (l), akkor a (10) egyenlet szerint $\sigma = E$, azaz a derékelaszticitási modulusz az- az ideális feszültség (E kg/cm²), amely mellett a tartó eredeti hosz- szának kétszeresére nyúlik meg, vagyis melynél a tartó megnyúlása egyenlő az eredeti hosszával. Természetes, hogy ily nagy feszültség a legtöbb anyagnál túl van a rugalmasság, sőt a szakítószilárdság határán is, éppen ezért nevezzük ideálisnak. Számításoknál nagyon kell ügyelni arra, hogy σ és E mindig egyforma egységekben fejez- tessék ki, tehát vagy mindkettő kg/mm²-, vagy mindkettő kg/cm²-ben.

Hooke lineáris törvényét ilyen alakban is felírhatjuk:

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma \quad (14)$$

azaz a fajlagos hosszváltozás egyenes arányban van a derékfeszült- séggel. Ez a törvény az arányossági határig érvényes. A legkülön- bözőbb anyagokkal végzett kísérletek azonban azt igazolták, hogy e törvény némi módosításra szorul, mert a kísérletekből nem lehet mindig a pontos arányossági határt meghatározni, hanem csak a folyási határt, amelynél a megnyúlás már nagyobb mértékben áll be.

Egyesítve az összes anyagokra a kísérleti eredményeket, a *Hooke*-törvényt a *Bach-féle hatvány*- (potenciális) törvénnyel pótol- juk, amely szerint

$$\varepsilon = \alpha_0 \sigma^n \quad (15)$$

amely törvény a folyási határig érvényes, s melyben α_0 és n minden anyagra változatlan érték. Az n valamivel nagyobb az egységnél öntöttvas-, réz-, gránit-, beton-, homokkő- stb.-nél; vala- mivel kisebb az egységnél bőr-, kenderkötélnél és $n = 1$ kovácsolt- vas- és acélnál.

Hogy egyszerűbbé tegyük számításainkat, mi a *Hooke*-tör- vényt vesszük az egyes esetekben figyelembe.

A rúd azonban nemcsak a terhelőerő irányában deformá- lódik, hanem keresztirányban is és ha a fajlagos hosszváltozást keresztirányban tehát a megrövidülés irányában ε_q -val jelöljük, akkor:

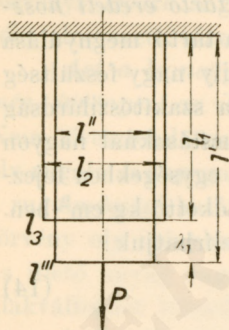
$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_q} = m \quad (16)$$

m a *Poisson-féle szám*, amely a legtöbb kutató szerint $3 \sim 4$ közötti érték, az acélnál $10/3$. Vagy ennek reciprokja:

$$\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon} = \frac{1}{m} = \frac{1}{3} \sim \frac{1}{4} = 0,25 \sim 0,33 = \mu \quad (17)$$

A fajlagos hosszváltozás tehát az erő irányában (megnyúlás) három-négyszer akkora, mint keresztirányban (megrövidülés).

Ezek után állapítsuk meg a rövid prizma éleinek hosszváltozását (16. ábra). A prizma hosszúsága a megnyúlás után l' :



16. ábra.

$$l' = l_1 + \lambda_1$$

$$\text{de } \lambda_1 = l_1 \frac{\sigma}{E}$$

$$\text{tehát: } l' = l_1 \left(1 + \frac{\sigma}{E} \right) \quad (18)$$

A megnyúlás alkalmával a prizma egyúttal vékonyabbá lesz, vagyis az erő irányára merőleges élei összehúzódnak. Ez az összehúzódás szintén arányos ugyan a P -vel, de kisebb mértékben, mint a P -vel párhuzamos élek megnyúlása. Ha a viszonylagos megnyúlás $\frac{\lambda_1}{l_1}$, a viszonylagos megrövidülés pedig $\frac{\lambda_2}{l_2}$, akkor:

$$\varepsilon_q = \frac{\lambda_2}{l_2} = -\mu \frac{\lambda_1}{l_1}$$

ahol $\mu = 0,25 \sim 0,33$ és a negatív jel a megrövidülést jelenti. Az l_2 él hosszváltozása lesz tehát:

$$\lambda_2 = -\mu l_2 \frac{\sigma}{E}$$

a megrövidült oldal hossza pedig:

$$l'' = l_2 + \lambda_2 = l_2 \left(1 - \mu \frac{\sigma}{E} \right) \quad (19)$$

Ha a tartó prizmatikus, akkor:

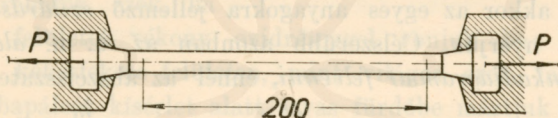
$$l''' = l_3 \left(1 - \mu \frac{\sigma}{E} \right) \quad (20)$$

Ha a rugalmassági modulusz (E) ugyanaz marad, bármely éllel is legyen párhuzamos a nyújtóerő, az anyagot izotroposnak, egyenrugalmasnak mondjuk. Ilyen anyagoknál μ értéke is minden irányra nézve ugyanaz. A fémek megközelítően izotroposoknak tekinthetők.

6. §. Szilárdsági próbák.

Az előzőekben említettük, hogy amíg a külső erők tetszés szerint fokozhatók, addig a belsőknél már van egy, az anyag minőségétől függő határ, a *szakítási* vagy *törési határ*. A *belső erők terület-egységre jutó részének (feszültség) maximuma a szakítószilárdság S_1 , illetve a törési szilárdság S_2* ; ezeknél nagyobb feszültségek már szakadást, törést okoznak. Öntöttvasnál pl. húzás esetén $S_1 = 1500 \text{ kg/cm}^2$, nyomás esetén $S_2 = -7500 \text{ kg/cm}^2$, tehát a nyomószilárdság ötszöröse a szakítószilárdságnak, nyomó-igénybevétellel szemben az öntöttvas tulajdonságai kedvezők. Folytvasnál $S_1 = S_2 = \pm 4000 \text{ kg/cm}^2$.

Természetes tehát, hogy a szilárdsági számítások alapján készült gépészeti, építészeti és egyéb alkatrészek méretezésénél nemcsak, hogy ezen törési-szakadási határokat nem szabad elérni, hanem még a rugalmassági határt sem, ami pl. öntöttvasnál $H_1 = 750 \text{ kg/cm}^2$ húzásnál és $H_2 = -1500 \text{ kg/cm}^2$ nyomásnál, folytvasnál $H_1 = H_2 = \pm 1400 \text{ kg/cm}^2$. A gyakorlatban megengedett feszültségeket (σ_m) a rugalmassági határok $1/2 - 1/3$ részénél is kisebbre választják.



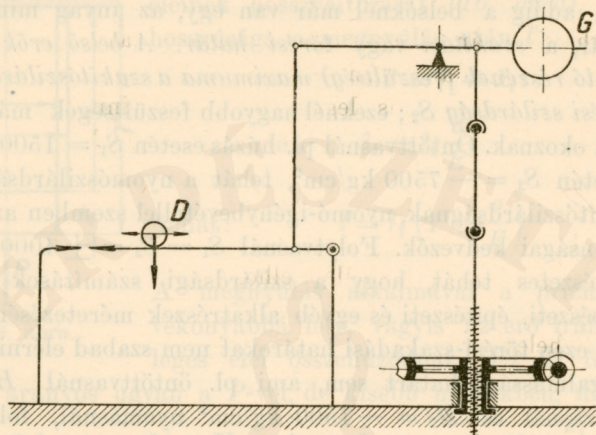
17. ábra.

Kézenfekvő tehát, hogy igen fontos minden anyagra a szilárdság (S), a rugalmassági határ (H), a derékelaszticitási modulusz (E) és az alakváltozások értékeinek számszerű megállapítása. A szilárdsági próbákat gépekkel eszközlik.

Szakítási próba céljaira a vizsgálandó anyagból kb. 30 cm hosszú és 2—3 cm átmérőjű körszelvényű próbapálcát készítenek, mely két végén kúpos átmenet közbeiktatásával fejjel van ellátva, hogy a szakítógép szorítópfáiba befogható legyen (17. ábra). A próbapálcán karcolással kijelölnek $l = 20 \text{ cm}$ hosszú részt, s a kísérlet folyamán ennek hosszváltozásait vizsgálják. Egy csigahajtással működő szakítógép sematikus vázlata a 18. ábrán látható. A G súly a rudazat súlyát balanszírozza ki, úgyhogy csak D vitetik át a próba-darabra.

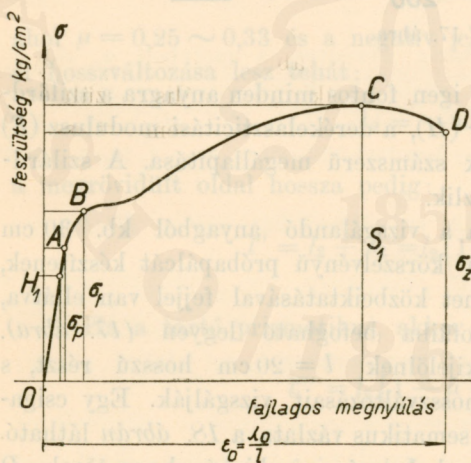
A próbapálcát a gépbe befogva fokozatosan — rendszeren 1—1 tonnával — növekedő terheléssel vesszük húzásra igénybe, az egyes megterhelések után pedig felszabadítjuk, hogy a maradó alakvál-

tozás beálltát és mértékét konstatálhassuk. A próba eredményét diagrammban tüntetjük fel. Ha az abszcissza tengelyre az egyes megnyúlásokat (λ), az ordinátatengelyre pedig a megfelelő húzóerőt (P)



18. ábra.

mérjük fel, akkor az egyes anyagokra jellemző *szilárdsági próba-diagrammot* nyerjük. Célszerűbb azonban az ú. n. *alakváltozási görbét* (*munkadiagramm*) *felvenni*, ennél az abszcisszatengelyre az



19. ábra.

$\varepsilon = \frac{\lambda_1}{l_1}$ fajlagos hossz-

változást, az ordinátatengelyre pedig az egyes terheléseknek megfelelő feszültséget:

$\sigma = \frac{P_1}{F}$ mérjük fel

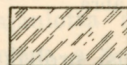
(19. ábra). Az ábrán egy rugalmas folytvas-próbapálcá alakváltozási diagramja van feltüntetve.

A próba lefolyása a következő:

A terheléseket bizonyos

értékig növelve azt tapasztaljuk, hogy a fajlagos megnyúlás a feszültséggel lineárisan, a *Hooke-törvény* szerint változik, a diagrammban ennek egyenes vonal felel meg. Ez a határ az arányossági

határ, ezen belül az alakváltozás rugalmas, a rúd a terhelés alól felszabadítva eredeti hosszát veszi fel, a maradó alakváltozás elenyészően csekély. A feszültség az arányossági határon (A pont) σ_p , ez az ú. n. terjedési modulusz. AB darabon az alakváltozási görbe meghajlik, bár a rúd még részben rugalmasan viselkedik. B pontnál kezdődik a folyási periódus, a fajlagos megnyúlás erősebben nő, az alakváltozás legnagyobb része innen kezdve már maradó alakváltozás. σ_f a folyási periódus alsó határa. Az arányossági határ előtt van a rugalmasság határa (H_1), azaz a határmodulusz. A maradó hosszváltozás a rugalmasság határán $0,02\%$ -a a lemért hosszának. Amint átléptük a rugalmassági határt, a símára csiszolt fémpálca felülete elhomályosul: olyan lesz, mintha harmattal, finom lehelettel volna fődve. A kísérlet további stádiumában a leheletszerű bevonat durvább lesz és a próbapálca felületén különböző, vonalhálózatszerű idomok, az ú. n. Lüders-féle folyási figurák lesznek láthatók (20. ábra).



20. ábra

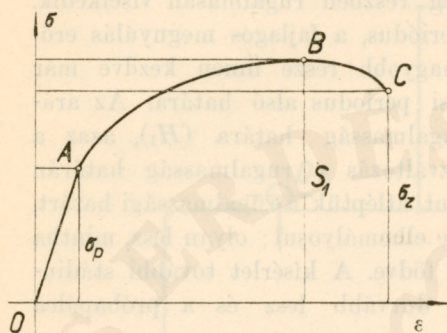
Szépen kivehetők ezek, ha

a csiszolt felületet vékony oxidréteggel vonjuk be; ilyenkor a vonalak a kékesfeketé felületen, mint világos erek mutatkoznak. Ha a próbapalcát kísérlet alatt savas fürdőbe mártjuk és bizonyos ideig benne hagyjuk, a *folyási ábrák* még a rugalmassági határon alul láthatók lesznek. A terhelést tovább növelve, a folyási figurák eltűnnek, majd C pontban elérjük a maximális feszültséget, ez a húzó- (szakító-) szilárdság S_1 , de a pálca nem itt szakad el, hanem röviddel utána mutatkozik a kontrakció, a szelvény kisebb lesz, a gép emelőkarja leesik és a pálca σ_c -nél elszakad, a feszültség hirtelen nullává válik. A kísérlet akkor jó, ha a szakadás a pálca középső harmadában következik be.

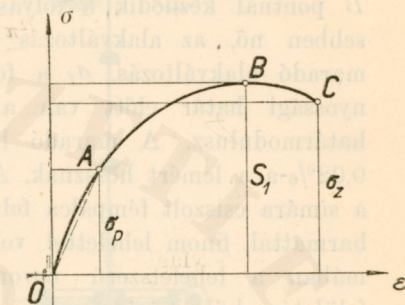
Ugyancsak ilyen alakváltozási diagrammal bír a kovácsolható folytvas, a Bessemer-, Thomas- és Martin-acél is. Ezek is rugalmasan viselkednek a folyás alsó határáig, a rugalmassági határ ezen anyagoknál alul van az arányossági határon. (A rugalmas test ellentettje a képlékeny test, ennél minden erőhatás maradó alakváltozást okoz).

Az ólom, réz, lágyabb kovácsolható acél és hegesztett vas alakváltozási diagrammja a 21. ábrán látható. OA darabon a Hooke-törvényt követik, A pont az arányossági határ, a rugalmasság határa az arányossági határon túl van.

A betón, öntöttvas, kő stb. alakváltozási diagrammja (22. ábra) szerint ezen anyagok a *Bach*-féle potenciális törvényt követik az arányossági határig. $\varepsilon = \varphi(\sigma)$ nem lineáris függvény. Ezenél a rugalmassági modulusz nem állandó.



21. ábra.



22. ábra.

A szakítási próbáknál figyelembe veendők, hogy:

1. a szakítási eredményeknél a gép, mérés stb. hibája folytán teljesen azonos anyagnál is mind a szilárdság, mind a nyúlás legalább 5 kg/mm^2 , illetve 5% különbségi határ között ingadozik;

2. a szakítógéppel elérhető sebesség határán belül a szakítás gyorsabb, vagy lassúbb menete sem a szilárdságot, sem a nyúlást nem befolyásolja;

3. a hideg megmunkálás a vas szakító eredményeit nagyban befolyásolja, még pedig:

a) az esztergályozás a szilárdságot növeli, a nyúlást csökkenti;

b) a hidegen való hengerlés a szilárdságot csökkenti, míg a nyúlást alig befolyásolja;

c) a hidegen való kovácsolás a szilárdságot emeli, a nyúlást tetemesen csökkenti;

4. a túlmeleg állapotban bevégzett megmunkálásnál az anyagnak kis szilárdsága és igen csekély nyúlása van;

5. a kiizzítás nemcsak a szilárdság, de még fokozottabb mértékben a nyúlás rovására is megy.

A rugalmassági moduluszt a következőképpen határozhatjuk meg egy tetszőleges helyen: $E = \frac{l\sigma_1}{\lambda_1}$, ahol σ_1 és λ_1 az arányossági határon belüli összetartozó értékek.

Megfigyelendő még a kontrakció, mely a próbapálca közepe táján észlelhető, ha átlépjük a rugalmasság határát (23. ábra). A kontrakció percentuális értéke:

$$K = 100 \cdot \frac{\frac{d^2 \pi}{4} - \frac{d_1^2 \pi}{4}}{\frac{d^2 \pi}{4}} = 100 \left[1 - \left(\frac{d_1}{d} \right)^2 \right]$$

Jóminőségű folytvasnál a szakadásnak megfelelő percentuális kontrakció 30—40%.

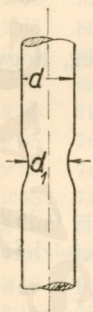
Fontos a szakadásnak megfelelő λ_0 megnyúlás ismerete is. Ennek viszonylagos értéke $\frac{\lambda_0}{200}$, percentuális értéke $\frac{\lambda_0}{200} \cdot 100 = \frac{\lambda_0}{2}$. Jóminőségű folytvasnál a percentuális megnyúlás 30—35%.

Tetmajer a minőségi koefficienszt ajánlotta az anyag minőségének megítélésére. A minőségi koefficiens a $\lambda_0 S$ szorzat, ahol S a szakítószilárdság és λ_0 a szakadásig való megnyúlás. De ez nem bizonyult célszerűnek, mert lehet, hogy valamely anyag szakítószilárdsága sokkal nagyobb a megkívántnál, de megnyúlása oly kicsiny, hogy nem alkalmazható. Ezt pedig a minőségi koefficiens nem mutatja.

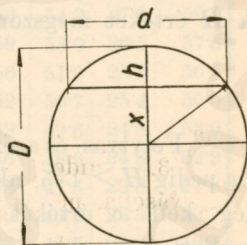
Az anyagok szilárdságát és alakváltozási képességét jelzi a keménység is. A mineralógusok az ásványokra állítottak fel egy keménységi skálát 10 fokkal (Mohs-féle skála). A legkeményebb a gyémánt, a többi kilenc fok közül a magasabb mindig karcolja az alacsonyabb fokút.

A mai golyós nyomási próba Brinelltől ered, aki egy 10 mm átmérőjű öntött acélgolyót — $P = 3000$ kg nyomással — a vizsgálandó lemezre szorít. Így a lemezben maradó behorpadás lesz.

A kísérlet körülbelül 15—20 sec-ig tart. P kg a nyomóerő (15000, 3000, 1000 és 500 kg) vas- és acélfajtákra 3000 kg, fémekre 500 kg, D mm az acélgolyó átmérője, d mm a benyomási átmérő (2, 4, 5, 7 mm között változik), a mm² a benyomás szférikus



23. ábra.



24. ábra.

területe, mely, ha D és d ismeretes, meghatározható (24. ábra).
A gömbsüveg felülete:

$$F = D\pi h$$

$$h = \frac{D}{2} - x = \frac{D}{2} - \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

$$h = \frac{D}{2} - \frac{\sqrt{D^2 - d^2}}{2}$$

Tehát:

$$F = \frac{D\pi}{2} \left(D - \sqrt{D^2 - d^2} \right) = a$$

Jelöljük a keménységi számot H -val, akkor:

$$H = \frac{P}{a} = \frac{P}{\frac{D\pi}{2} \left(D - \sqrt{D^2 - d^2} \right)}$$

Az R nyomószilárdságot kg/mm^2 -ben úgy kapjuk meg, hogy a H értéket megszorozzuk c tényezővel, azaz

$$R = c \cdot H$$

Folytvas- és acélfajtákra rendszeren, ha $H < 175$, akkor $c = 0,362$, ha pedig $H > 175$, akkor $c = 0,344$. Más anyagokra először kísérleti-
leg kell c értékét meghatározni $P = 3000$ kg és $D = 10$ mm mellett.

Pl. Legyen *Brinell*-nyomásnál $P = 3000$ kg, $D = 10$ mm, $d = 5,1$ mm, akkor $H = 137$ és $R = 137 \cdot 0,362 = 49,5 \sim 50 \text{ kg/mm}^2$.
Más terhelésekre a keménységi szám arányos a táblázatban levő-
vel, pl. ha $P = 200$ kg, akkor H az 1000 kg-nál adott érték $\frac{1}{5}$ -része.

A különböző d méret és keménység mellett R nyomószilárdság értékeit az I. számú táblázatból olvashatjuk le.

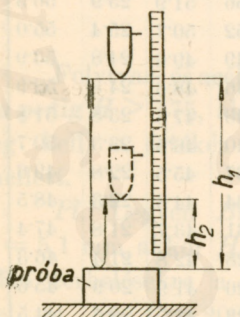
I. Táblázat.

A Brinell-féle keménységi számok értékeiről.

d	H				$R = cH$	d	H				$R = cH$
	P = 5000 kg	P = 3000 kg	P = 1000 kg	P = 500 kg			P = 5000 kg	P = 3000 kg	P = 1000 kg	P = 500 kg	
2—	1575	945	315	158	325	3·95	391	235	78·3	39·1	80·8
2·05	1499	899	300	150	309	4—	381	229	76·3	38·1	78·8
2·10	1427	856	285	143	294	4·05	371	223	74·3	37·1	76·7
2·15	1361	817	272	136	281	4·10	362	217	72·4	36·2	74·6
2·20	1299	780	260	130	268	4·15	353	212	70·6	35·3	72·9
2·25	1241	745	248	124	256	4·20	344	207	68·8	34·4	71·2
2·30	1187	712	237	119	245	4·25	336	201	67·1	33·6	69·1
2·35	1137	682	227	114	235	4·30	328	197	65·5	32·8	67·8
2·40	1089	653	218	109	225	4·35	320	192	63·9	32·0	66·0
2·45	1044	627	209	104	216	4·40	312	187	62·4	31·2	64·3
2·50	1002	601	200	100	207	4·45	305	183	60·9	30·5	63·0
2·55	963	578	193	96·3	199	4·50	298	179	59·5	29·8	63·0
2·60	926	555	185	92·6	191	4·55	291	174	58·1	29·1	63·0
2·65	890	534	178	89·0	184	4·60	284	170	56·8	28·4	61·5
2·70	857	514	171	85·7	177	4·65	278	167	55·5	27·8	60·5
2·75	826	495	165	82·6	170	4·70	271	163	54·3	27·1	59·0
2·80	796	477	159	79·6	164	4·75	265	159	53·0	26·5	57·6
2·85	768	461	154	76·8	159	4·80	259	156	51·9	25·9	56·5
2·90	741	444	148	74·1	153	4·85	254	152	50·7	25·4	55·0
2·95	715	429	143	71·5	148	4·90	248	149	49·6	24·8	53·9
3—	691	415	138	69·1	143	4·95	243	146	48·6	24·3	52·9
3·05	668	401	134	66·8	138	5—	238	143	47·5	23·8	51·8
3·10	646	388	129	64·6	133	5·05	233	140	46·5	23·3	50·7
3·15	625	375	125	62·5	129	5·10	228	137	45·5	22·8	49·6
3·20	605	363	121	60·5	125	5·15	223	134	44·6	22·3	48·5
3·25	586	352	117	58·6	121	5·20	218	131	43·7	21·8	47·4
3·30	568	341	114	56·8	117	5·25	214	128	42·8	21·4	46·3
3·35	551	331	110	55·1	114	5·30	209	126	41·9	20·9	45·6
3·40	534	321	107	53·4	110	5·35	205	123	41·0	20·5	44·5
3·45	518	311	104	51·8	107	5·40	201	121	40·2	20·1	43·8
3·50	503	302	101	50·3	104	5·45	197	118	39·4	19·7	42·7
3·55	489	293	97·7	48·9	101	5·50	193	116	38·6	19·3	42·0
3·60	475	285	94·9	47·5	98	5·55	189	114	37·9	18·9	41·3
3·65	461	277	92·3	46·1	95·3	5·60	186	111	37·1	18·6	40·2
3·70	449	269	89·7	44·9	92·5	5·65	182	109	36·4	18·2	39·5
3·75	436	262	87·2	43·6	90·1	5·70	178	107	35·7	17·8	38·7
3·80	424	255	84·9	42·4	87·7	5·75	175	105	35·0	17·5	38·0
3·85	413	248	82·6	41·3	85·3	5·80	172	103	34·3	17·2	37·3
3·90	402	241	80·4	40·2	82·9	5·85	168	101	33·7	16·8	36·6

d	H				R = cH	d	H				R = cH
	P = 5000 kg	P = 3000 kg	P = 1000 kg	P = 500 kg			P = 5000 kg	P = 3000 kg	P = 1000 kg	P = 500 kg	
5.90	165	99.2	33.1	16.5	35.9	6.50	133	79.6	26.5	13.3	28.8
5.95	162	97.3	32.4	16.2	35.2	6.55	130	78.2	26.1	13.0	28.3
6.—	159	95.5	31.8	15.9	34.6	6.60	128	76.8	25.6	12.8	27.8
6.05	156	93.7	31.2	15.6	33.9	6.65	126	75.4	25.1	12.6	27.3
6.10	153	92.0	30.7	15.3	33.3	6.70	124	74.1	24.7	12.4	26.8
6.15	151	90.3	30.1	15.1	32.7	6.75	121	72.8	24.3	12.1	26.4
6.20	148	88.7	29.6	14.8	32.1	6.80	119	71.6	23.9	11.9	25.9
6.25	145	87.1	29.0	14.5	31.5	6.85	117	70.4	23.5	11.7	25.5
6.30	142	85.5	28.5	14.2	31.0	6.90	115	69.1	23.0	11.5	—
6.35	140	84.0	28.0	14.0	30.4	6.95	113	68.0	22.7	11.3	—
6.40	137	82.5	27.5	13.7	29.9	7.—	111	66.8	22.3	11.1	—
6.45	135	81.0	27.0	13.5	29.3						

Néha a 10 mm-es golyót a próbadarab és egy különleges mérőlemez közé helyezik; az erőt itt nem mérik, csak egy csavarorsóval összeszorítják a lemezt és a két benyomódás viszonyából lehet, külön megállapított táblázat segítségével a próbadarab szilárdságát leolvasni (*Poldi*-kohóban használatos mód).



25. ábra.

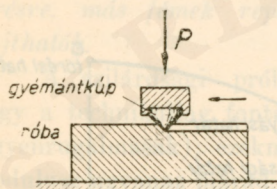
Gyakran e helyett a *szkleroszkóp*ot használják, melyet *Shore* adott meg, amely-nél egy kis súlyt gyémántfejjel 250 mm magasból a próbadarabra ejtenek és a keménységet a visszapattanás magasságából ítélik meg. Ezt két részben is lehet végezni, mert alig van maradó változás.

A *Shore*-féle *szkleroszkóp* (25. ábra) már dinamikai kísérlet, ellentétben az eddig leírt »sztatikai« szilárdsági vizsgálatokkal, melyeknél lassan növekvő erőhatásokat alkalmazunk. Ezen *szkleroszkóp*nál az acél- vagy gyémántheggyel bíró súlyt ejtjük le tehát a vizsgálandó anyagra, s a visszapattanási magasságnak az ejtőmagassághoz való viszonya adja a keménységi fokot:

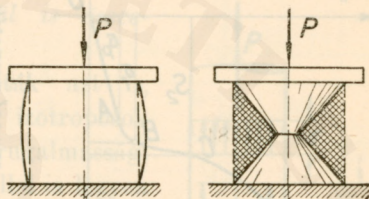
$$H = \frac{h_2}{h_1}$$

Alkalmazzák néha a *Martens*-féle karcolópróbát is (26. ábra). A keménység mértéke a gyémántkúpra ható azon terhelőerő grammokban, amely $b = 0,01$ mm széles karcolást okoz. A gyémántkúp csúcsszöge 90° .

Az eddigi módszerek nem adnak az anyag ellenállóképességről megfelelő képet, hirtelen terhelések mellett. Erre szolgál azonban az *ütőpróba*, amelynél a próbadarab, egy lengően felfüggesztett ékalakú kalapács által lökéssel vagy át lesz ütve, vagy erősen meghajlítva. Az 1 cm^2 területre eső munka az ütőmunka mkg/cm^2 .



26. ábra.



27. ábra.

Összenyomás esetén kockaalakú próbatest készítenőd. Ha a testeket a törésig terheljük meg, akkor azt tapasztaljuk, hogy a különböző anyagok viselkedésük alapján két csoportba oszthatók. Az egyik csoportnál fokozatosan növekvő összenyomás mellett lassú kidomborodás észlelhető a keresztirányban, azaz hosszirányban minden réteg össze lesz nyomva, keresztirányban pedig kiterjed, kiduzzad. Egyidejűleg repedések is keletkeznek és ezek végre az anyag megbontására vezetnek. Ilyen az ólom (27. ábra), a hegesztett-, a folytvas és az acél.

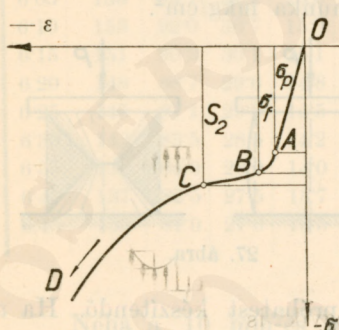
A másik csoport másképp viselkedik a törésnél. Itt a törés úgy következik be, hogy körülbelül 45° alatt szakadások állanak elő és ezek a kísérlet alatt levő testből oldalt prizmákat különítenek el (a besraffozott részeket, a 27. ábrán). Ez a betónra jellemző. *A törés tehát nem az erő irányába eső összenyomásból fog előállani, hanem az oldalti prizmák leválásából.* Ennek oka a csúsztató-feszültség fellépése és azon körülmény, hogy a beton nyírással szemben kisebb ellenállású. És éppen azért közel 45° fok alatt, mert itt lép fel a maximális nyírófeszültség.

A nyomási próbánál a diagrammban negatív feszültségekről és megrövidülésről van szó (28. ábra). *OA* lineáris változás, s körülbelül a *B* pontig tart a rugalmas változás. A folyási szakaszt itt röviden a törési feszültség váltja fel. Öntöttvas-, kő-, betonnál ez utóbbi kijelölhető, mert a test ridegebb; míg folytvas- és sárgaréznél

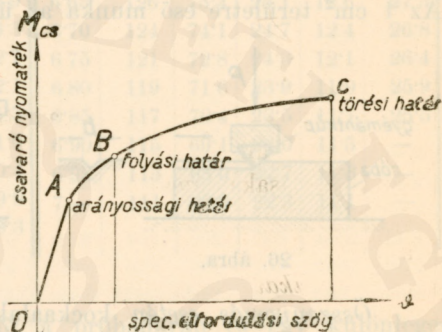
a fokozódó nyomásnál igen nagy az alakváltozás, ezek egész lappá nyomhatók össze, itt a törési feszültség pontosan nem jelölhető ki.

Torziós próba. Ezt aránylag ritkábban használják, mert már a szakítópróbák is elegendő támpontot nyújtanak a torziós igénybevételekre is. Tudományos laboratóriumokban azonban torziós próbákat is csinálnak, ami ismereteink fejlesztéséhez nagyban hozzájárul.

A torziós próba azon alapszik, hogy a rudat egyik végén befogják és a másik végén befogópofával változtatlan sebességgel



28. ábra.



29. ábra.

elforgatják a hossz tengelye körül. Minden pillanatban a torziónyomaték és az elfordulási szög leolvasható és diagrammban felrajzolható (29. ábra). A torziós próbánál is meg lehet különböztetni arányossági határt, elaszticitási és folyási határt a csuszátófeszültségek mellett, csak a kijelölésük nem oly pontos, mint a szakító- és összenyomópróbáknál.

Hajlítási próba. A szabadon felfekvő próbadarab a közepén koncentrált erővel van terelve. A hajlítónyomaték maximuma a terhelt szelvényben lesz és a legnagyobb feszültség a hajlítási tengelytől legtávolabb levő szálakban ébred.

Míg tehát húzás- és nyomásnál a rúd egész szelvénye ugyanazon változtatlan igénybevételnek van alávetve, addig a torziós próbánál a legnagyobb feszültség a külső (felületi) szálakra van szorítva, a hajlításkor pedig egyetlen szelvény legszélsőbb kerületi pontjaira. Azért is anyaghiba a húzás- és nyomásnál felfedezhető, a torziós próbánál is meglátható, ha közel van a felszínhez, a hajlítási próbánál azonban a legkevésbé észlelhető.

Nagy előnye a hajlítási próbának azonban az, hogy csekély terhelés mellett már lényeges feszültségek ébrednek és a tartó behajlásában nyilvánuló alakváltozás könnyen mérhető.

A szakítópróbák mellett, ahol a terhelések nagymérvűek, igen értékes a hajlítópróba, mert utóbbinál aránylag kis erővel lehet dolgozni.

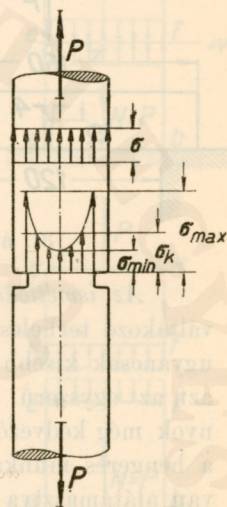
Pl. öntöttvas a szakítószilárdságnál is csak igen csekély megnyúlást mutat, amely csak finomabb műszerekkel mérhető, míg az öntöttvasra szokásosabb hajlítási próba — nagy alátámasztási hossz mellett — olyan behajlást ér el, amely közönséges mérőeszközökkel is mérhető. *A hajlítási próba inkább rideg anyagoknál jön tekintetbe, mert sok fém hajlítási próbával alig hozható törésre, más fémek repedés nélkül is összehajthatók.*

A szilárdsági próbák igazolták azt is, hogy a technikailag fontos anyagok izotroposok (egyenrugalmasak); ezeknél a derékrugalmassági modulusz ugyanaz marad, bármely éllel is legyen parallel a nyújtóerő.

Dinamikai vizsgálatok. Ha a terhelés nagysága és iránya, avagy csak az egyik is tartósan és gyorsan változó, akkor a szakadás már kisebb feszültségnél következik be, mint azt a sztatikai vizsgálat megállapítja. Erre még a 12. §-ban visszatérünk. E helyen csak arra kívánunk rámutatni, hogy vannak olyan körülmények, pl. a keresztmetszetek hirtelen és ugrászerű változása (éles átmenet, ékbarázda, átfúrt alkatrészek), melyeket a fentebb említett sztatikai vizsgálatok szintén nem vehetnek figyelembe, jóllehet azok a feszültségek helyi emelkedését okozzák (30. ábra). Minderre pedig különös gond fordítandó éppen a lökésszerű, avagy a sűrűn változó, hosszabb ideig tartó terheléseknél. A feszültségeknek helyi növekedése az átmeneti hatásokból (Kerbwirkung) származik, amit főként rideg anyagoknál el kell kerülnünk és a szívós anyagok közül is csak azoknál engedhetnénk meg, melyek átmeneti szívóssága (Kerbzähigkeit) megfelelőnek bizonyult.

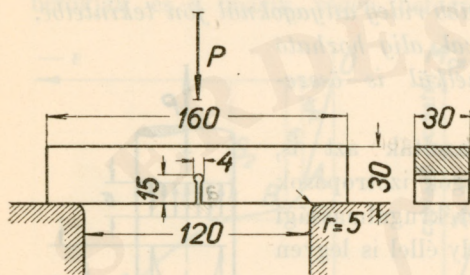
Az anyag átmeneti szívósságának jobb megítélhetésére újabban az ütő- és ismétlődő, illetve az anyag kimerülésére vezető, huzamos próbákat hozták be.

Az *ütőpróbák* (Schlagprobe) lényege az, hogy a terhelés lökésszerűen hat és minden lököerő az anyagot a rugalmasság határán túl veszi igénybe. Tehát kevés ütés szükséges a szakadás



30. ábra.

bekövetkezéséig. A gyakorlatban ilyen terhelés nincs, inkább csak üzemi szerencsétlenség esetén fordulhat elő. A próbát olyan esetben szokták megejteni, ha az anyagból készült alkatrész időnként nagy igénybevételt szenved és a törésből súlyos kár származhat. Pl. gyorsan forgó géprésznel, ahol nagy röptőerők léphetnek fel. Az ütésnek erősebb a hatása, ha a próbadarab hornyolva van, azaz bemetszéssel bír (31. ábra). A próba a Charpy-féle ingaütőművel



31. ábra.

vitetik keresztül. A lengőkalapácsot bizonyos magasságból ejtik a két helyen alátámasztott próbadarabra és az átmeneti szívósságot kgm/cm^2 egységben adják meg. Pl. lágy acélra ez körülbelül 12 kgm/cm^2 . Van 250, 75 és 10 kgm munkaképességű ilyen ingaütőmű.

Az ismétlődő próbák (Ermüdungsprobe). Hosszabb ideig tartó, váltakozó terhelésnél — az anyag tökéletlen rugalmassága folytán — ugyancsak kisebb feszültség mellett következik be a szakadás, mint azt az egyszerű szakítópróba megadja. Hornyolás esetén a viszonyok még kedvezőtlenebbek. Ezen próbáknál (Dauerkerbbschlagprobe) a hengeres munkadarab közepén horonnyal van ellátva, két helyen van alátámasztva és egy súlyos, de kis magasságból eső kalapács mér rá ütések, s minden ütés után a munkadarabot bizonyos szöggel a hossz tengelye körül el is fordítják. Megfigyelik az ütések számát az anyag töréséig. Kerek hornyolás jóval előnyösebb, mint az éles, amely kerülendő. Mindezekből tehát jegyezzük meg a gyakorlat részére, hogy erős lökések esetén nagy átmeneti szívósságú anyagot kell választani.

Nagy terhelések és lökések esetén amellet az anyagnak elegendő nagyságú fajlagos hosszváltozással is kell rendelkeznie. Sűrűn ismétlődő, váltakozó terhelések esetén olyan anyag alkalmas, melynek lehetőleg nagy a rugalmassági és folyási határa.

7. §. Rövid prizma összenyomószilárdsága.

Megkülönböztetjük a rövid prizma összenyomószilárdságát a hosszú prizmától, mert az utóbbi esetben a kihajlást is figyelembe kell vennünk. Ha a prizma körülbelül négyszer olyan hosszú, mint

a négyszögű szelvény rövidebb oldala, vagy a körszelvény átmérője, akkor mint rövid tartót méretezhetjük.

Valamely tartó akkor van összenyomásra igénybevéve, ha az egyik végszelvénye meg van támasztva, a másikra pedig úgy hat az erő, hogy iránya a prizma középvonalába esik és a terhelt szelvényt a megtámasztotthoz közelebb hozni igyekszik (32. ábra).

$a-b$ a befogott szelvény,

$c-d$ a terhelt szelvény,

$e-f$ a változó szelvény.

A lementszett $cdef$ tartórészre hat P erő, ennek szállítóhatása a felvett u tengely irányában $R_u < 0$; tehát a feszültség negatív, vagyis összenyomó lesz. Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a maradó tartórészre ható $N = P$ felszabadító erőnek a most már lefelé irányuló $+u$ tengely irányába eső szállítóhatását vesszük figyelembe.

Ha az erő egyenletesen oszlik meg a felületen, akkor az összenyomási feszültség

$$-\sigma = \frac{P}{F} \leq \sigma_{\text{meg}}$$

$$\text{és} \quad P = -F\sigma,$$

tehát az összenyomó feszültséget megkapjuk, ha az összenyomóerőt elosztjuk a szelvény területével.

Megjegyzendő, hogy az összenyomófeszültség

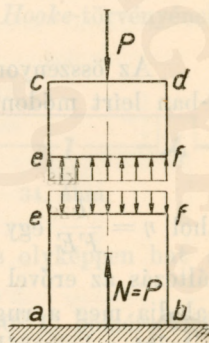
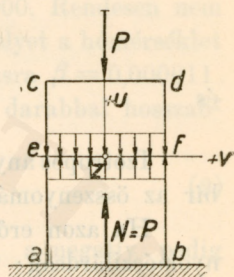
kifejezése előtt csak akkor használjuk a mínusz jelet, ha az összenyomó- és húzófeszültség közötti ellentétet különösen ki akarjuk emelni, amire főleg akkor van szükség, ha mindkettő egyidejűleg lép fel, mint például a hajlításnál.

Az összenyomóerővel parallel élek hosszváltozása a Hooke-törvény értelmében

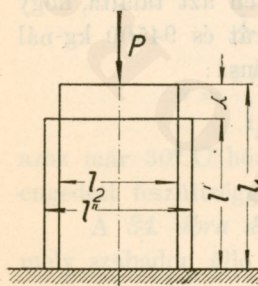
$$\lambda_1 = -\frac{l_1 \sigma}{E}$$

és így a terhelt prizma hossza (33 ábra) $l' = l_1 + \lambda_1$ és

$$l' = l_1 \left(1 - \frac{\sigma}{E}\right)$$



32. ábra.



33. ábra.

Viszont a feszültség irányára merőleges élek meghosszabbodnak és pedig:

$$\frac{\lambda_2}{l_2} = -\mu \frac{\lambda_1}{l_1} = -\mu \left(-\frac{\sigma}{E} \right) = \mu \frac{\sigma}{E}$$

Igy a haránt élek hossza a terhelés után:

$$l'' = l_2 + \lambda_2 = l_2 \left(1 + \mu \frac{\sigma}{E} \right)$$

és

$$l''' = l_3 \left(1 + \mu \frac{\sigma}{E} \right)$$

Izotropos anyagnál a rugalmassági modulusz ugyanazon értékkel bír az összenyomásra, mint a húzásra vonatkozólag.

Ha azon erő, amely a prizrát összezúzza, R_2 , akkor az összenyomószilárdság:

$$S_2 = \frac{R_2}{F}$$

Az összenyomó-szilárdságra vonatkozó kísérletek a megelőző §-ban leírt módon vitetnek végbe. A hosszváltozás:

$$\lambda = -\frac{lP}{FE} = -\eta P$$

ahol $\eta = \frac{l}{FE}$ egy bizonyos kísérletnél állandó. Ha tehát a hosszváltozás az erővel egyenletesen gyarapodik, akkor a feszültség nem haladja meg a rugalmasság határát, ellenben átléptük az utóbbit, mihelyt a hosszváltozás gyorsabban nő, mint a terhelés.

Bauschinger egy *Martin*-acélból készült $F = 9 \text{ cm}^2$ kereszt-szelvényű és $l = 5 \text{ cm}$ hosszú rúddal kísérletezván azt találta, hogy 12000 kg terhelésnél elérte a rugalmasság határát és 94500 kg-nál bekövetkezett a törés. Ennélfogva a határmodulusz:

$$H_2 = \frac{12000}{9} = 1330 \text{ kg/cm}^2$$

és a törő-szilárdság:

$$S_2 = \frac{94500}{9} = 10500 \text{ kg/cm}^2$$

8. §. A hőmérséklet hatása a test alakjára.

A rugalmas test alakja nemcsak a reá ható külső erőktől függ, hanem a hőmérséklet-változástól is, amely ugyanis a testben szintén ú. n. hőmérsékleti feszültséget okoz.

Ha valamely rúd 1 cm hosszú és hőmérséklete t^0 -kal megváltozik, akkor a hosszegységre eső hosszváltozás ε_t kifejezhető a következő összefüggés alapján:

$$\varepsilon_t = \frac{t}{\mathfrak{E}} \quad (1)$$

ahol $\mathfrak{E}$ tapasztalati tényező, amely minden anyagra kísérletileg meghatározható. Például vasra: $\mathfrak{E} = 85000 - 90000$. Rendesen nem $\mathfrak{E}$ van adva, hanem ennek reciprok értéke β , amelyet a hőmérséklet terjedési tényezőjének nevezünk és értéke pl. vasra $\beta = 0,000011$.

Ha tehát a rúd eredeti hossza l és t^0 -nál λ darabbal hosszabbodik meg, akkor

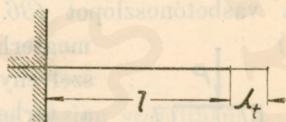
$$\lambda_t = \pm l \frac{t}{\mathfrak{E}} = \pm \beta l t \quad (2)$$

ahol a pozitív érték hőmérséklet-emelkedésnél, a negatív pedig hőmérséklet-esésnél veendő.

Az (1) és (2) egyenlet azonos természetű a Hooke-törvényének megfelelő formulával, amelyben

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\text{és} \quad \lambda = l \frac{\sigma}{E} \quad (3)$$



34. ábra.

ami azt igazolja, hogy a hőmérséklet-változás is olyképpen hat a testre, mint a derékfeszültség-okozta alakváltozás.

Például: valamely 500 cm hosszú vasrúd 30^0 C hőmérséklet-változást szenved, kérdés: mennyivel fog meghosszabbodni és milyen feszültség okozza ugyanezen hosszváltozást?

$$\lambda_t = l \frac{t}{\mathfrak{E}} = 500 \frac{30}{90000} = 0,17 \text{ cm}$$

$$\sigma = \frac{\lambda E}{l} = \frac{0,17 \cdot 2150000}{500} = 731 \text{ kg/cm}^2$$

azaz már 30^0 C hőmérséklet- különbség — ezen rúdban — a megengedett feszültséggel közel egyenlő hosszváltozást okoz.

A 34. ábra az egyenletes hőmérséklet hatását mutatja valamely szabadon álló tartóra. Az (1) és (3) egyenletből kapjuk, hogy:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{t}{\mathfrak{E}} \quad \text{és} \quad \sigma = \frac{E}{\mathfrak{E}} \cdot t = 24 t$$

azaz a hőmérséklet-változás körülbelül 24-szerese a fajlagos hosszváltozást létesítő feszültségnek felel meg.

9. §. Rövid vasbetónoszlop összenyomószilárdsága.

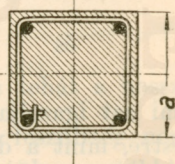
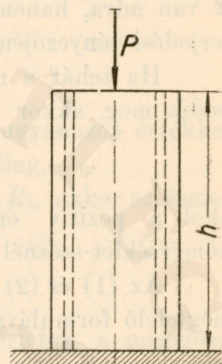
Vegyünk egy betónoszlopot és terheljük meg P erővel összenyomásra. A beton oly anyag, mely jól ellenáll az összenyomásnak, teherbírása 18—20 kg/cm². Minthogy azonban az efajta szerkezetű alkotmányok olyan természetűek, hogy szélnyomás és excentrikus terhelés folytán ki is hajolhatnak (35. ábra), azért a szálak nemcsak nyomásra, hanem húzásra is igénybe vannak véve. A külső részek húzást, a belsők pedig nyomást szenvednek. De húzásra a beton csak 1,5—2 kg/cm²-t bír el. Hogy ezt a káros hatást, mely szerint húzásnak kevésbé áll ellen, kiküszöbölhessük, vasbetétes betonszerkezeteket, vasbetonszerkezeteket alkalmazunk. Kengyelekkel összefogott vasrúdhálózat közeit betonnal kitöltve nyerjük a vasbetónoszlopot (36. ábra). Ezt P erővel



35. ábra.

megterhelve már a vas kereszt-szelvénye is figyelembe veendő a terhelés felvételénél. F_b a beton, F_v a vas kereszt-szelvénye, σ_b a feszültség a betonban, σ_v a feszültség a vasban; akkor a nyomóerő:

$$P = P' + P'' = F_b \sigma_b + F_v \sigma_v \quad (1)$$



36. ábra.

ahol P' a beton, P'' pedig a vas terhelése. De az (1) egyenletben, amely a nyomószilárdság alapegyenlete, két ismeretlen van. Hogy a két ismeretlent meghatározhassuk, figyelembe kell vennünk a konstrukció elasztikus viselkedését. P teher alatt az oszlop l darabbal megrövidül. Mivel a vas és beton összetartozó két test, megkívánjuk, hogy a fajlagos hosszváltozásuk ugyanaz legyen:

$$\epsilon_v = \epsilon_b$$

$$\text{ahol} \quad \epsilon_v = \frac{\sigma_v}{E_v} \quad \text{és} \quad \epsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_b}$$

a hosszegységre eső összenyomás nagysága és

$$E_v = 2150000 \text{ kg/cm}^2 \text{ és } E_b = 143000 \text{ kg/cm}^2.$$

De amíg a vas pontosan követi a Hooke-törvényt, addig a beton a Bach-féle potenciális törvénynek hódol, az n kitevő betón-

nál *Bach* szerint 1,08—1,3. A gyakorlatban megkívánt pontosság mellett ez azonban elhanyagolható, úgyhogy a számításoknál

$$\frac{\sigma_v}{E_v} = \frac{\sigma_b}{E_b} \quad (2)$$

lesz a második egyenletünk.)

A derékrugalmassági moduluszok hányadosa előírás szerint:

$$\frac{E_v}{E_b} = n = 15$$

Az egyenlet megoldása ezek alapján a következő. A (2) egyenletből

$$\sigma_v = \sigma_b \frac{E_v}{E_b}$$

ezt (1)-be téve: $P = F_b \sigma_b + F_v \sigma_b \frac{E_v}{E_b} = F_b \sigma_b + F_v n \sigma_b = \sigma_b (F_b + n F_v)$

$$\text{és} \quad \sigma_b = \frac{P}{F_b + n F_v} \quad (3)$$

Ezt a képletet használjuk a vasbetón- oszlop számításnál.

A betonban megengedett legnagyobb feszültségek:

hajlított tartóban.....	$\sigma_b =$	45 kg/cm ²
bordás lemezre.....	$\sigma_b =$	30—35 kg/cm ²
oszlop, centrikus terheléssel	$\sigma_b =$	40—45 kg/cm ²
kihajlás mellett	$\sigma_b =$	36 kg/cm ²
nyírásra	$\tau_b =$	5 kg/cm ² csúsztató- feszültség.

Folytvasnál:

húzásra $\sigma_v = 1200$ kg/cm²

nyírásra $\tau_v = 950$ kg/cm²

Tapadás a beton és a vas között: $\tau_1 = 6$ kg/cm².

Például: egy rövid vasbetónoszlop alapja 30×30 cm² és van benne 4 drb. 1,5 cm átmérőjű vasrúd. Meg akarjuk terhelni 20000 kg erővel, kérdés: mekkora a feszültség a betonban, σ_b ?

$$\sigma_b = \frac{P}{F_b + n F_v} = \frac{20000}{30 \cdot 30 + 15 \frac{1,5^2 \pi}{4} \cdot 4} = \frac{20000}{900 + 15 \cdot 7,06} =$$

19,9 kg/cm².

Látjuk, hogy nem haladja meg a megengedett feszültséget, tehát kisebbiteni lehet a szelvény méretét. Ha 40 kg/cm^2 -nél nagyobb értéket kaptunk volna, a szelvényt nagyobbítanunk kellene.

II. Táblázat.

Az anyagok rugalmassági moduluszának, rugalmassági határának és szilárdságának összehasonlítása kg/cm^2 -ben.

Anyag	Rugalmassági modulusz	Rug. határ		Normál szilárds.		Nyíró-szilárdság
		nyújtó	össze-nyomó	nyújtó	össze-nyomó	
		H_1 kg/cm^2	H_2 kg/cm^2	S_1 kg/cm^2	S_2 kg/cm^2	
kovácsvas	2000000	1400	1400	3700	3500	3200
vaslemez	1750000-2000000	1600	—	3700	—	3250
vasdrót	2000000	—	—	5600	—	—
Bessemer- és Martin-acél	2250000	2000	2000	5400	12000	5400-6000
rúgóacél	2200000	—	—	7300-9000	—	—
lemez	2200000	2200	—	5400	—	3200
öntöttacél edzve	1900000	5300	—	8000	—	—
öntöttacél-drót	1900000	5300	—	13000	—	—
öntöttvas	750000-1000000	750	1500	1250	7500	1100
acélöntvény	2150000	—	—	3500-7000	—	2800
tégelyacél-drót	2250000	—	—	12000-18000	—	—
puhafa, nedves	92000	150	—	750	—	—
» száraz	110000	240	190	810	530	66
keményfa, bükk	170000	240	190	810	530	85 (II)
» tölgy	110000					80(I) 160(L)
cink	400000	—	—	530	1000	—
rézdrót	1100000-1300000	—	—	4000	—	—
ólom	90000	—	—	130	—	—
sárgaréz	800000	—	—	1650	—	—
arany	818100	1350	—	2700	—	—
cement	—	—	—	—	150	50
betón	140000	—	—	15-20	180-250	—
csont	—	—	—	1000	1520	—
tégla közönséges	—	—	—	—	60	4-5
kenderkötél, új	25000	500	—	1200	—	—
» használt	5000	100	—	500	—	—
bőrszíj	1200-2200	—	—	250-450	—	—
aluminium	600000-640000	—	—	970	—	—

III. Táblázat.

Megengedhető feszültségek húzás-, összenyomás- és nyírásra.

Anyag	σ_m kg/cm ²		
	húzásra	nyomásra	nyírásra
tégla falazat	—	7-10	—
porózus kő	—	3-6	—
cement, homok nélkül	—	25	—
1 r. cement 1 r. homok	—	20	—
1 » » 2 » »	—	18	—
1 » » 3 » »	—	16	—
jó mészhabares	—	4-5	—
lágú agyag és nedves, szemcsés, homokos talaj	—	1-2	—
márgás agyag, kemény agyag	—	4	—
durva homok és kavics, jól lerakódott	—	5-6	—
üveg	25-30	—	—
jó alapozás	—	2-5	—
gránit	—	40-90	—
papiros	—	75	—
manilla-kendő, új	40-100	—	—
bőrszj	25-30	—	—
hegesztett vas	800-1000	800-1000	720
folyasztott acél	1200	1200	960
kovácsoltva	500-750	500-750	400-560
öntöttvas	300	900	250-300
Martin-folytvas	900-1100	900-1100	720-900
betón (döngölt)	1-1,5	10-20	4-5
tölgyfa	100	80	20 ()
lúcfenyő	100	60	80 (L)
üveg	—	25	—

IV. Táblázat.

A technikai anyagok fajsúlya γ kg/dm³.

Anyag	γ kg/dm ³	Anyag	γ kg/dm ³
hegesztettvas	7,8	folytvas	7,85
folytácél	7,86	öntöttvas	7,25
tölgyfa	0,7-1	lúcfenyő	0,3-0,7
gránit	2,5-3	mészke	2,5-2,8
tégla fal	1,4-1,6	portland-cement	2,7-3,2
román cement	2,5-3	betón	1,8-2,5
talaj	1,5-2	kenderkötél	1,5
bőrszj	0,8-1	hengerelt vörösréz	8,9
csont	1,7-2	foszforbronz	8,8
fehérfém	7,1	hengerelt cink	7,13-7,2

10. §. Megengedhető feszültség és biztosság.

A legnagyobb megengedhető feszültség, a szilárdságnak egy bizonyos része. A biztosság, a szilárdság aránya a megengedhető feszültséghez és ezt a biztosságot, a törésig való biztosságnak nevezzük.

Ha tehát S a szilárdság és σ_m a megengedhető feszültség, akkor a biztosság:

$$\beta = \frac{S}{\sigma_m}$$

A biztosság megválasztására nézve irányadók lehetnek a következő értékek: gépalkatrészeknél $\beta = 8-10$; az építészetben $\beta = 5-6$; gát-, támfal-, kéménynél $\beta = 4-5$; síneknél $\beta = 1,5-2$.

Reuleaux szerint célszerűbb a biztosságot a rugalmassági határra vonatkoztatni, szerinte tehát:

$$\beta_1 = \frac{H}{\sigma_m}$$

ez pedig a biztosság a rugalmassági határig. Ezen értelmezés azért célszerűbb, mert H értékei a húzásnál és összenyomásnál kevésbé térnek el egymástól, mint S értékei. Ilyenkor $\beta_1 = 2-3$.

11. §. A gépalkatrészek méretezéséről.

Minden gépalkatrésznek vannak olyan méretei, melyeket csupán szilárdságtani számítások alapján lehet meghatározni és olyan méretei, melyek gyakorlati formulák, ú. n. tapasztalati képletek alapján határozhatók meg. Utóbbi esetben az alkatrészek rendesen komplikált igénybevételeknek vannak alávetve.

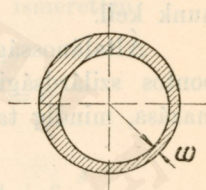
A szilárdsági összefüggések alapján nyert számítási adatokat gyakran a tapasztalatnak megfelelően még korrigálnunk kell. Ha pl. a csövek méretezésénél azok falvastagságát, a pontos szilárdságtani összefüggések alapján állapítjuk meg, akkor

$$\omega_{em} = \frac{D_{cm} \cdot p_o \text{ at}}{2 \sigma_m \text{ kg/cm}^2 - 2,5 p_o \text{ at}}$$

volna a falvastagság (ω_{em}), amely képletben D_{cm} a belső csőátmérő, σ_m a cső anyagában megengedett feszültség és $p_o \text{ at}$ a belső túl-

nyomás. Ezt a méretet az esetleges gyártási hibák, — excentrikus kiöntés (37. ábra), rozsdásodásra való tekintettel — tapasztalati C állandó hozzáadásával, megnagyobbítjuk. C öntöttvasnál $0,8-1$ cm.

A szilárdsági méretek azon maximális erőhatásokból nyerhetők, melyeknek az illető gép alá van vetve. Pl. a gőzgép-alkatrészek méretei a gőznek legnagyobb, azaz a kezdő feszültségéből állapítandók meg. Ezen erők szállító- és forgatóhatásait a mechanikai képletekből nyerjük. Gyakran fellépnek oly erők is, amelyek igen komplikált igénybevételeket okoznak; de ha ezek a többi terhelésekhez képest aránylag kicsinyek, akkor elegendő csupán az utóbbiakat figyelembe venni, s ilyenkor a biztonsági fokot megfelelően nagyobbra vesszük.



37. ábra.

Az önsúly-okozta erőhatásokat a következőképpen vesszük számításba. Először meghatározzuk a méreteket az önsúly figyelembevétele nélkül, azután az értékeket megnövelve, felfelé kerekítve kiszámítjuk az önsúlyt és ezt egyenletesen elosztott teherként működtetve, végrehajtjuk a feszültségre az ellenőrző számítást, az önsúly figyelembevétele mellett.

Előfordul azon eset is, hogy adott gépelemhez, amelyre nézve a terhelési módot ismerjük ugyan, de a terhelés nagyságát nem, egy másik gépelemet kell konstruálni, amely bizonyos módon ugyanazt az erőhatást viszi át. Ilyenkor általános elv az, hogy az adott géprész méreteiből és a megengedhető feszültségből kiszámítjuk annak hordképességét és ezen erőre számítjuk ki a másik alkatrészt is. Ha az igénybevétel ugyanaz, de az anyag más, akkor a szükséges keresztmetszelvények méretei bizonyos arányba hozhatók.

A biztonság megválasztása, mellyel valamely gépelem méretezendő, különösen a terhelés tartamától és módjától függ, de figyelembe kell venni azon körülményt is, hogy mily károk származhatnak a törésből, vagy szakadásból. Így pl. a rendesnél nagyobb biztonsággal kell méretezni a gőzgép hajtórudját, dugattyúrudját, forgatóját stb., mert ha ezek eltörnek, az egész üzem szünetelni kénytelen.

Vannak viszont esetek, midőn egyes alkatrészeket szándékosan igen csekély biztonsággal méretezünk és pedig azon célból, hogy túlterhelés esetén könnyen kicserélhető, s már készenlétben tartott darabokkal pótolható alkatrészek törjenek el, ne pedig a

fontosabb és drágább részek! Ilyen eset fordul elő pl. a henger-sorok tervezésénél, hol is a mentőzsámolyt és a kapcsolóórsót igen kis biztonságra készítjük, éppen azért, hogy megakadályozzuk magának a hengernek, vagy a csapnak a törését.

Egyes összekötő alkatrészek, mint az ékek, csavarok stb. méretezésénél arra is gondolnunk kell, hogy azokban már a felszerelés-nél, tehát a tulajdonképpeni terhelés előtt, bizonyos nagyságú feszültségek keletkeznek, azért itt a dimenziókat megfelelően nagyobbítanunk kell.

Általánosságban tartsuk szem előtt, hogy a géprészeknél a pontos szilárdsági méreteknél valamivel nagyobb dimenziók alkalmazása, mindig tanácsos.

12. §. A munkaszilárdság.

Wöhlernek a porosz kormány megbízásából végzett kísérletei igazolták, hogy *a törés vagy szakadás a sztatikai szilárdságnál kisebb feszültség mellett is beállhat, ha a terhelés nem állandó, hanem nagyság szerint és esetleg még irány szerint is változó.* Pl. amikor a drótot úgy törjük el, hogy felváltva két ellenkező irányban vesszük hajlításra igénybe.

Sztatikai szilárdságról csak állandó terhelés esetében beszélhetünk.

Ha a terhelés nem állandó érték, hanem maximális érték és zéró között váltakozik, vagyis ha a tartót felváltva megterheljük és felszabadítjuk, akkor az *összilárdság* esete áll elő. Pl. egy munkagépet szíjhajtással megterhelek, azután ezt lekapcsolom.

Ha pedig a terhelés valamely pozitív és negatív maximum közt váltakozik, azaz valamely pozitív legnagyobb terhelésről felváltva mindig ugyanolyan nagyságú negatív terhelésre megyünk át: akkor *lengő szilárdságról* beszélünk. Amikor a drótot az említett módon eltörjük, az egyes szálak felváltva összenyomást, majd pedig húzást szenvednek (hajlításnál ugyanis a belső szálak összenyomásra, a külsők húzásra vannak igénybevéve).

Gerber kovácsoltvasra vonatkozó kísérletei alapján a következő képletet állította fel:

$$\frac{S+s}{2} = Z \sqrt{1 - \frac{3(S-s)}{2Z}} \quad (1)$$

ahol S legnagyobb, s a legkisebb feszültség, mely a szelvényben felváltva keletkezik és Z a sztatikai (nyújtó-) szilárdság. Oldjuk meg az egyenletet $\frac{S}{Z}$ re:

$$\begin{aligned} \left(\frac{S+s}{Z}\right)^2 &= 4\left(1 - \frac{3S}{2Z} + \frac{3s}{2Z}\right) \\ \frac{S^2}{Z^2} + \frac{2Ss}{Z^2} + \frac{s^2}{Z^2} &= 4 - \frac{6S}{Z} + \frac{6s}{Z}; \quad \frac{S}{Z} \text{ az ismeretlen} \\ \frac{S^2}{Z^2} + 2\frac{S}{Z}\left(3 + \frac{s}{Z}\right) + \frac{s^2}{Z^2} &= 4 - \frac{6s}{Z} \\ \frac{S}{Z} &= -\left(3 + \frac{s}{Z}\right) \pm \sqrt{\left(3 + \frac{s}{Z}\right)^2 - \frac{s^2}{Z^2} + 4 + 6\frac{s}{Z}} \\ \frac{S}{Z} &= -\left(3 + \frac{s}{Z}\right) \pm \sqrt{9 + 6\frac{s}{Z} + \frac{s^2}{Z^2} - \frac{s^2}{Z^2} + 4 + 6\frac{s}{Z}} \\ \frac{S}{Z} &= -\left(3 + \frac{s}{Z}\right) \pm \sqrt{12\frac{s}{Z} + 13} \end{aligned} \quad (2)$$

Ezen átdolgozott alakjában használjuk az (1) egyenletet.

Ha valamely esetben a legnagyobb feszültség (S) egyenlő a nyújtószilárdsággal (Z), akkor az

$$1 = -\left(3 + \frac{s}{Z}\right) \pm \sqrt{12\frac{s}{Z} + 13}$$

egyenlőség csak úgy állhat fenn, ha $s = Z$, azaz a szelvényben keletkező legkisebb feszültség egyenlő a nyújtószilárdsággal, egyenlő a maximális feszültséggel. A szakadás Z mellett következik be. Ez az állandó terhelésnek, a sztatikai szilárdságnak esete.

Azon esetben, ha $s = 0$, vagyis a tartót valamely S feszültséggel megterheljük és felváltva felszabadítjuk, akkor:

$$\frac{S}{Z} = -3 \pm \sqrt{13} = -3 \pm 3,66 = 0,66 = \frac{2}{3}$$

$$\text{azaz} \quad S = \frac{2}{3} Z$$

ilyen esetben a törés már a nyújtószilárdság $\frac{2}{3}$ részénél beáll. Ez az ú. n. *összilárdság*.

Ha pedig $s = -S$, vagyis a pozitív legnagyobb feszültségről felváltva az ugyanolyan nagyságú negatív feszültségre megyünk át, akkor:

$$\frac{S}{Z} = -\left(3 - \frac{S}{Z}\right) \pm \sqrt{-12 \frac{S}{Z} + 13}$$

$$\frac{S}{Z} = -3 + \frac{S}{Z} \pm \sqrt{13 - 12 \frac{S}{Z}}$$

$$9 = 13 - 12 \frac{S}{Z}$$

$$12 \frac{S}{Z} = 4; \quad \frac{S}{Z} = \frac{1}{3}$$

$$S = \frac{1}{3}Z$$

vagyis a sztatikai szilárdság $1/3$ részénél már törés jön létre. Ez a *lengőszilárdság*.

Ilyen esetekben a megengedhető legnagyobb feszültség a munkaszilárdságnak, S -nek bizonyos része. S ugyanis azon legnagyobb feszültség, amely váltakozó megterhelésnél már szakadást idéz elő, s ezt nevezzük munkaszilárdságnak. A biztosság (β) megállapításánál tehát itt nem a nyújtó-, hanem a munkaszilárdságot vesszük alapul.

$$\beta = \frac{S}{\sigma_{\text{meg}}} = \frac{\alpha Z}{\sigma_m}; \text{ ahonnan } \sigma_m = \frac{\alpha \cdot Z}{\beta}$$

E biztosságot a törésig akkorának vehetjük, mint a biztosságot a rugalmassági határig, vagyis $\beta = 2 \sim 3$.

A drótkötél számítása ezen alapon történik a *Winkler*-képlettel. *Winkler* a (2) képletet a következő egyszerűbb alakkal pótolta.

$$\frac{S}{Z} = \alpha + \beta \frac{s}{Z}$$

ahol $\alpha = 0,54$ és $\beta = 0,46$ állandó értékek, tehát:

$$S = 0,54 Z + 0,46 s \quad (3)$$

A munkaszilárdság kifejezhető így is: $S = \beta \sigma_m$, de továbbá

$$\beta \sigma_m = 0,54 Z + 0,46 s$$

A β -szoros biztonság mellett megengedhető legnagyobb feszültség és a legkisebb feszültség közötti különbség legyen,

$$z = \sigma_m - s \quad \text{tehát}$$

$$\beta \sigma_m = 0,54 Z + 0,46 (\sigma_m - z)$$

$$\sigma_m (\beta - 0,46) = 0,54 Z - 0,46 z \quad \text{ahonnan}$$

$$\sigma_m = \frac{0,54 Z - 0,46 z}{\beta - 0,46} \quad (4)$$

Ezt a képletet használjuk a drótkötélszámításnál, ilyenkor:

$$z = 20 \text{ kg/mm}^2$$

Ha a legnagyobb feszültség összenyomó, akkor *Winkler* szerint

$$S = 0,53 Z + 0,40 s \quad (5)$$

13. §. Hosszú tartó nyújtószilárdsága.

Hosszú tartót csak akkor lehet tisztán nyújtásra igénybevenni, ha a középvonala függőleges. A terhelt szelvénytől x távolságban levő $e-f$ változó szelvény nemcsak a P terhet, hanem az alatta levő $cdef$ tartórésznek a súlyát is hordja (38. ábra.) Legyen a szelvény területe F , a fajsúly $\gamma \text{ kg/dm}^3$ és x a szelvény távolsága a legalsó szelvénytől, akkor a $cdef$ tartórész súlya $F \cdot \gamma \cdot x$. Ennélfogva az $e-f$ szelvény terhelése

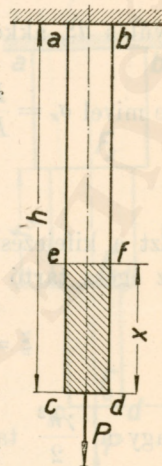
$$F \cdot \sigma_x = P + F \cdot \gamma \cdot x$$

ahonnan a szelvényben ébredő feszültség:

$$\sigma_x = \frac{P}{F} + \gamma x \quad (1)$$

E képletből látható, hogy a feszültség nem állandó, hanem annál nagyobb, minél távolabb fekszik a kérdéses szelvény a legalsótól. A legnagyobb feszültség tehát a befogott ab szelvényben fog keletkezni, melyet éppen ezért *veszélyes szelvénynek* nevezünk. Ha a tartó hossza h és a megengedhető feszültség σ_m , akkor az ab szelvény feszültsége:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + h\gamma \leq \sigma_m \quad (2)$$



38. ábra.

A (2) képlet alapján, mivel σ_m ismeretes, illetve a kívánt biztonságnak megfelelően választható, könnyű kiszámítani a szükséges keresztmetszélyt.

Például: valamely 300 m hosszú kovácsvasrúd a végén 5000 kg-mal van megterhelve. Mekkora lesz a körszelvény átmérője, ha $\gamma = 7,6 \text{ kg/dm}^3$; a rugalmasság határa $H_1 = 14 \text{ kg/mm}^2$ és a kívánt biztonság, a rugalmassági határig $\beta_1 = 2,5$?

$$\sigma_m = \frac{14}{2,5} = 5,6 \text{ kg/mm}^2$$

$$\frac{P}{F} = \sigma_m - \gamma h; \quad F = \frac{P}{\sigma_m - \gamma h}$$

$$F = \frac{5000}{5,6 - 300000 \cdot 0,0000076} = 1500 \text{ mm}^2$$

$$\frac{d^2 \pi}{4} = 1500; \text{ innen } d = \sqrt{1500 \cdot 1,273} = 44 \text{ mm}$$

A hosszú tartó megnyúlását nem lehet közvetlenül meghatározni, mert a feszültség szelvényről-szelvényre változik. Egy végtelen rövid tartóelemre azonban mindenesetre felírható a Hooke-törvény ($\lambda = l \frac{\sigma}{E}$), ha tehát egy ilyen elem hossza dx és a megnyúlás $d\xi$, akkor:

$$d\xi = dx \frac{\sigma_x}{E} \quad (3)$$

de mivel $\sigma_x = \frac{P}{F} + \gamma x$:

$$d\xi = \frac{1}{E} \left(\frac{P}{F} + \gamma x \right) dx$$

Ezt a kifejezést $x = 0$ és $x = h$ határok között integrálva, kapjuk az egész tartó megnyúlását:

$$\xi = \frac{1}{E} \int_0^h \left(\frac{P}{F} dx + \gamma x dx \right) = \frac{1}{E} \left(\frac{Ph}{F} + \frac{\gamma h^2}{2} \right)$$

vagy a $\frac{\gamma h^2}{2}$ tagot $\frac{F}{F}$ -el szorozva:

$$\xi = \frac{1}{E} \left(\frac{Ph}{F} + \frac{\gamma h^2 F}{2 F} \right)$$

de $F \cdot \gamma \cdot h = G$ a tartó önsúlya, tehát:

$$\xi = \frac{h}{EF} \left(P + \frac{G}{2} \right) \quad (4)$$

lesz a megnyúlás.

Az előbbi példában a kovácsvasrúd rugalmas megnyúlása, ha $E = 20000 \text{ kg/mm}^2$:

$$\xi = \frac{300000}{20000 \cdot 1500} \left(5000 + \frac{1500 \cdot 300000 \cdot 0,0000076}{2} \right) = 67 \text{ mm.}$$

Természetesen, ha felszabadítjuk a rudat a terhelés alól, visszanyeri eredeti hosszát.

* * *

Az így méretezett prizmatikus tartónál azonban nagy az anyag-pazarlás, mert ha a tartó pl. 8-szoros biztonsággal hordja a terhet a törésig, akkor csak a befalazott szelvényben lesz a $\beta = 8$, az alsóbb szelvényekben a biztonság már 10—20-szoros. Tehát míg az előző példában a veszélyes szelvény átmérője 44 mm, addig a legalsó szelvénynél ugyanolyan biztonság mellett:

$$\sigma_m = \frac{P}{F_0}; F_0 = \frac{P}{\sigma_m} = \frac{5000}{5,6} = 890 \text{ mm}^2 = \frac{d_0^2 \pi}{4}$$

$$d_0 = 34 \text{ mm}$$

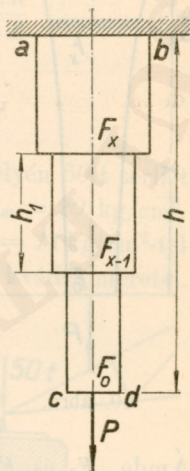
átmérő is elég volna. Több szelvényre elvégezve a számítást, azt találunk, hogy a veszélyes szelvénytől lefelé csökkenő átmérővel kellene a tartót kikovácsolni, ha azt akarjuk, *hogy minden szelvénye ugyanolyan biztonsággal hordja a terhet. Ez az egyenszilárdságú tartó elve.*

14. §. Fokozatos tartó nyújtószilárdsága.

Ha a prizmatikus tartó hossza igen nagy, a befogott szelvényt a tartó önsúlya is erősen terheli. Ilyen esetben, már csak anyag-megtakarítás szempontjából is, több egyenlő hosszúságú prizmából készítjük a tartót (39. ábra) és ezeknek szelvényeit úgy határozzuk meg, hogy mindegyik tartórész felső végszelvényében ugyanazon feszültség keletkezzék.

Legyen h az egész tartó hossza, n a prizmák (vagy hengerek) száma, $h_1 = \frac{h}{n}$ egy prizma hossza,

P a teher és σ_m a feszültség, mely valamennyi prizma felső végszelvényében keletkezik. Bármely prizmának felső véglapja a



39. ábra.

prizmának súlyát és az alatta levő prizma felső véglapjának terhelését hordja. Az F_x szelvény terhelése ezek szerint:

$$F_x \sigma_m = F_{x-1} \sigma_m + F_x \cdot \gamma h_1$$

amely egyenletből kifejezhető az F_x szelvény:

$$F_x (\sigma_m - \gamma h_1) = F_{x-1} \sigma_m$$

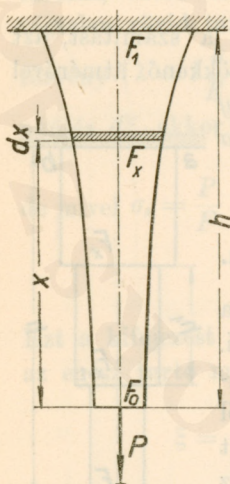
$$F_x = \frac{F_{x-1} \sigma_{\text{meg}}}{\sigma_{\text{meg}} - \gamma h_1} \quad (1)$$

Ezen képlettel az egymásutáni szelvények már meghatározhatók.

A legalsó szelvény területe $F_0 = \frac{P}{\sigma_m}$ (2)

15. §. Az egyenszilárdságú tartó.

Valamely tartót akkor mondunk egyenletes szilárdságúnak, ha annak minden szelvénye egyenlő biztonsággal hordja a terhet. Ez esetben minden szelvényben ugyanazon feszültség keletkezik, veszélyes szelvény nincsen, ezért előre nem is lehet megmondani, hogy túlterhelés esetén hol fog a tartó eltörni.



40. ábra.

Nyújtásra igénybevett tartó csak akkor lehet egyenletes szilárdságú, ha a szelvények alulról fölfelé bizonyos törvény szerint növekednek. Ezt a törvényt könnyű a fokozatos tartó alapegyenletéből leszámaztatni. A fokozatos tartónál $(F_x - F_{x-1}) \sigma_m = F_x \gamma h_1$. Ha a prizma számát a végtelenig növeljük, a fokozatos tartó átmegy az egyenszilárdságúba, melynek hossz-metszete már nem törtvonal, hanem folytonos görbe által van határolva (40. ábra). Ez esetben $h_1 = dx$ és így:

$$(F_x - F_{x-1}) \sigma_m = F_x \gamma dx$$

Ámde F_x és F_{x-1} két igen közel eső szelvény területe, tehát $F_x - F_{x-1} = dF_x$

$$dF_x \sigma_m = F_x \gamma dx$$

$$\frac{dF_x}{F_x} = \frac{\gamma dx}{\sigma_m}$$

$$\int_{F_0}^{F_x} \frac{dF_x}{F_x} = \frac{\gamma}{\sigma_m} \int_0^x dx$$

az integrálást végrehajtva: $\ln F_x - \ln F_0 = \ln \frac{F_x}{F_0} = \frac{\gamma}{\sigma_m} x$

$$\frac{F_x}{F_0} = e^{\frac{\gamma x}{\sigma_m}} \quad \text{ahonnan: } F_x = F_0 e^{\frac{\gamma x}{\sigma_m}} \quad (1)$$

Ha $x = h$, a legfelső szelvény területét kapjuk:

$$F_1 = F_0 e^{\frac{\gamma h}{\sigma_m}} \quad (2)$$

Az egyenszilárdságú tartó hosszmetszete logaritmikus görbe által van határolva.

A prizmatikus tartó és az egyenszilárdságú tartó közt tehát az a különbség, hogy míg a prizmatikus tartót túlterhelve az a veszélyes szelvényben, azaz a befogott szelvényben szakad el, addig az egyenszilárdságú tartónál a szakadás bármely szelvényben beállhat.

Mivel itt a feszültség állandó, a megnyúlást egyszerűen a *Hooke*-törvény alapján számíthatjuk:

$$\xi = \frac{\sigma_m}{E} \int_0^h dx = \left[\frac{\sigma_m x}{E} \right]_0^h; \quad \xi = \frac{\sigma_m h}{E} = \frac{P \cdot h}{F_0 E} \quad (3)$$

Példák a II. fejezethez.

1. Valamely földészék átvisz az alátámasztás helyén 50 t terhet és alátétlemezzel megterhel egy kvádert, amelyre $\sigma_m = 20 \text{ kg/cm}^2$. Ez pedig oly falazatba van kötve (41 ábra), mely $\sigma_m = 11 \text{ kg/cm}^2$ -tel vehető igénybe. Megállapítandók az alátétlemez és a kváder méretei.

Az alátétlemez felülete:

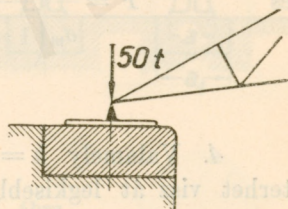
$$F_1 = \frac{P}{\sigma_m} = \frac{50000}{20} = 2500 \text{ cm}^2$$

és ha az alátétlemez négyzetes, oldal-hossza:

$$a = 50 \text{ cm}$$

$$\text{A kváder felülete: } F_2 = \frac{50000}{11} = 4545 \text{ cm}^2$$

ennek megfelel egy $70 \cdot 70 = 4900 \text{ cm}^2$ -es alap.



41. ábra.

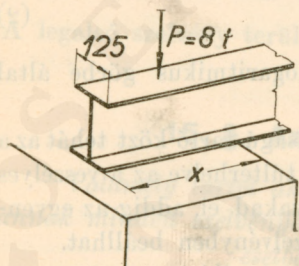
2. Valamely 30 sz. I tartó $P = 5000$ kg nyomást gyakorol a téglafalra (42. ábra). Milyen mélyen kell a tartónak a falon benyúlni, ha a falnál nyomásra $\sigma_m = 10$ kg/cm² van megengedve? A tartó övszélessége 125 mm.

A szükséges felfekvési felület:

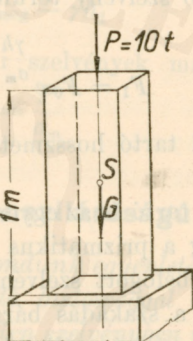
$$F = \frac{5000}{10} = 500 \text{ cm}^2 = 12,5 \cdot x$$

ahonnan a keresett

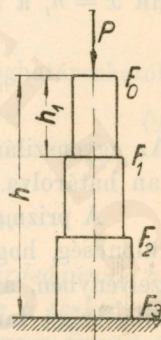
$$x = \frac{500}{12,5} = 40 \text{ cm}$$



42. ábra.



43. ábra.



44. ábra.

3. Egy köpillér $l = 1$ m magas, fajsúlya $\gamma = 2,3$ kg/dm³, meg van terelve $P = 10000$ kg nyomóerővel. (43. ábra). Keresendő az alapfelület az önsúly figyelembevételével, ha az alapzatra $\sigma_m = 7$ kg/cm².

Az összes terhelés:

$$P + G = P + \gamma F \cdot l = F \sigma_m$$

ahonnan:

$$P = F \sigma_m \left(1 - \frac{\gamma l}{\sigma_m} \right)$$

és

$$F = \frac{P}{\sigma_m \left(1 - \frac{\gamma l}{\sigma_m} \right)} = \frac{10000}{7 \left(1 - \frac{0,0023 \cdot 100}{7} \right)}$$

$$F = 1478 \text{ cm}^2$$

4. Valamely $h = 10,5$ m magas hídpillér $P = 200000$ kg terhet visz át legkisebb szelvényével. A hídpillért három lépcsőzetben készítik el, egy lépcsőzet magassága $h_1 = \frac{h}{n} = \frac{10,5}{3} = 3,5$ m (44. ábra). Jóminőségű téglafalazatot használunk, melynél

$\sigma_m = 10 \text{ kg/cm}^2$ és $\gamma = 1600 \text{ kg/m}^3$. Keressük a változások helyén a keresztmetszeteket.

$$F_0 = \frac{P}{\sigma_m} = \frac{200000}{10} = 20000 \text{ cm}^2 = 2 \text{ m}^2$$

$$F_1 = \frac{P + G_1}{\sigma_m} = \frac{P + F_1 \cdot h_1 \cdot \gamma}{\sigma_m}$$

ahonnan

$$F_1(\sigma_m - h_1 \gamma) = P$$

$$\text{és} \quad F_1 = \frac{P}{\sigma_m - h_1 \gamma} = \frac{200000}{10 - 350 \cdot 0,0016} = \frac{200000}{10 - 0,56} = 21200 \text{ cm}^2 = 2,12 \text{ m}^2$$

Hasonlóképpen

$$F_2 = \frac{P + G_1 + G_2}{\sigma_m} = \frac{P + G_1 + F_2 h_1 \gamma}{\sigma_m} \quad \text{ahonnan,}$$

$$\text{mivel} \quad G_1 = F_1 \cdot h_1 \cdot \gamma = 2,12 \cdot 3,5 \cdot 1600 = 11870 \text{ kg}$$

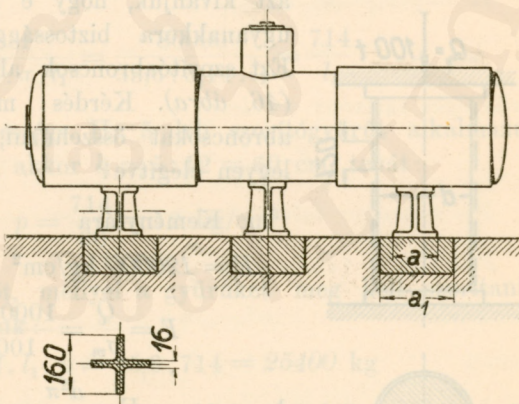
$$\text{lesz:} \quad F_2(\sigma_m - h_1 \gamma) = P + G_1$$

$$F_2 = \frac{P + G_1}{\sigma_m - h_1 \gamma} = \frac{211870}{10 - 0,56} = 22440 \text{ cm}^2 = 2,244 \text{ m}^2$$

$$G_2 = F_2 \cdot h_1 \cdot \gamma = 2,244 \cdot 3,5 \cdot 1600 = 12560 \text{ kg}$$

$$F_3 = \frac{P + G_1 + G_2}{\sigma_m - h_1 \gamma} = \frac{224430}{10 - 0,56} = 23800 \text{ cm}^2 = 2,38 \text{ m}^2$$

5. Valamely gőzkazán, melynek súlya $G = 11000 \text{ kg}$ és víztere $V = 8,5 \text{ m}^3$, három öntöttvasoszlopon nyugszik, melyek keresztalakú szelvényűek (45. ábra). A kazánlábak téglafalon nyugszanak cementhabarcsba ágyazva, tehát $\sigma_m = 12 \text{ kg/cm}^2$. Keresendő a kazánláb négyzet alakú alaplemezének a mérete és a négyzetszelvényű alaptömb a_1 mérete, ha az alapozásnál $\sigma_m = 2,5 \text{ kg/cm}^2$ nyomásra.



45. ábra.

Az összes súly:

$$G + V \cdot 1000 = 11000 + 8500 = 19500 \text{ kg}$$

Ebből egy lábra jut $\frac{19500}{3} = 6500 \text{ kg} = P$

A láb legkisebb szelvénye:

$$F = 16 \cdot 1,6 + (16 - 1,6) \cdot 1,6 = 48,64 \text{ cm}^2$$

tehát a nyomófeszültség:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{6500}{48,64} = 134 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_m$$

Az öntöttvas nyomásra jóval többet elbír.

Az alaplemez területe

$$F_1 = \frac{P}{\sigma_m} = \frac{6500}{12} = 541,6 \text{ cm}^2$$

tehát:

$$a = \sqrt{541,6} = 23,3 \text{ cm}$$

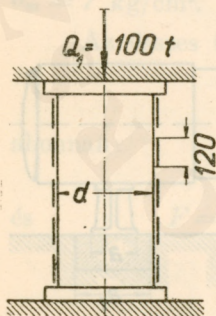
Az alaptömbre pedig:

$$F_2 = \frac{P}{\sigma_m} = \frac{6500}{2,5} = 2600 \text{ cm}^2$$

és így

$$a_1 = \sqrt{2600} = 51 \text{ cm}$$

6. Egy rövid homogén keményfaoszlop $Q = 100$ tonna nyomóerőre van méretezve. Utóbb még $Q_1 = 20$ tonnával terheljük meg és azt kívánjuk, hogy e megnövekedett terhet is ugyanakkora biztonsággal hordja az oszlop. Ezt szorítóabroncsok alkalmazásával elérhetjük (46. ábra). Kérdés: milyen R erővel kell az abroncsokat összehúzni, hogy ez a feltétel ki legyen elégítve?



Keményfára

$$E = 120000 \text{ kg/cm}^2 \text{ és } \sigma_m = 100 \text{ kg/cm}^2.$$

$$F = \frac{Q}{\sigma_m} = \frac{100000}{100} = 1000 \text{ cm}^2$$

de

$$F = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{d^2}{1,273} = 1000 \text{ cm}^2$$

tehát:

$$d = \sqrt{\frac{1,273 \cdot 100000}{100}} = 35,6 \text{ cm}$$

46. ábra.

A $Q_1 = 20 \text{ t}$ túlterhelésnél a feszültség megnövekedése egyszerűen kiszámítható:

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{\sigma_m}{\sigma}$$

ahonnan:
$$\sigma = \sigma_m \frac{Q_1}{Q} = 100 \frac{20}{100} = 20 \text{ kg/cm}^2$$

Ezen feszültségnek megfelelő fajlagos megrövidülés $\varepsilon = -\frac{\sigma}{E}$ u. i. a tengelyirányú megrövidülés; ennek megfelelően az átmérő fajlagos meghosszabbodása:

$$\varepsilon' = \mu \frac{\sigma}{E}$$

Tudvalevő, hogy az anyagban feszültségváltozás csak deformációkkal léphet fel. Ha a deformációt megakadályozzuk, akkor a feszültséget is megszüntettük; a deformációt jelen esetben a szorító-abroncsokkal akadályozzuk meg. Az oszlopnak a tengelyirányú fajlagos megrövidülése ε , átmérőjének fajlagos meghosszabbodása $\mu\varepsilon$; minthogy pedig az erők is arányosak a deformációkkal, a P keresztirányú összekötő erőnek a tengely irányában $Q_1 = \mu P$ erő felel meg, tehát a 20 tonna tengelyirányú nyomást

$$P = \frac{1}{\mu} 20 = \frac{1}{0,25} 20 = 80 \text{ tonna}$$

összeszorítóerővel lehet egyensúlyozni. Ebből a felületegységre eső palástnyomás:

$$p = \frac{P}{d \cdot \pi \cdot l_1} = \frac{80000}{35,6 \cdot 3,14 \cdot l_1} = \frac{714}{l_1}$$

ahol l_1 a gyűrűk szélessége. Ha 5 drb szorítógyűrűt alkalmazunk a 12 cm szélességben, akkor $l_1 = 5 \cdot 12 = 60 \text{ cm}$, tehát:

$$p = \frac{714}{60} = 12 \text{ kg/cm}^2$$

Az összehúzóerőt, mellyel a gyűrűket meg kell szorítani, a következőképpen kapjuk:

$$R = d \cdot l_1 \cdot p = 35,6 \cdot 714 = 25400 \text{ kg}$$

Ha minden gyűrűhöz mindkét oldalon két-két csavart veszünk, akkor összesen $5 \cdot 4 = 20$ csavar van, tehát az egy csavarra eső erő:

$$\frac{25400}{20} = 1270 \text{ kg}$$

A csavar szükséges mérete, ha $\sigma_m = 500 \text{ kg/cm}^2$,

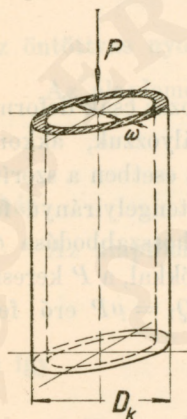
$$\frac{d^2 \pi}{4} = \frac{d^2}{1,273} = \frac{1270}{500} = 2,54 \text{ cm}^2$$

ahonnan a magátmérő:

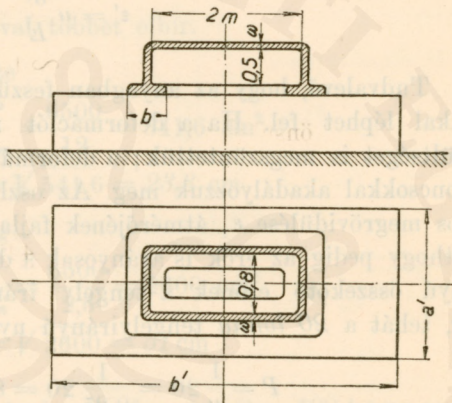
$$d = \sqrt{2,54 \cdot 1,273} = 1,8 \text{ cm}$$

Ennek megfelel a 7/8"-es Whitworth-csavar.

7. Milyen falvastagságot adjunk olyan rövid üreges öntöttvas-oszlopnak, melynek külső átmérője $D_k = 30 \text{ cm}$ és 15-szörös biztonság mellett $P = 80 \text{ tonna}$ terhet kell kibírnia? (47. ábra).



47. ábra.



48. ábra.

A megengedett feszültség:

$$\sigma_m = \frac{S}{\beta} = \frac{7500}{15} = 500 \text{ kg/cm}^2$$

a szükséges szelvény területe:

$$F = \frac{P}{\sigma_m} = \frac{80000}{500} = 160 \text{ cm}^2$$

Ha a henger falvastagsága ω , akkor

$$F = [D_k^2 - (D_k - 2\omega)^2] \frac{\pi}{4} = [30^2 - (30 - 2\omega)^2] \frac{\pi}{4} = 160$$

és rendezve:

$$\omega^2 - 30\omega + 51 = 0$$

ahonnan

$$\omega = 15 \pm \sqrt{15^2 - 51} = 1,8 \text{ cm}$$

A gyökjel nem lehet +, mert okvetlenül $\omega < 15 \text{ cm}$.

8. Egy prizmatikus üreges öntöttvaskereten, amely valamely gép felvételére szolgál, $Q = 200 \text{ tonna}$ teher vitetik át (48. ábra). Mekkora a megadott méretek mellett a falvastagság, ha $\sigma_m = 250$

kg/cm²? Mekkora a lábázat b mérete, ha az öntvény cementfalazaton nyugszik és az önsúlyt is figyelembe vesszük, ha cementfalazatra $\sigma_m = 15$ kg/cm². Mekkora végül az alaptömb felülete, ha ennek önsúlya 10 tonna és az alapzatra $\sigma_m = 2,5$ kg/cm².

$$F = \frac{P}{\sigma_m} = \frac{200000}{250} = 800 \text{ cm}^2$$

$$800 = 2 \cdot 200 \omega + 2 \cdot 80 \omega$$

$$800 = 560 \omega$$

innen a falvastagság: $\omega = \frac{800}{560} = \sim 1,4 \text{ cm.}$

A keret önsúlya lábázat nélkül:

$$\text{oldalfal} \quad 2 (20 + 8) \cdot 5 = 280 \text{ dm}^2$$

$$\text{fedőrész} \quad 20 \cdot 8 = \frac{160}{440} \text{ dm}^2$$

de a falvastagság $\omega = 1.4 \text{ cm}$ és $\gamma = 7,5 \text{ kg/dm}^3$

és így: $G = 440 \cdot 0,14 \cdot 7,5 = 462 \text{ kg}$

A lábázat területe:

$$F_I = \frac{200000 + 462}{15} = 13364 = 560 \cdot b$$

ahonnan a lábázat szélessége

$$b = 24 \text{ cm}$$

Ha az alaptömb felülete F_{II} és oldalainak viszonya ugyanaz, mint a keretnek, akkor:

$$a' \cdot b' = F_{II}$$

és

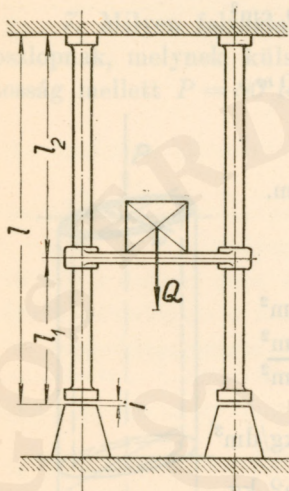
$$a' : b' = 0,8 : 2 = 2 : 5$$

akkor: $\frac{2}{5} b'^2 = F_{II} = \frac{210462}{2,5} = 84184 \text{ cm}^2$

ahonnan: $b' = \sqrt{\frac{84184 \cdot 5}{2}} = 458,75 \text{ cm}$

és $a' = 183,5 \text{ cm}$

9. A Q terhet két körgyűrűszelvényű acélöntvényoszlop viseli (49. ábra). Az oszlop hossza $l = 15$ m, a tehernek a felső befogástól való távolsága $l_2 = 10$ m, s az alsó, — csavarral pontosan beállítható — támasztózsámolytól való távolsága $l_1 = 5$ m. Azt akarjuk, hogy az oszlop mindkét része (húzott és nyomott) egyenlőképpen legyen igénybevéve. Kiszámítandó i rés úgy, hogy ez a feltétel ki legyen elégítve.



49. ábra.

$$E = 1900000 \text{ kg/cm}^2 \text{ és } \sigma_m = 800 \text{ kg/cm}^2$$

A húzott l_2 rész megnyúlása a terhelés következtében :

$$\lambda_2 = l_2 \frac{\sigma}{E} = 1000 \frac{800}{1900000} = 0,42 \text{ cm}$$

l_1 rész megrövidülése az összenyomás hatására :

$$-\lambda_1 = l_1 \frac{\sigma}{E} = 500 \frac{800}{1900000} = 0,21 \text{ cm}$$

A kettő algebrai összege adja a rés méretét, tehát :

$$\lambda_2 - \lambda_1 = 0,42 - 0,21 = 0,21 \text{ cm} = i$$

Ha a teher az oszlop közepén hat, résre nincs szükség, mert

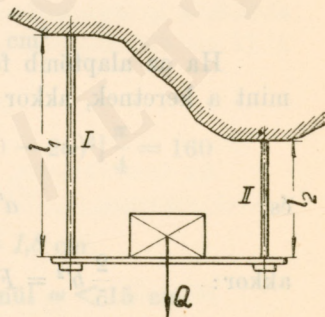
$$\lambda_2 = \lambda_1$$

Ha azonban a teher az oszlop alsó végén nyugszik, az egész oszlop megnyúlik, megrövidülés nincs, ilyenkor kell a legnagyobb rés és pedig :

$$i_{\max} = 1500 \frac{800}{1900000} = 0,63 \text{ cm}$$

Ha a terhelés az oszlop felső felében van, negatív rés kell, vagyis az oszlopot terheletlen állapotban a csavaros zsámoly segítségével meg kell rövidíteni. Ha pedig a teher egészen fent van elhelyezve, az oszlopot 0,63 cm-rel kell megrövidíteni.

10. $Q = 1000$ kg teher két egyenlőtlen hosszúságú rúdon van felfüggesztve. A teher az alátámasztási lap közepén van elhelyezve (50. ábra). Az I. rúd hossza $l_1 = 37$ cm, anyaga kovácsoltvas, rugalmassági modulusza : $E_1 = 2000000 \text{ kg/cm}^2$ és $\sigma_{m1} = 270 \text{ kg/cm}^2$.



50. ábra.

A II. rúd anyaga folytácél, hossza: $l_2 = 20$ cm, $E_2 = 2200000$ kg/cm² és $\sigma_{m2} = 540$ kg/cm².

Megállapítandók a rudak F_1 és F_2 szelvényei, azon feltétel mellett, hogy a kezdetben vízszintes alátámasztási lap terhelés után is vízszintes maradjon.

A megnyúlásoknak tehát egyenlőknek kell lenniük.

$$\lambda_1 = \lambda_2 \qquad l_1 \frac{\sigma_1}{E_1} = l_2 \frac{\sigma_2}{E_2}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} = \frac{2000000}{2200000} \cdot \frac{20}{37} = \frac{200}{407}$$

Az egyenletes nyúlást ezen $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ viszsonnyal érhetjük el. Ez kétféleképpen valósítható meg, minthogy a megadott $\frac{\sigma_{m1}}{\sigma_{m2}}$ nem egyezik meg a kiszámított $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ értékkel. Vagy σ_{m2} -t nagyobbítjuk, vagy σ_{m1} -t kisebbítjük. Miután a feszültségeknek már a megengedhető legnagyobb értékei vannak adva, utóbbit választjuk. Tehát:

$$\sigma_{m2} = 540 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{m1} = 540 \cdot \frac{200}{407} = 264,8 \text{ kg/cm}^2$$

$$F_1 \sigma_{m1} = F_2 \sigma_{m2} = \frac{Q}{2} = 500 \text{ kg}$$

$$F_2 = \frac{500}{540} = 0,926 \text{ cm}^2 = \sim 1 \text{ cm}^2$$

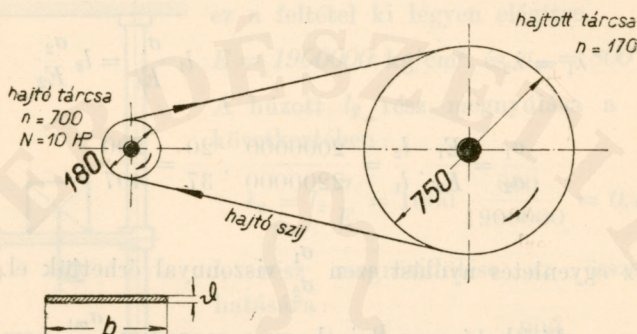
$$F_1 = F_2 \cdot \frac{540}{264,8} = 1 \cdot \frac{540}{264,8} = \sim 2,04 \text{ cm}^2 = \sim 2 \text{ cm}^2$$

11. Kiszámítandó valamely szíjhajtásnál a szíj mérete a következő adatok mellett: átvitt lóerőszám $N = 10$ HP, fordulatszám $n = 700$ min⁻¹. A szíj szakítószilárdsága $S = 300$ kg/cm² és $\beta = 10$ mellett $\sigma_m = 30$ kg/cm². Itt azonban összilárdsággal számolunk, tehát $\sigma'_m = 20$ kg/cm² (51. ábra).

$$M_{cs} = 716,2 \frac{N}{n} = 716,2 \frac{10}{700} = 10,23 \text{ kgm} = 1023 \text{ kgcm}$$

az átvitt húzóerő:

$$P = \frac{M_{cs}}{\frac{d}{2}} = \frac{1023}{9} = 114 \text{ kg}$$



51. ábra.

Mivel a hajtó szíjrészben kétszer akkora feszültség keletkezik, mint a hajtottban, a szíjat a $P' = 2 \cdot P$ húzóerőre méretezzük:

$$F = b \cdot \vartheta = \frac{228}{20} = 11,4 \text{ cm}^2$$

a szíj vastagságát megválasztjuk $\vartheta = 0,6$ cm-nek, akkor a szíj szélessége:

$$b = \frac{11,4}{0,6} = 19 \text{ cm}$$

A szíj sebessége az $N = \frac{P \cdot v}{75}$ képletből

$$v = \frac{75 \cdot N}{P} = \frac{75 \cdot 10}{114} = 6,6 \text{ m/sec.}$$

Ugyanezen példában *Güldner* szerint $b = 130$ mm, a *Hütte* szerint $b = 150$ mm, mások szerint ismét $b = 250$ mm. A »Werkstattstechnik« 1922-i 3. füzet szerint a számítás a következőképpen történhetik.

Legyen k kg a megengedett terhelés 1 cm szélességű szíjra, amely függ a kisebb tárcsa átmérőjétől és a szíj sebességétől

től és „ k ” ezen értékekhez táblázatokból (Hütte) vehető. Jelen esetben a

$$k = 4,5 \text{ kg/cm és így } P = b \cdot k$$

$$\text{ahonnan } b = \frac{P}{k} = \frac{114}{4,5} = 25 \text{ cm}$$

Itt tehát csak az átvitt erővel számolunk. Ez vonatkozik 0,5—0,6 cm vastag szíjakra.

12. Kiszámítandó az 52. ábrán vázolt szalagos fékszerkezet acél-fékszalagja a következő adatok mellett: $Q = 2000 \text{ kg}$,

$r = 150 \text{ mm}$, $R = 400 \text{ mm}$, a surlódási tényező $\mu = 0,18$ és a szalag által befogott ív $\bar{\alpha} = 1,16\pi$. A szalagra $\sigma_m = 500 \text{ kg/cm}^2$.

Sztatikai összefüggések:

ha P a surlódóerő, akkor $PR = Q \cdot r$ vagyis:

$$P = Q \frac{r}{R}$$

$$S_2 - S_1 = P$$

$$S_2 = S_1 e^{\mu \bar{\alpha}}$$

A megadott értékek mellett

$$e^{\mu \bar{\alpha}} = 2,71828^{0,18 \cdot 1,16 \cdot 3,14} = 1,93$$

$$\text{tehát: } P = S_2 - S_1 = S_1 (e^{\mu \bar{\alpha}} - 1) = 0,93 \cdot S_1$$

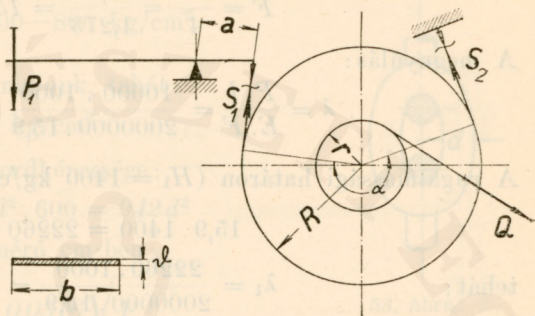
$$\text{és } S_2 = 1,93 \cdot S_1 = \frac{1,93 \cdot P}{0,93} = \frac{1,93}{0,93} \cdot 2000 \cdot \frac{150}{400} = 1560 \text{ kg}$$

Ezen nagyobbik szalagfeszültségre méretezzük a fékszalagot:

$$F = \frac{1560}{\sigma_m} = \frac{1560}{500} = 3,12 \text{ cm}^2$$

és ha a szalag vastagságát $\vartheta = 0,4 \text{ cm}$ -re választjuk, akkor:

$$b = \frac{3,12}{0,4} = 7,8 \text{ cm.}$$



52. ábra.

*13. Egy $l = 10$ m hosszú és $d = 4,5$ cm átmérőjű függőleges kovácsvasrudat $P = 10000$ kg húzóerővel megterhelünk. $E = 2000000$ kg/cm². Mekkora a megnyúlás P erő következtében, mekkora a rugalmassági határon és milyen terhelésnél szakad el a rúd?

$$F = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{4,5^2}{1,273} = 15,9 \text{ cm}^2$$

A megnyúlás:

$$\lambda = \frac{P \cdot l}{E \cdot F} = \frac{10000 \cdot 1000}{2000000 \cdot 15,9} = 0,315 \text{ cm}$$

A rugalmassági határon ($H_1 = 1400$ kg/cm²) az összes teher:

$$15,9 \cdot 1400 = 22260 \text{ kg}$$

tehát:

$$\lambda_1 = \frac{22260 \cdot 1000}{2000000 \cdot 15,9} = 0,7 \text{ cm}$$

A szakítószilárdság $S = 4000$ kg/cm²

tehát a pálca: $R = 15,9 \cdot 4000 = 63600$ kg
teher mellett szakad el.

14. Hány csavarral kell egy $D_b = 750$ mm átmérőjű gőzhenger fedelét leszorítani, ha a gőz túlnyomása

$$p = 4 \text{ at} = 4 \text{ kg/cm}^2?$$

$$F = \frac{d^2}{1,273} = \frac{75^2}{1,273} = 4418 \text{ cm}^2$$

tehát a fedélre ható erő:

$$P = F \cdot p = 4418 \cdot 4 = 17672 \text{ kg}$$

A csavarok igénybevételére Reiche tanár a következő adatokat nyújtja:

Ha a henger vagy cső átmérője:

akkor

$$D_b = 1000 \text{ mm} \quad \sigma = 300 \text{ kg/cm}^2$$

$$D_b = 1000 - 2000 \text{ »} \quad \sigma = 300 - 400 \text{ »}$$

$$D_b = 2000 - 2500 \text{ »} \quad \sigma = 400 - 500 \text{ »}$$

Példánkban tehát $\sigma_m = 300$ kg/cm². Ha a csavarok számát úgy választjuk, hogy egymástól való távolságuk 150—160 mm legyen, akkor körülbelül 20 csavart kell vennünk. Egy csavar magszelvénye:

$$F_1 = \frac{P}{i \cdot \sigma_m} = \frac{17672}{20 \cdot 300} = 2,95 \text{ cm}^2$$

ennek megfelel az I''-es csavar $F_1 = 3,57$ cm² magszelvénnel.

15. Keresendő a láncszem teherbírása, ha szelvénye (53. ábra):

$$F = 2 \frac{d^2 \pi}{4} = 1,57 d^2$$

A láncok állandó konstrukciók és $\beta = 4-5$ -szörös biztonsággal mellett:

$$\sigma_m = \frac{4000}{4-5} = 1000-800 \text{ kg/cm}^2$$

de itt összilárdsággal számolunk, tehát:

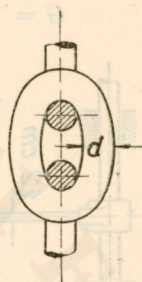
$$\sigma_m' = \sim 600 \text{ kg/cm}^2$$

Tehát a szelvény hordképessége:

$$P = F \cdot \sigma_m = 1,57 \cdot d^2 \cdot 600 = 942 d^2$$

ahonnan a szükséges átmérő cm-ben:

$$d = \sqrt{\frac{P}{942}} = 0,0316 \sqrt{P}$$



53. ábra.

16. Milyen hosszú szabadon függő kovácsvasrúd szakad le a saját súlya alatt, ha a fajsúlya $\gamma = 7,6 \text{ kg/dm}^3$ és a szakító szilárdsága: $S = 4000 \text{ kg/cm}^2$?

$$R = F \cdot S = F \cdot h \cdot \gamma$$

$$S = h \gamma$$

$$\text{ahonnan: } h = \frac{S}{\gamma} = \frac{4000}{0,0076} = 526000 \text{ cm} = 5260 \text{ m}$$

17. Egy $h = 20 \text{ m}$ hosszú és $d = 4 \text{ cm}$ átmérőjű kör-szelvényű kovácsvastartó függőleges helyzetű. Felül be van fogva, alsó végén pedig $P = 8000 \text{ kg}$ húzóerővel van megterhelve. Fajsúlya $\gamma = 7,8 \text{ kg/dm}^3$. Keresendő a feszültség a veszélyes szelvényben, a biztonság és a megnyúlás.

$$\sigma = \frac{P}{F} + \gamma h = \frac{8000}{\frac{4^2 \pi}{4}} + 0,0078 \cdot 2000 = 651,6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{A biztonság: } \beta = \frac{4000}{651,6} = \sim 6,2$$

$$\text{A megnyúlás: } \xi = \frac{h}{E \cdot F} (P + 0,5 G)$$

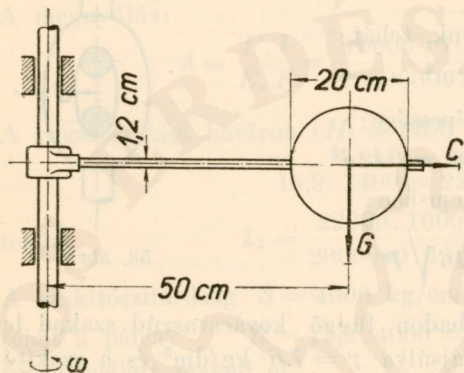
$$\text{de: } F = 12,56 \text{ cm}^2 \text{ és } G = 12,56 \cdot 2000 \cdot 0,0078 = 196 \text{ kg}$$

$$\text{tehát: } \xi = \frac{2000}{2000000 \cdot 12,56} (8000 + 98) = 0,644 \text{ cm}$$

18. Milyen n fordulatszámmal forgatható szilárd tengely körül a folytvaskaron elhelyezett öntöttvasgömb (54. ábra), míg a centrifugális erő a kart el nem szakítja? Folytvasra $S = 4000 \text{ kg/cm}^2$. A méretek az ábrán vannak feltüntetve.

A golyó súlya:

$$G = V \cdot \gamma = \frac{4r^3\pi}{3} \gamma = \frac{d^3\pi}{6} \cdot 7,2 = \frac{2^3 \cdot 3,14}{6} \cdot 7,2 = 30 \text{ kg}$$



54. ábra

A centrifugális erő:

$$C = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2 = \frac{G}{g} r \left(\frac{n\pi}{30} \right)^2$$

$$\text{és ha } \frac{\pi^2}{g} = \sim 1$$

akkor:

$$C = G r \left(\frac{n}{30} \right)^2 = 30 \cdot 0,5 \frac{n^2}{30^2} = \frac{n^2}{60}$$

tehát a szakítóerő:

$$R = C = \frac{n^2}{60} = F \cdot S$$

ahol a kar szelvénye:

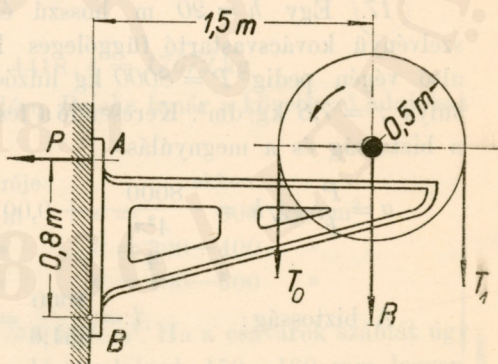
$$F = \frac{1,2^2}{1,273} = 1,13 \text{ cm}^2$$

$$\text{tehát: } \frac{n^2}{60} = 1,13 \cdot 4000 = 4520 \text{ kg}$$

ahonnan a keresett fordulatszám:

$$n = \sqrt{60 \cdot 4520} = 520 \text{ min}^{-1}$$

19. Valamely fali konzolon csapágyazott szíjtárcsa átvisz $N = 60 \text{ HP}$ -t $n = 100$ fordulatszámmal (55. ábra). Keresendő az A csavar magátmérője, ha a csavarra $\sigma_m = 300 \text{ kg/cm}^2$.



55. ábra.

A szíj feszültségek R eredőjének a B pontra vonatkozó nyomatéka egyenlő az A csavarra ható P erőnek ugyancsak a B pontra vonatkozó nyomatékával.

$$N_{\text{HP}} = \frac{L_{\text{kgm}}}{75}$$

$$L_{\text{kgm}} = 75 \cdot 60 = 4500 \text{ kgm}$$

$$L = M\omega = M \frac{n\pi}{30} = (T_1 - T_0) \cdot r \cdot 10,4$$

de: $T_1 = 2T_0$

tehát: $L = T_0 \cdot r \cdot 10,4$

azaz: $T_0 = \frac{L}{10,4 \cdot r} = \frac{4500}{10,4 \cdot 0,5} = 866 \text{ kg}$

és így: $R = 3T_0 = 3 \cdot 866 = 2598 \text{ kg}$

A nyomaték B pontra: $R \cdot 1,5 = P \cdot 0,8$

$$P = \frac{2598 \cdot 1,5}{0,8} = 4870 \text{ kg}$$

$$F = \frac{P}{\sigma_m} = \frac{4870}{300} = \frac{d^2}{1,273}$$

ahonnan: $d = \sqrt{\frac{1,273 \cdot 4870}{300}} = 4,55 \text{ cm}$

(20.) Egyenszilárdságúnak építendő fel egy $h = 20 \text{ m}$ magas kő-víztorony. A kő fajsúlya $\gamma = 2000 \text{ kg/m}^3$, megengedett feszültsége $\sigma_m = 10 \text{ kg/cm}^2$. Hányszor nagyobb az alsó szelvénye, mint a felső?

$$F_1 = F_0 e^{\frac{\gamma h}{\sigma_m}} = F_0 \cdot 2,71828^{\frac{2000 \cdot 20}{10000}} = 1,492 F_0$$

vagyis az alsó szelvény a felsőnek másfélszerese.

(21.) Valamely $h = 100 \text{ m}$ hosszú körszelvényű egyenszilárdságú tartó alsó végén $P = 10000 \text{ kg}$ erővel van megterhelve. $E = 1000000 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_m = 200 \text{ kg/cm}^2$ és $\gamma = 7,5 \text{ kg/dm}^3$. Keresendő az alsó és a felső (befogott) szelvény átmérője és a megnyúlás.

Az alsó szelvény:

$$F_0 = \frac{10000}{200} = 50 \text{ cm}^2 = \frac{d_0^2}{1,273}$$

és: $d_0 = \sqrt{1,273 \cdot 50} = \sim 8 \text{ cm}$

tehát: $F_0 = 50,26 \text{ cm}^2$.

A felső szelvény:

$$F_1 = F_0 \cdot e^{\frac{\gamma h}{\sigma_m}}$$

$$\log F_1 = \log F_0 + \frac{\gamma h}{\sigma_m} \log e$$

$$\log F_1 = 1,70209 + 0,375 \cdot 0,434 = 1,8641$$

$$F_1 = 73,14 \text{ cm}^2 = \frac{d_1^2}{1,273}$$

$$d_1 = \sqrt{1,273 \cdot 73,14} = 9,64 \text{ cm.}$$

A megnyúlás:

$$\xi = \frac{\sigma_m \cdot h}{E} = \frac{200 \cdot 10000}{1000000} = 2 \text{ cm}$$

22. Valamely $D_k = 36 \text{ cm}$ külső átmérőjű oszlophoz tervezessék meg az öntöttvasláb a hozzátartozó kváderrel és a szükséges alapozás (56. ábra). Legnagyobb terhelés $P = 120 \text{ tonna}$. A megengedett feszültségek: öntöttvasra $\sigma_m = 500 \text{ kg/cm}^2$, gránitra $\sigma_m = 45 \text{ kg/cm}^2$, jó téglára cementhabarcsba rakva $\sigma_m = 14 \text{ kg/cm}^2$, az alapzatra pedig $\sigma_m = 2,5 \text{ kg/cm}^2$.

Tervezés:

az önsúlyt egyelőre mellőzve, AB szelvényben:

$$F = \frac{P}{\sigma_m} = \frac{120000}{500} = 240 \text{ cm}^2$$

CD szelvényben, öntöttvas grániton:

$$F = \frac{P}{\sigma_m} = \frac{120000}{45} = 2670 \text{ cm}^2$$

EF szelvényben, gránit téglafalon:

$$F = \frac{P}{\sigma_m} = \frac{120000}{14} = 8580 \text{ cm}^2$$

GH szelvényben az alapfelületen:

$$F = \frac{P}{\sigma_m} = \frac{120000}{2,5} = 48000 \text{ cm}^2$$

Legyen az oszloplábra is $D_k = 36 \text{ cm}$, akkor AB szelvényben

$$\frac{D_k^2 \pi}{4} - \frac{D_b^2 \pi}{4} = F$$

$$\frac{D_b^2 \pi}{4} = \frac{D_k^2 \pi}{4} - F = \frac{36^2 \cdot \pi}{4} - 240 = 778 \text{ cm}^2$$

ennek megfelel:

$$D_b = 31 \text{ cm}$$

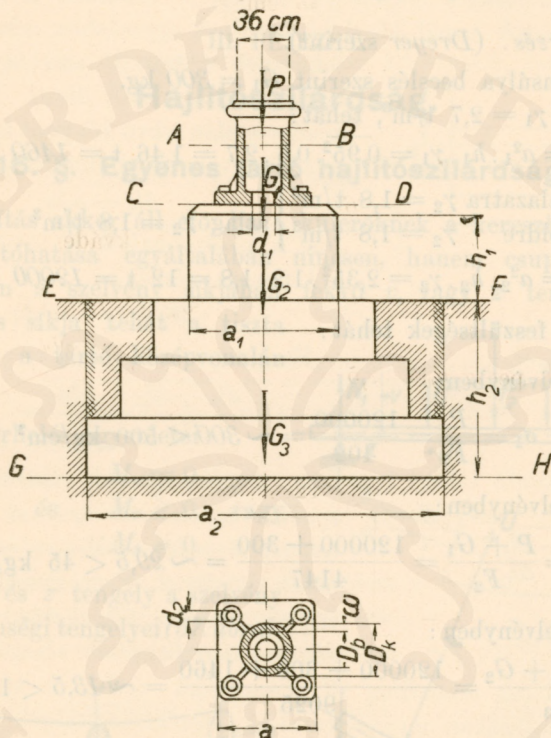
A falvastagság tehát: $\omega = \frac{1}{2}(D_k - D_b) = \frac{1}{2}(36 - 31) = 2,5 \text{ cm.}$

Ezt a méretet az öntésre és rozsdásodásra való tekintettel megnöveljük: $\omega = 4$ cm-re

$$\text{tehát: } D_b = D_k - 2\omega = 36 - 8 = 28 \text{ cm}$$

$$\text{és így: } F_1 = \frac{D_k^2 \pi}{4} - \frac{D_b^2 \pi}{4} = \frac{36^2 \pi}{4} - \frac{28^2 \pi}{4} = 402 \text{ cm}^2$$

a tényleges szelvény területe.



56. ábra.

A négyzet alakú láblemez oldalhossza $a = 66$ cm, ez a közepén ki van vágva $d_1 = 12$ cm átmérővel, továbbá van benne 4 lyuk a csavarok számára $d_2 = 5,5$ cm átmérővel. Tehát a meglevő felület a CD szelvényben:

$$F_2 = a^2 - \frac{d_1^2 \pi}{4} - 4 \frac{d_2^2 \pi}{4} = 4356 - 113 - 96 = 4147 \text{ cm}^2.$$

A gránitkő méretei $a_1 = 95$ cm és $h_1 = 60$ cm, tehát a tényleges nyomófelület EF' szelvényben:

$$F_3 = a_1^2 = 95^2 = 9025 \text{ cm}^2.$$

A falazat. A GH szelvényben az önsúlytól eltekintve szükséges 48000 cm^2 négyzet alakú nyomófelület $\sqrt{48000} = \sim 220 \text{ cm}$ oldalhosszal. De ezt a méretet az önsúly folytán megnöveljük:

$$a_2 = 235 \text{ cm és } h_2 = 120 \text{ cm.}$$

Így a meglevő felület GH szelvényben:

$$F_4 = a_2^2 = 235^2 = 55225 \text{ cm}^2$$

Ellenőrzés: (Dreyer szerint)

Az oszlop önsúlya becslés szerint $G_1 = 300 \text{ kg}$.

Gránitkőre: $\gamma_1 = 2,7 \text{ t/m}^3$, tehát:

$$G_2 = a_1^2 \cdot h_1 \cdot \gamma_1 = 0,95^2 \cdot 0,6 \cdot 2,7 = 1,46 \text{ t} = 1460 \text{ kg}$$

Alapozás: falazatra $\gamma_2 = 1,8 \text{ t/m}^3$
 földre $\gamma_2 = 1,8 \text{ t/m}^3$ } átlag $\gamma_2 = 1,8 \text{ t/m}^3$

$$G_3 = a_2^2 \cdot h_2 \cdot \gamma_2 = 2,35^2 \cdot 1,2 \cdot 1,8 = 12 \text{ t} = 12000 \text{ kg}$$

A tényleges feszültségek tehát:

AB szelvényben:

$$\sigma_1 = \frac{P}{F_1} = \frac{120000}{402} = \sim 300 < 500 \text{ kg/cm}^2$$

CD szelvényben:

$$\sigma_2 = \frac{P + G_1}{F_2} = \frac{120000 + 300}{4147} = \sim 29,5 < 45 \text{ kg/cm}^2$$

EF szelvényben:

$$\sigma_3 = \frac{P + G_1 + G_2}{F_3} = \frac{120000 + 300 + 1460}{9025} = \sim 13,5 < 14 \text{ kg/cm}^2$$

GH szelvényben:

$$\sigma_4 = \frac{P + G_1 + G_2 + G_3}{F_4} = \frac{120000 + 300 + 1460 + 12000}{55225} = \sim 2,5 = \sigma_m \text{ kg/cm}^2$$

III. FEJEZET.

Hajlítószilárdság.

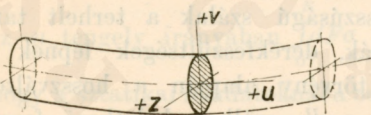
16. §. Egyenes tartó hajlítószilárdsága.

Hajlítás akkor áll elő, ha a külerőknek a keresztmetszet síkjára szállíthatása egyáltalában nincsen, hanem csupán forgatóhatása van a szelvény síkjában fekvő v , vagy z tengely körül. A terhelés síkja tehát a tiszta hajlításnál a tartó középvonalán megy át.

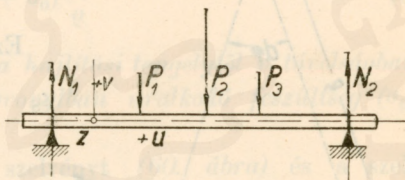
A terhelés egyenletei:

$$\begin{aligned} R_u &= 0 & M_u &= 0 \\ R_v &= 0 & \text{és} & M_v \geq 0 \quad \text{vagy} \\ R_z &= 0 & M_z &\geq 0 \end{aligned}$$

A v és z tengely a szelvény főtehetetlenségi tengelyei (57. ábra),



57. ábra.



58. ábra

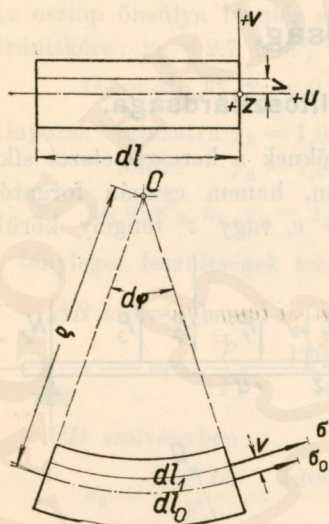
az u tengely a tartó középvonalának érintője, vagyis egyenes tartó esetében maga a középvonal.

Keressük a geometriai feltételt arra nézve, hogy a tartó az egyik, pl. a z főtehetetlenségi tengely körül hajlításra legyen igénybevéve.

A tartó a hajlítás következtében úgy görbül meg, hogy az egyes, a z és u tengelyekkel eredetileg párhuzamos síkjai koncentrikus hengerlapokká lesznek. Az 58. ábrán fel van tüntetve egy hajlításra igénybevett tartó a hajlítás előtt és a hajlítás után. O a

meggömbült lapok görbületi középpontja, q a görbületi sugár, az 1 lap összenyomásnak, a 3 lap húzásnak van alávetve, a kettő közt kell lenni olyan rétegnek, mely sem húzást, sem nyomást nem szenved, ez a *semleges réteg* (2).

Ha a tartón a hajlítás előtt egymáshoz igen közel eső két parallel szelvényt veszünk fel, akkor ezeknek minden megfelelő pontja dl távolságra fekszik egymástól, — ellenben a meghajlított tartón e pontok annál közelebb kerülnek egymáshoz, minél közelebb



59. ábra.

feküsznek a felvett szelvény görbületi középpontjához (59. ábra). Ha a tartó középvonalán fekvő két pont távolsága dl_0 és a középvonal görbületi sugara q , akkor :

$$dl_0 = qd\varphi$$

míg a középvonaltól v távolságra levő két pontra nézve :

$$dl_1 = (q - v)d\varphi$$

Ezekből: $dl_0 - dl_1 = vd\varphi$

$$\text{és} \quad \frac{dl_0 - dl_1}{dl_0} = \frac{vd\varphi}{qd\varphi} = \frac{v}{q} \quad (1)$$

A viszonylagos alakváltozás tehát egyenlő a vizsgált szálnak a hajlítási tengelytől mért távolsága osztva a görbületi sugárral. Ezen geometriai összefüggés alapján áttérhetünk a szilárd-ságtani összefüggések vizsgálatára.

Mivel az eredetileg dl hosszúságú szálak a terhelt tartóban hosszúságukat megváltoztatják, derékfeszültségek lépnek fel, melyeknek értéke a Hooke-féle törvény alapján a hosszváltozásokból kiszámítható. Ugyanis, ha a dl_0 szálaban keletkező feszültséget σ_0 -al, a dl_1 -ben keletkezőt σ -val jelöljük, mivel a szálak eredeti hossza dl ,

$$\text{akkor:} \quad dl_0 = dl \left(1 + \frac{\sigma_0}{E} \right)$$

$$\text{és} \quad dl_1 = dl \left(1 + \frac{\sigma}{E} \right)$$

$$\text{vagyis:} \quad dl_0 - dl_1 = dl \left(\frac{\sigma_0 - \sigma}{E} \right)$$

Ebből a viszonylagos alakváltozás:

$$\frac{dl_0 - dl_1}{dl_0} = \frac{dl \left(\frac{\sigma_0 - \sigma}{E} \right)}{dl \left(\frac{E + \sigma_0}{E} \right)}$$

ahonnan:

$$\frac{dl_0 - dl_1}{dl_0} = \frac{\sigma_0 - \sigma}{E + \sigma_0} \quad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletekből pedig következik, hogy:

$$\frac{\sigma_0 - \sigma}{E + \sigma_0} = \frac{v}{\varrho}$$

és ebből az egyenletből a σ -t kifejezve:

$$\sigma_0 - \sigma = (E + \sigma_0) \frac{v}{\varrho}$$

$$\sigma = \sigma_0 - (E + \sigma_0) \frac{v}{\varrho} \quad (3)$$

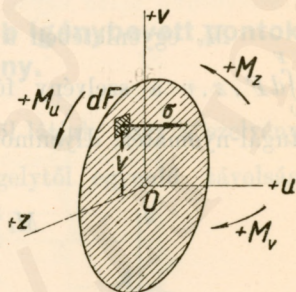
Ez az egyenlet tünteti föl a hajlítási tengelytől v távolságban keletkező feszültség (σ) és a súlyrónalban uralkodó feszültség (σ_0) közötti összefüggést.

Vegyük fel tetszőleges szelvényt (60. ábra) és a szelvényben a hajlítás tengelyétől v távolságban dF területet. A feszültség a dF területen σ . A külerők szállítóhatása az u tengely irányában a hajlító- igénybevétel alapegyenletei szerint $R_u = 0$. Az összes belerők szállítóhatása

az u tengely irányában $\int_0^F dF \sigma$ és mint-

hogya a sztatikai feladatoknál a belerők mindig egyensúlyt tartanak a külerőkkel:

$$R_u = \int_0^F dF \cdot \sigma = 0 \quad (4)$$



60. ábra.

Az összes belerők forgatóhatása pedig, figyelembe véve, hogy azon nyomaték pozitív, mely u -tól v -ig, v -tól z -ig és u -tól z -ig forgat,

$$M_z = - \int_0^F dF \cdot \sigma \cdot v \quad (5)$$

$$M_v = - \int_0^F dF \cdot \sigma \cdot z = 0 \quad (6)$$

A σ értékét a (3) egyenletből, amelyben σ_0 , E és ϱ állandók, behelyettesítjük az (5) és (6) egyenletekbe:

$$\int_0^F dF \cdot \sigma = \sigma_0 \int_0^F dF - \frac{E + \sigma_0}{\varrho} \int_0^F dF \cdot v = 0$$

amelyben $\int_0^F dF = F$ és $\int_0^F dF \cdot v = 0$, mert a sztatikai nyomatékok összege a súlyponton átmenő tengelyre vonatkozólag zéró.

A (4) alapján: $\sigma_0 F = 0$

vagyis: $\sigma_0 = 0$, mert $F \gtrless 0$

azaz a tartó súlyvonalában nem keletkezik derékfeszültség, más szóval: a súlyvonal a hajlítás után is megtartja eredeti hosszát.

$$M_z = -\sigma_0 \int_0^F dF \cdot v + \frac{E + \sigma_0}{\varrho} \int_0^F dF \cdot v^2$$

és

$$M_v = -\sigma_0 \int_0^F dF \cdot z + \frac{E + \sigma_0}{\varrho} \int_0^F dF \cdot z \cdot v = 0$$

M_v egyenletében a jobboldali második tag szintén zéró, mert $\int_0^F dF \cdot z \cdot v$ a szelvény főtehetetlenségi tengelyére vonatkozó centrifugál-nyomaték. Ilyenmódon

$$M_z = \frac{E}{\varrho} \int_0^F dF \cdot v^2 = \frac{E}{\varrho} I_z \quad (7)$$

amelyben I_z a szelvénynek a z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka. Ez a kifejezés még átalakítható. Mivel ugyanis $\sigma_0 = 0$, azért a (3) egyenletből:

$$\sigma = -E \frac{v}{\varrho} \quad (8)$$

Ha a hajlítás a v tengely körül történne, akkor a (7) és (8) egyenletek: $M_v = \frac{E}{\varrho} I_v$ és $\sigma = -E \frac{z}{\varrho}$ alakot vennék fel.

Feltéve, hogy a hajlítás csak az egyik tengely körül történik, az indexeket elhagyhatjuk, így a (7) és (8) egyenletek, a melyekből a hajlítás alakképleteit nyerhetjük:

$$M = I \frac{E}{\rho} \quad \text{és} \quad \sigma = -E \frac{v}{\rho}$$

Ebből a két egyenletből kifejezzük az $\frac{1}{\rho}$ görbületi mértéket.

A (7)-ből):
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{IE}$$

a (8)-ből:
$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\sigma}{Ev}$$

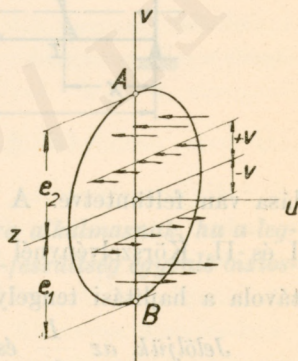
$$\frac{M}{IE} = -\frac{\sigma}{Ev}$$

ahonnan:
$$\sigma = -\frac{Mv}{I} \quad (9)$$

Ez a hajlítószilárdság alakképlete, mely szerint a hajlításra igénybevett tartó tetszőleges szelvényének valamely pontjában a feszültséget megkapjuk, ha a hajlítónyomatékot szorozzuk a pontnak a hajlítás tengelyétől mért távolával és osztjuk a hajlítási tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékkal.

17. §. Közömbös tengely. Leginkább igénybevett pontok. Alkalmas szelvény.

A feszültség $\sigma = -\frac{Mv}{I}$ kifejezéséből látjuk, hogy a szelvénynek olyan pontjaiban, melyek a z tengelytől egyenlő távolságban fekszenek, a feszültség ugyanaz lesz (61. ábra). A feszültség lineáris viszonyban van a hajlítási tengelytől mért távolsággal, a távolabb fekvő pontokban nagyobb, a közelebb fekvőkben kisebb. A z tengelyben fekvő pontokra nézve $v = 0$, s így a z tengelyben $\sigma = 0$. A szelvény azon egyenesét, melynek pontjaiban a derékfeszültség zéró, közömbös vagy semleges tengelynek nevezzük. Oly szelvény, mely csupán az egyik tehetetlenségi főtengelye körül van forgató-, azaz hajlítónyomaték



61. ábra.

által terhelve, ezen tengely pontjaiban nem vétetik derékfeszültségre igénybe, miért is itt a közömbös tengely azonos a hajlítási tengellyel és a fötetheatlenségi tengellyel.

A közömbös tengely választja el a szelvénynek az alsó húzott pontjait a felső nyomottaktól (a 61. ábrában a közömbös tengely és a hajítás tengelye), vagyis azokat, amelyekben nyújtófeszültség uralkodik, azoktól, amelyekben összenyomó-feszültség ébred.

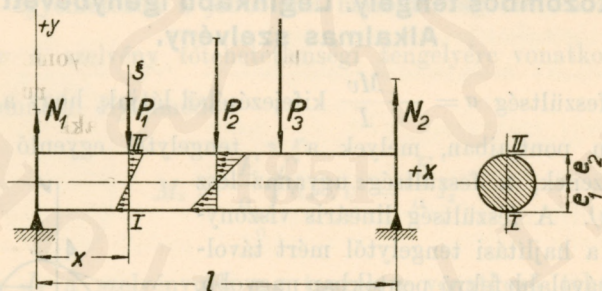
A szelvénynek azon pontjait, amelyekben a legnagyobb húzó, illetve nyomófeszültség keletkezik, a szelvény leginkább igénybevett pontjainak nevezzük. Miután a feszültség v -vel arányos, a legnagyobb feszültségek a közömbös tengelytől legtávolabb fekvő pontokban lépnek fel, amelyeket úgy kapunk, ha a szelvény kerületéhez a közömbös tengellyel parallel érintőket meghúzzuk. A 61. ábrán A és B pontok. A feszültségek értékei:

$$A \text{ pontban} \quad \sigma_A = -\frac{Me_2}{I} \quad \text{összenyomó,}$$

$$B \text{ pontban} \quad \sigma_B = \frac{Me_1}{I} \quad \text{húzófeszültség.}$$

A és B tehát a legnagyobb összenyomó-, illetve a legnagyobb nyújtófeszültség pontjai.

A 62. ábrában két helyen alátámasztott, hajlításra igénybevett körszelvényű tartó egyes szelvényeiben keletkező feszültségek elosz-



62. ábra.

lása van feltüntetve. A ξ szelvény leginkább igénybevett pontjai a I és II. Körszelvélynél $e_1 = e_2 = \frac{d}{2}$ a leginkább igénybevett pontok távolsága a hajlítási tengelytől.

Jelöljük az $\frac{I}{e_1}$ és $\frac{I}{e_2}$ hányadosokat W_1 és W_2 -vel, akkor W_1 és W_2 a szelvény ellenállónyomatéka, a hajlítási tengelytől e_1 ,

illetve e_2 távolságban levő pontokra. A leginkább igénybevett pontokra nézve tehát az ellenállónyomaték, vagy keresztmetszeti tényező: egyenlő a tehetetlenségi nyomaték osztva a szélső szál távolával.

Így pl. a kör tehetetlenségi nyomatéka bármely, a súlyponton átmenő tengelyre vonatkozólag: $I_s = \frac{d^4\pi}{64}$. A leginkább igénybevett

pontok távolsága $\frac{d}{2}$, a körszelvény ellenállónyomatéka tehát:

$$W = \frac{d^3\pi}{32} \text{ lesz. Terület ellenálló-nyomatékának egysége: cm}^3.$$

Ha a hajlítási tengely egyúttal a szelvény szimmetriatengelye, úgy a leginkább igénybevett pontokra vonatkozó ellenállónyomatékok egyenlők, vagyis az ilyen szelvényekre nézve: $W_1 = W_2 = W$ és a feszültség a leginkább igénybevett pontokban:

$$\sigma = \frac{M}{W} \quad \text{ahol } M \text{ a } \xi \text{ szelvény terhelését jelenti,}$$

míg máskülönben: $\sigma_1 = \frac{Mc_1}{I} = \frac{M}{W_1}$

és $\sigma_2 = -\frac{Mc_2}{I} = -\frac{M}{W_2}$

A legnagyobb nyújtó- és a legnagyobb összenyomó-feszültség nem szolgáltat mindig egyenlő biztonságot. Ha H_1 a rugalmasság határa a nyújtásnál, H_2 pedig az összenyomásnál, akkor:

$$\beta_1 = \frac{H_1}{\sigma_1}$$

és $\beta_2 = \frac{H_2}{\sigma_2}$

általában véve különböző értékűek lesznek.

A szelvényt akkor nevezzük hajlításra alkalmasnak, ha a legnagyobb nyújtó- és a legnagyobb összenyomó-feszültség egyenlő biztonságot nyújt. Az ilyen szelvényre nézve:

$$\beta = \frac{H_1}{\sigma_1} = \frac{H_2}{\sigma}$$

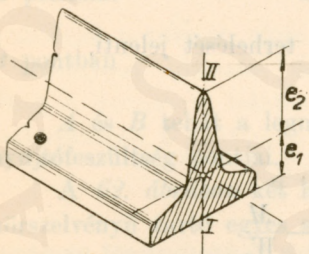
és ha a leginkább igénybevett pontok távolságai a közömbös tengelytől e_1 és e_2 , akkor, mivel

$$\frac{H_1}{\frac{Me_1}{I}} = \frac{H_2}{\frac{Me_2}{I}} \quad \text{és rövidítéssel}$$

$$\text{lesz:} \quad \frac{H_1}{e_1} = \frac{H_2}{e_2}$$

Hajlításra igénybevett szelvény eszerint akkor alkalmas, ha a legnagyobb húzófeszültség pontjának távolsága a közömbös tengelytől úgy aránylik a rugalmassági határhoz a húzásnál, mint a legnagyobb összenyomó-feszültség pontjának a közömbös tengelytől való távolsága a rugalmasság határához az összenyomásnál.

Kovácsoltvas-, folytvas- és acélnál $H_1 = H_2$ tehát $e_1 = e_2$. Ezeknél a közömbös tengely felezi a két legnagyobb feszültség pontjának egymástól való távolságát; hajlításra tehát oly szelvényt kell választani, melynél a két szélső pontot összekötő egyenes felezőpontján megy át a hajlítás tengelye. Öntöttvasnál azonban a rugalmassági határok: $H_1 = 750 \text{ kg/cm}^2$ húzásnál és $H_2 = 1500 \text{ kg/cm}^2$ összenyomásnál, tehát $H_2 = 2H_1$, amiből következik, hogy öntöttvas-szelvény a hajlításra akkor alkalmas, ha a legnagyobb összenyomó-feszültség pontja kétszer akkora távolságban van a közömbös tengelytől, mint a legnagyobb nyújtófeszültség pontja (63. ábra). A hajlítás tengelye ennél fogva három részre osztja a szelvény magasságát és $\frac{2}{3}$ távolságban fekszik a legnagyobb összenyomás pontjától.



63. ábra.

18. §. Veszélyes szelvény.

Ugyanazon tartó szelvényei különbözőképpen lehetnek megterhelve, s így a különböző szelvényekben keletkező feszültségek is eltérhetnek egymástól. Azon szelvényt, amelynek legnagyobb feszültségei meghaladják a többi szelvény legnagyobb feszültségeit, veszélyes szelvénynek nevezzük.

A veszélyes szelvény ismerete azért bír nagy fontossággal, mert a leginkább igénybevett pontjaiban keletkező feszültségek határozzák

meg azt a biztonságot, mellyel a tartó a terhet hordja. Ha a két leginkább igénybevett pontnak különböző biztonság felel meg, akkor ezek közül a kisebbik mérvadó.

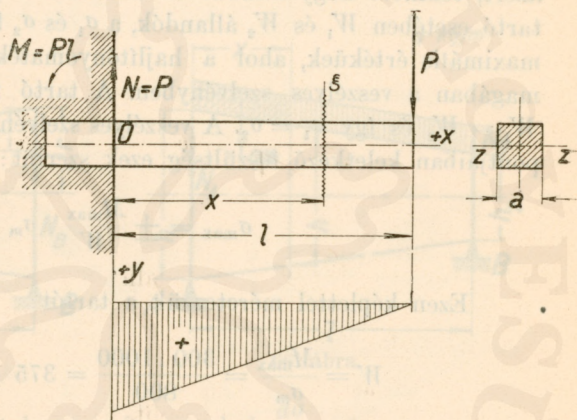
A tartó terhelését különböző erőhatások adhatják. Koncentrált, vagy összpontosított terhelésnél az erőhatás aránylag kis érintkező felületen működik (alátámasztások, tengelyek terhelése kerekek által); ilyenkor az erőhatást egy pontban működőnek vesszük. Azt a terhelési módot, amelynél a terhelő erők egész felületen működnek (önsúly, víznyomás), megosztott, vagy elosztott terhelésnek nevezzük. Ez ismét lehet egyenletesen, vagy egyenlőtlenül elosztott terhelés és teljes vagy részleges. Végül a vegyes terhelési módnál koncentrált és elosztott terhelések működnek.

A tartó veszélyes szelvényének meghatározása céljából álló tengelyrendszert veszünk fel. Ezt úgy választjuk, hogy a mozgó tengelyrendszerre vonatkoztatott pozitív nyomaték az állóra nézve is pozitív legyen.

Állandó szelvényű tartó esetében kifejezzük az egy tetszőszerinti szelvényre ható hajlítónyomatékot (M_x) e szel-

vény súlypontjának egyik összrendezője (x) által és meghatározzuk ez összrendezőnek azon értékét, amelynél a nyomaték a legnagyobb. Tehát az: $M_x = q(x)$ függvény maximumát kell meghatározni. Ha a függvény folytonos, azon x érték mellett találjuk $M_{\max}$ -ot, amelynél $\frac{dM_x}{dx} = 0$, tehát a függvény első differenciálhányadosa zéró. Ha pedig a függvény nem folytonos, akkor vagy szerkesztéssel állapítjuk meg $M_{\max}$ -ot, vagy pedig szakaszonként folytonosnak tekintve a függvényt, számítással. Két helyen alátámasztott tartónál koncentrált terhelések esetében a max. nyomaték valamely koncentrált erő alatt keletkezik.

Méretezzük a 64. ábrán feltüntetett viszonyok mellett az egyik végén befogott és a szabad végén $P = 1000$ kg koncentrált erővel



64. ábra.

terhelt négyzetszelvényű folytvas tartót, ha $l = 3\text{ m}$ és $\sigma_m = 800 \text{ kg/cm}^2$.
A nyomaték tetszőleges ξ szelvényre:

$$M_\xi = P(l-x)$$

és a nyomaték akkor a legnagyobb, ha $x=0$, tehát:

$$M_{\max} = Pl$$

vagyis a falnál lesz a veszélyes szelvény.

$$\text{Mivel} \quad \sigma_1 = \frac{M}{W_1} \quad \text{és} \quad \sigma_2 = -\frac{M}{W_2}$$

azért, tekintve hogy állandó és szimmetria tengellyel bíró szelvényű tartó esetében W_1 és W_2 állandók, a σ_1 és σ_2 feszültségek ott lesznek maximális értékűek, ahol a hajlítónyomaték a legnagyobb, vagyis magában a veszélyes szelvényben. A tartó négyzetszelvényű, tehát $W_1 = W_2$ és így $\sigma_1 = \sigma_2$. A veszélyes szelvény leginkább igénybevett pontjaiban keletkező feszültség ezek szerint:

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M_{\max}}{W} \leq \sigma_m$$

Ezen képlettel méretezzük a tartót:

$$W = \frac{M_{\max}}{\sigma_m} = \frac{300 \cdot 1000}{800} = 375 \text{ cm}^3 = \frac{a^3}{6}$$

$$\text{és ebből:} \quad a = \sqrt[3]{2250} = 13,1 \text{ cm}$$

Változó szelvényű tartó esetében nemcsak M , hanem W is függvénye x -nek, s mint ilyen meghatározandó. Itt tehát:

$$\sigma_{1,2} = \pm \frac{M_x}{W_x} = q(x)$$

s ezután a $\frac{d\sigma}{dx} = 0$ egyenletből kiszámítjuk x azon értékét, amely mellett σ maximális. Az ehhez tartozó szelvény a veszélyes szelvény és világos, hogy az utóbbiban uralkodó maximális feszültségnek nem szabad a megengedhető feszültséget, σ_m -et túlhaladnia.

Példák változó szelvényű tartók számítására:

1. Valamely csonkakúp, melynek hossza l és sugarai r és $2r$, két pontjában A és B -ben szabadon van megtámasztva és közben P erővel

van megterhelve (65. ábra). Kérdés, hogy milyen x_1 érték mellett lépnek fel a legnagyobb feszültségek, s mekkora e legnagyobb feszültség?

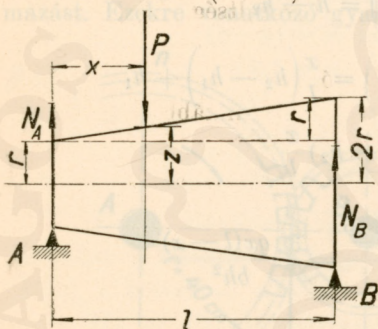
$$N_A = P \frac{l-x}{l} \quad \text{és} \quad N_B = P \frac{x}{l}$$

$$r : (z-r) = l : x$$

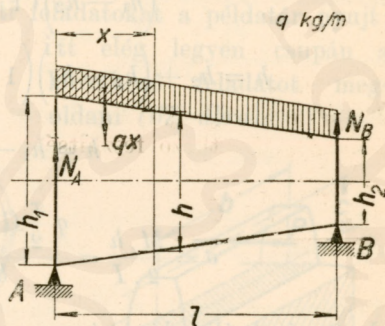
$$z-r = \frac{xr}{l} \quad \text{és} \quad z = r \left(1 + \frac{x}{l} \right) \quad \text{A nyomaték:}$$

$$M_x = \frac{P(l-x)x}{l} \quad \text{és} \quad W_x = \frac{\pi}{4} z^3 = \frac{\pi}{4} r^3 \left(1 + \frac{x}{l} \right)^3$$

$$\sigma = \frac{P(l-x)x}{l} \cdot \frac{P(l-x)x}{l} = \frac{4P(l-x)x l^2}{\pi r^3 (l+x)^3} = \frac{4Pl^2}{\pi r^3} \cdot \frac{x(l-x)}{(l+x)^3}$$



65. ábra.



66. ábra.

Mivel $\sigma = \varphi(x)$, ott lesz maximum, ahol $\frac{d\sigma}{dx} = 0$

$$\frac{d\sigma}{dx} = 0 = \frac{4Pl^2}{\pi r^3} \frac{(l+x)^3(l-2x) - x(l-x) \cdot 3(l+x)^2}{(l+x)^6} = 0$$

azaz a nevező $(l+x)^6 \leq 0$ és így:

$$(l+x)^2 [l^2 + xl - 2xl - 2x^2 - 3lx + 3x^2] = 0$$

ez csak úgy lehet, ha $l^2 - 4xl + x^2 = 0$

$$\text{azaz:} \quad x = 2l - \sqrt{4l^2 - l^2} = 2l - l\sqrt{3} = l(2 - \sqrt{3})$$

és $x = x_1 = 0,2679l$, ez a veszélyes szelelvény, ahol

$$\sigma_{\max} = \frac{4Pl^2}{\pi r^3} \frac{0,2679l \cdot 0,732l}{1,268^3 \cdot l^3}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Pl}{r^3} \frac{0,786}{6,406} = 0,1225 \frac{Pl}{r^3} \leq \sigma_m.$$

2. Egy állandó b szélességű tartó, melynek magassága egyenletesen változik a 66. ábra szerint, egyenletesen elosztott terheléssel

van megterhelve. Az alátámasztástól számítva, milyen x_1 távolban van a veszélyes szelvény és mekkora az előforduló legnagyobb feszültség? (Wittenbauer)

$$N_A = \frac{ql}{2}; \quad M_x = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} = \frac{q}{2}x(l-x)$$

Nézzük h változását:

$$\frac{h_1 - h_2}{2} : \frac{h - h_2}{2} = l : (l - x)$$

$$\frac{(h_1 - h_2)(l - x)}{l} = h - h_2$$

$$(h_1 - h_2)\left(1 - \frac{x}{l}\right) = h - h_2$$

$$h = h_2 + (h_1 - h_2)\left(1 - \frac{x}{l}\right) = \frac{x}{l}(h_2 - h_1) + h_1$$

$$h = h_1 - (h_1 - h_2)\frac{x}{l}$$

$$\sigma = \frac{M \cdot h}{2 \cdot I} = \frac{q \frac{x}{2}(l-x) \cdot 6}{bh^2} = \frac{3 \cdot qx(l-x)}{bh^2}$$

de $3q$ és b állandó és így:

$$\frac{d\sigma}{dx} = 0 = \frac{d}{dx} \cdot \frac{x(l-x)}{h^2} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{lx - x^2}{\left(h_1 - \left[h_1 - h_2\right]\frac{x}{l}\right)^2}$$

legyen $h_1 - h_2 = a$

$$\frac{\left(h_1 - a\frac{x}{l}\right)^2(l-2x) + (lx-x^2)2\left(h_1 - a\frac{x}{l}\right)\frac{a}{l}}{\left(h_1 - a\frac{x}{l}\right)^4} = 0$$

$$\text{és } \left(h_1 - a\frac{x}{l}\right)^4 > 0; \quad \left(h_1 - a\frac{x}{l}\right)\text{-el rövidítve:}$$

$$\text{tehát a számláló: } \left(h_1 - a\frac{x}{l}\right)(l-2x) + \frac{2a}{l}(lx-x^2) = 0$$

$$h_1l - ax - 2xh_1 + 2a\frac{x^2}{l} + 2ax - \frac{2ax^2}{l} = 0$$

$$h_1l = ax + 2xh_1 - 2ax = 2xh_1 - ax = x(2h_1 - a)$$

és ebből:
$$x = \frac{h_1 l}{2h_1 - (h_1 - h_2)} = \frac{h_1 l}{h_1 + h_2} = x_1$$

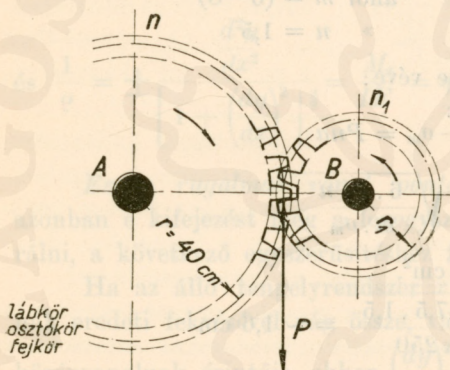
betéve h képletébe:

$$h = h_1 - (h_1 - h_2) \frac{h_1}{h_1 + h_2} = \frac{h_1^2 + h_1 h_2 - h_1^2 + h_2 h_1}{h_1 + h_2} = \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2}$$

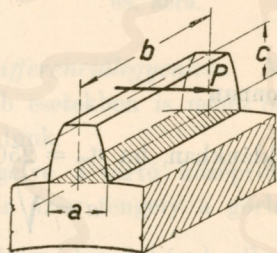
és

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{3q}{b} \left(\frac{h_1 l^2}{h_1 + h_2} - \frac{h_1^2 l^2}{(h_1 + h_2)^2} \right) \frac{(h_1 + h_2)^2}{4h_1^2 h_2^2} = \frac{3q}{4b} \frac{h_1 l^2 (h_1 + h_2) - h_1^2 l^2}{h_1^2 h_2^2} = \\ &= \frac{3q}{4b} \frac{h_1^2 l^2 + h_1 h_2 l^2 - h_1^2 l^2}{h_1^2 h_2^2} = \frac{3q l^2}{4b} \frac{1}{h_1 h_2} \end{aligned}$$

Mivel a legtöbb gépészeti és építészeti alkatrész hajlításnak van alávetve, a hajlítási alapképletek igen gyakran nyerne alkalmaszást. Ezekre vonatkozó gyakorlati feladatokat a példatár nyújt; itt elég legyen csupán a következő feladatot megoldani (67. ábra).



67. ábra.



68. ábra.

Valamely fogaskerékáttétel $n = 100$ fordulat mellett $N = 25$ lóerőt visz át, A tengelyről B -re. Méretezzük a fogaskerék fogait.

$$nr = n_1 r_1$$

Az átvitt erő:
$$P = 716,2 \frac{N}{nr} = 716,2 \frac{25}{0,4 \cdot 100}$$

$$P = 447,5 \text{ kg}$$

Azt a legkedvezőtlenebb esetet vesszük fel, hogy az erő átvitele csupán egy foggal történik és az erő a fog végén működik (68. ábra). A fog úgy szerepel, mint az egyik végén befogott tartó, tehát a hajlítószilárdság alapegyenlete szerint:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq \sigma_m$$

Az ellenállónyomaték a fog tövében, hol a veszélyes szelvény van :

$$W = \frac{M_{\max}}{\sigma_m} = \frac{Pc}{\sigma_m}$$

$$W = \frac{I}{c} = \frac{12}{a} \frac{ba^3}{2} = \frac{ba^2}{2}$$

Tehát: $\frac{ba^2}{6} \sigma_m = Pc$

A fognak a , b és c méretei bizonyos gyakorlatilag megállapított viszonyban állanak egymáshoz, s ha ez a viszony adva van, az utolsó egyenletből mind a három méret kiszámítható. A b és c méreteket rendszeren a -ra szokás vonatkoztatni,

$$\begin{aligned} b &= m \cdot a & \text{ahol } m &= (6-8) \\ \text{és } c &= n \cdot a & \gg n &= 1,5 \end{aligned}$$

Ezeket az értékeket figyelembe véve:

$$\frac{ma^3}{6} \sigma_m = Pna$$

ahonnan:

$$a = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot P \cdot n}{m \cdot \sigma_m}}$$

Példánkban, ha $\sigma_m = 250 \text{ kg/cm}^2$,

$$a = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 447,5 \cdot 1,5}{7 \cdot 250}} = \sim 1,6 \text{ cm}$$

19. §. A meggörbített középvonal alakjának meghatározása. A rugalmas vonal.

Az egyenes tartónak eredetileg egyenes középvonala a hajlítás következtében meggörbül, a terhelés síkjában behajlik (69. ábra). A meggörbített középvonal alakját *rugalmas vonalnak* nevezzük. Minthogy ez a vonal szabja meg a különböző szelvényekben a tartó besüllyedését, a besüllyedések pedig az alátámasztási közök nagyságát, szükségünk van e görbe vonal egyenletének ismeretére. A maximális besüllyedés rendszeren nem lehet nagyobb bizonyos megállapított értéknél, így födémgerendáknál $f_{\max} \leq \frac{l}{500} - \frac{l}{600}$,

hidaknál $f_{\max} \leq \frac{l}{1200}$. Az egyenletet itt is álló koordinátarend-

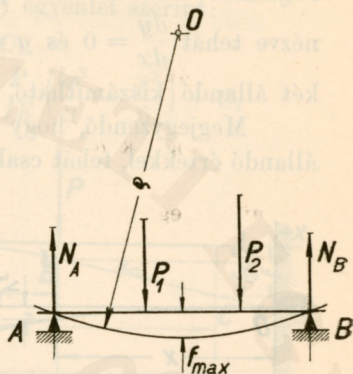
szerre vonatkoztatjuk és a tengelyek fekvését úgy választjuk, hogy azon hajlítónyomaték, mely a mozgó tengelyrendszerre pozitív, az állóra nézve is pozitív legyen. Majd kifejezzük az adott terhelések mellett tetszőleges szelvényre vonatkoztatott hajlítónyomatékokat, a súlypont x összendezője által és az így nyert $y = f(x)$ értéket behelyettesítjük a hajlítás következő alakképletébe:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{IE}$$

Mivel az analitikai síkmértan szerint a görbületi sugár ρ

$$\rho = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\text{és } \frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_x}{IE} = \rho(x)$$



69. ábra.

Ez a rugalmas vonal pontos differenciálegyenlete. Mivel azonban e kifejezést még a legegyszerűbb esetekben is nehéz integrálni, a következő egyszerűsítéshez fordulunk.

Ha az álló tengelyrendszer x tengelye a tartó középvonalának eredeti fekvésével vág össze, vagy ha az x tengely a görbített középvonalnak érintője, akkor $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ végtelen kis hibával elhanyagolható az egység mellett és így a következő, sokkal egyszerűbb kifejezést nyerjük:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{IE} = \pm \frac{d^2y}{dx^2} \quad (1)$$

Ennek a tiszta másodrendű differenciálegyenletnek megoldása adja a rugalmas vonal egyenletét. Ha α a rugalmas vonal érintőjének hajlásszöge az x tengelyhez, akkor $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$. Ennél fogva a rugalmas vonal egyenletét egyszer integrálva:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{IE} \int M_x dx + C \quad (2)$$

az érintő hajlásszögének tangensét nyerjük. Ismét integrálva pedig a besüllyedés nagyságát kapjuk:

$$y = \int \operatorname{tg} \alpha \, dx + C_1 \quad (3)$$

Az integrál állandók értékeit abból határozhatjuk meg, hogy egyes helyeken a meggörbitett középvonal besüllyedése zéró, vagyis a rugalmas vonal az illető pontban érinti az x tengelyt. Ezen pontra nézve tehát $\frac{dy}{dx} = 0$ és $y = 0$, mely értékek behelyettesítésével mindkét állandó kiszámítható.

Megjegyzendő, hogy I csakis állandó szelvényű tartónál bir állandó értékkel, tehát csak ilyenkor írható az integráljel elé. Ellen-

kező esetben I -t is ki kell fejeznünk, mint x függvényét és csak azután hajthatjuk végre az integrálást.

Az (1) egyenletben a pozitív jel akkor érvényes, ha növekedő x mellett az érintő hajlásszögének tangense a rugalmas vonal x -hez tartozó pont-

jában növekszik, azaz ha a rugalmas vonal az x tengelyhez domború; ellenkező esetben a negatív előjelet vesszük figyelembe.

A rugalmas vonal egyenletének a sztatikai egyenletekhez való csatolásával, a sztatikailag határozatlan feladatokat sztatikailag határozottakká tesszük.

Határozzuk meg az egyik végén befogott, másik végén koncentrált P erővel terhelt tartó rugalmas vonalát és ennek alapján a tartó besüllyedését. A ξ szelvény terhelése (70. ábra):

$$M_x = P(l - x)$$

és így a (2) egyenlet szerint:

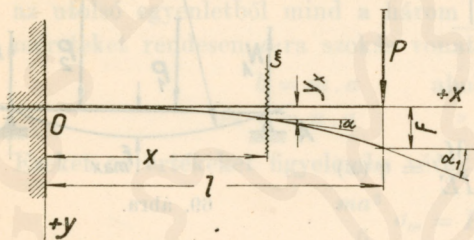
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{IE} P \int (l - x) \, dx + C$$

Az előjel pozitív, mert x növekedésével $\operatorname{tg} \alpha$ is növekszik.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{IE} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + C$$

ahol $C = 0$, mert ha $x = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = 0$, tehát:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{IE} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right)$$



70. ábra.

Ha $x = l$, akkor a rugalmas vonal végpontjához húzott érintő α_1 hajlásszögének tangensét kapjuk:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{P}{IE} \left(l^2 - \frac{l^2}{2} \right) = \frac{Pl^2}{2IE}$$

A besüllyedés a ξ szelvényben a (3) egyenlet szerint:

$$y_x = \int \operatorname{tg} \alpha \, dx + C_1$$

$$y_x = \frac{P}{IE} \int \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) dx + C_1 = \frac{P}{IE} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1$$

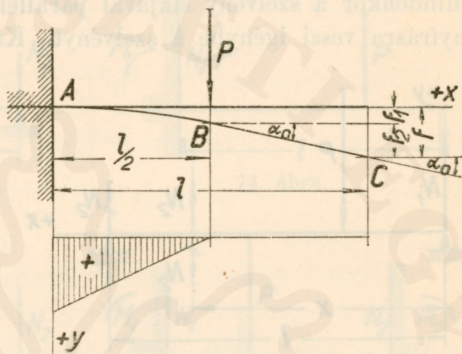
ahol $C_1 = 0$, mivel ha $x = 0$,
 $y_x = 0$; tehát:

$$y_x = \frac{P}{IE} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

lesz a rugalmas vonal egyenlete.

Ha $x = l$, nyerjük a besüllyedést a tartó végén:

$$f = \frac{P}{IE} \left(\frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{6} \right) = \frac{Pl^3}{3IE}$$



71. ábra.

Pl. Valamely egyik végén befogott, másik végén $P = 500$ kg-mal terhelt $l = 500$ cm hosszú és $d = 10$ cm átmérőjű körszelvényű kovácsvasrúd besüllyedését számítsuk ki. $E = 2000000$ kg/cm².

$$f = \frac{500 \cdot 500^3}{3 \cdot \frac{10^4 \pi}{64} \cdot 2000000} = 20,8 \text{ cm}$$

Állapítsuk meg az egyik végén befogott és a közepén P koncentrált erővel terhelt tartó besüllyedését a tartó végén (71. ábra). A besüllyedés két részből adódik:

$$f = f_1 + f_2$$

ahol $f_1 = \frac{P \left(\frac{l}{2} \right)^3}{3IE}$ az $\frac{l}{2}$ hosszúságú

és végén P erővel terhelt tartónál a besüllyedés és

$$f_2 = \frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{l}{2} \cdot \frac{P \left(\frac{l}{2} \right)^2}{2IE}$$

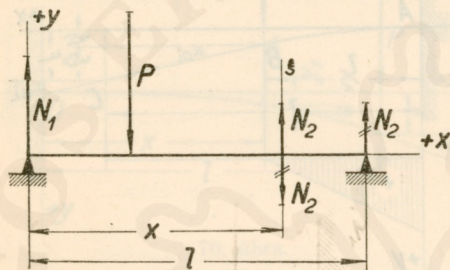
mert a rugalmas vonal BC darabon egyenes.

Ezeket az értékeket behelyettesítve, a besüllyedés:

$$f = \frac{Pl^3}{24 IE} + \frac{Pl^3}{16 IE} = \frac{5 Pl^3}{48 IE}$$

20. §. Egyenes tartó hajlítása a középvonalára merőleges terhek által.

Az egyenes tartó középvonalára merőleges irányú terhek mindenkor a szelvény síkjával párhuzamos erőt is szolgáltatnak, amely nyírásra veszi igénybe a szelvényt. Keressük pl. a 72. ábrában a



72. ábra.

ξ szelvény terhelését. A sztatika alapján meghatározott N_2 felszabadító erőt rakjuk fel a ξ szelvényben fölfelé és lefelé. Így egy $N_2(l-x)$ erőpárt nyerünk, tehát a szelvényre $N_2(l-x)$ nyomaték hat és még marad egy N_2 erő a szelvény síkjában, amely nyírásra veszi a szelvényt igénybe. A későbbiek-

ben azonban be fogjuk igazolni, hogy a nyíróerőnek a hajlítófeszültségre vagy egyáltalában nincs befolyása, vagy csak oly csekély, hogy még nagyon pontos számításoknál is mellőzhető. Ennek folytán a hajlításra és nyírásra igénybevett tartó úgy tárgyalható, mintha csupán hajlításra volna igénybevéve.

A hajlítási szilárdság alapképlete:

$$\sigma = \pm \frac{Me}{I}$$

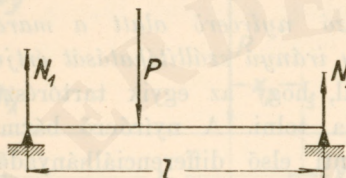
melyben, ha M a legnagyobb tényleg keletkező nyomaték, $\sigma \leq \sigma_{\text{meg}}$, azaz a derékfeszültség a legnagyobb megengedhető feszültséggel lehet egyenlő.

Adott terhelések mellett tehát elsősorban a legnagyobb nyomatékot kell megállapítanunk, azután adott σ_m feszültség mellett meghatározható a $W = \frac{I}{e}$ ellenállónyomaték, ebből pedig a szükséges szelvény méretei.

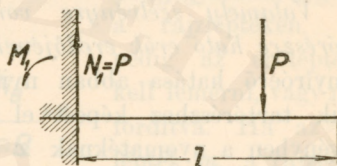
A maximális nyomaték kiszámítása céljából a tartót fel kell szabadítanunk, azaz a felszabadító erőket és nyomatékokat meg

kell határoznunk. A gyakorlatban használatos hajlításra igénybevett tartóknak négy főcsoportját különböztetjük meg az alátámasztási és befogási (befalazási) viszonyok szerint és pedig:

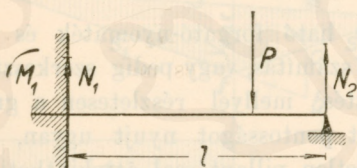
1. két helyen alátámasztott tartó (73. ábra);
2. egyik végén befogott tartó (74. ábra);
3. egyik végén befogott, a másik végén alátámasztott tartó (75. ábra);
4. két végén befogott tartó (76. ábra).



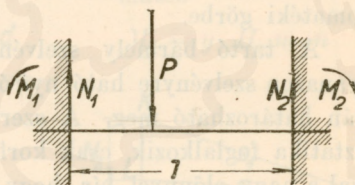
73. ábra.



74. ábra.



75. ábra.



76. ábra.

Az első két csoportba tartozó tartókat *sztatikailag határozott* tartóknak, a másik két csoportba tartozókat pedig *sztatikailag határozatlan* tartóknak nevezzük.

Sztatikailag akkor határozott a tartó, ha a felszabadított testre működő összes erők egyensúlyi egyenleteiből a felszabadító erők és nyomatékok meghatározhatók. Hajlítás esetében legtöbbszörre parallel erőrendszer egyensúlyáról van szó. Parallel erőrendszer egyensúlyának alapegyenletei:

$$R = \sum P = 0$$

$$\text{és} \quad Rr = \sum P \cdot p = 0$$

Ezen két egyenletből csupán két ismeretlen számítható ki. Beláthatjuk ennél fogva, hogy sztatikailag határozott tartók csakis az 1. és 2. csoportba tartozók. mert 1.-nél az N_1 és N_2 , 2.-nél pedig N_1 és M_1 az ismeretlenek, míg a 3. és 4. esetekben kettőnél több ismeretlen fordul elő, a 3.-nál N_1 , N_2 és M_1 , a 4.-nél pedig N_1 , N_2 , M_1 és M_2 .

A sztatikailag határozatlan tartók esetében csakis a besüllyedési viszonyok vizsgálata alapján lehet a felszabadító erőket és felszabadító nyomatékokat meghatározni.

Ha csakis koncentrált erők hatnak a tartóra, a maximális nyomaték mindig olyan szelvényben keletkezik, amelyben valamely koncentrált erő hat. Ha azonban egyenletesen elosztott teher is van jelen, akkor $M_x = f(x)$, vagyis a nyomaték folytonos függvénye a szelvény abszcisszájának, s a maximális nyomaték helyét a $f'(x) = 0$ egyenletből számíthatjuk ki.

Valamely szelvényre vonatkozó nyíróerő alatt a maradó tartórészre ható erők eredőjének + y irányú szállítóhatását értjük. A nyíróerő hatása abban nyilvánul, hogy az egyik tartórészt a másik tartórészhez képest el akarja tolni. A nyíróerő bármely szelvényben a nyomatéknak x szerinti első differenciálhányadosa, tehát $V_x = \frac{dM_x}{dx}$; a nyíróerők görbéjének tehát integrálgörbéje a nyomatéki görbe.

A tartó bármely szelvényére ható forgató-nyomaték és az ugyanazon szelvényre ható nyíróerő számítás, vagy pedig szerkesztés útján határozható meg. A szerkesztés, mellyel részletesen a grafosztatika foglalkozik, csak korlátozott pontosságot nyújt ugyan, de azzal a nagy előnnyel bír, hogy egyetlen pillantással áttekinthetjük valamennyi szelvény igénybevételét, s így állandó keresztmetszetű tartónál rögtön felismerhetjük a veszélyes szelvény helyét is.

Mielőtt a hajlításra igénybevett tartók számítására áttérnénk, röviden tárgyalni fogjuk az általános terhelési sémáknak megfelelő nyomatéki ábrák és nyíróerők ábráinak megszerkesztését.

1. Két végén alátámasztott tartó nyomatéki és nyíróerőinek ábrája.

a) A tartó P koncentrált erővel van terhelve (77. ábra). Vegyük fel a P -vel párhuzamos KV egyenest és rakjuk fel rá P erő mérőszámát K -tól V -ig. Válasszuk O pólust úgy, hogy H pólustávolság kerek egész szám legyen és keressük meg erő- és kötőpoligon segítségével az N_A és N_B felszabadító erőket. A ξ szelvényre ható nyomaték $M_\xi = N_B \cdot x_B$. Be fogjuk igazolni, hogy

$$M_\xi = N_B \cdot x_B = y \cdot H$$

vagyis, hogy a tartó bármely szelvényére ható nyomatékokat úgy kapjuk meg, ha azon ordinátát (y), melyet a szelvény síkja a

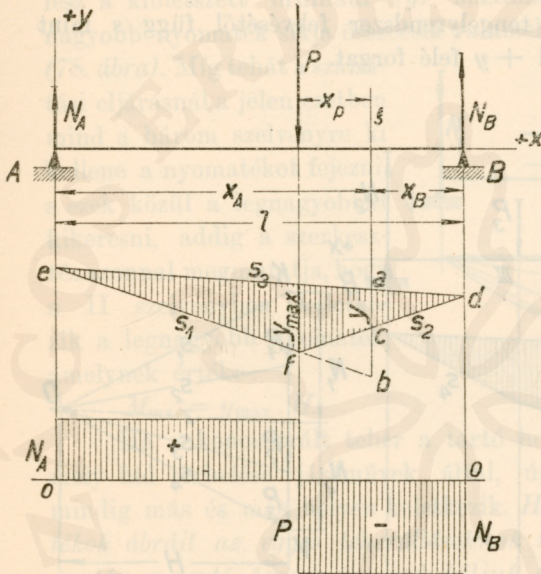
kötélpolygonból kimetsz, megszorozzuk a pólustávolsággal (H -val).
E fontos tétel bizonyítása a következő:

$$\text{dac } \triangle \sim OL V \triangle$$

mert mind a három oldal párhuzamos. Ennélfogva a magasságok úgy viszonylanak egymáshoz, mint az alapok, vagyis:

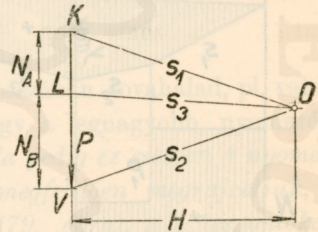
$$y : x_B = N_B : H$$

$$\text{tehát: } x_B N_B = y H = M_{\xi}$$



Megjegyzendő, hogy y -t a rajzléptéken, H -t pedig az erőléptéken kell lemérni, vagy megfordítva. Ha az erőlépték m , a rajzlépték pedig n , akkor a nyomaték

$$M_{\xi} = y \cdot H \cdot m \cdot n \quad (1)$$



77. ábra.

Hasonló módon beigazolható, hogy $y \cdot H$ szorzat egyenlő a szelvény másik oldalára ható nyomatékkal is, mely egyensúly esetén természetesen nem különbözhetik abszolút értékben az előbbtől. A szelvény baloldalára (a maradék tartórészre) ható nyomaték ugyanis:

$$M_{\xi} = N_A x_A - P x_P$$

Ámde

$$abe \triangle \sim OKL \triangle$$

és így:

$$\overline{ab} : \overline{KL} = x_A : H$$

s mivel

$$\overline{KL} = N_A$$

$$\overline{ab} = \frac{x_A N_A}{H}$$

Továbbá:

$$fcb \triangle \sim OKV \triangle$$

és így:

$$\overline{cb} : P = x_p : H$$

ebből:

$$\overline{cb} = \frac{x_p P}{H}$$

Mivel pedig

$$y = \overline{ac} = \overline{ab} - \overline{bc}$$

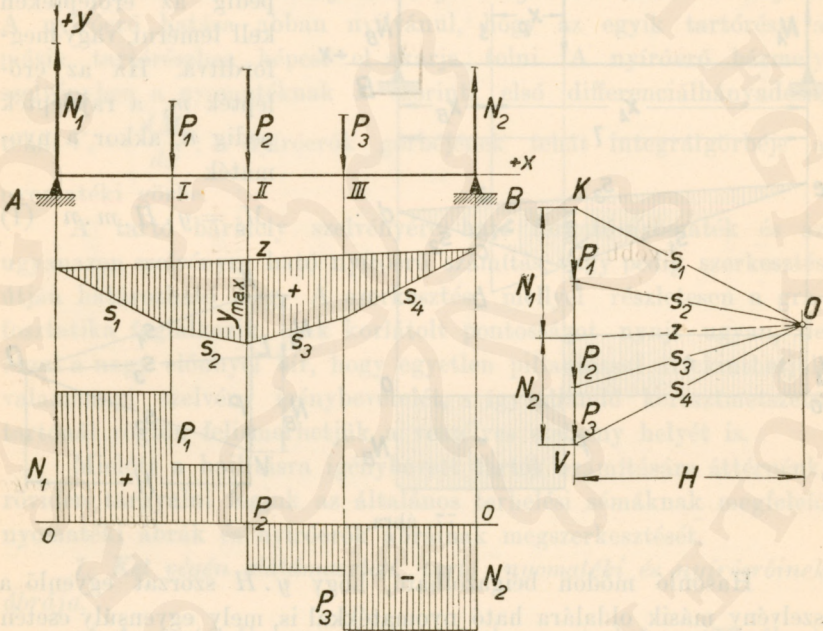
a fentiek alapján:

$$y = \frac{x_A N_A - x_p P}{H}$$

vagyis:

$$yH = x_A N_A - x_p P = M_z$$

A nyomaték jele a tengelyrendszer fekvésétől függ s mint tudjuk pozitív, ha $+x$ -től $+y$ felé forgat.



78. ábra.

Mivel a nyomaték az yH szorzattal egyenlő, ebben pedig a H tényező állandó, természetes, hogy a nyomaték ott lesz maximális értékű, ahol $y_{\max}$ lép fel; ebben a szelvényben

$$M_{\max} = y_{\max} \cdot H \quad (2)$$

ez a veszélyes szelvény, ez szabja meg a tartó méretét:

$$W = \frac{M_{\max}}{\sigma_m} = \frac{y_{\max} \cdot H}{\sigma_m}$$

Ahol $y = 0$, ott a nyomaték is zéró, ez a szabad alátámasztási helyekre érvényes, itt a tartó végszelvényeit nyírásra számítjuk (pl. néha tengelyeknél). Az efel terület a tartó nyomatéki ábrája. A nyíróerők ábráját egy zéróvonallra rajzoljuk meg, (nyíróerő alatt értve a maradó tartórészre ható erők eredőjének vertikális irányú szállíthatását). Ahol a nyíróerők ábrája pozitívból negatívba megy át, ott van a veszélyes szelvény.

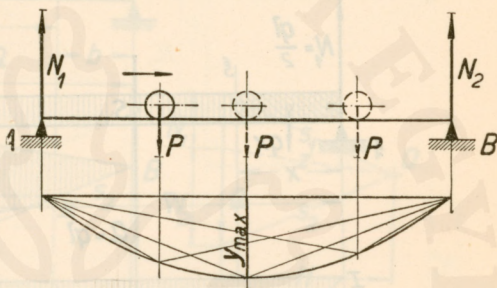
Koncentrált erőkben álló terhelésnél a kötőpoligon, illetve a nyomatéki ábra sokszög és ezen sokszög valamelyik pontjában lesz a kimetszett ordináta (y) maximális értékű, vagyis a legnagyobb nyomaték síkja összeesik valamelyik koncentrált erő síkjával (78. ábra). Míg tehát a számítási eljárásnál a jelen esetben mind a három szelvényre ki kellene a nyomatékot fejezni, s ezek közül a legnagyobbat kikeresni, addig a szerkesztés azonnal megmutatja, hogy a II szelvényben keletkezik a legnagyobb nyomaték, amelynek értéke:

$$M_{\max} = y_{\max} \cdot H.$$

Ha a koncentrált teher a tartó hosszában tovahalad, pl. valamely híd terhelése járművek által, úgy a legnagyobb nyomaték mindig más és más helyen keletkezik. Ha pedig ez esetben a nyomatékok ábráit az egyes teherállásoknak megfelelően megrajzoljuk, s azután a tartó tengelyére redukáljuk (79. ábra), a csúcspontokat összekötő vonal parabola lesz, éppen úgy, mint az egyenletesen elosztott teher esetében (80. ábra).

Vegyünk fel két végén alátámasztott tartót egyenletesen elosztott terheléssel, mely pl. homoktól, vagy kötörmeléktől származik. Ha az elosztott terhet vele egyenlő értékű összpontosított Q teherrel helyettesítjük, melynek támadási pontja az elosztott teher súlypontja (S), a nyomatéki ábra I II III háromszög lesz. A tényleges terhelésnek megfelelő ábra ez esetben oly parabola, mely az I II és II III oldalakat I és III pontban érinti s melyet a rajzban is feltüntetett, az ábrázoló mértanból ismeretes módon szerkesztünk meg. A folyóméterenkénti q teher két részből áll:

$$q \text{ kg/m} = q_1 + q_2$$



79. ábra.

ahol q_1 a holtteher (önsúly) és q_2 a hasznos teher (homok stb.).
A maximális nyomaték itt is $M_{\max} = y_{\max} \cdot H$

A nyíróerő V egy bizonyos ξ szelvényben:

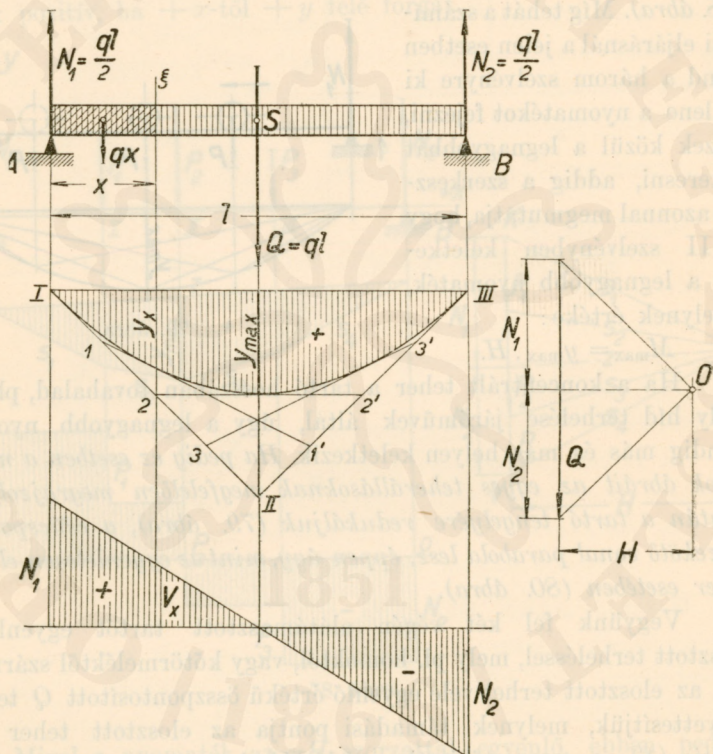
$$\frac{ql}{2} - q \cdot x = \frac{dM_x}{dx} = V_x$$

azaz:

$$q \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) = V_x$$

A nyíróerő x növekedésével lineárisan csökken, $y_{\max}$ -nál zéró.

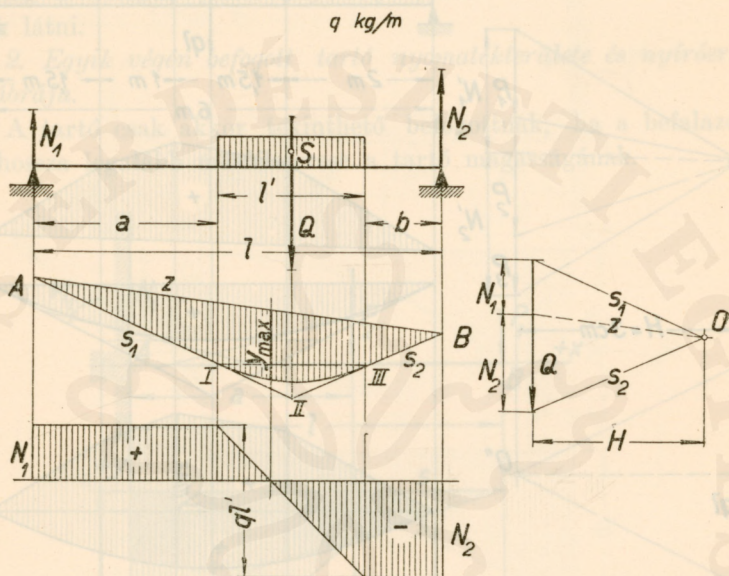
q kg/m



80. ábra.

A 81. ábrában feltüntetett tartó csak részben van egyenletesen megterhelve. A súlypontban koncentrált $Q = ql'$ teher nyomatékterülete $A II B$ volna; a valódi nyomatékterületet úgy kapjuk, ha az $A II$ és $B II$ egyeneseket az I és II pontban érintő parabolát megszerkesztjük.

Amikor a tartó terhelését koncentrált és egyenletesen elosztott terhek alkotják, akkor a szerkesztés és a számítás olyképp történik, hogy először külön meghatározzuk a nyomatéki ábrát a koncentrált erőkhöz, azután külön az elosztott terheléshez, s a két nyomatéki ábrát algebrailag összegezzük. Ez a *szuperpozíció* (egymásrahalmozás) elve.



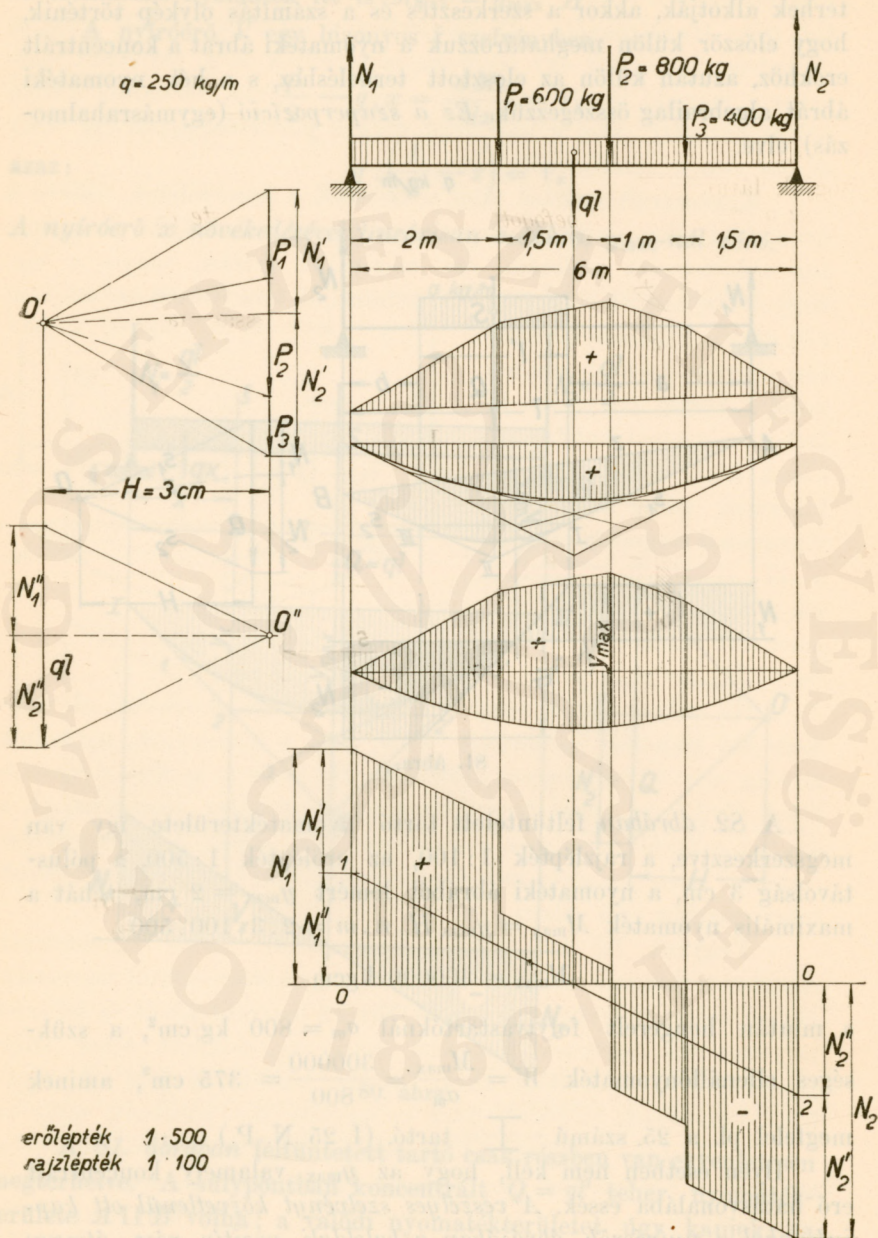
81. ábra.

A 82. ábrában feltüntetett tartó nyomatékterülete így van megszerkesztve, a rajzlépték 1:100, az erőlépték 1:500, a pólustávolság 3 cm, a nyomatéki ábrából lemért $y_{\max} = 2$ cm, tehát a maximális nyomaték $M_{\max} = y_{\max} H \cdot n \cdot m = 2 \cdot 3 \cdot 100 \cdot 500$

$$M_{\max} = 300000 \text{ kgcm}$$

s miután hengerelt folytvastartóknál $\sigma_m = 800 \text{ kg/cm}^2$, a szükséges ellenállónyomaték $W = \frac{M_{\max}}{\sigma_m} = \frac{300000}{800} = 375 \text{ cm}^3$, aminek megfelel pl. a 25. számú I tartó. (I 25 N. P.)

Ilyen esetben nem kell, hogy az $y_{\max}$ valamely koncentrált erő hatásvonalába essék. A veszélyes szelvényt közvetlenül ott kapjuk, ahol a nyíróerők ábrájában a baloldali pozitív rész átmegy a jobboldali negatív részbe. A nyíróerők ábráját úgy szerkesztjük meg, hogy először megrajzoljuk az 1—2 egyenest, mely az egyenle-



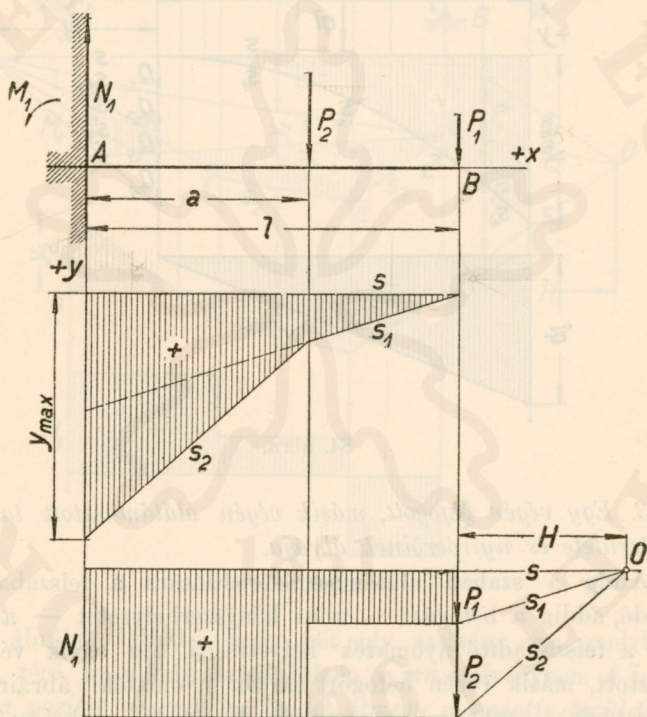
82. ábra.

tesen elosztott terhelés nyíróerőit ábrázolja, s ehhez hozzáadjuk a koncentrált terhelés folytán fellépő nyíró erőket.

Mint az eddigiekből láttuk, a két végén alátámasztott tartónál a szabad alátámasztás helyén a nyomaték mindig zéró, a záróvonal itt metszi a kötélpoligont és így $y = 0$. Másképp áll a dolog a befogás (befalazás) helyén, mint azt az alábbiakban fogjuk látni.

2. Egyik végén befogott tartó nyomatékterülete és nyíróerőinek ábrája.

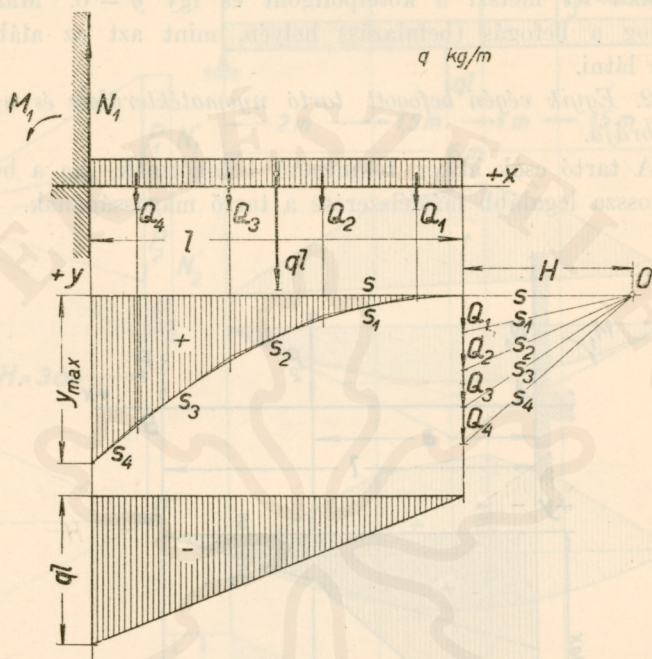
A tartó csak akkor tekinthető befogottnak, ha a befalazott rész hossza legalább másfélszerese a tartó magasságának.



83. ábra.

A lebegő részén koncentrált erőkkel terhelt, egy végén befogott tartó nyomatéki ábráját erő- és kötélpoligonnal határozzuk meg (83. ábra), a befalazás helyén maximális a nyomaték, ez tehát a veszélyes szelvény. $M_{\max} = y_{\max} \cdot H = P_1 \cdot l + P_2 \cdot a$. A nyíróerők ábráját közvetlenül az erőpoligonból határozzuk meg.

Az elosztott terhelés nyomatéki ábráját oly módon szerkesztjük meg (84. ábra), hogy több részre osztjuk, s minden részt a súlypontjában koncentrált erővel helyettesítünk. A nyíróerő egyenletesen nő 0-tól ql -ig.



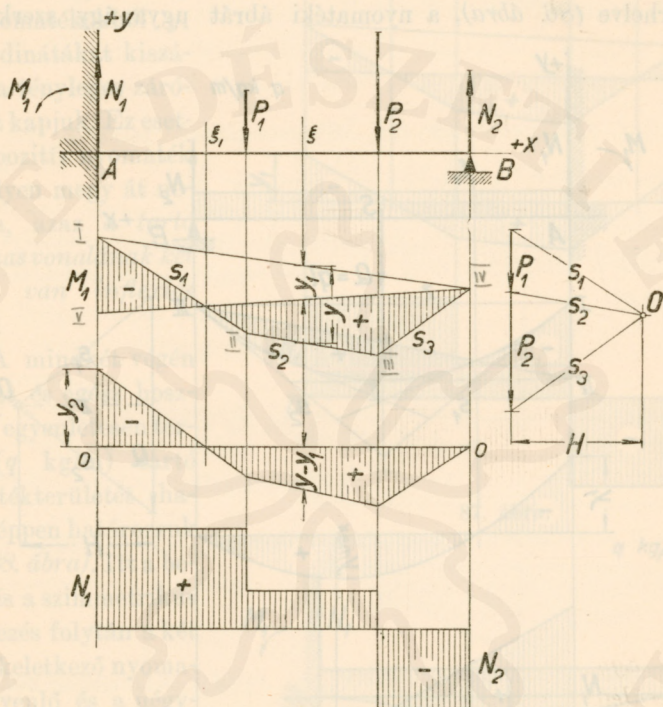
84. ábra.

3. Egy végén befogott, másik végén alátámasztott tartó nyomatékterülete és nyíróerőinek ábrája.

Amíg a szabad alátámasztás pótlására a felszabadító erő elegendő, addig a befogást — mint kényszerhelyezetet — a reakcióerő és a felszabadító nyomaték helyettesíti. Az egyik végén alátámasztott, másik végén befogott tartók nyomatéki ábráinak megszerkesztéséhez szükséges ismernünk N_1 és N_2 reakcióerőket és a falnál keletkező M_1 nyomatékot. Ezt a három ismeretlent a rendelkezésre álló két sztatikai egyenletből nem tudjuk meghatározni, miért is a feladatot sztatikailag határozatlannak tekintjük. Az N_1 , N_2 , M_1 meghatározásához a besüllyedési viszonyokat is tekintetbe kell venni.

Koncentrált erőhatások mellett (85. ábra), ha a tartó két végén alá volna támasztva, I III III IV volna a nyomatékterület, egy

tetszőleges ξ szelvény nyomatéka: $M_{\xi}' = y \cdot H$, az alátámasztások helyén pedig a nyomaték zéró. Minthogy azonban a tartó be van fogva, a falnál a nyomaték nem zéró, s a külső erők nyomatékával ellentétes értelmű: $M_f = y_2 \cdot H$, amely a nyomatéki területet megváltoztatja, úgy, hogy a záróvonal a IV V egyenes lesz. A ξ szelvény nyomatéka $M_{\xi} = (y - y_1) \cdot H$.



85. ábra.

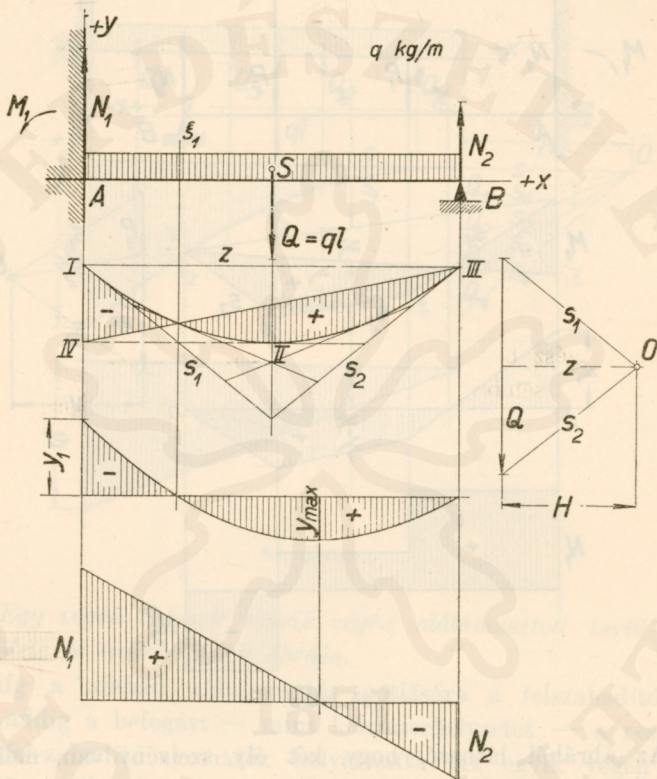
Az ábrából látható, hogy két oly szelvény van, melyben a nyomaték zéró, az alátámasztás helyén és mn szelvényben. A ξ_1 szelvényben a pozitív nyomatéki terület átmegy a negatív területbe, itt a tartó rugalmas vonalának inflexiója van. Ahol a rugalmas vonal alulról nézve konvex, ott a nyomaték (+), ahol konkáv, ott a nyomaték (—).

A falnál keletkező nyomaték csak a terhelés folytán megöröbített középvonal egyenletéből határozható meg, s így azt csak később, a számítási eljárásnál fogjuk tárgyalni.

Az ábrából az is látható, hogy a nyomatéknak két helyen (a befogásnál és közbeeső részen) van szélső értéke, tehát kétféle

maximális nyomaték van: 1. *relatív maximális* nyomaték, ennél a befogott szelvényben keletkező nyomatékot nem vesszük figyelembe, ez tehát csak a tartó valamely szelvényében keletkező $M_{\max}$; 2. *abszolút maximális* nyomaték, melynél már a falnál keletkező nyomatékot is figyelembe vesszük.

Ha a tartó egész hosszában egyenletesen elosztott teherrel van megterhelve (86. ábra), a nyomatéki ábrát ugyanúgy szerkesztjük



86. ábra.

meg, mint koncentrált erőkkel való terhelésnél. Itt is negatív ellennyomaték keletkezik a falnál, úgyhogy a tényleges záróvonal a III-IV egyenes lesz.

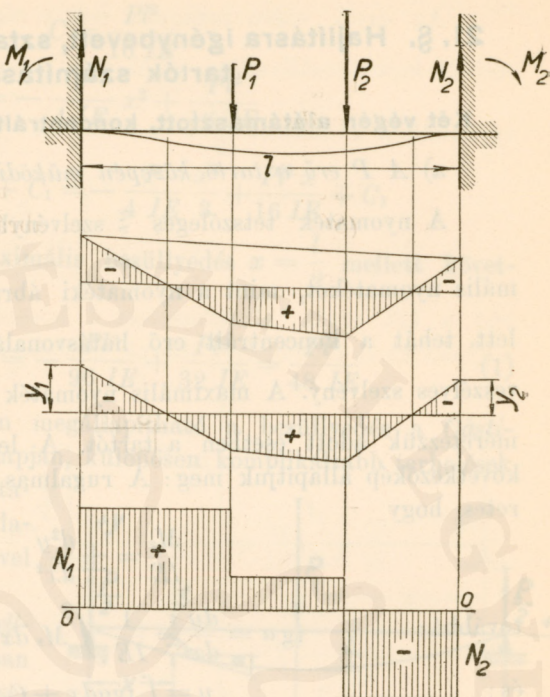
4. Mindkét végén befogott tartó nyomatékterülete és nyíró-erőinek ábrája.

A két végén befogott és koncentrált erőkkel terhelt tartó nyomatékterületét úgy szerkesztjük meg, hogy először is meghatározzuk a nyomatéki ábrát azon esetre, mintha a tartó a két végén

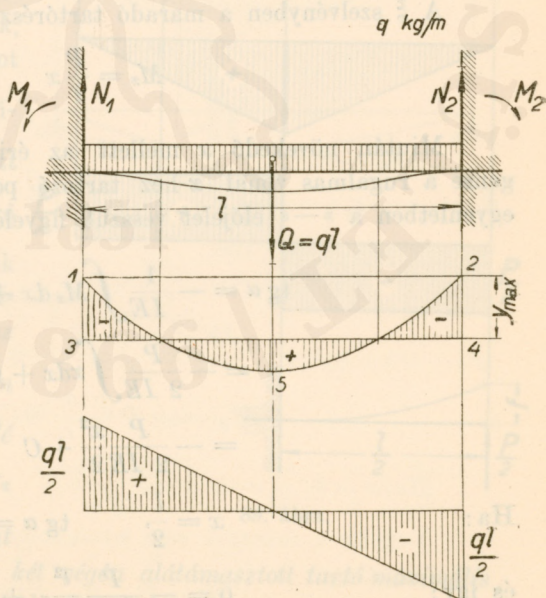
volnacsak alátámasztva (87. ábra), azután pedig figyelembe vesszük, hogy mindkét befogásnál keletkezik bizonyos ellennyomaték, amely ellennyomatékokból y_1 és y_2 ordinátákat kiszámítva, a tényleges záróvonalat kapjuk. Ez esetben a pozitív nyomaték két helyen megy át negatívba, azaz a tartó rugalmas vonalának két helyen van inflexió pontja.

A mindkét végén befogott és egész hosszában egyenletesen terhelt (q kg/m) tartó nyomatékterületét hasonlóképpen határozzuk meg (88. ábra). Itt a befogás és a szimmetrikus elrendezés folytán a két falnál keletkező nyomaték egyenlő és a négyszögű 1, 2, 3, 4 ellennyomatéki terület egyenlő az 1, 2, 5 parabolaív által bezárt területtel. A rugalmas vonalnak itt is két inflexió pontja van.

A nyíróerők ábrája mindkét esetben azonos az ugyanolyan módon terhelt és két végén alátámasztott tartóéval.



87. ábra.



88. ábra.

21. §. Hajlításra igénybevett, sztatikailag határozott tartók számítása.

Két végén alátámasztott, koncentrált erővel terhelt tartó.

a) A P erő a tartó közepén működik (89. ábra).

A nyomaték tetszőleges ξ szelvényben: $M_x = \frac{P}{2} x$. A maximális nyomatékot, mint a nyomatéki ábra is mutatja, $x = \frac{l}{2}$ mellett, tehát a koncentrált erő hatásvonalában találjuk, itt lesz a veszélyes szelvény. A maximális nyomaték $M_{\max} = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4}$, erre méretezzük adott esetben a tartót. A legnagyobb besüllyedést a következőkép állapítjuk meg: A rugalmas vonal egyenletéből ismeretes, hogy

$$\frac{M_x}{IE} = \pm \frac{d^2 y}{dx^2}$$

továbbá:
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{IE} \int M_x dx + C$$

és:
$$y = \int \operatorname{tg} \alpha dx + C_1$$

A ξ szelvényben a maradó tartórészről jutó terhelés:

$$M_x = \frac{P}{2} x$$

Miután növekedő x mellett az érintő hajlásszögének tangense a rugalmas vonal x -hez tartozó pontjában csökken, a felső egyenletben a »—« előjelet vesszük figyelembe és így lesz

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{IE} \int M_x dx + C =$$

$$= -\frac{P}{2 IE} \int x dx + C =$$

$$= -\frac{P}{2 IE} \frac{x^2}{2} + C$$

Ha: $x = \frac{l}{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = 0$

és így:
$$0 = -\frac{P}{2 IE} \frac{l^2}{4 \cdot 2} + C$$

ahonnan:

$$C = \frac{Pl^2}{16 IE}$$

tehát:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{P}{4 IE} x^2 + \frac{Pl^2}{16 IE}$$

a besüllyedés pedig:

$$y = \int \operatorname{tg} \alpha dx + C_1 = -\frac{P}{4 IE} \frac{x^3}{3} + \frac{Pl^2 x}{16 IE} + C_1$$

ha $x = 0$, $C_1 = 0$; a maximális besüllyedés $x = \frac{l}{2}$ mellett következik be és értéke:

$$f = -\frac{P}{12 IE} \cdot \frac{l^3}{8} + \frac{Pl^3}{32 IE} = -\frac{Pl^3}{96 IE} + \frac{Pl^3}{32 IE} = \frac{Pl^3}{48 IE} \quad (1)$$

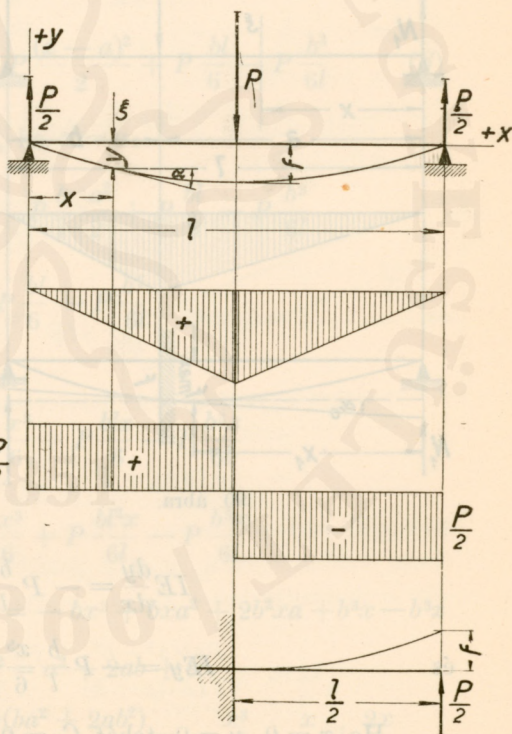
Sokkal egyszerűbben megállapítható a besüllyedés a *Castigliano–Maxwell*-teória alapján, különösen komplikáltabb terhelések mellett. Későbbiekben a sztatikailag határozatlan feladatokat is ennek segítségével fogjuk megoldani.

A *Castigliano–Maxwell*-teória szerint a tartót abban a szelvényben, ahol a besüllyedésnek maximuma van, elvágva és befalazva képzeljük, így visszavezettük a feladatot azon esetre, midőn $\frac{l}{2}$ hosszúságú, egyik végén befalazott tartó szabad végén a $\frac{P}{2}$ erő

(felszabadító erő) működik (89. ábrán alul). Matematikailag beigazolható, hogy az $\frac{l}{2}$ hosszúságú, egyik végén befalazott tartó a felfelé ható $\frac{P}{2}$ erő hatására olyan »f«

értékkel hajlik felfelé, mint

amekkora az l hosszúságú, két végén alútámasztott tartó maximális besüllyedése, a középen működő P erő következtében.



89. ábra.

Az egyik végén befogott, másik végén koncentrált P erővel terhelt tartó besüllyedése, mint már levezettük, $f = \frac{Pl^3}{3IE}$; ebben az egyenletben P helyett $\frac{P}{2}$ -t és l helyett $\frac{l}{2}$ -t írva,

$$f = \frac{\frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^3}{3IE} = \frac{Pl^3}{48IE}$$

lesz a két végén alátámasztott l hosszúságú tartó besüllyedése. Ugyanarra az eredményre jutunk, mint az előző hosszabb levezetésnél.

b) A P erő nem a tartó közepén működik (90. ábra).

A felszabadító erők

$$N_1 = P \frac{b}{l} \text{ és } N_2 = P \frac{a}{l}.$$

Maximális nyomaték ismét a P erő hatásvonalában keletkezik és nagysága $M_{\max} = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}$.

Tetszőleges ξ szelvény nyomatéka:

$$M_x = P \frac{b}{l} x$$

tehát a rugalmas vonal egyenletéből:

$$IE \frac{d^2 y}{dx^2} = -P \frac{b}{l} x$$

$$IE \frac{dy}{dx} = -P \frac{b}{l} \frac{x^2}{2} + C_1 \quad (\alpha)$$

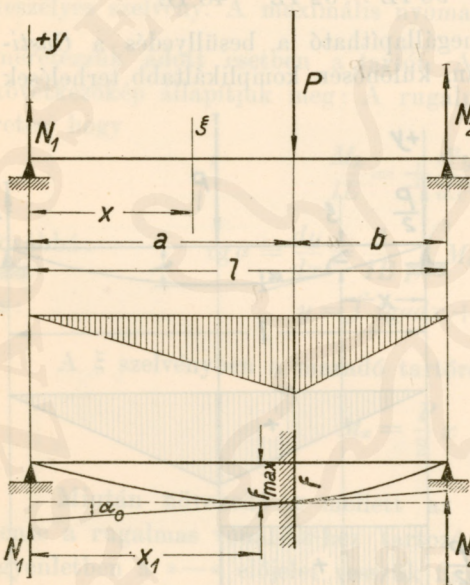
és

$$IEy = -P \frac{b}{l} \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2$$

Ha $x = 0$, $y = 0$, tehát $C_2 = 0$

Vegyük a második rész nyomatékait figyelembe, ha $x > a$:

$$M_x = P \frac{b}{l} x - P(x - a)$$



90. ábra.

de :
$$IE \frac{d^2 y}{dx^2} = -P \frac{b}{l} x + P(x-a)$$

$$IE \frac{dy}{dx} = -P \frac{b}{l} \frac{x^2}{2} + P \frac{(x-a)^2}{2} + C_1'$$

és
$$IEy = -P \frac{b}{l} \frac{x^3}{6} + P \frac{(x-a)^3}{6} + C_1'x + C_2'$$

Ha $x = 0$, $y = 0$, tehát $C_2' = 0$,

ha $x = l$, $y = 0$, tehát:

$$0 = -P \frac{b}{l} \frac{l^3}{6} + P \frac{b^3}{6} + C_1'l$$

ahonnan :
$$C_1' = P \frac{bl}{6} - P \frac{b^3}{6l}$$

tehát :
$$IE \frac{dy}{dx} = -P \frac{b}{l} \frac{x^2}{2} + P \frac{(x-a)^2}{2} + P \frac{bl}{6} - P \frac{b^3}{6l} \quad (\beta)$$

Az (α) és (β) egyenletből, ha $x = a$:

$$-P \frac{b}{l} \frac{a^2}{2} + C_1 = -P \frac{b}{l} \frac{a^2}{2} + P \frac{bl}{6} - P \frac{b^3}{6l}$$

ahonnan :
$$C_1 = P \frac{bl}{6} - P \frac{b^3}{6l}$$

Ezt behelyettesítve tovább:

$$IEy = -P \frac{b}{l} \frac{x^3}{6} + P \frac{blx}{6} - P \frac{b^3x}{6l}$$

$$IEy = -P \frac{b}{l} \frac{x^3}{6} + P \frac{bl^2x}{6l} - P \frac{b^3x}{6l}$$

$$\frac{I.E.y.6.l}{P} = -bx^3 + bl^2x - b^3x = -bx^3 + bxa^2 + 2b^2xa + b^3x - b^3x$$

mert :
$$l^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\frac{I.E.y.6.l}{P.b^2.a^2} = -\frac{x^3}{b.a^2} + \frac{x(ba^2 + 2ab^2)}{b^2a^2} = -\frac{x^3}{ba^2} + \frac{x}{b} + \frac{2x}{a}$$

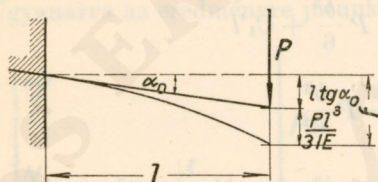
azaz :
$$y = \frac{Pa^2.b^2}{I.E.6.l} \left(2\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x^3}{ba^2} \right) \text{ a rugalmas vonal,}$$

ha pedig $x = a$, akkor

$$f = \frac{Pa^2b^2}{I \cdot E \cdot 6 \cdot l} \left(2 + \frac{a}{b} - \frac{a^3}{ba^2} \right)$$

ahonnan: $f = \frac{Pa^2b^2}{3IEl}$, a besüllyedés P alatt.

Rajzoljuk meg a rugalmas vonalat és keressük meg a besüllyedés mértékét a P erő alatt, más eljárással. A tartót α_0 szög mellett befalazott tartónak tekintjük. Az α_0 szög mellett befalazott tartó



91. ábra.

besüllyedése két részből adódik (91. ábra) és az összbesüllyedés

$f = l \operatorname{tg} \alpha_0 + \frac{Pl^3}{3IE}$; ha pedig fölfelé van a tartó α_0 szög alatt befalazva, akkor:

$$f = -l \operatorname{tg} \alpha_0 + \frac{Pl^3}{3IE}$$

Ezek alapján a 90. ábrában feltüntetett esetben felírhatjuk a besüllyedést:

$$f = -a \operatorname{tg} \alpha_0 + P \frac{b}{l} \frac{a^3}{3IE} \quad \text{a baloldali tartórészre}$$

és $f = b \operatorname{tg} \alpha_0 + P \frac{a}{l} \frac{b^3}{3IE}$ a jobboldali tartórészre.

A két egyenletből az ismeretlen $\operatorname{tg} \alpha_0$ -t meghatározzuk:

$$f = -a \operatorname{tg} \alpha_0 + P \frac{b}{l} \frac{a^3}{3IE} = b \operatorname{tg} \alpha_0 + P \frac{a}{l} \frac{b^3}{3IE}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 (b + a) = \frac{P(ba^3 - ab^3)}{3IEl} \quad \text{és}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{Pab(a^2 - b^2)}{3IEl(a + b)} = \frac{Pab(a - b)}{3IEl} \quad \text{ezt betéve a második}$$

egyenletbe, a besüllyedés értéke a P erő alatt lesz:

$$f = \frac{Pab^3(a - b)}{3IEl} + P \frac{a}{l} \frac{b^3}{3IE} = P \frac{a^2b^2}{3IEl} \quad (2)$$

A rugalmas vonal egyenletéből a maximális besüllyedés ($f_{\max}$)

abszcisszája:
$$x_1 = a \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{b}{a}} \quad \text{ha } a > b$$

és
$$x_1' = b \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{a}{b}} \quad \text{ha } a < b$$

c) A tartó több koncentrált erővel van terhelve (92. ábra).

Elsősorban a sztatika alapegyenletei alapján a felszabadító erőket kell meghatározni.

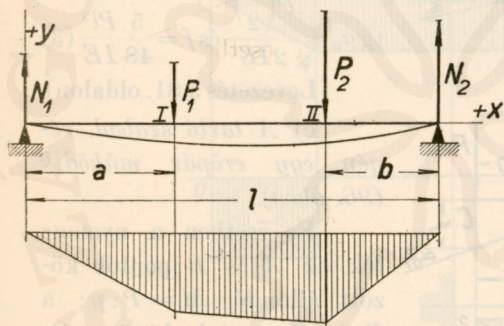
$$N_1 + N_2 = P_1 + P_2; \quad N_2 l - P_2(l - b) - P_1 \cdot a = 0$$

A veszélyes szelvény vagy az I, vagy a II szelvényben lesz,

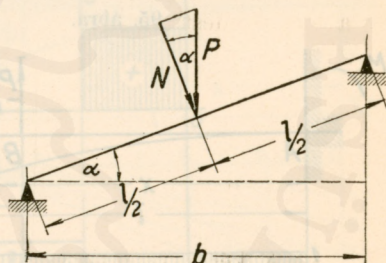
$$M_I = N_2(l - a) - P_2[l - (a + b)] \quad \text{és} \quad M_{II} = N_2 b$$

e kettő közül a nagyobbra méretezzük a tartót: $M_{\max} = W \cdot \sigma_m$.

A besüllyedés a $\tan \alpha$ és f képleteiből nyerhető.



92. ábra.



93. ábra.

d) Ferde helyzetű tartó méretezése (93. ábra).

Ha nem vízszintesen fekvő tartóról van szó, melyet függélyes erő terhel meg, úgy ezen terhelésből a tartó középvonalára merőleges komponenst kell meghatározni, s ezt behelyettesíteni a vízszintes tartó képleteibe:

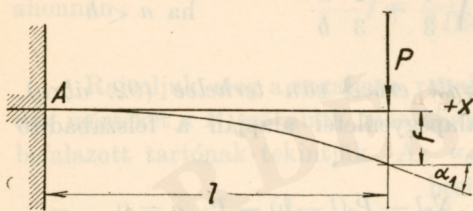
$$M_{\max} = \frac{N}{2} \cdot \frac{l}{2} = P \cos \alpha \frac{l}{4} = l \cos \alpha \frac{P}{4} = P \frac{b}{4}$$

azaz a ferde helyzetű tartót úgy számítjuk, mintha hasonló viszonyok mellett vízszintes helyzetű volna, de támköznek nem a valódi hosszat, hanem annak horizontális vetületét vesszük.

22. §. Egyik végén befogott, koncentrált erővel terhelt tartó.

a) A P erő a tartó szabad végén működik (94. ábra.)

Veszélyes szelvény a falnál van:



94. ábra.

$$M_{\max} = Pl$$

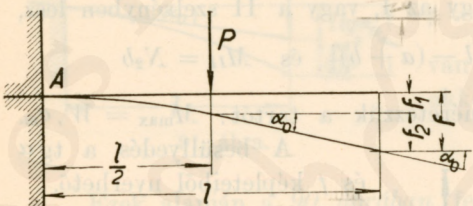
$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{Pl^2}{2IE} \quad \text{és} \quad f = \frac{Pl^3}{3IE}$$

(A képletek levezetését lásd a 80. oldalon.)

b) A P erő a tartó közepén működik (95. ábra.)

Veszélyes szelvény a

falnál lesz:



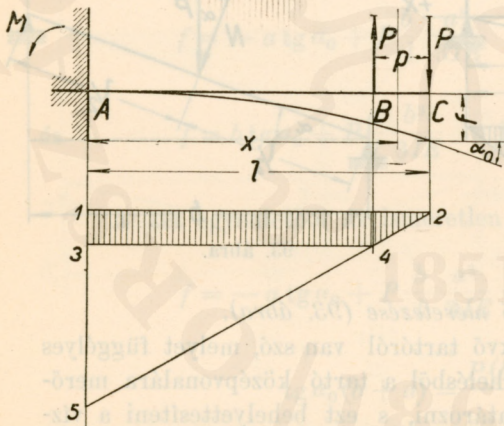
95. ábra.

$$M_{\max} = P \frac{l}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{P \left(\frac{l}{2} \right)^2}{2IE} \quad \text{és} \quad f = \frac{5 Pl^3}{48 IE} \quad (3)$$

(Levezetés a 81. oldalon.)

c) A tartó szabad végén egy erőpár működik (96. ábra.)



96. ábra.

Ez esetben a nyomaték az A és B pontok között állandó, $M = P \cdot p$; a B és C pontok között változó, $M_x = P(l - x)$; ennek megfelelően a nyomatéki ábra 1, 2, 3, 4 lesz. Ha csupán egy erő hatna a tartó szabad végén, a nyomatéki ábra 1, 2, 5 volna; előre látható tehát, hogy az erőpár- okozta be-

süllyedés kisebb lesz, mintha csak egy erő hatna a tartó végén. A rugalmas vonal hajlásszögére vonatkozólag kapjuk:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{IE} \int M dx + C, \quad \text{mivel } M \text{ állandó:}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Mx}{IE} + C$$

ha $x = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = 0$, így $C = 0$

ha $x = l$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{Ml}{IE}$$

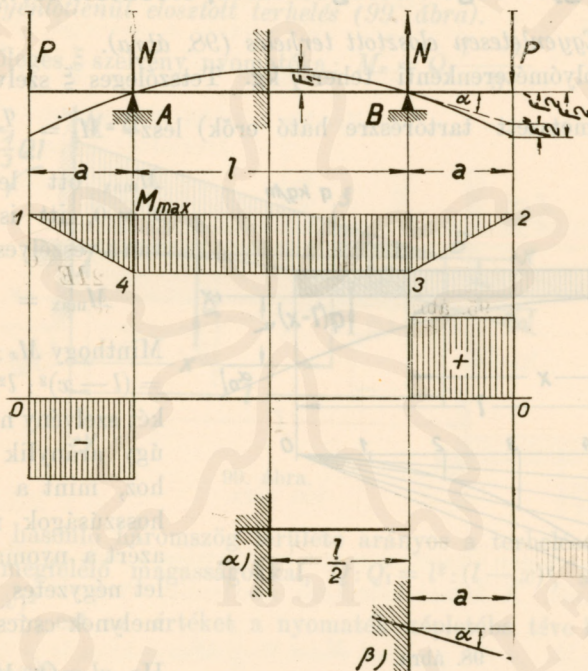
A besüllyedés pedig:

$$y = \int \operatorname{tg} \alpha \, dx + C_1 = \frac{M}{IE} \int x \, dx + C_1 = \frac{Mx^2}{2IE} + C_1$$

ha $x = 0$, $y = 0$, így $C_1 = 0$

A besüllyedés a tartó végén, $x = l$ mellett:

$$f = \frac{Ml^2}{2IE} \quad (4)$$



97. ábra.

Ennek alapján megoldható a 97. ábrán feltüntetett tartó (pl. kocsitengely) besüllyedése. A maximális nyomaték: $M_{\max} = aP$. Az f_1 besüllyedést a nyomatékkal terhelt tartó besüllyedési képlete alapján kapjuk (α . ábra), ahol $M = aP$ és l helyett $\frac{l}{2}$ szerepel:

$$f_1 = \frac{Ml^2}{2IE} = \frac{P \cdot a \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2IE} = \frac{Pal^2}{8IE} \quad (5)$$

Az f_2 besüllyedést pedig, mint az a hosszúságú α szög alatt befalazott tartó besüllyedését (β . ábra),

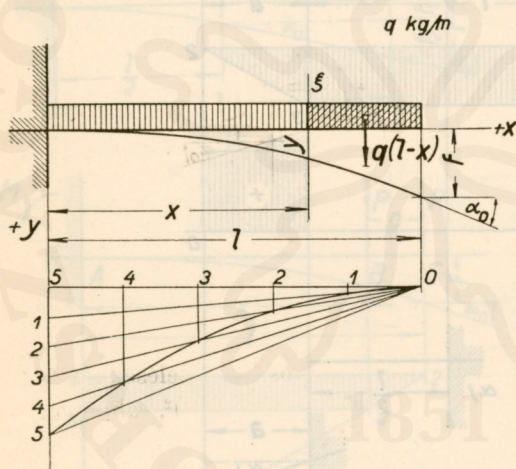
$$f_2 = f_2' + f_2''$$

$$f_2 = a \operatorname{tg} \alpha + \frac{Pa^3}{3IE} = a \frac{P \cdot a \left(\frac{l}{2} \right)}{IE} + \frac{Pa^3}{3IE} = \frac{Pa^2 l}{2IE} + \frac{Pa^3}{3IE} = \frac{Pa^2}{IE} \left(\frac{l}{2} + \frac{a}{3} \right) \quad (6)$$

23. §. Egyik végén befogott tartó, elosztott terheléssel.

a) *Egyenletesen elosztott terhelés* (98. ábra).

A folyóméterenkénti teher q kg. Tetszőleges ξ szelvény terhelése (lemetszett tartórészre ható erők) lesz: $M_x = \frac{q(l-x)^2}{2}$.



98. ábra.

$M_{\max}$ ott lesz, ahol $x = 0$, itt is a falnál van a veszélyes szelvény.

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{2}$$

Mint hogy M_x : $M_{\max} = (l-x)^2 : l^2$, azaz a két szelvény nyomatéka úgy aránylik egymáshoz, mint a megfelelő hosszúságok négyzetei, azért a nyomaték-terület négyzetes parabola, melynek csúcspontja O .

$$\text{Ha } ql = Q, M_{\max} = \frac{Ql}{2}$$

A besüllyedést a következőképpen határozzuk meg:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{IE} \int M_x dx + C = \frac{q}{2IE} \int (l-x)^2 dx + C$$

(előjel nem változik, mert növekedő x -szel a $\operatorname{tg} \alpha$ is nő)

$$\text{ha } x = 0, \operatorname{tg} \alpha = 0, \text{ s így } C = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q}{2IE} \left(l^2 x - \frac{2lx^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right)$$

a tartó végén, ahol $x = l$:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{q}{2IE} \left(l^3 - l^3 + \frac{l^3}{3} \right) = \frac{ql^3}{6IE} = \frac{Ql^2}{6IE} \quad (1)$$

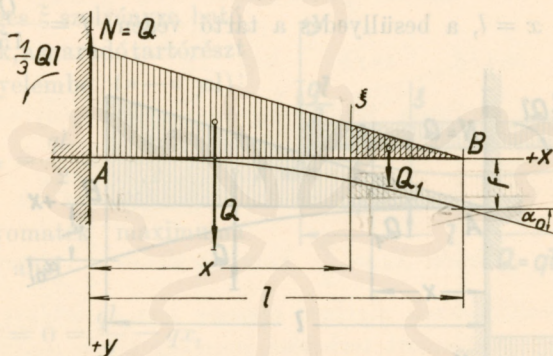
a besüllyedés: $y = \int \operatorname{tg} \alpha \, dx + C_1 = \frac{q}{2IE} \left(\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + C_1$

ha $x = 0$, $y = 0$, akkor $C_1 = 0$

a tartó végén: $f = \frac{q}{2IE} \left(\frac{l^4}{2} - \frac{l^4}{3} + \frac{l^4}{12} \right) = \frac{ql^4}{8IE} = \frac{Ql^3}{8IE} \quad (2)$

b) Egyenlőtlenül elosztott terhelés (99. ábra).

Tetszőleges ξ szelvény nyomatéka: $M_x = Q_1 \frac{l-x}{3}$



99. ábra.

A két hasonló háromszög területe arányos a terhelésekkel és arányos a megfelelő magasságokkal, $Q:Q_1 = l^2:(l-x)^2$, ahonnan

$$Q_1 = \frac{Q(l-x)^2}{l^2}; \text{ ezt az értéket a nyomaték képletébe téve kapjuk:}$$

$$M_x = \frac{Q(l-x)^3}{3l^2}, \text{ a nyomatéki ábra harmadfokú parabola lesz.}$$

Veszélyes szelvény ott van, ahol $x = 0$, a falnál és így

$$M_{\max} = \frac{Ql^3}{3l^2} = \frac{Ql}{3}.$$

A nyírórő a nyomaték x szerinti differenciálhányadosa,

$$V_x = \frac{dM_x}{dx} = \frac{Q(l-x)^2}{l^2}$$

a nyíróerők ábrája másodfokú parabola. A besüllyedés meghatározása a következő:

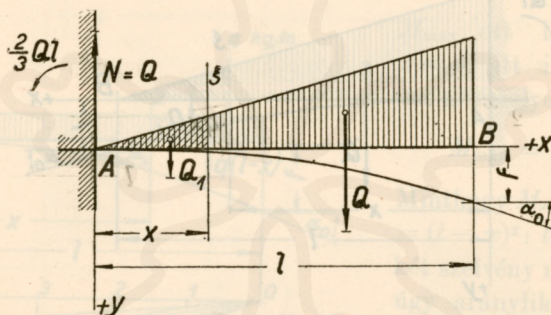
$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= \frac{1}{IE} \int M_x dx + C = \frac{1}{IE} \frac{Q}{3l^2} \int (l-x)^3 dx + C = \\ &= \frac{Q}{3IEl^2} \int (l^3 - 3l^2x + 3x^2l - x^3) dx + C\end{aligned}$$

ha $x = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = 0$, így $C = 0$ és

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q}{3IEl^2} \left(l^3x - \frac{3}{2} l^2x^2 + lx^3 - \frac{x^4}{4} \right) \quad \text{és}$$

$$y = \frac{Q}{3IEl^2} \left(l^3 \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} l^2 \frac{x^3}{3} + l \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{20} \right) + C_1$$

és ebből, ha $x = l$, a besüllyedés a tartó végén: $f = \frac{Ql^3}{15IE}$ (3)



100. ábra.

Hasonlóan állapítjuk meg a besüllyedést a 100. ábrában feltüntetett esetben. A falnál keletkező maximális nyomaték:

$$M_{\max} = \frac{2}{3} Ql.$$

A ξ szelvény terhelése:

$$M_x = \frac{2}{3} Ql - Qx + Q_1 \frac{x}{3}; \quad Q_1 = Q \frac{x^2}{l^2} \quad \text{tehát:}$$

$$M_x = \frac{2}{3} Ql - Qx + \frac{Qx^3}{3l^2}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= \frac{1}{IE} \int M_x dx + C = \frac{Q}{IE} \int \left(\frac{2}{3} l - x + \frac{x^3}{3l^2} \right) dx + C = \\ &= \frac{Q}{IE} \left(\frac{2}{3} lx - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12l^2} \right) + C\end{aligned}$$

$$y = \frac{Q}{1E} \left(\frac{2}{3} l \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{60l^2} \right) + C_1 \quad \text{és ha } x = l:$$

$$f = \frac{Q}{1E} \left(\frac{l^3}{3} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{60} \right) = \frac{Q}{601E} (20l^3 - 10l^3 + l^3) = \frac{11}{60} \frac{Ql^3}{1E} \quad (4)$$

24. §. Két végén alátámasztott tartó elosztott terheléssel.

a) *Egész hosszában egyenletesen elosztott teher (101. ábra).*

A felszabadító erőket olymódon számítjuk ki, mintha az egész $ql = Q$ terhelés a súlypontban működne. $N_1 = N_2 = \frac{ql}{2}$.

A nyomatéki és nyíróerők ábrája a 80. ábrán van feltüntetve. Tetszőleges ξ szelvényre ható nyomaték, a maradótartórészt véve figyelembe («—» jel):

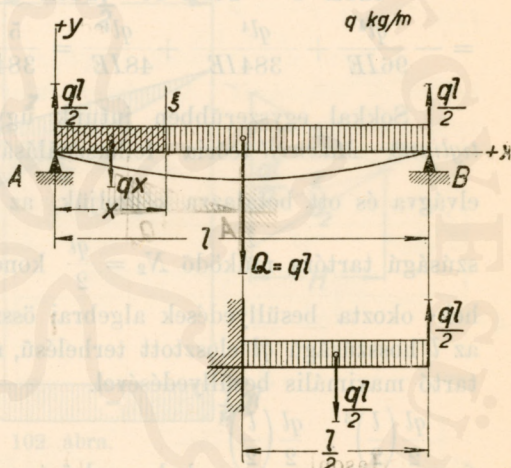
$$M_x = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2}$$

és a nyomaték maximuma ott lesz, ahol

$$\frac{dM_x}{dx} = 0 = \frac{ql}{2} - qx,$$

$$\text{amiből } x = \frac{l}{2}$$

$$\text{és } M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{Ql}{8}$$



101. ábra.

Ha $Q = ql$ mint koncentrált teher hatna $\frac{l}{2}$ -ben, $M_{\max} = \frac{Ql}{4}$ volna, a koncentrált teher tehát kétszeresére növekedést okoz, mint a vele egyenlő nagyságú elosztott teher.

Határozzuk meg a besüllyedést. Miután x növekedésével $\tan \alpha$ csökken, a nyomatékokot «—» jellel vesszük figyelembe:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= -\frac{ql}{21E} \int x \cdot dx + \frac{q}{21E} \int x^2 \cdot dx + C = \\ &= -\frac{ql}{21E} \frac{x^2}{2} + \frac{q}{21E} \frac{x^3}{3} + C \end{aligned}$$

$$\text{ha } x = \frac{l}{2}, \operatorname{tg} \alpha = 0 \text{ és így } 0 = -\frac{ql}{2IE} \frac{l^2}{8} + \frac{q}{2IE} \frac{l^3}{24} + C,$$

$$\text{amiből: } C = \frac{3}{48} \frac{ql^3}{IE} - \frac{1}{48} \frac{ql^3}{IE} = \frac{ql^3}{24IE} \text{ tehát}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{ql}{4IE} x^2 + \frac{q}{6IE} x^3 + \frac{ql^3}{24IE} \quad \text{és}$$

$$y = \int \operatorname{tg} \alpha dx + C_1 = -\frac{ql}{4IE} \frac{x^3}{3} + \frac{q}{6IE} \frac{x^4}{4} + \frac{ql^3}{24IE} x + C_1$$

$$\text{ha } x = 0, y = 0 \text{ és így } C_1 = 0$$

$$\text{A tartó közepén a maximális besüllyedés, ha } x = \frac{l}{2},$$

$$\begin{aligned} f &= -\frac{ql}{12IE} \frac{l^3}{8} + \frac{q}{24IE} \frac{l^4}{16} + \frac{ql^3}{24IE} \frac{l}{2} = \\ &= -\frac{ql^4}{96IE} + \frac{ql^4}{384IE} + \frac{ql^4}{48IE} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{IE} \end{aligned} \quad (1)$$

Sokkal egyszerűbben jutunk ugyanezen eredményhez a *Castigliano—Maxwell*-teória felhasználásával. A tartót a közepén elvágva és ott befalazva képzeljük, az összbessüllyedés az $\frac{l}{2}$ hosszúságú tartóra működő $N_2 = \frac{ql}{2}$ koncentrált- és $\frac{ql}{2}$ elosztott terhek okozta besüllyedések algebrai összege lesz és értékre egyenlő az l hosszúságú ql elosztott terhelésű, mindkét végén alátámasztott tartó maximális besüllyedésével.

$$f = \frac{ql \left(\frac{l}{2}\right)^3}{3IE} - \frac{ql \left(\frac{l}{2}\right)^3}{8IE}$$
 ahol az első tag a fölfelé működő $\frac{ql}{2}$ koncentrált erő, a második tag pedig a $\frac{ql}{2}$ elosztott teher által okozott besüllyedés. Tovább pedig:

$$f = \frac{ql^4}{48IE} - \frac{ql^4}{128IE} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{IE} \quad (1a)$$

A két helyen alátámasztott tartónak, amely folyóméterenként q -val van megterhelve, az f besüllyedése, amint azt megállapítottuk, a következő egyenlettel van kifejezve:

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{IE}$$

$$\text{Ha } E = 2100000 \text{ kg/cm}^2, \text{ akkor } f_{\text{cm}} = 6,2 \frac{ql^4}{I}$$

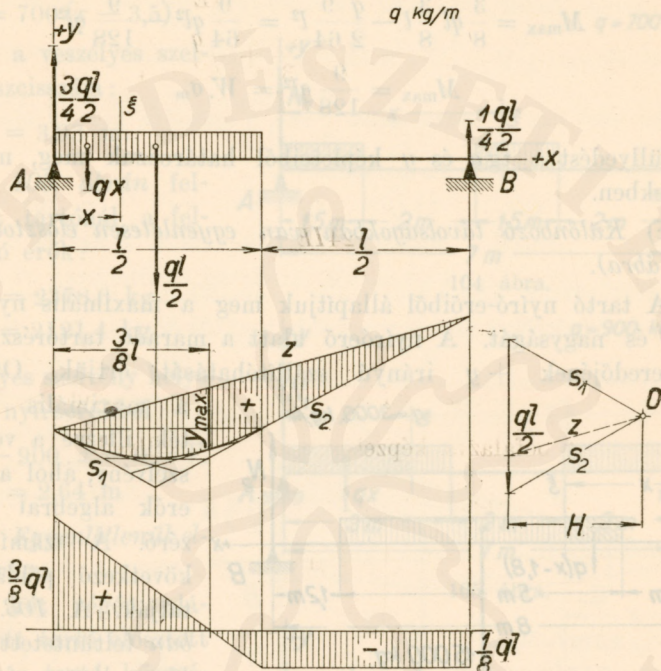
összevonva, ha q tonna/méterben van behelyettesítve, l méterben és I cm⁴ egységben, minthogy a nyomaték:

$$M = q \cdot \frac{l^2}{8}$$

azért:

$$f_{\text{cm}} = 49,6 \frac{M \cdot l^2}{I}$$

q kg/m



102. ábra.

és $\frac{l}{f} = \frac{I}{0,496 Ml}$, ahol M tonnaméter.

Ha $l = 8,5$ m és $M = 9,2$ tm, akkor

$\frac{l}{f} = 323$, ha I 32 N.P. tartót veszünk, amikor is $\sigma = 1175$ kg/cm²

$\frac{l}{f} = 403$, ha I 34 N.P. tartót veszünk, amikor is $\sigma = 1000$ kg/cm²

b) A tartó fél hosszában egyenletesen elosztott a teher (102. ábra).

A felszabadító erők $N_A = \frac{3}{4} \frac{ql}{2} = \frac{3}{8} ql$ és $N_B = \frac{1}{4} \frac{ql}{2} = \frac{1}{8} ql$.

Tetszőleges ξ szelvényben a nyomaték:

$$M_x = \frac{3}{8} qlx - \frac{qx^2}{2}$$

A maximális nyomaték lesz:

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{3}{8}ql - qx = 0$$

ahonnan:

$$x = \frac{3}{8}l,$$

itt van a veszélyes szelvény.

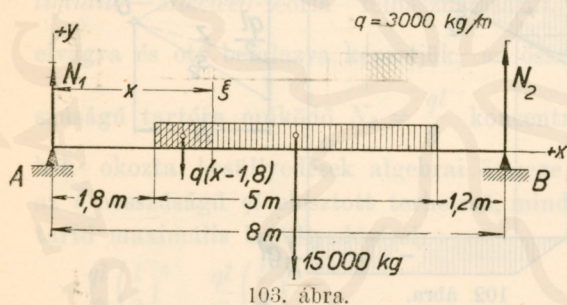
$$M_{\max} = \frac{3}{8}ql \cdot \frac{3}{8}l - \frac{q}{2} \cdot \frac{9}{64}l^2 = \frac{9}{64}ql^2 - \frac{9}{128}ql^2 = 0,008$$

$$M_{\max} = \frac{9}{128}ql^2 = W \cdot \sigma_m \quad (2)$$

A besüllyedést a $\text{tg } \alpha$ és y képleteiből határozzuk meg, mint az eddigiekben.

c) *Különböző távolságokban van egyenletesen elosztott teher* (103. ábra).

A tartó nyíró-erőiből állapítjuk meg a maximális nyomaték helyét és nagyságát. A nyíróerő alatt a maradó tartórészre ható erők eredőjének $+y$ irányú szállítóhatását értjük. Ott lesz



103. ábra.

a maximális nyomaték, illetve a veszélyes szelvény, ahol a nyíróerők algebrai összege zéró. A számítást a következő példák mutatják. A 103. ábrában feltüntetett terhelés mellett a felszabadító erők:

$$N_1 = \frac{15000 \cdot 3,7}{8} = 6937,5 \text{ kg}$$

$$N_2 = 15000 - 6937,5 = 8062,5 \text{ kg.}$$

Tetszőleges ξ szelvényre a nyíróerőket felírjuk és egyenlővé tesszük zéróval

$V_x = N_1 - q(x - 1,8) = 0$; $6937,5 - 3000(x - 1,8) = 0$ ahonnan a maximális nyomaték abszcisszája $x = 4,11 \text{ m}$ és

$$M_{\max} = 6937,5 \cdot 4,11 - 3000 \left(4,1 - 1,8\right) \left(\frac{4,1 - 1,8}{2}\right) = 20578,12 \text{ kgm}$$

$$M_{\max} = 2057812 \text{ kgcm, } W_x = \frac{2057812}{800} = 2572,2 \text{ cm}^3.$$

A 104. ábra szerinti terhelésnél hasonlóan járunk el. A felszabadító erőket a sztatikai alapegyenletek adják, jelen esetben:

$$N_1 = 1350 \text{ kg}, N_2 = 750 \text{ kg}$$

A nyíróerőket megállapítva:

$$V_x = 1350 - 1050 - 700(x - 3,5) = 0$$

$$300 = 700(x - 3,5)$$

ahonnan a veszélyes szelvény abszcisszája:

$$x = 3,93 \text{ m.}$$

A 105. ábrán feltüntetett tartónál a felszabadító erők:

$$N_1 = 2378,6 \text{ kg}$$

$$N_2 = 2121,4 \text{ kg}$$

A veszélyes szelvény helye pedig a nyíróerőkből:

$$2378,6 - 900 \cdot x = 0 = V.$$

$$x = 2,64 \text{ m}$$

d) Egyenlőtlenül elosztott teher.

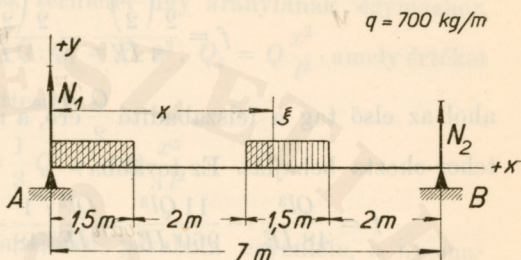
A két végén alátámasztott tartó előszott terhelése a tartó közepétől a végei felé növekszik (106. ábra). A felszabadító erők nagysága:

$$N_1 = N_2 = \frac{Q}{2}. \text{ Maximális}$$

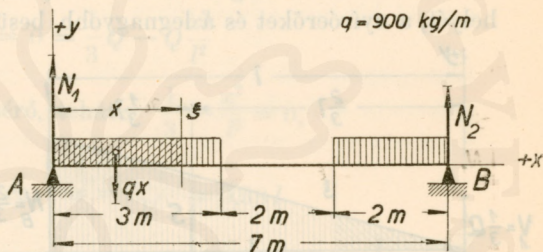
nyomaték, veszélyes szelvény és a legnagyobb besüllyedés a középén van.

$$M_{\max} = \frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Ql}{12} \quad (3)$$

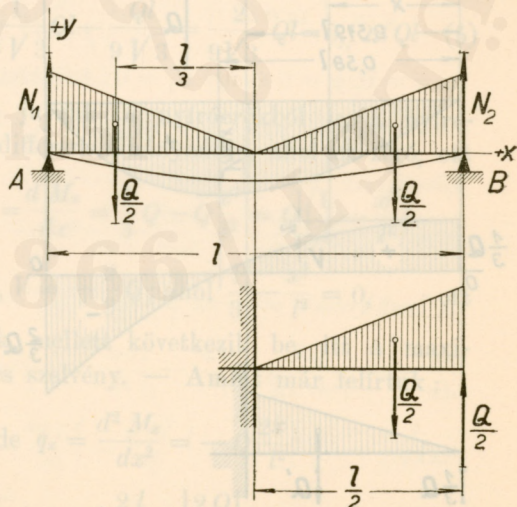
A besüllyedést a Castigliano — Maxwell-teóriával állapítjuk meg.



104. ábra.



105. ábra.



106. ábra.

A tartót közepén elvágva és ott befalazva képzeljük és ennek az $\frac{l}{2}$ hosszúságú tartónak a besüllyedését állapítjuk meg, amely egyenlő a mindkét végén alátámasztott l hosszúságú tartó besüllyedésével.

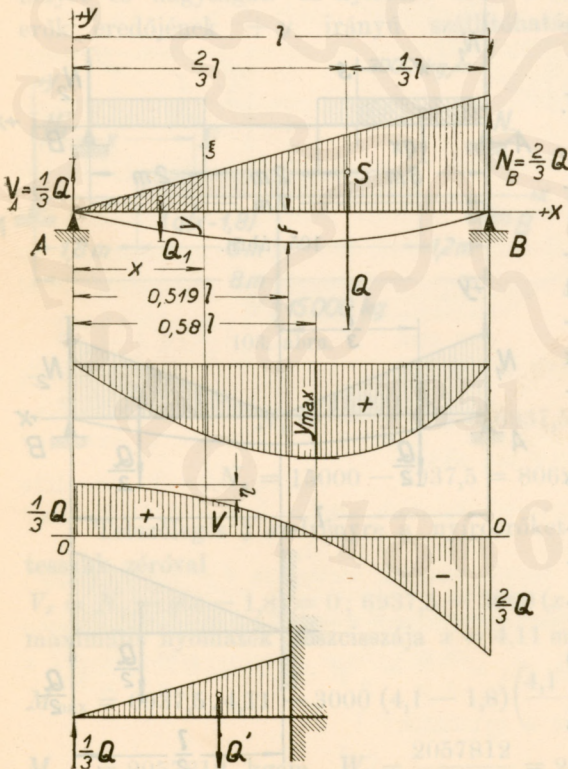
A besüllyedés két részből adódik:

$$f = \frac{Q \left(\frac{l}{2} \right)^3}{3 IE} - \frac{Q \left(\frac{l}{2} \right)^3}{IE} \frac{11}{60}$$

ahol az első tag a felszabadító $\frac{Q}{2}$ erő, a második tag az elosztott $\frac{Q}{2}$ teher- okozta behajlás. Ez továbbá:

$$f = \frac{Ql^3}{48 IE} - \frac{11 Ql^3}{960 IE} = \frac{Ql^3}{IE} \left(\frac{1}{48} - \frac{11}{960} \right) = \frac{3 Ql^3}{320 IE} \quad (4)$$

Határozzuk meg a maximális nyomatékot, a veszélyes szelvény helyét, a nyírőerőket és a legnagyobb besüllyedést a 107. ábrán feltüntetett terhelésű tartónál. A terhelés eloszlása háromszögszerűen növekedő.



107. ábra.

Ilyen terhelést ad pl. a földnyomás, víznyomás. Az egész teher, melyet a súlypontban működőnek képzelhetünk:

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} l,$$

$$\text{ahol } q_{\max} = \frac{2Q}{l}$$

A felszabadító erők:

$$N_A = \frac{1}{3} Q \text{ és } N_B = \frac{2}{3} Q.$$

Keressük ξ szelvényben a nyomatékot. Az óramutató járásával ellentétes nyomatékot szoktuk a lementezett tartórészre pozitív-

nak venni; jelen esetben, miután a maradó tartórészt vesszük figyelembe, a nyomatékok előjele megváltozik és lesz:

$$M_x = \frac{1}{3} Qx - Q_1 \frac{x}{3}$$

A hasonló háromszögek területei úgy aránylanak egymáshoz, mint magasságuk négyzetei, $Q:Q_1 = l^2:x^2$; $Q_1 = Q \frac{x^2}{l^2}$, amely értéket a nyomaték képletébe helyettesítve:

$$M_x = \frac{1}{3} Q \cdot x - Q \frac{x^3}{3l^2}$$

Ez a kifejezés a harmadfokú parabola egyenlete, a nyomatéki ábra is harmadfokú parabola. Keressük a maximális nyomaték helyét:

$$\frac{dM_x}{dx} = 0 = \frac{1}{3} Q - Q \frac{x^2}{l^2}$$

$$Q \text{ nem lehet zéró, tehát: } \frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2} = 0,$$

$$\text{ahonnan: } x^2 = \frac{l^2}{3} \quad \text{és} \quad x = l \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,58l$$

amely értéket a nyomaték egyenletébe helyettesítve:

$$M_{\max} = \frac{1}{3} Q \frac{l}{\sqrt{3}} - \frac{Q l^3}{3l^2 3 \sqrt{3}} = \frac{1}{3 \sqrt{3}} Ql - \frac{Ql}{9 \sqrt{3}} = \frac{2}{9 \sqrt{3}} Ql = 0,128 Ql \quad (5)$$

Ugyanezen eredményre jutunk a nyíróerőkből is, a nyíróerő a nyomaték x szerinti differenciálhányadosa, ahol ez zéró, ott

$$\text{a maximális nyomaték. } V_x = \frac{dM_x}{dx} = \frac{1}{3} Q - Q \frac{x^2}{l^2} = Q \left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

$$\text{Ha } x = 0, \quad V = \frac{Q}{3}; \quad \text{ha } x = l, \quad V = -\frac{2}{3} Q; \quad \text{ahol } \frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2} = 0, \quad \text{ott}$$

$V = 0$ és ez $x = 0,58l$ érték mellett következik be, itt a maximális nyomaték és a veszélyes szelvény. — Amint már felírtuk:

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} l, \quad \text{de } q_x = \frac{d^2 M_x}{dx^2} = -Q \frac{2x}{l^2}$$

$$\text{ha } x = l, \quad q_{\max} = -Q \frac{2l}{l^2} = \left| \frac{2Q}{l} \right|$$

Tetszősszerinti x helyen: $q_x = q_{\max} \frac{x}{l}$ és $V_x = \frac{Q}{3} - \eta = \frac{Q}{3} - \frac{Q \cdot x^2}{l^2}$

tehát: $\eta = \frac{Qx^2}{l^2}$, de $Q = \frac{1}{2} q_{\max} l$, tehát $\eta = \frac{1}{2} q_{\max} \frac{x^2}{l^2}$

azaz a nyíróerők ábrája másodfokú parabola.

Határozzuk meg a besüllyedést. Miután x növekedésével a $\operatorname{tg} \alpha$ csökken,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{1}{IE} \int M_x dx + C = \\ &= -\frac{Q}{3 IE} \int \left(x - \frac{x^3}{l^2} \right) dx + C = -\frac{Q}{3 IE} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4 l^2} \right) + C \end{aligned}$$

Ennél a terhelésnél a nyomatéki ábra és a rugalmas vonal hasonló, mint a két végén alátámasztott egyenletesen elosztott, vagy trapézszerűen elosztott terhelésű tartónál, feltehetjük tehát, hogy a tartó középső szelvényében $x = \frac{l}{2}$ mellett a $\operatorname{tg} \alpha = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{Q}{6 IE} \left(\frac{l^2}{4} - \frac{l^4}{32 l^2} \right) + C = -\frac{Q}{24 IE} \left(l^2 - \frac{l^2}{8} \right) + C = \\ &= -\frac{Q}{24 IE} \cdot \frac{7}{8} l^2 + C \end{aligned}$$

ahonnan:

$$C = \frac{7}{192} \frac{Q l^2}{IE}$$

$$y = \int \operatorname{tg} \alpha dx + C_1 = -\frac{Q}{6 IE} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10 l^2} - \frac{7}{32} l^2 x \right) + C_1$$

ha $x = 0$, $y = 0$ és így $C_1 = 0$; továbbá az utolsó tagot megközelítéssel $\left(-\frac{7}{30} l^2 x \right)$ -nek vesszük, mert a $\operatorname{tg} \alpha = 0$, az $\frac{l}{2}$ -nél nagyobb érték mellett következik be,

$$y = -\frac{Q}{6 IE} \left(\frac{10 x^3}{30} - \frac{3 x^5}{30 l^2} - \frac{7}{30} l^2 x \right) = -\frac{Q l^3}{180 IE} \left(10 \frac{x^3}{l^3} - 3 \frac{x^5}{l^5} - 7 \frac{x}{l} \right)$$

A besüllyedés ott lesz maximális, $f = y_{\max}$, ahol $\frac{dy}{dx} = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Q l^3}{180 IE} \left(\frac{30 x^2}{l^3} - \frac{15 x^4}{l^5} - \frac{7}{l} \right) = 0, \quad \text{legyen } y = x^2,$$

$$\text{akkor:} \quad \frac{30 y}{l^3} - \frac{15 y^2}{l^5} - \frac{7}{l} = 0$$

$$y^2 - 2 l^2 y + \frac{7}{15} l^4 = 0$$

$$y = l^2 \pm \sqrt{l^4 - \frac{7}{15} l^4} = l^2 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{7}{15}} \right) \quad \text{és ebből:}$$

$x = l \sqrt{1 - \sqrt{\frac{8}{15}}} = 0,519 l$ a maximális besüllyedés abszcisszája és nagyságát kapjuk, ha az $x = 0,519 l$ értéket behelyettesítjük az y képletébe:

$$f = 0,013 \frac{Ql^3}{EI} \quad (6)$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk a *Castigliano* – *Maxwell*-teóriával is. *A tartót a maximális besüllyedés helyén elvágva és befalazva képzeljük* s a $0,519 l$ hosszúságú tartó besüllyedése lesz:

$$f = \frac{Q}{3} \frac{(0,519 l)^3}{3IE} - \frac{Q' (0,519 l)^3}{15IE}$$

$$Q : Q' = l^2 : (0,519 l)^2$$

és $Q' = 0,519^2 \cdot Q = 0,269 \cdot Q$, amely értéket felhasználva $f = \frac{Ql^3}{IE} (0,0155 - 0,0025) = 0,013 \frac{Ql^3}{IE} \quad (6a)$

Határozzuk meg még a 108. ábrán feltüntetett tartó maximális nyomatékát, ennek helyét és azon pontját, ahol a nyomaték zéró. A háromszögszerűen elosztott terhelés arányos az x távolsággal. A felszabadító erők lesznek:

$$N_A = \frac{\frac{al^2}{2} \left(l_1 - \frac{2}{3} l \right)}{l_1} = \frac{al^2}{2} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{l}{l_1} \right)$$

$$N_B = \frac{\frac{al^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{l_1}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{l_1}} = \frac{al^2}{3} \left(\frac{l}{l_1} \right)$$

Tetszőleges szelvény nyomatéka:

$$M_x = N_A x - \frac{ax^2}{2} \cdot \frac{x}{3} = N_A \cdot x - \frac{1}{6} ax^3$$

A maximális nyomaték abszcisszája x_1

$$\frac{dM_x}{dx} = 0 = N_A - \frac{1}{2} ax^2$$

$$ax^2 = al^2 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{l}{l_1} \right)$$

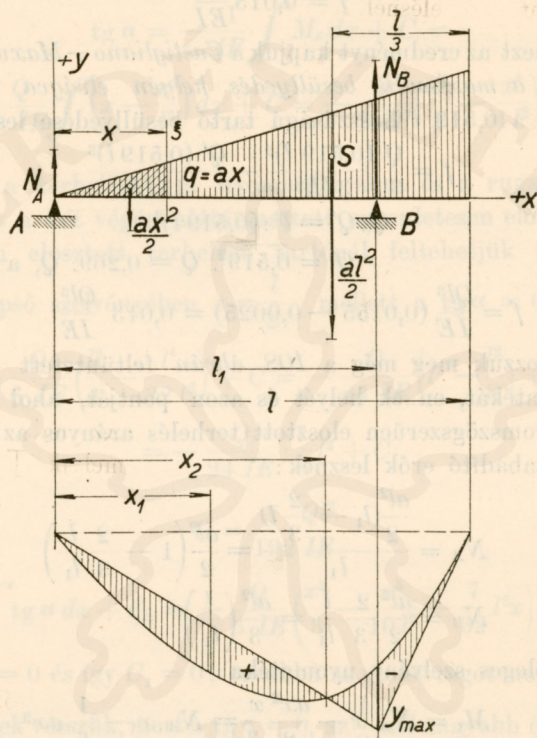
$$x_1 = l \sqrt{1 - \frac{2}{3} \frac{l}{l_1}} \quad \text{és}$$

$$M_{\max} = \frac{3al^3}{6} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{l}{l_1} \right) \sqrt{1 - \frac{2}{3} \frac{l}{l_1}} - \frac{al^3}{6} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{l}{l_1} \right) \sqrt{1 - \frac{2}{3} \frac{l}{l_1}}$$

$$M_{\max} = \frac{al^3}{3} \sqrt{\left(1 - \frac{2}{3} \frac{l}{l_1} \right)^3} \quad (7)$$

A nyomaték a B alátámasztás alatt, ha $x = l_1$:

$$\begin{aligned}
 -M_{\max} &= -\frac{al^2}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{l}{l_1}\right)l_1 + \frac{1}{6}al_1^3 = \\
 &= -\frac{3al^2l_1}{6} + \frac{2al^3}{6l_1}l_1 + \frac{1}{6}al_1^3 = -\frac{a}{6}\left(-3l_1l^2 + 2l^3 + l_1^3\right)
 \end{aligned}$$



108. ábra.

Ha azt a helyet keressük, ahol a nyomaték zéró, akkor az:

$$M_x = N_A \cdot x - \frac{1}{6} a x^3 \quad \text{képletben} \quad M_x = 0 \quad \text{és így:}$$

$$N_A - \frac{1}{6} a x^2 = 0; \quad \frac{1}{6} a x^2 = \frac{al^2}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{l}{l_1}\right); \quad x^2 = 3l^2\left(1 - \frac{2}{3}\frac{l}{l_1}\right)$$

$$x_2 = \pm l \sqrt{3 - 2\frac{l}{l_1}} = x_1 \sqrt{3} = 1,73x_1$$

25. §. Két végén alátámasztott tartó, vegyes terheléssel.

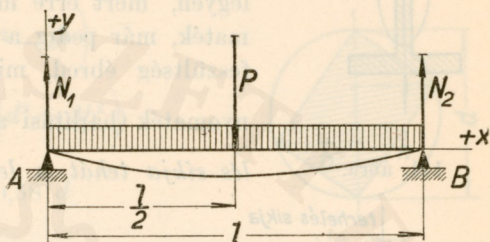
Ha a tartó terhelését koncentrált és elosztott erőhatások adják, a számítás a *szuperpozíció (egymásrahalmazás)* elve alapján történik. Külön vesszük a koncentrált terhelésből és külön az elosztott terhelésből a nyomatékot és a kettőt összegezzük. Például a 109. ábra szerinti terhelésnél a maximális nyomaték

$$x = \frac{l}{2} \text{ -nél:}$$

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} + \frac{ql^2}{8}$$

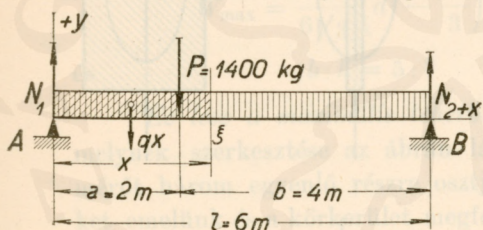
és a besüllyedés:

$$f = \frac{Pl^3}{48IE} + \frac{5}{384} \frac{ql^4}{IE} \quad (1)$$



109. ábra.

Számítsuk ki a 110. ábrán feltüntetett tartót. A tartó hossza 6 m, az egyenletesen elosztott terhelés $q = 500 \text{ kg/m}$ és a koncentrált terhelés $P = 1400 \text{ kg}$. Az adott terhelésnek melyik I profil felel meg?



110. ábra.

A felszabadító erők:

$$N_1 = \frac{ql}{2} + P \frac{b}{l} = 2433 \text{ kg}$$

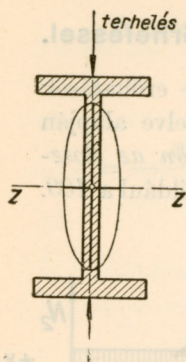
$$N_2 = ql + P - N_1 = 1967 \text{ kg}$$

A nyíróerő $V_x = 0 = 2433 - 1400 - 500x$, ahonnan $x = 2,06 \text{ m}$ lesz a maximális nyomaték abszcisszája, nagysága pedig:

$$M_{\max} = N_2(l - x) - \frac{q}{2}(l - x)^2 = 386800 \text{ kgcm}$$

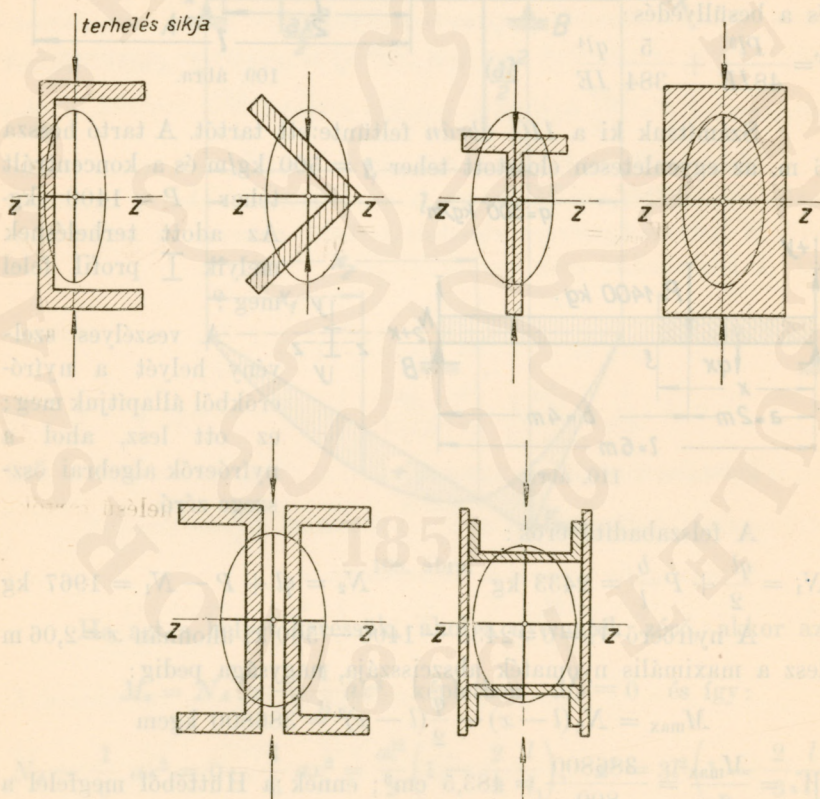
$W_x = \frac{M_{\max}}{\sigma_m} = \frac{386800}{800} = 483,5 \text{ cm}^3$; ennek a Hüttéből megfelel a legközelebbi nagyobb W_x értékkel bíró I profil, a I 27 N. P. ($W_x = 491 \text{ cm}^3$, $W_y = 56,2 \text{ cm}^3$).

A hajlításra igénybevett tartót úgy kell megterhelni, hogy a tartó középvonala terhelés után, a terhelés síkjából ki ne lépjen.



111. ábra.

Arra pedig, hogy ez meg ne történjék, úgy kell terhelni a tartót, hogy a terhelés síkja a főtehetetlenségi irányon menjen keresztül, mert ekkor a belső feszültség által okozott centrifugál- (elterelő) nyomaték zéró. A I profilnál (111. ábra) $z-z$ és $y-y$ a főtehetetlenségi tengelyek. A hajlítás tengelye, $z-z$ legyen, mert erre maximális a tehetetlenségi nyomaték, már pedig a szélső szálakban annál kisebb feszültség ébred, minél nagyobb a tehetetlenségi nyomaték (hajlítási alapképlet $\sigma = \pm \frac{Mv}{I}$). A terhelés síkja tehát a legnagyobb főtehetetlenségi ten-



112. ábra.

gely irányával essék össze. Ez pedig a tehetetlenségi ellipszis ismerete alapján a különböző szelvényeknél kijelölhető (112. ábra).

Határozzuk meg az adott körszelvényű farönkből kivágható

maximális teherbírású és legkisebb behajlású gerendák méreteit. A gerenda teherbírását a maximális nyomaték fejezi ki és ez $M_{max} = W\sigma_m$. Miután σ_m állandó, az összes kivágható gerendák közül annak lesz a legnagyobb teherbírása, melynek ellenálló nyomatéka maximális. Keressük tehát adott d mellett a W_{max} -t.

Általában négyszögszelvénynél $W = \frac{bh^2}{6}$, jelen esetben (113. ábra)

$$W = \frac{b}{6} (d^2 - b^2)$$

$$\frac{dW}{db} = 0 = \frac{1}{6} (d^2 - 3b^2)$$

ahonnan: $b = \frac{d}{\sqrt{3}} = 0,58 d$

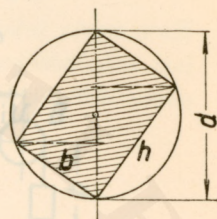
$$d^2 - b^2 = h^2 = d^2 - \frac{d^2}{3} = \frac{2}{3} d^2;$$

$$h = d \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,818 d$$

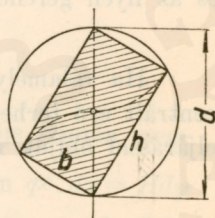
$$W_{max} = \frac{d}{6\sqrt{3}} \left(d^2 - \frac{d^2}{3} \right) = \frac{d^3}{9\sqrt{3}}$$

és

$$b : h = 5 : 7$$



113. ábra.



114. ábra.

Ez lesz a maximális teherbírású gerenda, melynek szerkesztése az ábrán látható; az át-mérőt három egyenlő részre osztjuk, az osztáspontokból merőlegese-
ket emelünk és a körkerület megfelelő pontjait az ábra szerint össze-
kötjük.

Az eddigiekben láttuk, hogy a különböző terhelésű tartók be-süllyedésének általános kifejezése: $f = \alpha \frac{Pl^3}{IE}$, ahol α az egyes terhe-léseknek megfelelő állandó tényező. Adott alakú tartó behajlása egyedül a képletben szereplő tehetetlenségi nyomatéktól függ és akkor minimális, ha I -nek maximuma van. Keressük adott átmérő esetén azt a négyszögszelvényt, amelynek tehetetlenségi nyomatéka maximum (114. ábra).

$$b = \frac{d}{2}; h^2 = d^2 - \frac{d^2}{4} = \frac{3}{4} d^2; h = \frac{d}{2} \sqrt{3}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{h^3 \sqrt{d^2 - h^2}}{12}$$

$$\frac{dI}{dh} = -\frac{h^3}{12\sqrt{d^2-h^2}} + \frac{\sqrt{d^2-h^2}}{12} \cdot 3h^2 = 0$$

$$\frac{h^4}{12\sqrt{d^2-h^2}} = \frac{h^2\sqrt{d^2-h^2}}{4}$$

$$\frac{h^2}{3} = \left(\sqrt{d^2-h^2}\right)\left(\sqrt{d^2-h^2}\right) = d^2 - h^2$$

$$d^2 = h^2 + \frac{h^2}{3} = \frac{4}{3} h^2 \text{ és } d = \frac{2h}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Mivel } h = \frac{d}{2}\sqrt{3} \text{ és } b = \frac{d}{2}:$$

$$I_{\max} = \frac{\frac{d}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^3\left(\sqrt{3}\right)^3}{12}$$

és az ilyen gerendánál: $b:h = 4:7$

Ha valamely tartót az elosztott terhelésen kívül több koncentrált erő terhel, akkor a feladatot a már tárgyalt szerkesztési eljárással oldjuk meg (82. ábra).

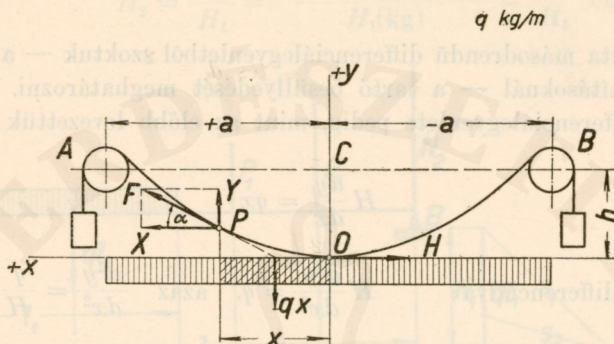
26. §. A kötélgörbe egyenlete és meghatározása.

Keressük a kötélgörbe egyenletét és alakját egyenletes teherelosztás mellett. Ha az egész l hosszúságú tartóra a teher Q , akkor a hosszegységre eső terhelés: $q = \frac{Q}{l}$.

Ha valamely kötelet egyenlő magasságban elhelyezett két csigán átfektetünk, arra egyenletesen elosztott terheket akasztunk és a kötel két végét egyensúlyozó súlyokkal látjuk el, akkor azt tapasztaljuk, hogy a kötel bizonyos alakot fölvéve, egyensúlyba jut. (115. ábra). A kötélgörbének lesz horizontális érintője is. Az érintés pontjában felvett koordinátarendszer y tengelye parallel a függőleges erők irányával és x tengelye arra merőleges. Ha a kötelet O pontban és valamely x abszcisszával bíró P pontban átvágjuk, akkor az átvágott pontokban a feszültségek egyensúlyt tartanak a közben levő OP darabra működő erőkkel, tehát qx teher egyensúlyt tart az O pontban működő H és a P pontban működő F kötélfeszültségekkel. Egyensúly esetén a vízszintes és függőleges összetevőknek algebrai összege zéró.

$H - X = 0$, azaz $H = X$, a kötel bármely pontjában a feszültség horizontális komponense állandó.

Az egyensúly másik feltétele értelmében $Y - qx = 0$, azaz $Y = qx$. A feszültség irányára vonatkozólag: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}$.



115. ábra.

Ha a görbe egyenlete $y = f(x)$, annak érintője szintén meg-
egyezik a feszültség irányával, tehát $\frac{dy}{dx} = \frac{qx}{H}$, ahonnan $qx \cdot dx = H dy$

$$q \frac{x^2}{2} = Hy + C_1$$

Ha $x = 0$, akkor $y = 0$ és így $C_1 = 0$,

$$\text{azaz: } y = \frac{1}{2} C x^2, \text{ ahol } C = \frac{q}{H}.$$

Ez a függélyes tengelyű parabola csúcspon-
ti egyenlete.

A kötelgörbe segítségével a tartó behajlása meghatározható. Az A és B pontok távolsága $2a = l$ és O pont mélysége az AB vonaltól h , az A pont koordinátái $+a$ és $+h$. Ezen érté-
keket a parabola egyenletébe helyettesítve:

$$\frac{qa^2}{2} = Hh \quad \text{és mivel } a = \frac{l}{2}$$

$$\frac{ql^2}{8} = Hh \quad \text{ahonnan a kötel leg-}$$

$$\text{nagyobb besüllyedése: } h = \frac{ql^2}{8H} \quad (1)$$

Ha tehát ismerjük a terhelést projekcióban folyóméterenként és a H pólustávolságot, a behajlás már meghatározható.

Ismeretes a rugalmas vonal differenciálegyenlete, mely szerint

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\rho} = \pm \frac{M}{IE} \quad (2)$$

Ezen tiszta másodrendű differenciálegyenletből szoktuk — a gyakorlati számításoknál — a tartó besüllyedését meghatározni. A kötél-görbe differenciálegyenlete pedig, mint az előbb levezettük:

$$H \frac{dy}{dx} = qx$$

ezt újból differenciálva:
$$H \frac{d^2y}{dx^2} = q, \text{ azaz } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{H} \quad (3)$$

A (2) és (3) alatti egyenletek vonatkozásba hozhatók. Ha I a tehetetlenségi nyomaték állandó, akkor csak a q kg/m terhelést kell az M nyomatékkal arányosnak venni, amidőn H alkalmas megválasztásával elérhetjük, hogy

$$\frac{M}{IE} = \frac{q}{H} \quad (4)$$

Ezen egyenletből következik, hogy a rugalmas vonal egyike azon kötélgörbének, melyet bizonyos terhelést ábrázoló felülethez olyképpen lehet megszerkeszteni, hogy az ordináták minden helyen arányosak legyenek a megfelelő nyomatékkal. Csak még az alátámasztások által megszabott feltételeket kell figyelembe venni, hogy a kötélgörbe a rugalmas vonalat teljesen fódje. Az előzők alapján ismerünk olyan terhelést ábrázoló felületet, amelynek ordinátái a nyomatékkal arányosak, ez a nyomaték-terület.

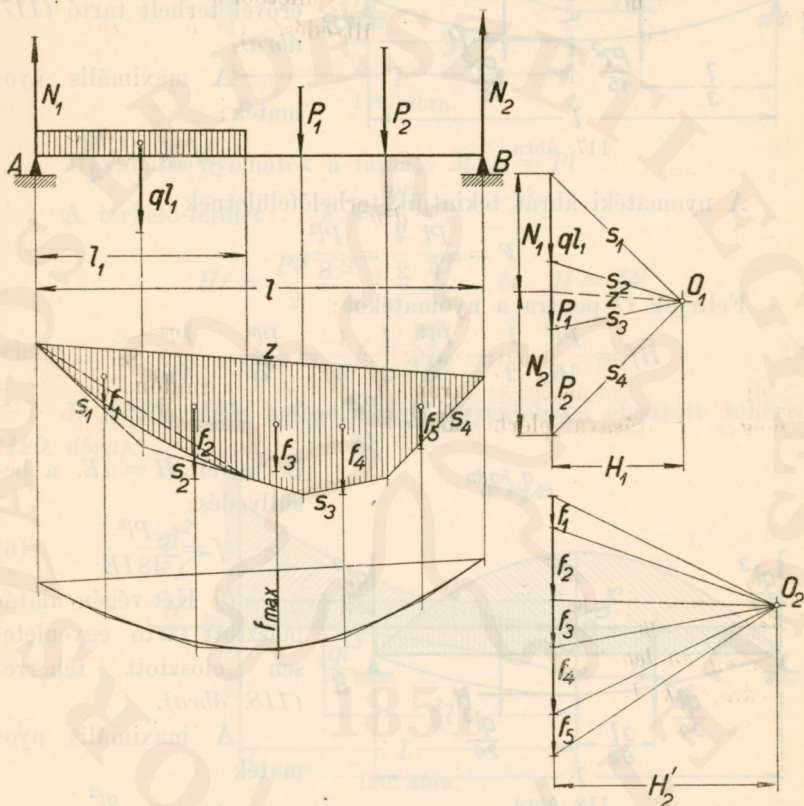
A rugalmas vonal megszerkesztése ezek alapján a következőképpen történik: Elsősorban megszerkesztjük a tényleges terheléseknek megfelelő nyomatéki ábrát (116. ábra). A H_1 pólustávolságot, a kötélfeszültségből eredő horizontális erőhatásnak megfelelőleg, erőléptékben választjuk meg. A nyomaték bármely helyen $M = H_1 \cdot u$, ahol u a metszet alatti ordináta hosszléptékben leolvasva.

Tekintsük e nyomatéki ábrát valamely kötélgörbe terhelő felületének, amelynek pólustávolságát H_2 -vel jelöljük.

A (4) egyenlet alapján, ha $M = H_1 \cdot u$ és $H = H_2$, továbbá $q = u$, kapjuk, hogy

$$\frac{H_1 u}{IE} = \frac{u}{H_2}$$

azaz:
$$H_2 = \frac{IE}{H_1} = \frac{I(\text{cm}^4) \cdot E(\text{kg/cm}^2)}{H_1(\text{kg})} = \frac{IE}{H_1} \text{ cm}^2 \quad (5)$$

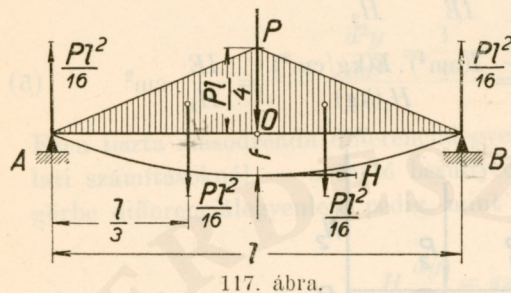


116. ábra.

Az (5) alatti egyenlet értelmében H_2 egy felületet jelent, mert a terhek, melyekből a kötélgörbét szerkesztjük, területekkel vannak kifejezve. Ha az így meghatározott H_2 segítségével rajzolnók meg a második kötélgörbét, a besüllyedések igen csekélyek volnának, azért is bizonyos torzítással tüntetjük fel: $H'_2 = \frac{H_2}{100}$ pólustávolsággal, így a besüllyedést százszoros nagyításban kapjuk.

A második kötélgörbe a rugalmas vonalat ábrázolja és legnagyobb ordinátája a tartó legnagyobb besüllyedését adja.

A következőkben néhány terhelés mellett megállapítjuk a besüllyedést a kötélgörbe segítségével.



117. ábra.

a) Két végén alátámasztott, koncentrált erővel terhelt tartó (117. ábra).

A maximális nyomaték:

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4}$$

A nyomatéki ábrát tekintjük terhelőfelületnek:

$$F = \frac{Pl}{4} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl^2}{8}$$

Felírjuk O pontra a nyomatékot:

$$Hf = \frac{Pl^2}{16} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Pl^2}{16} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{Pl^3}{32} - \frac{Pl^3}{96}$$

$$Hf = \frac{Pl^3}{48}$$

$q \text{ kg/m}$

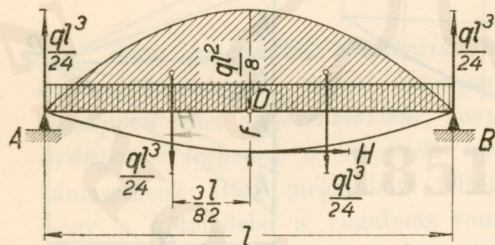
és mivel $H = IE$, a besüllyedés:

$$f = \frac{Pl^3}{48IE} \quad (6)$$

b) Két végén alátámasztott tartó egyenletesen elosztott teherrel (118. ábra).

A maximális nyomaték:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$$



118. ábra.

A nyomatéki ábra lesz a terhelőfelület:

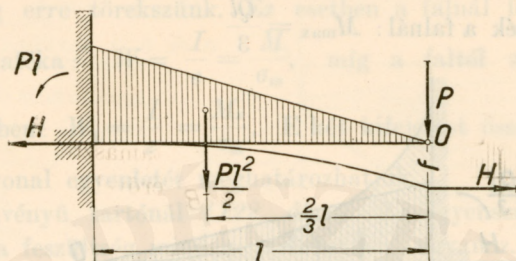
$$F = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{ql^3}{12}$$

Felírva a nyomatékot O pontra:

$$Hf = \frac{ql^3}{24} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql^3}{24} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{ql^4}{48} - \frac{3ql^4}{384}$$

$$Hf = \frac{5}{384} ql^4 \quad \text{és} \quad f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{IE} \quad (7)$$

c) Egyik végén befogott tartó szabad végén koncentrált teherrel (119. ábra).



119. ábra.

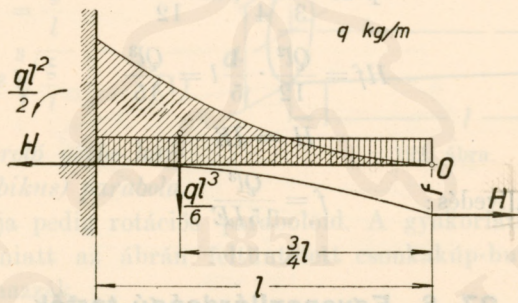
Maximális nyomaték a falnál: $M_{\max} = Pl$

A terhelő-felület: $F = \frac{Pl^2}{2}$

$$Hf = \frac{Pl^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{Pl^3}{3} \quad \text{és} \quad H = IE$$

tehát: $f = \frac{Pl^3}{3IE}$ (8)

d) Egyik végén befogott tartó egyenletesen elosztott teherrel (120. ábra).



120. ábra.

A maximális nyomaték a falnál: $M_{\max} = \frac{ql^2}{2}$

A nyomatéki ábra lesz a terhelő-felület:

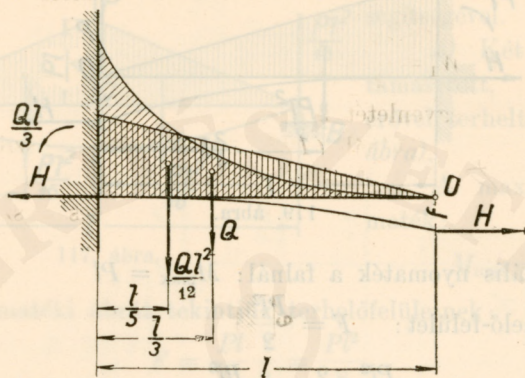
$$F = \frac{ql^2}{2} l \cdot \frac{1}{3} = \frac{ql^3}{6}$$

$$Hf = \frac{ql^3}{6} \cdot \frac{3}{4} l = \frac{ql^4}{8}$$

ahonnan a besüllyedés a tartó végén: $f = \frac{ql^4}{8IE}$ (9)

e) Egyik végén befogott tartó háromszögszerűen elosztott teherrel (121. ábra).

$$\text{Nyomaték a falnál: } M_{\max} = \frac{Ql}{3}$$



121. ábra.

Terhelő-felület a nyomatéki ábra, amely egy harmadfokú parabola által bezárt terület:

$$F = \frac{Ql}{3} \cdot \frac{1}{4} l = \frac{Ql^2}{12}$$

és tovább:

$$Hf = \frac{Ql^2}{12} \cdot \frac{4}{5} l = \frac{Ql^3}{15}$$

$$H = IE$$

tehát a besüllyedés:

$$f = \frac{Ql^3}{15IE} \quad (10)$$

27. §. Egyenszilárdságú tartók.

A tartót akkor nevezzük egyenletes szilárdságúnak, ha minden szelvényében ugyanazon maximális feszültség lép fel. Ámde, mivel ezen kifejezésben $M = W \cdot \sigma_m$, az M nyomaték változhat, világos, hogy W is változó lesz, ha σ_m állandó. Ennélfogva az egyes szelvények méretei különbözők lesznek, aszerint, hogy milyen távolságra vannak a befogott, vagy alátámasztott szelvénytől.

Az egyenszilárdságú tartó minden egyes szelvényében a biztonság ugyanaz.

a) Egyik végén befogott tartó koncentrált teherrel.

A következőkben azon esetet vesszük figyelembe, midőn $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_m$, tehát a szelvény alkalmas, miután a gyakorlatban úgyis mindig erre törekszünk. Ez esetben a falnál levő szelvény ellenállónyomatéka: $W = \frac{I}{e} = \frac{M}{\sigma_m}$, míg a faltól x távolságra levő szelvényben: $W_1 = \frac{I}{z} = \frac{M_x}{\sigma_m}$. E két kifejezést összehasonlítva, a szegélyző vonal egyenletét meghatározhatjuk.

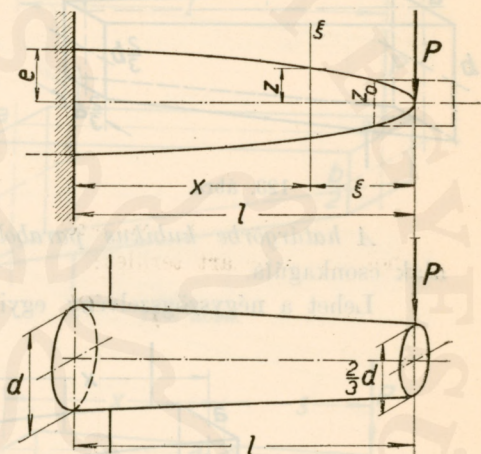
Körszelvényű tartónál (122. ábra). Az egyenszilárdság feltevése, hogy a feszültség minden szelvényben ugyanaz. Felírjuk a feszültséget a befogás szelvényében és tetszőleges ξ szelvényben s ezeket egymással egyenlővé tesszük; az egyenletből a határoló görbe már meghatározható:

$$\sigma_m = \frac{Pl}{\frac{e^3 \pi}{4}} = \frac{P(l-x)}{\frac{z^3 \pi}{4}} = \frac{P\xi}{\frac{z^3 \pi}{4}}$$

$$\text{ahonnan: } \frac{l}{e^3} = \frac{\xi}{z^3}$$

$$\frac{z^3}{e^3} = \frac{\xi}{l}$$

$$\text{és } z = e \sqrt[3]{\frac{\xi}{l}} \quad (1)$$



122. ábra.

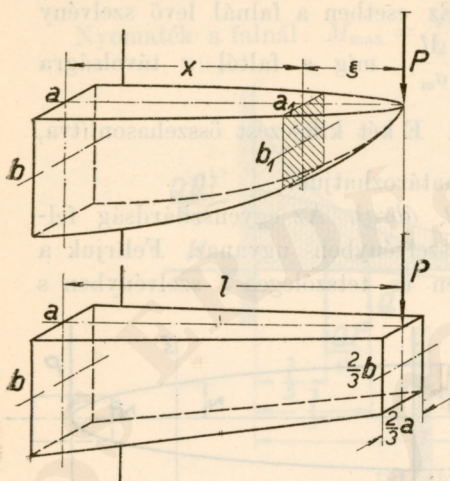
A határoló görbe harmadfokú (kubikus) parabola, a tartó alakja pedig rotációs paraboloid. A gyakorlatban gyártási nehézségek miatt az ábrán feltüntetett csonkakúp-burkolófelületű tartót alkalmazzák.

A tartó számítása úgy történik, hogy a: $W = \frac{M_{\max}}{\sigma_m}$ képletből meghatározzuk a befogott szelvény méreteit, a többi szelvényé pedig (1) alapján nyerhető. A végszelvényt a nyírási igénybevételből kapjuk, a megengedett csúsztató-feszültség $\tau = 0,8 \sigma_m$ és

$$\tau = \frac{zP}{F_0}$$

amely képletből F_0 és ebből z_0 kiszámítható. z tényező körszelvény esetében: $z = 1,4$.

Négyszög-szelvényű tartónál változhatik a négyszög-szelvénynek mindkét, vagy pedig csak egyik oldala. Ha mindkét négyszögoldal változik (123. ábra), tehát a és b is, továbbá:



123. ábra.

$$b = \alpha a$$

$$\text{és} \quad b_1 = \alpha a_1$$

$$\text{akkor:} \quad \sigma_m = \frac{Pl}{\frac{ab^2}{6}} = \frac{P\xi}{\frac{a_1 b_1^2}{6}}$$

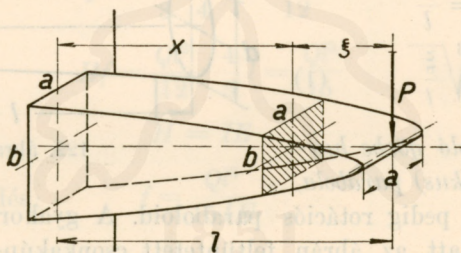
ahonnan:

$$\frac{l}{\alpha a^2 a^2} = \frac{\xi}{a_1 \alpha^2 a_1^2} \text{ azaz } \frac{l}{a^3} = \frac{\xi}{a_1^3}$$

$$\frac{a_1^3}{a^3} = \frac{\xi}{l} \quad \text{és} \quad a_1 = a \sqrt[3]{\frac{\xi}{l}} \quad (2)$$

A határgörbe *kubikus parabola*, a gyakorlatban alkalmazott alak csongúla.

Lehet a négyszög-szelvény egyik mérete állandó. Ha a tartó



124. ábra.

szélessége, tehát a mérete állandó, alakját a 124. és 125. ábrák tüntetik fel. Utóbbi a gyakoribb, ez az ún. konzoltartó.

$$\sigma_m = \frac{Pl}{\frac{ab^2}{6}} = \frac{P\xi}{\frac{ab_1^2}{6}}$$

ahonnan:

$$\frac{b_1^2}{b^2} = \frac{\xi}{l}$$

és

$$b_1 = b \sqrt{\frac{\xi}{l}}$$

A burkoló görbe másodfokú (közönséges) parabola. A konzoltartót a gyakorlatban a 125. ábrán feltüntetett csongagúlával lehet helyettesíteni.

Ha a tartó szélessége változó és a magassága, tehát b mérete állandó, akkor (126. ábra):

$$\sigma_m = \frac{Pl}{ab^2} = \frac{P\xi}{a_1b^2}$$

ahonnan:

$$\frac{\xi}{l} = \frac{a_1}{a}$$

$$\text{és} \quad a_1 = a \frac{\xi}{l} \quad (4)$$

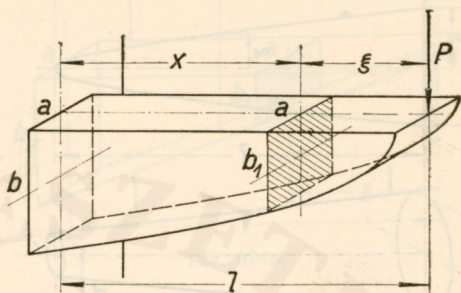
azaz a_1 változása lineáris lesz.

A végszelvényt ezen tartóknál is a nyíróigénybevétel alapján méretezzük.

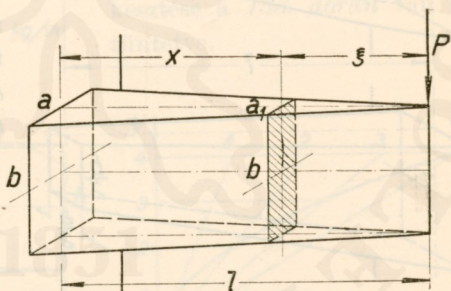
b) Egyik végén befogott tartó egyenletesen elosztott teherrel. A folyóméterenkénti terhelés q kg, a tartó hossza l méter,

a falnál keletkező maximális nyomaték: $M_{\max} = \frac{ql^2}{2}$, a nyomaték tetszőleges szelvényben $M_\xi = \frac{q\xi^2}{2}$.

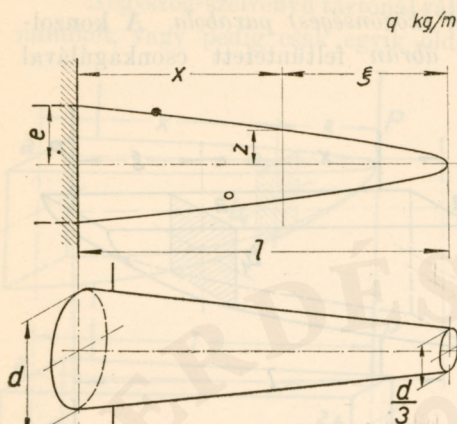
A számítás menete ugyanaz, mint koncentrált erővel terhelt tartónál. A végszelvény elosztott terhelésnél tényleg zéró lehet, mert a tartó végén erőhatás nincs, így nyíróigénybevétel sem forog fenn.



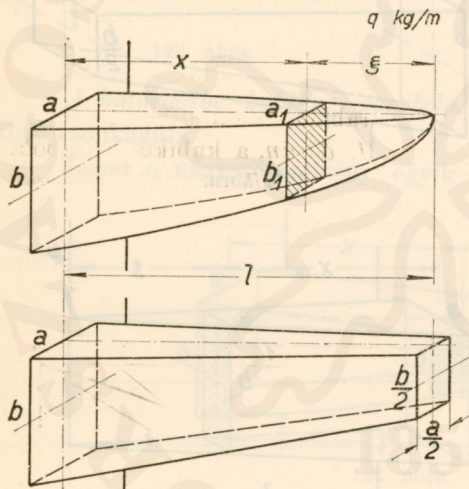
125. ábra.



126. ábra.



127. ábra.



128. ábra.

Körshellvényű tartónál
(127. ábra)

$$\sigma_m = \frac{\frac{ql^2}{2}}{\frac{e^3\pi}{4}} = \frac{\frac{q\xi^2}{2}}{\frac{z^3\pi}{4}}$$

$$\frac{z^3}{e^3} = \frac{\xi^2}{l^2}$$

ahonnan: $z = e \sqrt{\left(\frac{\xi}{l}\right)^2}$ (5)

A határoló görbe egy szemikubikus parabola, a tartó alakja pedig rotációs paraboloid. A gyakorlatban e tartót csónakakúpnak készítik, az ábrán feltüntetett méretekkel.

Négyszögshellvényű tartónál, ha a négyszögshellvény alapja is, magassága is változik (128. ábra), de az $\frac{a}{b}$ viszony állandó:

$$a = ab \quad \text{és} \quad a_1 = ab_1$$

$$\sigma_m = \frac{\frac{ql^2}{2}}{\frac{ab^2}{6}} = \frac{\frac{q\xi^2}{2}}{\frac{a_1b_1^2}{6}}$$

$$\frac{l^2}{abb^2} = \frac{\xi^2}{ab_1b_1^2}$$

$$\frac{l^2}{b^3} = \frac{\xi^2}{b_1^3}; \quad \frac{b_1^3}{b^3} = \frac{\xi^2}{l^2}$$

és $b_1 = b \sqrt[3]{\left(\frac{\xi}{l}\right)^2}$ (6)

A határoló görbe szemikubikus parabola, a gyakorlatban használt tartóalak pedig csónakagúla.

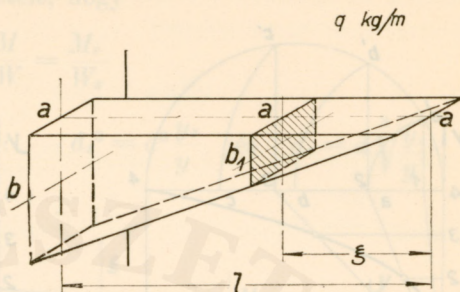
Lehet a négyszögszelvény egyik mérete állandó. Ha a tartó szélessége, tehát a mérete állandó (129. ábra), akkor:

$$\sigma_m = \frac{\frac{ql^2}{2}}{\frac{ab^2}{6}} = \frac{\frac{q\xi^2}{2}}{\frac{ab_1^2}{6}}$$

azaz:

$$\frac{l^2}{b^2} = \frac{\xi^2}{b_1^2}$$

$$\text{és } b_1 = b \frac{\xi}{l} \quad (7)$$



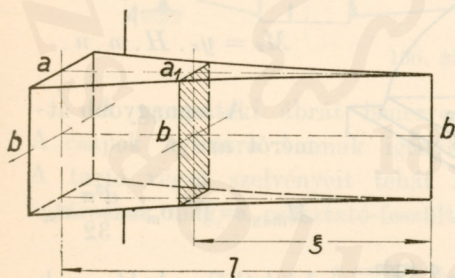
129. ábra.

Ha pedig a tartó magassága, tehát b mérete állandó (130. ábra),

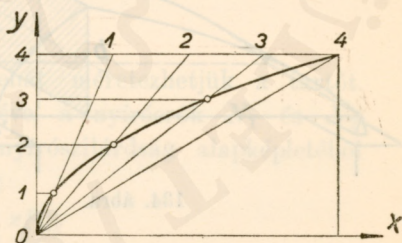
$$\text{akkor: } \sigma_m = \frac{\frac{ql^2}{2}}{\frac{ab^2}{6}} = \frac{\frac{q\xi^2}{2}}{\frac{a_1b^2}{6}} \quad \text{azaz} \quad \frac{l^2}{a} = \frac{\xi^2}{a_1} \quad \text{és} \quad a_1 = a \left(\frac{\xi}{l} \right)^2 \quad (8)$$

Az egyenszilárdságú tartók parabola- határgörbéi közül a közönséges parabola szerkesztése a 131. ábrán, a kubikus parabola szerkesztése a 132. ábrán és szemikubikus (Neil-féle) parabola szerkesztése a 133. ábrán van feltüntetve.

$q \text{ kg/m}$



130. ábra.



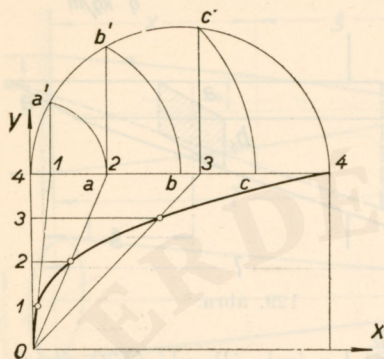
131. ábra.

c) Két végén alátámasztott egyenszilárdságú tartó.

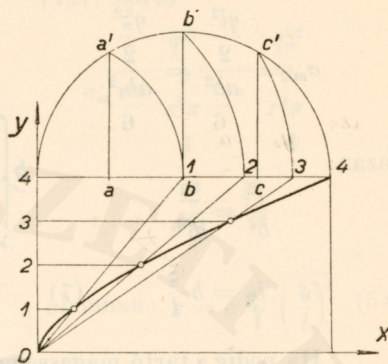
Négyszögszelvényű tartónál, ha a szélesség (a méret) állandó, koncentrált erő esetében az egyenszilárdságú alakot a 134. ábra, egyenletesen elosztott terhelés mellett pedig a 135. ábra tünteti fel.

Az alátámasztásnál fellépő nyíróerők miatt, az egyenszilárdságú tartót a 135. ábra jobboldalán feltüntetett alakúra készítik.

Körszelvényű, két végén alátámasztott egyenszilárdságú tartóknál a határoló görbék, harmadfokú parabolák. A gyakorlatban



132. ábra.



133. ábra.

itt is a megfelelő burkoló testet készítik el. Ez az eset fordul elő gyakran a tengelyeknél.

A tartó kiszámítása a következőképpen történik: meghatározzuk a veszélyes szelvényben a nyomatékokat:

$M_{\max} = y_{\max} \cdot H \cdot m \cdot n$, ahol $y_{\max}$ a nyomatéki ábra maximális ordinátája, H a pólustávolság, m a rajzlépték és n az erőlépték. Tetszőleges ξ szelvényben a nyomaték (136. ábra):

$$M_x = y_x \cdot H \cdot m \cdot n.$$

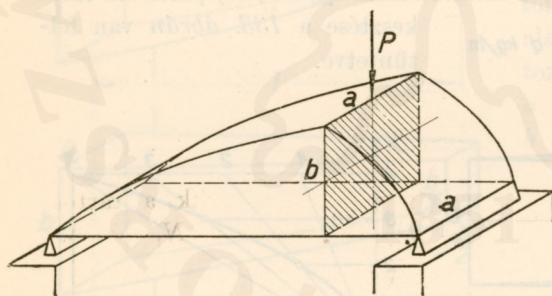
A legnagyobb átmérőt az:

$$M_{\max} = W \cdot \sigma_m = \frac{d^3 \pi}{32} \sigma_m$$

képletből határozzuk meg, ahol kovácsoltvasnál $\sigma_m \sim 500 \text{ kg/cm}^2$. Tetszőleges ξ szelvényben pedig az átmérőt az

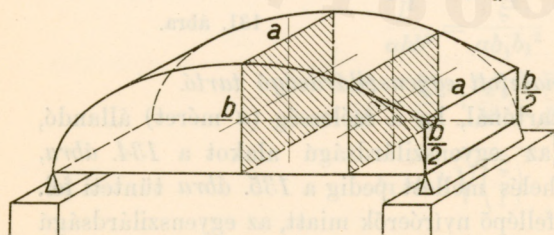
$$M_x = W_x \cdot \sigma_m = \frac{d_x^3 \pi}{32} \sigma_m$$

képletből nyerjük.



134. ábra.

$q \text{ kg/m}$

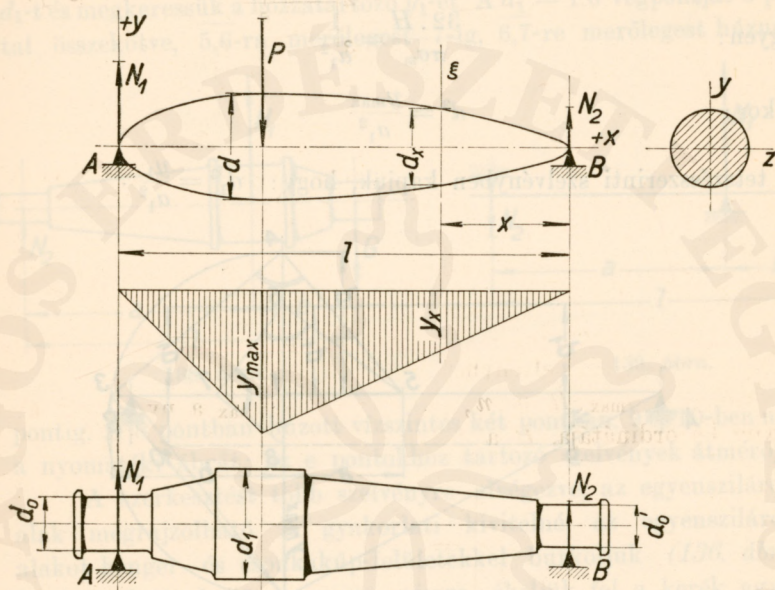


135. ábra.

Az egyenszilárdság feltétele, hogy

$$\sigma_m = \frac{M}{W} = \frac{M_x}{W_x}$$

azaz: $\frac{y}{y_x} = \frac{d^3}{d_x^3}$ ahonnan: $d_x^3 = d^3 \frac{y_x}{y}$ és $d_x = d \sqrt[3]{\frac{y_x}{y}}$.



136. ábra.

A nyomatéki ábrát ismerve tehát méretezhetjük a tartót. A csapok nyírásra vannak igénybevéve, a nyíróerők N_1 és N_2 . A tartó végső szelvényeit tehát a nyírószilárdság alapképletéből határozzuk meg, a csúsztató-feszültség:

$$\tau = 0,8 \sigma_m = \frac{z P_{ny}}{F_0}$$

ahol P_{ny} a nyíróerő és z a szelvény alakjától függő tényező, kör-szelvényenél $z = 1,4$ és négyszögszelvényenél, ha a nyíróerő a hosszabb négyszögoldallal parallel: $z = 1,5$. A σ_m ismeretes, tehát F_0 kiszámítható, ebből pedig d_0 . Ha a csap hosszabb, pl. homlokcsapnál, akkor a hajlító-igénybevételből határozzuk meg F_0 illetve d_0 értékét.

Az egyenszilárdságú alak megszerkesztése a 137. ábra szerint történik (grafikus megoldás). Felrajzoljuk a tengely hosszát lép-tékben ($\overline{AB}$) és erre a redukált nyomatéki ábrát ($A2B$). Kiszá-

mítjuk az átmérőt a veszélyes szelvényben, mint állandó szelvényű prizmatikus tartó méretét:

$$M_{\max} = y_{\max} \cdot H = \frac{d^3 \pi}{32} \sigma_m$$

ahonnan:

$$d^3 = \frac{y_{\max} \cdot H \cdot 32}{\pi \sigma_m}$$

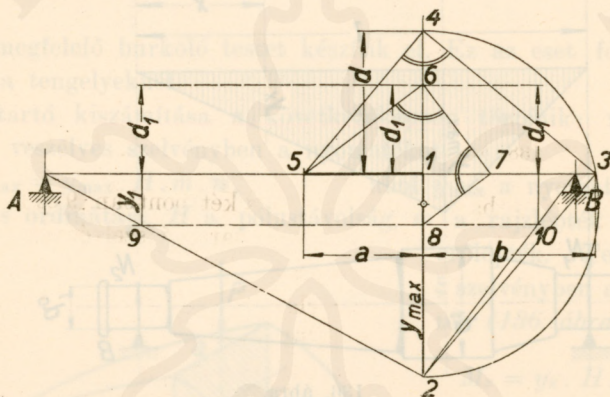
legyen:

$$\frac{32 \cdot H}{\pi \sigma_m} = \frac{1}{a_1^2}$$

akkor:

$$d^3 = \frac{y_{\max}}{a_1^2}$$

és tetszésszerinti szelvényben kapjuk, hogy: $d_1^3 = \frac{y_1}{a_1^2}$.



137. ábra.

A kiszámított d értékét választott léptékben felmérjük az $y_{\max}$ ordinátájára a vízszintestől fölfelé és az $\frac{y_{\max} + d}{2}$ távolsággal, mint rádiusszal félkört rajzolunk a $\overline{2,4}$ átmérő fölé. Így a 3 pontot illetve az $\overline{1,3} = b$ távolságot nyerjük, melyre érvényes, hogy:

$$b^2 = d \cdot y_{\max} \quad (1)$$

Azután a $\overline{3,4}$ -re 4 pontban merőlegest emelve az 5 pontot, illetve az $\overline{1,5} = a$ távolságot kapjuk és ez az a_1 reciprok értéke:

$$\frac{1}{a_1^2} = a^2$$

De továbbá: $d^2 = ab$ ahonnan: $b = \frac{d^2}{a}$

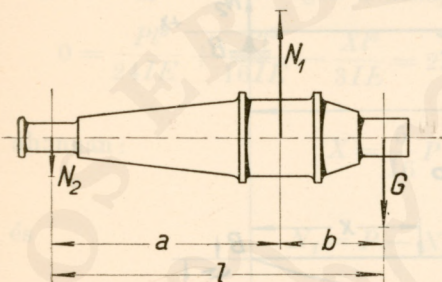
amit (1)-be téve:

$$\frac{d^4}{a^2} = dy_{\max}$$

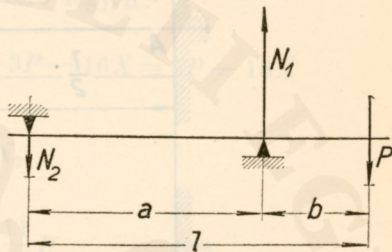
$$\frac{d^3}{a^2} = y_{\max}$$

$$\text{és} \quad \frac{d_1^3}{a^2} = y_1 = d_1^3 a_1^2$$

Ezek alapján a további szerkesztés a következő. Felvesszünk tetszőleges d_1 -t és megkeressük a hozzá tartozó y_1 -et. A $d_1 = 1.6$ végpontját 5 ponttal összekötve, 5,6-ra merőlegest 7-ig, 6,7-re merőlegest húzunk 8



138. ábra.



139. ábra.

pontig. A 8 pontban húzott vízszintes két pontban, 9 és 10-ben metszi a nyomatékai ábrát; az e pontokhoz tartozó szelvények átmérője d_1 .

A szerkesztést több szelvényre elvégezve, az egyenszilárdságú alak megrajzolható. A gyakorlati kivitelnél az egyenszilárdságú alakot henger- és csónkakúp-felületekkel burkoljuk (136. ábra), a középső d átmérőjű hengeres részre ékeljük fel a kerék agyát, a csapok pedig csapágyakban forognak.

Ugyancsak egyenszilárdságú kiképezésűek az ú. n. szabadon hordozó tengelyek (138. ábra), amelyeknél a terhelési séma a 139. ábrában van feltüntetve.

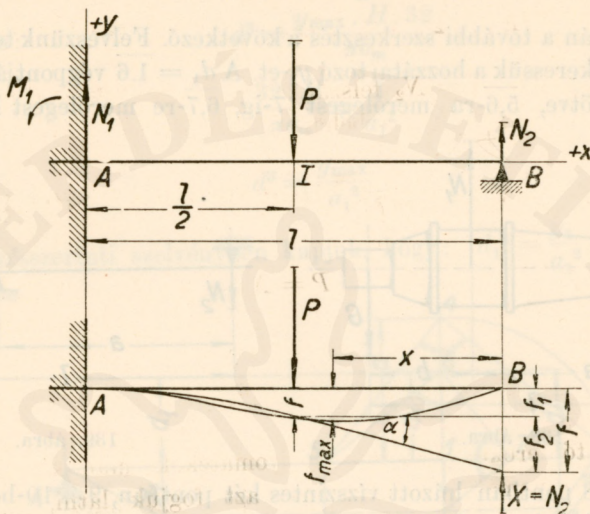
$N_1 - N_2 = G$. A csapágyakban a nyomás N_1 és N_2 , a kerék súlya G . Itt a tengely nem forog. Ilyenek pl. a csille-tengelyek.

28. §. Hajlításra igénybevett, sztatikailag határozatlan tartók számítása.

Sztatikailag határozatlan a tartó akkor, ha a felszabadított testre működő összes erők egyensúlyi egyenleteiből a felszabadító erők és nyomatékok nem határozhatók meg. *A sztatikailag határozatlan tartók esetében csakis a besüllyedési viszonyok vizsgálata alapján lehet a felszabadító erőket és nyomatékokat meghatározni.*

Egyik végén befogott, másik végén alátámasztott, koncentrált erővel terhelt tartó.

a) A P erő a tartó közepén működik (140. ábra). A nyomatéki ábra és a nyírőerők ábrájának megszerkesztése a 85. ábrán van feltüntetve. Ahol a pozitív nyomatéki terület átmegy a negatívba,



140. ábra.

ott a tartó rugalmas vonalának inflexiója van, a rugalmas vonal domborúból a homorúba megy át. A rugalmas vonal egyenletéből:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{IE} = \pm \frac{d^2y}{dx^2}$$

Az $y = f(x)$ görbének ott van inflexiója, ahol: $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, ami csak

úgy lehetséges, ha $M = 0$. Azon szelvényben tehát, melyben a rugalmas vonalnak inflexiós pontja van, a nyomaték zéró. A nyomatéki ábrából látható az is, hogy a befogás kisebbiti a nyomatékterületet.

Ismeretlen értékek: N_1 , N_2 és M_1 . A sztatikai alapegyenletek, minthogy síkbeli és párhuzamos erőkéről van szó:

$$\sum P_y = 0 \quad N_1 + N_2 - P = 0$$

$$\sum P_x = 0 \quad M_{\text{fal}} = N_2 l - P \frac{l}{2} = M_1$$

A két egyenletből a három ismeretlen nem határozható meg. Ha a rugalmas vonal egyenletét vennők harmadik egyenletnek, a feladat már sztatikailag határozottá válna.

A *Castigliano—Maxwell*-teóriával a feladat megoldása a következő. A tartót egyik végén befogott tartónak tekintjük, mely közepén P erővel van megterhelve. A behajlás ekkor két részből áll:

$$f = f_1 + f_2 = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3IE} + \frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{Pl^3}{24IE} + \frac{l}{2} \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2IE} = \frac{Pl^3}{24IE} + \frac{Pl^3}{16IE}$$

Most az ismeretlen $X = N_2$ felszabadító erőt működtetjük a tartó végére, hogy a tartó végén a behajlás zéró legyen:

$$0 = \frac{Pl^3}{24IE} + \frac{Pl^3}{16IE} - \frac{Xl^3}{3IE} = 2P + 3P - 16X = 5P - 16X$$

ahonnan:
$$X = \frac{5}{16} P = N_2$$

és
$$N_1 = P - N_2 = \frac{11}{16} P$$

A felszabadító erőket ismerve, a nyomatékok már kifejezhetők. A maximális nyomaték számításánál azt fogjuk látni, hogy itt kétféle maximális nyomaték van. *A relatív maximális nyomaték, mely alatt — a befogott szelvény figyelembevétele nélkül — a tartó valamely szelvényében fellépő maximális nyomatékot értjük és az abszolút maximális nyomaték, amelynél már a befogott szelvényt is figyelembe vesszük.*

Jelen esetben a falnál keletkező nyomaték:

$$M_f = N_2 l - P \frac{l}{2} = \frac{5}{16} Pl - \frac{8}{16} Pl = -\frac{3}{16} Pl$$

Az I szelvényben keletkező nyomaték, *a relatív maximális nyomaték:*

$$M_I = \frac{5}{16} P \frac{l}{2} = \frac{5}{32} Pl.$$

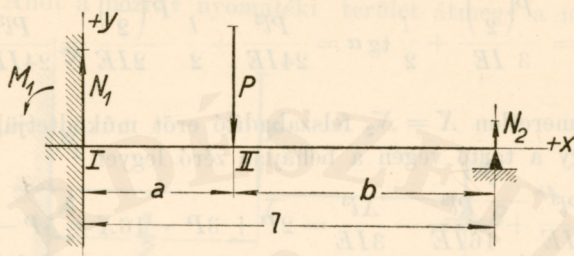
Mint hogy azonban $M_f > M_I$, tehát *az abszolút maximális nyomaték a falnál lép fel*, itt a veszélyes szelvény, s a tartót M_f nyomatékokra méretezzük.

A rugalmas vonal behajlása a középen: $f = \frac{7}{768} \frac{Pl^3}{IE}$ és a

maximális besültyedés $f_{\max} = \sqrt{\frac{1}{5}} \frac{Pl^3}{48IE}$; $x = l \sqrt{\frac{1}{5}}$ mellett.

b) A P erő nem a tartó közepén működik (141. ábra).

A felszabadító erőket a *Castigliano—Maxwell*-teóriával határozzuk meg; a tartót egy végén befogottnak tekintve oly N_2 erőt működtetünk a szabad végén, hogy itt a besüllyedés 0 legyen.



141. ábra.

Tehát:

$$\frac{Pa^3}{3IE} + b \frac{Pa^2}{2IE} - N_2 \frac{l^3}{3IE} = 0$$

$$\frac{Pa^3}{3} + \frac{Pa^2b}{2} = N_2 \frac{l^3}{3}$$

$$2Pa^3 + 3Pa^2b = 2N_2l^3$$

ahonnan:

$$N_2 = \frac{Pa^2(2a + 3b)}{2l^3}$$

vagy mivel $2a + 3b = 2l$

$$N_2 = \frac{Pa^2(2l + b)}{2l^3} \quad \text{és} \quad N_1 = P - N_2$$

A felszabadító erőket ismerve, kifejezzük a nyomatékokat:

$$M_I = N_2l - Pa \quad \text{és} \quad M_{II} = N_2b$$

Az M_I és M_{II} közül a nagyobb lesz az abszolút maximális nyomaték, erre méretezzük a tartót. $M_{\max}^{\text{abs}} = W \cdot \sigma_m$.

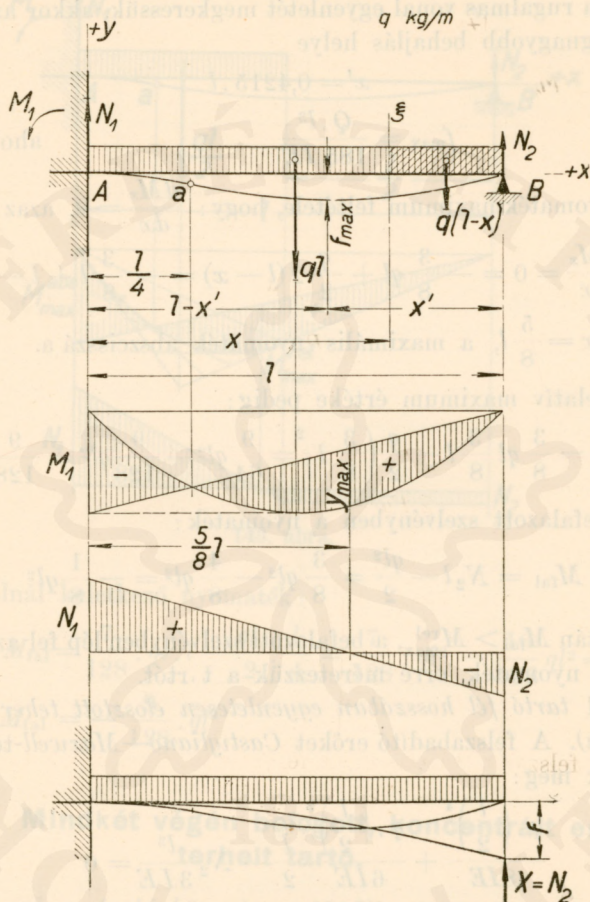
29. §. Egyik végén befogott, másik végén alátámasztott tartó egyenletesen elosztott teherrel.

a) *Egész hosszában egyenletesen elosztott a teher* (142. ábra).

A felszabadító erőket a *Castigliano—Maxwell*-teóriával határozzuk meg. Eltekintünk az alátámasztástól, ekkor az egyik végén befalazott tartó szabad végén a besüllyedés értéke f ; majd meghatározzuk azt az $X = N_2$ erőt, mely a tartó szabad végén működtetve

ugyanilyen, de ellenkező irányú f besüllyedést okoz. Alátámasztás nélkül a besüllyedés, ha a folyóméterenkénti teher q^N kg:

$$f = \frac{q l^4}{8 IE}$$



142. ábra.

míg a tartó szabad végén működő $X = N_2$ koncentrált erő-okozta besüllyedés: $f' = \frac{N_2 l^3}{3 IE}$.

A mondottak értelmében $f = f'$; tehát:

$$\frac{q \cdot l^4}{8 IE} - \frac{N_2 l^3}{3 IE} = 0 \quad \text{ahonnan:}$$

$N_2 = \frac{3}{8} q \cdot l$ és $N_1 = ql - \frac{3}{8} ql = \frac{5}{8} ql$ a felszabadító erők. Most

már a nyomaték is kifejezhető. Tetszőleges ξ szelvényben a nyomaték:

$$M_x = \frac{3}{8}ql(l-x) - \frac{q}{2}(l-x)^2$$

Ha a rugalmas vonal egyenletét megkeressük, akkor azt kapjuk, hogy a legnagyobb behajlás helye

$$x' = 0,4215 \cdot l$$

és

$$f_{\max} = \frac{Q \cdot l^3}{185 IE} \quad \text{ahol } Q = q \cdot l$$

A nyomatékmaximum feltétele, hogy: $\frac{dM_x}{dx} = 0$, azaz

$$\frac{dM_x}{dx} = 0 = -\frac{3}{8}ql + \frac{q}{2}2(l-x) = -\frac{3}{8}l + l - x$$

ahonnan $x = \frac{5}{8}l$, a maximális nyomaték abszcisszája.

A relatív maximum értéke pedig:

$$M_{\max}^{\text{rel}} = \frac{3}{8}ql \cdot \frac{3}{8}l - \frac{q}{2} \left(\frac{3}{8}l \right)^2 = \frac{9}{64}ql^2 - \frac{9}{128}ql^2 = \frac{9}{128}ql^2$$

A befalazott szelvényben a nyomaték:

$$M_{\text{fal}} = N_2 l - \frac{ql^2}{2} = \frac{3}{8}ql^2 - \frac{4}{8}ql^2 = -\frac{1}{8}ql^2$$

Miután $M_{\text{fal}} > M_{\max}^{\text{rel}}$, a befalazott szelvényben lép fel az abszolút maximális nyomaték, erre méretezzük a tartót.

b) A tartó fél hosszában egyenletesen elosztott teher működik (143. ábra). A felszabadító erőket Castigliano—Maxwell-teóriájával határozzuk meg:

$$\frac{q \cdot \left(\frac{l}{2} \right)^4}{8IE} + \frac{q \cdot \left(\frac{l}{2} \right)^3}{6IE} \cdot \frac{l}{2} - N_2 \frac{l^3}{3IE} = 0$$

$$\frac{ql^4}{128} + \frac{ql^4}{96} = N_2 \frac{l^3}{3}$$

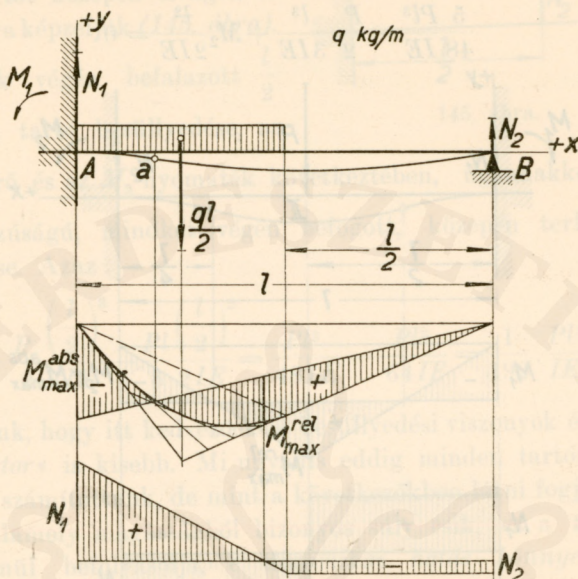
$$\frac{3ql^4}{384} + \frac{4ql^4}{384} = \frac{128}{384} \cdot N_2 l^3$$

$$7ql^4 = 128 N_2 \cdot l^3$$

$$N_2 = \frac{7}{128} \cdot ql$$

$$\text{és } N_1 = \frac{57}{128} \cdot ql$$

A felszabadító erőket ismerve, a nyomatékok tetszésszerű szelvényben már kifejezhetjük.



143. ábra.

A falnál keletkező nyomaték:

$$M_{\text{fal}} = \frac{7}{128} \cdot ql \cdot l - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{7}{128} \cdot ql^2 - \frac{16}{128} ql^2 = M_1$$

$$M_{\text{fal}} = -\frac{9}{128} \cdot ql^2$$

30. §. Mindkét végén befogott, koncentrált erővel terhelt tartó.

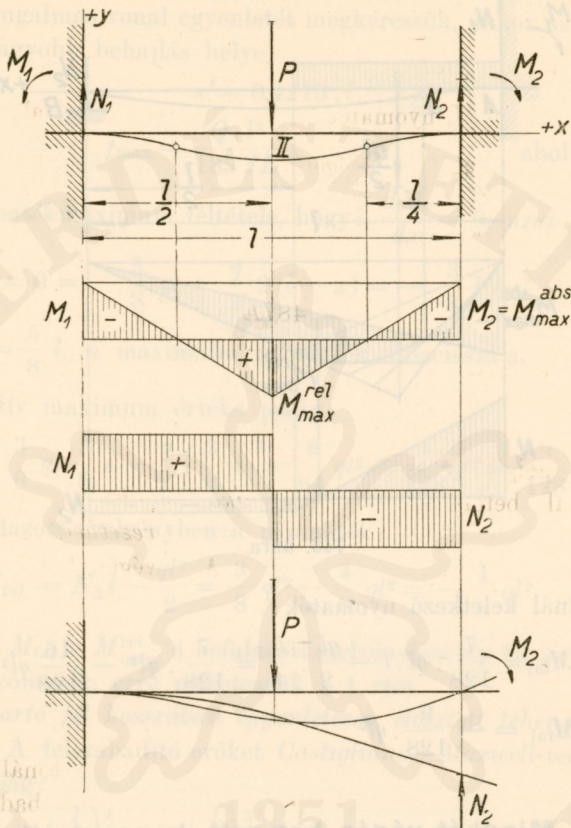
a) P erő a tartó közepén működik (144. ábra). Itt négy ismeretlen van: N_1 , N_2 , M_1 és M_2 . A terhelés szimmetrikus, tehát $N_1 = N_2$ és $M_1 = M_2$, ez megkönnyíti a feladat megoldását. A nyomatéki ábra két helyen megy át pozitívba negatívba, a rugalmas vonalnak tehát két helyen van inflexiós pontja.

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2}$$

A nyomatékokat a Castigliano—Maxwell-teóriával határozzuk meg. Az egyik befogástól eltekintünk és az egyik végén befogott

tartó szabad végén oly N_2 felszabadító erőt és M_2 felszabadító nyomatékot működtetünk, hogy itt a besüllyedés zero legyen. Tehát :

$$\frac{5 Pl^3}{48 IE} - \frac{P}{2} \frac{l^3}{3 IE} + M_2 \frac{l^2}{2 IE} = 0 \quad \text{ahol az}$$



144. ábra.

$N_2 = \frac{P}{2}$ erő által okozott besüllyedés negatív. Az egyenletből M_2 meghatározható :

$$\frac{5}{24} Pl - \frac{Pl}{3} + M_2 = 0 \quad \text{ahonnan :}$$

$$M_2 = \frac{Pl}{3} - \frac{5}{24} Pl = \left| \frac{1}{8} Pl \right| \quad \text{a falnál}$$

keletkező nyomaték. A középén (II. szelvény) a nyomaték:

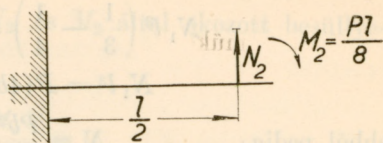
$$M_{II} = \frac{Pl}{4} - \frac{1}{8} Pl = \frac{1}{8} Pl \quad (1)$$

jelen esetben tehát:

$$M_{\max}^{\text{rel}} = M_{\max}^{\text{abs}}$$

Határozzuk meg a besüllyedést. A tartót közepén elvágvá és itt befalazva képzeljük (145. ábra).

Ezen egyik végén befalazott $\frac{l}{2}$ hosszúságú tartó besüllyedése, az

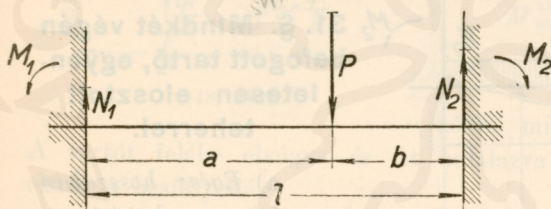


145. ábra.

$N_2 = \frac{P}{2}$ erő és az M_2 nyomaték következtében, ugyanakkora, mint az l hosszúságú, mindkét végén befogott, közepén terhelt tartó besüllyedése. Azaz:

$$f = \frac{P}{2} \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3IE} - \frac{Pl}{8} \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2IE} = \frac{Pl^3}{48IE} - \frac{Pl^3}{64IE} = \frac{1}{192} \frac{Pl^3}{IE} \quad (2)$$

Látjuk, hogy itt kedvezőek a besüllyedési viszonyok és a »dinamikus faktor« is kisebb. Mi ugyanis eddig minden tartót sztatikai terhelésre számítottunk, de mint a következőkben látni fogjuk, ha egy tartóra valamely magasságból bizonyos súly esik, ez a teherbírást kedvezőtlenül befolyásolja, e dinamikai hatás könnyen törésre



146. ábra.

vezethet. A mindkét végén befalazott tartó a dinamikai hatásoknak jobban ellenáll.

b) P erő nem a tartó közepén működik (146. ábra). Az ábrázolt tartónál az egyik

befogást helyettesítjük M_1 nyomatékkal és N_1 felszabadító erővel. A besüllyedés:

$$f = N_1 \frac{l^3}{3IE} - \frac{Pb^3}{3IE} - \frac{Pab^2}{2IE} - \frac{M_1 l^2}{2IE} = 0 \quad \text{és ugyancsak } \operatorname{tg} \alpha = 0$$

$$\text{azaz: } \operatorname{tg} \alpha = N_1 \frac{l^2}{2IE} - \frac{Pb^2}{2IE} - \frac{M_1 l}{IE} = 0$$

$$\frac{N_1 l^2}{2} = \frac{Pb^2}{2} + M_1 l \quad \text{ahonnan: } M_1 = \frac{N_1 l}{2} - \frac{Pb^2}{2l}$$

amely értéket a felső egyenletbe betéve:

$$N_1 \frac{l^3}{3} - \frac{Pb^3}{3} - \frac{Pab^2}{2} - \frac{N_1 l^3}{4} + \frac{Pb^2 l}{4} = 0$$

$$N_1 l^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = P \left(\frac{b^3}{3} + \frac{ab^2}{2} - \frac{b^2 l}{4} \right)$$

$$N_1 l^3 = P(4b^3 + 6ab^2 - 3b^2 l)$$

ebből pedig:

$$N_1 = \frac{Pb^2(4b + 6a - 3l)}{l^3}$$

de:

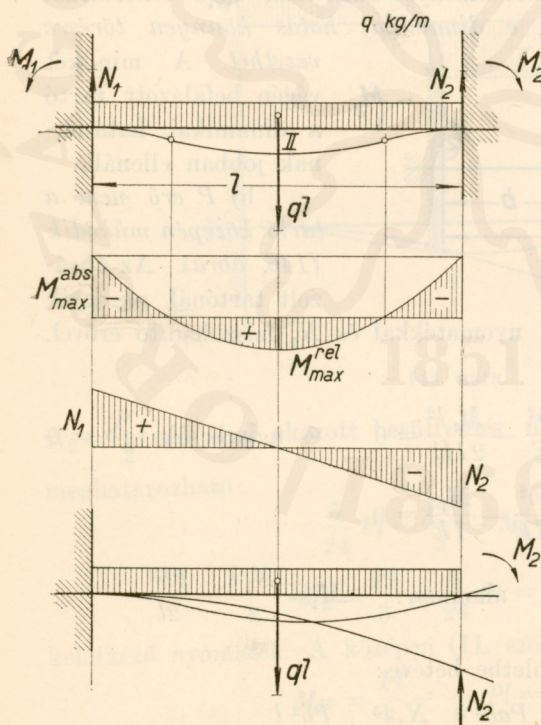
$$l = a + b$$

$$\begin{aligned} \text{és így:} \quad N_1 &= \frac{Pb^2(b + 3a)}{l^3} \quad \text{és} \quad M_1 = P \frac{ab^2}{l^2} \\ \text{Hasonlóképp:} \quad N_2 &= \frac{Pa^2(a + 3b)}{l^3} \quad \text{és} \quad M_2^{\text{abs. max}} = P \frac{a^2 b}{l^2} \end{aligned} \quad (3)$$

Relatív maximális nyomaték a P erő által megtámadott szelvényben lép fel:

$$M_{\text{max}}^{\text{rel}} = \frac{Pab^2(b + 3a)}{l^3} - P \frac{ab^2}{l^2} = \frac{Pab^2(b + 3a - l)}{l^3} = \frac{2Pa^2 b^2}{l^3} \quad (4)$$

$$\text{Ha } a = b = \frac{l}{2}, \text{ akkor } M_{\text{max}}^{\text{rel}} = \frac{1}{8} Pl = M_{\text{max}}^{\text{abs}} \quad (5)$$



147. ábra.

31. §. Mindkét végén befogott tartó, egyenletesen elosztott teherrel.

a) Egész hosszában egyenletesen elosztott a teher (147. ábra). A folyó-méterenkénti teher q kg. Szimmetrikus megterhelés folytán

$$N_1 = N_2 = \frac{q \cdot l}{2}$$

$$\text{és} \quad M_1 = M_2$$

A nyomatékok meghatározása a Castigliano—Maxwell-teóriával történik; a tartót egyik végén befogva képzeljük és úgy

határozzuk meg M_2 -t, hogy a ql , N_2 és M_2 által okozott besüllyedés zéró legyen. Azaz:

$$\frac{ql^4}{8IE} - \frac{\frac{ql}{2}l^3}{3EI} + \frac{M_2 l^2}{2EI} = 0$$

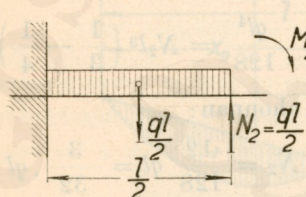
$$\frac{ql^4}{8} - \frac{ql^4}{6} + \frac{M_2 l^2}{2} = 0$$

$$\frac{ql^2}{4} - \frac{ql^2}{3} + M_2 = 0$$

ahonnan: $M_2 = \frac{ql^2}{3} - \frac{ql^2}{4} = \frac{1}{12} ql^2$ a falnál fellépő nyomaték.

A középső szelvényben a nyomaték: $M_{\max}^{\text{rel}} = \frac{1}{24} \cdot ql^2$, ugyanis

$$M_{\Pi} = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{12} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{ql^2}{4} - \frac{ql^2}{12} - \frac{ql^2}{8} = \left| \frac{1}{24} ql^2 \right|$$



148. ábra.

Az abszolút maximális nyomaték tehát a falnál lép fel,

$$M_{\max}^{\text{abs}} = \frac{1}{12} \cdot ql^2 \quad (1)$$

A besüllyedés még kedvezőbb, mint az előző esetekben.

A tartót felébe elvágva és itt befalazva képzeljük (148. ábra), ekkor a besüllyedés:

$$\begin{aligned} f &= -\frac{q \left(\frac{l}{2} \right)^4}{8IE} + \frac{ql \left(\frac{l}{2} \right)^3}{3IE} - \frac{ql^2 \left(\frac{l}{2} \right)^2}{2IE} = \\ &= -\frac{ql^4}{128IE} + \frac{ql^4}{48IE} - \frac{ql^4}{96IE} = \\ &= \frac{-3ql^4 + 8ql^4 - 4ql^4}{384IE} = \frac{1}{384} \cdot \frac{ql^4}{IE} \end{aligned} \quad (2)$$

Ez a besüllyedés ötödrésze annak a besüllyedésnek, amely két szabad alátámasztás esetén keletkezne, egyenletesen elosztott terhelés mellett.

b) A tartó fél hosszában egyenletesen elosztott a teher (149. ábra).

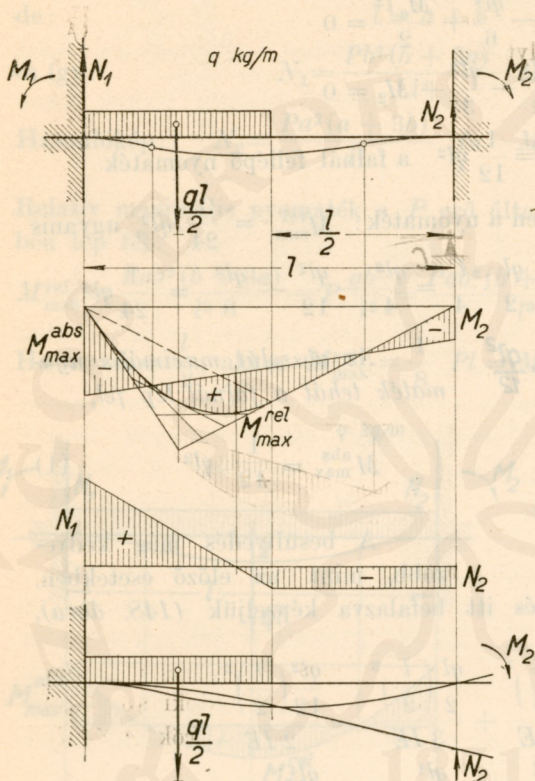
Visszavezetjük ezt a feladatot is egyik végén befogott tartóra. A folyóméterenkénti teher q kg.

$$\text{tg } \alpha = \frac{q \left(\frac{l}{2} \right)^3}{6IE} - \frac{N_2 l^2}{2IE} + \frac{M_2 l}{IE} = 0$$

továbbá:

$$f = \frac{q \left(\frac{l}{2}\right)^4}{8IE} + \frac{l}{2} \frac{q \left(\frac{l}{2}\right)^3}{6IE} - N_2 \frac{l^3}{3IE} + M_2 \frac{l^2}{2IE} = 0$$

$$\frac{ql^4}{128} + \frac{ql^4}{96} - N_2 \frac{l^3}{3} + \frac{M_2 l^2}{2} = 0$$



149. ábra.

de az $M_2 l = \frac{N_2 l^2}{2} - \frac{ql^3}{48}$

a felső egyenletből, amely értéket behelyettesítve az alsóba, kapjuk, hogy

$$-\frac{ql^4}{128} + \frac{ql^4}{96} - N_2 \frac{l^3}{3} + N_2 \frac{l^3}{4} - \frac{ql^4}{96} = 0$$

$$\frac{ql^4}{128} = N_2 l^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$$

ahonnan:

$$N_2 = \frac{12}{128} ql = \frac{3}{32} \cdot ql$$

é. miután $N_1 + N_2 = \frac{ql}{2}$;

$$N_1 = \frac{13}{32} ql$$

Keressük M_2 értékét ismeretes, hogy

$$M_2 l = \frac{N_2 l^2}{2} - \frac{ql^3}{48},$$

ahonnan:

$$M_2 = \frac{N_2 l}{2} - \frac{ql^2}{48} = \frac{3}{64} ql^2 - \frac{ql^2}{48} = \frac{9-4}{192} ql^2 = \left| \frac{5}{192} ql^2 \right|$$

és $M_1^{abs. max} = \frac{ql}{2} \frac{l}{4} - \frac{3}{32} ql^2 + \frac{5}{192} ql^2 = \frac{ql^2}{8} - \frac{3}{32} ql^2 + \frac{5}{192} ql^2 =$

$$= \left| \frac{11}{192} ql^2 \right| \quad (3)$$

A C pontban a nyomaték, ahol $x = l$, maximális értékű

$$M_c = \frac{3}{8} q l^2 - \frac{q l^2}{2} = -\frac{1}{8} q l^2 \quad (1)$$

Az inflexió pontok abszcisszája, miután itt a nyomaték zéró,

$$M_x = 0 = \frac{3}{8} q l x_0 - \frac{q x_0^2}{2} \quad \text{tehát:}$$

$$\frac{3}{8} q l x_0 = \frac{q x_0^2}{2}, \text{ ahonnan } x_0 = \frac{3}{4} l.$$

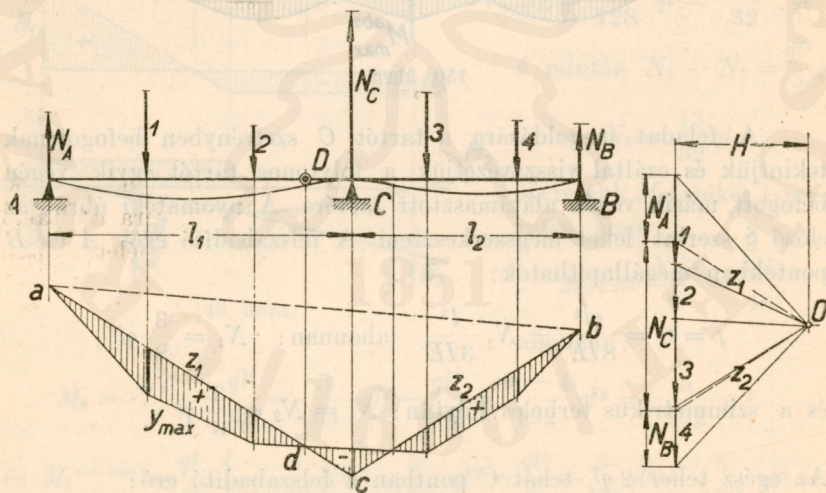
A tartó AD része tekinthető mindkét végén szabadon alátámasztott tartónak amelyre a legnagyobb nyomaték:

$$M_{\max}^{\text{rel}} = \frac{q \frac{3}{4} l \frac{3}{4} l}{8} = \frac{9}{128} q l^2 \quad \text{ez a relatív maximum.} \quad (2)$$

Abszolút maximuma a nyomatéknak a C szelvényben van,

$$\text{erre méretezzük a tartót: } M_{\max}^{\text{abs}} = \frac{q l^2}{8} = W \cdot \sigma_m.$$

Az AB folytonos tartóra a maximális nyomaték tehát, dacára annak, hogy a hossza $2l$, ugyanannyi, mintha az „ l ” hosszúságú tartó két helyen volna szabadon alátámasztva. Miután a szelvény



151. ábra.

mérete a maximális nyomatéktól függ, prizmatikus tartóknál a folytonos tartó előnye éppen az anyagmegtakarításban rejlik.

A maximális nyomaték értéke csak azon esetre érvényes, ha az összes alátámasztó részek ugyanazon síkba esnek.

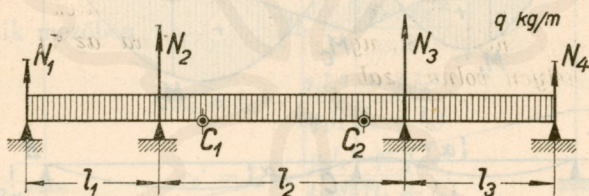
A csuklós többtámaszú gerendatartóknál „ n ” nyílás esetén $(n-1)$ közbelső csuklót alkalmazunk, ezáltal a sztatikailag határozatlan feladatot, sztatikailag határozottá tesszük. Előnye ennek a kéttámaszú tartóval szemben az, hogy nagyobb számú egymás után következő nyílás áthidalásánál kisebb súlyú lehet a tartó. Ipari célokra szolgáló nagyobb épületek mestergerendáinak kiképzésénél alkalmazzák. Egy háromtámaszú csuklós gerendatartó nyomatékai ábrája a 151. ábrán van feltüntetve.

Először a közbelső alátámasztástól eltekintve meghatározzuk a nyomatékai ábrát. A D csukló szelvényében a nyomaték zéró, a d pont meghatározza a z_1 záróvonal helyzetét, ez pedig a z_2 záróvonalét. A felszabadító erők az erőpoligonból az ismeretes módon nyerhetők, a maximális nyomaték pedig:

$$M_{\max} = y_{\max} \cdot H$$

Ahol a rugalmas vonalnak inflexiója van, ott a nyomaték zéró.

Négy alátámasztás mellett (három mező, két csukló) a csuklók elhelyezése a 152. ábra szerint történik (Gerber-tartó).



152. ábra.

A nyomatékai ábra megszerkesztésénél itt is abból indulunk ki, hogy a csuklók szelvényében $M = 0$, mert pl. a C_2 -től balra eső tartórészre jutó összes erők eredője átmegy a csukló elméleti középpontján, tehát a kar $= 0$.

A 153. ábrában három helyen alátámasztott tartó van feltüntetve, mely AC részén q_1 kg/m, CB részén pedig q_2 kg/m terhet hord. A rugalmas vonal érintője a C pontban α szöget zár be a vízszintessel. Ha egyik esetben a BC tartó-darabot befogva képzeljük és az AC tartórészre felírjuk a sztatikai nyomaték egyenletét a C pontra vonatkozólag, akkor:

$$N_1 l_1 - \frac{q_1 l_1^2}{2} + M_C = 0$$

ahonnan:

$$N_1 = \frac{q_1 l_1}{2} - \frac{M_C}{l_1}$$

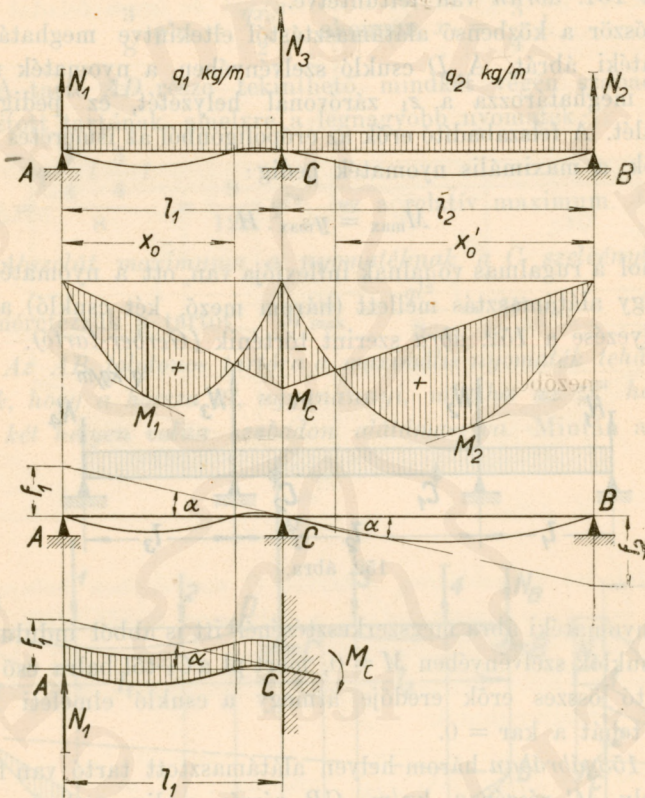
Ugyanígy a másik oldalra:

$$N_2 = \frac{q_2 l_2}{2} - \frac{M_C}{l_2}$$

$$\text{De } N_3 = q_1 l_1 + q_2 l_2 - N_1 - N_2 = \frac{q_1 l_1 + q_2 l_2}{2} + M_C \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right)$$

A baloldali tartórészre az α szögű ferde befogás folytán:

$$f_1 = l_1 \operatorname{tg} \alpha$$



153. ábra.

A besüllyedés az N_1 erő következtében: $\frac{N_1 l_1^3}{3IE}$

és az elosztott teher folytán: $\frac{q_1 l_1^4}{8IE}$

Mivel az A pont összes behajlása a C ponthoz képest zéró, azért:

$$l_1 \operatorname{tg} \alpha + \frac{N_1 l_1^3}{3IE} - \frac{q_1 l_1^4}{8IE} = 0 \quad (3)$$

Hasonlóan a másik oldalon:

$$-l_2 \operatorname{tg} \alpha + \frac{N_2 l_2^3}{3IE} - \frac{q_2 l_2^4}{8IE} = 0 \quad (4)$$

Ha a (3) egyenletet l_2 -vel, a (4) egyenletet l_1 -gyel szorozzuk, akkor

$$\begin{aligned} \text{összegezve} \quad \frac{N_1 l_1^3 l_2 + N_2 l_2^3 l_1}{3} &= \frac{q_1 l_1^4 l_2 + q_2 l_2^4 l_1}{8} \\ N_1 l_1^2 + N_2 l_2^2 &= \frac{3}{8} (q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3) \end{aligned} \quad (5)$$

az N_1 és N_2 fentebbi értékét betéve az (5) alatti egyenletbe:

$$\begin{aligned} \frac{q_1 l_1^3}{2} - M c l_1 + \frac{q_2 l_2^3}{2} - M c l_2 &= \frac{3}{8} (q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3) \\ \frac{q_1 l_1^3}{8} + \frac{q_2 l_2^3}{8} &= M c (l_1 + l_2) \end{aligned}$$

$$\text{és így:} \quad M c = \frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{Az első mezőben:} \quad M_1 &= \frac{q_1 \cdot x_0^2}{8} \\ \text{A második mezőben:} \quad M_2 &= \frac{q_2 \cdot x_0'^2}{8} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{ahol:} \quad x_0 = l_1 - \frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{4q_1 l_1 (l_1 + l_2)}$$

$$\text{és} \quad x_0' = l_2 - \frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{4q_2 l_2 (l_1 + l_2)}$$

Ugyanis:

$$N_1 = \frac{q_1 l_1}{2} - \frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8l_1 (l_1 + l_2)}$$

$$M_x = N_1 x_0 - \frac{q_1 x_0^2}{2} = x_0 \left(N_1 - \frac{q_1 x_0}{2} \right) = 0$$

$$\text{ahonnan:} \quad x_0 = \frac{2N_1}{q_1} \quad \text{és hasonlóan:} \quad x_0' = \frac{2N_2}{q_2}$$

Ugyanolyan módon oldjuk meg a feladatot, ha a három helyen alátámasztott tartót koncentrált erők terhelik (154. ábra). A felszabadító erők:

$$N_1 = \frac{P_1 b_1}{l_1} - \frac{M c}{l_1}$$

$$\text{és} \quad N_2 = \frac{P_2 a_2}{l_2} - \frac{M c}{l_2}$$

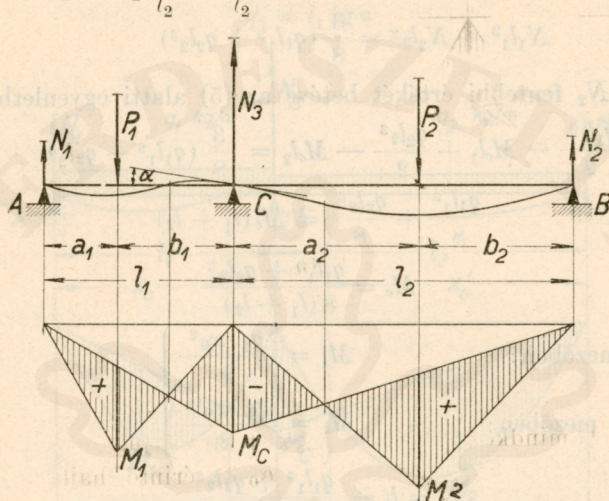
$$N_3 = P_1 + P_2 - N_1 - N_2 = \frac{P_1 a_1}{l_1} + \frac{P_2 b_2}{l_2} + M c \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right)$$

A nyomatékok pedig:

$$M_C = P_1 \frac{a_1 b_1}{l_1} \cdot \frac{(l_1 + a_1)}{2(l_1 + l_2)} + P_2 \frac{a_2 b_2}{l_2} \cdot \frac{(l_2 + b_2)}{2(l_1 + l_2)} \quad (8)$$

$$M_1 = P_1 \frac{a_1 b_1}{l_1} - \frac{a_1}{l_1} M_C \quad (9)$$

$$M_2 = P_2 \frac{a_2 b_2}{l_2} - \frac{b_2}{l_2} M_C \quad (10)$$



154. ábra.

Valamely négy helyen alátámasztott tartó nyomatéki ábrája a 155. ábrán látható. A felszabadító erők a következők:

$$N_1 = N_2 = \frac{ql_1}{2} - \frac{M_C}{l_1}$$

$$N_3 = N_4 = \frac{q}{2} (l_1 + l_2) + \frac{M_C}{l_1}$$

A nyomatékok pedig:

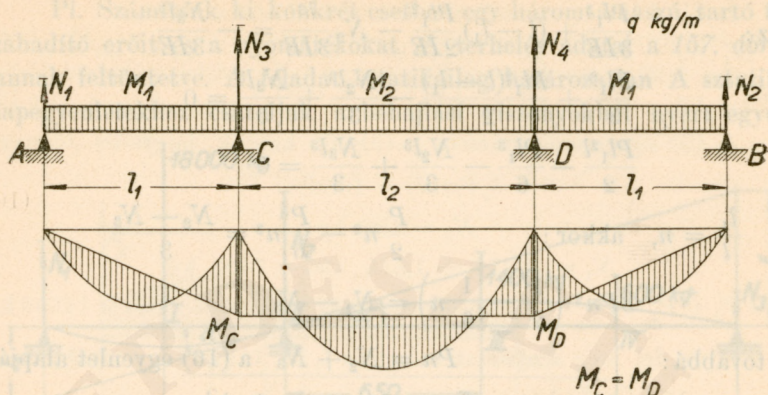
$$M_C = \frac{q}{4} \left(\frac{l_1^3 + l_2^3}{2l_1 + 3l_2} \right) = M_D \quad (11)$$

$$M_1 = \frac{N_1^2}{2q} \quad (12)$$

és
$$M_2 = \frac{ql_2^2}{8} - M_C \quad (13)$$

ahol M_1 a maximális nyomaték az oldalmezőkön és M_2 a középső mezőn. Ha $l_1 = l_2 = l$, akkor $M_C = \frac{ql^2}{10}$ (14)

$$N_1 = N_2 = 0,4 \cdot ql \quad \text{és} \quad N_3 = N_4 = 1,1 \cdot ql$$



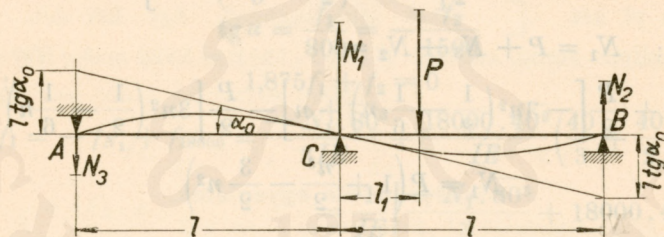
155. ábra.

Határozzuk meg a 156. ábrán feltüntetett tartónál a felszabadító erőket és a nyomatékokat. Az egyensúlyi alapegyenletek:

$$N_1 + N_2 = P + N_3 \quad (15)$$

és
$$Pl_1 = N_2l + N_3l \quad (16)$$

A rúd mindkét felét olyannak tekinthetjük, mintha C -nél α_0 szög alatt be volna falazva, ahol α_0 az érintő hajlásszöge a C



156. ábra.

alátámasztás helyén. Ha a tartó baloldalát vesszük figyelembe, ott a rúd $f = l \operatorname{tg} \alpha_0$ értékkel emelkedne fel, ha az N_3 reakcióerő nem működne, tehát:

$$N_3 \frac{l^3}{3IE} - l \operatorname{tg} \alpha_0 = 0 \quad \text{azaz:} \quad l \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{N_3 l^3}{3IE}$$

A másik oldalon a ferde befalazás mellett P és N_2 erők működnek, tehát:

$$\frac{Pl_1^3}{3IE} + (l - l_1) \frac{Pl_1^2}{2IE} - N_2 \frac{l^3}{3IE} = -l \operatorname{tg} \alpha_0$$

azaz:

$$\frac{Pl_1^3}{3IE} + (l-l_1) \frac{Pl_1^2}{2IE} - N_2 \frac{l^3}{3IE} = - \frac{N_3 l^3}{3IE}$$

$$\frac{Pl_1^3}{3} + \frac{Pl_1^2(l-l_1)}{2} - \frac{N_2 l^3}{3} + \frac{N_3 l^3}{3} = 0$$

$$\frac{Pl_1^2 l}{2} - \frac{Pl_1^3}{6} - \frac{N_2 l^3}{3} + \frac{N_3 l^3}{3} = 0$$

ha $\frac{l_1}{l} = n$, akkor:

$$\frac{P}{2} n^2 - \frac{P}{6} n^3 = \frac{N_2 - N_3}{3}$$

és

$$3Pn^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} n \right) = N_2 - N_3$$

de továbbá:

$$Pn = N_2 + N_3 \text{ a (16) egyenlet alapján}$$

és összegezve

$$2N_2 = P \left[n + 3n^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} n \right) \right]$$

és

$$N_2 = \frac{P}{2} \left[n + 3n^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} n \right) \right] \quad (17)$$

$$N_3 = -N_2 + Pn = -\frac{P}{2} \left[n + 3n^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} n \right) \right] + Pn =$$

$$= -\frac{P}{2} \left[n + 3n^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} n \right) - 2n \right] = \frac{P}{2} \left[+n - 3n^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} n \right) \right]$$

$$N_3 = \frac{P}{2} \left[-3n^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} n \right) + n \right] \quad (18)$$

továbbá: $N_1 = P + N_3 - N_2 =$

$$= P + \frac{P}{2} \left[-3n^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} n \right) + n \right] - \frac{P}{2} \left[3n^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} n \right) + n \right]$$

$$N_1 = P \left(1 + \frac{n^3}{2} - \frac{3}{2} n^2 \right) \quad (19)$$

A felszabadító erőket ismerve, a nyomatékot a középső alátámasztásra már meghatározhatjuk.

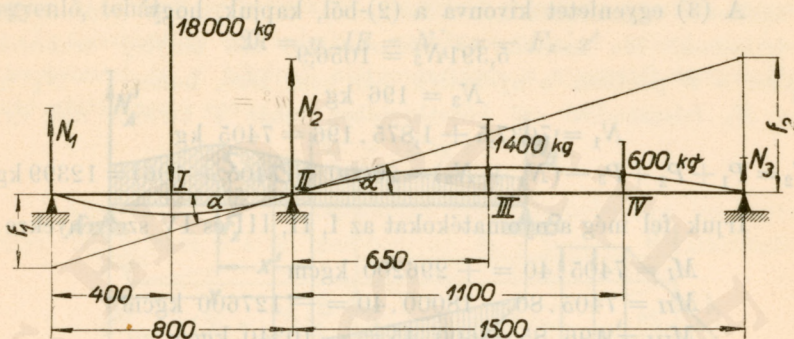
$$M = N_2 l - Pl_1 = \frac{Pln}{2} \left[1 + 3n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} n \right) \right] - Pnl =$$

$$= \frac{Pln}{2} \left[1 - 2 + 3n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} n \right) \right] = \frac{Pln}{2} \left[3n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} n \right) - 1 \right] \quad (20)$$

Ha adott esetben $n = \frac{1}{2}$ volna, akkor ennek az értéknek a behelyettesítésével nyernék, hogy:

$$N_1 = \frac{22}{32} P; \quad N_2 = \frac{13}{32} P; \quad N_3 = -\frac{3}{32} P \quad \text{és} \quad M = -\frac{3}{32} \cdot Pl$$

Pl. Számítsuk ki konkrét esetben egy háromtámaszú tartó felszabadító erőit és a nyomatékokat. A terhelés adatai a 157. ábrán vannak feltüntetve. A feladat sztatikailag határozatlan. A sztatikai alapegyenletekhez csatoljuk a behajlási viszonyokból nyert egyen-



157. ábra.

letet, ezzel a feladat már sztatikailag határozottá válik, a három ismeretlen felszabadító erő a három egyenletből kiszámítható. Fektesztünk a tartó rugalmas vonalához a középső alátámasztásnál érintőt és tekintjük a tartót α szög alatt befalazottnak, az áthajlás a baloldalon f_1 , a jobboldalon $-f_2$, tehát a ferde befalazás folytan

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f_1}{800} = -\frac{f_2}{1500}$$

avagy:

$$1,875 f_1 + f_2 = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{De: } f_1 = -f_{N_1} + f_{18000} &= -\frac{N_1 \cdot 80^3}{3IE} + \frac{18000 \cdot 40^2}{IE} \left(\frac{40}{3} + \frac{40}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{IE} \left[-\frac{N_1 \cdot 80^3}{3} + 18000 \cdot 40^2 \cdot \frac{5}{6} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{és } f_2 = -f_{N_3} + f_{1400} + f_{600} &= \\ &= -\frac{N_3 \cdot 150^3}{3IE} + \frac{1400 \cdot 65^2}{IE} \left(\frac{65}{3} + \frac{85}{2} \right) + \frac{600 \cdot 110^2}{IE} \left(\frac{110}{3} + \frac{40}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{IE} \left[-\frac{N_3 \cdot 150^3}{3} + 600 \cdot 110^2 \cdot 55,66 + 1400 \cdot 65^2 \cdot 64,16 \right] \end{aligned}$$

Ezt a két értéket behelyettesítjük az (1) egyenletbe:

$$\begin{aligned} -1,875 \frac{N_1 \cdot 80^3}{3} + 1,875 \cdot 18000 \cdot 40^2 \cdot \frac{5}{6} - \frac{N_3 \cdot 150^3}{3} + \\ + 600 \cdot 110^2 \cdot 55,66 + 1400 \cdot 65^2 \cdot 64,16 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ahonnan: } N_1 + 3,516 N_3 = 8094,4 \quad (2)$$

Írjuk fel a nyomatékot a középső alátámasztásra:

$$N_1 \cdot 80 - 18000 \cdot 40 - N_3 \cdot 150 + 600 \cdot 110 + 1400 \cdot 65 = 0$$

$$\text{ebből: } N_1 - 1,875 N_3 = 7037,5 \quad (3)$$

A (3) egyenletet kivonva a (2)-ből, kapjuk, hogy

$$5,391 N_3 = 1056,9$$

$$\text{és } N_3 = 196 \text{ kg}$$

$$N_1 = 7037,5 + 1,875 \cdot 196 = 7405 \text{ kg}$$

$$N_2 = P_1 + P_2 + P_3 - (N_1 + N_3) = 20000 - (7405 + 196) = 12399 \text{ kg}$$

Írjuk fel még a nyomatékokat az I, II, III és IV szelvényekre:

$$M_I = 7405 \cdot 40 = + 296200 \text{ kgcm}$$

$$M_{II} = 7405 \cdot 80 - 18000 \cdot 40 = - 127600 \text{ kgcm}$$

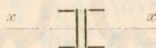
$$M_{III} = 196 \cdot 85 - 600 \cdot 45 = - 10340 \text{ kgcm}$$

$$M_{IV} = 196 \cdot 40 = + 7840 \text{ kgcm.}$$

Ott lesz tehát a maximális nyomaték, ahol a 18000 kg-os erő hat a tartóra, erre méretezzük a tartót, $M_I = W_x \cdot \sigma_m$

$$W_x = \frac{M_I}{\sigma_m} = \frac{296200}{800} = 3702,5 \text{ cm}^3$$

Ha pl. két $\left[\right]$ vasat alkalmaznánk, úgy két db. 20-as profilt kellene venni, ezeknél $W_x = 2 \cdot 1911 = 3822 \text{ cm}^3$ (Haren)



a) Clapeyron-féle egyenletek.

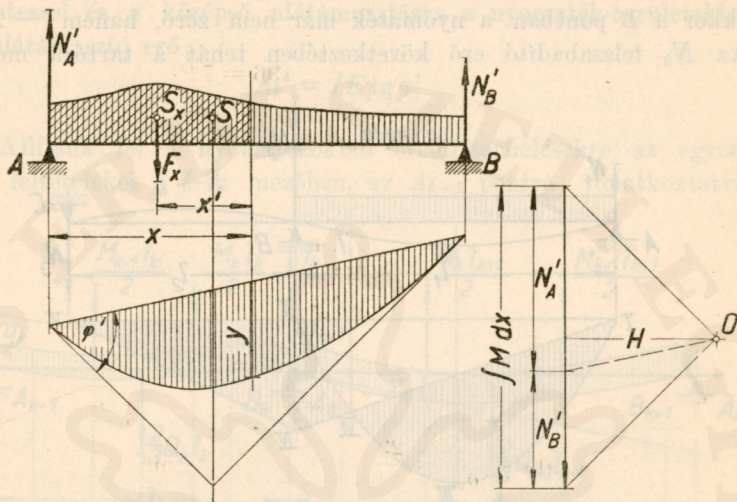
A 26. §-ban ismertettük azon eljárást, amely szerint, a tartó terheléséből megállapított nyomaték-területek alapján, a rugalmas vonal alakját meg lehet szerkeszteni. Ha pedig a rugalmas vonalat és a besüllyedéseket ismerjük, a sztatikailag határozatlan tartókat méretezni tudjuk.

A nyomaték-területeknek megfelelő terhelésekhez, a hozzátartozó felszabadító erőket a következő módon lehet kiszámítani. Legyen egy két helyen alátámasztott tartó terheléséből származó nyomaték-terület (158. ábra) tetszőleges egyenlőtlenül elosztott terhelés, akkor x távolban levő szelvényre a nyomaték:

$$\mathfrak{M} = N'_A \cdot x - F_x \cdot x'$$

ahol F_x az x szelvénytől balra fekvő nyomaték-területnek megfelelő terhelést jelenti. Ezt a nyomatékot szerkesztés által mint H/y értéket kapjuk meg, ahol a H pólustávolság legyen EI értékkel egyenlő, tehát:

$$\mathfrak{M} = y \cdot IE = N'_A \cdot x - F_x \cdot x'$$



158. ábra.

Ha ezt a nyomatékot x szerint differenciáljuk, akkor kapjuk a rugalmas vonal IE -szeres hajlását:

$$IE \frac{dy}{dx} = N'_A - \frac{d(F_x \cdot x')}{dx} = IE \operatorname{tg} \varphi'$$

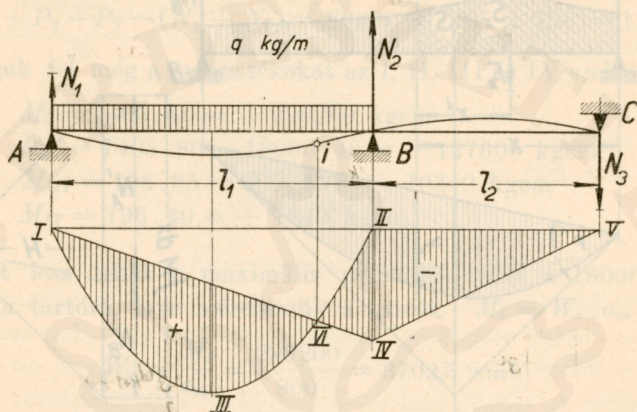
A $\frac{d(F_x \cdot x')}{dx}$ tag az x abszcisszáat tartalmazza, mert úgy F_x , mint x' függvénye x -nek és így ha $x = 0$, akkor $\frac{d(F_x \cdot x')}{dx} = 0$ és ilyenmódon a rúd hajlását megkapjuk az alátámasztás helyén, mert:

$$IE \operatorname{tg} \varphi' = N'_A$$

Azaz az N'_A felszabadító erő, ha a tartót az eredeti terhelése helyett a nyomaték-területtel terheljük meg, mindenkor egyenlő az eredeti terhelésű tartó IE -szeres hajlásával. Ha pedig a tartónak horizontális a befogása, pl. befalazáspál, amidőn $\varphi' = 0$, akkor az N'_A is zéró.

Válasszunk először olyan három helyen alátámasztott, tehát kétnyílású tartót, melynek egyik nyílása egyenletesen elosztott erőkkel

van megterhelve, a másik nyílása pedig terheletlen (159. ábra). Ha N_3 felszabadító erő zéró volna, akkor a nyomatéki ábrát az I II III parabola-terület adná meg. A tartót a terhek lefelé hajlítják (rugalmas vonal alulról nézve domború), tehát pozitív nyomatékok keletkeznek. Ha azonban N_3 felszabadító erő tényleg működik, akkor a B pontban a nyomaték már nem zéró, hanem $-N_3 \cdot l_2$. Az N_3 felszabadító erő következtében tehát a tartóra még egy



159. ábra.

negatív ellennyomaték fog hatni, az I IV V nyomaték, amiért is a tartó középvonala i ponttól kezdve fölfelé hajlik át. Az I, VI és V pontokban a nyomaték zéró.

Erről a speciális esetről térjünk át az általánosabb esetre, amikor a tartó sok helyen van alátámasztva és tegyük fel egyelőre, hogy az egyes mezőkre különböző nagyságú egyenletesen elosztott terhelések működnek (160. ábra).

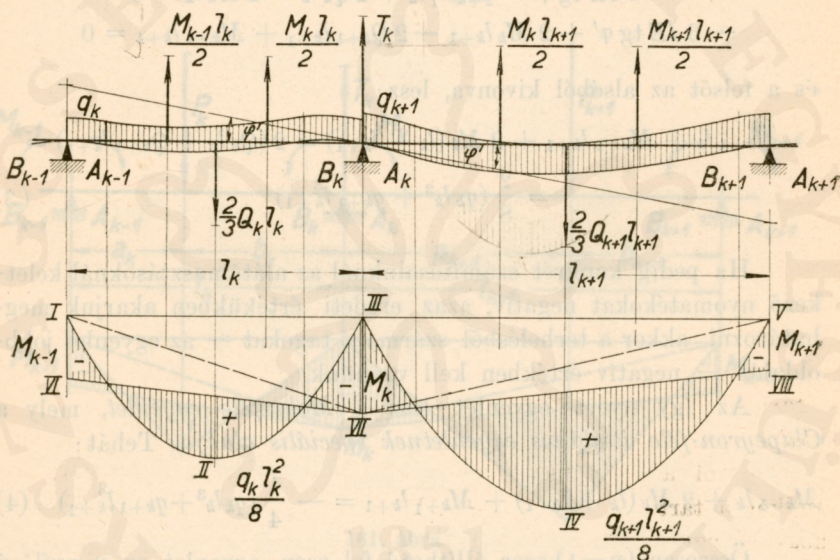
Használjuk a következő jelöléseket: A k -ik és $(k+1)$ -ik nyílás terhelései q_k és q_{k+1} . Az alátámasztásoknál keletkező nyomatékok (negatív nyomatékok) M_{k-1} , M_k és M_{k+1} . A pozitív nyomatékok: $Q_k = \frac{q_k l_k^2}{8}$ és $Q_{k+1} = \frac{q_{k+1} l_{k+1}^2}{8}$.

Az utóbbiak azonnal kiszámíthatók, míg M_{k-1} , M_k és M_{k+1} ismeretlenek addig, míg a tartó alakváltozási, vagy behajlási viszonyait nem ismerjük. Legyenek továbbá $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_{n-1}$ az alátámasztási erőknek a tőlük jobbra fekvő nyílásokról jutó részei; $B_0, B_1, B_2, \dots, B_k, \dots, B_{n-1}$ az alátámasztási erőknek a tőlük balra fekvő nyílásokról jutó részei; n a nyílások száma és a felszabadító

erők: $T_0 = A_0$; $T_1 = A_1 + B_1$; ... $T_k = A_k + B_k$; ... $T_n = B_{n-1}$.
Ha most a nyomtér-területeket terheléseknek tekintjük és megkeres-
sük $H = IE$ pólustávolság mellett a hozzájuk tartozó kötélgörbét,
akkor az eredeti terheléseknek megfelelő rugalmas vonalat kapjuk.
A T_k felszabadító erő helyén a rugalmas vonal φ' szöget zár be a
vízszintessel és a középső alátámasztásra a nyomtér-területekből
jutó alátámasztó erő:

$$A_k' = IE \operatorname{tg} \varphi'$$

Állítsuk fel a nyomtér-területekből eredő terhelésekre az egyen-
súlyi feltételeket a k -ik mezőben, az A_{k-1} pontra vonatkoztatva.



160. ábra.

Most kapjuk, ha a pozitív és a negatív nyomtér-területeket a súly-
pontjaikban képzeljük hatni, hogy:

$$-IE \operatorname{tg} \varphi' l_k - \frac{1}{2} M_{k-1} l_k \frac{l_k}{3} + \frac{2}{3} Q_k l_k \frac{l_k}{2} - \frac{1}{2} M_k l_k \frac{2}{3} l_k = 0 \quad (1)$$

ha figyelembe vesszük azt, hogy az I III VI VII negatív nyo-
mtér-terület két részből adódik, I VI VII-ből és I III VII-ből.

Hasonló módon felállíthatjuk az egyensúlyi egyenleteket a
 B_{k+1} pontra és a $(k+1)$ -ik mezőre. Minthogy azonban most a

maradó tartórészről van szó, a pozitív és negatív nyomaték-területek forgató hatása ellenkezővé válik, tehát:

$$-IE \cdot \operatorname{tg} \varphi' \cdot l_{k+1} + \frac{M_k l_{k+1}}{2} \frac{2}{3} l_{k+1} - \frac{2}{3} Q_{k+1} l_{k+1} \frac{l_{k+1}}{2} + \\ + \frac{M_{k+1} l_{k+1}}{2} \frac{l_{k+1}}{3} = 0 \quad (2)$$

Az (1) egyenlet minden tagját l_k -val, a (2) egyenlet minden tagját pedig (l_{k+1}) értékével elosztva, azután közös nevezőre hozva, kapjuk, hogy:

$$-6IE \operatorname{tg} \varphi' - M_{k-1} l_k + 2Q_k l_k - 2M_k l_k = 0 \\ -6IE \operatorname{tg} \varphi' + 2M_k l_{k+1} - 2Q_{k+1} l_{k+1} + M_{k+1} l_{k+1} = 0$$

és a felsőt az alsóból kivonva, lesz:

$$M_{k-1} l_k + M_{k+1} l_{k+1} + 2M_k (l_k + l_{k+1}) = 2(Q_k l_k + Q_{k+1} l_{k+1}) = \\ = \frac{2}{8} (q_k l_k^3 + q_{k+1} l_{k+1}^3) \quad (3)$$

Ha pedig konkrét számításainknál az alátámasztásoknál keletkező nyomatékokat negatív, azaz eredeti értékükben akarjuk meghatározni, akkor a terhelésből származó tagokat — az egyenlet jobb oldalát — negatív értékben kell vennünk.

Az így nyert egyenlet lesz a *Mohr-féle egyenlet*, mely a *Clapeyron-féle általános egyenletnek speciális alakja*. Tehát:

$$M_{k-1} l_k + 2M_k (l_k + l_{k+1}) + M_{k+1} l_{k+1} = -\frac{1}{4} (q_k l_k^3 + q_{k+1} l_{k+1}^3) \quad (4)$$

Összesen $(n-1)$ -szer állítható fel ezen egyenlet az n nyílású folytonos tartóra, mely tehát összefüggést ad a három egymásra következő alátámasztás fölötti hajlítónyomatékok és a három alátámasztás által meghatározott két nyílásra nehezedő terhelések között. Ezekhez hozzájárul a két szélső alátámasztásnak a feltétele, illetve a sztatika két alapegyenlete — a párhuzamos erőrendszerek egyensúlyára — és *ilyen módon már az $(n+1)$ felszabadító erő is meghatározható*.

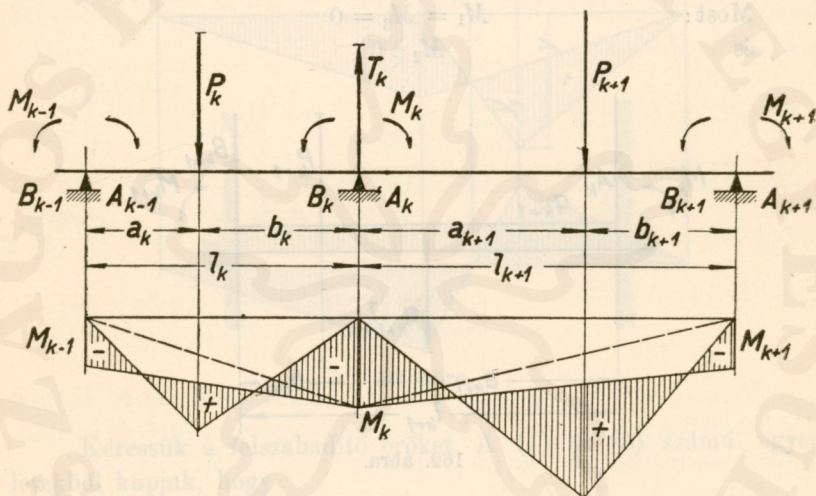
Tegyük fel, hogy a folytonos tartó közbeeső koncentrált erővel van csupán megterhelve (*161. ábra*) és jelöljük a k -ik mezőben a terheket P'_k , P''_k ... és a $(k+1)$ mezőben P'_{k+1} , P''_{k+1} ..., és a terhelések távolát a megfelelő nyílás két alátámasztásától a_k , b_k .

illetve a_{k+1} , b_{k+1} -el, akkor teljesen azonosan kapjuk a *Mohr-féle egyenleteket* koncentrált terhelések esetében:

$$\begin{aligned} M_{k-1}l_k + 2M_k(l_k + l_{k+1}) + M_{k+1}l_{k+1} = \\ = - \sum \frac{P_k a_k}{l_k} (l_k^2 - a_k^2) - \sum \frac{P_{k+1} b_{k+1}}{l_{k+1}} (l_{k+1}^2 - b_{k+1}^2) \end{aligned} \quad (5)$$

Ha pedig a folytonos tartó elosztott és koncentrált erőkkel van terhelve, akkor:

$$\begin{aligned} M_{k-1}l_k + 2M_k(l_k + l_{k+1}) + M_{k+1}l_{k+1} = -\frac{1}{4} (q_k l_k^3 + q_{k+1} l_{k+1}^3) + \\ - \sum \frac{P_k a_k}{l_k} (l_k^2 - a_k^2) - \sum \frac{P_{k+1} b_{k+1}}{l_{k+1}} (l_{k+1}^2 - b_{k+1}^2) \end{aligned} \quad (6)$$



161. ábra.

A felszabadító erőket a $(k+1)$ -ik alátámasztásra vonatkozó és az eredeti terhelésre felállított nyomatéki egyenletből kapjuk: (162. ábra).

$$A_k l_{k+1} = M_{k+1} - M_k + \frac{q_{k+1} l_{k+1}^2}{2} + \sum P_{k+1} b_{k+1}$$

$$\text{ahonnan: } A_k = \frac{M_{k+1} - M_k}{l_{k+1}} + q_{k+1} \frac{l_{k+1}}{2} + \sum P_{k+1} \frac{b_{k+1}}{l_{k+1}} \quad (7)$$

$$\text{és hasonlóan: } B_k = \frac{M_{k-1} - M_k}{l_k} + q_k \frac{l_k}{2} + \sum P_k \frac{a_k}{l_k} \quad (8)$$

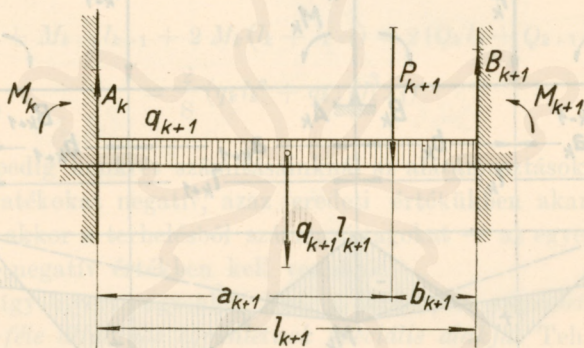
az eredő felszabadító erő: $T_k = A_k + B_k$

A Clapeyron-féle legáltalánosabb egyenlet pedig, ha az alátámasztások nem egy síkban fekszenek, hanem egy vízszintestől számítva y_{k-1} , y_k , y_{k+1} magasságban:

$$\begin{aligned} & M_{k-1} l_k + 2 M_k (l_k + l_{k+1}) + M_{k+1} l_{k+1} = \\ & = -\frac{1}{4} (q_k l_k^3 + q_{k+1} l_{k+1}^3) - \sum \frac{P_k a_k}{l_k} (l_k^2 - a_k^2) + \\ & - \sum \frac{P_{k+1} b_{k+1}}{l_{k+1}} (l_{k+1}^2 - b_{k+1}^2) + 6 IE \left(\frac{y_k - y_{k-1}}{l_k} + \frac{y_k - y_{k+1}}{l_{k+1}} \right) \quad (9) \end{aligned}$$

Pl. Legyen adva valamely három helyen alátámasztott tartó, amely a második nyílásban P erővel van megterhelve, a középső alátámasztástól számított a_1 távolban (163. ábra).

Most: $M_1 = M_3 = 0$
és $M_2 \geq 0$



162. ábra.

A Mohr-féle egyenletből kiszámíthatjuk az ismeretlen negatív nyomatékot:

$$2 M_2 (l + l) = -\frac{P \cdot b_1}{l} (l^2 - b_1^2)$$

$$4 M_2 l = -\frac{P \cdot b_1}{l} l^2 \left[1 - \left(\frac{b_1}{l} \right)^2 \right]$$

$$M_2 = -\frac{P \cdot b_1}{4} \left[1 - \left(\frac{b_1}{l} \right)^2 \right]$$

és ha

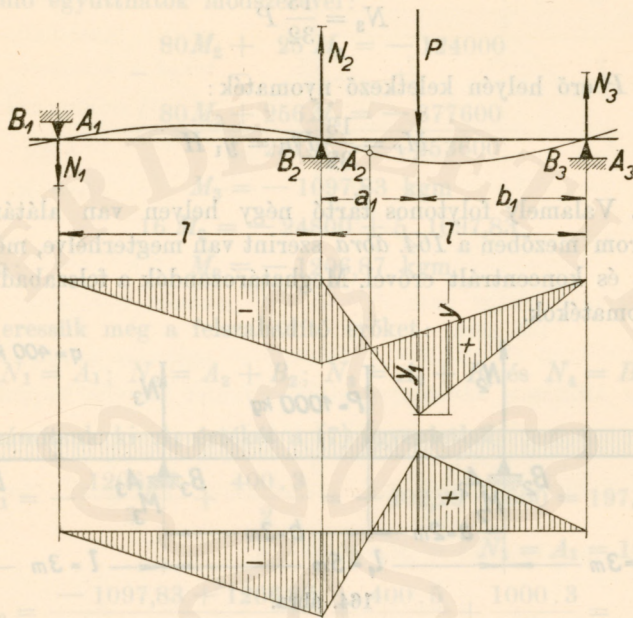
$$a_1 = b_1 = \frac{l}{2}$$

akkor:

$$M_2 = -\frac{Pl}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] = -\frac{3}{32} Pl$$

Ha ezen nyomatékot ismerjük, akkor a nyomatéki ábrát már megrajzolhatjuk, mert a pozitív nyomaték-területet is már ismerjük;

ugyanis:
$$\frac{P \cdot a_1 b_1}{l} = yH.$$



163. ábra.

Keressük a felszabadító erőket. A (7) és (8) számú egyenletekből kapjuk, hogy:

$$N_1 = A_1 = -\frac{3}{32} \frac{Pl}{l} = -\frac{3}{32} P$$

$$N_2 = A_2 + B_2$$

és
$$A_2 = \frac{3}{32} \frac{Pl}{l} + P \frac{b_1}{l}$$

ha:
$$b_1 = \frac{l}{2}$$

akkor:
$$A_2 = \frac{19}{32} P$$

$$B_2 = \frac{3}{32} \frac{Pl}{l} = \frac{3}{32} P$$

és így:
$$N_2 = \left(\frac{19}{32} + \frac{3}{32} \right) P = \frac{22}{32} P$$

Továbbá:
$$N_3 = B_3 = -\frac{3}{32} \frac{Pl}{l} + P \frac{a_1}{l}$$

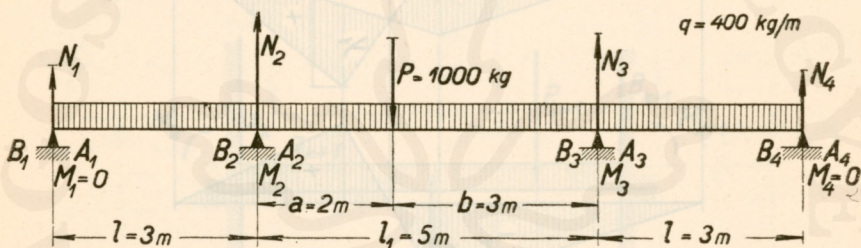
és ha
$$a_1 = \frac{l}{2}$$

akkor:
$$N_3 = \frac{13}{32} P$$

A P erő helyén keletkező nyomaték:

$$M_P = \frac{13}{32} P b_1 = y_1 H$$

Pl. Valamely folytonos tartó négy helyen van alátámasztva és a három mezőben a 164. ábra szerint van megterhelve, még pedig elosztott és koncentrált erővel. Meghatározandók a felszabadító erők és a nyomatékok.



164. ábra.

Most kétszer kell a Mohr-féle egyenleteket felírnunk, hogy a négy ismeretlen felszabadító erőt — a statika egyenleteinek figyelembevételével — meghatározhassuk.

Először M_1 , M_2 és M_3 negatív nyomatékokra vonatkozólag, azután M_2 , M_3 , M_4 hasonló értelmű nyomatékokra. A szabad alátámasztásoknak megfelelően $M_1 = M_4 = 0$. Tehát:

$$2M_2(l + l_1) + M_3l_1 = -\frac{1}{4} q(l^3 + l_1^3) - \frac{Pb}{l_1}(l_1^2 - b^2) \quad (\alpha)$$

$$M_2l_1 + 2M_3(l_1 + l) = -\frac{1}{4} q(l_1^3 + l^3) - \frac{Pa}{l_1}(l_1^2 - a^2) \quad (\beta)$$

Helyettesítsük be az értékeket:

$$16M_2 + 5M_3 = -100(5^3 + 3^3) - \frac{1000 \cdot 3}{5}(5^2 - 3^2)$$

és tovább:

$$16M_2 + 5M_3 = -15200 - \frac{19200}{2} = -24800 \text{ kgm} \quad (\gamma)$$

a (2) egyenletből hasonlóképpen kapjuk behelyettesítéssel, hogy:

$$16 M_3 + 5 M_2 = -15200 - \frac{16800}{2} = -23600 \text{ kgm} \quad (\delta)$$

A (γ) és (δ) egyenletből kiszámíthatjuk M_2 és M_3 értékeket az egyenlő együtthatók módszerével:

$$\begin{array}{r} 80M_2 + 25 M_3 = -124000 \\ - \quad - \quad + \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 80M_2 + 256M_3 = -377600 \\ \hline 231M_3 = -253600 \end{array}$$

tehát: $M_3 = -1097,83 \text{ kgm}$

és $16 M_2 = -24800 + 5 \cdot 1097,83$

ahonnan: $M_2 = -1206,87 \text{ kgm}$

Keressük meg a felszabadító erőket:

$$N_1 = A_1; N_2 = A_2 + B_2; N_3 = A_3 + B_3 \text{ és } N_4 = B_4.$$

Számítsuk ki A_1 értékét a (7) egyenletből:

$$A_1 = -\frac{1206,87}{3} + \frac{400 \cdot 3}{2} = -402,29 + 600 = 197,71 \text{ kg}$$

$$N_1 = A_1 = 197,71 \text{ kg}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{-1097,83 + 1206,87}{5} + \frac{400 \cdot 5}{2} + \frac{1000 \cdot 3}{5} = \\ &= 21,81 + 1000 + 600 = 1621,81 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$B_2 = \frac{1206,87}{3} + 600 = 402,29 + 600 = 1002,29 \text{ kg}$$

$$N_2 = A_2 + B_2 = 2624,1 \text{ kg}$$

$$A_3 = \frac{1097,83}{3} + \frac{400 \cdot 3}{2} = 365,94 + 600 = 965,94 \text{ kg}$$

$$B_3 = \frac{-1206,87 + 1097,83}{5} + \frac{400 \cdot 5}{2} + \frac{1000 \cdot 2}{5} =$$

$$= -21,81 + 1000 + 400 = 1378,19 \text{ kg}$$

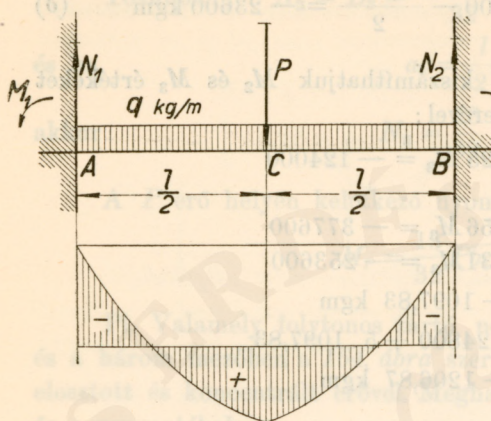
$$N_3 = A_3 + B_3 = 2344,13 \text{ kg}$$

$$B_4 = -\frac{1097,83}{3} + \frac{400 \cdot 3}{2} = -365,94 + 600 = 234,06 \text{ kg}$$

$$N_4 = B_4 = 234,06 \text{ kg}$$

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 5400 \text{ kg}$$

Pl. Valamely mindkét végén befogott tartó teljes hosszában egyenletesen elosztott terhelést hord és még közepén P koncentrált



165. ábra.

erővel is meg van terhelve (165. ábra). Keresjük a befogásoknál keletkező nyomatékokat és a relatív maximális nyomatékot a középén.

A szimmetrikus megterhelés folytán:

$$M_1 = M_2$$

$$\text{és } N_1 = N_2 = \frac{P}{2} + \frac{ql}{2}$$

Az M_1 és M_2 negatív nyomaték.

Az általános háromnyomatéki egyenlet alapján kapjuk, hogy:

$$2M_1l + M_2l = -\frac{1}{4}ql^3 - \frac{P \frac{l}{2}}{l} \left(l^2 - \frac{l^2}{4} \right) = \frac{1}{4}ql^3 - \frac{3}{8}Pl^2$$

minthogy azonban $M_1 = M_2$, azért:

$$3M_1l = -\frac{1}{4}ql^3 - \frac{3}{8}Pl^2$$

$$\text{és } M_1 = M_2 = -\frac{1}{12}ql^2 - \frac{1}{8}Pl = -\left(\frac{1}{12}ql^2 + \frac{1}{8}Pl \right)$$

Keressük a középső szelvényben fellépő nyomatékot (relatív maximum):

$$\begin{aligned} M_c &= \left(\frac{P}{2} + \frac{ql}{2} \right) \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} - \frac{1}{12}ql^2 - \frac{1}{8}Pl = \\ &= \frac{Pl}{4} + \frac{ql^2}{4} - \frac{ql^2}{8} - \frac{ql^2}{12} - \frac{Pl}{8} = \frac{Pl}{8} + \frac{ql^2}{24} \end{aligned}$$

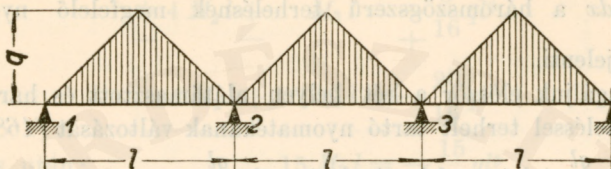
b) Többtámaszú tartó megközelítő számítása, háromszögszerűen megoszló terhelés mellett.

Legyen valamely négytámaszú tartó az egyes mezőkben olyan módon megterhelve, hogy a terhelés egyenszerű háromszögnek feleljen meg (166. ábra). A terhelés minden mezőben $\frac{ql}{2}$.

Minthogy a pontos számítás nehézségekkel járt, *Wenning* a következő általános egyszerűsítést ajánlotta:*)

A *Clapeyron*-féle egyenletek szerint egyenletesen elosztott terhelésnél kapjuk, hogy:

$$M_1 l_1 + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_2 = -\frac{1}{4}(q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3) = -\frac{6}{l_1} \frac{q_1 l_1^4}{24} - \frac{6}{l_2} \frac{q_2 l_2^4}{24} \quad (1)$$



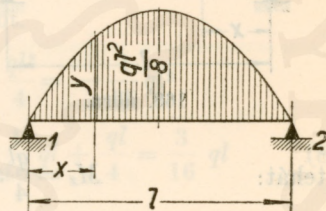
166. ábra.

A jobboldali részben $\frac{q_1 l_1^4}{24}$ és $\frac{q_2 l_2^4}{24}$ nem egyéb, mint a nyomtérületeknek sztatikai nyomatéka a két kijelölt mezőben az alátámasztási pontokra (167. ábra).

A nyomaték-terület: $\frac{2}{3} \frac{q_1 l_1^2}{8} l_1 = \frac{q_1 l_1^3}{12}$

és ennek sztatikai nyomatéka az 1 pontra:

$$\frac{q_1 l_1^3}{12} \cdot \frac{l_1}{2} = \frac{q_1 l_1^4}{24} = S_1 = \int_0^{l_1} y x dx$$



167. ábra.

Hasonlóképpen $\frac{q_2 l_2^4}{24}$ a második mező nyomatékterületének sztatikai nyomatéka a 2 pontra:

$$S_2 = \int_0^{l_2} y x dx$$

Ennek alapján a *Clapeyron-féle egyenletet* a következő alakban is felírhatjuk, hogy:

$$M_1 l_1 + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_2 = -\frac{6}{l_1} S_1 - \frac{6}{l_2} S_2$$

ha pedig $l_1 = l_2 = l$, akkor:

$$M_1 l + 4M_2 l + M_3 l = -\frac{6}{l} (S_1 + S_2) \quad (2)$$

*) Ernst Wenning: Vereinfachte Berechnung von statisch unbestimmten Tragsystemen mit Deleckslasten. Der Bauingenieur, 1927. évf. 11. szám.

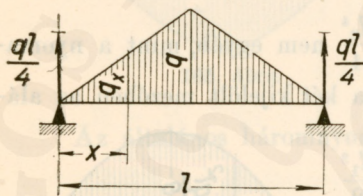
A háromszögszerű terhelésnél S_1 értéke egyszerűsül, mert a nyomaték-terület súlypontja ugyancsak a két helyen alátámasztott tartó felében van és ezért:

$$S_1 = \frac{l}{2} \int_0^l y dx$$

ahol: $\int_0^l y dx$ a háromszögszerű terhelésnek megfelelő nyomaték-területet jelenti.

Vizsgáljuk először a két helyen alátámasztott és háromszögszerű terheléssel terhelt tartó nyomatékának változását (168. ábra).

A terhelés $\frac{ql}{2}$, tehát a felszabadító erők $\frac{ql}{4}$.



168. ábra.

A nyomaték x távolban:

$$M_x = \frac{ql}{4} x - \frac{qx}{2} \cdot \frac{x}{3}$$

de: $q : qx = \frac{l}{2} : x$

ahonnan: $qx = \frac{2q \cdot x}{l}$

tehát:
$$M_x = \frac{ql}{4} x - \frac{2qx^2}{2l} \cdot \frac{x}{3} = \frac{qlx}{4} - \frac{qx^3}{3l} \quad (3)$$

A maximális nyomaték ez esetben, ha $x = \frac{l}{2}$:

$$M_{\max} = \frac{ql}{4} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q}{3l} \cdot \frac{l^3}{8} = \frac{ql^2}{8} - \frac{ql^2}{24} = \frac{ql^2}{12}$$

A terhelés nyomatéki ábrájának területe tehát kifejezhető:

$$F = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{ql}{4} x - \frac{qx^3}{3l} \right) dx = 2 \left[\frac{ql}{4} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{qx^4}{12l} \right]_0^{\frac{l}{2}} = 2 \left(\frac{ql^3}{32} - \frac{ql^3}{192} \right) = \frac{5}{96} ql^3 \quad (4)$$

A sztatikai nyomaték tehát:

$$S_1 = \frac{5}{192} ql^4 \quad (5)$$

$$M_1 l + 4 M_2 l + M_3 l = - \frac{6}{l} \cdot 2 \cdot \frac{5}{192} ql^4 = - \frac{60}{192} ql^3 = - \frac{5}{16} ql^3 \quad (6)$$

és hasonlóan: $M_2 l + 4 M_3 l + M_4 l = - \frac{5}{16} ql^3 \quad (7)$

Ha négy helyen alátámasztott a tartó, $M_1 = M_4 = 0$, tehát:

$$\left. \begin{aligned} 4M_2 l + M_3 l &= -\frac{5}{16} ql^3 \\ M_2 l + 4M_3 l &= -\frac{5}{16} ql^3 \end{aligned} \right\} \text{E két egyenlet meg-} \\ \text{oldható } M_2 \text{ és } M_3\text{-ra}$$

$$\underline{+} \quad 4M_2 l \quad \underline{+} \quad M_3 l = -\frac{5}{16} ql^3$$

$$4M_2 l + 16M_3 l = -\frac{20}{16} ql^3$$

kivonás után: $15M_3 l = -\frac{15}{16} ql^3$

$$\left. \begin{aligned} \text{ahonnan:} \quad M_3 &= -\frac{1}{16} ql^2 \\ \text{és azonosan:} \quad M_2 &= -\frac{1}{16} ql^2 \end{aligned} \right\} \quad (7a)$$

Keressük a 2 pontra a nyomatékot.

$$M_2 = N_1 l - \frac{ql}{2} \frac{l}{2} = N_1 l - \frac{ql^2}{4} = -\frac{1}{16} ql^2$$

$$N_1 = -\frac{1}{16} ql + \frac{ql}{4} = \frac{3}{16} ql \quad (8)$$

ugyancsak: $N_4 = \frac{3}{16} ql$

és mivel: $N_2 = N_3$

és $N_1 + N_4 + 2N_2 = \frac{3}{2} ql$

$$\frac{6}{16} ql + 2N_2 = \frac{24}{16} ql$$

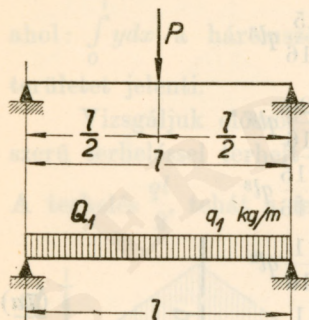
$$2N_2 = \frac{18}{16} ql$$

tehát: $N_2 = N_3 = \frac{9}{16} ql \quad (9)$

Találhatunk azonban a háromszögszerű terhelés helyett olyan egyszerűbb terhelési módot is, melynél a nyomaték-területek ugyanazon értéket veszik fel, mint amelyet a háromszög-terhelésnél kaptunk és ezáltal a »Hütte«-ben rendelkezésre álló táblázatokat is fel tudjuk használni a folytonos tartó esetében.

Meg kell jegyeznünk azonban, hogy ilyen módon a felszabadító erők majdnem pontosan, a nyomatékterületek pedig 8~10% pontossággal kaphatók meg.

A fennebb említett egyszerűbb terhelés pedig az lesz, hogy a háromszögszerű terhelést felbontjuk egyenletesen elosztott és a középén koncentrált terhelésre.



169. ábra.

Eredetileg a terhelés volt $Q = \frac{ql}{2}$, ha most e helyett $P = \frac{ql}{4}$ koncentrált erőt veszünk és $Q_1 = \frac{ql}{4} = q_1 l$ elosztott terhelést, akkor a 169. ábra szerint, a koncentrált erőből folyó nyomaték-terület F_P kifejezhető:

$$F_P = P \frac{l^2}{8} = \frac{ql^3}{32}$$

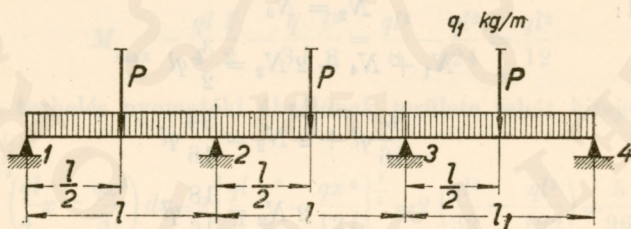
és a megosztott terheléstől származó nyomaték-terület:

$$F_{Q1} = \frac{q_1 l^2}{8} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{q_1 l^3}{12} = \frac{q}{4} \cdot \frac{l^3}{12} = \frac{ql^3}{48}$$

tehát:

$$F = F_P + F_{Q1} = \frac{ql^3}{32} + \frac{ql^3}{48} = \frac{5}{96} ql^3 \quad (10)$$

és így ugyanazon értéket nyertük, mint a (4) egyenlet alapján.



170. ábra.

Vezessük vissza tehát az eredeti feladatot, a 170. ábra szerinti megterhelés mellett, a folytonos tartóra.

A háromnyomaték egyenlete szerint kapjuk, hogy:

$$M_1 l + 4 M_2 l + M_3 l = -\frac{1}{2} q_1 l^3 - \frac{P l}{2} \left(l^2 - \frac{l^2}{4} \right) = -\frac{1}{2} q_1 l^3 - \frac{3}{8} P l^2 \quad (11)$$

hasonlóképpen a második és harmadik mezőre:

$$\begin{aligned}
 M_2 l + 4 M_3 l + M_4 l &= -\frac{1}{2} q_1 l^3 - \frac{P}{l} \left(l^2 - \frac{l^2}{4} \right) - \frac{P}{l} \left(l^2 - \frac{l^2}{4} \right) = \\
 &= -\frac{1}{2} q_1 l^3 - \frac{3}{4} P l^2
 \end{aligned} \quad (12)$$

A (11) és (12) egyenletből M_2 és M_3 meghatározható, ha négytámaszú tartó esetén $M_1 = M_4 = 0$

$$\begin{aligned}
 4 M_2 l + M_3 l &= -\frac{1}{2} q_1 l^3 - \frac{3}{8} P l^2 \\
 - & - & + & + \\
 4 M_2 l + 16 M_3 l &= -\frac{4}{2} q_1 l^3 - 3 P l^2 \\
 \hline
 15 M_3 l &= -\frac{3}{2} q_1 l^3 - \frac{21}{8} P l^2
 \end{aligned}$$

ha pedig q_1 és P értékét behelyettesítjük, akkor:

$$15 M_3 l = -\frac{3}{2} \frac{q l^3}{4} - \frac{21}{8} \frac{q l^3}{4} = -\frac{3}{8} q l^3 - \frac{21}{32} q l^3 = -\frac{33}{32} q l^3$$

$$\text{és:} \quad M_3 = -\frac{33}{480} q l^2 = -\frac{11}{160} q l^2 \quad (13)$$

Ha ezen értéket összehasonlítjuk a (7a) alatti pontos eredménnyel, a hiba 100%.

Keressük az N_1 felszabadító erőt a 32. a) § (7) egyenletével.

$$N_1 l = -\frac{11}{160} q l^2 + q_1 \frac{l^2}{2} + P \frac{l}{2} = -\frac{11}{160} q l^2 + \frac{q l^2}{8} + \frac{q l^2}{8} = \frac{29}{160} q l^2$$

$$\text{ahonnan:} \quad N_1 = \frac{29}{160} q l \quad (14)$$

Az eredmény pedig a (8) alatti értékkel vág össze megközelítőleg. Ugyanakkor:

$$N_4 = \frac{29}{160} q l \quad (15)$$

$$\text{de} \quad N_2 = N_3$$

$$\text{és} \quad N_1 + N_4 + 2 N_2 = \frac{3 q l}{24} = \frac{58}{160} q l + 2 N_2$$

ahonnan :

$$2 N_2 = \frac{3 ql}{2} - \frac{58 ql}{160} = \frac{182}{160} ql$$

és

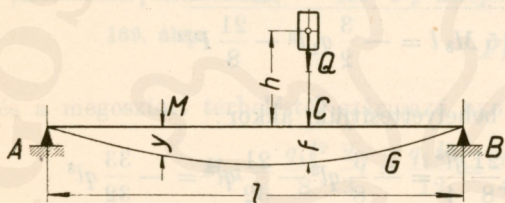
$$N_2 = N_3 = \frac{91}{160} ql \quad (16)$$

ez közel egyenlő a (9) egyenletben nyert $\frac{9}{16} ql$ értékkel.

Tehát megközelítéssel visszavezethető a folytonos tartó háromszögszerű terhelése, a fentebb említett két egyszerű terhelési módra.

33. §. Lökésből (ütésből) származó hajlítóterhelés, dinamikai faktor.

Valamely két helyen alátámasztott tartóra bizonyos h magasságból leesik egy test és arra ütést mér. A lökött testnek súlya G , amelyet a C helyre kell redukálni, itt történik ugyanis a Q súly ütközése (171. ábra).



171. ábra.

Ha f_1 a dinamikai áthajlás eső Q súly mellett és f a sztatikai áthajlás a nyugvó Q súly mellett a C pontban és ugyanígy y_1 és

y a dinamikai és sztatikai áthajlás ennek következtében egy másik, pl. M helyen, akkor $\frac{f_1}{f} = \frac{y_1}{y} = n$; a dinamikai tényező.

Ha a C pontnak v_0 kezdősebességét az ütközés után meg akarjuk állapítani, a tartó eredeti G súlyát a következő törvény szerint kell G_1 -re redukálni (C -ben):

$$G_1 = \mathcal{Z}\left(\Delta G \frac{y_1}{f_1}\right) = \mathcal{Z}\left(\Delta G \frac{y}{f}\right) \quad (1)$$

ahol ΔG az elemi tartórész súlya.

Az ütközés törvénye szerint a mozgásmennyiség ütközés után és előtt egyenlő, azaz:

$$(Q + G_1) v_0 = Q \sqrt{2gh}$$

ahonnan :

$$v_0 = \frac{Q}{Q + G_1} \sqrt{2gh}$$

Ha pedig az ütközés utáni mozgási energiát kell megállapítani, akkor a tartó eredeti súlyát az alábbi törvény szerint kell G_2 -re redukálni:

$$G_2 = \mathcal{Z} \left(\Delta G \frac{y_1^2}{f_1^2} \right) = \mathcal{Z} \left(\Delta G \frac{y^2}{f^2} \right) \quad (2)$$

és a mozgási energia egyenlő L_0 munkával:

$$L_0 = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{Q + G_2}{2g} \cdot 2gh \left(\frac{Q}{Q + G_1} \right)^2 = Qh \frac{(Q + G_2)Q}{(Q + G_1)^2} \quad (3)$$

Amikor a tartó és a Q súly az ütközés után elérte a maximális áthajlást, akkor a mozgási energiája egy pillanatra zéró és így érvényes a munkatörvény, hogy *a kezdeti energia + külső erők munkája = a tartó dinamikai alakváltozási munkájával.**)

$$L_0 + Qf_1 = \frac{1}{2E} \int \sigma_1^2 dV \quad (4)$$

ahol σ_1 a lökés utáni feszültség.

Nyugodt terhelésnél:

$$A = \frac{1}{2} Qf = \frac{1}{2E} \int \sigma^2 dV \quad (5)$$

ahol σ a sztatikai feszültség és A a sztatikai alakváltozási munka. De továbbá: $f_1 = nf$ és $y_1 = ny$, tehát $\sigma_1 = n\sigma$ és így a (4) és (5) egyenlethől:

$$\begin{aligned} L_0 + 2nA &= n^2A \\ n^2A - 2nA - L_0 &= 0 \\ n^2 - 2n - \frac{L_0}{A} &= 0 \end{aligned}$$

és ebből a dinamikai faktor értéke:

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{L_0}{A}} \quad (6)$$

Tehát az nQ nyugodt terhelés ugyanazon feszültséget ébreszti a tartóban, mint a Q eső súly folytán előálló dinamikai teher.

Például valamely egy végén befogott tartóra, melynek súlya G és hossza l , a szabad végére h magasságból Q súly esik; keresendő a dinamikai faktor értéke.

*) Lásd: Az alakváltozási munka (IX. fejezet).

Ezen terhelési séma mellett ismeretes a rugalmas vonal egyenlete:

$$y = \frac{1}{6} \frac{Q}{EI} x^2 (3l - x)$$

az elemi tartórész: $\triangle G = \frac{G}{l} dx$ és $G_1 = \frac{G}{l} \int y \cdot dx$

és a maximális besüllyedés: $f = \frac{Ql^3}{3IE}$ tehát:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{G \cdot 3 \cdot IE}{l \cdot Ql^3} \int_0^l \frac{Q}{6IE} (3x^2l - x^3) dx = \frac{G}{2l^4} \int_0^l (3x^2l - x^3) dx = \\ &= \frac{G}{2l^4} \left[\frac{3x^3l}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^l = \frac{3}{8} G \end{aligned}$$

Ugyancsak kiszámítható a G_2 érték is a (2) egyenletből:

$$\begin{aligned} G_2 &= \frac{G}{4l^7} \int_0^l x^4 (3l - x)^2 dx = \frac{G}{4l^7} \int_0^l x^4 (9l^2 - 6lx + x^2) dx = \\ &= \frac{G}{4l^7} \int_0^l (9l^2x^4 - 6lx^5 + x^6) dx = \frac{G}{4l^7} \left[\frac{9}{5} l^2 x^5 - 6l \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} \right]_0^l = \\ &= \frac{G}{4l^7} \left(\frac{9}{5} l^7 - l^7 + \frac{l^7}{7} \right) = \frac{G}{4l^7} \frac{33}{35} l^7 = \frac{33}{140} G \end{aligned}$$

Nyugodt terhelésnél, mint ismeretes:

$$A = \frac{1}{2} Qf = \frac{1}{6} Q^2 \frac{l^3}{IE}$$

Ezek alapján a dinamikai faktor:

$$\begin{aligned} n &= 1 + \sqrt{1 + \frac{Q^2 h \left(Q + \frac{33}{140} G \right)}{\frac{1}{6} Q^2 l^3 \left(Q + \frac{3}{8} G \right)^2 \frac{IE}}}} = \\ &= 1 + \sqrt{1 + \left[\frac{Q + \frac{33}{140} G}{\left(Q + \frac{3}{8} G \right)^2} \right] \frac{6EIh}{l^3}} \quad (7) \end{aligned}$$

Oldjuk meg még a következő példákat:

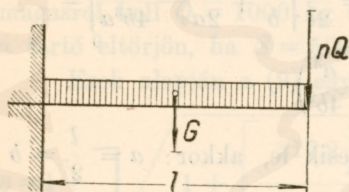
Pl. Valamely $l = 2$ m hosszú fagerenda, melynek szelvénye 20 cm magas és 15 cm széles, egyik végén be van falazva. A másik vége fölött van $Q = 100$ kg súly, (172. ábra). Milyen magasról eshetik le ez a súly, hogy a gerendában $\sigma = 265$ kg/cm²-nél nagyobb feszültség ne keletkezzék? $E = 120000$ kg/cm² és $\gamma = 0,5$ kg/dm³.

A fagerenda önsúlya $G = 1,5 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 0,5 = 30$ kg, tehetetlenségi nyomatéka $I = 10000$ cm⁴. A (7) egyenletből:

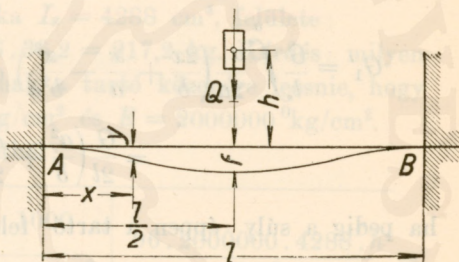
$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{100 + \frac{33}{140} \cdot 30}{\left(100 + \frac{3}{8} \cdot 30\right)^2} \cdot \frac{6 \cdot 120000 \cdot 10000 \cdot h}{200^3}} = 1 + \sqrt{1 + 7,81 h} \quad (8)$$

Azaz: nQ teher veendő sztatikai számításba az eső Q súly esetében;

és így: $nQl + G \frac{l}{2} = \sigma \cdot W$



172. ábra.



173. ábra.

$$\sigma = 265 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{I}{e} = W = 1000 \text{ cm}^3$$

kapjuk tehát, hogy

$$nQl = 1000 \cdot 265 - \frac{30 \cdot 200}{2} \quad \text{és} \quad n = 13,1$$

amely értéket a (8) képletbe betéve nyerjük, hogy $h = 18,6$ cm. Ilyen magasról eshetik a tartóra a $Q = 100$ kg-os súly adott feltételek mellett.

Pl. Valamely két végén alátámasztott G súlyú tartóra, melynek hossza l , a baloldali alátámasztástól számított a távolságban Q súly esik le h magasból (173. ábra). Keresendő a dinamikai faktor.

A rugalmas vonal egyenlete a Hütte szerint:

1. ha $a < b$

$$y = \frac{Q}{EI} \frac{b^2 a^2}{6l} \left(2 \frac{x}{b} + \frac{x}{a} - \frac{x^3}{b^2 a} \right)$$

$$\text{és} \quad f = \frac{Q a^2 b^2}{3 l EI}$$

a dinamikai faktor:

$$\frac{f_1}{f} = \frac{y_1}{y} = n$$

Legyen

$$\frac{Q a^2 b^2}{6 l EI} = \alpha$$

akkor:

$$y = \alpha x \left(\frac{2}{b} + \frac{1}{a} - \frac{x^2}{b^2 a} \right)$$

A tartó elemi része:

$$\Delta G = \frac{G}{l} dx$$

$$\begin{aligned} G_1' &= \frac{G}{l} \int_0^a \frac{\alpha}{2a} \left(\frac{2x}{b} + \frac{x}{a} - \frac{x^3}{b^2 a} \right) dx = \frac{G}{2l} \left[\frac{x^2}{b} + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{4b^2 a} \right]_0^a = \\ &= \frac{G}{2l} \left(\frac{a^2}{b} + \frac{a}{2} - \frac{a^3}{4b^2} \right) \end{aligned}$$

ha pedig a súly éppen a tartó felére esik le, akkor: $a = \frac{l}{2} = b$

$$\text{és} \quad G_1' = \frac{G}{2l} \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{4} - \frac{l}{8} \right) = \frac{G}{2l} \cdot \frac{5}{8} l$$

2. ha $a > b$

$$y = \frac{Q}{EI} \frac{b^2 a^2}{6l} \left(2 \frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x^3}{a^2 b} \right)$$

$$G_1'' = \frac{G}{2l} \left[\frac{x^2}{a} + \frac{x^2}{2b} - \frac{x^4}{4ab^2} \right]_0^b = \frac{G}{2l} \left(\frac{b^2}{a} + \frac{b}{2} - \frac{b^2}{4a} \right)$$

ha pedig $b = \frac{l}{2} = a$,

$$\text{akkor:} \quad G_1'' = \frac{G}{2l} \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{4} - \frac{l}{8} \right) = \frac{G}{2l} \cdot \frac{5}{8} l$$

$$\text{de:} \quad G_1 = G_1' + G_1'' = \frac{5}{8} G$$

A rugalmas vonal egyenlete abban az esetben ha, $a = b = \frac{l}{2}$

$$y = \frac{Q}{48 IE} x (3l^2 - 4x^2) \text{ és } f = \frac{Ql^3}{48 IE}$$

ezek alapján:

$$G_2 = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{G}{l} dx \frac{x^2 (3l^2 - 4x^2)^2}{l^6} = \frac{17}{35} G$$

Az alakváltozási munka sztatikai terhelésnél:

$$A = \frac{Q^2 l^3}{96 IE} = \frac{1}{2} Qf$$

és így:

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{Q + \frac{17}{35} G}{(Q + \frac{5}{8} G)^2} \cdot \frac{96 EIh}{l^3}} \quad (9)$$

a keresett dinamikai faktor.

Legyen a tartó egy $l = 6$ m hosszúságú I 24 N. P. tartó amelynek tehetetlenségi nyomatéka $I_x = 4288 \text{ cm}^4$, felülete:

$F = 46,4 \text{ cm}^2$, súlya $G = 6.36,2 = 217,2 \text{ kg}$. Kérdés: milyen magasról kell $Q = 1000 \text{ kg}$ súlynak a tartó közepére leesnie, hogy a tartó eltörjön, ha $S = 5000 \text{ kg/cm}^2$ és $E = 2000000 \text{ kg/cm}^2$.

Ezek alapján a (9) egyenletből:

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{217,2 \frac{17}{35} + 1000}{\left(\frac{5}{8} \cdot 217,2 + 1000\right)^2} \cdot \frac{96 \cdot 2000000 \cdot 4288 \cdot h}{600^3}} = 1 + \sqrt{1 + 3,267 h} \quad (10)$$

A hajlítás alapegyenlete szerint azonban:

$$n \frac{Ql}{4} + \frac{1}{8} Gl = S \frac{f}{e}$$

ahol $e = 12 \text{ cm}$ és így n értéke kiszámítható:

$$n = \frac{\frac{5000 \cdot 4288}{12} - \frac{1}{8} \cdot 217,2 \cdot 600}{1000 \cdot 150} = 11,8$$

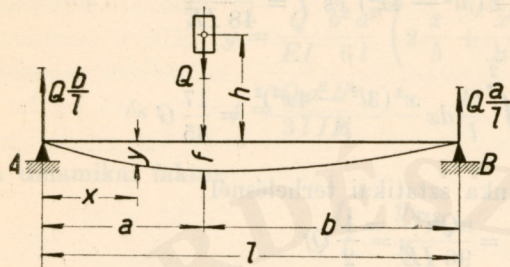
azaz a dinamikai faktor $n = 11,8$, amelynek alapján az

$n = 1 + \sqrt{1 + 3,267 h}$ egyenletből kiszámítható a h értéke:

$$(n-1)^2 = 1 + 3,267 h$$

$$h = \frac{n^2 - 2n}{3,267} = \frac{11,8^2 - 2 \cdot 11,8}{3,267} = 35,4 \text{ cm}$$

Keressük meg a dinamikai faktort azonos méretű és súlyú, két végén befogott tartóra, melynek felében h magasságban elhelyezett és onnan leesett ugyanolyan Q súly rá lökést fejt ki (174. ábra).



174. ábra.

A rugalmas vonal egyenlete:

$$y = \frac{Ql^3}{16IE} \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} \right)$$

és a besüllyedés:

$$f = \frac{Ql^3}{192 IE}$$

$$\begin{aligned} G_1 &= 2 \frac{G}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\frac{Ql^3}{16 IE} \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} \right) dx}{\frac{Ql^3}{192 IE}} = \frac{2 \cdot 12 \cdot G}{l} \left[\frac{x^3}{3 l^2} - \frac{4}{3} \frac{x^4}{4 l^3} \right] = \\ &= \frac{2 \cdot 4 \cdot G}{l} \left[\frac{x^3}{l^2} - \frac{x^4}{l^3} \right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot G}{l} \left[\frac{l^3}{8 l^2} - \frac{l^4}{16 l^3} \right] = \frac{2 \cdot 4 \cdot G}{l} \left[\frac{1}{16} l \right] = 0,5 G \end{aligned}$$

Hasonlóképpen:

$$\begin{aligned} G_2 &= 2 \frac{G}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{Ql^3}{16 IE} \right)^2 \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} \right)^2 dx}{\left(\frac{Ql^3}{192 IE} \right)^2} = \\ &= \frac{288 G}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{x^4}{l^4} - \frac{8}{3} \frac{x^5}{l^5} + \frac{16}{9} \frac{x^6}{l^6} \right) dx = \\ &= \frac{288 G}{l} \left[\frac{x^5}{5 l^4} - \frac{8}{3} \frac{x^6}{6 l^5} + \frac{16}{9} \frac{x^7}{7 l^6} \right]_0^{\frac{l}{2}} = \\ &= \frac{288 Gl}{181440 l} (1134 - 1260 + 360) = \frac{288 \cdot 234}{181440} G = \frac{67392}{181440} G = 0,37 G \\ &= \frac{Q^2 l^3}{384 IE} \end{aligned}$$

Nyugodt terhelésnél a sztatikai alakváltozási munka: $A = \frac{Q^2 l^3}{384 IE}$

Ezek alapján a dinamikai faktor:

$$n = 1 + \sqrt{1 + \left[\frac{Q + 0,37 G}{(Q + 0,5 G)^2} \right] \frac{h \cdot 384 \cdot I \cdot E}{l^3}} = 1 + \sqrt{1 + 13,4 h} \quad (11)$$

és $(n-1)^2 = 1 + 13,4 h$
 $n^2 - 2n = 13,4 h$

tehát: $h = \frac{n(n-2)}{13,4}$

Mínt hogy azonban:

$$n \frac{Ql}{8} + \frac{1}{12} Gl = S \frac{I}{e}$$

lesz: $n \frac{1000 \cdot 600}{8} + \frac{1}{12} 217,2 \cdot 600 = \frac{4288}{12} 5000$

$$125 n + \frac{217,2}{12} = \frac{4288 \cdot 50}{12 \cdot 6}$$

$$125 n = 2977 - 18,1 = 2959$$

a dinamikai faktor tehát:

$$n = \frac{2959}{125} = 23,8$$

ebből nyerjük h értékét:

$$(23,8 - 1)^2 = 22,8^2 = 1 + 13,4 h = 519,84$$

ahonnan: $h = \frac{519,84}{13,4} = 38,7 \text{ cm}$

Ilyen magasról kell tehát a súlynak leesnie, hogy a tartó eltörjön. Hogy pedig a tartóban a megengedett feszültség keletkezzék, $\sigma_m = 1000 \text{ kg/cm}^2$, úgy az 1000 kg-os súlyt jóval kisebb magasságról kell leejteni:

$$125 n = 595,4 - 18,1 = 577,3$$

$$n = \frac{577,3}{125} = 4,62$$

lesz a dinamikai faktor és $(4,62 - 1)^2 = 3,62^2 = 13,1 = 1 + 13,4 h$

ahonnan: $h = \frac{13,1}{13,4} = 0,93 \text{ cm}$

De: $h = \frac{n(n-2)}{13,4}$ és ugyanúgy ha: $n = 5$, akkor $h = 1,1 \text{ cm}$

$$n = 10, \quad \gg \quad h = 6 \quad \gg$$

$$n = 20, \quad \gg \quad h = 26,8 \quad \gg$$

$$n = 24, \quad \gg \quad h = 39,5 \quad \gg$$

Példák a III. fejezethez.

1. Meghatározandó a 175. ábrán vázolt szelvény tehetetlenségi nyomatéka a súlypontján átmenő vízszintes tengelyre.

Először meghatározzuk a súlypont

ordinátáját az: $y_s = \frac{\sum Fy}{\sum F}$ képlettel.

40.5 = 200	47,5 = 9500
4.5 = 20	42,5 = 850
4.5 = 20	7,5 = 150
14.5 = 70	2,5 = 175
$\sum F = 310 \text{ cm}^2$	$\sum Fy = 10675 \text{ cm}^3$

Tehát: $y_s = \frac{10675}{310} = 34,4 \text{ cm}$

A tehetetlenségi nyomaték a K tengelyre:

$$I_K = \frac{1}{3} \sum b h^3$$

$$I_K = \frac{1}{3} \left[40(50^3 - 45^3) + 4(45^3 - 40^3) + 4 \cdot 10^3 + 10 \cdot 5^3 \right] = 489583 \text{ cm}^4$$

és a súlyponti tengelyre:

$$I_x = I_K - F y_0^2 = 489583 + 310 \cdot 34,4^2 = 122853 \text{ cm}^4$$

2. Meghatározandó a 176. ábrán vázolt szelvény tehetetlenségi és ellenálló nyomatéka a vízszintes z tengelyre.

$$I_z = 2(I_1 + I_2 + I_3)$$

S_1 ordinátája $x_1 = 97 \text{ mm}$

S_2 $x_2 = 84,5 \text{ mm}$

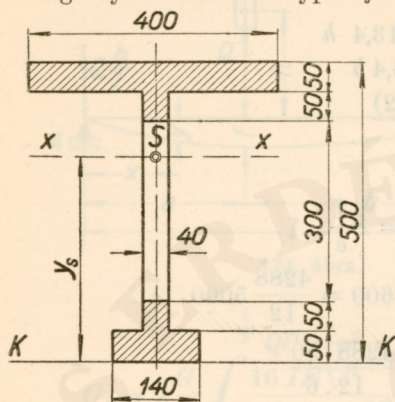
S_3 $x_3 = 39,5 \text{ mm}$

$$I_1 = \frac{(250 - 2 \cdot 16) 14^3}{12} + (250 - 2 \cdot 16) 14 \cdot 97^2 = 28749900 \text{ mm}^4$$

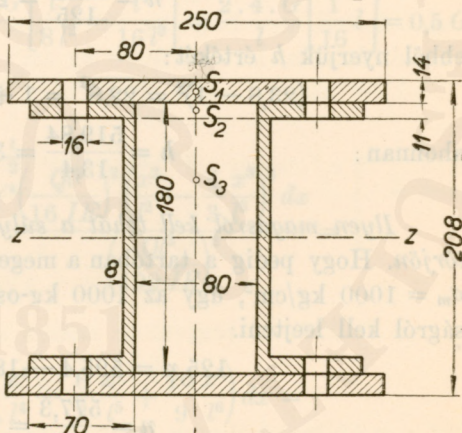
$$I_2 = \frac{(140 - 2 \cdot 16) 11^3}{12} + (140 - 2 \cdot 16) 11 \cdot 84,5^2 = 8562000 \text{ mm}^4$$

$$I_3 = \frac{16 \cdot 79^3}{12} = 16 \cdot 79 \cdot 39,5^2 = 1993300 \text{ mm}^4$$

$$\frac{1}{2} I_z = 39305200 \text{ mm}^4$$



175. ábra.

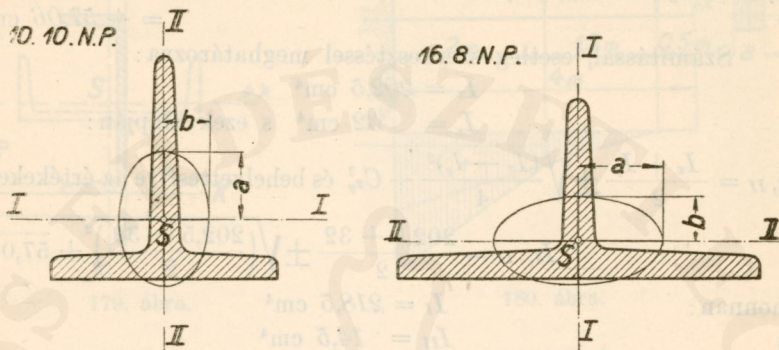


176. ábra.

Tehát: $I_z = 2 \cdot 3930 = 7860 \text{ cm}^4$

és $W_z = \frac{7860}{10,4} = 756 \text{ cm}^3$

3. Keresendő a 177. ábrán felüntetett normál-profilok centrál tehetetlenségi ellipszise.



177. ábra.

Tablázat szerint (Hütte) a $\perp 10.10$ vasnál:

$F = 20,9 \text{ cm}^2$; $I_I = I_x = 179 \text{ cm}^4$; $I_{II} = I_y = 88,3 \text{ cm}^4$

Tehát a centrál-ellipszis féltengelyei:

$$a = \pm \sqrt{\frac{I_I}{F}} = \sqrt{\frac{179}{20,9}} = 2,92 \text{ cm}$$

$$b = \pm \sqrt{\frac{I_{II}}{F}} = \sqrt{\frac{88,3}{20,9}} = 2,05 \text{ cm}$$

A 16.8 sz. profilnál pedig:

$F = 29,5 \text{ cm}^2$; $I_I = I_y = 422 \text{ cm}^4$;

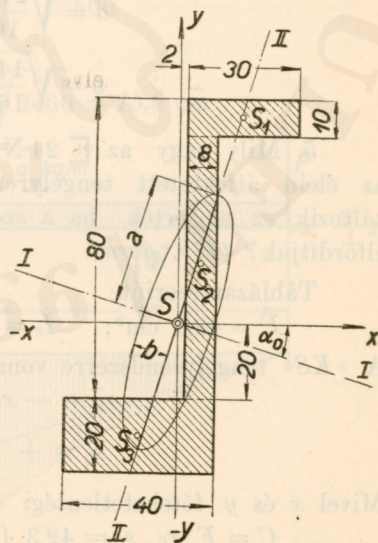
$I_{II} = I_x = 117 \text{ cm}^4$; tehát:

$$a = \pm \sqrt{\frac{I_I}{F}} = \sqrt{\frac{422}{29,5}} = 3,78 \text{ cm}$$

$$b = \pm \sqrt{\frac{I_{II}}{F}} = \sqrt{\frac{117}{29,5}} = 1,99 \text{ cm}$$

4. Meghatározandó a 178. ábrán vázolt Γ profil centrifugál nyomatéka, továbbá a centrál tehetetlenségi ellipszise.

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = 3 \cdot 1 + 0,8 \cdot 7 + 4 \cdot 2 = 16,6 \text{ cm}^2$$



178. ábra.

A súlypontok összehangozói:

$$S_1 \begin{Bmatrix} +1,7 \\ +5,5 \end{Bmatrix} \quad S_2 \begin{Bmatrix} +0,6 \\ +1,5 \end{Bmatrix} \quad S_3 \begin{Bmatrix} -1 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

A centrifugál nyomaték:

$$C_{xy} = |Fxy| = 3 \cdot 1,7 \cdot 5,5 + 5,6 \cdot 0,6 \cdot 1,5 + 8(-1)(-3) = +57,06 \text{ cm}^4$$

Számítással, esetleg szerkesztéssel meghatározva:

$$I_x = 202,5 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 32 \text{ cm}^4 \text{ s ezek alapján:}$$

$$I_{I, II} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_x - I_y)^2}{4} + C_{xy}^2} \text{ és behelyettesítve az értékeket:}$$

$$I_{I, II} = \frac{202,5 + 32}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{202,5 - 32}{2}\right)^2 + 57,06^2}$$

ahonnan:

$$I_I = 218,5 \text{ cm}^4$$

és

$$I_{II} = 14,5 \text{ cm}^4$$

A főtehetetlenségi tengelyek hajlásszöge:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2C_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2 \cdot 57,06}{32 - 202,5} = -0,6692$$

$$2\alpha_0 = -33^\circ 47,4'$$

tehát:

$$\alpha_0 = -16^\circ 53,7'$$

A centrál-ellipszis féltengelyei:

$$a = \sqrt{\frac{218,5}{16,6}} = 3,53 \text{ cm}$$

$$b = \sqrt{\frac{14,5}{16,6}} = 0,94 \text{ cm}$$

5. Mily nagy az $\square$ 24 N.P. profil centrifugál-nyomatéka egy az élein átfektetett tengelyrendszerre vonatkoztatva és miként változik ez az érték, ha a szelvényt a súlypontja körül 90° -kal elfordítjuk? (179. ábra.)

Táblázat szerint:

$$F = 42,3 \text{ cm}^2; \quad I_x = 3598 \text{ cm}^4; \quad I_y = 248 \text{ cm}^4$$

A »KS« tengelyrendszerre vonatkoztatva:

$$r_0 = -x_0 = -2,23 \text{ cm}$$

$$s_0 = +\frac{h}{2} = +12 \text{ cm}$$

Mivel x és y főtehetetlenségi tengelyek, a centrifugál nyomaték:

$$C = F \cdot r_0 \cdot s_0 = 42,3 \cdot (-2,23) \cdot 12 = -1130 \text{ cm}^4$$

és ez az érték nem változik, ha a profilt 90° -kal elfordítjuk.

továbbá:
$$\sigma_m = \frac{S}{\beta} = \frac{4000}{5} = 800 \text{ kg/cm}^2$$

Maximális nyomaték a falnál lép fel,

$$M_{\max} = Pl + \frac{ql^2}{2} = W \cdot \sigma_m$$

ahonnan:

$$P = \frac{W \cdot \sigma_m - \frac{ql^2}{2}}{l} = \frac{214.800 - \frac{4.26,2 \cdot 400}{2}}{400}$$

$$P = 375,6 \text{ kg}$$

8. Valamely egyik végén befogott $l = 2 \text{ m}$ hosszú öntöttvas-tartó a szabad végén $P = 500 \text{ kg}$ terhet hord (182. ábra) és keresztmetszete olyan derékszögű négyszög, melynek alapja a , magassága $2a$. Keresendő a mérete, ha $\beta = 3$, a rugalmassági határig.

$$M_{\max} = P \cdot l = 500 \cdot 200 = 100000 \text{ kgcm}$$

$$W = \frac{I}{a} = \frac{a(2a)^3}{12 \cdot a} = \frac{2}{3} a^3$$

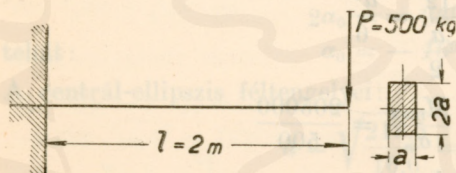
$$M_{\max} = W \cdot \sigma_m$$

A veszélyes szelvényben a húzófeszültség:

$$\sigma_I = + \frac{M_{\max}}{W}$$

és a nyomófeszültség:

$$\sigma_{II} = - \frac{M_{\max}}{W}$$



182. ábra.

tehát:

$$W = \frac{2}{3} a^3 = \frac{M_{\max}}{\sigma_I} = \frac{M_{\max}}{\sigma_{II}}$$

Öntöttvasnál meg van engedve $\beta = 3$ mellett:

$$\sigma_I = \frac{H_1}{\beta} = \frac{750}{3} = 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{II} = \frac{H_2}{\beta} = \frac{1500}{3} = 500 \text{ kg/cm}^2$$

Mivel a szelvény szimmetrikus és az öntöttvas a húzásnak kevésbé áll ellen, a szélső húzott szárla számítunk σ_I -gyel és így:

$$a^3 = \frac{3}{2} \frac{M_{\max}}{\sigma_I} = \frac{3}{2} \frac{100000}{250} = 600$$

ahonnan:

$$a = \sqrt[3]{600} = 8,43 \text{ cm}$$

9. Kiszámítandó egy bányaácsolat fenyő-süvegfájának teherbírása (183. ábra), ha a körszelvényű süvegfa átmérője $d = 18$ cm, hossza $l = 180$ cm. A fenyőfa szilárdsága hajlításra $S = 420$ kg/cm². Mekkora a főtényomás, ha az ácsolatok egymástól való távolsága 1 m?

$$W = \frac{d^3 \pi}{32} = 572,6 \text{ cm}^3$$

A hajlítónyomaték:

$$\frac{Ql}{8} = \frac{S}{\beta} \cdot \frac{d^3 \pi}{32}$$

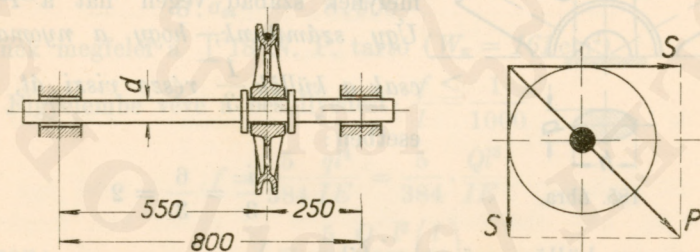
ahonnan a törőerő:

$$\beta \cdot Q = S \cdot \frac{8}{l} \cdot \frac{d^3 \pi}{32} = 420 \cdot \frac{8}{180} \cdot 572,6 = 10700 \text{ kg} = 10,7 \text{ t}$$

Ha az ácsolatok távolsága egymástól 1 m, az ennek megfelelő főtényomás lesz:

$$R = \frac{10700}{1,8} = 5940 \text{ kg/m}^2 = 5,94 \text{ t/m}^2$$

10. Valamely tengelyen van egy vezetőcsiga (184. ábra), amely $S = 4000$ kg kötélfeszültséget merőlegesen átirányít. Keresendő a tengely átmérője, ha $\sigma_m = 800$ kg/cm².



184. ábra.

Két eset lehetséges: α) a tengely fixen van ágyazva, a csiga lazán a tengelyen; akkor:

$$P = S \sqrt{2} = 4000 \cdot 1,41 = 5650 \text{ kg}$$

és a hajlítónyomaték:

$$M_{\max} = \frac{P \cdot a \cdot b}{l} = \frac{5650 \cdot 55 \cdot 25}{80} = 97000 \text{ kgcm}$$

és ha $\frac{\pi}{32} = \sim 0,1$, akkor $W = \frac{d^3 \pi}{32} = 0,1 d^3$

és $d = \sqrt[3]{\frac{M_{\max}}{0,1 \sigma_m}} = \sqrt[3]{\frac{97000}{0,1 \cdot 800}} = \sim 10,7 \text{ cm}$

kivitel: $d = 11 \text{ cm}$;

β) a csiga a tengelyre van felékelve és a tengely forog (lengő szilárdság), ilyenkor $\sigma_m = 400 \text{ kg/cm}^2$, tehát:

$$d = \sqrt[3]{\frac{97000}{0,1 \cdot 400}} = \sim 13,4 \text{ cm}$$

kivitel: $d = 14 \text{ cm}$.

11. Valamely szíjtárcsa átvisz $N = 26 \text{ HP-t}$, $n = 80 \text{ min}^{-1}$ fordulatszám mellett. A szíjtárcsa küllőinek száma $i = 6$. A küllők szelvénye oly ellipszis, melynek nagy tengelye kétszerese a kis tengelyének (185. ábra), $\sigma_m = 150 \text{ kg/cm}^2$. Keresendő a küllő mérete.

Az átvitt csavarónyomaték:

$$M_{\text{cs}} = 716,2 \frac{N}{n} = 716,2 \frac{26}{80} = 236 \text{ kgm}$$

$$M_{\text{cs}} = 23600 \text{ kgcm.}$$

Ez a nyomaték veszi a küllőket hajlításra igénybe; a küllőt ugyanis az agynál befogott tartónak tekintjük, melynek szabad végén hat a P erő. Úgy számítunk, hogy a nyomatékot csak a küllők $\frac{1}{3}$ része viszi át, jelen esetben:

$$\frac{i}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

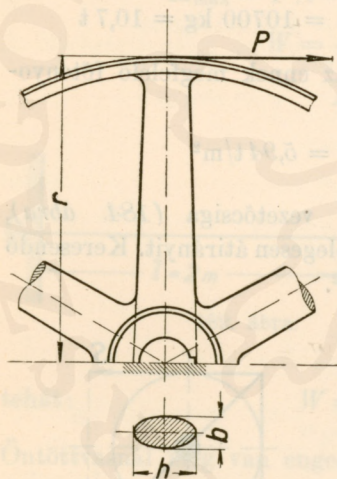
tehát az egy küllőre eső nyomaték:

$$M = \frac{23600}{2} = 11800 \text{ kgcm} = P \cdot r$$

és ez:

$$M = W \cdot \sigma_m$$

Ellipszishál: $W = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{h} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^3 = \frac{\pi h^3}{64}$



185. ábra.

mert: $b = \frac{h}{2}$

tehát: $W = \frac{M}{\sigma_m} = \frac{11800}{150} = \frac{\pi h^3}{64}$

ahonnan: $h = \sqrt[3]{\frac{11800 \cdot 64}{150 \cdot 3,14}} = 11,7 \text{ cm}$

kivitel: $h = 12 \text{ cm}; b = 6 \text{ cm}.$

12. Milyen I profil szükséges a behajlási viszonyok figyelembevételével valamely födéltartóra, melynek hossza $l = 6 \text{ m}$ és $q = 300 \text{ kg/m}$ egyenletesen elosztott terhet hord, ha $\sigma_m = 900 \text{ kg/cm}^2$?

Hosszú és gyengén terhelt szerkezeteknél, ha azokat csak szilárdságra számítjuk, gyakran igen nagy behajlási viszonyt $\left(\frac{f}{l}\right)$ kapunk. Célszerű, ha egy végén befalazott tartónál $\frac{f}{l} \leq \frac{1}{600}$; két-támaszú tartónál pedig $\frac{f}{l} \leq \frac{1}{1000}$.

Csak szilárdságra számítva példánkban:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{Q \cdot l}{8} = W \cdot \sigma_m$$

ahonnan: $W = \frac{Q \cdot l}{8 \cdot \sigma_m} = \frac{(6 \cdot 300) \cdot 600}{8 \cdot 900} = 150 \text{ cm}^3$

és ennek megfelel a I 18 N. P. tartó ($W_x = 161 \text{ cm}^3$).

Figyelembe véve a besüllyedést: $\frac{f}{l} \leq \frac{1}{1000}$

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} = \frac{5}{384} \cdot \frac{Ql^3}{EI}$$

ahonnan: $I = \frac{5}{384} \frac{Q \cdot l^3}{E \left(\frac{f}{l}\right)}$

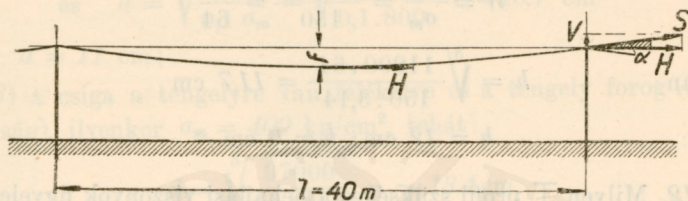
de $\frac{l}{f} = 1000$; a feltétel szerint tehát:

$$I = \frac{5}{384} \cdot \frac{1800 \cdot 600^2}{2000000} \cdot 1000 = 4220 \text{ cm}^4$$

és ennek megfelel egy I 24 N. P. profil ($I_x = 4239 \text{ cm}^4$).

13. Két, egymástól $l = 40 \text{ m}$ távolságban levő oszlopra $d = 25 \text{ mm}$ átmérőjű drótot, melynek súlya $q = 0,0375 \text{ kg/m}$, oly

módon feszítünk ki, hogy közepén a behajlása $f = 0,8$ m legyen (186. ábra). Mekkora a nyílás közepén a vízszintes kötélerő H mekkora és milyen irányú a kötélerő az oszlopoknál? Mivel f



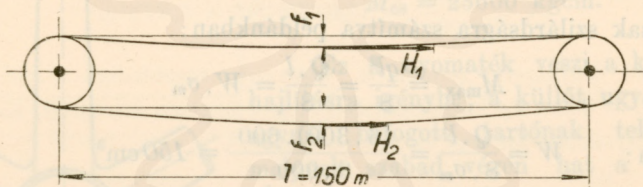
186. ábra.

jóval kisebb, mint l , úgy számítunk, mintha a saját súlya vízszintes irányban egyenletesen megosztva terhelné a drótot.

$$H = \frac{ql^2}{8f} = \frac{0,0375 \cdot 40^2}{8 \cdot 0,8} = 9,38 \text{ kg}$$

$$V = \frac{ql}{2} = \frac{0,0375 \cdot 40}{2} = 0,75 \text{ kg}$$

$$S = \sqrt{H^2 + V^2} = \sqrt{9,38^2 + 0,75^2} = 9,42 \text{ kg}$$



187. ábra.

és $\operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{H} = 0,08$

ahonnan: $\alpha = 4^{\circ}40'$

14. Valamely $q = 1,5$ kg/m súlyú drótkötél felső ága $H_1 = 800$ kg, alsó ága pedig $H_2 = 350$ kg erővel van megfeszítve (187. ábra). A kötéltárcsák távolsa $l = 150$ m. Keressük a besüllyedéseket:

$$f_1 = \frac{ql^2}{8H_1} = \frac{1,5 \cdot 150^2}{8 \cdot 800} = 5,27 \text{ m}$$

$$f_2 = \frac{ql^2}{8H_2} = \frac{1,5 \cdot 150^2}{8 \cdot 350} = 12,0 \text{ m.}$$

15. Valamely fekvő gőzgép dugattyúrúdja átmegy mind a két henger-födelen, átmérője $d = 135$ mm és hossza a két keresztfő

között $l = 2,6$ m. A dugattyútest súlya $P = 495$ kg. Keresendő a dugattyúrúd behajlása

A dugattyúrúd önsúlyából származó egyenletesen elosztott teher:

$$Q = F \cdot l \cdot \gamma = \frac{1,35^2 \cdot \pi}{4} \cdot 26 \cdot 7,8 = 290 \text{ kg}$$

Az egész besüllyedés a legkedvezőtlenebb dugattyúállásban:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{48} \frac{P l^3}{IE} + \frac{5}{384} \frac{Q l^3}{IE} = \frac{1}{48} \frac{l^3}{IE} \left(P + \frac{5}{8} Q \right) = \\ &= \frac{1}{48} \frac{260^3}{2160000} \frac{13,5^4 \cdot \pi}{64} \left(495 + \frac{5}{8} 290 \right) = 0,07035 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Nagy dugattyús gépeknél (fűvógépek) azért alkalmaznak üreges dugattyúrúdak, hogy a behajlás kicsi legyen, különben a fojtásnál nehézségek lépnének föl.

16. Keresendő egy $l = 4$ m hosszú derékszögű négyszög-szelvényű fagerenda mérete és besüllyedése, ha az egész egyenletesen elosztott teher $Q = 1000$ kg és $\sigma_m = 75$ kg/cm²,

a) ha a gerenda mindkét végén be van fogva,

b) ha a gerenda két végén alá van támasztva.

a) esetben legnagyobb a nyomaték a falnál a befogás helyén:

$$M_{\max} = \frac{Q \cdot l}{12} = \frac{1000 \cdot 400}{12} = 33400 \text{ kgcm}$$

$$M_{\max} = W \cdot \sigma_m$$

tehát:
$$W = \frac{M_{\max}}{\sigma_m} = \frac{33400}{75} = 445 \text{ cm}^3$$

Ehhez szükséges 15.12-es gerenda, melynél:

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 15^3}{12} = 3375 \text{ cm}^4$$

és
$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{12 \cdot 15^2}{6} = 450 \text{ cm}^3$$

Legnagyobb a középen a besüllyedés:

$$f_{\max} = \frac{Q l^3}{384 IE} = \frac{1000 \cdot 400^3}{384 \cdot 3375 \cdot 120000} = 0,412 \text{ cm}$$

b) esetben:

$$M_{\max} = \frac{Q \cdot l}{8} = \frac{1000 \cdot 400}{8} = 50000 \text{ kgcm}$$

$$W = \frac{50000}{75} = 667 \text{ cm}^3$$

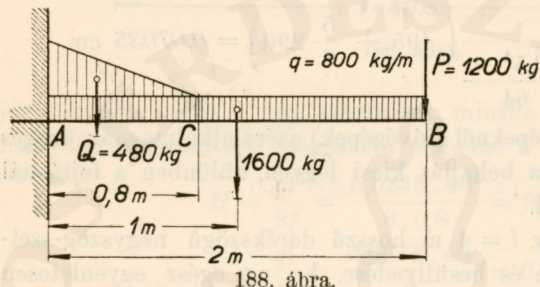
Ehhez 17.14-es gerenda kell, melynél:

$$I = \frac{14 \cdot 17^3}{12} = 5732 \text{ cm}^4$$

és
$$W = \frac{5732}{8,5} = 674 \text{ cm}^3$$

a besüllyedés pedig a középén:

$$f_{\max} = \frac{5}{384} \frac{Ql^3}{IE} = \frac{5 \cdot 1000 \cdot 400^3}{384 \cdot 5732 \cdot 120000} = 1,21 \text{ cm}$$



188. ábra.

A kisebb értéket az előbbi adja, azért a praxisban gyakran alkalmazták ezt a számítást a két végén befogott tartóra is, amely ugyan nagyobb biztonságot nyújt, de azért ezt a módszert kerüljük.

17. Milyen $\perp$ tartó szükséges a 188. ábrán vázolt terheléshez? Maximális a nyomaték a falnál:

$$M_{\max} = 1200 \cdot 200 + 1600 \cdot 100 + 480 \frac{80}{3} = 412800 \text{ kgcm}$$

tehát, ha $\sigma_m = 1000 \text{ kg/cm}^2$:

$$W = \frac{412800}{1000} = 413 \text{ cm}^3$$

(C pontig elegendő volna kisebb szelvény, mivel

$$M_c = 1200 \cdot 120 + 8 \cdot 120 \cdot 60 = 201600 \text{ kgcm}$$

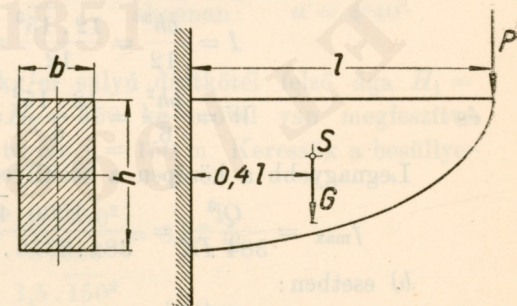
és így $W = 202 \text{ cm}^3$).

Megfelel a $\perp$ 26 N.P.

tartó, melynél $W_x = 441 \text{ cm}^3$, vagy vehetünk 2 drb.

$\perp$ 20 N.P. tartót, amelyre $W_x = 2 \cdot 214 = 428 \text{ cm}^3$.

18. Milyen terhet bír ki egy homokkő konzol a végén (189. ábra), ha figyelembe vesszük az önsúlyát is? A hosszmet szet parabolával van határolva. Méretei: $l = 1 \text{ m}$, $h = 0,5 \text{ m}$, $b = 0,25 \text{ m}$, a fajsúly $\gamma = 2 \text{ kg/dm}^3$ és $\sigma_m = 12 \text{ kg/cm}^2$ (Graf).



189. ábra.

Az önsúly kiszámítható úgy, hogy a konzolt parabola-alappal bíró b magasságú prizmának tekintjük, tehát:

$$G = \frac{2}{3} h \cdot l \cdot b \cdot \gamma = \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 10 \cdot 2,5 \cdot 2 = 166 \text{ kg}$$

és ez a parabola S súlypontjában működik, a befogástól $0,4l$ távolban. Maximális nyomaték a falnál:

$$M_{\max} = P \cdot l + G \cdot 0,4l = W \cdot \sigma_m = \frac{bh^2}{6} \cdot \sigma_m$$

$$\text{ahonnan: } P = \frac{\frac{bh^2}{6} \sigma_m - G \cdot 0,4l}{l} = \frac{\frac{1}{6} \cdot 2,5 \cdot 5^2 \cdot 1200 - 166 \cdot 0,4 \cdot 10}{10}$$

$$\text{tehát: } P = 1183,6 \text{ kg.}$$

19. Keressük a behajlást a megadott terhelés mellett (190. ábra).

Az alátámasztások között levő tartórészre a nyomaték állandó: $M = -P \cdot p$.

Míthogy tiszta hajlításról van szó, a görbületi sugár:

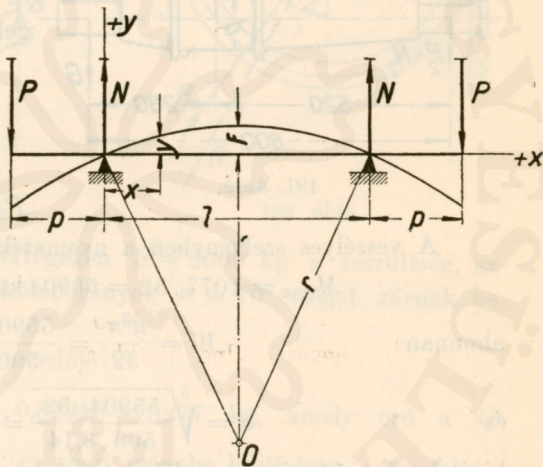
$$\frac{1}{r} = \frac{M}{I \cdot E}$$

ahonnan:

$$r = \frac{I \cdot E}{-P \cdot p}$$

A görbületi középpont koordinátái:

$$x = \frac{l}{2}$$



190. ábra.

$$y = f - r = \frac{1}{2} \sqrt{(2r)^2 - l^2}$$

A rugalmas vonal differenciálegyenlete:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{r}$$

Ennek megoldása:

$$y = -\frac{1}{2 \cdot r} x^2 + C_1 x + C_2$$

Ha $x = 0$, $y = 0$ és így $C_2 = 0$. Minthogy továbbá $x = \frac{l}{2}$ mellett $y = f$,

azért:

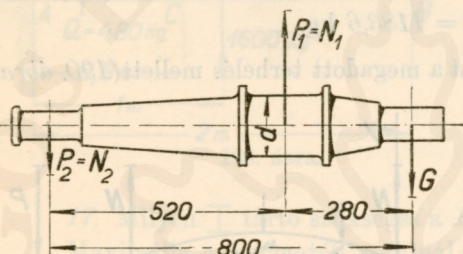
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{r} x + C_1 = 0.$$

$$x = \frac{l}{2} \quad \text{mellett:} \quad C_1 = \frac{l}{2r}$$

és így:

$$y = -\frac{1}{2r} x^2 + \frac{1}{2r} lx = -\frac{1}{2r} (x^2 - lx)$$

$$x = \frac{l}{2} \quad \text{mellett:} \quad y_{\max} = f = \frac{l^2}{8r}$$



191. ábra.

20. Szabadon hordozó tengely számítása (191. ábra).

A kerék súlya $G = 2000$ kg és $\sigma_m = 500$ kg/cm² (a tengely nem forog).

Csapágyreakciók

P_1 és P_2 :

$$P_1 = 2000 \cdot \frac{80}{52} = 3077 \text{ kg}$$

$$P_2 = 3077 - 2000 = 1077 \text{ kg}$$

A veszélyes szelvényben a nyomaték:

$$M_{\max} = 1077 \cdot 52 = 55904 \text{ kgcm} = W \cdot \sigma_m$$

ahonnan:

$$W = \frac{d^3 \pi}{32} = \frac{55904}{500}$$

és

$$d = \sqrt[3]{\frac{55904 \cdot 32}{500 \cdot 3,14}} = 10,4 \text{ cm}$$

kivitel: $d = 11$ cm.

21. Kiszámítandó valamely lépcső alátámasztására szolgáló $\square$ tartó (192. ábra), ha $\sigma_m = 750$ kg/cm² és a lépcső terhelése 450 kg/m².

Az egész lépcsőkar terhelése:

$$1,1 \cdot 5 \cdot 450 = 2475 \text{ kg}$$

és ebből esik egy $\square$ tartóra: $ql = \frac{2475}{2} = \sim 1238 \text{ kg}$.

A nyomaték:

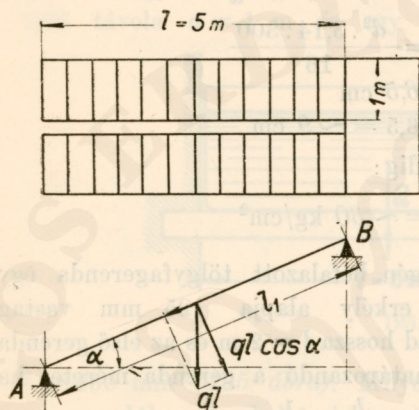
$$M_{\max} = \frac{ql \cdot \cos \alpha \cdot l_1}{8} = \frac{ql \cos \alpha}{8} \cdot \frac{l}{\cos \alpha} = \frac{ql^2}{8}$$

Tehát a tartó dölése a nyomaték nagyságára nincs befolyással, az alaprajzban l hosszúságú tartót úgy számítjuk, mintha vízszintes l hosszúságú tartóról volna szó.

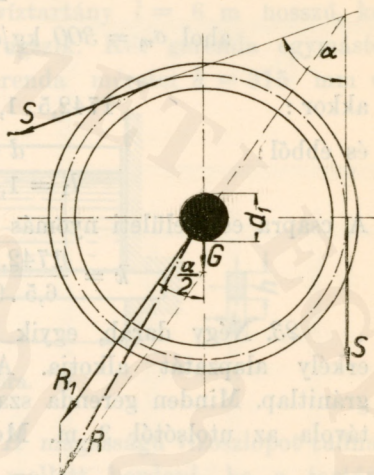
$$\text{Tehát: } W = \frac{M_{\max}}{\sigma_m} = \frac{1238 \cdot 500}{8 \cdot 750} = 103 \text{ cm}^3$$

Ennek megfelel a $\square$ 16 N. P. profil, melynél $W_x = 116 \text{ cm}^3$.

22. Keresendő a vezetőcsiga tengelyének mérete, ha a tengely



192. ábra.



193. ábra.

hossza $l = 3 \text{ m}$, s a kötélvégeken $S = 2000 \text{ kg}$ a feszültség, az önsúly $G = 250 \text{ kg}$ és a kötél-irányok $\alpha = 70^\circ$ szöget zárnak be egymással (193. ábra).

A kötél-feszültségek eredője:

$$R_1 = 2S \cos \frac{70^\circ}{2} = 2 \cdot 2000 \cdot 0,81915 = 3277 \text{ kg, amely erő a } G$$

önsúllyal az R eredőt adja, ez veszi igénybe hajlításra a tengelyt:

$$R = \sqrt{3277^2 + 250^2} + 2 \cdot 3277 \cdot 250 \cdot \cos 35^\circ = 3485 \text{ kg.}$$

A terhelési séma a 89. ábrának felel meg.

A megengedhető feszültséget kisebbnek vesszük a rendesnél, mert a tengely forog (lengőszilárdság),

$$\text{tehát: } \sigma_m = \frac{1}{3} \frac{4000}{5} = 267 = \sim 300 \text{ kg/cm}^2$$

$$M_{\max} = \frac{R}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{3485 \cdot 300}{4} = \frac{D^3 \pi}{32} 300$$

és ebből a tengely átmérője:

$$D = \sqrt[3]{\frac{3485 \cdot 300 \cdot 32}{4 \cdot 3,14 \cdot 300}} = 20,7 = \sim 21 \text{ cm}$$

Keressük a csap átmérőjét d -t. A csapokra hat $\frac{R}{2}$ erő:

$$P = \frac{R}{2} = 1742,5 \text{ kg}$$

és ha a csap hossza l_1 , a nyomaték:

$$P \frac{l_1}{2} = \frac{d^3 \pi}{32} \sigma_m$$

ahol $\sigma_m = 300 \text{ kg/cm}^2$ és legyen $\frac{l_1}{d} = 1,4$

akkor:
$$1742,5 \cdot 1,4 = \frac{d^3 \cdot 3,14 \cdot 300}{16}$$

és ebből:
$$d = 6,5 \text{ cm}$$

$$l_1 = 1,4 \cdot 6,5 = \sim 9 \text{ cm}$$

A csapra eső felületi nyomás pedig:

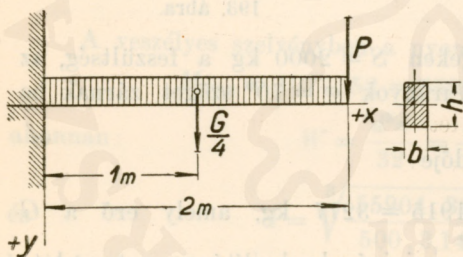
$$k = \frac{1742,5}{6,5 \cdot 9} = \sim 30 \text{ kg/cm}^2$$

23. Négy darab, egyik végén befalazott tölgyfagerenda egy erkély alapzatát alkotja. Az erkély alapja 125 mm vastag gránitlap. Minden gerenda szabad hossza $l = 2 \text{ m}$ és az első gerenda távolsága az utolsótól 3 m. Meghatározandó a gerenda mérete, ha

$\frac{b}{h} = \frac{1}{3}$ és a gerenda a szabad végén még esetleg $P = 350 \text{ kg}$ terhet hordjon.

A gránitlap egyenletesen elosztott teherképpen nehezedik a gerendákra, súlya — ha a fajsúly $\gamma = 2700 \text{ kg/m}^3$ — $G = 3 \cdot 2 \cdot 0,125 \cdot 2700 = 2025 \text{ kg}$,

ebből $\frac{1}{4}$ rész esik egy gerendára.



194. ábra.

A hajlítási alapképlet szerint: (194. ábra)

$$M_{\max} = \left(P + \frac{1}{2} \frac{G}{4} \right) l = \frac{bh^2}{6} \sigma_m = \frac{h^3}{18} \sigma_m$$

ahonnan, ha $\sigma_m = 80 \text{ kg/cm}^2$:

$$h = \sqrt[3]{\frac{\left(P + \frac{1}{2} \frac{G}{4} \right) l \cdot 18}{\sigma_m}} = \sqrt[3]{\frac{\left(350 + \frac{1}{8} 2025 \right) 200 \cdot 18}{80}}$$

ahonnan: $h = 31 \text{ cm}$, tehát $b = \frac{h}{3} = 10,3 \text{ cm}$.

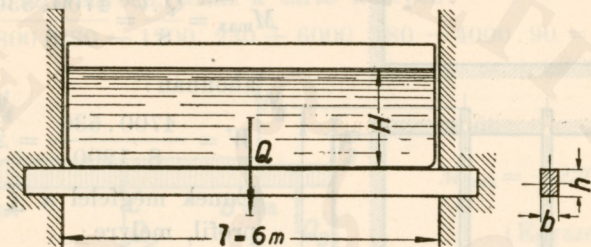
A legnagyobb besüllyedés pedig:

$$f = \frac{P \cdot l^3}{3IE} + \frac{G}{8IE} l^3 = \frac{l^3}{IE} \left(\frac{P}{3} + \frac{G}{32} \right) = \frac{200^3}{\frac{10,3 \cdot 31^3}{12} \cdot 120000} \left(\frac{350}{3} + \frac{2025}{32} \right)$$

ahonnan:

$$f = 0,467 \text{ cm}$$

24. Egy prizmatikus alakú víztartány $l = 6 \text{ m}$ hosszú, két falba beágyazott fagerendákon nyugszik. Két gerenda egymástól való távolsága $a = 1 \text{ m}$ és egy gerenda méretei $h = 315 \text{ mm}$ és



195. ábra.

$b = 250 \text{ mm}$ (195. ábra). Milyen H magasságú vízoszlopot tudnak a gerendák még kellő biztonsággal mellett hordani, ha a tartány hossza megegyezik a gerendákéval és a súlyától eltekintünk $\sigma_m = 60 \text{ kg/cm}^2$. (Graf)

Az egy gerendára eső teher $Q = l \cdot a \cdot H \cdot 1000 \text{ kg}$, mert víznél $\gamma = 1000 \text{ kg/m}^3$, avagy H értékét mm-ben betéve:

$$Q_{\text{kg}} = \frac{6000 \cdot 1000 \cdot H \cdot 1000}{1000^3} = 6 H_{\text{mm}}$$

A nyomaték két végén befalazott tartónál: $M_{\text{max}} = \frac{Q \cdot l}{12}$

azaz:

$$\frac{6 H_{\text{mm}} \cdot l}{12} = \frac{b h^2}{6} \sigma_m$$

$$\sigma_m = 0,6 \text{ kg/mm}^2, \text{ tehát } H = \frac{b h^2 \sigma_m}{3 l} = \frac{250 \cdot 315^2 \cdot 0,6}{3 \cdot 6000} = 826,87 \text{ mm}$$

azaz a vízmagasság 827 mm -nél nagyobb ne legyen.

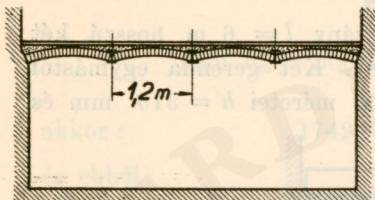
25. Valamely $4,8 \text{ m}$ széles és 5 m hosszú pincehelyiség süveg-boltozattal és padlózattal fődendő be (196. ábra). Keresendő a szükséges I tartó mérete, ha a boltozat feszítőköze $1,2 \text{ m}$. Mekkora a I tartó hossza, az alátámasztási hossz figyelembevétel? $\sigma_m = 1200 \text{ kg/cm}^2$, a falazatra megengedett nyomófeszültség $\sigma_m = 7 \text{ kg/cm}^2$ (Haren).

A boltozat súlya és terhelése rendszeresen 750 kg/m^2 . Minden tartóra jut:

$$5 \cdot 1,2 \cdot 750 = 4500 \text{ kg}$$

és a tartó önsúlya becslés szerint 200 kg , tehát egy tartóra az elosztott teher:

$$Q = ql = 4700 \text{ kg}$$



Ha az alátámasztási közök nagyságát $5,3 \text{ m}$ -nek vesszük, akkor:

$$M_{\max} = \frac{Q \cdot l}{8} = \frac{4700 \cdot 530}{8} = W \cdot \sigma_m,$$

ahonnan:

$$W = \frac{4700 \cdot 530}{8 \cdot 1200} = 260 \text{ cm}^3$$

Ennek megfelel a $\text{I} 22 \text{ N. P.}$ profil, melyre:

$$W_x = 278 \text{ cm}^3$$

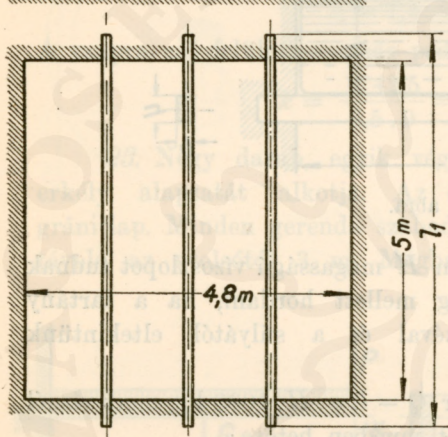
Minden felszabadító erő:

$$N = \frac{4700}{2} = 2350 \text{ kg.}$$

A falra gyakorolt nyomáshoz:

$$F = \frac{2350}{7} = 336 \text{ cm}^2$$

alátámasztó felület szükséges.



196. ábra.

A tartó övmérete $9,8 \text{ cm}$,

tehát:
$$\frac{336}{9,8} = 35 \text{ cm}$$

hosszúság szükséges és így:

$$l_1 = 5 + 2 \cdot 0,35 = 5,7 \text{ m}$$

Az önsúly a $\text{I} 22 \text{ N. P.}$ profilnál $g = 31,0 \text{ kg/m}$, tehát az egész önsúly:

$$31,0 \cdot 5,7 = \sim 177 \text{ kg}$$

26. Mekkora legnagyobb feszültség ébred a 197. ábrán vázolt terhelés mellett a négyzet-szelvényű távtóban? A tartó anyaga fa és a négyzetszelvény oldalhossza $a = 24 \text{ cm}$ (Dreyer).

A terhelések: $P_1 = P_2 = 800 \text{ kg}$

$$Q_1 = Q_3 = 1200 \text{ kg}$$

$$Q_2 = 8000 \text{ kg}$$

A szimmetrikus elrendezés miatt a felszabadító erők:

$$N_A = N_B = 6000 \text{ kg}$$

A nyíróerők ábráját megrajzolva látjuk, hogy ez három helyen változtatja előjelét, tehát három szelvényben: A-, B- és C-ben lehetséges a maximális nyomaték, ezekben kell vizsgálnunk a nyomatékokat.

Az A szelvényben:

$$M_A = M_B = -800 \cdot 100 - 1200 \frac{100}{2} = -140000 \text{ kgcm}$$

A C szelvényben, tehát a tartó közepén:

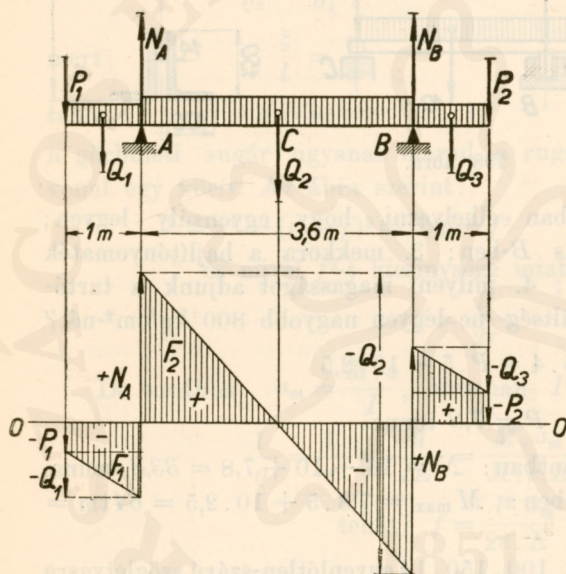
$$M_C = -800 \cdot 280 - 1200 \cdot 230 + 6000 \cdot 180 - 4000 \cdot 90 = +220000 \text{ kgcm,}$$

tehát:

$$M_{\max} = +220000 \text{ kgcm}$$

(Egyszerűbben is megkaphatjuk bármely szelvényben a nyomatékokat, azon megfontolásból, hogy mivel

$V_x = \frac{dM_x}{dx}$, tehát a nyíróerő a nyomaték differenciálhányadosa, következőképpen a nyíróerők görbéjének, a nyomatéki görbe az integrálgörbéje, tehát a nyomatéki ábra bár-



197. ábra.

mely ordinátája a nyíróerők vonala által az illető szelvényig bezárt területet adja.) Ezek szerint:

$$M_A = F_1 = -800 \cdot 100 - 1200 \frac{100}{2} = -140000 \text{ kgcm}$$

$$\text{és } M_C = F_1 + F_2 = -140000 + 4000 \frac{180}{2} = +220000 \text{ kgcm.}$$

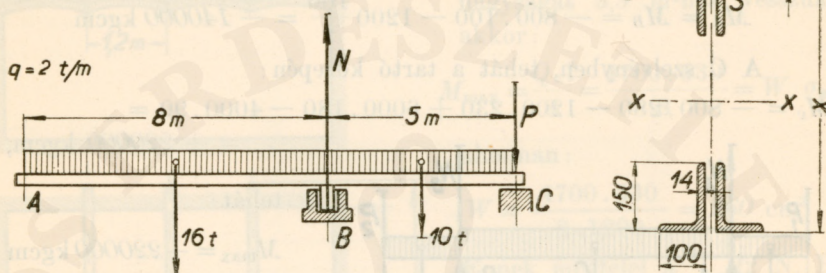
A négyszetszelvény ellenállónyomatéka:

$$W = \frac{a^3}{6} = \frac{24^3}{6} = 2304 \text{ cm}^3$$

Tehát a legnagyobb hajlítófeszültség

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{220000}{2304} = \sim 95,5 \text{ kg/cm}^2$$

27. Valamely forgó híd (ABC)-nek hossza 13 m. A híd B pontban forgathatóan van ágyazva és C-ben szabadon fekszik (198. ábra). Szelvénye 4 drb. 10.15-ös szögletvas 1,4 cm átlagos szár vastagsággal. Kérdés: 1. milyen



198. ábra.

P terhet kell C pontban elhelyezni, hogy egyensúly legyen; 2. mekkora a csapnyomás B -ben; 3. mekkora a hajlítónyomaték és a veszélyes szelvény; 4. milyen magasságot adjunk a tartónak, hogy a hajlítófeszültség ne legyen nagyobb 800 kg/cm^2 -nél?

$$16 \cdot 4 = P \cdot 5 + 10 \cdot 2,5$$

ahonnan:

$$P = 7,8 \text{ tonna.}$$

A csapnyomás B pontban: $N = 16 + 10 + 7,8 = 33,8$ tonna.
Maximális nyomaték B -ben: $M_{\max} = 7,8 \cdot 5 + 10 \cdot 2,5 = 64 \text{ tm} = 6400000 \text{ kgcm.}$

A Hütte szerint a $\angle 100 \cdot 150 \cdot 14$ egyenlőtlen-szárú szögletvasra $F = 33,2 \text{ cm}^2$, $\eta = 4,97 \text{ cm}$ és $I_{\xi} = 744 \text{ cm}^4$. Tehát:

$$I_x = 4 \left[I_{\xi} + F \left(\frac{x}{2} - \eta \right)^2 \right] = 4 \left[744 + 33,2 \left(\frac{x}{2} - 4,97 \right)^2 \right] = 33,2x^2 - 660x + 6256$$

De:

$$M_{\max} = W_x \cdot \sigma_m = \frac{I_x}{x} \cdot \sigma_m$$

tehát:

$$\frac{6400000}{800} \cdot \frac{x}{2} = 33,2x^2 - 660x + 6256$$

$$33,2x^2 - 4660x + 6256 = 0$$

ahonnan:

$$x = 139,7 \text{ cm}$$

28. Lemezrúgó méretezése.

A 126. ábra szerinti egyenszilárdságú tartónál $\frac{\xi}{l} = \frac{a_1}{a}$ és

$M_{\max} = P \cdot l = \frac{ab^2}{6} \sigma_m$, amely képletből ha b adott, az a méret kiszámítható. A görbületi sugár (199. ábra).

$$\varrho = \frac{I \cdot E}{M} = \frac{ab^3 E}{12 P \cdot l}$$

$$\varrho_x = \frac{IE}{M_x} = \frac{a_1 b^3 E}{12 P \cdot \xi}$$

$$\frac{\varrho}{\varrho_x} = \frac{a}{a_1} \frac{\xi}{l} = 1$$

mert: $\frac{\xi}{l} = \frac{a_1}{a}$

tehát: $\varrho = \varrho_x = r$

a görbületi sugár ugyanaz marad, a rugalmas vonal egy körív. Az ábra szerint:

$$l^2 = r^2 - (r - f)^2 = 2rf - f^2$$

és mivel f^2 -t kicsinysége miatt mellőzzük:

$$f = \frac{l^2}{2r}$$

De továbbá: $\sigma_m = \frac{M \cdot e}{I}$, ahonnan $I = \frac{M \cdot e}{\sigma_m}$ és

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} = \frac{M}{IE} = \frac{M \cdot \sigma_m}{M \cdot e \cdot E} = \frac{\sigma_m}{e \cdot E}$$

$$\text{tehát: } f = \frac{l^2 \cdot \sigma_m}{2e \cdot E}$$

$$\text{vagy mivel } 2e = b; f = \frac{l^2 \cdot \sigma_m}{b \cdot E}$$

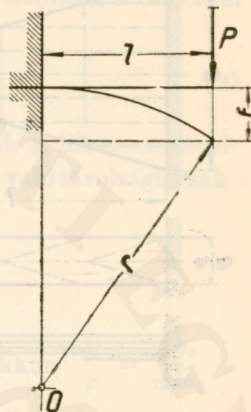
$$\text{ahonnan; } b = \frac{l^2 \cdot \sigma_m}{E \cdot f} \quad (1)$$

Ebből a képletből határozzuk meg a rúgó vastagságát és a

$$Pl = \frac{ab^2}{6} \sigma_m$$

$$\text{avagy: } a = \frac{6Pl}{b^2 \sigma_m} \quad (2)$$

képletből pedig, az a méretét. Ha a rúgó vastagsága nagy, lehet egyes lemezekből, sávokból összeállítani.



199. ábra.

Pl. Meghatározandó valamely $l = 50$ cm hosszú acélrúgó b és a mérete, amely $P = 256$ kg teher alatt $f = 6$ cm-rel hajlik meg. (200. ábra.) $E = 2000000$ kg/cm² és $\sigma_m = 4000$ kg/cm².

Az (1) képlet szerint:

$$b = \frac{l^2 \sigma_m}{E \cdot f} = \frac{50^2 \cdot 4000}{2000000 \cdot 6} = 0,8 \text{ cm}$$

A (2) képlettel pedig:

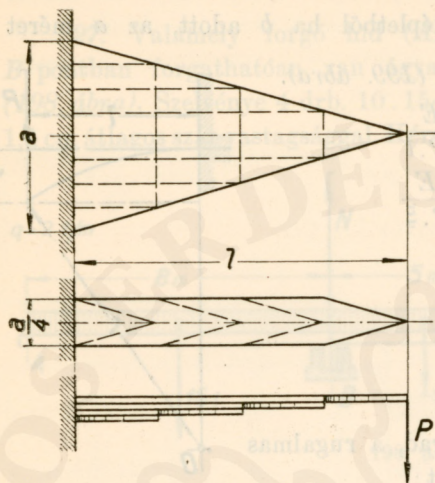
$$a = \frac{6 \cdot P \cdot l}{b^2 \cdot \sigma_m} = \frac{6 \cdot 256 \cdot 50}{0,8^2 \cdot 4000} = 36 \text{ cm}$$

Vehetünk 4 drb. à 7,5 cm széles lemezt, vagy 3 drb. à 10 cm széles lemezt.

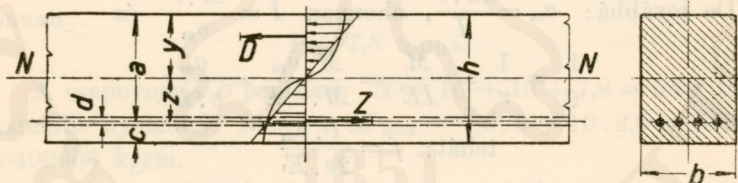
29. Keresendők a hajlításra igénybevett vasbetón-födém méretei. (201. ábra.)

A vasbetón-szerkezeteknél a beton, amely csak nyomást bír el nagyobb mértékben, húzást nem, sztatikailag

együtt hordja a terhet a vasbetétekkel. A vasbetétek a húzóerők felvételére szolgálnak, hasonlóképpen a vasrudakra hárítjuk át a csúsztató hatásokat. Amint azt a nyomásra igénybevett vasbetón-oszlop-



200. ábra.



201. ábra.

nál említettük, csak akkor tekinthető a kétféle anyagú tartó egységesnek, ha a viszonylagos alakváltozás mindkét anyagra egyforma, tehát a feszültségek eloszlását a betonnál is lineárisnak kell vennünk.

Ha i a vasbetétek száma, akkor a húzóerő: $Z = i \cdot F \cdot \sigma_v$ és ennek nyomatéka az $N-N$ semleges tengelyre: $i \cdot F \cdot \sigma_v \cdot z$, ahol $F = \frac{d^2 \pi}{4}$

egy gömbvas keresztmetszete. A semleges tengelyt azonban egyelőre nem ismerjük. Ha a nyomófeszültség σ_b , akkor a nyomó-erő

$D = \frac{y \cdot b \cdot \sigma_b}{2}$; ez az erő $\frac{2}{3} y$ távolban hat és így a húzó- és nyomó-

erők összes nyomatéka egyenlő a terheléseknek megfelelő hajlító-nyomatékkal:

$$M_h = i \cdot F \cdot \sigma_v \cdot z + \frac{1}{3} y^2 \cdot b \cdot \sigma_b \quad (1)$$

További feltétel, hogy $D = Z$, mert a feszültségek algebrai összege zéró, tehát:

$$i \cdot F \cdot \sigma_v = \frac{y \cdot b \cdot \sigma_b}{2} \quad (2)$$

A betón és a vas fajlagos hosszváltozásainak y , illetve z távolságban úgy kell aránylaniuk, mint a semleges rétegtől való távolságuknak:

$$\frac{\frac{\sigma_b}{E_b}}{\frac{\sigma_v}{E_v}} = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_v} = \frac{y}{z} = \frac{E_v \sigma_b}{E_b \sigma_v}$$

ha $\frac{E_b}{E_v} = n_1$, ahol $n_1 = \frac{1}{15}$ és $n = \frac{1}{n_1} = 15$, akkor $\frac{y}{z} = \frac{\sigma_b}{n_1 \sigma_v}$

azaz: $\sigma_v = \frac{\sigma_b}{n_1} \cdot \frac{z}{y}$ és $\sigma_b = n_1 \sigma_v \frac{y}{z}$ (3)

Helyettesítsük ezt be a (2) egyenletbe:

$$i \cdot F \cdot \sigma_v = \frac{1}{2} y \cdot b \cdot \sigma_v n_1 \frac{y}{z}$$

$$i \cdot F = \frac{1}{2} y \cdot b \cdot n_1 \frac{y}{z} \quad (4)$$

$$\text{és } iF = \frac{y^2}{2} b \frac{n_1}{z}$$

$$\text{de: } z = a - y$$

$$\text{és így: } i \cdot F (a - y) = \frac{y^2}{2} b \cdot n_1$$

amely egyenlet megoldható y -ra:

$$\frac{y^2}{2} b n_1 + iFy - iFa = 0$$

$$y^2 + \frac{2 \cdot i \cdot F y}{b \cdot n_1} - \frac{2iFa}{b \cdot n_1} = 0$$

$$y = -\frac{i \cdot F}{b \cdot n_1} \pm \sqrt{\frac{i^2 F^2}{b^2 \cdot n_1^2} + \frac{2iFa}{b \cdot n_1}} \quad (5)$$

$$\text{avagy, ha } \frac{1}{n_1} = n = \frac{E_v}{E_b}:$$

$$y = \frac{i \cdot F \cdot n}{b} \left(\sqrt{1 + \frac{2ab}{i \cdot F \cdot n}} - 1 \right) \quad (5a)$$

Ha az (1) sz. egyenletben z helyett az immár ismert $(a - y)$ értéket írjuk, akkor:

$$M_h = i \cdot F \cdot \sigma_v (a - y) + \frac{1}{3} y^2 \cdot b \cdot n_1 \sigma_v \frac{y}{a - y}$$

és mivel a (4) egyenletből:

$$i F = \frac{1}{2} y \cdot b \cdot n_1 \frac{y}{a - y} \quad \text{tehát}$$

$$\begin{aligned} M_h &= i \cdot F \cdot \sigma_v (a - y) + \frac{2}{3} y \cdot i \cdot F \cdot \sigma_v = \sigma_v \left[i F (a - y) + \frac{2}{3} i F y \right] = \\ &= \sigma_v \left(i F a - i F y + \frac{2}{3} i F y \right) = \sigma_v \left(i F a - \frac{1}{3} i F y \right) = i F \sigma_v \left(a - \frac{y}{3} \right) \\ \text{és} \quad \sigma_v &= \frac{M_h}{i \cdot F \left(a - \frac{y}{3} \right)} \end{aligned} \quad (6)$$

Ebből az egyenletből pedig a (2) alatti egyenlet alapján kapjuk, hogy a betonban keletkező nyomófeszültség:

$$\sigma_b = \frac{2 \cdot i \cdot F \cdot \sigma_v}{y \cdot b} = \frac{2 i F}{y \cdot b} \cdot \frac{M_h}{i \cdot F \left(a - \frac{y}{3} \right)} = \frac{2 M_h}{y \cdot b \left(a - \frac{y}{3} \right)} \quad (7)$$

Pl. Határozzuk meg valamely 5 m belvilágosságú vasbetón-födém méreteit, ha az önsúly becslés szerint $q_1 = 300 \text{ kg/m}^2$, a hasznos teher $q_2 = 550 \text{ kg/m}^2$, tehát az összes teher $q = 850 \text{ kg/m}^2$.

A födémről 1 m széles részt veszünk alapul, azaz $b = 100 \text{ cm}$. A két végén befogott tartónál:

$$M_{\max} = \frac{q l^2}{12} = \frac{850 \cdot 25}{12} = 1770 \text{ kgm} = 177000 \text{ kgcm}$$

Ha csupán betónból állana a tartó és $\sigma_b = 30 \text{ kg/cm}^2$, akkor a szükséges ellenállónyomaték:

$$W = \frac{b h^2}{6} = \frac{177000}{30}$$

ahonnan:

$$h = \sqrt{\frac{177000 \cdot 6}{30 \cdot 100}} = \sqrt{354} = 18,81 = \sim 19 \text{ cm}$$

Ha mármost 1 m széles részre 12 drb. 18 mm átmérőjű betétvasat alkalmazunk, akkor:

$$i F = i \frac{d^2 \pi}{4} = 12 \frac{1,8^2 \cdot 3,14}{4} = 12 \cdot 2,54 = 30,48 \text{ cm}^2$$

Ha a betétrasakat a felső szélről számítva $a = 16$ cm távolban választjuk meg, akkor az (5a) egyenlettel:

$$y = \frac{30,48 \cdot 15}{100} \left(\sqrt{1 + \frac{2 \cdot 16 \cdot 100}{30,48 \cdot 15}} - 1 \right) = 8,36 \text{ cm}$$

A (6) egyenlet szerint pedig:

$$\sigma_v = \frac{177000}{30,48 \left(16 - \frac{8,36}{3} \right)} = \frac{177000}{30,48 \cdot 13,21} = 440 \text{ kg/cm}^2$$

A (7) egyenlettel:

$$\sigma_b = \frac{2 \cdot 177000}{8,36 \cdot 100 \cdot 13,21} = 32,1 \text{ kg/cm}^2$$

Amint látjuk, a vas nincs jól kihasználva, mert kicsiny a megengedett feszültség. Ha 12 drb. 14 mm-es vasbetétet veszünk, akkor:

$$F = 1,54 \text{ cm}^2$$

$$iF = 18,5 \text{ cm}^2$$

$$\text{és akkor } y = \frac{18,5 \cdot 15}{100} \left(\sqrt{1 + \frac{2 \cdot 16 \cdot 100}{18,5 \cdot 15}} - 1 \right) = 7,03 \text{ cm}$$

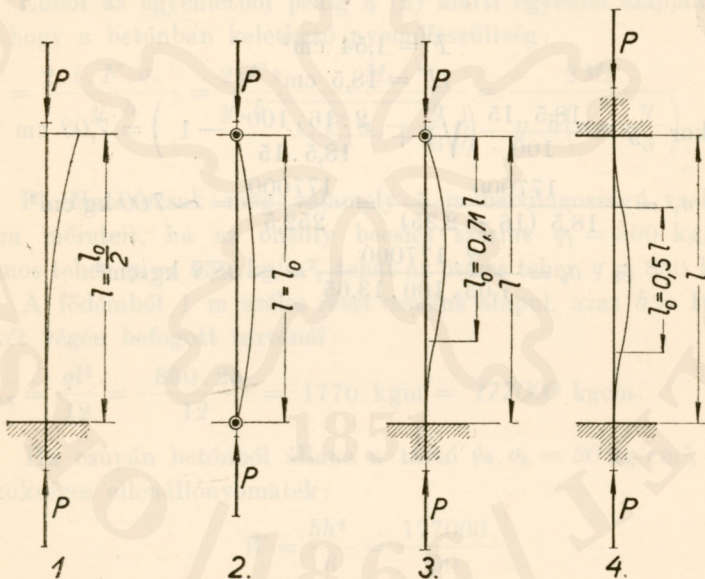
$$\sigma_v = \frac{177000}{18,5 (16 - 2,35)} = \frac{177000}{252,5} = \sim 700 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{és } \sigma_b = \frac{2 \cdot 177000}{7,03 \cdot 100 \cdot 13,65} = \sim 38,8 \text{ kg/cm}^2$$

IV. FEJEZET.

34. §. Kihajlás elleni szilárdság.

Rövid tartó centrikus összenyomásából kihajlás keletkezik akkor, ha a tartó hossza egy bizonyos határt túllépett. Míg rövid tartónál — melynél a tartó hossza kisebb, mint keresztmetszévényé átmérőjének, vagy négyszög-szelvényénél a kisebbik oldalának átlag



202. ábra.

négyszerese — a tartó tengelye mindig egyenes, még ha eltörik is a törökúpok mentén a test; addig a hossza tartó tengelye centrikus terhelés mellett kihajlik. A kihajlás azért következik be, mert egyrészt a teher nem működhetik teljesen pontosan centrikusan, másrészt pedig az anyag nem homogén, hibák vannak benne, így a feszültségek eloszlása nem egyenletes.

A hosszú tartót tehát összenyomó terhelés mellett kihajlás elleni, visszaható szilárdságra méretezzük; ilyenkor természetesen a megengedhető terhelés kisebb, mint az ugyanolyan keresztiszelvényű és anyagú rövid prizmánál.

Az oszlopok megerősítését illetőleg négy esetet kell megkülönböztetni (202. ábra):

1. lehet a tartó egyik végén szilárdan megerősítve és a másik vége szabad.

2. mindkét végén csuklóba fogva,

3. egyik végén szilárdan, a másik végén csuklószerűen megerősítve — és

4. mindkét végén szilárdan megerősítve.

Az ábrán l a tartó hossza, l_0 pedig a kihajlási hossz.

Kihajlásra igénybevett tartók méretezése az Euler-, Tetmajer-, Schwarz—Rankine- és Navier—Tetmajer-képletekkel történhetik.

Euler képletei a négy esetnek megfelelően:

$$1) P = \frac{\pi^2 \cdot I_{\min} \cdot E}{4 \cdot l^2 \cdot \beta}$$

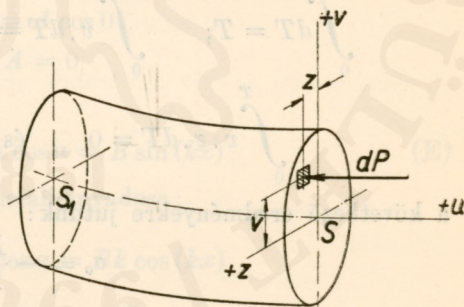
$$3) P = \frac{2\pi^2 \cdot I_{\min} \cdot E}{l^2 \cdot \beta}$$

$$2) P = \frac{\pi^2 \cdot I_{\min} \cdot E}{l^2 \cdot \beta}$$

$$4) P = \frac{4\pi^2 \cdot I_{\min} \cdot E}{l^2 \cdot \beta}$$

amely képletekben P kg a β biztonsággal melletti teher, $I_{\min}^{cm^4}$ a szelvény minimális tehetetlenségi nyomatéka, E kg/cm² a tartó anyagának derék-elaszticitási modulusza és l cm a tartó szabad hossza

Az első és legkedvezőtlenebb esetben a derékfeszültség kifejezését a hajlítószilárdsági alapösszefüggésből kapjuk, ha figyelembe vesszük, hogy a teher összes szállítóhatása a mozgó u tengely irányában (203. ábra) nagy-



203. ábra.

ságra egyenlő az összenyomó teherrel, de jelre nézve negatív, mert a teher összenyomó,

$$\sigma = \frac{dP}{dT};$$

$$dP = \sigma \cdot dT$$

és

$$\sigma = \sigma_0 - \frac{E + \sigma_0}{\rho} v \quad (A)$$

Az összes hatások:

$$\int_0^T \sigma . dT = - R$$

$$\int_0^T \sigma . v . dT = + M_z$$

$$\int_0^T \sigma . z . dT = 0$$

Ezekbe σ fenti értékét behelyettesítve az (A)-ból:

$$\sigma_o \int_0^T dT - \frac{E + \sigma_o}{\varrho} \int_0^T v . dT = - R$$

$$\sigma_o \int_0^T v . dT - \frac{E + \sigma_o}{\varrho} \int_0^T v^2 . dT = + M_z$$

$$\sigma_o \int_0^T z . dT - \frac{E + \sigma_o}{\varrho} \int_0^T v . z . dT = 0$$

Figyelembe véve, hogy:

$$\int_0^T dT = T; \quad \int_0^T v . dT = 0; \quad \int_0^T z . dT = 0;$$

$$\int_0^T v . z . dT = 0 \quad \text{és} \quad \int_0^T v^2 . dT = I_z$$

a következő eredményekre jutunk:

$$\sigma_o = - \frac{R}{T}$$

és

$$\frac{E + \sigma_o}{\varrho} = - \frac{M_z}{I_z}$$

vagy:

$$\frac{1}{\varrho} = - \frac{M_z}{E . I_z}$$

mivel a σ_o mellőzhető az E mellett.

Ha ezen két eredményt az (A) egyenletbe tesszük, lesz:

$$\sigma = - \left(\frac{R}{T} \pm \frac{M_z}{I_z} v \right) \quad (\text{B})$$

Voltaképpen tehát összetett igénybevétellel van dolgunk. *A hajlítónyomatékot csak a rugalmas vonal egyenletének alapján állapíthatjuk meg.* Keressük ezért az R erő nyomatékát a tetszőleges B pont körül (204. ábra):

$$M_x = yR \cos \alpha - xR \sin \alpha$$

De mivel R erő a maradó tartórészt támadja meg, azért ellenkező jellel kell vennünk, s így:

$$M_x = xR \sin \alpha - yR \cos \alpha$$

Mint már ismeretes:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{IE} \quad (C)$$

$$\text{és így: } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{xR \sin \alpha - yR \cos \alpha}{IE} \quad (D)$$

A (C) és (D)-vel jelölt egyenlet adja az alapszilárdsági összefüggést. A másodrendű differenciálegyenlet megoldása:

$$xR \sin \alpha - yR \cos \alpha = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

ahol A , B és k ismeretlen állandók.

Mivel az O kezdőpontra nézve $x = 0$ és $y = 0$, azért:

$$0 = A \cos 0$$

$$\text{vagyis: } A = 0$$

s így marad, hogy

$$xR \sin \alpha - yR \cos \alpha = B \sin(kx) \quad (E)$$

Ennek x szerinti differenciálhányadosa:

$$R \sin \alpha - \frac{dy}{dx} R \cos \alpha = Bk \cos(kx)$$

Még B és k értékeket kell meghatározni. Mivel a x tengely a rugalmas vonal érintője, azért ha $x = 0$,

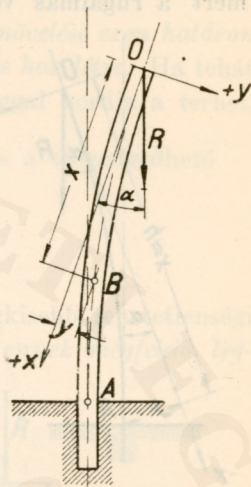
$$\frac{dy}{dx} = 0$$

és így:

$$R \sin \alpha = Bk$$

azaz:

$$B = \frac{R \sin \alpha}{k} \quad (F)$$



204. ábra.

Ha $x = h$ (205. ábra), akkor: $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$

mert a rugalmas vonal A pontjának érintője parallel az erővel

Tehát:

$$R \sin \alpha - R \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha = B \cdot k \cos(hk) = 0,$$

mert az A pontra az R erő nyomatéka állandó, s így ennek a differenciálhányadosa zéró.

Az utolsó egyenlet tehát csak akkor állhat fenn, ha

$$hk = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{vagyis: } k = \frac{\pi}{2h}$$

s így a fentiek alapján egyúttal:

$$B = \frac{R \cdot \sin \alpha \cdot 2h}{\pi}$$

205. ábra.

Ezen értékeket felhasználva, lesz:

$$R \sin \alpha - R \cos \alpha \frac{dy}{dx} = R \sin \alpha \cos \left(\frac{\pi x}{2h} \right)$$

és újból differenciálva x szerint:

$$-R \cos \alpha \frac{d^2 y}{dx^2} = -R \sin \alpha \frac{\pi}{2h} \cdot \sin \left(\frac{\pi x}{2h} \right)$$

s ebből a (D) és (E) egyenletek alapján:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\pi \operatorname{tg} \alpha}{2h} \sin \left(\frac{\pi x}{2h} \right) = \frac{B \sin(kx)}{IE}$$

Ha most B és k fent talált értékeit behelyettesítjük, kapjuk, hogy

$$\frac{R \sin \alpha \cdot 2h}{\pi \cdot I \cdot E} \cdot \sin \frac{\pi x}{2h} = \frac{\pi \operatorname{tg} \alpha}{2h} \sin \frac{\pi x}{2h}$$

ahonnan:

$$\cos \alpha = \frac{\pi^2 \cdot I \cdot E}{4h^2 \cdot R}$$

Ha a tartó egyenesen állva kibírja a terhet, akkor $\alpha = 0$ és $h = l$.

$$R_0 \leq \frac{\pi^2 \cdot I \cdot E}{4l^2}$$

Ellenben meghajlik a prizma, ha

$$R > \frac{\pi^2 \cdot I \cdot E}{4l^2}$$

sőt, mint a kísérletek igazolták, R -nek csekély növelése ezen határon túl már nem csupán kihajlást, hanem törést is hoz létre. Ha tehát azt akarjuk, hogy a tartó bizonyos β biztossággal hordja a terhet,

úgy ez utóbbi csak: $P = \frac{R}{\beta}$ lehet, vagyis a megengedhető

terhelés:

$$P = \frac{\pi^2 \cdot I \cdot E}{4l^2 \beta}$$

Ezen Euler-féle képletben I a szelvény legkisebb tehetetlenségi nyomatékát jelenti, mert a tartó mindig az ennek megfelelő, legnagyobb főtételenségi tengely körül fog kihajolni.

Megközelítő módon is levezethető az Euler-képlet. A rugalmas vonal ténylegesen sinus-görbe. Ha ezt megközelítéssel körnek vesszük (206. ábra), akkor a hajlítási alapösszefüggés:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{IE}$$

Most legyen a befogás a második esetnek megfelelően kétszuklós.

Veszélyes szelvény a középén van, itt a nyomaték:

$$M = R \cdot f$$

tehát:
$$\frac{1}{\varrho} = \frac{Rf}{IE} \quad (1)$$

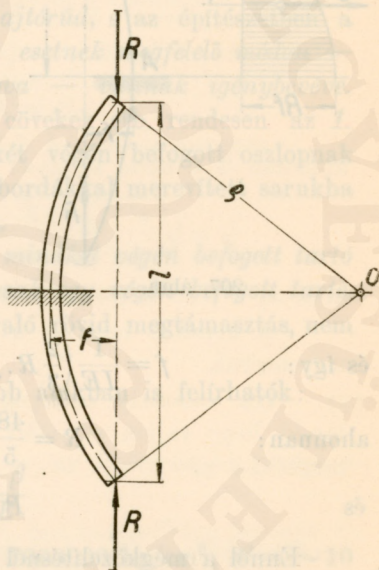
De

$$\varrho^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + (\varrho - f)^2$$

$$\varrho^2 = \frac{l^2}{4} + \varrho^2 - 2\varrho f + f^2$$

ahol f^2 mint másodrendű kicsiny érték mellőzhető, marad:

$$\frac{l^2}{4} = 2\varrho f$$



206. ábra.

ahonnan:
$$\frac{1}{\varrho} = \frac{8f}{l^2} \quad (2)$$

Tehát (1) és (2) alapján:

$$\frac{Rf}{IE} = \frac{8f}{l^2}$$

azaz:
$$R = \frac{8 \cdot I \cdot E}{l^2} \quad \text{terhelés töri el az oszlopot}$$

és
$$P = \frac{8 \cdot I \cdot E}{l^2 \beta} \quad \text{lesz } \beta \text{ biztonsággal mellett}$$

a teher. Ennél az eljárásnál 8 van a számlálóban a $\pi^2 = 9,87$ helyett.

Ha pedig a rugalmas vonalat parabolának vesszük (207. ábra), akkor A pontban a nyomaték:

$$M = R \cdot f$$

és a nyomaték-terület súlypontjának távolsága:

$$\frac{5}{8} \frac{l}{2} = \frac{5}{16} l$$

tehát a 26. §-ban mondottak alapján:

$$H \cdot f = \frac{R \cdot l f}{3} \cdot \frac{5}{16} l$$

és így:
$$f = \frac{1}{IE} \left(\frac{2}{3} R \cdot f \cdot \frac{l}{2} \right) \frac{5}{16} l = \frac{5}{48} \cdot \frac{R \cdot f \cdot l^2}{IE}$$

ahonnan:
$$R = \frac{48}{5} \frac{IE}{l^2} = 9,6 \frac{IE}{l^2}$$

és
$$P = \frac{9,6}{l^2 \beta} IE$$

Ennél a megközelítésnél $\pi^2 \approx 9,6$.

A 202. ábrán feltüntetett többi három esetet könnyű az elsőre visszavezetni, itt csak a végeredményeket adjuk.

Euler képletei, melyekből β biztonság mellett alkalmazott terheléshez, a szelvény minimális tehetetlenségi nyomatéka és ebből a szelvény méretei meghatározhatók, a következők:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad P &= \frac{\pi^2 \cdot I_{\min} E}{4 l^2 \beta} & \text{és ha } \pi^2 &\approx 10 & P &= \frac{2,5 I_{\min} E}{l^2 \beta} \\ 2) \quad P &= \frac{\pi^2 \cdot I_{\min} E}{l^2 \beta} & \gg & & P &= \frac{10 I_{\min} E}{l^2 \beta} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} 3) \quad P &= \frac{2 \pi^2 \min E}{l^2 \beta} & \text{és ha } \pi^2 &= \sim 10 & P &= \frac{20 I_{\min} E}{l^2 \beta} \\ 4) \quad P &= \frac{4 \pi^2 I_{\min} E}{l^2 \beta} & » & & P &= \frac{40 I_{\min} E}{l^2 \beta} \end{aligned} \right\} (3)$$

A kihajlási hossz l_0 a négy esetben:

- 1) $l_0 = 2l$
- 2) $l_0 = l$
- 3) $l_0 = 0,71l$
- 4) $l_0 = 0,5l$

Mind a négy esetre érvényes összevont *Euler*-képlet:

$$P = \frac{\pi^2 \cdot I_{\min} E}{l_0^2 \cdot \beta} \quad \text{és} \quad I_{\min} = \frac{P \cdot l_0^2 \cdot \beta}{\pi^2 \cdot E} \quad (3a)$$

A gépészetben a *dugattyúrúd*, *hajtórúd*, s az építészetben a *rácsos szerkezetek összes rúdjai* a 2. esetnek megfelelő módon — *mindkét végükön csuklószerűen befogva* — *vannak igénybevéve*. Az építészetben a gerendák, oszlopok, cövekek stb. rendszeren az 1. esetnek felelnek meg; egy vagy mindkét végén befogott oszlopnak csak az tekintendő, mely külön nagy bordákkal merevített sarukba van helyezve avagy le van horgonyozva.

A 4. eset a legkedvezőbb, u. i. *a mindkét végén befogott tartó 16-szor akkora terhet bír el, mint a csak egy végén befogott tartó*. Megjegyzendő, hogy a felületek által való rövid megtámasztás, nem tekinthető befogásnak!

Az *Euler*-képletek még egyszerűbb alakban is felírhatók:

I. Öntöttvas-oszlopoknál:

$$I_{\min} = \frac{P \cdot l^2 \cdot \beta}{\pi^2 \cdot E}$$

a második eset képlete. Ha $\beta = 8$; $E = 1000000 \text{ kg/cm}^2$; $\pi^2 = \sim 10$
 $100 \text{ } l_m = l_{cm}$ és $1000 P_{tonna} = P_{kg}$, akkor:

$$I_{\min}^{cm^4} = \frac{1000 \cdot P_t \cdot (100 \text{ } l_m)^2 \cdot 8}{10 \cdot 1000000} = 8 \cdot P_t \cdot l_m^2$$

$$\text{és} \quad P_t = \frac{0,125 I_{\min}}{l_m^2} \quad (4)$$

II. Folytvasra:

$$\beta = 5; E = 2150000 \text{ kg/cm}^2$$

$$I_{\min} = 2,33 P_t \cdot l_m^2 \quad \text{és} \quad P_t = \frac{0,43 I_{\min}}{l_m^2}$$

III. Forrasztott- és hegesztettvasra :

$$\beta = 5; E = 2000000 \text{ kg/cm}^2$$

$$I_{\min} = 2,5 \cdot P_t \cdot l_m^2 \quad \text{és} \quad P_t = \frac{0,4 I_{\min}}{l_m^2}$$

IV. Fára :

$$\beta = 10; E = 120000 \text{ kg/cm}^2$$

$$I_{\min} = 83,3 \cdot P_t \cdot l_m^2 \quad \text{és} \quad P_t = \frac{0,012 I_{\min}}{l_m^2}$$

(4)

Ha e képletekben l_m helyett a kihajlási hosszat, l_0 -t tesszük be méterekben kifejezve, mind a négy esetre érvényes formulákat nyerünk.

A tartó kritikus hossza. Minden oszlop egy bizonyos mértékig összenyomható anélkül, hogy kihajolna. Az a kritikus erő, melynél a tartó egyforma biztonsággal hordja a terhet, akár összenyomásra, akár kihajlásra számítjuk,

$$P_k = F \cdot \sigma = \frac{\pi^2 \cdot I_{\min} \cdot E}{l_k^2 \cdot \beta}$$

ahonnan l_k a tartó kritikus hossza :

$$l_k = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot I_{\min} \cdot E}{\beta \cdot P_k}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot I_{\min} \cdot E}{\beta \cdot \sigma \cdot F}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot I_{\min} \cdot E}{S_2 \cdot F}} \quad (5)$$

ahol $S_2 = \beta \cdot \sigma$ a törőszilárdság.

A kritikus hosszon alul összenyomásra, ezen felül kihajlásra méretezünk.

Ha valamely oszlopot tervezünk, ez egyidejűleg megvizsgálandó, hogy vajon valamely előre megválasztott szelvényre az $I_{\min}$ megfelel-e az :

$$I_{\min} = \frac{P \cdot l_0^2 \cdot \beta}{\pi^2 \cdot E} \quad \text{egyenletnek,}$$

továbbá eldöntendő az is, hogy annak területe legalább is egyenlő-e a

$$F \geq \frac{P}{\sigma} \quad \text{értékkel.}$$

Ugyanis valamely nagy átmérőjű, de kis falvastagságú oszlop inercia-nyomatéka a szükségesnél nagyobb lehet ugyanakkor, midőn területe kisebb, mint amit a $\frac{P}{\sigma}$ érték megkíván. Ilyen esetben természetesen a falvastagság növelendő.

Tetmajer praktikus kísérletei igazolták, hogy az Euler-egyenletek csak bizonyos karcsúsági viszonyok mellett érvényesek.

Karcsúsági viszony x alatt értjük a kihajlási hossz és a minimális tehetetlenségi-sugár hányadosát :

$$x = \frac{l}{i}$$

ahol :

$$i = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}}$$

Ha x egy bizonyos értéknél kisebb, akkor a Tetmajer-féle képletek használandók, így öntöttvasnál $x = 80$; folytvasnál $x = 105$; hegesztett-, forrasztott-vasnál $x = 112$ és fánál $x = 100$ azon határ-értékek, melyeken alul az Euler-képletek nem érvényesek.

Tetmajer képlete :

$$P = \frac{F \cdot k_0}{\beta} \quad (6)$$

ahol k_0 a kihajlás elleni szilárdság, amelyet ő kísérletileg állapított meg, mint x -től függő értéket.

$$P = \frac{F \cdot k_0}{\beta} = \frac{\pi^2 \cdot I_{\min} \cdot E}{l^2 \cdot \beta}$$

az Euler-képlet szerint és ha β mindkét képletben ugyanaz,

$$k_0 = \pi^2 \frac{I_{\min}}{F} \frac{E}{l^2} = \pi^2 \frac{i^2}{l^2} E$$

mert :

$$\frac{I_{\min}}{F} = i^2$$

De

$$x^2 = \left(\frac{l}{i} \right)^2 = \pi^2 \frac{E}{k_0}$$

és így

$$x = \frac{l}{i} = \pi \sqrt{\frac{E}{k_0}} \quad (7)$$

Ebből a képletből nyerte Tetmajer, az Euler-képlet érvényességi határát.

Ha öntöttvasnál $E = 1000 \text{ t/cm}^2$, k_0 -t is t/cm^2 -ben fejezzük ki,

$$k_0 = \pi^2 E \left(\frac{i}{l} \right)^2 = \sim 10 \cdot 1000 \left(\frac{i}{l} \right)^2 = 10000 \left(\frac{i}{l} \right)^2$$

illetve pontosan :

$$k_0 = 9870 \left(\frac{i}{l} \right)^2$$

Amíg $\frac{l}{i} \geq 80$, addig k_0 lineárisan változik a karcsúsági viszony szerint,

ha $\frac{l}{i} < 80$, akkor már egy speciális, kísérletekkel megállapított görbe szerint változik.

I. Öntöttvasnál

Tetmajer-képlete használandó, ha $\frac{l}{i} < 80$

ilyenkor $k_0 = + 7,76 - 0,12 \left(\frac{l}{i} \right) + 0,00053 \left(\frac{l}{i} \right)^2$

Ha pedig $\frac{l}{i} \geq 80$, akkor az *Euler*-képlettel számítunk, itt: $k_0 = 9870 \left(\frac{i}{l} \right)^2 \text{ t/cm}^2$

II. Folytvasnál

Tetmajer-képlete használandó, ha $\frac{l}{i} < 105$

ekkor $k_0 = 3,1 - 0,0114 \left(\frac{l}{i} \right)$

Ha pedig $\frac{l}{i} \geq 105$, akkor az *Euler*-képleteket használjuk. (8)

III. Hegesztett vasnál

míg $\frac{l}{i} < 112$, *Tetmajer* szerint

$$k_0 = 3,03 - 0,129 \left(\frac{l}{i} \right)$$

Ha pedig $\frac{l}{i} \geq 112$, *Euler* képleteit használjuk.

IV. Fánál

míg $\frac{l}{i} < 100$, *Tetmajer* szerint

$$k_0 = 0,293 - 0,00194 \left(\frac{l}{i} \right)$$

Ha pedig $\frac{l}{i} \geq 100$, *Euler* képletei érvényesek.

A (7) egyenletből kapjuk, hogy

$$k_0 = \frac{\pi^2 E}{x^2} \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

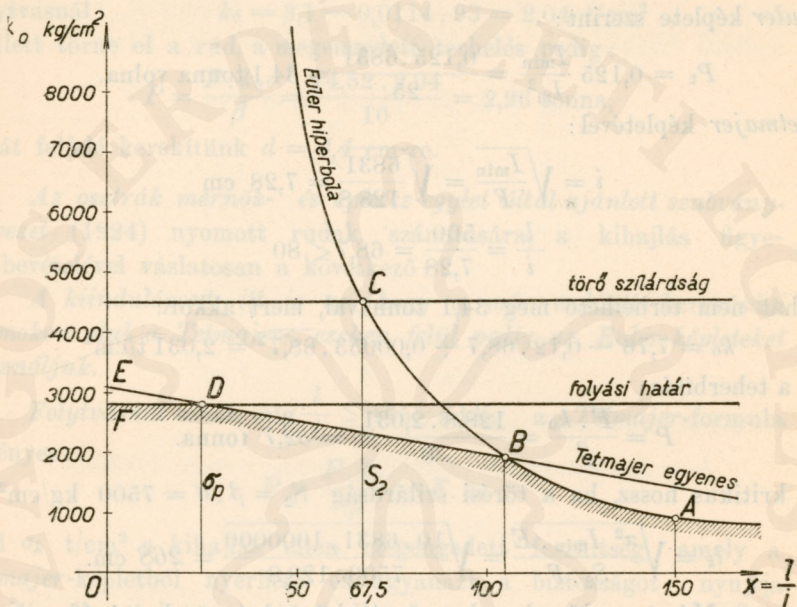
amely egyenlet egy harmadfokú hiperbola (*Euler*-hiperbola) egyenlete. Folytvasnál, melyre $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$, a törőszilárdság $S_2 = 4500 \text{ kg/cm}^2$ és a folyási határ $\sigma_p = \sim 2800 \text{ kg/cm}^2$; az *Euler*-

hiperbolát a 208. ábra tünteti fel. Ugyancsak folytvasnál Tetmajer szerint:

$$k_0 = 3100 - 11,4 x \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

amely viszont a ferde egyenes (Tetmajer-egyenes) egyenlete.

Az ábrából látható, hogy $x = 105$ karcsúsági viszony mellett a két vonalnak közös pontja van, ennél nagyobb x érték mellett az Euler-képlet, kisebb x értéknél pedig a Tetmajer-formula használandó!



208. ábra.

Bizonyos karcsúságon alul pedig a tartó, mint rövid tartó méretezendő. Az ábrában a C pont abszcisszája a kritikus hosszhoz tartozó karcsúsági viszony. Az (5) egyenlet szerint ugyanis

$$\left(\frac{l_k}{i}\right)^2 = \frac{\pi^2 E}{S_2} = x_k^2$$

ahonnan :

$$x_k = \frac{l_k}{i} = \pi \sqrt{\frac{E}{S_2}} = 3,14 \sqrt{\frac{2100000}{4500}} = 67,5$$

Ha a folyási határnak megfelelő egyenest megrajzoljuk, akkor a D pontnak megfelelőleg kapjuk azt a karcsúsági viszonyt, amelynél kisebb érték mellett — idevágó újabb kísérletek alapján — a kihajlás elleni szilárdságot a mindenkorli folyási határral vehetjük egyenlőnek és amelynél nagyobb karcsúsági érték mellett, a kihajlás

elleni szilárdságot, már a *Tetmajer*-képletből kell pontosan megállapítani.

Példák. 1. Valamely két csuklóba fogott öntöttvas-oszlop külső átmérője $d = 22,5$ cm, belső átmérője $d_1 = 18,5$ cm, hossza $l = 5$ m. Kérdés: $\beta = 8$ mellett mennyi az oszlop hordképessége?

$$I = 6831 \text{ cm}^4$$

$$F = 128,8 \text{ cm}^2$$

Euler képlete szerint:

$$P_t = 0,125 \frac{I_{\min}}{l_m^2} = \frac{0,125 \cdot 6831}{25} = 34,1 \text{ tonna volna.}$$

Tetmajer képletével:

$$i = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{6831}{128,8}} = 7,28 \text{ cm}$$

és
$$\frac{l}{i} = \frac{500}{7,28} = 68,7 < 80$$

tehát nem terhelhető meg 34,1 tonnával, mert akkor:

$$k_0 = 7,76 - 0,12 \cdot 68,7 + 0,00053 \cdot 68,7^2 = 2,031 \text{ t/cm}^2$$

és a teherbírás:

$$P = \frac{F \cdot k_0}{\beta} = \frac{128,8 \cdot 2,031}{8} = 32,7 \text{ tonna.}$$

A kritikus hossz, ha a törési szilárdság $S_2 = \beta \cdot \sigma = 7500 \text{ kg/cm}^2$

$$l_k = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot I_{\min} \cdot E}{S_2 \cdot F}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 6831 \cdot 1000000}{7500 \cdot 128,8}} = 268 \text{ cm.}$$

2. Méretezendő valamely gőzgép körszelvényű hajtórúdja, ha ennek hossza $l = 1$ m, a gőzhenger átmérője $D_b = 25$ cm, a gőznyomás $p = 8 \text{ at}$, az ellennyomás $p_0 = 1,2 \text{ at}$ és $\beta = 10$. A befogás kétszuklós.

A terhelő erő:
$$P = \frac{25^2 \cdot 3,14}{4} (8 - 1,2) = 3300 \text{ kg}$$

Euler-képlettel:
$$P = \frac{\pi^2 \cdot I_{\min} \cdot E}{l^2 \beta}$$

és
$$I_{\min} = \frac{P \cdot l^2 \cdot \beta}{\pi^2 \cdot E} = \frac{3300 \cdot 10000 \cdot 10}{10 \cdot 2000000} = 16,5 \text{ cm}^4$$

$$\frac{d^4 \pi}{64} = \sim \frac{d^4}{20} = 16,5$$

ahonnan:
$$d = \sqrt[4]{20 \cdot 16,5} = \sqrt[4]{330} = \sim 4,3 \text{ cm}$$

Tetmajer-képlettel:

$$i = \sqrt[3]{\frac{\frac{d^4 \pi}{64}}{\frac{d^2 \pi}{4}}} = \frac{d}{4} = 1,075 \text{ cm}$$

$$\text{és} \quad \frac{l}{i} = \frac{100}{1,075} = 93 < 105$$

folytvasnál: $k_0 = 3,1 - 0,0114 \cdot 93 = 2,04 \text{ t/cm}^2$

mellett törne el a rúd, a megengedett terhelés pedig:

$$P = \frac{F \cdot k_0}{\beta} = \frac{14,52 \cdot 2,04}{10} = 2,96 \text{ tonna,}$$

tehát felfelé kerekítünk $d = 4,4 \text{ cm-re}$.

Az osztrák mérnök- és építész-egylet által ajánlott szabványtervezet (1924) nyomott rudak számítására, a kihajlás figyelembevételével vázlatosan a következő:

A kiindulópont itt is az, hogy a már említett karcsúsági számokon alul a Tetmajer-, ezeken felül pedig az Euler-képleteket használjuk.

Folytvasnál tehát, míg $\frac{l}{i} \leq 105$, addig a Tetmajer-formula érvényes:

$$P = \frac{F \cdot k_0}{\beta} = F \cdot \sigma_k$$

ahol $\sigma_k \text{ t/cm}^2$ a kihajlás ellen megengedett feszültség, amely a Tetmajer-képletből nyerhető és ugyanazt a biztonságot nyújtja kihajlás ellen, mint σ_m a törés ellen.

$$\beta = \frac{S}{\sigma_m}$$

tehát a tartó egyforma biztonsággal áll a teher alatt akár rövid, akár hosszú, ha:

$$F \cdot \sigma_k = \frac{F \cdot k_0}{\beta} = \frac{F \cdot k_0 \cdot \sigma_m}{S}$$

ahonnan:

$$\sigma_k = \frac{k_0}{S} \sigma_m$$

k_0 a karcsúsági viszonytól függő tényező és folytvasnál: $S = 3,8 \text{ t/cm}^2$.

$$\sigma_k = \frac{3,1 - 0,0114 \left(\frac{l}{i} \right)}{3,8} \sigma_m = \alpha \cdot \sigma_m$$

ahol α kisebbitő számnak neveztetik és mindig

$$\alpha < 1$$

A képletből látható, hogy kihajlásra kisebb feszültség van megengedve, mint összenyomásra.

Legyen $\frac{1}{\alpha} = \omega > 1$

akkor: $\sigma_k = \frac{\sigma_m}{\omega} \text{ t/cm}^2$

ahol ω a kihajlás elleni szám, amelynek különböző karcsúságok melletti értékei az alábbi táblázatból vehetők, így folytvasnál:

ha $\frac{l}{i} = 30$	akkor $\omega = 1,38$
50	1,5
80	1,7
100	1,94
120	2,58
140	3,51
160	4,58
180	5,8
200	7,16

(közbeeső értékeknél interpolálunk).

A szabványtervezet szerinti számítás menete tehát:

$$\sigma_k = \frac{P}{F}$$

ahonnan: $F = \frac{P}{\sigma_k}$

amely képletben: $\sigma_k = \frac{\sigma_m}{\omega}$

Ha folytvasnál $\frac{l}{i} > 105$, akkor az Euler-képlet érvényes,

ilyenkor: $P = \frac{F \cdot k_0}{\beta} = \frac{\pi^2 \cdot I_{\min} \cdot E}{l^2 \cdot \beta}$

ahonnan: $k_0 = \pi^2 \frac{I_{\min}}{F} \cdot \frac{E}{l^2} = \pi^2 \left(\frac{i}{l} \right)^2 E = 9,87 \cdot 2150 \left(\frac{i}{l} \right)^2 =$

$$= 21220 \left(\frac{i}{l} \right)^2 \text{ t/cm}^2 \quad (9a)$$

és $\sigma_k = \frac{21220 \left(\frac{i}{l} \right)^2}{38} \sigma_m = \alpha \cdot \sigma_m = \frac{\sigma_m}{\omega} \text{ t/cm}^2$

Öntöttvasra:

$$\left. \begin{aligned} \text{ha } \frac{l}{i} \leq 80, \text{ akkor } \sigma_k &= \frac{7,76 - 0,12 \left(\frac{l}{i} \right) + 0,00053 \left(\frac{l}{i} \right)^2}{8} \sigma \\ \text{ha } \frac{l}{i} > 80, \text{ akkor } \sigma_k &= \frac{9870 \left(\frac{i}{l} \right)^2}{8} \sigma \end{aligned} \right\} \quad (9b)$$

ahol σ t/cm² a tiszta nyomásra megengedett feszültség; $S_2 = 8$ t/cm²

ha $\frac{l}{i} = 50$,	akkor $\omega = 2,59$
80	» 5,15
100	» 8,1
120	» 11,67
150	» 18,24

Például az előbb kiszámított öntöttvas-oszlopnál: $k_0 = 2,031$ t/cm²

$$\sigma_k = \frac{2,031}{8} \sigma = \frac{1}{3,94} \sigma$$

tehát: $\omega = 3,94$

$\beta = 8$ mellett: $\sigma = 1000$ kg/cm²

$$\sigma_k = \frac{\sigma}{\omega} = \frac{1000}{3,94} = 254 \text{ kg/cm}^2$$

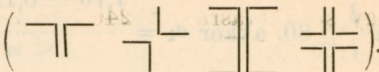
a szükséges keresztmetszvény tehát:

$$F = \frac{P}{\sigma_k} = \frac{32700}{254} = 129 \text{ cm}^2$$

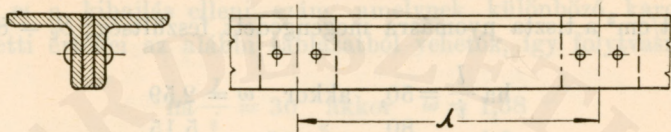
Fára:

$$\left. \begin{aligned} \text{ha } \frac{l}{i} \leq 100, \text{ akkor } \sigma_k &= \frac{0,293 - 0,00194 \left(\frac{l}{i} \right)}{0,28} \sigma \\ \text{ha } \frac{l}{i} > 100, \text{ akkor } \sigma_k &= \frac{987 \left(\frac{i}{l} \right)^2}{0,28} \sigma \end{aligned} \right\} \quad (9c)$$

ha $\frac{l}{i} = 50$,	akkor $\omega = 1,43$
80	» 2,03
120	» 4,08
150	» 6,38
200	» 11,35

Rácsos művek nyomott rúdjaik kihajlásra számíthatjuk, két-csuklós befogást feltételezve. A nyomott rudak többnyire két, ritkábban négy profilvasból állanak ().

Ha a rúd szelvényét 2, vagy általában n különálló részből állíthatjuk össze, akkor — egyenletes erőelosztást feltételezve — bizonyos



209. ábra.

távolságokban az egyes részeket kis betételemezekkel kell összekötni (209. ábra), hogy egymáshoz képest ki ne hajoljanak. Ezt a λ távolságot úgy számíthatjuk ki, hogy minden egyes rész a rá jutó $\frac{P}{n}$ erőhatás alatt a kihajlással szemben éppen oly ellenálló legyen, mint az egész rúd. Egy profilra érvényes, hogy

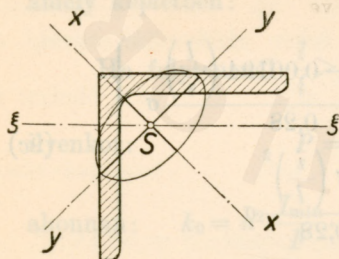
$$I'_{\min} = 2,5 \cdot P_t' \cdot \lambda_m^2 \quad (10)$$

ahol: $P_t' = \frac{P_t}{n}$ az egy profilra jutó erő, azaz

$$I'_{\min} = 2,5 \frac{P_t}{n} \lambda_m^2$$

ahonnan:

$$\lambda = \sqrt{\frac{n \cdot I'_{\min}}{2,5 \cdot P_t}} \quad (11)$$



210. ábra.

ahol $I'_{\min}$ az egyes profilra vonatkozó legkisebb inercia-nyomaték. Így például a két szögletvasból álló szelvényénél () $I'_{\min} = I_y$ (210. ábra), míg az egész profilra vonatkozólag

$$I_{\min} = 2 \cdot I_{\xi}$$

A számításnál ügyelni kell olyankor, midőn a főtehetetlenségi tengelyek helyzete eltérő az egyes- és összszelvényénél.

Pl. Valamely földszék nyomott rúdja két szögletvasból áll . Az erő $P = 27300$ kg és a rúd hossza $l = 1,9$ m. Számítsuk ki a profilt.

Euler-képlettel ($\beta = 5$):

$$I_{\min} = 2,5 \cdot P_t \cdot l_m^2 = 2,5 \cdot 27,3 \cdot 1,9^2 = 246 \text{ cm}^4$$

Egy szögletvasra jut $246/2 = 123 \text{ cm}^4$, a legközelebbi nagyobb a Hüttéből a $\square 90.90.11$, $I_x = 138 \text{ cm}^4$.

Tetmajer-képlettel ellenőrizve ($\beta = 4$ -t vehetünk):

$$k_0 = 3,1 - 0,0114 \cdot 70 = 2,3 \text{ t/cm}^2$$

$$\text{mert: } i = \sqrt{\frac{2 \cdot 138}{2 \cdot 18,7}} = \sqrt{7,38} = 2,72 \text{ cm és } \frac{l}{i} = \frac{190}{2,72} = 70$$

$$F = \frac{P \cdot \beta}{k_0} = \frac{27,3 \cdot 4}{2,3} = 47,5 \text{ cm}^2$$

eaneak megfelel 2 drb. 110.110.12-es szögletvas.

Használhatjuk visszaható szilárdságra igénybevett tartók — főleg öntöttvas-oszlopok, általában üreges szelvények — számítására a *Schwarz-Rankine-képleteket* is. Mind a négy befogási esetre érvényes a következő formula:

$$P = \frac{F \cdot \sigma}{1 + \alpha \frac{F \cdot l_0^2}{I_{\min}}} = \frac{F \cdot \sigma}{1 + \alpha \left(\frac{l_0}{i} \right)^2} \quad (12)$$

ahol P kg a megengedhető teher, $F \text{ cm}^2$ a szelvény területe, $\sigma \text{ kg/cm}^2$ a rövid tartónál nyomásra megengedett feszültség, $I_{\min}^{\text{cm}^4}$ a szelvény minimális inercia-nyomatéka, $l_0 \text{ cm}$ a kihajlási hossz és α az anyagi minőségtől függő koefficiens

öntött vasnál $\alpha = 0,0007 \sim 0,00061$

kovácsvasnál $\alpha = 0,00014 \sim 0,00015$

hegesztett-vasnál $\alpha = 0,00016$

fánál (tölgy) $\alpha = 0,00022 \sim 0,00023$

A képletek az egyes esetekre a következők:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad P &= \frac{F \cdot \sigma}{1 + 4\alpha \left(\frac{l}{i} \right)} \\ 2) \quad P &= \frac{F \cdot \sigma}{1 + \alpha \left(\frac{l}{i} \right)^2} \\ 3) \quad P &= \frac{F \cdot \sigma}{1 + \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{l}{i} \right)^2} \sim \frac{F \cdot \sigma}{1 + \frac{4}{9}\alpha \left(\frac{l}{i} \right)^2} \\ 4) \quad P &= \frac{F \cdot \sigma}{1 + \frac{1}{4}\alpha \left(\frac{l}{i} \right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

Végül a *Navjer—Tetmajer-képlet*, hajtórudak és dugattyúrudak méretszámítására, a következő:

$$P = \frac{F \cdot \sigma}{z} \quad (13)$$

ahol P kg a terhelés; F cm² a tartó keresztmetszvénye, σ_m kg/cm² a megengedett összenyomó-feszültség rövid tartónál és z a kisebbítő tényező:

$$z = f(m)$$

továbbá: $m = \frac{L}{i}$ ahol

L a rúd hossza és i a minimális inercia-sugár.

Körszelvéynél, mint ismeretes, a minimális tehetetlenségi-sugár

$$i = \frac{d}{4}$$

tehát: $m = \frac{4L}{d}$

és $d = \frac{4L}{m}$

amely értéket felhasználva:

$$P = \frac{16L^2 \pi \sigma}{4m^2 z} = \frac{4L^2 \pi \sigma}{zm^2}$$

ahonnan: $m \sqrt{z} = 2L \sqrt{\frac{\pi \cdot \sigma}{P}} \quad (14)$

E képlet könnyebb használatára szolgál a következő táblázat, melyből m és z értéke kiolvasható, ha $m \sqrt{z}$ ismeretes; utóbbit pedig L , P és σ ismeretével kiszámíthatjuk. A táblázat *Tetmajer kísérletei alapján* van összeállítva, s forrasztott és folytvasra érvényes.

V. Táblázat $m \sqrt{z}$ értékeiről.

$m = \frac{L}{i}$	z	$m \sqrt{z}$	$m = \frac{L}{i}$	z	$m \sqrt{z}$	$m = \frac{L}{i}$	z	$m \sqrt{z}$
80	1,00	80	135	2,26	203	190	4,53	404
85	1,15	90	140	2,41	217	195	4,76	425
90	1,24	100	145	2,58	233	200	5,08	451
95	1,33	110	150	2,75	249	205	5,37	475
100	1,42	119	155	2,94	266	210	5,68	500
105	1,51	129	160	3,13	283	215	6,00	527
110	1,62	139	165	3,34	302	220	6,33	554
115	1,73	151	170	3,55	320	225	6,68	582
120	1,85	163	175	3,78	340	230	7,03	610
125	1,98	176	180	4,02	361	235	7,40	639
130	2,11	189	185	4,27	382	240	7,67	669

Pl. A 216. oldalon kiszámított hajtórudat ellenőrizzük a Navier—Tetmajer-képlettel. Az adatok voltak:

$$D = 25 \text{ cm}; L = 100 \text{ cm}; p_{\text{hasznos}} = 6,8 \text{ at};$$

$$P = 3300 \text{ kg}; \sigma = \frac{3600}{10} = 360 \text{ kg/cm}^2; \beta = 10$$

$$m \sqrt{z} = 2 \cdot 100 \sqrt{\frac{3,14 \cdot 360}{3300}} = 116$$

ennek megfelel a táblázatból:

$$z = 1,39$$

$$\text{Tehát: } P = \frac{F \cdot \sigma}{1,39}$$

$$F \cdot \sigma = 1,39 P \text{ (mint rövid tartó összenyomása)}$$

$$\text{ahonnan: } F = \frac{d^2}{1,273} = \frac{1,39 \cdot 3300}{360} = 12,7 \text{ cm}^2$$

$$\text{és } d = \sqrt{16,2} = 4,03 \text{ cm}$$

Euler-képlettel 4,3 cm-t kaptunk. Tetmajer szerint volt 4,4, tehát a Navier—Tetmajer képletével nyert érték valamivel kisebb. (Vehetjük az értékek számtani közepesét, 4,2 cm-t.)

Ha pedig a szelvény *négyszögletes*, mint pl. ha a hajtórudak valódi szelvényét átalakítjuk vele egyenlő területű négyszöggé (211. ábra) akkor a b és a oldalak közötti arányt felvéve:

$$b = \xi \cdot a$$

ahol $\xi > 1$ (leggyakrabban $\xi = 2$), alkalmazhatjuk a Navier—Tetmajer-képletet:

$$P = \frac{F \cdot \sigma}{z}$$

A tehetetlenségi sugár:

$$i = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{b a^3}{12 \cdot a b}} = \frac{a}{\sqrt{12}}$$

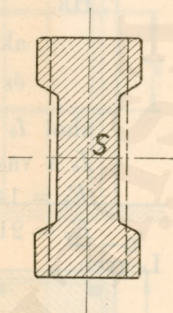
$$m = \frac{L}{i} = \frac{L \sqrt{12}}{a}$$

$$\text{és } a = \frac{L \sqrt{12}}{m}$$

$$\text{Az erő: } P = \frac{a b \cdot \sigma}{z} = \frac{\xi a^2 \cdot \sigma}{z} = \xi \frac{12 L^2 \sigma}{m^2 z}$$

ahonnan:

$$m \sqrt{z} = L \sqrt{\frac{12 \cdot \xi \cdot \sigma}{P}}$$



211. ábra.

Adott esetben L , P , σ és ξ ismeretesek, ezekből $m\sqrt{\alpha}$, ehhez pedig táblázatból a α és m kikereshető, tehát a szükséges kereszt-szelvény területe:

$$F = \frac{P \cdot \alpha}{\sigma}$$

és a négyszög oldalai már megállapíthatók.

Viszont, ha adott szelvényű rúd teherbírását, vagy adott teher mellett a rúd hosszát keressük, akkor m , illetve α számítható ki az adatokból közvetlenül, s ezek segítségével oldjuk meg a feladatot.

35. §. Vasbetón-oszlop kihajlás elleni szilárdsága.

A számítást *Euler* képletével eszközöljük, kétsuklós befogás esetén tehát:

$$P = \frac{\pi^2 \cdot I_{\min} \cdot E}{l^2 \cdot \beta}$$

és ebből: $I_{\min} \cdot E = \frac{P \cdot l^2 \cdot \beta}{\pi^2}$

Ha $\beta = 10$ és $\pi^2 \approx 10$,

akkor: $I_{\min} \cdot E = Pl^2$

és $I_b \cdot E_b + I_v \cdot E_v = Pl^2$

ahol I_b a betónszelvény minimális inercia-nyomatéka;

I_v a vasbetétek szelvényének inercia-nyomatéka;

$E_b = 140000 \text{ kg/cm}^2$ a betón elaszticitási modulusza;

$E_v = 2150000 \text{ kg/cm}^2$ a vas elaszticitási modulusza.

Legyen:

$$\frac{E_v}{E_b} = \frac{2150000}{140000} = \sim 15 = n$$

akkor:

$$E_v \left(I_v + I_b \frac{E_b}{E_v} \right) = Pl^2$$

ahonnan:

$$P = \frac{E_v \left(I_v + \frac{I_b}{n} \right)}{l^2} \text{ a terhelőerő.} \quad (15)$$

Pl. Kiszámítandó valamely négyzetszelvényű vasbetón-oszlop (212. ábra.) a következő adatok mellett:

$$P = 20000 \text{ kg}$$

$$l = 6 \text{ m}$$

$$\sigma_b = 40 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_v = 1000 \text{ kg/cm}^2$$

Először a vasbetétek nélküli, tiszta betonoszlop szükséges szelvényét határozzuk meg az *Euler*-képlettel:

$$I_{\min} = \frac{P \cdot l^2 \cdot \beta}{\pi^2 \cdot E} = \frac{20000 \cdot 360000 \cdot 10}{10 \cdot 140000} = 51450 \text{ cm}^4 = \frac{a^4}{12}$$

ahonnan:

$$a = \sqrt[4]{51450 \cdot 12} = 28 \text{ cm}$$

Alkalmazzunk 4 drb. $d = 2 \text{ cm}$ átmérőjű vasbetétet; ekkor az a méretet kisebbre vehetjük.

Legyen: $a = 25 \text{ cm}$

és legyen: $b = 20 \text{ cm}$, a betétvasak egymástól való távolsága.

$$I_v = 4 \frac{d^2 \pi}{4} \left(\frac{b}{2} \right)^2 = 4 \frac{2^2 \cdot 3,14}{4} \cdot 10^2 = 1256 \text{ cm}^4$$

mert a vasbetétszelvény saját tengelyére való tehetetlenségi nyomatéka igen kicsi, úgyhogy elhanyagolható.

A terhelő erő ezen adatok alapján:

$$P = \frac{2150000 \left(1256 + \frac{25^4}{12} \cdot \frac{1}{15} \right)}{360000} = \sim 20000 \text{ kg}$$

tehát az oszlop a választott méretekkal megfelelő.

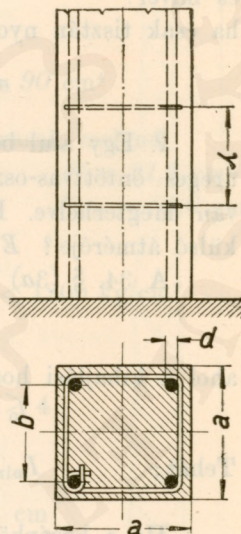
Bár a betétvasak egészen betonba vannak ágyazva — mint a kísérletek mutatják — mégis kihajolhatnak. Ezért kengyelekkel kötjük össze őket. Keressük az összekötések távolságát, λ -t (212. ábra).

Legyen egy vasbetét minimális inercianyomatéka $I_{\min}$, akkor:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot I_{\min} \cdot E_v}{\beta P'}}$$

ahol:

$$P' = \frac{d^2 \pi}{4} \sigma_v$$



212. ábra.

$$\begin{aligned} \text{tehát: } \lambda &= \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot I_{\min} \cdot E_v}{\beta \frac{d^2 \pi}{4} \sigma_v}} = \sqrt{\frac{10 \cdot \frac{d^4 \pi}{64} \cdot 2150000}{5 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot \sigma_v}} = \\ &= 519 \frac{d}{\sqrt{\sigma_v}} \quad (16) \end{aligned}$$

Példánkban:

$$\lambda = 519 \frac{2}{\sqrt{1000}} = 32,9 \text{ cm}$$

a kengyelek egymástól való távolsága.

Példák a IV. fejezethez.

1. Milyen terhelést bír el visszaható szilárdságra egy két végén megtámasztott (2. eset) $l = 3 \text{ m}$ hosszú 16.18 cm -es négyszögszelvényű tölgyfagerenda, melynél $E = 120000 \text{ kg/cm}^2$; ha $\beta = 12,5$

$$I_{\min} = \frac{18 \cdot 16^3}{12} = 6144 \text{ cm}^4$$

tehát a terhelés a 34 § (3) képletével:

$$P = \frac{\pi^2 I_{\min} E}{l^2 \beta} = \frac{10 \cdot 6144 \cdot 120000}{300^2 \cdot 12,5} = 6554 \text{ kg}$$

és mivel:

$$F = 16 \cdot 18 = 288 \text{ cm}^2$$

ha csak tisztán nyomásra számítanánk, a feszültség:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{6554}{288} = 22,8 \text{ kg/cm}^2$$

2. Egy alul befogott és felül megtámasztott (csuklóba fogott) üreges öntöttvas-oszlop $l = 4,5 \text{ m}$ hosszú és $P = 30000 \text{ kg}$ -mal van megterhelve. Ha a falvastagsága $\delta = 2 \text{ cm}$, mekkora a D_k külső átmérője? $E = 1000000 \text{ kg/cm}^2$ és $\beta = 7,5$.

A 34. § (3a) képletével:

$$I_{\min} = \frac{P \cdot l_0^2 \cdot \beta}{\pi^2 E}$$

ahol a kihajlási hossz jelen esetben:

$$l_0 = 0,71 l = 0,71 \cdot 450 = 320 \text{ cm}$$

Tehát:

$$I_{\min} = \frac{30000 \cdot 320^2 \cdot 7,5}{10 \cdot 1000000} = 2304 \text{ cm}^4$$

Ha a középkör átmérője: $D = \frac{D_k - D_b}{2}$, ahol D_b a belső átmérő, akkor $I_{\min}$ közel a következő értékkel fejezhető ki:

$$I_{\min} = 0,4 \cdot D^3 \cdot \delta = I$$

$$2304 = 0,4 \cdot D^3 \cdot 2$$

ahonnan:

$$D = \sqrt[3]{\frac{2304}{0,4 \cdot 2}} = 14,2 \text{ cm}$$

Tehát:

$$D_k = 14,2 + 2 = 16,2 \text{ cm}$$

és

$$D_b = 14,2 - 2 = 12,2 \text{ cm}$$

Ha nem a falvastagság, hanem a:

$$\frac{D_b}{D_k} = \psi$$

érték volna adva, akkor D_k az:

$$I_{\min} = \frac{(D_k^4 - \psi^4 D_k^4) \pi}{64} = \frac{D_k^4 (1 - \psi^4) \pi}{64} = I$$

képletből volna számítandó.

3. Valamely egyenszárú szögletvas $l = 1,5$ m hosszban $P = 21000$ kg erővel van kihajlásra igénybevéve. Milyen profil választandó, ha Euler szerint legalább 4-, Tetmajer szerint pedig 2,3-szeres a biztosság? A megengedett nyomófeszültség $\sigma_m = 1200$ kg/cm² és folytvasra $E = 2100000$ kg/cm².

Nyomásra szükséges:

$$F = \frac{P}{\sigma_m} = \frac{21000}{1200} = 17,5 \text{ cm}^2$$

Euler szerint szükséges:

$$I_{\min} = \frac{P \cdot l^2 \cdot \beta}{\pi^2 E} = \frac{21000 \cdot 150^2 \cdot 4}{10 \cdot 2100000} = 90 \text{ cm}^4$$

Választunk tehát 110.110 10-es szögletvasat, melynél

$$F' = 21,2 \text{ cm}^2$$

$$I'_{\min} = 98,6 \text{ cm}^4$$

Ellenőrzés.

nyomófeszültség: $\sigma = \frac{P}{F'} = \frac{21000}{21,2} = 990 < 1200 \text{ kg/cm}^2$

Euler szerinti biztosság (β_E)

$$\beta_E = \beta \frac{I'_{\min}}{I_{\min}} = 4 \frac{98,6}{90} = 4,38 > 4$$

Tehetetlenségi sugár:

$$i = \sqrt{\frac{I'_{\min}}{F'}} = \sqrt{\frac{98,6}{21,2}} = 2,155 \text{ cm}$$

Karcúság:

$$\alpha = \frac{l}{i} = \frac{150}{2,155} = 70 < 105$$

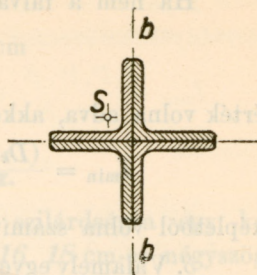
Tetmajer szerinti biztosság (β_T) a 34. § (8) egyenletcsoport szerint:

$$\beta_T = \frac{F' \cdot k_0}{P} = \frac{21,2 \cdot 3100}{21000} (1 - 0,00368 \cdot 70) = 2,32 > 2,3$$

A biztossági követelmények tehát ki vannak elégítve.

4. Valamely $l = 2,4$ m hosszú oszlop négy, egymással közvetlenül összehajtogatott szögletvasból áll és $P = 90$ t legnagyobb terhelésre számítandó (213. ábra). Előírások: $\sigma_m = 1200$ kg/cm², $\beta = 5$ (Euler) és $\beta' = 2,5$ (Tetmajer); $E = 2100000$ kg/cm².

Milyen profil választandó?



213. ábra.

Nyomásra szükséges

szelvény:

$$F = \frac{90000}{1200} = 75 \text{ cm}^2$$

Kihajlásra szükséges:

$$I_{\min} = \frac{P \cdot l^2 \cdot \beta}{\pi^2 \cdot E} = \frac{90000 \cdot 240^2 \cdot 5}{10 \cdot 2100000} = 1240 \text{ cm}^4$$

Egy szögletvasra, ha a szögecslyukakat nem vonjuk le (nyomott szelvény), ebből jut:

$$I_b = \frac{I_{\min}}{4} = \frac{1240}{4} = 310 \text{ cm}^4$$

Választunk 4 db. $\perp 90.90.13$ szögletvasat, melynél:

$$F' = 4 \cdot 21,8 = 87,2 \text{ cm}^2$$

$$I' = 4 \cdot 317 = 1268 \text{ cm}^4$$

és

$$I' = 4I_b$$

Ellenőrzés.

nyomófeszültség:

α_j

$$\sigma = \frac{P}{F'} = \frac{90000}{87,2} = 1030 < 1200 \text{ kg/cm}^2$$

Euler szerinti biztonság:

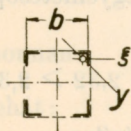
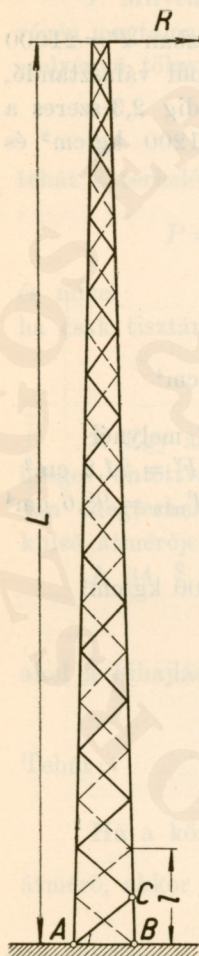
$$\beta_E = \beta \frac{I'}{I} = 5 \frac{1268}{1240} = 5,11 > 5$$

tehetetlenségi sugár:

$$i = \sqrt{\frac{I'}{F'}} = \sqrt{\frac{1268}{87,2}} = 3,81 \text{ cm}$$

karcsúság:

$$x = \frac{l}{i} = \frac{240}{3,81} = 63 < 105$$



214. ábra.

Tetmajer szerinti biztosság:

$$\beta_T = \frac{F' \cdot k_0}{P} = \frac{87,2 \cdot 3100}{90000} (1 - 0,00368 \cdot 63) = 2,3 < 2,5$$

Ez a biztosság kicsi, nagyobb profilt kell venni. Vegyünk 4 db.
110.110.12 szögletvasat, ennél: $F'' = 4 \cdot 25,1 = 100,4 \text{ cm}^2$

$$I'' = 4I_b = 4 \cdot 529 = 2116 \text{ cm}^4$$

Ellenőrzés.

nyomófeszültség: $\sigma = \frac{P}{F''} = \frac{90000}{100,4} = \sim 900 < 1200 \text{ kg/cm}^2$

Euler szerinti biztosság: $\beta_E = \beta \frac{I''}{I} = 5 \frac{2116}{1240} = 8,5 > 5$

tehetetlenségi sugár: $i = \sqrt{\frac{I''}{F''}} = \sqrt{\frac{2116}{100,4}} = \sim 4,6 \text{ cm}$

karcsúság: $x = \frac{l}{i} = \frac{240}{4,6} = 52 < 105$

Tetmajer szerinti biztosság:

$$\beta_T = \frac{F'' \cdot k_0}{P} = \frac{100,4 \cdot 3100}{90000} (1 - 0,00368 \cdot 52) = 2,78 > 2,5$$

6. Valamely szögletvasakból összeszőgecselt árbóc számítandó a 214. ábrán feltüntetett méretek mellett. $L = 16 \text{ m}$ az árbóc magassága, egy mező hossza alul $l = 1,7 \text{ m}$, a legnagyobb terhelés $R = 1600 \text{ kg}$, az alsó rendszer szélessége $b = 0,96 \text{ m}$. Előírva: $\sigma_m = 1500 \text{ kg/cm}^2$, $E = 2150000 \text{ kg/cm}^2$, *Euler* szerint $\beta = 3$ - és *Tetmajer* szerint $\beta = 2$ -szeres biztosság (*Dreyer*).

Az A pontra felírt nyomatéki egyenletből feltéve, hogy R erő egyenletesen oszlik el a két főszaruzatra, kapjuk:

$$\frac{R}{2} L = P \cdot b$$

ahonnan az egy szögletvasra jutó nyomóerő:

$$P = \frac{R \cdot L}{2b} = \frac{1600 \cdot 1600}{2 \cdot 96} = 13333 \text{ kg}$$

Nyomásra szükséges szelvény:

$$F = \frac{P}{\sigma_m} = \frac{13333}{1500} = 8,9 \text{ cm}^2$$

Kihajláshoz szükséges:

$$I_{\min} = \frac{P \cdot l^2 \cdot \beta}{\pi^2 \cdot E} = \frac{13330 \cdot 170^2 \cdot 3}{10 \cdot 2150000} = 54 \text{ cm}^4$$

Választunk $\perp 75.75.8$ -as profilt, melynél $F'' = 11,5 \text{ cm}^2$
 $I''_{\xi} = 58,9 \text{ cm}^4$

Minthogy a szomszédos falakon párhuzamosak a nyomott átlós rudak (214. ábra), azért az egyes l hosszúságú szögletvasak csak a falra merőlegesen hajolhatnak ki, ezért is nem az: $I_{\min} = I_y$, hanem az I_x jön tekintetbe.

Ellenőrzés (Dreyer szerint),
nyomófeszültség:

$$\sigma = \frac{P}{F'} = \frac{13333}{11,5} = 1160 < 1500 \text{ kg/cm}^2$$

Euler szerinti biztosság:

$$\beta_E = \beta \frac{I'}{I} = 3 \frac{58,9}{54} = 3,27 > 3$$

tehetetlenségi sugár:

$$i = \sqrt{\frac{I'}{F'}} = \sqrt{\frac{58,9}{11,5}} = 2,26 \text{ cm}$$

karcsúság:
$$x = \frac{l}{i} = \frac{170}{2,26} = 75,3 < 105$$

Tetmajer szerinti biztosság:

$$\beta_T = \frac{F' k_0}{P} = \frac{11,5 \cdot 3100}{13333} (1 - 0,00368 \cdot 75,3) = 1,93 < 2$$

Ez kicsi, nagyobb szögletvas veendő. Válasszuk a $\perp 75.75.10$ -et
amelynél:

$$F'' = 14,1 \text{ cm}^2$$

$$I''_x = 71,4 \text{ cm}^4$$

Ellenőrzés.

nyomófeszültség:
$$\sigma = \frac{P}{F''} = \frac{13333}{14,1} = 946 < 1500 \text{ kg/cm}^2$$

Euler szerinti biztosság:
$$\beta_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I''_x}{P \cdot l^2}$$

vagy:
$$\beta_E = \beta \frac{I''_x}{I} = 3 \frac{71,4}{54} = 3,97 > 3$$

tehetetlenségi sugár:
$$i = \sqrt{\frac{I''_x}{F''}} = \sqrt{\frac{71,4}{14,1}} = 2,25 \text{ cm}$$

karcsúság:
$$x = \frac{l}{i} = \frac{170}{2,25} = 75,6 < 105$$

Tetmajer szerinti biztosság:

$$\beta_T = \frac{F'' k_0}{P} = \frac{14,1 \cdot 3100}{13333} (1 - 0,00368 \cdot 75,6) = 2,36 > 2$$

6. Valamely $l = 5$ m hosszú oszlop 4 drb. szögletvasból áll (215. ábra), a négyzet alakú alap oldalhossza $a = 30$ cm. Az oszlop $P = 70$ t erőhatásra számítandó. Elő van írva 5-szörös biztosság Euler és 3-szoros biztosság Tetmajer szerint, továbbá $\sigma_m = 1200$ kg/cm² és $E = 2100000$ kg/cm².

Nyomásra szükséges keresztmetszet:

$$F = \frac{P}{\sigma_m} = \frac{70000}{1200} = 58,33 \text{ cm}^2$$

Választunk 4 drb. $\angle 80 \cdot 80 \cdot 10$ profilt, amelynél

$$F' = 4 \cdot 15,1 = 60,4 \text{ cm}^2.$$

Ellenőrzés.

a táblázatból: $\xi = 2,34$ cm; $I_\xi = 87,5$ cm⁴

tehát: $y_0 = \frac{a}{2} - \xi = 15 - 2,34 = 12,66$ cm

$$I' = 4 (I_\xi + F y_0^2) = 4 (87,5 + 15,1 \cdot 12,66^2) = 10030 \text{ cm}^4$$

A tehetetlenségi sugár:

$$i = \sqrt{\frac{I'}{F'}} = \sqrt{\frac{10030}{60,4}} = 12,9 \text{ cm}$$

A karcsúság: $x = \frac{l}{i} = \frac{500}{12,9} = 38,7 < 105$

A biztosság Euler szerint:

$$\beta_E = \frac{\pi^2 \cdot I' \cdot E}{l^2 P} = \frac{10 \cdot 10030 \cdot 2100000}{500^2 \cdot 70000} = 12 > 5$$

Tetmajer szerint:

$$\beta_T = \frac{F' k_0}{P} = \frac{60,4 \cdot 3100}{70000} (1 - 0,00368 \cdot 38,7) = 2,3 < 3$$

Bár a táblázatok e szelvényt 72,48 tonna terhelésre adják meg, nekünk nagyobb profilt kell vennünk, hogy az előírt biztosságot megkapjuk. Válasszunk 4 drb $\angle 100 \cdot 100 \cdot 12$ profilt, amelynél:

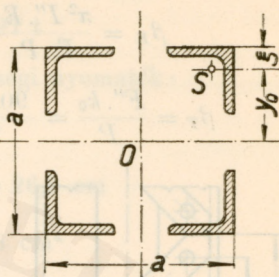
$$F'' = 4 \cdot 22,7 = 90,8 \text{ cm}^2; \xi = 2,9 \text{ cm};$$

$$y_0 = \frac{a}{2} - \xi = 15 - 2,9 = 12,1 \text{ cm}; I_\xi = 207 \text{ cm}^4$$

Ellenőrzés:

$$I'' = 4 (I_\xi + F y_0^2) = 4 (207 + 22,7 \cdot 12,1^2) = \sim 14100 \text{ cm}^4$$

$$i = \sqrt{\frac{I''}{F''}} = \sqrt{\frac{14100}{90,8}} = 12,45 \text{ cm}$$

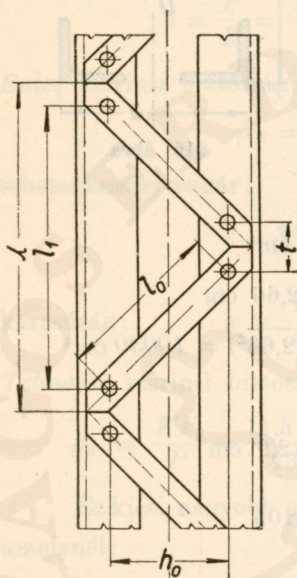


215. ábra.

$$x = \frac{l}{i} = \frac{500}{12,45} = \sim 40 < 105$$

$$\beta_E = \frac{\pi^2 I'' \cdot E}{l^2 \cdot P} = \frac{10 \cdot 14100 \cdot 2100000}{500^2 \cdot 70000} = 16,9 > 5$$

$$\beta_T = \frac{F'' \cdot k_0}{P} = \frac{90,8 \cdot 3100}{70000} (1 - 0,00368 \cdot 40) = 3,43 > 3$$



216. ábra.

Az öv- és átlós rudak számítása.
(216. ábra):

Mivel a rácsrudak kifejtve parallel vannak elrendezve, azért az egyes rudakat $I_{\min}$ helyett I_{ξ} -vel számíthatjuk, mert a kihajlás csak a síkra merőleges lehet. Ebben az esetben a tehetetlenségi sugár:

$$i' = \sqrt{\frac{I_{\xi}}{F_1}} = \sqrt{\frac{207}{22,7}} = 3,02 \text{ cm}$$

Krohn szerint az egyik Γ részre jutó teher:

$$P_1 = P \frac{F_1}{F''} \cdot \frac{272}{272 - x} = P \frac{1}{4} \cdot \frac{272}{272 - 40}$$

$$P_1 = \frac{70000}{4} \cdot 1,17 = 20500 \text{ kg}$$

A nyomófeszültség:

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{F_1} = \frac{20500}{22,7} = 904 < 1200 \text{ kg/cm}^2$$

A megengedett szabad-hossz empirikusan:

$$l_{1 \text{ meg}} \approx \frac{i'}{a} \left(1 - \frac{P_1 \beta}{F_1 k'} \right) = \frac{3,02}{0,00368} \left(1 - \frac{20500 \cdot 3}{22,7 \cdot 3100} \right) = 102,5 \text{ cm}$$

ha: $k_0 = k' (1 - ax) = 3100 (1 - 0,00368 x)$

Legyen: $h_0 = 19 \text{ cm}$ és $t = 8 \text{ cm}$,

akkor: $l_1 = 2 h_0 + t = 2 \cdot 19 + 8 = 46 \text{ cm}$

tehát a karcsúság: $x = \frac{l_1}{i'} = \frac{46}{3,02} = 15,2 < 105$

és a biztonság Tetmajer szerint:

$$\beta_T = \frac{F_1 \cdot k_0}{P_1} = \frac{22,7 \cdot 3100}{20500} (1 - 0,00368 \cdot 15,2) = 3,24 > 3$$

Az átlós rácsrudak számítása.

Az átlagos törőerő (formula szerint) tonnákban kifejezve:

$$S_t = \sim \frac{F_1}{10} = \frac{22,7}{10} = 2,27 \text{ t}$$

Az Euler szerint szükséges tehetetlenségi nyomaték:

$$I = \frac{S_t \cdot l_0^2}{\pi^2 \cdot E}$$

itt: $l_0 = h_0 \sqrt{2} = 19 \cdot 1,41 = 26,9 \text{ cm}$

$$I = \frac{2270 \cdot 26,9^2}{10 \cdot 2100000} = 0,078 \text{ cm}^4$$

a szükséges keresztmetszet pedig:

$$F = \frac{S_t}{S} = \frac{2270}{4000} = 0,57 \text{ cm}^2$$

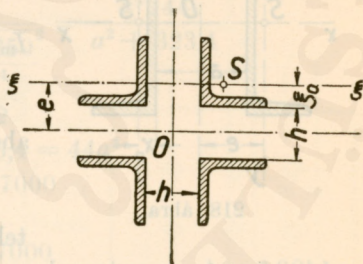
Elegendő egy db. S. 60-as laposvas, amelynél:

$$I = \frac{6 \cdot 0,8^3}{12} = 0,256 \text{ cm}^4$$

$$F = 6 \cdot 0,8 = 4,8 \text{ cm}^2$$

vagy vehetnénk egy könnyű, megfelelő szögletvasat.

7. Valamely $l = 5 \text{ m}$ hosszú, négy szögletvasból álló hengerelt vasoszlop számítandó $P = 30000 \text{ kg}$ terhelésre; az oszlop alul be van fogva, felül pedig csukló-szerűen van megerősítve. Milyen szögvasakat kell alkalmazni és milyen messzire kell azokat egymástól elhelyezni (217. ábra), hogy az oszlop a kihajlás ellen a megfelelő biztonságot nyújtsa. Legyen $\sigma_m = 800 \text{ kg/cm}^2$ és $\beta = 5$ (Euler szerint), $E = 2000000 \text{ kg/cm}^2$.



217. ábra.

A szükséges keresztmetszelvevény:

$$F = \frac{P}{\sigma_m} = \frac{30000}{800} = 37,5 \text{ cm}^2$$

egy szögletvasra esik ebből:

$$F_1 = \frac{F}{4} = \frac{37,5}{4} = 9,5 \text{ cm}^2$$

Ennek megfelel a $\angle 65 \cdot 65 \cdot 9$ profil,
amelynél:

$$F = 10,98 \text{ cm}^2$$

és:

$$I_\xi = 41,3 \text{ cm}^4$$

továbbá:

$$\xi_0 = 1,93 \text{ cm}$$

Kihajlásra szükséges minimális tehetetlenségi nyomaték:

$$I_{\min} = \frac{P \cdot l^2 \cdot \beta}{2 \cdot \pi^2 E} = \frac{30000 \cdot 500^2 \cdot 5}{2 \cdot 10 \cdot 2000000} = 937,5 \text{ cm}^4$$

A négy szögletvas tehetetlenségi nyomatéka az ábra szerinti elrendezésben:

$$I_{\min} = 4(I_{\xi} + F \cdot e^2)$$

ahonnan:

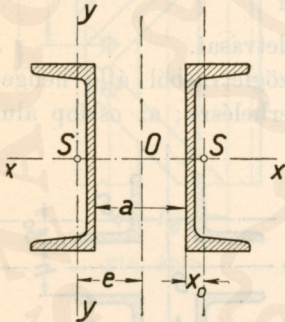
$$e = \sqrt{\frac{I_{\min} - 4 I_{\xi}}{4 F}} = \sqrt{\frac{937,5 - 4 \cdot 41,3}{4 \cdot 10,98}} = 4,19 \text{ cm}$$

$$h = 2(e - \xi) = 2(4,19 - 1,93) = 4,5 \text{ cm}$$

Tetmajer szerint ellenőrizve:

$$x = \frac{l}{i} = \frac{l}{\sqrt{\frac{I_{\min}}{F}}} = \frac{500}{\sqrt{\frac{937,5}{4 \cdot 10,98}}} = \frac{500}{4,62} = \sim 108 > 105$$

8. A 218. ábrán vázolt szelvényű hengerelt-vasoszlop hossza $l = 4,8 \text{ m}$, terhelése $P = 45 \text{ t}$. Milyen profil választandó és milyen e távolságban kell az egyes tartók súlyponti tengelyeit a szelvény szimmetria-tengelyétől elhelyezni, hogy a teherbírás a legkedvezőbb legyen?



218. ábra.

A 34. § (4.) képletével:

$$I_{\min} = 2,5 \cdot P_t \cdot l_m^2 = 2,5 \cdot 45 \cdot 4,8^2 = 2592 \text{ cm}^4$$

$$I_{\min} = 2 I_x$$

$$\text{ahonnan: } I_x = \frac{2592}{2} = 1296 \text{ cm}^4$$

Táblázat szerint a 18. számú $\square$ vas tehetetlenségi nyomatéka az x tengelyre $1493,5 \text{ cm}^4$, az y tengelyre pedig $143,2 \text{ cm}^4$ és a területe $F = 30,7 \text{ cm}^2$. Vesszünk tehát 2 db. $\square$ 18 N. P. tartót, melynél:

$$I_x = 2987 \text{ cm}^4$$

és

$$F = 61,4 \text{ cm}^2$$

Utóbbi érték megfelelő, mert:

$$F_{\text{szüks}} = \frac{P}{\sigma_m} = \frac{45000}{800} = 56,25 < 61,4 \text{ cm}^2$$

$$\text{Mivel: } I_{\min} = 2 I_x = 2 (I_y + F e^2)$$

ahonnan:

$$e = \sqrt{\frac{I_{\min} - 2 I_y}{2 F}} = \sqrt{\frac{2592 - 2 \cdot 143,3}{2 \cdot 30,7}} = 6,15 \text{ cm}$$

A 18. számú profilnál táblázat szerint $x = 1,92$ cm, tehát:

$$a = 2(e - x) = 2(6,15 - 1,92) = 8,46 \text{ cm}$$

Ilyen elrendezés mellett a tehetetlenségi ellipszis körre lesz. Megjegyezzük, hogy az $I_{\min}$ pontos kiszámításánál a szögecs-gyöngítések tehetetlenségi nyomatékát az $\square$ -tartó teljes szelvényéből le kell vonni. Ha a szögecsék távolsága a súlyponti tengelytől d_1 és egy szögecslyuk területe F' , akkor, ha példánkban két szögecsgyöngítést veszünk, az ennek megfelelő tehetetlenségi nyomaték:

$$I' = 2 \cdot F' \cdot d_1^2$$

Tehát $I_{\min} \geq I - I'$, ahol I a valóságos, tömör szelvény tehetetlenségi nyomatéka.

9. Egy két végén megtámasztott $l = 3,5$ m hosszú négyzet-szelvényű tölgyfagerenda tengelyének irányában $P = 20$ t terhet hord. Keresendő a négyzetszelvény oldalhossza a *Schwarz—Rankine*-képlettel, ha tölgyfára $\sigma_m = 44$ kg/cm² és $\alpha = 0,00022$.

A 34. § (12) képletével:

$$P = \frac{F \cdot \sigma}{1 + \alpha \frac{F \cdot l_0^2}{I_{\min}}}$$

A jelen esetben: $l_0 = l = 350$ cm

$$\text{tehát: } 20000 = \frac{a^2 \cdot 44}{1 + 0,00022 \frac{a^2 \cdot 350^2}{a^4}} = \frac{a^4 \cdot 44}{a^2 + 323,4}$$

$$20000a^2 + 20000 \cdot 323,4 = 44a^4$$

$$a^4 - 455a^2 = 147000$$

$$\text{ha } a^2 = x$$

$$\text{akkor: } x^2 - 455x = 147000$$

$$x = +227,5 + \sqrt{227,5^2 + 147000} = 673,5 = a^2$$

$$\text{ahonnan: } a = \sqrt{673,5} \approx 26 \text{ cm} \quad \text{és} \quad F = 676 \text{ cm}^2$$

10. Kiszámítandó a *Schwarz—Rankine*-képlettel egy $l = 4$ m hosszú, mindkét végén megtámasztott öntöttvas üreges oszlop külső átmérője $P = 40$ tonna terhelés mellett, ha a falvastagság $\delta = \frac{D_k}{10}$ $\sigma_m = 500$ kg/cm² és öntöttvasnál $\alpha = 0,0007$.

A 34. § (12) képletével:

$$P = \frac{F \cdot \sigma}{1 + \alpha \frac{F l^2}{I_{\min}}}$$

A belső átmérő: $D_b = D_k - 2\delta = D_k - 0,2 D_k = 0,8 D_k$

$$F = \frac{D_k^2 \cdot 3,14}{4} - \frac{(0,8 D_k)^2 \cdot 3,14}{4} = 0,785 D_k^2 - 0,5024 D_k^2 = 0,2826 D_k^2$$

$$I_{\min} = I = \frac{D_k^4 \cdot 3,14}{64} - \frac{(0,8 D_k)^4 \cdot 3,14}{64} = 0,04906 D_k^4 - 0,02009 D_k^4 = 0,02897 D_k^4$$

Ezeket az értékeket a fenti képletbe betéve:

$$40000 = \frac{0,2826 \cdot D_k^2 \cdot 500}{1 + 0,0007 \frac{0,2826 \cdot D_k^2 \cdot 400^2}{0,02897 D_k^4}} = \frac{141,3 \cdot D_k^4}{D_k^2 + 1091}$$

$$40000 \cdot D_k^2 + 43640000 = 141,3 D_k^4$$

$$D_k^4 - 283 D_k^2 = 309000 \quad \text{Legyen továbbá:}$$

$$D_k^2 = x$$

akkor:

$$x^2 - 283x = 309000$$

$$x = 141,5 + \sqrt{141,5^2 + 309000} = 715,5 = D_k^2$$

és

$$D_k = \sqrt{715,5} = \sim 26,8 \text{ cm}$$

$$\omega = 2,68 \text{ cm.}$$

11. Valamely nagy terem mennyezete három sor üreges öntöttvas-oszloppal van alátámasztva (219. ábra). Milyen méretűek legyenek az oszlopok és alaplemezeik, ha cementből készül az alapzatuk? A mennyezet súlya hasznos és egyéb terheléssel $Q = 800 \text{ kg/m}^2$, $\beta = 5$.

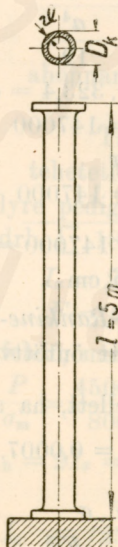
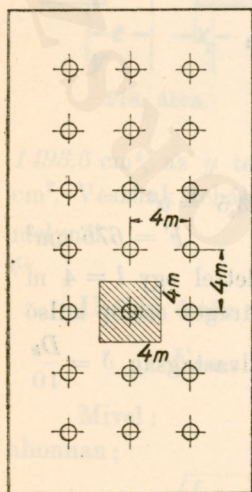
Minden oszlop:

$$P = 4^2 \cdot 800 = 12800 \text{ kg}$$

terhet hord. Euler szerint a szükséges:

$$I_{\min} = \frac{P \cdot l^2 \cdot \beta}{\pi^2 \cdot E} =$$

$$= \frac{12800 \cdot 500^2 \cdot 5}{10 \cdot 1000000} = 1600 \text{ cm}^4$$



219. ábra.

Választunk táblázatból (Hütte) olyan öntöttvas-oszlopot, melynél :

$$D_k = 150 \text{ mm}$$

$$\delta = 18 \text{ mm}$$

$$I = 1656 \text{ cm}^4$$

$$F = 74,7 \text{ cm}^2$$

folyóméter-súly: $q = 54,1 \text{ kg/m.}$

Ellenőrzés *Tetmajer* szerint,

inercia-sugár: $i = \sqrt{\frac{1656}{74,7}} = 4,71 \text{ cm}$

karcsúság: $x = \frac{l}{i} = \frac{500}{4,71} = \sim 106 > 80$

tehát az oszlop megfelelő.

Nyomófeszültség: $\sigma = \frac{P}{F} = \frac{12800}{74,7} = 171,5 \text{ kg/cm}^2$

Ha a cement- alapzatra $\sigma_m = 12 \text{ kg/cm}^2$, akkor a szükséges :

$$F = \frac{R}{\sigma_m} = \frac{12800 + 5 \cdot 54,1}{12} = \frac{13070}{12} = 1090 \text{ cm}^2$$

tehát az alaplemez oldalhossza :

$$a = \sqrt{1090} = 33 \text{ cm}$$

12. Összeszegecselt hengerelt vasprofilok kihajlás elleni szilárdsága *Müller—Breslau* szerint.*) A végzett kísérleteknél a keretrudak a 220. ábra szerint 2 drb. 20, 22 és 26 számú $\square$ vasból voltak összeszegecselve. A kísérletek alatt változtatták úgy az $\square$ vasak, mint az összekötő lemezek távolát, a kihajlási hossz $l_0 = 5 \text{ m}$ volt minden rúdnál.

A következőkben a jelölések lesznek :

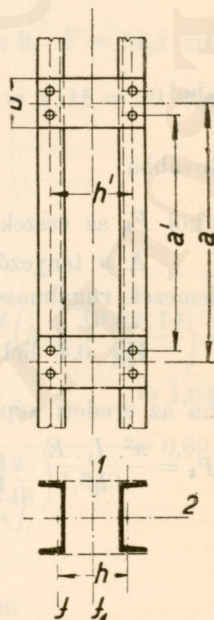
l_0 kihajlási hossz ;

a az összekötő lemezek távola középtől középig ;

a' a belső szögecsék közötti távolság ;

F az egyes rúd szelvénye ;

I az egyes rúd tehetetlenségi nyomatéka az egész szelvény szabad tengelyével párhuzamos súlyponti tengelyre ;



220. ábra.

*) »Der Bauingenieur« 1926. Heft 52. Seite 1009.

I_1 az egész szelvény tehetetlenségi nyomatéka a szabad tengelyre;

x az a hosszúságú egyes rúd karcsúsága;

x' az a' hosszúságú egyes rúd karcsúsága;

x_1 az egész rúd karcsúsága a szabad tengelyre.

A törőerő a következő képletek alapján számítható:

$$\text{Euler:} \quad P = \frac{\pi^2 \cdot I_1 \cdot E}{l_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2100000 \cdot I_1}{l_0^2}$$

$$\text{Tetmajer:} \quad P = (3,1 - 0,0114 x_1) 2F$$

$$\text{Krohn:} \quad P = \frac{136 h - l_0}{68 h} (3,1 - 0,0114 x') F.$$

Müller—Breslau hozzávetőleges eredményt adó képlete:

$$P = \frac{200 h}{100 h + l_0} (3,1 - 0,0114 x') F$$

Müller—Breslau újabb módszere szerint a kihajlás elleni szilárdsági képlet a törőerő megállapítására:

$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_1}{l_0^2} \cdot \frac{\mu}{\left(1 + 0,4 \frac{I_1 + 2I}{n^2 I} \mu\right) \left(1 + \frac{5}{4} \varepsilon\right)}$$

$$\text{ahol:} \quad \mu = \left(\frac{2n}{\pi}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n} \quad \text{és} \quad n = \frac{l_0}{a}$$

$$\text{továbbá:} \quad \varepsilon = \frac{4 \cdot F \cdot h}{n F_b \cdot l_0} \left(3 + \frac{h h'}{b^2}\right)$$

ahol F_b az összekötő lemez keresztmetszete.

A μ tényező a mezők számának befolyását, ε pedig a kötőlemezek rugalmasságának hatását foglalja össze.

Ha 0,4 helyett $\frac{\pi^2}{24}$ értéket veszünk és $\left(1 + \frac{5}{4} \varepsilon\right) = \gamma$, továbbá ha az eredeti képletet μ -vel rövidítjük, akkor:

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{\pi^2 \cdot I_1 \cdot E}{l_0^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\mu} + \frac{\pi^2}{24} \frac{I_1 + 2I}{n^2 I}\right) \gamma} = \\ &= \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_1}{l_0^2} \cdot \frac{1}{\frac{\pi^2}{n^2} \left(\frac{1}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{12} + \frac{I_1}{24 I}\right) \gamma} \end{aligned}$$

$$\text{ha pedig:} \quad l_0^2 = n^2 a^2 \quad \text{és} \quad \left(\frac{1}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{12}\right) = \beta$$

akkor:
$$P_k = \frac{E \cdot I}{a^2} \cdot \frac{1}{\left(\beta \frac{I}{I_1} + \frac{1}{24}\right) \gamma} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_1}{l_0^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\pi^2}{n^2} \beta + 0,4112 \frac{I_1}{n^2 I}\right) \gamma}$$

avagy ha:
$$\frac{\pi^2}{n^2} \beta = \alpha$$

akkor:
$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_1}{l_0^2} \cdot \frac{1}{\left(\alpha + 0,4112 \frac{I_1}{n^2 I}\right) \gamma}$$

és ha:
$$I_v = I_1 \cdot \varphi$$

és
$$\varphi = \frac{1}{\left(\alpha + 0,4112 \frac{I_1}{n^2 I}\right) \gamma}$$

akkor:
$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_v}{l_0^2}$$

Legyen pl. az ábra szerint 2 drb. 20. sz. profil összeszőgecselve, melynél $l_0 = 500$ cm, $a = 62,5$ cm, $n = \frac{500}{62,5} = 8$, $F = 32,2$ cm², $I = 148$ cm⁴, $I_1 = 1912$ cm⁴, $b = 15$ cm, $F_b = 2 \cdot 15 = 30$ cm², $h = 10,02$ cm, $h' = 14$ cm.

$$\beta = \frac{1}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{12} = 6,401$$

$$\alpha = \frac{\pi^2}{n^2} \beta = 0,987$$

$$\gamma = 1 + \frac{5 \cdot F \cdot h}{n \cdot F_b \cdot l_0} \left(3 + \frac{h h'}{b^2}\right) = 1 + \frac{5 \cdot 32,2 \cdot 10,02}{8 \cdot 30 \cdot 500} \left(3 + \frac{10,02 \cdot 14}{15^2}\right) = 1,049$$

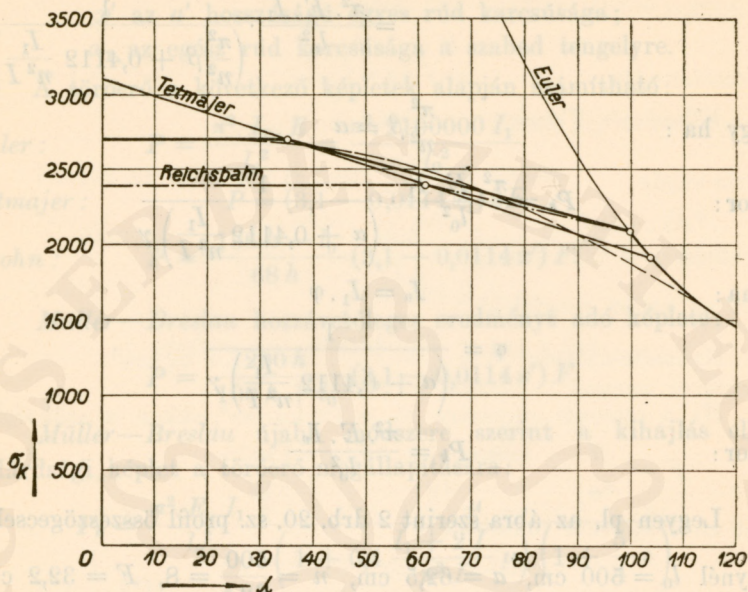
$$\varphi = \frac{1}{\left(\alpha + 0,4112 \frac{I_1}{n^2 I}\right) \gamma} = \frac{1}{\left(0,987 + 0,4112 \frac{1912}{8^2 \cdot 148}\right) 1,049} = 0,891$$

Tehát:
$$I_v = 1912 \cdot 0,891 = 1703 \text{ cm}^4$$

és az inercia-sugár:
$$i_v = \sqrt{\frac{1703}{2 \cdot 32,2}} = 5,14 \text{ cm}$$

így a karcsúság:
$$x_v = \frac{500}{5,14} = 97,3$$

A német birodalmi vasutak előírása szerint 0 — 60 karcúság mellett, a kihajlási szilárdság a folyási határral egyenlőnek veendő, 60 — 100 között az ismert vonalnak ($3,1 - 0,0114 x$) meg-



— — — } a kísérleti eredményeknek megfelelő közepes σ_k vonalak

221. ábra.

felelően, ezen felül pedig az Euler képlettel számítanak (221. ábra). Jelen esetben a vasúti formula szerint:

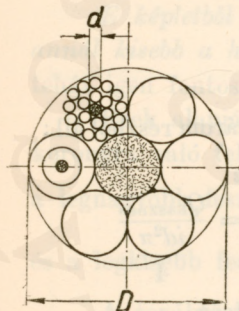
$\sigma_{kv} = 2890,5 - 8,175 x_v = 2890,5 - 8,175 \cdot 97,3 = 2095 \text{ kg/cm}^2$
tehát a törő erő:

$$P_k = \sigma_{kv} \cdot 2 \cdot F = 2095 \cdot 2 \cdot 32,2 = \sim 135 \text{ tonna.}$$

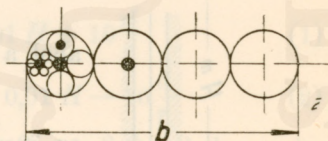
V. FEJEZET.

36. §. A drótkötél szilárdsági viszonyai és számítása.

A drótkötél [222. ábra) zsinegekből vagy pászmákból áll, rendszeren 6 pászmából, melyeket gépi erővel vékony kenderkötél, vagy lágyabb vasanyag (a kötél lelke) köré sodornak. Egy-egy pászma hasonlóképpen kenderbél (pászmamag) köré sodort több elemi drótszálból áll. Ez a kerek kötél. Bobinás szállításnál egymás mellé elhelyezett és dróttal összevarrt pászmákból álló lapos kötelet használnak (223. ábra).



222. ábra.



223. ábra.

Vannak ezenkívül még profildrótból gyártott speciális kötelek is. Fontos követelmény a drótkötél-gyártásnál, hogy az elemi szálak a saját

tengelyük körül ne legyenek megsodorva, mert ez növelné az igénybevételt.

Ha d mm egy elemi drótszál átmérője és i az elemi szálak száma, akkor a kötél hordképes hasznos szelvénye:

$$T = i \frac{d^2 \pi}{4}$$

ahol rendszeren $d = 1,5 \sim 2$ mm.

Az aknaszállítás általános sémája a 224. ábrán van feltüntetve. Használjuk a következő jelöléseket:

H_m az aknamélység méterben;

Q_{kg} az összes teher (kas + csillék + rakomány);

r_m a vezető- vagy terelő-dob sugara;

γ kg/dm³ a drótkötél fajsúlya = $\sim 7,8$ kg/dm³;

E_0 kg/mm² a drótkötél anyagának elaszticitási modulusza: 20000 kg/mm².

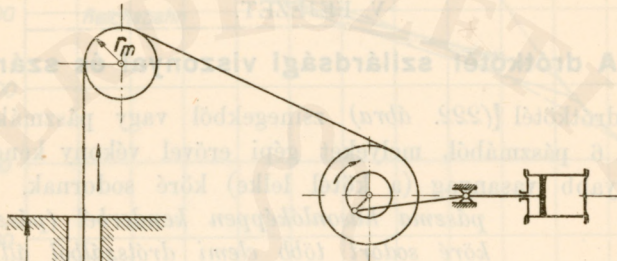
Herrmann Emil szerint a kötélszámítás menete a következő:
Legyen:

σ_I a kötélben keletkező maximális derékfeszültség;

σ a kötél feszültsége tisztán a hasznos teherből;

σ_1 a kötél önsúlyából eredő derékfeszültsége; és

σ_2 a kötél hajlításából származó derékfeszültség.



224. ábra.

Az összes derékfeszültség három részből áll:

$$\sigma_I = \sigma + \sigma_1 + \sigma_2$$

ahol a hasznos feszültség: $\sigma = \frac{Q_{\text{hasznos}}}{\frac{d^2 \pi}{4}}$

az önsúlyból eredő derékfeszültség:

ha 1 m hosszú kötél súlya =

$$= \left(\frac{T_{mm}^2}{100^2} \right)_{dm^2} \cdot 12,5 \cdot 7,8 \text{ kg}$$

akkor:

$$\sigma_1 = H_m \frac{T_{mm}^2}{100^2} \cdot 12,5 \cdot 7,8 \frac{1}{T_{mm}^2} \text{ kg/mm}^2 = 0,01 H_m$$

mert 1 m hosszú kötélre a sodrás miatt 1,25 m hosszú drót jut (pontosan $\sigma_1 = 0,00975 H_m$ volna, de kikerekítjük 0,01 H -ra, ugyanis a kötél rendesen be van kátrányozva), a hajlításból származó derékfeszültség ha feltételezzük a *Reuleaux-elmélet* nyomán, hogy a vezetőkorong körül csak egy elemi szál van hajlítva:

$$\sigma_2 = \pm \frac{M \frac{d}{2}}{I}$$

azaz σ_2 egyenlő a hajlító-nyomaték szorozva a szélső szál távolával és osztva a tehetetlenségi nyomatékkal. De a hajlítószilárdság alapképlete

szerint:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{IE_0}$$

és így e két egyenletből:

$$\sigma_2 \varrho = \pm \frac{M}{I} \cdot \frac{IE_0}{M} = \pm E_0 \frac{d}{2}$$

ahol ϱ a meghajlított szál görbületi sugara, jelen esetben a vezetőkorong sugara:

$$\varrho_{mm} = 1000 \ r_m$$

tehát:

$$\sigma_2 = \pm E_0 \frac{d_{mm}}{2 \ r_m \cdot 1000}$$

de mivel:

$$E_0 = 20000 \text{ kg/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \pm 10 \frac{d_{mm}}{r_m}$$

E képletből látható, hogy minél nagyobb a vezetőkorong sugara, annál kisebb a hajlításból eredő igénybevétel; az r_m megválasztása tehát igen fontos.

Ezek alapján a drót leginkább igénybevett pontján, a vezetőkorongra való felfutás szelvényében

a legnagyobb feszültség:

$$\sigma_I = \sigma + 0,01 \ H + 10 \frac{d}{r} \quad (1)$$

és a legkisebb feszültség:

$$\sigma_{II} = \sigma + 0,01 \ H - 10 \frac{d}{r} \quad (2)$$

A továbbiakban a *Winkler*-képletet (l. 12. §-t) alkalmazzuk:

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \alpha = 20 \frac{d}{r}$$

A munkaszilárdság *Winkler* szerint: $S = \alpha Z + \beta s$

ahol: $\alpha = 0,54$ és $\beta = 0,46$

Z a sztatikai szilárdság és

s a legkisebb megengedett feszültség, a jelen esetben:

$$s = \sigma_{II} = \sigma_I - \alpha$$

Ha β a biztosság a munkaszilárdságig, akkor:

$$\beta \sigma_I = 0,54 \ Z - 0,46 \ \sigma_{II}$$

$$\sigma_I (\beta - 0,46) = 0,54 \ Z - 0,46 \cdot 20 \frac{d}{r}$$

$$0,54 \ Z - 0,46 \cdot 20 \frac{d}{r}$$

ahonnan:

$$\sigma_I = \frac{0,54 \ Z - 0,46 \cdot 20 \frac{d}{r}}{\beta - 0,46}$$

Ha S és β ismeretes (pl. $S = 120 \text{ kg/mm}^2$ és $\beta = 2,5$), úgy σ_I már meghatározható.

Keressük a hasznos feszültséget:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_I - \sigma_1 - \sigma_2 \\ \sigma &= \sigma_I - 0,01 H_m - 10 \frac{d}{r} \\ \sigma &= \frac{0,54 Z}{\beta - 0,46} - \frac{9,2 \frac{d}{r}}{\beta - 0,46} - 0,01 H_m - 10 \frac{d}{r}\end{aligned}\quad (3)$$

Legyen:

$$\frac{0,54 Z}{\beta - 0,46} = a$$

és

$$10 \frac{\beta + 0,46}{\beta - 0,46} = b$$

akkor:

$$\sigma = a - b \frac{d}{r} - 0,01 H_m \quad (4)$$

A $\frac{d}{r}$ viszonyt úgy kell meghatározni, hogy egy drótszál teherbírása maximális legyen. Ha $\frac{d}{r} = x$ és egy drótszál teherbírását t -vel jelöljük, akkor:

$$t = \frac{d^2 \pi}{4} \sigma = \frac{r^2 x^2 \pi}{4} \sigma$$

ahol:

$$\sigma = a - b \frac{d}{r} - 0,01 H_m$$

t akkor maximális, ha:

$$\frac{dt}{dx} = 0 = \frac{r^2 \pi}{4} (2ax - 3bx^2 - 0,02 H_m \cdot x)$$

$$x(2a - 3bx - 0,02 H_m) = 0$$

$$2(a - 0,01 H_m) = 3bx$$

ahonnan:

$$x = \frac{d}{r} = \frac{2(a - 0,01 H_m)}{3b} \quad (5)$$

Ez a maximális teherbírás feltétele egy elemi drótszállra vonatkozólag.

A megfelelő hasznos feszültség:

$$\sigma = a - b \frac{2(a - 0,01 H_m)}{3b} - 0,01 H_m$$

$$\sigma = \frac{a}{3} - \frac{0,01 H_m}{3} = \frac{a - 0,01 H_m}{3} \quad (6)$$

A szükséges hasznos szelvény pedig: $T = \frac{id^2 \pi}{4} = \frac{Q}{\sigma}$

ahol d -t vagy i -t szabadon megválasztva, adott T -hez, a kötélt az alábbi táblázat segítségével már meghatározható.

Pl. Kiszámítandó valamely drótkötél az alábbi adatok mellett:

$$Q = 2200 \text{ kg}$$

$$H = 250 \text{ m}$$

$$\beta = 2,5 \text{ a munkaszilárdságig}$$

$$Z = 120 \text{ kg/mm}^2 \text{ téglyacélra.}$$

$$a = \frac{0,54 \cdot 120}{2,5 - 0,46} = 31,5$$

$$b = \frac{10(2,5 + 0,46)}{2,5 - 0,46} = 14,5$$

továbbá: $x = \frac{d}{r} = \frac{2(31,5 - 0,01 \cdot 250)}{3 \cdot 14,5} = 1,334$

és a hasznos feszültség:

$$\sigma = \frac{31,5 - 2,5}{3} = 9,67 \text{ kg/mm}^2$$

VI. Táblázat: $i \frac{d^2 \pi}{4}$ értékeiről.

Aknakötelek hasznos szelvénye mm²-ben.

A szálak száma	A drót átmérője d mm =										
	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
6	4,7	5,7	6,8	8,0	9,2	10,6	12,1	13,6	15,3	17,0	18,9
12	9,4	11,4	13,6	15,9	18,5	21,2	24,1	27,2	30,5	34,0	37,7
18	14,1	17,1	20,4	23,9	27,7	31,8	36,2	40,8	45,8	51,0	56,6
24	18,8	22,8	27,1	31,9	36,9	42,4	48,3	54,5	61,1	68,0	75,4
30	23,6	28,5	33,9	39,8	46,2	53,0	60,3	68,1	76,3	85,1	94,3
36	28,3	34,2	40,7	47,8	55,4	63,6	72,4	81,7	91,6	102	113
42	33,0	39,9	47,5	55,4	64,6	74,2	84,4	95,3	107	119	132
48	37,7	45,6	54,3	63,7	73,9	84,8	96,5	109	122	136	151
54	42,4	51,3	61,1	71,7	83,1	95,4	109	123	137	153	170
60	47,1	57,0	67,9	79,6	92,4	106	121	136	153	170	189
66	51,8	62,7	74,6	87,6	102	117	133	150	168	187	207
72	56,5	68,4	81,4	95,6	111	127	145	163	183	204	226
78	61,3	74,1	88,2	104	120	138	157	177	198	221	245
84	66,0	79,8	95,0	112	129	148	169	191	214	238	264
90	70,7	85,5	102	120	139	159	181	204	229	255	283
96	75,4	91,2	109	127	148	170	193	218	244	272	302
102	80,1	96,9	115	135	157	180	205	232	260	289	320
108	84,8	103	122	143	166	191	217	245	275	306	339
114	89,5	108	129	151	175	201	229	259	290	323	358
120	94,2	114	136	159	185	212	241	272	305	340	377
126	99,0	120	143	167	194	223	253	286	320	357	396
132	104	125	149	175	203	233	265	300	336	374	415
138	108	131	156	183	212	244	277	313	351	391	433

Ha az $x = \frac{d}{r}$ -t 1,2-nek vesszük,

akkor: $\sigma = a - b \frac{d}{r} = 0,01 H_m = 31,5 - 14,5 \cdot 1,2 - 0,01 \cdot 250 =$
 $= 11,6 \text{ kg/mm}^2$.

$$T_{mm}^2 = \frac{Q}{\sigma} = \frac{2200}{11,6} = \sim 190 \text{ mm}^2 = \frac{id^2\pi}{4}$$

Ennek a táblázatból megfelel pl. az $i = 108$ és $d = 1,5$ mm-es kötel, vagy az $i = 78$ és $d = 1,8$ mm-es kötel.

Reuleaux teóriája szerint a drótkötélben levő drótszál hajlításból származó derékfeszültsége:

$$\sigma_2 = E_0 \frac{d}{D} \text{ kg/mm}^2 \quad (7)$$

ahol $E_0 = 20000 \text{ kg/mm}^2$ a sodratlan drótszál elaszticitási modulusza, d_{mm} egy elemi drótszál átmérője és D_{mm} a vezetőkorong átmérője. Ezt fogadta el *Herrmann* is. Például:

$$D = 1 \text{ m és } d = 1 \text{ mm mellett, } \sigma_2 = 20 \text{ kg/mm}^2$$

de már:

$D = 0,5 \text{ m és } d = 1 \text{ mm mellett, } \sigma_2 = 40 \text{ kg/mm}^2$ volna, ami $Z = 120 \text{ kg/mm}^2$ szakítószilárdság alapján $\beta = 3$ -nak felelne meg, terhelés nélkül. Az elméleti igénybevétel meghaladja a megengedhető megterhelést.

Miután a Reuleaux-képlet néha csaknem megvalósíthatatlan követelményeket támaszt, Bach egy empirikus korrekció-tényezővel egészítette ki és szerinte

$$\sigma_2 = {}^{3/8} E_0 \frac{d}{D} = E \frac{d}{D} \quad (8)$$

és

$$E = {}^{3/8} E_0$$

ahol E az egész kétszer sodrott kötéltre vonatkozó elaszticitási moduluszt jelenti, mert a hajlításból származó feszültség nemcsak a $\frac{d}{D}$ viszonytól, hanem egyéb körülményektől is függ és egy drótszál feszültsége még nem irányadó az egész kötéltre nézve. *Bach* képletével:

$$D = 1 \text{ m és } d = 1 \text{ mm mellett } \sigma = 8 \text{ kg/mm}^2$$

de kisebb vitla-szerkezeteknél már e formulával is igen nagy feszültségeket kapunk. Így:

$$D = 0,3 \text{ m és } d = 1 \text{ mm mellett; } \sigma_2 = 25 \text{ kg/mm}^2$$

Hrabák még tovább megy. Szerinte a sodrott kötél elaszticitási modulusza E nem állandó, hanem a fonás számával is a 0,6 konstans hatványai szerint változik:

$$E = 0,6^x E_0 \quad (9)$$

ahol x a fonások számát jelenti (kétszerfont kötélnél $x = 2$). A hajlítófeszültség kiszámítására azonban nem a sodrott kötél, hanem a sodrott szál E' derékrugalmassági tényezőjét használja fel, amelyet kísérletekből állapít meg.

Tehát Hrabák is a Reuleaux-feltevésből indul ki, amely szerinte csak akkor lenne helyes, ha E_0 a sodrott elemi szálra vonatkoznék.

Hrabák képlete alapján pedig a hajlítófeszültség:

$$\sigma_2 = E' \frac{d}{D} \quad (10)$$

ahol E' a sodrott szál elaszticitási modulusza, melyet nyúlási kísérletekkel állapított meg. Kísérletei szerint:

$$E' = 0,6636 E_0, \text{ ha } x = 1;$$

$$E' = 0,44 E_0, \text{ ha } x = 2;$$

$$E' = 0,2918 E_0, \text{ ha } x = 3.$$

A drótkötélszámításnak a hajlításra vonatkozó része még nem teljesen tisztázott probléma: *Bock* (»Glückauf« 1909) a drót alakváltozásából következtet a hajlítófeszültségre. Szerinte:

$$\sigma_2 = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\delta}{2R'} \cdot \cos^2 \gamma$$

ahol α a kötél anyagának terjedési modulusza, δ az elemi szál átmérője, R' a hajlítás sugara, amely az elemi szálra vonatkoztatva valamivel nagyobb, mint a vezető-tárcsa sugara, és γ az elemi szál hajlásszöge a kötél tengelyéhez.

Ez vezette a bécsi bányakapitányságot arra, hogy az eddigi módszerektől eltérőleg a drótkötélszámításnál csupán a következő feltételt kell kielégíteni:

$$d \leq \frac{D}{650} \quad (11)$$

ahol d mm az elemi drótszál és D mm a szállítódob legkisebb átmérője, amely feltétel teljesítésével a hajlításból eredő σ_2 feszültség már elhanyagolható és a drótkötelet anyagszállításra a szakítószilárdságig 7~8-szoros biztonsággal számítják a:

$$Q'_{\text{összes}} = \frac{id^2\pi S}{4\beta} \text{ képlettel.} \quad (12)$$

Így a fennebb említett példában: $\sigma = \frac{120}{8} = 15 \text{ kg/mm}^2$ volna.

Ez a számítás Kroen-től származik, aki még bizonyos számú szakadt drótszálat is megenged mindaddig, míg $\beta = 6,5$ -re csökken, feltételezve, hogy a szakadások nem egy szelvényben, hanem 5 m hosszú köteldarabon vannak eloszolva. Szerinte a kötél üzemképes egészen addig, míg

$$z \leq \frac{2}{3} \left(\frac{C - 6,5}{C} \right) i \quad (13)$$

ahol z a megengedett szakadások száma 5 m kötélhosszon, C a kezdeti biztosság (7, illetve 8 és 9) és i az elemi szálak száma (a bél kivételével).

Ezen képletre azon megfigyelés vezetett, hogy a külsőleg látható drótszálak az összes szálak $\frac{2}{3}$ -át teszik ki és ennek az aránynak felel meg a látható és összes szakadások száma is.

Nálunk most dolgoznak egy egységes kötélszámítási tervezeten. Az alapelv az, hogy két feszültséget vesznek figyelembe: az egyik a hasznos teher és kötél-önsúlyból eredő derékfeszültség σ_1 , a másik a hajlításból származó σ_2

$$\text{és} \quad \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{S}{\beta} \quad (14)$$

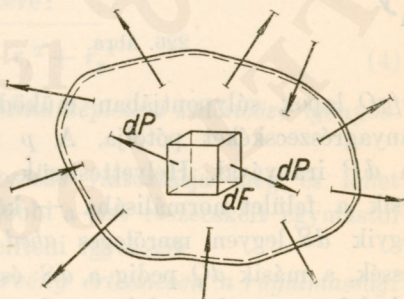
VI. FEJEZET.

37. §. A feszültségek elmélete.

E fejezetben, mely a szilárdságtan legmélyrehatóbb része a rugalmas testek sztatikájának általános törvényszerűségeit fogjuk vizsgálni. A következőkben feltesszük, hogy a tetszőleges alakú, homogén, izotropos rugalmas szilárd testre egyensúlyban levő tetszőleges külső erőrendszer hat, mely a test alakját megváltoztatja. Egyidejűleg a testben, az alakváltozással kapcsolatban belső erők, feszültségek keletkeznek, melyek egyszerű összefüggésben vannak a külső erőkkel és az alakváltozással. *Végso célunk az alakváltozás meghatározása.*

38. §. Mértani feszültség.

Ha valamely tetszőleges alakú testet külső erők terhelnek meg, ez deformálódik és miután a külső és az alakváltozással egyidejűleg fellépő belső erők egyensúlya bekövetkezik, sztatikai állapotba jut. *Vágjunk ki ebből a megterhelt, de már megállapodott alakú testből egy végtelen kis — differenciális — prizmat.* Végtelen kicsinek azért vesszük, mert így az egyes lapokon működő belső erőket egyenletesen eloszlóknak tekinthetjük, mikor is eredőjük a lap súlypontjába esik. Természetes, hogy ez a differenciális prizma csak úgy marad egyensúlyban, alakját csak úgy tartja meg, ha a szomszédos anyagrészek pótlására az átellenes parallel lapokon egyenlő nagyságú, de ellentétes értelmű differenciális erőket működtetünk (225. ábra).



225. ábra.

Ha a differenciális prizma egyik lapjának területe dF , akkor a lapon működő dP erőnek ezen terület szerinti differenciálhányadosát — területegységre jutó részét — mértani vagy fajlagos feszültségnek (p) nevezzük,

$$p = \frac{dP}{dF}$$

A feszültség tehát oly vektormennyiség, melynek iránya és értelme dP feszítőerő irányával és értelmével egyezik és nagysága azon erőhatással egyenlő, mely dF területen való egyenletes megoszlás feltételezése mellett, dP erőből a területegységre esik. A feszítőerő pedig a feszültség és a felületelem területének szorzata.

Olyan igénybevételeknél, ahol a mértani feszültség állandó, s ahol a feszültségek eloszlása egyenletes a szelvényben, mint pl. az egyszerű derékszilárdságnál,

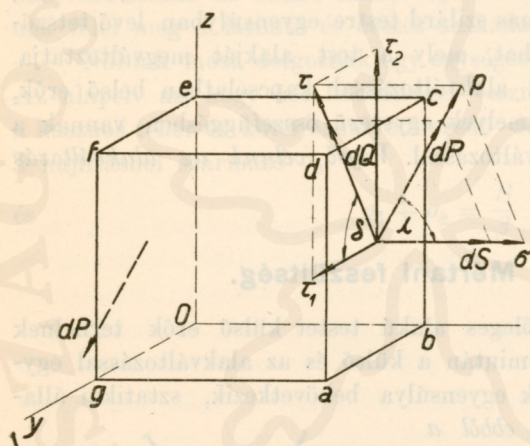
$$p \int_0^F dF = \int_0^P dP$$

$$pF = P$$

$$\text{és } p = \frac{P}{F} = \sigma$$

Ilyenkor a mértani feszültséget derékfeszültségnek neveztük.

Rajzoljuk ki a differenciális prizmát (226. ábra). Az $abcd$ és a vele átellenes



226. ábra.

$efgO$ lapok súlypontjában működik a dP erő, mely a szomszédos anyagrészecskéket pótolja. A p mértani feszültség iránya azonos a dP irányával. Helyettesítsük dP erőt — mely általában nem esik a felület normálisába — két komponenssel, melyek közül az egyik dS legyen merőleges $abcd$ lapra, vagyis a lap normálisába essék, a másik dQ pedig a dS és dP irányokon átfektetett sík és $abcd$ lap metszésvonalába essék.

Ha λ azon szög, melyet dP az $abcd$ lap normálisával, tehát dS iránnyal bezár, akkor:

$$dS = dP \cdot \cos \lambda$$

és

$$dQ = dP \cdot \sin \lambda$$

Osztva dF -el:

$$\frac{dS}{dF} = \frac{dP}{dF} \cos \lambda = p \cos \lambda$$

$$\frac{dQ}{dF} = \frac{dP}{dF} \sin \lambda = p \sin \lambda$$

Továbbá legyen:

$$\frac{dS}{dF} = \sigma \text{ a derék-feszültség (normális feszültség) és}$$

$$\frac{dQ}{dF} = \tau \text{ a csúsztatófeszültség (tangenciális, nyírófeszültség), akkor:}$$

$$p \cos \lambda = \sigma \quad (1)$$

$$\text{és} \quad p \sin \lambda = \tau \quad (2)$$

A tetszésszerű lapon uralkodó mértani feszültség két komponense tehát a *lapra merőleges derékfeszültség* (a derék- és hajlítósílarádságoknál eddig is szerepelt) és a lap síkjába eső *csúsztatófeszültség*.

Az (1) és (2) egyenletet négyzetre emelve és összegezve:

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2$$

$$\text{és} \quad p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \quad (3)$$

A csúsztató-feszültséget ismét felbontjuk az y és z koordináta-tengelyekkel párhuzamos két komponensre: τ_1 és τ_2 -re. Ha τ és τ_1 iránya δ szöveget zár be, akkor

$$\tau_1 = \tau \cdot \cos \delta$$

$$\text{és} \quad \tau_2 = \tau \cdot \sin \delta$$

$$\text{amelyekből:} \quad \tau^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2$$

és ezt az értéket a (3) egyenletbe téve:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau_1^2 + \tau_2^2} \quad (4)$$

Ez a mértani feszültség általános képlete a különböző igénybevételeknél.

A derékfeszültség az élék hosszát változtatja meg és lehet húzó (+) vagy összenyomó (—); előbbi a test részecskéit egymástól eltávolítani, utóbbi egymáshoz közelíteni igyekszik.

A derékfeszültség a Hooke-törvény értelmében a rugalmassági határig arányos a viszonylagos megnyúlással, vagy fajlagos hossz változással, mert érvényes, hogy:

$$\lambda = \sigma \frac{l}{E} \quad \text{azaz} \quad \frac{\lambda}{l} E = \sigma$$

$$\text{és} \quad \sigma = \varepsilon \cdot E$$

A csúsztató-feszültség pedig az élszögeket változtatja meg, tehát az élszögek változásával arányos,

$$\tau = \gamma \cdot G$$

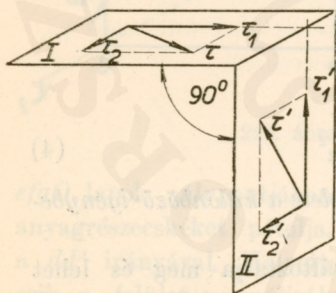
ahol γ az élszögváltozás ívmértékben és G a csúsztató- rugalmasági modulusz.

A test tetszőleges pontján átmenő laphoz tartozó feszültségvektor a mértani feszültség, mely a kérdéses laphoz tartozó derékes csúsztató-feszültségek geometriai összege. De egy tetszőleges ponton át végtelen sok felületelem fektethető, így ezek mindegyikéhez egy-egy feszültségvektor tartozik, amelyek általában különbözők lehetnek. Valamely ponthoz tartozó feszültségvektorok végtelen sokaságát, az illető pontban uralkodó feszültségi állapotnak nevezzük.

A feszültségvektorok jelzésére vonatkozólag megjegyezzük, hogy a következőkben σ_x , σ_y , σ_z a háromtengelyű koordináta rendszer irányába eső derékfeszültséget és τ_x , τ_y , τ_z a megfelelő tengelyekre merőleges csúsztató-feszültséget jelentik. Míg az erővektornak támadó pontja, addig a feszültségvektornak támadó felületeleme van.

39. §. A csúsztató-feszültségek sajátsága.

Két egymásra merőleges síkban fellépő csúsztató-feszültségek azon komponensei, melyek a két sík metszésvonalára merőlegesek, egymással egyenlők. Tehát (227. ábra) az I síkban uralkodó τ feszültség τ_1 komponense egyenlő a II síkban fellépő τ' feszültség τ'_1 komponensével.



227. ábra.

Legyenek az AB négyyszögű prizma élei oly rövidek, hogy a feszültség egy-egy oldallapnak minden pontján egy és ugyanaz (228. ábra). Legyen τ_1 a $B123$ lapon működő csúsztató-feszültség azon összetevője, amely $B3$ élre merőleges, és τ_2 a $B345$ lapon levő csúsztató-feszültség azon összetevője, amely $B3$

élre merőleges. Ugyanilyen viszonyok forognak fenn az előbbi síkokkal párhuzamos két síkon, miért is tulajdonképpen két erópár hat a prizma. Az erőket megkapjuk, ha a terület megszorozzuk a feszültséggel, vagyis:

$$P = b \cdot c \cdot \tau_1$$

$$Q = a \cdot b \cdot \tau_2$$

és

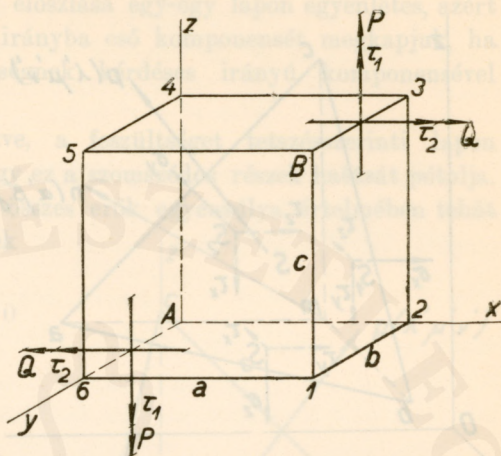
A $(P - P)$ erőpár forgatónyomatéka, mivel a kar a , nyilván $+abc\tau_1$, a $(Q - Q)$ erőpáré pedig $-abc\tau_2$ lesz. Mivel a prizma egyensúlyban van, a nyomatékok összege zéró, vagyis:

$$-abc\tau_2 + abc\tau_1 = 0$$

s ebből:

$$\tau_2 = \tau_1$$

*Tehát a megter-
helt test belsejében egy-
másra merőleges síkok-
ban, e síkok metszés-
vonalára merőlegesen,
egymással egyenlő τ
feszültségek keletkez-
nek. Ha egyikük meg-
van, a másiknak is meg*



228. ábra.

kell lennie. Ez a csúsztató-feszültségek dualitásának elve, mely szerint a koordinált (egymás mellé rendelt) csúsztató-feszültségek egyenlők.

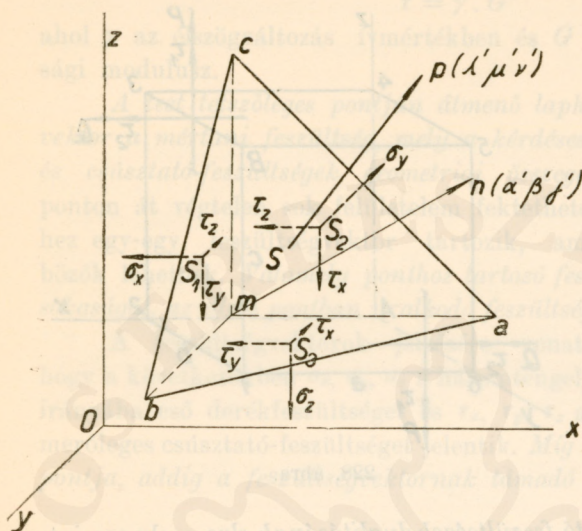
40. §. A mértani feszültség tetszésszerű lapon.

Az elemi tetraeder feszültségi állapota.

Fektessünk a megterhelt test valamely m pontján át tetszőleges, három egymásra merőleges síkot és tegyük fel, hogy az m ponthoz tartozó mértani feszültségvektort mindhárom lapra nézve ismerjük. Ez esetben az m ponton áthaladó tetszésszerű abc síkban uralkodó p mértani feszültséget nagyságra, irányra és értelemre meg tudjuk határozni.

Legyen m pont a differenciális prizma sarkpontja (229. ábra) melynek oldallapjai összeesnek az előbb felvett három egymásra merőleges síkkal. Ebből a prizmából az abc síkkal messünk ki egy tetraedert. Mivel a differenciális lapokon a feszültségeket egyenletesen eloszlóknak tekinthetjük, válasszuk meg ezeket a lapok súlypontjaiban (S, S_1, S_2, S_3). Az abc síkot — melynek mértani feszültségét keressük — tulajdonképpen az m ponton kellett volna átfektetni, de a differenciális élhosszak miatt a felvett abc síkban ugyanazon feszültség uralkodik, mintha m ponton menne keresztül.

Ha általános alakú testből vágtuk ki az elemi tetraedert, akkor a felvett három egymásra merőleges sík mindegyikében egy



229. ábra.

derék-feszültség (σ) és egy csúsztató-feszültség (τ) ébred, utóbbinak minden lapon két-két komponense van. Ezen legáltalánosabb esetben (229. ábra) tehát az elemi tetraeder m csúcsú testszögletének oldallapjaira ható hat feszültségi komponens:

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ és τ_x, τ_y, τ_z . Ez a későbbiekben tárgyalandó *térbeli feszültségi állapot* esete.

A gyakorlatilag fontos esetek túlnyomó

részében a feszültségi állapot *síkbeli feszültségi állapottá egyszerűsül* (állandó szelvényű tartók), amidőn az előbbi hat feszültségi komponens közül csak három, pl. σ_x, τ_x és τ_y lép fel. Először ezen utóbbi, egyszerűbb esetet ismertetjük.

Az elemi tetraeder mbc lapján derék- és csúsztató-feszültség, az mac és mab lapokon pedig csak csúsztató-feszültség keletkezik. Most tehát $\sigma_y = \sigma_z = \tau_x = 0$, a feszültségi állapot síkbeli (230. ábra). Legyenek abc lap n normálisának irányszögei α', β' és γ' , ugyan-ezen laphoz tartozó ismeretlen p feszültségvektor irányszögei pedig λ', μ' és ν' . Akkor az irány-cosinusok:

$$\begin{array}{ll} \cos \alpha' = \alpha & \text{és} \quad \cos \lambda' = \lambda \\ \cos \beta' = \beta & \cos \mu' = \mu \\ \cos \gamma' = \gamma & \cos \nu' = \nu \end{array}$$

Az elemi tetraeder lapjainak területe pedig:

$$\begin{array}{l} abc = F \\ mbc = F_x = F \cdot \alpha \\ mac = F_y = F \cdot \beta \\ mab = F_z = F \cdot \gamma \end{array}$$

és

és ebből az *abc* lapon uralkodó mértani feszültséget meghatározó egyenletcsoport:

$$\left. \begin{aligned} p\lambda &= \alpha \sigma_x + \beta \tau_z + \gamma \tau_y \\ p\mu &= \beta \sigma_y + \gamma \tau_x + \alpha \tau_z \\ p\nu &= \gamma \sigma_z + \alpha \tau_y + \beta \tau_x \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Keressük síkbeli feszültségi állapot mellett azt az *m* ponton átmenő síkot, melyre nézve a mértani feszültség $p = 0$. Az (1) egyenletcsoport figyelembevételével errenézve szükséges, hogy mindenekelőtt $\alpha = 0$, vagyis $\alpha' = \frac{\pi}{2}$ legyen, tehát a kérdéses sík normálisának az *yz* síkban kell fekiüdnie, azaz a sík párhuzamos lesz az *x* tengellyel. Az *m* ponton átmenő, *x* tengellyel párhuzamos síkokban már csak az *x* tengellyel párhuzamos feszültségek lehetségesek.

Ha tehát $\alpha = 0$

akkor az (1) egyenletcsoport a következőképp alakul:

$$\left. \begin{aligned} p\lambda &= \beta \tau_z + \gamma \tau_y \\ p\mu &= 0 \\ p\nu &= 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Ha $p \geq 0$, akkor

$$\mu = \nu = 0$$

$$\text{vagyis:} \quad \mu' = \nu' = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{tehát:} \quad \lambda = 1 \text{ azaz } \lambda' = 0$$

ez esetben a feszültségvektor az *x* tengellyel párhuzamos.

A felvett feszültségek mellett (230. ábra) az *x* tengellyel párhuzamos síkokban — melyek a σ_x derékfeszültség irányával párhuzamosak — csak csúsztató-feszültségek lehetségesek; ezekre nézve

$$p\lambda = p = \beta \tau_z + \gamma \tau_y$$

Lesz ezen síkok között egy, melyre nézve β és γ olyan értékűek, hogy kielégítik a $p = 0$ feltételt, vagyis

$$p = \beta \tau_z + \gamma \tau_y = 0$$

$$\beta \tau_z = -\gamma \tau_y$$

ahonnan:

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\cos \gamma'}{\cos \beta'} = -\frac{\tau_z}{\tau_y}$$

Mint hogy ez az m ponton átmenő, x tengellyel parallel sík, az yz síkra merőleges, nyomvonalára (AB) magában foglalja m pont vetületét m' -t (231. ábra). Az yz síkkal parallel mbc sík m pontjában a csúsztató-feszültség két komponense τ_y és τ_z (230. ábra) és ha φ az eredő csúsztató-feszültségnek az y tengellyel bezárt szöge, akkor:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\tau_y}{\tau_z}$$

A sík nyomvonalára, a normális vetülete (n') merőlegesen áll.

$$\beta' = 90^\circ + \gamma'$$

$$\gamma' = \beta' - 90^\circ$$

$$\cos \gamma' = \cos (\beta' - 90^\circ) = \sin \beta'$$

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{\cos \gamma'}{\cos \beta'} = \frac{\gamma}{\beta} = -\frac{\tau_z}{\tau_y}$$

ennél fogva, tekintettel $\operatorname{tg} \varphi$ fenti értékére:

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \beta' = -1$$

Az eredő csúsztató-feszültség iránya az yz síkkal parallel sík m pontjában merőleges azon sík normálisára, melyben a feszültség zéró; azaz annak a síknak nyomvonalára, melyben $p = 0$, összeesik az eredő csúsztató-feszültség irányával.

Ha tehát a megterhelt test valamely pontján keresztülmenő három egymásra merőleges síkban csak σ_x , τ_y és τ_z feszültségek

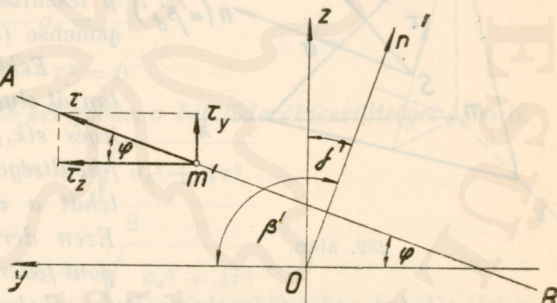
lépnek fel, akkor az ezen ponton átmenő síkok közül abban nem lesz egyáltalában feszültség, mely az x tengellyel parallel és melynek nyomvonalára az yz , vagy ezzel parallel síkban, összeesik az eredő csúsztató-feszültség irányával.

Az eddigiekből következtethetünk arra, hogy valamely, a palástjában meg nem terhelt tartó belsejében csak akkor lehet

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_x = 0$$

ha a tartó állandó szelvényű. Ez esetben ugyanis:

1. a felület minden pontjában $p = 0$ (ha a légnymástól eltekintünk) és



231. ábra.

2. ha $\sigma_y = \sigma_z = \tau_x = 0$, akkor a (2) egyenletcsoportból a következőkhöz jutunk:

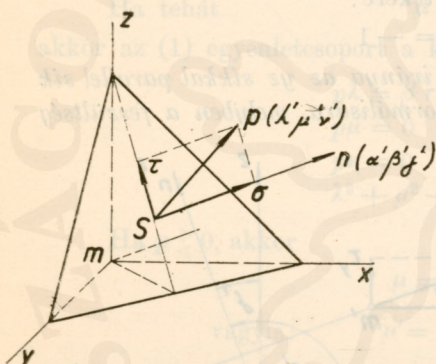
$$\left. \begin{aligned} 0 &= \alpha \sigma_x + \beta \tau_z + \gamma \tau_y \\ 0 &= \alpha \tau_z \\ 0 &= \alpha \tau_y \end{aligned} \right\}$$

Az utolsó két egyenletből következik, hogy $\alpha = 0$, azaz $\alpha' = \frac{\pi}{2}$,

tehát a palást minden pontjához tartozó normális merőleges az x tengelyre, ami csak állandó szelvényű tartónál lehetséges.

41. §. Föderékfeszültségek.

Ha a külerőkkel megterhelt és deformáció után megállapodott test valamely m pontján át minden lehető síkot átfektetve képze-



232. ábra.

lünk, az előbbi § értelmében a hat feszültségből bármelyik síkhoz tartozó p mértani feszültség kiszámítható. Általában minden p feszültségnek van σ és τ komponense (232. ábra)

Fektethető azonban m ponton át olyan három egymásra merőleges sík, melyeken csak derékfeszültségek lépnek fel, melyekben tehát a csúsztató-feszültség zéró. Ezen derékfeszültségeket az illető pont föderékfeszültségeinek, a meg-

felelő síkokat pedig föderékfeszültségi síkoknak nevezzük. A föderékfeszültség irányszögei (λ', μ', ν') azonosak a sík normálisának irányszögeivel (α', β', γ').

A) Föderékfeszültségek állandó szelvényű tartóknál (síkbeli feszültségi állapot).

A kérdéses m pontban csak σ_x , τ_y és τ_z feszültségek uralkodnak, $\sigma_y = \sigma_z = \tau_x = 0$. Az (1) egyenletcsoportból (40. §) kell kiindulnunk:

$$\left. \begin{aligned} p\lambda &= \alpha \sigma_x + \beta \tau_z + \gamma \tau_y \\ p\mu &= \alpha \tau_z \\ p\nu &= \alpha \tau_y \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Miután a főderékfeszültség iránya a sík normálisának irányával összeesik, s a mértani feszültségnek a főderékfeszültségi síkon csak normális komponense van és ez lesz a főderékfeszültség,

$$\alpha' = \lambda', \quad \beta' = \mu', \quad \gamma' = \nu' \quad \text{és} \quad p = \sigma$$

A főderékfeszültségi síkokra tehát érvényes, hogy:

$$\left. \begin{aligned} \sigma\alpha &= \alpha\sigma_x + \beta\tau_z + \gamma\tau_y \\ \sigma\beta &= \alpha\tau_z \\ \sigma\gamma &= \alpha\tau_y \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ezen egyenletcsoport második és harmadik egyenletéből:

$$\beta = \frac{\alpha\tau_z}{\sigma} \quad \text{és} \quad \gamma = \frac{\alpha\tau_y}{\sigma}$$

amely értékeket az elsőbe behelyettesítve:

$$\sigma\alpha = \alpha\sigma_x + \alpha \frac{\tau_z^2}{\sigma} + \alpha \frac{\tau_y^2}{\sigma}$$

$$\text{ahonnan: } \sigma - \sigma_x = \frac{\tau_z^2 + \tau_y^2}{\sigma}$$

$$\text{és mivel: } \tau_z^2 + \tau_y^2 = \tau^2$$

$$\text{lesz: } \sigma - \sigma_x = \frac{\tau^2}{\sigma}$$

$$\text{és} \quad \sigma^2 - \sigma\sigma_x - \tau^2 = 0$$

amely másodfokú egyenlet két gyöke, a két főderékfeszültséget jelenti.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}{2}$$

$$\text{és} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_x - \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}{2}$$

Keressük az irányszögeket, illetve a megfelelő főderékfeszültségi síkokat, melyek a normálisaik által vannak jellemezve.

Az $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ egyenletbe β és γ előbb nyert értékeit behelyettesítve:

$$\alpha^2 + \alpha^2 \frac{\tau_z^2}{\sigma^2} + \alpha^2 \frac{\tau_y^2}{\sigma^2} = 1$$

$$\alpha^2 \left(1 + \frac{\tau_z^2 + \tau_y^2}{\sigma^2} \right) = \alpha^2 \left(1 + \frac{\tau^2}{\sigma^2} \right) = 1$$

$$\alpha^2 \left(\frac{\sigma^2 + \tau^2}{\sigma^2} \right) = 1$$

$$\text{ahonnan: } \alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}$$

és ennek alapján:

$$\beta = \frac{\alpha \tau_z}{\sigma} = \frac{\sigma \tau_z}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} = \frac{\tau_z}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}$$

$$\text{és} \quad \gamma = \frac{\alpha \tau_y}{\sigma} = \frac{\sigma \tau_y}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} = \frac{\tau_y}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}$$

Ilyenmódon a két főderékfeszültség és az ezekhez tartozó főderékfeszültségi síkok meg vannak határozva és pedig a legnagyobb főderékfeszültség:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}{2} \text{ és síkjára} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \tau^2}} \\ \beta_1 = \frac{\tau_z}{\sqrt{\sigma_1^2 + \tau^2}} \\ \gamma_1 = \frac{\tau_y}{\sqrt{\sigma_1^2 + \tau^2}} \end{array} \right.$$

és a legkisebb főderékfeszültség:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x - \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}{2} \text{ és síkjára:} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_2^2 + \tau^2}} \\ \beta_2 = \frac{\tau_z}{\sqrt{\sigma_2^2 + \tau^2}} \\ \gamma_2 = \frac{\tau_y}{\sqrt{\sigma_2^2 + \tau^2}} \end{array} \right.$$

Ezek a Rankine-képletek.

(2)

Igazolnunk kell, hogy ez a két főderékfeszültségi sík egymásra merőleges. Legyen a két sík egymással bezárt szöge ε , akkor a merőlegességi feltétel:

$$\cos \varepsilon = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0$$

Ha behozzuk a következő jelöléseket:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \tau^2} = S_1 \quad \text{és} \quad \sqrt{\sigma_2^2 + \tau^2} = S_2$$

$$\text{akkor:} \quad \cos \varepsilon = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{S_1 S_2} + \frac{\tau_z^2}{S_1 S_2} + \frac{\tau_y^2}{S_1 S_2} = \frac{\sigma_x^2 - \sigma_x^2 - 4\tau^2}{4} + \tau^2$$

$$\text{és} \quad \cos \varepsilon = \frac{4}{S_1 S_2} = 0$$

$$\text{tehát:} \quad \varepsilon = \frac{\pi}{2}$$

azaz a két főderékfeszültségi sík tényleg merőleges egymásra.

Keressük most az m ponton átmenő és a két ismeretes főderékfeszültségi síkra merőleges harmadik főderékfeszültségi síkot. Ebben a merőlegességből folyólag csúsztató-feszültség nincs. Legyenek e sík normálisának irány-cosinusai α_3 , β_3 és γ_3 s minthogy ezen sík a másik kettőre merőleges, érvényes a következő merőlegességi feltétel:

$$\alpha_3 = \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2$$

$$\beta_3 = \gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2$$

$$\gamma_3 = \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2$$

és a megfelelő értékeket behelyettesítve:

$$\alpha_3 = \frac{\tau_z \tau_y - \tau_y \tau_z}{S_1 S_2} = 0$$

$$\beta_3 = \frac{\tau_y \sigma_2 - \sigma_1 \tau_y}{S_1 S_2} = \frac{\tau_y (\sigma_2 - \sigma_1)}{S_1 S_2}$$

$$\gamma_3 = \frac{\sigma_1 \tau_z - \tau_z \sigma_2}{S_1 S_2} = -\frac{\tau_z (\sigma_2 - \sigma_1)}{S_1 S_2}$$

Keressük az ezen síkhoz tartozó σ_3 főderékfeszültséget. Az α_3 , β_3 és γ_3 most nyert értékeit behelyettesítjük az (1) egyenlet-csoportba:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_3 \alpha_3 &= \alpha_3 \sigma_x + \beta_3 \tau_z + \gamma_3 \tau_y = \\ &= 0 + \frac{\tau_z \tau_y (\sigma_2 - \sigma_1)}{S_1 S_2} - \frac{\tau_y \tau_z (\sigma_2 - \sigma_1)}{S_1 S_2} = 0 \\ \sigma_3 \beta_3 &= \alpha_3 \tau_z = 0 \\ \sigma_3 \gamma_3 &= \alpha_3 \tau_y = 0 \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

ami csak úgy állhat fenn, ha $\sigma_3 = 0$.

Ezen harmadik síkban tehát p is, azaz a mértani feszültség a harmadik síkon $= 0$, mert komponensei σ_3 és τ_3 szintén egyenlők zéróval.

B) *Térbeli feszültség állapotánál* — ha mind a hat feszültségi komponens (σ_x , σ_y , σ_z , τ_x , τ_y , τ_z) fellép az elemi tetraeder m csúcsú testszögletének oldallapjain, — a σ_3 főderékfeszültség nem zéró, hanem meghatározott értékkel bír. *Ilyenkor tehát három főderékfeszültség van:*

$$\sigma_1, \sigma_2 \text{ és } \sigma_3.$$

42. §. Térbeli, síkbeli és lineáris feszültségi állapot.

Az m ponton átfektetett minden síkhoz, melynek normálisa n , tartozik p_n feszültségvektor, melynek értékét meg tudjuk határozni, ha az m ponton átfektetett három egymásra merőleges síkban keletkező derék- és csúsztató-feszültséget ismerjük. Ez a feszült-

ségvektor általában a normálissal bizonyos szöget zár be, azaz p_n felbontható σ_n és τ_n komponensekre. Ha azonban m ponton át a három főderékfeszültségi síkot jelöljük ki, akkor ezen síkokhoz tartozó feszültségvektorok merőlegesek a síkokra, összeesnek a normálisok irányával és nagyságuk σ_1 , σ_2 és σ_3 .

A test bármely pontjához tartozóan van tehát három (és csakis három) egymásra kölcsönösen merőlegesen álló irány (a három főirány), amelyekre merőlegesen álló felületelemekben a csúsztatófeszültség zéró, ezen felületelemekhez tartozó derékfeszültségek pedig egyszersmind a főderékfeszültségek. A főderékfeszültségek a szerint húzó- vagy nyomófeszültségek, amint számértékük pozitív, vagy negatív.

Ha a koordinátarendszer x , y és z tengelye összeesik a főderékfeszültségi irányokkal, akkor a mértani feszültség három összetevője, mivel a csúsztatófeszültség nem lép fel e síkokban:

$$p\lambda = \alpha\sigma_1 = \sigma_1 \cos \alpha'$$

$$p\mu = \beta\sigma_2 = \sigma_2 \cos \beta'$$

$$p\nu = \gamma\sigma_3 = \sigma_3 \cos \gamma'$$

Legyen $p\lambda$, $p\mu$ és $p\nu$ valamely pont összrendezőinek megfelelő x , y és z , akkor:

$$\cos \alpha' = \frac{x}{\sigma_1}$$

$$\cos \beta' = \frac{y}{\sigma_2}$$

$$\cos \gamma' = \frac{z}{\sigma_3}$$

amely három egyenletet négyzetre emelés után összegezve kapjuk, hogy:

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = 1$$

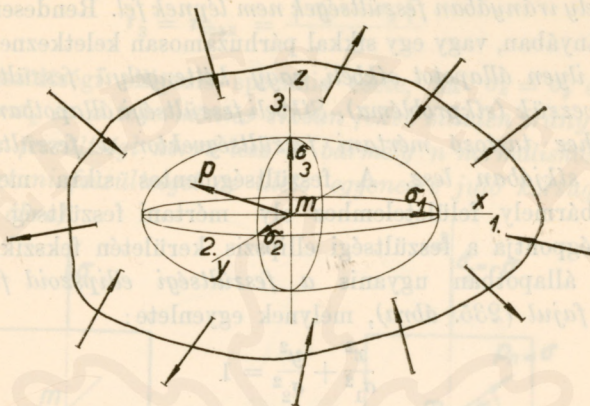
Ez a háromtengelyű ellipszoid egyenlete, melynek fél főtengelyei a főderékfeszültség-vektorok és amelyet a feszültségek ellipszoidjának nevezünk. A feszültségi ellipszoid (233. ábra) minden rádiusvektora az m ponton átmenő valamely felületelemhez tartozó p mértani, vagy fajlagos feszültséget adja.

De a feszültségi állapotnak a feszültségi ellipszoiddal való ábrázolása önmagában még nem ad felvilágosítást arra, hogy valamely n normálisához tartozó feszültségvektor az ellipszoid melyik sugarával esik össze. Vannak azonban speciális szerkesztési módok (Mohr-féle és síkbeli feszültségi állapotnál, a Weyrauch-féle feszültségi kör), melyekkel minden n normálisához tartozó p_n : σ_n és τ_n komponensei meghatározhatók σ_1 , σ_2 és σ_3 értékeiből, illetve síkbeli állapotnál pl. σ_x , σ_y és τ_{xy} -ből.

Ha $\sigma_2 = \sigma_3$, akkor a háromtengelyű ellipszoid forgás-ellipszoiddá válik, melynek forgástengelye az x tengely (1. főirány) és ilyenkor

az x -re merőlegesen álló minden irányhoz $\sigma_2 = \sigma_3$ -mal megegyező nagyságú normálfeszültség és zéró csúsztató-feszültség tartozik. Tehát minden ilyen irány főirány.

Előfordul az az eset is, amikor a három főderékfeszültség egyenlő, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$, s a feszültségi ellipszoid gömbbé válik. Ez esetben az m ponton átmenő minden felületelemhez csak derék-



233. ábra.

feszültség tartozik és ezek minden irányra egyenlők, a csúsztató-feszültség pedig minden irányban zéró. Az ilyen feszültségi állapotot hidrosztatikai feszültségi állapotnak is nevezzük, mert a nyugvó folyadékokat ez jellemzi (minden oldalról jövő egyenletes nyomás).

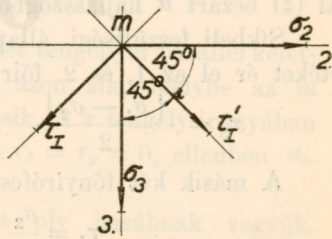
A főderékfeszültségek irányában szögváltozás nincs, tehát a három tengely deformáció után is merőleges marad egymásra.

Általános esetben τ_n értékéből a maximális csúsztató-feszültségek is meghatározhatók, matematikai alapon. Azaz az m ponthoz tartozóan találhatunk olyan felületelemeket is, melyekben a csúsztató-feszültség maximális értékű lesz. A csúsztató-feszültségek szélső értéküket azon 6 síkban veszik fel, melyek átmennek egy-egy főderékfeszültségi tengelyen és felezik a másik két főtengely közti derékszöveget (234. ábra). Ez esetben:

$$\tau_I = \tau_I' = \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}$$

$$\tau_{II} = \tau_{II}' = \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2}$$

és $\tau_{III} = \tau_{III}' = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}$



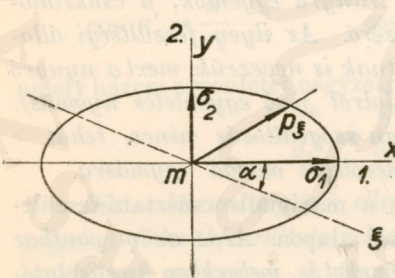
234. ábra.

Az eddig tárgyalt legáltalánosabb esetet térbeli, vagy három-tengelyű feszültségi állapotnak nevezzük, melyet három egymásra merőleges σ_1 , σ_2 és σ_3 főderékfeszültség jellemez.

A gyakorlatban előforduló feladatok túlnyomó részénél (pl. állandó szelvényű tartók) a feszültségi állapot jóval egyszerűbb, mert találhatunk egy olyan felületelemet, melyben a feszültség zéró, azaz egyik tengely irányában feszültségek nem lépnek fel. Rendszeresen csak két tengely irányában, vagy egy síkkal párhuzamosan keletkeznek feszültségek; az ilyen állapotot síkbeli, vagy kéttengelyű feszültségi állapotnak nevezzük (síkprobléma). Síkbeli feszültségi állapotban bármely felületelemhez tartozó mértani feszültségvektor a feszültségmentes felületelem síkjában lesz. A feszültségmentes síkra merőlegesen fektetett bármely felületelemhez oly mértani feszültség tartozik, melynek végpontja a feszültségi ellipszis kerületén fekszik. Síkbeli feszültségi állapotban ugyanis a feszültségi ellipszoid feszültségi ellipszissé fajul (235. ábra), melynek egyenlete:

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} = 1$$

A feszültségi ellipszis a feszültségmentes felületelem síkjában fekszik és felfőtengelyei σ_1 és σ_2 főderékfeszültségek:



235. ábra.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}{2}$$

és
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x - \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}{2}$$

A feszültségmentes felületelem normálisa okvetlen az egyik (σ_3) feszültségi főtengely, mert ha a totális feszültség zéró, akkor a csúsztató-feszültség is zéró. Legyen ez a 3. főirány és így $\sigma_3 = 0$. A feszültségi ellipszis síkjára merőleges síkokhoz tartozó mértani feszültség (p_ξ) a sík nyomvonalával (ξ) bezárt α hajlásszögből kiszámítható.

Síkbeli feszültségi állapot mellett a τ_n nyírófeszültség szélső értéket ér el az 1. és 2. főirányok közti szögeket felező síkban.

$$\tau_3 = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} \quad \text{azaz} \quad \tau_3 = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$$

A másik két főnyírófeszültség, mivel $\sigma_3 = 0$, lesz:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2}{2} \quad \text{és} \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1}{2}$$

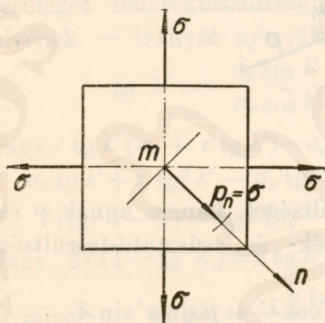
Hogy a három főnyírófeszültség közül melyik a legnagyobb, az nemcsak σ_1 és σ_2 nagyságától, hanem előjelétől is függ. Ha σ_1 és σ_2 ellentétes előjelűek, akkor okvetlen τ_3 adja a maximális nyírófeszültséget. Ha azonban az x és y irány összeesik σ_1 és σ_2 irányával, akkor:

$$\sigma_x = \sigma_1; \sigma_y = \sigma_2 \text{ és } \tau = 0$$

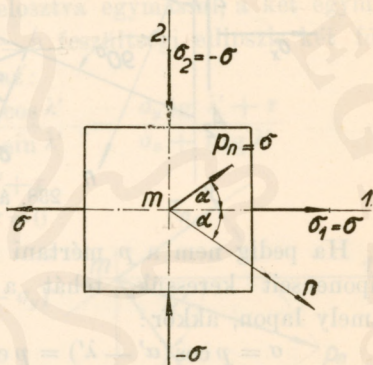
és így:

$$\tau_3 = \tau_{\max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}$$

A feszültségi ellipszis speciális esete, ha $\sigma_x = \sigma_y$ és $\tau = 0$, akkor $\sigma_1 = \sigma_2$ és a tehermentes síkban fekvő minden irány főirány, az ellipszis feszültségi körre lesz és bármely n normálishoz tartozó $p_n = \sigma$ mértani feszültséget az illető egyenesre jutó körsugár adja (236. ábra).



236. ábra.



237. ábra.

Ha pedig a két főderékfeszültség abszolút értékre egyenlő nagy, de előjelre nézve ellentett, tehát $\sigma_1 = \sigma$ és $\sigma_2 = -\sigma$, akkor is feszültségi kört kapunk, de az n normálishoz tartozó mértani feszültség iránya az n normálisnak az 1. főirányra való tükörképe p_n lesz (237. ábra). Ilyen feszültségi állapot valósul meg egy kocka belsejében, melynek két átellenes oldallapját egyenletes húzásra, kettőt meg egyenletes nyomásra vesszünk igénybe és a harmadik oldallap-párt terheletlennek hagyjuk.

Síkbeli feszültségi állapotnál csak két tengellyel párhuzamosan keletkezhetnek feszültségek. Legyen xy sík azon sík, melybe az m pontban keletkező minden feszültség beleesik. A z tengely irányában feszültségek nem lépnek fel, tehát $\sigma_z = \tau_x = \tau_y = 0$, ellenben σ_x , σ_y és $\tau_z = \tau$ nem egyenlők zéróval.

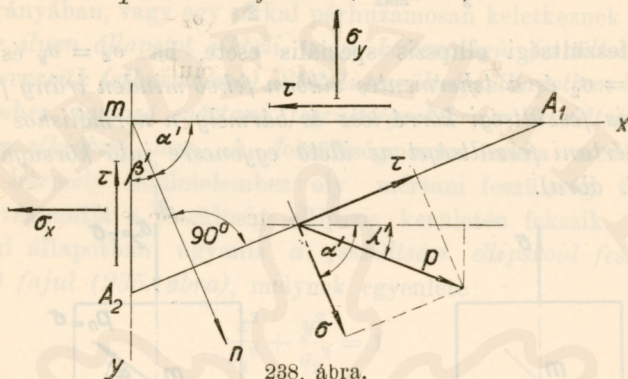
Most a testeletet tetraeder helyett oly hasábnak vegyük, melynek alapja az xy síkba eső derékszögű háromszög (238. ábra),

magassága pedig dz , akkor az $A_1 A_2$ laphoz tartozó p mértani feszültség komponensei a 40. § (2) egyenletcsoportja szerint:

$$\left. \begin{aligned} p\lambda &= \alpha\sigma_x + \beta\tau = p_x \\ p\mu &= \beta\sigma_y + \alpha\tau = p_y \end{aligned} \right\}$$

de mivel $\beta' = 90^\circ - \alpha'$ és $\mu' = 90^\circ - \lambda'$:

$$\left. \begin{aligned} p \cos \lambda' &= \sigma_x \cos \alpha' + \tau \sin \alpha' \\ p \sin \lambda' &= \sigma_y \sin \alpha' + \tau \cos \alpha' \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



238. ábra.

Ha pedig nem a p mértani feszültséget, hanem annak σ és τ komponenseit keressük, tehát a derék- és csúsztató-feszültséget valamely lapon, akkor:

$$\sigma = p \cos(\alpha' - \lambda') = p \cos \alpha' \cos \lambda' + p \sin \alpha' \sin \lambda'$$

$$\tau = p \sin(\alpha' - \lambda') = p \sin \alpha' \cos \lambda' - p \cos \alpha' \sin \lambda'$$

$$\text{avagy: } \sigma = \cos \alpha' (\sigma_x \cos \alpha' + \tau \sin \alpha') + \sin \alpha' (\sigma_y \sin \alpha' + \tau \cos \alpha')$$

$$\text{és } \tau = \sin \alpha' (\sigma_x \cos \alpha' + \tau \sin \alpha') - \cos \alpha' (\sigma_y \sin \alpha' + \tau \cos \alpha')$$

$$\text{ahonnan: } \left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_x \cos^2 \alpha' + \sigma_y \sin^2 \alpha' + \tau \sin 2\alpha' \\ \tau &= (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha' \cos \alpha' - \tau \cos 2\alpha' \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

Az (1) alatti két egyenletből, ha σ_x , σ_y és $\tau_z = \tau$ ismeretes, bármely α' szögű normálissal bíró síkhoz a mértani feszültségvektor (p) kiszámítható.

A főderékfeszültségi síkra pedig $\lambda' = \alpha'$ és $p = \sigma$ és így:

$$\sigma \cos \lambda' = \sigma_x \cos \lambda' + \tau \sin \lambda'$$

$$\sigma \sin \lambda' = \sigma_y \sin \lambda' + \tau \cos \lambda'$$

$$\text{vagy: } \left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \cos \lambda' + \tau \sin \lambda' &= 0 \\ \tau \cos \lambda' + (\sigma_y - \sigma) \sin \lambda' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ezen két homogén lineáris egyenletnek megoldása csak akkor lehet, ha determinánsuk eltűnik, azaz:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau \\ \tau & (\sigma_y - \sigma) \end{vmatrix} = (\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) - \tau^2 = 0$$

ezt kifejtve és rendezve:

$$\sigma_x \sigma_y - \sigma \sigma_y - \sigma \sigma_x + \sigma^2 - \tau^2 = 0$$

$$\sigma^2 - \sigma(\sigma_x + \sigma_y) + \sigma_x \sigma_y - \tau^2 = 0$$

amely egyenletnek két gyöke lesz a két főderékszűrés:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x \sigma_y - \tau^2)} = \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \end{aligned} \quad (3)$$

ha pedig σ_y is zéró, akkor a *Rankine*-formulát kapjuk:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}.$$

Az (1) alatti egyenleteket elosztva egymással, a két egymásra merőleges főderékszűrésnek — a feszültségi ellipszis két főtengelyének — irányát nyerjük. Azaz:

$$\operatorname{tg} \lambda' = \frac{\sigma_y \sin \lambda' + \tau \cos \lambda'}{\sigma_x \cos \lambda' + \tau \sin \lambda'} = \frac{\sigma_y \operatorname{tg} \lambda' + \tau}{\sigma_x + \tau \operatorname{tg} \lambda'}$$

avagy: $\operatorname{tg} \lambda' (\sigma_x + \tau \operatorname{tg} \lambda') = \sigma_y \operatorname{tg} \lambda' + \tau$

és $\sigma_x \operatorname{tg} \lambda' + \tau \operatorname{tg}^2 \lambda' - \sigma_y \operatorname{tg} \lambda' - \tau = 0$

$$\tau (\operatorname{tg}^2 \lambda' - 1) = \operatorname{tg} \lambda' (\sigma_y - \sigma_x)$$

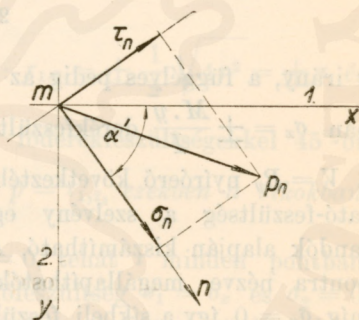
avagy $2\tau (1 - \operatorname{tg}^2 \lambda') = 2 \operatorname{tg} \lambda' (\sigma_x - \sigma_y)$

$$\text{de mivel: } \operatorname{tg} 2\lambda' = \frac{2 \operatorname{tg} \lambda'}{1 - \operatorname{tg}^2 \lambda'}$$

kapjuk, hogy:

$$\operatorname{tg} 2\lambda' = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = \operatorname{tg} 2\alpha' \quad (4)$$

és ebből λ' az egyik és $(\lambda' + 90^\circ)$ a másik irányszög.



239. ábra.

Ha pedig σ_1 és σ_2 összeesik az x és y tengely irányával, vagyis $\sigma_x = \sigma_1$ és $\sigma_y = \sigma_2$, továbbá $\tau = 0$, akkor egy tetszőleges α' szög alatt hajló normálishoz tartozó felületelemre a mértani feszültség (239 ábra):

$$p_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2$$

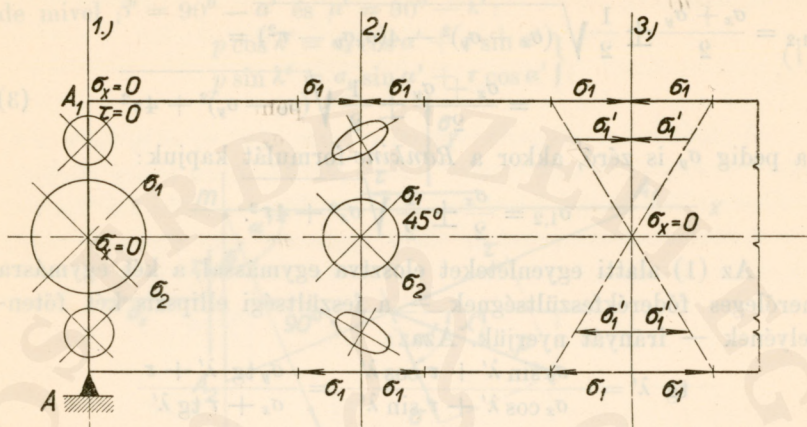
ahol hasonlóan megállapítható, hogy:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha' \quad (5)$$

$$\text{és} \quad \tau_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha' \quad (6)$$

$$\text{mert: } \cos^2 \alpha' = \frac{1 + \cos 2\alpha'}{2} \quad \text{és} \quad \sin^2 \alpha' = \frac{1 - \cos 2\alpha'}{2}$$

Vizsgáljuk meg a mondottak alapján, hogy egy vízszintes, két-végén alátámasztott és a középtől szimmetrikusan elhelyezett koncentrált erővel megterhelt prizmatikus tartó egyes helyein miként alakul a feszültségi ellipszis (240. ábra). A tartó hossz tengelye az



240. ábra.

x irány, a függélyes pedig az y irány. Mint ismeretes, az x irányban $\sigma_x = \pm \frac{M \cdot y}{I}$ derékfeszültség keletkezik, míg reá merőlegesen a $V = R_y$ nyírőerő következtében τ feszültség lép fel, amely csúszató-feszültség a szelvény egyes pontjaiban a később tárgyalandók alapján kiszámítható. A σ_x és τ feszültségek tehát bármely pontra nézve megállapíthatók és általában zérótól különböznek, míg $\sigma_y = 0$, így a síkbeli feszültségi állapot eddig levezetett képletei egyszerűsülnek és lesznek:

a főderékfeszültségek:
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \quad (7)$$

és hajlásszögük:
$$\operatorname{tg} 2\lambda' = \frac{2\tau}{\sigma_x} \quad (8)$$

a maximális csúszató-feszültség:
$$\tau_{\max} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \quad (9)$$

és a hozzátartozó derékfeszültség:
$$\sigma = \frac{\sigma_x}{2} \quad (10)$$

amely értékeket az (5) és (6) egyenletekbe behelyettesítve bármely síkhoz tartozó p_n kiszámítható.

A tartó egyes helyein a feszültségi ellipszis a következőkép alakul. A szélső szálakban a τ feszültség zéró, tehát itt $\sigma_1 = \sigma_x$ és $\sigma_2 = 0$;

$\operatorname{tg} 2\lambda' = 0$, így $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{\pi}{2}$, vagyis a szélső szálakban az ellipszis az x tengellyel parallel $2\sigma_1 = 2\sigma_x$ hosszúságú vonaldarabbá degenerálódik.

A 240. ábrán a 2. és 3. (középső) szelvény szélső szálaiban a feszültségvektorok be vannak rajzolva. Az alátámasztás felett a nyomaték zéró, az 1. keresztzelvény minden pontjában tehát $\sigma_x = 0$; az A és A_1 szélső pontokban az ellipszis ponttá degenerálódik.

A semleges szál minden pontjában $\sigma_x = 0$, de $\tau \geq 0$, kivéve azon helyeket, ahol a nyíróerő $V = 0$. Az ábrában a nyomaték a 3. szelvényben maximális, ugyanitt $V = 0$, tehát az ellipszis egyenessé, majd középen ponttá válik. *A semleges szál többi pontjában a főderékfeszültségek: $\sigma_1 = \tau$ és $\sigma_2 = -\tau$; $\operatorname{tg} 2\lambda' = \infty$, azaz $\lambda_1 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ és $\lambda_2 = 3\frac{\pi}{4} = 135^\circ$, vagyis az ellipszisek $\sigma_1 = \tau$ sugarú körök lesznek, melyeknek sugara $V = 0$ -tól a $V_{\max}$ helye felé növekszik, valamint a vizsgált pont helyének függvényeként nő, a szélső száltól a semleges szál felé.*

A maximális csúsztató-feszültség: $\tau_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2} = \pm \tau$ és

a hozzátartozó $\sigma = \frac{\sigma_x}{2} = 0$, vagyis a főderékfeszültségekkel 45° -ot alkotó síkokban az eredő feszültség $p = \tau_{1,2}$, ezekben a síkokban tisztán csúsztatás van.

A 3. szelvényben, minthogy $V = 0$, tehát τ minden pontban zéró és így a sík minden pontjában a főfeszültség $\sigma_1 = \sigma_x$ és $\sigma_2 = 0$ azaz az ellipszis elfajul $2\sigma_1 = 2\sigma_x$ hosszúságú vízszintes vonaldarabbá.

A legnagyobb a csúsztató-feszültség a σ_1 -el 45° -ot alkotó irányban

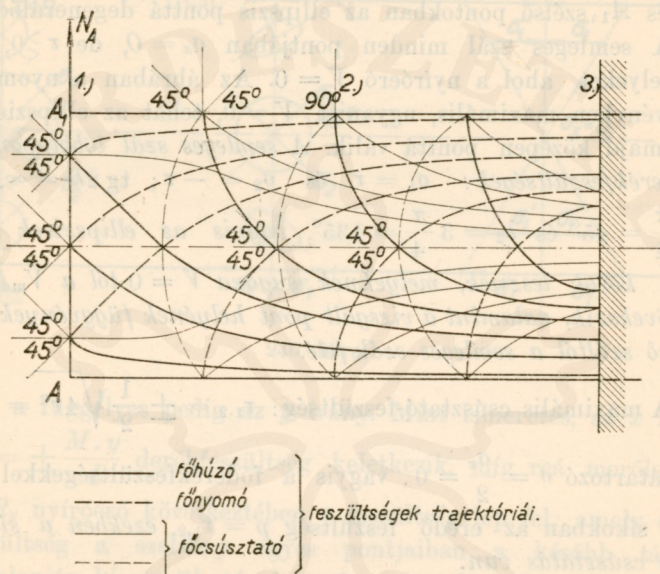
$\tau_{1,2} = \pm \frac{\sigma_x}{2}$, a hozzátartozó (reá merőleges), tehát σ_1 -el szintén

45° -ot bezáró $\sigma = \frac{\sigma_x}{2}$, vagyis eredőjük: $p = \frac{\sigma_x}{\sqrt{2}}$ a vízszintesbe esik és kisebb, mint σ_x .

Teljes áttekintést adnak a feszültségeknek a testben való eloszlásáról az ú. n. feszültségi trajektóriák. Kétféle trajektóriát különböztetünk meg: a főderékfeszültségek és a velük 45° -ot bezáró legnagyobb csúsztató-feszültségek trajektóriáit. Az elsők oly görbék, melyeknek érintői a főderékfeszültségek, utóbbiak érintői pedig a maximális τ feszültségek. Ha a $\sigma_{1,2}$ és $\tau_{1,2}$ feszültségek irányvonalait megrajzolva képzeljük és azokat a szomszédos szelvénybeli pontokat kötjük

össze, melyek érintői csak végtelen kicsiben térnek el egymástól, az érintők által burkolt folytonos görbe lesz a feszültségi trajektória.

Vegyük példaképpen a 240. ábrában feltüntetett esetet, amely a szimmetria miatt a 3. szelvényben befogott és A -ban koncentráltan terhelt tartónak tekinthető, a feszültségek eloszlásának képe ugyanaz (241. ábra). A főderékfeszültségek az 1. keresztmetszetet 45° alatt, a 3. szelvényt pedig 90° alatt metszik, a tartó egyik szélső szálát



241. ábra.

merőlegesen találják, a másikhoz aszimptotikusan közelednek, a semleges szálát pedig 45° alatt metszik és a felső és alsó szálakból kiinduló két görbeseregnek görbéi egymást 90° alatt metszik. A felső és alsó szélső szálak is főfeszültségi trajektóriák. A τ feszültségi trajektóriák egyik görbeserege 45° alatt metszi a két szélső szálát és 90° alatt a semleges szálát, a másik görbesereg a semleges szálhoz aszimptotikusan közeledik, a szélső szálakat és az 1. keresztmetszetet pedig 45° alatt éri és az előbbi görbesereget merőlegesen metszi.

Lineáris feszültségi állapot. Ha az m ponton átfektetett síkok közül egynél több feszültségmentes sík van, azaz a keletkező mértani feszültség egynél több síkban egyenlő zéróval, akkor lineáris, vagy egytengelyű feszültségi állapottal van dolgunk. Ha csak két különböző feszültségmentes felületelem van m pontban, akkor bármely felületelem vektora benne fekszik mindkét síkban, tehát beleesik a két sík

metszésvonalába. Ez pedig a feszültségi főtengely. A feszültségi ellipszis egyenessé válik, így csak egy irányú feszültségek ébrednek (pl. derékszilárdság),

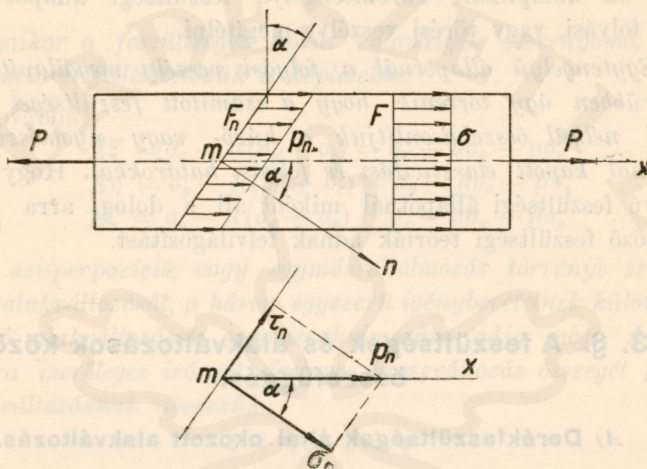
tehát:

$$\sigma_1 \geq 0$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

A derékszilárdság alapképlete szerint:

$$\sigma_x = \sigma_1 = \pm \frac{R_x}{F} \leq \sigma_m$$



242. ábra.

Vizsgáljuk valamely húzásra igénybevett rúd (242. ábra) feszültségi állapotát. Ha a feszültség egyenletesen oszlik meg és $F_n = \frac{F}{\cos \alpha}$ akkor az n normálisra merőleges F_n síkra a mértani feszültség:

$$p_n = \frac{P}{F_n} = \frac{P \cos \alpha}{F} = \sigma \cos \alpha$$

mert: $\frac{P}{F} = \sigma$. A mértani feszültség két komponense:

$$\sigma_n = p_n \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha$$

$$\tau_n = p_n \sin \alpha = \sigma \cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} \sigma \cdot \sin 2\alpha$$

A σ_n és τ_n tehát a normális irányszögével változik. A σ_n akkor maximális, ha $\alpha = 0^\circ$, amikor is $\sigma = \sigma_n = \sigma_1$. A τ_n nyírófeszültség pedig akkor maximum, ha $2\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 45^\circ$ és ez esetben: $\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma$, azaz az x tengellyel 45° -ot bezáró normálissal bíró síkokban lesz $\tau_{\max}$.

Ha $\alpha = \frac{\pi}{2}$, akkor $p_n = 0$, azaz a rúdtengellyel párhuzamos metszésekben a mértani feszültség zéró.

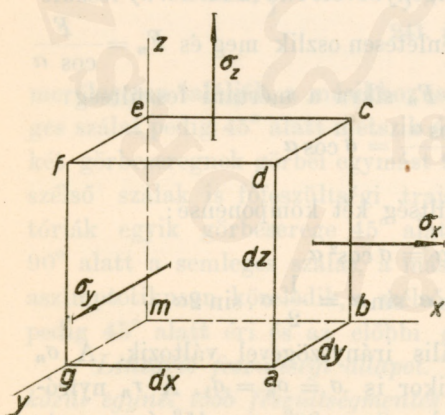
A lineáris feszültségi állapot a legegyszerűbb feszültségi állapot, amely egyszerű húzószilárdsági kísérleteknél praktikusán megvalósítható. Ezzel lehet a rugalmassági állandót, a folyási határt, a szilárdságot meghatározni, mely mindjárt összehasonlító feszültség akkor, ha komplikált háromtengelyű feszültségi állapot mellett kell a folyási, vagy törési veszélyt megítélni.

Egytengelyű állapotnál a folyási veszély megállapítása legegyszerűbben úgy történik, hogy a számított feszültséget minden további nélkül összehasonlítjuk a húzó- vagy nyomószilárdsági próbáknál kapott elaszticitási és folyási határokkal. Hogy háromtengelyű feszültségi állapotnál miként áll a dolog, arra nézve a különböző feszültségi teóriák adnak felvilágosítást.

43. §. A feszültségek és alakváltozások közötti összefüggés.

A) Derékfeszültségek által okozott alakváltozás.

A megterhelt és alakváltozás után megállapodott testből kivágunk egy differenciális prizmat (243. ábra) és feltesszük, hogy az oldallapjain csak derékfeszültségek működnek egyenletesen elosztva és pedig:



243. ábra.

az $abcd$ lapon:

$$\sigma_x = \frac{R_x}{F}$$

az $adfg$ lapon:

$$\sigma_y = \frac{R_y}{F}$$

és a $cdef$ lapon:

$$\sigma_z = \frac{R_z}{F}$$

Ez esetben minden prizmaél egy feszültség által megnyújtatik, a másik kettő által pedig megrövidítettetik. Ha az élek hosszváltozásai

$d\xi$, $d\eta$ és $d\zeta$ és a derékrugalmassági modulusz E , akkor Hooke törvénye értelmében a fajlagos hosszváltozások:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dx} &= \frac{\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} = \xi' \\ \frac{d\eta}{dy} &= \frac{\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} = \eta' \\ \text{és} \quad \frac{d\zeta}{dz} &= \frac{\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} = \zeta'\end{aligned}$$

Amikor a feszültségek közül valamelyik összenyomó, akkor azt negatív előjellel tesszük a képletekbe.

Továbbá:

$$\begin{aligned}E\xi' &= \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) = \sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z \\ E\eta' &= \sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z) = \sigma_y - \mu\sigma_x - \mu\sigma_z \\ E\zeta' &= \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) = \sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y\end{aligned}$$

A szuperpozíció, vagy egymásrahalmazás törvénye szerint a prizma alakváltozását, a három egyszerű igénybevételnek külön-külön megfelelő alakváltozások egymásrahalmazása adja meg. A három egymásra merőleges irányú fajlagos hosszváltozás összegét fajlagos térfogatváltozásnak nevezzük:

$$\xi' + \eta' + \zeta' = \varrho$$

Adjuk össze a három előbbi egyenletet:

$$E(\xi' + \eta' + \zeta') = \sigma_x(1 - 2\mu) + \sigma_y(1 - 2\mu) + \sigma_z(1 - 2\mu)$$

vagy:

$$E\varrho = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)(1 - 2\mu)$$

ahonnan:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{E\varrho}{1 - 2\mu} \quad (1)$$

Szorozzuk meg ezt az egyenletet μ -vel és adjuk hozzá az

$$E\xi' = \sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z \quad (2)$$

egyenlethez, akkor: $\sigma_x(1 + \mu) = E\left(\xi' + \frac{\varrho\mu}{1 - 2\mu}\right)$

$$\text{ahonnan: } \left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 + \mu} \left(\xi' + \frac{\varrho\mu}{1 - 2\mu} \right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 + \mu} \left(\eta' + \frac{\varrho\mu}{1 - 2\mu} \right) \\ \sigma_z &= \frac{E}{1 + \mu} \left(\zeta' + \frac{\varrho\mu}{1 - 2\mu} \right) \end{aligned} \right\}$$

Hasonlóképpen:

$$\quad \quad \quad (3)$$

és

$$\quad \quad \quad (3)$$

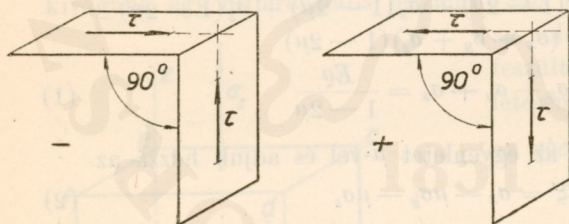
E három egyenlet mutatja a derékfeszültségek és az általuk okozott alakváltozások közötti összefüggést.

A nyújtó derékfeszültség meghosszabbítja az irányával párhuzamos éleket és megrövidíti az irányára merőleges éleket. *Derékfeszültségek csak élhossz-változásokat okozhatnak és a fajlagos hosszváltozás és a derékelaszticitási modulusz szorzata a rugalmassági határon belül, mindenkor a hosszváltozást létrehozó derékfeszültséget adja (Hooke-törvény).*

Ha a 243. ábrában $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$, akkor $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, azaz a feszültségi ellipszoid gömbbé degenerálódik; ez a hidrosztatikai feszültségi állapot. Egy régebbi felfogás szerint a hidrosztatikai nyomás ugyan nincs befolyással a törésre, úgyhogy egy homogén test minden oldalról jövő egyenletes nyomással nem törhető el, de a folyási, vagy rugalmassági határon ez nem érvényes, mert az már beigazolt, hogy bár a minden oldalról jövő egyenletes nyomás a testet el nem töri, de maradé alakváltozásokat létesíthet (anyag-sűrítés), melynek következménye a szilárdsági tulajdonságok megváltozása. Hogy pedig milyen hatást vált ki rideg testeknél (pl. márvány, homokkő) a minden oldalról jövő egyenletes nyomás, azt Böker és Kármán kísérletei igazolták.

B) Csúsztató-feszültségek által okozott alakváltozás.

Csúsztató-feszültség mindig két egymásra merőleges síkban ébred egyszerre és a két sík metszéspontját merőlegesen metszi.



244. ábra.

A csúsztató-feszültség fellépése folytán az eredetileg 90° -os élszög megváltozik és $(90^\circ \pm \gamma)$ értéket vesz fel (244. ábra), ahol a $+$ jel érvényes akkor, ha a τ feszültségek iránya az éltől el, a

$-$ jel pedig, ha az él felé mutat. Az ívmértékben kifejezett szögváltozás (γ) arányos a csúsztató-feszültséggel:

$$\tau = G \cdot \hat{\gamma} \quad (4)$$

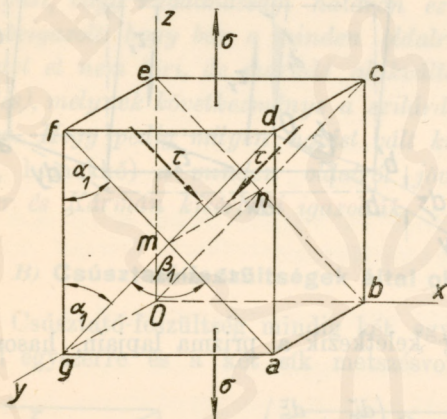
ahol G kg/cm² a csúsztató rugalmassági modulusz, a test anyagi minőségétől függő és a rugalmassági határon belül állandó tényező.

Tegyük fel, hogy a derékszögű prizmának minden oldallapján csúsztató-feszültség lép fel (245. ábra), aminek következtében az élszögek megváltoznak és az élszögváltozás arányos az élt merő-

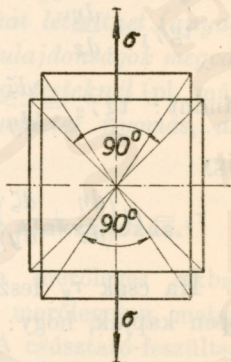
Csúsztató-feszültségek csak élszögváltozást okozhatnak és a rugalmassági határon belül, az ívmértékben kifejezett élszögváltozás és a csúsztató rugalmassági modulusz szorzata, az élszögváltozást okozó csúsztató-feszültséget adja meg.

44. §. A csúsztató rugalmassági modulusz meghatározása.

Izotropos anyag csúsztató rugalmassági modulusza kiszámítható a derékrugalmasság moduluszából. Vegyünk fel egy prizmát (246. ábra), amelynek alsó és felső lapján σ derékfeszültség műkö-



246. ábra.



247. ábra.

dik. Ha a prizma a terhelés előtt olyan kocka volt, melynek élei a hosszegységgel egyenlők, úgy a derékfeszültséggel párhuzamos élek terhelés után meghosszabbodnak, a feszültség irányára merőleges élek ellenben megrövidülnek (247. ábra). Tehát:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{ag}{fg} = \frac{1 - \mu \frac{\sigma}{E}}{1 + \frac{\sigma}{E}} = \frac{E - \mu \sigma}{E + \sigma}$$

A feltüntetett $abef$ és $cdgO$ átlós síkok a terhelés előtt merőlegesek egymásra, metszéspontjuk mn , s ezen élnek a szöge 90° . A terhelés után ez élszög értéke β_1 , tehát az élszögváltozás:

$$\gamma = 90^\circ - \beta_1 = 90^\circ - 2\alpha_1$$

Ennélfogva :

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(90^\circ - 2\alpha_1) = \operatorname{ctg} 2\alpha_1 = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha_1}$$

és mivel :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_1}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_1}$$

lesz :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_1}{2 \operatorname{tg} \alpha_1}$$

Ha most $\operatorname{tg} \alpha_1$ előbb talált értékét ide behelyettesítjük :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{1 - \left(\frac{E - \mu\sigma}{E + \sigma} \right)^2}{2 \cdot \frac{E - \mu\sigma}{E + \sigma}} = \frac{(E + \sigma)^2 - (E - \mu\sigma)^2}{2(E + \sigma)(E - \mu\sigma)} = \\ &= \frac{2E(1 + \mu)\sigma + \sigma^2(1 - \mu^2)}{2E^2 + 2E\sigma(1 - \mu) - 2\mu\sigma^2} = \frac{(1 + \mu)\sigma[2E + \sigma(1 - \mu)]}{2[E^2 + E\sigma(1 - \mu) - \mu\sigma^2]} \end{aligned}$$

A számlálót és nevezőt $2E$ -vel elosztva :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{(1 + \mu)\sigma \left[1 + \frac{(1 - \mu)\sigma}{2E} \right]}{E \left[1 + \frac{(1 - \mu)\sigma}{E} - \frac{\mu\sigma^2}{E^2} \right]}$$

Mivel σ -hoz képest E igen nagy érték, azok a tagok, melyekben a $\frac{\sigma}{E}$ tört előfordul, az egységgel szemben elhanyagolhatók; továbbá, mivel γ igen kis szög, a tangens helyett az ív írható, s így :

$$\widehat{\gamma} = \frac{(1 + \mu)\sigma}{E}$$

A csúsztató-feszültség a két átlós síkban merőleges az mn élre és nagysága :

$$\tau = G \cdot \widehat{\gamma} = \frac{(1 + \mu)\sigma \cdot G}{E} \quad (1)$$

A τ feszültség értéke azonban a terhelésből meghatározható.

Az $abef$ átlós sík normálisának irányszögei $\alpha' = 45^\circ$, $\beta' = 90^\circ$ és $\gamma' = 45^\circ$, amely szögek cosinusait a 40. § (1) egyenletcsoportjába téve és figyelembe véve, hogy $\sigma_x = \sigma$ és $\tau_y = \tau_z = 0$, kapjuk az $abef$ síkon a p mértani feszültséget :

$$\left. \begin{aligned} p\lambda &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \\ p\mu &= 0 \\ p\nu &= 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Ezen egyenletekben sem p , sem λ nem lehet zéró, kell tehát, hogy $\mu = \nu = 0$ legyen, tehát $\lambda = 1$ és így:

$$p = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$$

és irányszögei: $\lambda' = 0^\circ$, $\mu' = 90^\circ$ és $\nu' = 90^\circ$

A mértani feszültségnek az $abef$ síkba eső komponense a τ csúsztató-feszültség. Ha ε e sík normálisának az x tengellyel képezett szöge, akkor:

$$\tau = p \sin \varepsilon$$

De ezen ε szög egyúttal a síknak a p irányával bezárt pótszöge is és így: $\varepsilon = 90^\circ - \alpha' = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

miért is: $\tau = p \sin 45^\circ = \frac{p}{\sqrt{2}}$

vagy, mivel: $p = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$

lesz: $\tau = \frac{\sigma}{2}$ (2)

Ezen értéket az (1) egyenletbe téve nyerjük, hogy:

$$\frac{\sigma}{2} = \frac{(1 + \mu) \sigma \cdot G}{E}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (3)$$

amely képletből a csúsztató rugalmassági modulus már kiszámítható.

Bauschinger kísérletei szerint $\mu = 0,25$ és így:

$$G = \frac{E}{2 \cdot 1,25} = 0,4 E$$

Bach újabb kísérleti eredmények alapján $\mu = 0,3$ -al számít; ekkor:

$$G = \frac{E}{2 \cdot 1,3} = 0,385 E$$

A csúsztató rugalmassági modulus tehát körülbelül $\frac{4}{10}$ része a derékrugalmassági modulusnak.

45. §. Rugalmas feszültségek.

A test két pontját összekötő egyenes a terhelés után bizonyos hosszváltozást szenved és helyzetét megváltoztatja (248. ábra). Ámbár ezt a hosszváltozást a különböző mértani feszültségek együttes hatása okozhatja, mégis képzelhetjük ezt egyetlen oly derékfeszült-

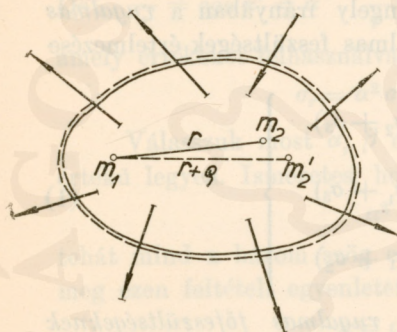
ség által létrehozva, mely az egyenes irányában hat. Ezt az ideális derékfeszültséget rugalmas (redukált) feszültségnek σ_r nevezzük.

Mivel általánosan $\sigma = \frac{\lambda}{l} E$, vagyis a rugalmasság határán belül a derékfeszültség a fajlagos hosszváltozás és a derékelaszticitási modulusz szorzatával egyenlő, azért a rugalmas feszültséget hasonlóképp kapjuk; ha r a test két pontjának távolsága a terhelés előtt és ϱ a hosszváltozás, akkor:

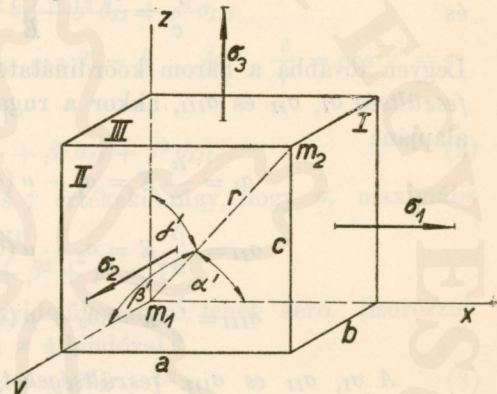
$$\sigma_r = \frac{\varrho}{r} E$$

Ha ϱ pozitív, akkor a rugalmas feszültség nyújtó, ha ellenben negatív, úgy a rugalmas feszültség összenyomó.

Miután a test egy pontjából végtelen sok egyenes



248. ábra.



249. ábra.

húzzható, amely egyenesek mentén a fajlagos hosszváltozások ugyanazon terhelés mellett is különböznek, azért a rugalmas feszültség értéke is más és más lesz az egyes irányokban. Az alkalmazott szilárdságtanban természetesen az összes rugalmas feszültségek közti legnagyobb σ_r lesz mértékadó és ez a

$$\sigma_r^{\max} \leq \sigma_m$$

Állapítsuk meg $\sigma_r^{\max}$ -ot.

A 41. §-ban igazoltuk, hogy minden ponton át fektethető olyan három egymásra merőleges sík, melyeknek mértani feszültsége tisztán derékfeszültség, míg ugyanazon ponton átmenő bármely más három egymásra merőleges sík mértani feszültsége derék- és csúsztatófeszültségek eredője. A három főderékfeszültségből a $\sigma_r^{\max}$ kiszámítható.

Vágjunk ki a megterhelt testből egy prizmat (249. ábra), melynek lapjai főderékfeszültségi síkok és a rajtuk uralkodó, s a

három koordinátatengellyel párhuzamos főderékfeszültségek: σ_1 , σ_2 és σ_3 . Legyenek az a , b és c élek hosszváltozásai α , β és γ . Figyelembe véve, hogy minden élt egy feszültség megnyújt és kettő meg-rövidít, a fajtágos hosszváltozások:

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E}$$

mert:

$$\alpha = \frac{a\sigma_1}{E} - \mu \frac{a(\sigma_2 + \sigma_3)}{E}$$

és hasonlóképpen kapjuk, hogy:

$$\frac{\beta}{b} = \frac{\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)}{E}$$

és

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)}{E}$$

Legyen továbbá a három koordinátatengely irányában a rugalmas feszültség σ_I , σ_{II} és σ_{III} , akkor a rugalmas feszültségek értelmezése alapján:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_I &= \frac{\alpha}{a} E = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \sigma_{II} &= \frac{\beta}{b} E = \sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3) \\ \sigma_{III} &= \frac{\gamma}{c} E = \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

A σ_I , σ_{II} és σ_{III} feszültségeket, rugalmas főfeszültségeknek nevezzük, tehát a főderékfeszültségek irányában működő rugalmas feszültségek, a rugalmas főfeszültségek.

Az élek hossza az alakváltozás után:

$$a + \alpha = a \left(1 + \frac{\sigma_I}{E} \right)$$

$$b + \beta = b \left(1 + \frac{\sigma_{II}}{E} \right)$$

$$c + \gamma = c \left(1 + \frac{\sigma_{III}}{E} \right)$$

Ha a prizma átlója r , ennek meghosszabbodása ϱ és az irányában ható rugalmas feszültség $\sigma_r = \frac{\varrho}{r} E$.

Miután csúsztató-feszültségek a prizmalapokon nincsenek, az eredetileg derékszögű prizma a deformáció után is derékszögű marad. Tehát:

$$(r + \varrho)^2 = (a + \alpha)^2 + (b + \beta)^2 + (c + \gamma)^2$$

$$\text{De:} \quad r + \varrho = r \left(1 + \frac{\sigma_r}{E} \right)$$

és tekintettel az előbbi egyenletekre kapjuk, hogy:

$$r^2 \left(1 + \frac{\sigma_r}{E} \right)^2 = a^2 \left(1 + \frac{\sigma_I}{E} \right)^2 + b^2 \left(1 + \frac{\sigma_{II}}{E} \right)^2 + c^2 \left(1 + \frac{\sigma_{III}}{E} \right)^2$$

A négyzeteket kifejtjük és a $\left(\frac{\sigma}{E} \right)^2$ tagokat mint elenyésző kis mennyiségeket mellőzzük:

$$r^2 + 2r^2 \frac{\sigma_r}{E} = a^2 + 2a^2 \frac{\sigma_I}{E} + b^2 + 2b^2 \frac{\sigma_{II}}{E} + c^2 + 2c^2 \frac{\sigma_{III}}{E}$$

Osztunk $\frac{2}{E}$ -vel és mivel $r^2 = a^2 + b^2 + c^2$, marad:

$$r^2 \sigma_r = a^2 \sigma_I + b^2 \sigma_{II} + c^2 \sigma_{III}$$

$$\text{De:} \quad \frac{a}{r} = \cos \alpha' = \alpha \quad \frac{b}{r} = \cos \beta' = \beta \quad \text{és} \quad \frac{c}{r} = \cos \gamma' = \gamma$$

amely értékeket felhasználva:

$$\sigma_r = \alpha^2 \sigma_I + \beta^2 \sigma_{II} + \gamma^2 \sigma_{III} \quad (2)$$

Válasszuk most α , β és γ értékeket úgy, hogy σ_r maximális értékű legyen. Ismeretes, hogy

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

tehát mind a három szög egyidejűleg nem lehet zéró. Szorozzuk meg ezen feltételi egyenletet κ állandóval:

$$\kappa = \alpha^2 \kappa + \beta^2 \kappa + \gamma^2 \kappa \quad (3)$$

és vonjuk ki (2)-ből, akkor:

$$\sigma_r - \kappa = \alpha^2 (\sigma_I - \kappa) + \beta^2 (\sigma_{II} - \kappa) + \gamma^2 (\sigma_{III} - \kappa)$$

Ott lesz $\sigma_r^{\max}$, ahol az első differenciálhányados zéróval egyenlő:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (\sigma_r - \kappa)}{\partial \alpha} &= 2\alpha (\sigma_I - \kappa) = 0 \\ \frac{\partial (\sigma_r - \kappa)}{\partial \beta} &= 2\beta (\sigma_{II} - \kappa) = 0 \\ \frac{\partial (\sigma_r - \kappa)}{\partial \gamma} &= 2\gamma (\sigma_{III} - \kappa) = 0 \end{aligned} \right\}$$

E három egyenletnek egyidejűleg háromféleképpen lehet eleget tenni:

1. $\sigma_I = \kappa, \quad \alpha = 1 \quad \text{és} \quad \beta = \gamma = 0$
2. $\sigma_{II} = \kappa, \quad \beta = 1 \quad \text{és} \quad \alpha = \gamma = 0$
3. $\sigma_{III} = \kappa, \quad \gamma = 1 \quad \text{és} \quad \alpha = \beta = 0$

Ezen egyenletekből látható, hogy azon irányokban lépnek fel a legnagyobb rugalmas feszültségek, melyekben a főderékfeszült-

ségek uralkodnak. Tehát a $\sigma_r^{\max}$ a σ_I , σ_{II} és σ_{III} közül valamelyikkel lesz egyenlő.

Síkbeli feszültségi állapotra levezettük, hogy:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}{2} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x - \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}{2} \\ \sigma_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

a rugalmas főfeszültségek tehát az (1) egyenletcsoport értelmében:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_I &= \frac{\sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}{2} - \mu \left(\frac{\sigma_x - \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}{2} \right) \\ \sigma_{II} &= \frac{\sigma_x - \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}{2} - \mu \left(\frac{\sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}{2} \right) \\ \sigma_{III} &= -\mu\sigma_x \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ha $\mu = 0,25$, akkor összevonva:

$$\sigma_I = \frac{\sigma_x(1-\mu) + (1+\mu)\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}{2} = \frac{0,75\sigma_x + 1,25\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}{2}$$

vagy a számlálót és nevezőt 4-gyel megszorozva:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_I &= \frac{3\sigma_x + 5\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}{8} \\ \sigma_{II} &= \frac{3\sigma_x - 5\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}{8} \\ \sigma_{III} &= -\frac{\sigma_x}{4} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ha σ_x pozitív, akkor σ_I szintén pozitív és számértékre legnagyobb a három rugalmas főfeszültség között; ha σ_x negatív, akkor σ_I is negatív és ismét abszolút értelemben legnagyobb értékű. Tehát az abszolút legnagyobb rugalmas feszültség, ha $\mu = 0,25$:

$$\sigma_r^{\max} = \sigma_I = \frac{3\sigma_x + 5\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}{8} \leq \sigma_m$$

Ez a De Saint-Venant-féle képlet az összetett igénybevételeknél, mely az egyszerű igénybevételek törvényeit is magában foglalja. Nevezetesen:

1. ha $\tau = 0$ (húzás-nyomás és hajlítás), akkor csak egy irányban van derékfeszültség és ez egyenlő a rugalmas feszültséggel:

$$\sigma_r = \frac{3\sigma_x + 5\sigma_x}{8} = \sigma_x \quad (6)$$

2. ha $\sigma = 0$ (nyírás, vagy csavarás), azaz csak csúsztató-feszültség uralkodik, akkor:

$$\sigma_r = \frac{10 \tau}{8}$$

ahonnan:

$$\tau = 0,8 \sigma_r \quad (7)$$

tehát a csúsztató-feszültség $\frac{8}{10}$ -része a derékfeszültségnek. (Míg Rankine formulája szerint:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \tau^2}}{2}$$

ahol, ha $\sigma_x = 0$, akkor $\sigma_1 = \tau = \sigma_r$).

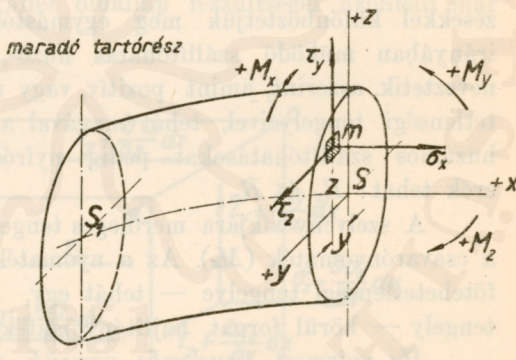
46. §. A terhelések és belső feszültségek közötti matematikai egyenletek megállapítása.

Állandó szelvényű tartó mértani feszültségeinek meghatározása De Saint-Venant szerint.

Tegyük fel, hogy valamely állandó szelvényű tartóban csak azon feszültségek keletkeznek, melyek a szelvényeiben ébresztetnek. Ha tehát a tartó valamely tetszőleges szelvényében egy mozgó koordinátarendszert választunk úgyhogy az x tengely a súlypontban merőlegesen áll a szelvényre, az y és z tengelyek pedig összeesnek a szelvény főtehetetlenségi tengelyeivel, akkor feltevésünk szerint csupán σ_x derékfeszültség, továbbá τ_y és τ_z csúsztató-feszültségek keletkeznek, míg a σ_y , σ_z és τ_x feszültségek zéróval egyenlők.

Szükséges, hogy a külerők egyensúlyt tartsanak a szelvény síkjában ébredő belerőkkel, ami akkor következik be, ha a választott szelvény feszültségeinek összes szállító-, valamint forgató-hatásai, egyenlők a terhelés egyenmű hatásaival.

A 250. ábrán feltüntetett állandó szelvényű tartónál jelöljük a választott szelvény terhelésének szállítóhatásait: R_x , R_y és R_z -vel, ezeknek nyomatékait pedig: M_x , M_y és M_z -vel. Legyen továbbá m egy olyan kis négyszög területe, melynek feszültségei σ_x , τ_y és τ_z .



250. ábra.

A szelvény területe végtelen sok kis négyszögből állónak képzelhető, s az egynemű szállítóhatások összege egyenlő a terheléseknek ugyanazon nemű szállítóhatásával. Tehát a belerők szállítóhatásai egyenlők a külerők szállítóhatásaival, azaz:

$$\left. \begin{aligned} |m \sigma_x| &= R_x \\ |m \tau_z| &= R_y \\ |m \tau_y| &= R_z \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

A forgatóhatásokra áttérve vegyük figyelembe az ábrán feltüntetett irányokat; a σ_x derékfeszültség forgatóhatása az y és z tengelyek körül — $m \sigma_x z$, illetve — $m \sigma_x y$; a τ_y és τ_z csúsztató-feszültségek eredő forgatóhatása pedig az x tengely körül: $m(y \tau_y - z \tau_z)$. A szelvényt végtelen sok kis négyszögből állónak tekintjük és a nyomatékokat összegezzük, minthogy a belerők forgatóhatásai, a külerők forgatóhatásaival egyenlők:

$$\left. \begin{aligned} |m(y \tau_y - z \tau_z)| &= M_x \\ -|m \sigma_x z| &= M_y \\ -|m \sigma_x y| &= M_z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

A terhelés szállítóhatásait és nyomatékait különféle elnevezésekkel különböztetjük meg egymástól. R_x , vagyis az x tengely irányában működő szállítóhatás húzó-, illetve összenyomó-erőnek neveztetik, aszerint, amint pozitív, vagy negatív. A szelvény főtehetetlenségi tengelyeivel, tehát magával a szelvény síkjával is párhuzamos szállítóhatásokat pedig nyíróerőknek nevezzük; nyíróerők tehát: R_y és R_z .

A szelvény síkjára merőleges tengely körül forgató nyomaték, a csavarónyomaték (M_x). Az a nyomaték viszont, amely a szelvény főtehetetlenségi tengelye — tehát egy, a szelvény síkjában fekvő tengely — körül forgat, hajlítónyomatéknak neveztetik (M_y és M_z).

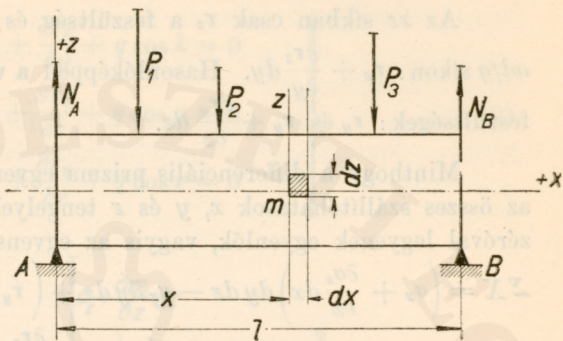
Ha mármost figyelembe vesszük a fenti (1) és (2) képlet-csoportot, mondhatjuk, hogy derékerő és hajlítónyomaték csak derékfeszültséget, a nyíróerő és csavarónyomaték pedig csak csúsztató-feszültséget ébreszt a szelvényben.

47. §. A differenciális prizma egyensúlya.

Vágjunk ki egyensúlyban levő állandó szelvényű tartóból, mely hajlításra van igénybevéve, egy differenciális prizmát (251. ábra). A hajlítónyomaték derékfeszültséget ébreszt, $\sigma = \pm \frac{Mz}{I}$, ahol σ az x abszcissza függvénye; a nyíróerő pedig csúsztató-feszült-

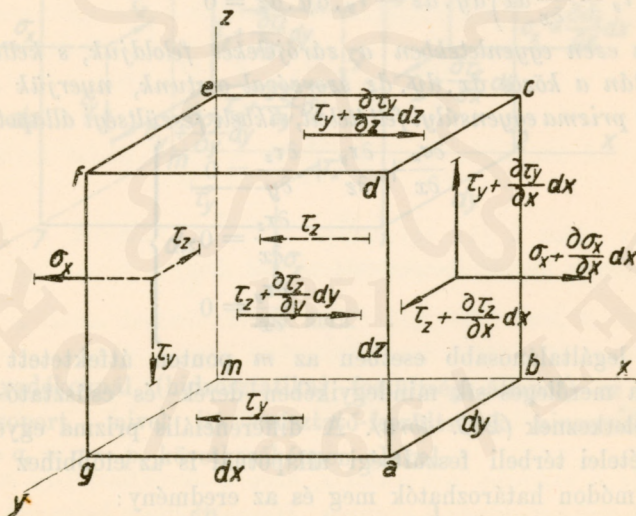
séget hoz létre. Vizsgáljuk a kimetszett differenciális prizma egyensúlyi állapotát.

Legyen m pont a differenciális prizma egyik csúcsa (252. ábra), élei pedig dx , dy és dz , a megfelelő koordinátatengelyekkel párhuzamosak. Az m ponton átfektethető és a koordináta-tengelyekre merőleges három síkon — a prizma oldallapjain — csupán σ_x , τ_y és τ_z feszültségek keletkeznek. A szelvény síkjának feszültségei ugyancsak σ_x , τ_y és τ_z ; a xy síkkal párhuzamos síkban pedig csak τ_y , az xz síkkal párhuzamos síkban csak τ_z feszültség lép föl.



251. ábra.

A feszültség egy-egy differenciális oldallap minden pontjában ugyanazon értékű. Két parallel oldallap feszültségei azonban már



252. ábra.

nem egyenlők, hanem köztük differenciális különbség van és irányuk ellentétes.

A feszültségek minden pontban az illető pont koordinátáinak függvényei.

Ha $efgm$ síktól átmegyünk $abcd$ síkra, csakis az x összrendező változik meg, még pedig dx -el. Ha tehát az első síkon a feszültségek σ_x , τ_y és τ_z , akkor $abcd$ lap feszültségei:

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx, \quad \tau_y + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} dx, \quad \text{és} \quad \tau_z + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} dx$$

Az xz síkban csak τ_z a feszültség és a tőle dy távolban levő $adfg$ síkon: $\tau_x + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} dy$. Hasonlóképpen a vízszintes oldallapokon a feszültségek: τ_y és $\tau_y + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} dz$.

Mint hogy a differenciális prizma egyensúlyban van, kell, hogy az összes szállítóhatások x , y és z tengelyek irányában egyenként zéróval legyenek egyenlők, vagyis az egyensúly feltételei:

$$\begin{aligned} \Sigma X = \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left(\tau_y + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} dz \right) dx dy + \\ - \tau_y dx \cdot dy + \left(\tau_z + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} dy \right) dx \cdot dz - \tau_z dx dz = 0 \end{aligned}$$

$$\Sigma Y = \left(\tau_z + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz - \tau_z \cdot dy \cdot dz = 0$$

$$\Sigma Z = \left(\tau_y + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz - \tau_y \cdot dy \cdot dz = 0$$

Ha ezen egyenletekben a zárójeleket feloldjuk, s kellő összevonás után a közös $dx \cdot dy \cdot dz$ szorzóval osztunk, nyerjük a differenciális prizma egyensúlyi feltételeit, síkbeli feszültségi állapot esetén:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_y}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

A legáltalánosabb esetben az m ponton átfektetett három egymásra merőleges sík mindegyikében derék- és csúsztató-feszültségek keletkeznek (253. ábra). A differenciális prizma egyensúlyának feltételei térbeli feszültségi állapotnál is az előbbihez teljesen hasonló módon határozhatók meg és az eredmény:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

48. §. A szelvény derékfeszültségének meghatározása.

Ha a feszültségeket a mozgó tengelyrendszer tengelyeire vonatkoztatjuk, akkor a tartó szelvényének feszültségei meghatározhatók:

1. ha a szelvény állandó és 2. ha csak σ_x , τ_y és τ_z feszültségek keletkeznek a terhelés folytán. A tartó tehát két egymásra merőleges tengely körül hajlításra és azonkívül húzásra (nyomásra) lehet igénybevéve.

Hogy a derékfeszültséget meghatározhassuk, induljunk ki a differenciális prizma egyensúlyi feltételeiből:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_y}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Differenciáljuk az első egyenletet x szerint és vegyük tekintetbe, hogy a magasabbrendű differenciálhányados értéke független a differenciálás sorrendjétől:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tau_z}{\partial y} = 0$$

avagy:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial \tau_z}{\partial x} = 0$$

Az előző § (1) egyensúlyi feltételei második és harmadik egyenletének figyelembevételével marad, hogy:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = 0 = \frac{d^2 \sigma_x}{dx^2}$$

ahonnan:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = \text{Constans} \quad \text{és} \quad \sigma_x = C \cdot x + C_1 \quad (1)$$

Ez a kifejezés azt mutatja, hogy a derékfeszültség az x összrendező első hatványával arányos. Hasonlóképpen beigazolható, hogy σ_x kifejezése a pont másik két összrendezőjének, y -nak és z -nek szintén csak első hatványát tartalmazhatja. Ha tehát a , b és c olyan koefficiensek, melyek x -nek csak első hatványát tartalmazzák, úgy:

$$\sigma_x = a + by + cz \quad (2)$$

a derékfeszültség általános kifejezése.

Ezen a , b és c együtthatók értékei meghatározhatók a terhelésnek azon hatásaiból, melyek a derékfeszültséget okozzák. A külső erőhatások a 46. § értelmében:

$$\begin{aligned} R_x &= |m\sigma_x| = |ma| + |mb y| + |mc z| = a|m| + b|my| + c| mz| \\ M_y &= -|m\sigma_{xz}| = -|maz| - |mb yz| - |mc z^2| = \\ &= -a|mz| - b|myz| - c|mz^2| \\ M_z &= -|m\sigma_{xy}| = -|may| - |mb y^2| - |mc zy| = \\ &= -a|my| - b|my^2| - c|mzy| \end{aligned}$$

De $|m| = F$ a szelvény területe; $|my| = |mz| = 0$ a szelvény sztatikai nyomatéka, a súlypontján átmenő tengelyekre; továbbá $|myz| = 0$ a szelvény centrifugál-nyomatéka a főtehetetlenségi tengelyekre és $|mz^2| = I_y$, valamint $|my^2| = I_z$ a szelvény tehetetlenségi nyomatékai. Mindezeket figyelembe véve lesz:

$$\begin{aligned} R_x &= a \cdot F \\ M_y &= -c \cdot I_y \\ M_z &= -b \cdot I_z \end{aligned}$$

ahonnan:

$$a = \frac{R_x}{F}; \quad b = -\frac{M_z}{I_z}; \quad c = -\frac{M_y}{I_y}$$

Ha az így nyert értékeket behelyettesítjük a derékfeszültség általános képletébe, kapjuk, hogy:

$$\sigma_x = \frac{R_x}{F} - y \frac{M_z}{I_z} - z \frac{M_y}{I_y} \quad (3)$$

Látjuk tehát, hogy a derékfeszültség általában három részből áll:

$$\sigma_x = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (4)$$

ahol az első tag $\sigma_1 = \frac{R_x}{F}$ a derékszilárdságból (húzás vagy nyomás) ered, ez a tiszta derékfeszültség. A másik két részt, σ_2 és σ_3 -t, a z , illetve y tengely körüli hajlítónyomatékok okozzák, ezeket hajlítófeszültségeknek nevezzük. A hajlítófeszültségek tehát:

$$\sigma_2 = -y \frac{M_z}{I_z} \quad \text{és} \quad \sigma_3 = -z \frac{M_y}{I_y}$$

49. §. A törés veszélyének megállapítása.

Legelőször valamely gerenda törőerejét *Galilei* határozta meg számítással, ő a gerendát merevnek tekintette. Ettől kezdődik a szilárdságtan és rugalmasság elméletének fejlődése. *Galilei* már egyenszilárdságú tartókkal is foglalkozott.

Egyszerű húzó- és összenyomó-igénybevételek esetében a szerkesztendő tartó méreteit úgy kell meghatározni, hogy a külerő- okozta hosszváltozás bizonyos a szilárdsági próbák alapján ismert határok között maradjon. *Azt a σ_m feszültséget ugyanis, amely az ε_m megengedhető hosszváltozáshoz tartozik — megengedhető feszültségnek is nevezzük és az F cm² hasznos szelvényű rúd teherbírása $F \cdot \sigma_m = P$. A terhelőerő a szakadást, vagy törést létesítő $F \cdot S$ erőnek β -ad része.*

Ezen egyszerű számítás alapját *Hooke* angol fizikus (1676) kísérleti törvénye adja (arányossági, vagy lineáris törvény). Noha később *Bach* beigazolta, hogy nem minden anyag követi pontosan e törvényt, hanem a ridegebb anyagok inkább a hatványtörvényt (potenciális törvényt) követik, mely szerint $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma^n$, de a technikai gyakorlatban mégis a *Hooke*-féle formulával számítanak, mert n csekély mértékben tér el az egységtől a különböző anyagoknál.

Komplikáltabbá és egyszersmind bizonytalanabbá válik a szilárdsági számítás összetett igénybevétel mellett és így természetesen a teherbíróképesség pontos meghatározása is. Ha pl. valamely alkatrész, mint éppen sok géprész, hajlításra és csavarásra van igénybevéve, akkor a tartóban olyan feszültségek ébrednek, melyeknek nagyságára nézve éppen a különböző feszültségi elméletek eltérő eredményeket adnak. *Az bizonyos, hogy az ébredő feszültségeket kísérletileg itt sem lehet direkt mérni, hanem csak a külerő- okozta alakváltozásból lehet erre következtetni, amely alakváltozásokat az összetett igénybevételeknél általánosságban derék- és csúsztató-feszültségek együttes hatása okozza.* Ennélfogva az eddigi kísérleti eredményekkel ellentétben nem álló olyan feltevésekre vagyunk utalva, melyekből a feszültségi állapotokra következtethetünk, hogy a törési és folyási veszélyt megállapíthassuk.

A legrégibb feszültségi elmélet az volt, hogy az anyag megengedhető feszültségét kisebbnek, vagy legfeljebb egyenlőnek vették a Rankine-féle formulának megfelelően, a legnagyobb főderékfeszültséggel. Ugyanis azt tartották, hogy az anyag azon pontjában kezdődik a törés, melyben abszolút értelemben legnagyobb a főderékfeszültség. Mint ismeretes, a terhelt test valamely pontján átmenő összes síkokhoz tartozó feszültségvektorok végpontjainak geometriai helye a feszültségi ellipszoid, melynek három fél-főtengelye a három főderékfeszültség: σ_1 , σ_2 és σ_3 értékeit adja.

Mint hogy a gyakorlatban előforduló terheléseknél nem térbeli, hanem főleg síkbeli feszültségi állapottal találkozunk, amikor ugyanis

az egyik tengely irányában feszültségek nem lépnek fel, azért a feszültségi ellipszoid átalakul feszültségi ellipszissé, melynek féltengelyei:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}{2} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x - \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

és

főderékfeszültségek. Összevonva a σ_1 mindig nagyobb a σ_2 -nél és előjelre is vele ellentétes. Amint azt a nyomó- és húzó-feszültségek trajektóriái szintén mutatták (241. ábra).

Mármost a test azon pontja, melyben a kiszámított σ_1 az abszolút maximum, az lesz a mértékadó és $\sigma_1^{\max} \leq \sigma_m$ szolgál a méretezés alapjául. A másik két főfeszültség ezen teória szerint a méretezésre nincs befolyással. Ha pl. egy körszelvényű tartó hajlítást és csavarást szenved, akkor:

$$\sigma = \frac{M_h^{\max}}{W} \quad \text{és} \quad \tau = \frac{M_{cs}^{\max}}{W_p}$$

értékeket (1)-be

behelyettesítve kapjuk a $\sigma_1^{\max}$ értékét, amelynek az anyagban megengedhető feszültséget nem szabad túlhaladnia. Ha pedig pl. az igénybevételnél tisztán csúsztató-feszültség ébred, akkor: $\sigma_{1,2} = \pm \tau = \tau_m \leq \sigma_m$ azaz a megengedett nyírófeszültség egyenlő volna a megengedett derékfeszültséggel. Ezen körülmény azonban a valósággal, azaz pl. a kovácsvassal és acéllal végzett kísérletekkel, sehogy sem egyezik, mert ezek szerint $\tau_m = 0,5\sigma_m$ értékkel. Tehát e teória ellene van a tapasztalatnak, amit Kármán, Voigt és Guest teljes határozottsággal kimutattak.

Ezt a feltételt, mely a legnagyobb normál-feszültséget $\sigma_{\max}$ veszi alapul a törés veszélyének elbírálásánál, Rankine-féle, vagy főderékfeszültségi (normál-feszültségi) teóriának nevezzük; ezt már Galilei és Leibniz, később Navier, Lamé és Clapeyron-nál is megtaláljuk. Németországban Clebsch, Angliában pedig Rankine hozta be.

Noha Angliában és Amerikában egészen a múlt század végéig általában a Rankine formulával számítottak, a főderékfeszültségi elméletet Európában már a múlt század közepe óta kiszorította De Saint-Venant teóriája, amely a főderékfeszültségekből keletkező legnagyobb, az úgynevezett főnyúlásokat veszi alapul (főnyúlási teória). Ezt 1682-ben Mariotte ajánlotta először, majd Navier és De Saint-Venant (1837) vitte be a szilárdságtanba. Az ő felfogásához csatlakozott Poncelet (1839) és Grashof is, akik a törési veszélyt a fő fajlagos hosszváltozástól teszik függővé oly módon, hogy az álta-

lános feszültségi állapotot, az egytengelyű, vagy lineáris állapottal hasonlítják össze. Ha ugyanis a tartó terhelésénél csak egy irányban keletkeznek feszültségek, szóval két egymásra merőleges feszültségmentes sík van, mint pl. a tiszta húzás- és nyomásnál, akkor a feszültségi ellipszis egyenessé változik.

A technikai gyakorlatban ezidőszert legelterjedtebb *De Saint-Venant*-elmélet alap gondolata a következő: A megterhelt és terhelés után megállapodott test valamely m pontján átmenő összes irányban kell keresni a fajlagos hosszváltozást. Jóllehet ezt a különböző mértani feszültségek együttes hatása hozza létre, találhatunk egyetlen ideális (redukált) feszültséget, mely önmaga ugyanazt a fajlagos hosszváltozást létesíti. Ezt a derékfeszültséget σ_r rugalmas feszültségnek nevezi és a legnagyobb rugalmas feszültségnek — melynek iránya a legnagyobb főderék-feszültséggel vág össze — kisebbnek kell lennie, mint az anyagban megengedett feszültség.

Ezen teória három feltevésből indul ki. Először elfogadja az izotropos anyagokra a *Hooke-tételt*, mely szerint a σ_1 főfeszültség megnyújtja a vele parallel élt és $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$; továbbá megrövidíti a

reá merőleges éleket és $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\sigma_1}{mE}$;

másodszor, felhasználja a *szuperpozíció, vagy egymásrahalmazás feltevésén alapuló törvényt*, mely szerint a testből kihatított hasáb alakváltozását, a három lineáris igénybevételnek egyenként megfelelő alakváltozások egymásrahalmazása adja meg.

Tehát:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m} \right); & \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{m} \right); \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} \left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m} \right).\end{aligned}$$

Ha ezek közül a legnagyobb megegyezik a fajlagos megengedett hosszváltozással, akkor $E\varepsilon_m = \sigma_r \leq \sigma_m$.

A *De Saint-Venant*-elmélet harmadik feltevése az, hogy a rugalmas főfeszültségek összeesnek a főderékfeszültségek irányával, azaz a főnyúlásokat a σ_1 σ_2 és σ_3 irányban kell keresni.

Összetett igénybevétel esetén a teherbírás megállapítására, avagy a méretezésre felhasznált *De Saint-Venant*-képlet, ha a *Poisson*-féle szám $\frac{10}{3}$, olymódon írható, hogy:

$$\sigma_m \geq \sigma_r = 0,35\sigma + 0,65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (2a)$$

amely egyenletet könnyebb alkalmazhatóság céljából és főleg a szerkesztéseknél való egyszerűbb felhasználásra, $m = 4$ mellett:

$$\sigma_m \geq \sigma_r = \frac{3}{8}\sigma + \frac{5}{8}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (2b)$$

alakban alkalmazzák a gyakorlati életben ma is, ámbár az újabban végzett kísérletekből is az derült ki, hogy a *De Saint-Venant*-elmélet eredményei sem egyeznek meg a valósággal sem rideg, sem lágyabb anyagoknál. Az acél- és kovácsvasra, ha a (2b) képletből a tiszta nyírás, vagy csavarás esetére térünk át, amikor $\sigma = 0$, akkor kapjuk, hogy $\sigma_m = \frac{5}{4}\tau_m$, azaz: $\tau_m = 0,8\sigma_m$, amely eredmény ugyan jobban összevág a valósággal, mint a *Rankine*-képlet, de még mindig nagy az eltérés *Bauschinger*, *Guest*, *Voigt* és *Kármán* kísérleti megállapításával szemben, ha a legnagyobb nyírófeszültséget figyelembe vesszük!

Bach szerint a gyakorlatban jobban beválik az általa módosított formula, melynél figyelembe veszi, hogy az anyag megterhelése előtt már az alakítás (kovácsolás, hengerlés, esztergályozás stb.) következtében szenvedett bizonyos feszültséget, ami által a szerkezetben alkalmazott anyag némileg kimerült. Ha α_0 érték az anyag kimerülési (megerőltetési) koefficiense, akkor a *Bach*-formula lesz:

$$\sigma_m \geq \sigma_r = 0,35\sigma + 0,65\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0\tau)^2}$$

$$\text{és} \quad \alpha_0 = \frac{\sigma_d}{1,3\sigma_{cs}}$$

ahol σ_d a megengedett derékfeszültség és σ_{cs} a megengedett csavaró- vagy nyírófeszültség.

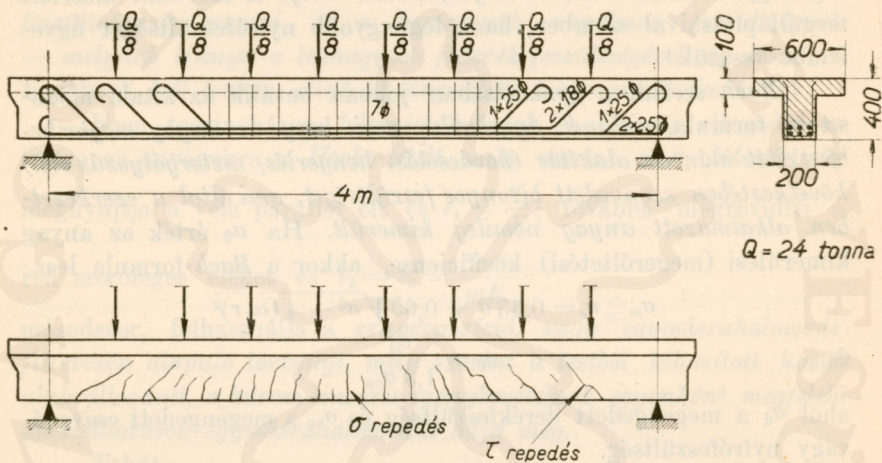
A *főfeszültségi és nyúlási teóriák* alkalmazhatóságát, amely utóbbit még ma is általánosan használják, már akkor kezdték kétségbevonni, mikor egyes építőanyagok (tégla, beton, kő) törését azokkal megmagyarázni nem lehetett! A törési próbáknál ugyanis azt tapasztalták, hogy az anyagokat a törésnél való viselkedésük szerint két csoportba lehet osztani.

Az ólom-, folytvas-, acél-próbadaraboknál ugyanis az összenyomás és kidudorodás lassan megy végbe, miközben szakadások állapíthatók meg és ilyenmódon szűnik meg a terhelés fokozásával az anyag összetartása. Ellenben téglá, beton, kőekéknél esetében az anyag széttörése a törési kúp, vagy gúla mentén — a hossz tengellyel közel 45° -ot bezáró irányban — ment végbe, miközben az oldalsó prizmák leváltak.

Ez utóbbi jelenséget pl. a betonnál is csak úgy lehet megmagyarázni, hogy a beton a nyírás ellen kevésbé ellenálló és mivel

éppen 45° alatt lép fel a legnagyobb nyírófeszültség és a kocka szélső éleire a beton és lemez között a surlódás is a legkisebb, azért a törés is a szélső él mentén kezdődik. *A törési kúp mentén való eltörést a nyúlási teória meg nem okolja, csupán a csúsztatófeszültségi (nyírófeszültségi) elmélet.*

Tapasztalhatjuk a hajlításra igénybevett vasbetongerendáknál is, hogy $\sigma_m = \frac{M_h}{W}$ alapján számított tartó gyakran olyan helyen törik el, amely nem a tengelyre merőleges σ -repedés, hanem ferde helyzetű, s a törés nem is a veszélyes keresztmetszeti síkban, hanem az alátámasztás közelében levő síkban, a reá merőleges σ_h



254. ábra.

feszültség folytán, mint τ -repedés fog bekövetkezni. Ennek oka az, hogy a ferde főderékfeszültségi síkokban fellépő derékfeszültség olyan mértékű σ_h feszültséget adhat, amely vasalás hiányában törésre vezethet (254. ábra), mert a beton húzásra csak a megengedhető nyomófeszültség $1/10$ részével terhelhető meg. *Eme tapasztalatok is arra vezettek, hogy az egész tartó feszültségi viszonyait kell ellenőrizni és nem elég pl. a hajlításnál is csak a derékmetszetekben fellépő hatásokat vizsgálni!*

Így a De Saint-Venant teóriából nyert redukált feszültség mellett még a τ -feszültségek hatásait, továbbá a maximális csúsztatófeszültségek síkjait és az ezekben keletkezett mértani feszültséget is keresték, amely ugyancsak matematikai alapon volt meghatározható. A nyírófeszültségek szélső értékeit azokban a síkokban érik

el, amelyek keresztülmennek az egyik főderékfeszültségi tengelyen és felezik a másik két főtengely közötti szögeket. Összesen tehát 6 ilyen sík van, melyek párosával egymásra is merőlegesek. A keletkező legnagyobb nyírófeszültségek nagysága abszolút értékre, térbeli feszültségi állapotnál:

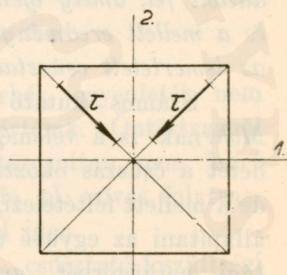
$$\tau_1 = \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} \quad \tau_2 = \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} \quad \tau_3 = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}$$

Síkbeli feszültségi állapot mellett, minthogy ez esetben $\sigma_3 = 0$, a maximális csúsztató-feszültség értéke τ_3 -ból adódik, amikor is:

$$\tau_3 = \tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

és ezen csúsztató-feszültség azon két síkban lép fel, melyek az 1. és 2. főirányok közötti szögeket felezik (255. ábra).

Minthogy lágyabb vasnemekből készült próbapálcák vizsgálatánál, az arányossági határon túl jelentkező folyási ábrák, a hosszanti tengellyel 45° -ot alkotó két egyenes vonalrendszerből állanak és a ridegebb anyagú vasnál is a berepedések e vonalrendszerbe eső sík mentén történnek, azért már Coulomb óta (1776) e jelenségeket úgy magyarázzák, hogy a test egyik része a másikon mint érdes lejtőn lecsúszik. *A törés pedig csak akkor következik be, ha a csúsztató-feszültség nagyobb lesz, mint a ferde síkon a kohézióból és a felépő derékfeszültségből eredő surlódási ellenállás.* Ezt a felfogást vallotta Mohr is, aki azonban *a csúszás lehetőségét, a $\tau = f(\sigma)$ eddig még meghatározatlan értéktől teszi függővé.* Erre is alapította később tárgyalandó újabb feszültségi elméletét.



255. ábra.

Ilyen módon jutottak a *csúsztató-feszültségi elmélet*hez.

E teória szerint a törés nem ott következik be, ahol a maximális a derék-feszültség, hanem ahol a legnagyobb csúsztató-feszültség ébred. *A főderékfeszültségi síkokkal 45° -ot bezáró újabb síkok a főcsúsztató-feszültségi síkok.*

Minthogy még számos kutató akadt, akik a törést a legnagyobb csúsztató-feszültség által létesített élváltozásban keresték, az összetett szilárdságra igénybevett tartók méretezésére Angliában a $\tau_{\max}$ formulát használták fel, mely szerint:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

de a lineáris feszültségi állapothoz viszonyítva: $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}$, amiért is, ha $\sigma_1 \leq \sigma_m$, akkor:

$$\sigma_m \geq 2 \tau_{\max} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2}$$

ahol pl. hajlítás- és csavarásnál σ a veszélyes szelvény leginkább igénybevett pontjában a derékfeszültség és τ a keletkező csavarófeszültség ugyanazon pontban. Ha az általános képletből azt az esetet vizsgáljuk, amikor $\sigma = 0$, akkor $\sigma_m = 2 \tau_m$, azaz $\tau_m = 0,5 \sigma_m$. *Ez a vasfajtákra a kísérleti eredménnyel összevágó értéket ad, de csak addig, míg a kísérlet lineáris feszültségi állapotra vonatkozik.*

Ezt a Coulomb-féle teóriát Tresca, Darwin, Duguet, Mesnager és Guest fejlesztették tovább.

A jelen század elején Mohr, akinek különösen a grafosztatika terén nagy érdemei vannak és akinek sikerült a Weyrauch-féle kört térbeli feszültségi állapotra is kifejleszteni, újabb elméletet állított fel, amely igen jól összefüggésbe hozható a tapasztalatokkal és a mellett eredményei anyagkimelési szempontból is kedvezőbbek, az ismertetett csúsztató-feszültségi elméletből nyertekkel szemben.

Számos kutató és kísérletező eredményei alapján az volt Mohrnak is a véleménye, miszerint a maradó alakváltozások kezdetét a csúszás okozza a felszíni vonalak által jelzett síkok mentén, de a mellett feltételezi, hogy minden anyagra kísérletileg meg lehetne állapítani az együvé tartozó σ és τ között olyan $\tau = f(\sigma)$ szilárdsági határgörbét, amely a szélső egyensúlyi helyzetet jellemzi. Más szóval, ha $\tau > f(\sigma)$, a rugalmasság határán a csúszás következik be, a törés határán pedig a törés, vagy szakadás. Az anyag szétbontása pedig oly felületen következik be, melyre σ és τ együttesen vagy valamely viszonylatban, a lehető legnagyobb értéket érik el.

Mohr a feszültségek megszerkesztésére a feszültségi ellipszis helyett a Mohr-féle feszültségi kört használja. Ez olyan kör, melyet a síkproblémánál említett:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha'$$

$$\text{és} \quad \tau_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha'$$

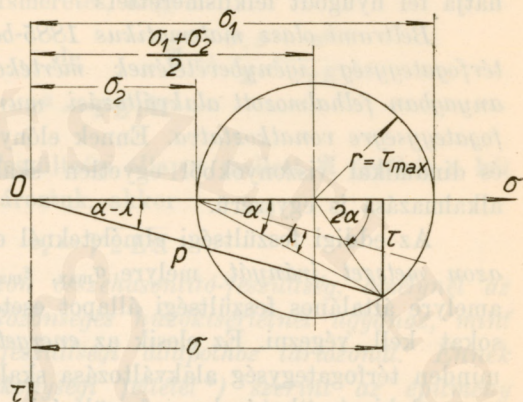
egyenletek figyelembevételével rajzolhatunk meg, amely két egyenlet a σ és τ tengelyekre olyan körnek a paraméteres egyenlete, melynek

sugara: $r = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ és amelynek középpontja az abszcisszatengelyen

$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ távolságban van a kezdőponttól (256. ábra). Mindazon

legnagyobb feszültségi köröknek, amelyek különböző terhelési módoknál a törésnél, vagy az arányossági határ elérésekor felrajzolhatók, burkoló görbéjük van és ez a $\tau = f(\sigma)$ szilárdsági határgörbe (257. ábra).

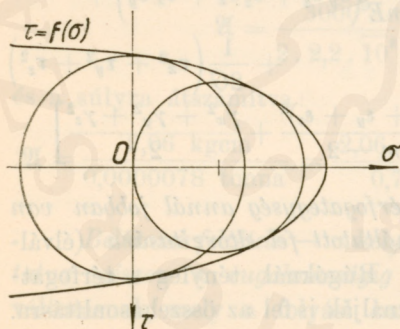
A méretezésnél e szerint úgy kell a méreteket választani, hogy a megterhelésnél megállapítható feszültségi kör ezen a burkoló görbén belül fekszen, sőt a görbétől kellő távolságban maradjon, mert ha ezt elértük, biztosítva vagyunk a törés bekövetkezése, illetve az



256. ábra.

arányossági határ elérése ellen. A határgörbék egyenletét nem ismerjük, ezek megállapítása kísérletekkel történik. Öntöttvasnál a szóródás miatt a burkoló görbét egész határozottan nem lehet felismerni, de pl. szívós folytvasznál, bronznál igen.

Újabb csúsztató-feszültségi teóriát ajánlott Sandel mérnök-tanár (Stuttgart). Szerinte az elasztikus változások határáig a lehetséges csúszás lineárisan csökken, az egyidejűleg fellépő pozitív térfogatváltozással. Amíg ugyanis a Mohr-féle elméletnél a legnagyobb csúszás a mértékadó, s a határcsúszás nagysága, a normál



257. ábra.

feszültséggel van viszonylatban, addig Sandelnél a fajlagos térfogatváltozással: $e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$. Ez a feltétel már behozza a közepes főfeszültséget is az elasztikus határ elérésére.

Mint az eddigiekből látható, az anyag teherbírásának elbírálására (a törés veszélyének megállapítására) a legnagyobb főderék-feszültség σ_1 , a legnagyobb fajlagos nyúlás $\epsilon_{\max}$, avagy Guest kísérletei óta a legnagyobb csúsztató-feszültség $\tau_{\max}$, esetleg az ezzel

kapcsolatos γ élszögváltozás maximuma lehetnek irányadók. Bizonyos, hogy az elméleteknek ezen sokfélesége a gyakorlat emberét csak annyiban érdekli, hogy akár $\sigma_{\max}$, akár $\varepsilon_{\max}$, akár $\tau_{\max}$ vagy $\gamma_{\max}$ bekövetkezése miatt áll is elő a törés: melyik elméletet használhatja fel nyugodt lelkiismerettel?

Beltrami olasz matematikus 1885-ben azt ajánlotta, hogy a térfogategység igénybevételének mértékére legyen irányadó az anyagban felhalmozott alakváltozási munka határértéke — a térfogategységre vonatkoztatva. Ennek előnye, hogy az összes sztatikai és dinamikai viszonyokból egyetlen skaláris érték számítható és alkalmazása is egyszerű.

Az eddigi feszültségi elméleteknél előbb meg kell állapítani azon metszet irányát, melyre $\sigma_{\max}$, $\varepsilon_{\max}$, τ illetve $\gamma_{\max}$ elérhető, amelyre általános feszültségi állapot esetében komplikált számításokat kell végezni. Ez eszik az *energetikus feltétel esetén*, mert minden térfogategység alakváltozása skaláris helyi függvény, mely azonnal kiszámítható, ha a feszültségi, vagy alakváltozási helyzet (deformációs állapot) ismeretes. Ha E , G , m ismeretes és σ_x , σ_y , σ_z , τ_x , τ_y , τ_z , ε_x , ε_y , ε_z , γ_x , γ_y , γ_z adott, akkor a térfogategység alakváltozási munkája:

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{1}{mE}(\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y) + \frac{1}{2G}(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)$$

vagy: $\mathfrak{U} = G \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2}{m-2} + \frac{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2}{2} \right]$

Azon állítás, hogy valamely térfogategység annál jobban van terhelve, mennél több munka használtatott fel eltorzítására (élváltozásra), közelfekvőnek tűnik fel. Rúgóknál tényleg a térfogategységben felhalmozott energiát használják is fel az összehasonlításra.

Gürtler szerint az alakváltozási munkának sok olyan tulajdonsága van, mely az igénybevételek összehasonlításánál jó mértékül szolgálhat.

A munka itt ugyanis négyzetes függvénye σ_x , σ_y , σ_z , τ_x , τ_y , τ_z , és másik alakjában ε_x , ε_y , ε_z , γ_x , γ_y , γ_z -nek, úgyhogy mindazon tényezők hozzájárulnak a munkához, melyek szükségesek a feszültségi, illetve deformációs munkák létrehozásához, — míg az első két elmélet csak $\sigma_{\max}$, vagy $\varepsilon_{\max}$, továbbá a Mohr-féle $\tau_{\max}$ és σ , a Sandel-féle $\gamma_{\max}$ és e értékeket használja fel, tehát csak két értéket.

Hogy a térfogategységben felhalmozott alakváltozási munkából miképpen lehet azt a feszültséget megkapni, melyet a húzó- és nyomó-kísérlettel megállapított folyási határral lehet összehasonlítani, arra nézve emlékeztetünk a következőkre. Legyen σ_e az összehasonlító-feszültség. Ismeretes, hogy:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{de} \quad \mathfrak{A} = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}$$

azaz:

$$\sigma^2 = 2 E \cdot \mathfrak{A}$$

Ha tehát bizonyos feszültségi állapot mellett $\mathfrak{A}$ értékét a két fentebbi képletből meghatároztuk, akkor:

$$\sigma_e = \sqrt{2 E \mathfrak{A}}$$

értéket kapjuk, és ez azon összehasonlító-feszültség, amelynél az alakváltozási munka a közönséges húzó-kísérletnél ugyanaz, mint a megítélendő általános feszültségi állapothoz tartozónál. Ennek a Beltrami-feltétel (képlékenységi feltétel*) szerint az építmény minden részén kisebbnek kell lennie, mint a húzó-kísérletnél a folyási határ, ha maradó alakváltozásokat kizárunk.

A folyási határig az alakváltozási munka felhalmozó képessége folytacélnál, ahol $\sigma_f = 3000 \text{ kg/cm}^2$ és $E = 2,2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, 1 cm^3 vasra:

$$\mathfrak{A} = \frac{3000^2}{2 \cdot 2,2 \cdot 10^6} = 2,06 \text{ kgcm/cm}^3$$

és a súlyra átszámítva:

$$\mathfrak{A} = \frac{2,06 \text{ kgcm}}{0,0000078 \text{ tonna}} = \frac{2,06 \text{ tonnaméter}}{0,78 \text{ tonna}} = 2,6 \text{ tonnaméter/tonna.}$$

Beltrami feltétele — a helyzeti energia határértékére vonatkoztatva egészen a rugalmasságig — a következő: Minden állapotváltozásnak, mely a folyási határt még nem érte el, megfelelnek σ_1 , σ_2 és σ_3 főderékfeszültségek. Ha ezeket egy pont három koordinátájának tekintjük, akkor mindezen pontok az alábbi egyenlettel jellemzett rotációs ellipszoidon belül fekszenek:

$$2 E \mathfrak{A} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2}{m} (\sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2) = \sigma_0^2 = \text{állandó.}$$

*) A test azon tulajdonságát, hogy bizonyos terhelés folytán olymódon változtatja meg alakját, hogy nem juthat vissza eredeti helyzetébe, képlékenységnek nevezzük.

Oly anyagra, ahol nincs keresztirányú kontrakció, $m = \infty$, a határoló ellipszoid olyan gömbbe megy át, melynek sugara σ_0 ; míg olyan anyagra, ahol $m = 2$, az egy $\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0$ sugarú körhengerre válik.

Huber (Lemberg) elméletének alap gondolata szintén az, hogy az alakváltozási munkát kell az anyag teherbírásával bizonyos vonatkozásba hozni, amely alakváltozási munka úgy az összes feszültségeket, valamint az általuk létesített hatásokat is figyelembe veszi.

A rugalmas testre ható külerők a deformáció alatt munkát végeznek, melyek algebrai összegét a külső erők munkájának nevezük, amely a test felszínére ható felületi erők munkájából és az anyagot megtámadó tömegerők (pl. önsúly) munkájából áll. De beszélhetünk a belső erők munkájáról is. Ha ugyanis a testből valamely differenciális prizmat kivágunk, akkor ennek felszínére a kívül fekvő anyag feszítőerőt gyakorol. Ezen erők támadópontjai az alakváltozás folytán szintén elmozdulnak és adják a térfogatelem alakváltozási munkáját, amelyek összege az egész test alakváltozási munkájával egyenlő, ami pedig nem más, mint a deformált test helyzeti energiája. A külső erők véges munkája egyenlő az egész test alakváltozási munkájával. Ez utóbbinak a térfogategységre jutó részét fajlagos alakváltozási munkának nevezzük ($\mathfrak{A}$) és például tiszta húzás esetén: $\mathfrak{A} = \frac{\sigma^2}{2E}$ és tiszta nyírás esetén:

$$\mathfrak{A} = \frac{\tau^2}{2G}, \text{ ahol } G = 0,4 E, \text{ a csúsztató rugalmassági modulusz.}$$

Ha a Huber-teoria alapján a tiszta nyírás esetét redukáljuk az egytengelyű feszültségi állapotra, akkor:

$$\frac{\sigma_r^2}{2E} = \frac{\tau^2}{2G}$$

és $m = 4$ mellett:

$$\frac{\sigma_r^2}{5G} = \frac{\tau^2}{2G}; \quad \tau^2 = \frac{2}{5} \sigma_r^2 \quad \text{és} \quad \tau_m = 0,63 \sigma_m$$

Ez jobban megfelel pl. kovácsvas, acél, vörösréz stb. anyagokra, mint a De Saint-Venant- elmélet és viszont kisebb méretekre vezet, mint általában a csúsztató-feszültségi elmélet.

Az összes fajlagos alakváltozási munka Huber szerint két részből áll:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_p + \mathfrak{A}_g$$

ahol $\mathfrak{A}_p$ a térfogat- (sűrűség-) változásra és $\mathfrak{A}_g$ a tiszta alakváltozásra szolgáló munka. Az $\mathfrak{A}_p$ értéke:

$$\mathfrak{A}_p = \frac{m+1}{3(m-2)} G e^2 = \frac{3(m-2)}{2mE} p^2$$

ahol: $e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{3(m-2)}{mE} p$ a fajlagos térfogat-

növekedés és: $p = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

a közepes hidrosztatikai feszültség az illető pontban.

A másik munkarész a tiszta alakváltozás:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_g &= \frac{1}{12G} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \frac{1}{2G} (\tau_z^2 + \tau_x^2 + \tau_y^2) = \\ &= G \left\{ \frac{1}{3} \left[(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 \right] + \frac{1}{2} (\gamma_z^2 + \gamma_x^2 + \gamma_y^2) \right\} \end{aligned}$$

Az $\mathfrak{A}_g$ értéke, illetve σ_H az elaszticitás határán minden feszültségi állapotra, ahol $p < 0$, állandó.

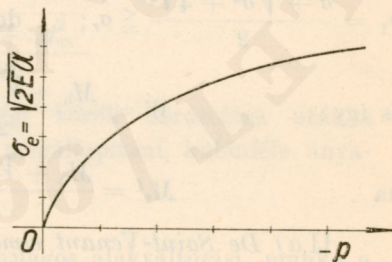
Huber feltétele alapján, ha valamely deformáció térfogatcsökkenéssel kapcsolatos, azaz $e < 0$, avagy ami ugyanaz: $p < 0$, akkor a σ_H összehasonlító-feszültség számításánál csak $\mathfrak{A}_g$ veendő figyelembe, tehát $\sigma_H = \sqrt{2E\mathfrak{A}_g}$. Ha pedig $e > 0$, azaz $p > 0$, akkor $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_p + \mathfrak{A}_g$ veendő figyelembe, ahogy azt Beltrami kimondotta.

Egy újabb feltétel a rugalmasság energia határára, az elaszticitási határ veszélyének megítélése céljából, a következő. Az igénybevétel nagyságának mértéke, a térfogategységben felhalmozott összes alakváltozási munka. Az összehasonlító-feszültség a határfeszültséghez σ_F -hez képest meg van adva a $\sigma_e = \sqrt{2E\mathfrak{A}}$ egyenletből. De a σ_e tapasztalat szerint nem állandó minden alakváltozásra, hanem p -nek, illetve e -nek függvénye:

$$p = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{mE}{3(m-2)} e$$

A $\sigma_e = f(p)$ összehasonlító-feszültség görbét minden anyagra külön kísérletből kellene meghatározni (258. ábra). (A Mohr-féle hipotézisnél a feszültségi körök burkoló vonala a változási görbe.)

A csúsztató-feszültségi teóriák mellett szólnak azon kísérletek, melyeket újabban az igen sűrűn ismétlődő u. n. huzamos terhelésekre vonatkozóan ejtettek. Már Wöhler és Gerber kísérletei



258. ábra.

is arra az ismeretes eredményre vezettek, hogy összilárdság esetén (ha a terhelés 0 és max. között változik) az anyag munkaszilárdsága a sztatikai szilárdság $\frac{2}{3}$ része, míg lengő szilárdságnál (terhelés — max. és + max. között) a törés a sztatikai szilárdság $\frac{1}{3}$ részénél áll be. *Az újabb kísérletek arra vezettek, hogy gyakori és váltakozó hajlításnál a keresett munkaszilárdságot a következő egyenletből lehet meghatározni:*

$$\sigma_D = 0,57 \frac{\sigma_s + \sigma_z}{2}$$

ahol σ_s az arányossági határ és σ_z a nyújtószilárdság, σ_D pedig a munkaszilárdság.

Moore és Kommers a váltakozó csavarásnál előálló törésnél σ'_D -re azt találták, hogy ez 0,52 része a változó hajlításnak megfelelő σ_D értéknek, azaz:

$$\sigma'_D = 0,52 \cdot 0,57 \frac{\sigma_s + \sigma_z}{2}$$

amely eredmény a Mohr-féle elméletet igazolja.

50. §. A különféle feszültségi elméletek alkalmazása.

Általánosságban valamely hajlításra és csavarásra igénybevett tartó méreteit határozzuk meg a különböző feszültségi elméletekkel. Például: számítsuk ki valamely vashenger ellenállónyomatékát, ha az átvitt hajlítónyomaték M_h és az átvitt csavarónyomaték M_{cs} ismeretes, ha az anyagra megadott $\sigma_m \geq \sigma_r$.

I. Rankine-formulával:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2} \leq \sigma_r; \quad \text{de} \quad \sigma = \frac{M_h}{W} \quad \text{és} \quad \tau = \frac{M_{cs}}{2W}$$

és így:
$$W = \frac{M_h + \sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2}}{2\sigma_r} = \frac{M_r^I}{\sigma_r}$$

ha
$$M_r^I = \frac{M_h + \sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2}}{2}$$

II.a) De Saint-Venant elméletével:

$$\sigma_m \geq \sigma_r = \frac{3\sigma + 5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{8}; \quad \text{de} \quad \sigma = \frac{M_h}{W} \quad \text{és} \quad \tau = \frac{M_{cs}}{2W}$$

tehát:
$$W = \frac{3M_h + 5\sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2}}{8\sigma_r} = \frac{M_r^{II}}{\sigma_r}$$

ha:
$$M_r^{II} = \frac{3}{8}M_h + \frac{5}{8}\sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2}$$

II.b) *Bach képletével:*

$$W = \frac{3 M_h + 5 \sqrt{M_h^2 + (\alpha M_{cs})^2}}{8 \sigma_r}, \quad \text{ahol} \quad \alpha = \frac{\sigma_h}{1,3 \cdot \sigma_{ny}} > 1$$

III. *Csúsztató-feszültségi elmélettel:*

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} = \frac{1}{2W} \sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2}$$

de $2 \tau_{\max} = \sigma_r \leq \sigma_m$ a lineáris feszültségi viszonylatban, így tehát:

$$W = \frac{\sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2}}{\sigma_r} = \frac{M_r^{III}}{\sigma_r} \quad \text{és} \quad M_r^{III} = \sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2}$$

IV. *Mohr elmélete szerint* síkbeli feszültségi állapotban a méretezésre mértékadó:

$$\tau_{1,2} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} = \tau_{\max}$$

de τ és σ közötti összefüggést a szilárdsági határgörbe $\tau = f(\sigma)$ egyenlete adja meg. Kovácsvas, folytvas és lágy fémekre:

$$\tau = \frac{\sigma_h}{2} \leq \frac{\sigma_m}{2}$$

és így:
$$2 \tau_{\max} = \sigma_r \leq \sigma_m = \frac{1}{W} \sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2}$$

és
$$W = \frac{\sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2}}{\sigma_r} = \frac{M_r^{IV}}{\sigma_r}$$

Más anyagokra:

$$W = \frac{\sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2}}{2\alpha \sigma_r} = \frac{M_r^{IV}}{\sigma_r}$$

és
$$M_r^{IV} = \frac{\sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2}}{2\alpha}$$

Ezen α értéket kell a feszültségi körök ábrázolása után a legnagyobb τ -hoz tartozó σ értékből megállapítani, különféle anyagokra. Folytvasra $\alpha = 1$.

V. *Huber elmélete alapján:*

Hajlítás és csavarás esetén a fajlagos alakváltozási munka a szuperpozíció elve szerint:

$$\mathfrak{A} = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau^2}{2G}; \quad \text{de} \quad \sigma = \frac{M_h}{W} \quad \text{és} \quad \tau = \frac{M_{cs}}{2W}$$

azért:
$$\mathfrak{A} = \frac{M_h^2}{2E W^2} + \frac{M_{cs}^2}{8G W^2}$$

Ha $m = 4$, akkor $E = 2,5 G$ és így :

$$\mathfrak{A} = \left(\frac{M_h^2}{5 W^2} + \frac{M_{cs}^2}{8 W^2} \right) \frac{1}{G}$$

Ezt az így nyert alakváltozási munkát vesszük egyenlőnek a redukált derékfeszültségnek megfelelő fajlagos alakváltozási munkával, ami az ideális hajlításnak is megfelel:

$$\frac{M_h^2}{5 W^2 G} + \frac{M_{cs}^2}{8 W^2 G} = \frac{\sigma_r^2}{5 G}$$

avagy :
$$\frac{M_h^2}{5} + \frac{M_{cs}^2}{8} = \frac{\sigma_r^2 W^2}{5}$$

és ebből :
$$W = \frac{\sqrt{M_h^2 + \frac{5}{8} M_{cs}^2}}{\sigma_r} = \frac{M_r^V}{\sigma_r}$$

ha :
$$M_r^V = \sqrt{M_h^2 + \frac{5}{8} M_{cs}^2}$$

51. §. A hajlítás tengelye. Közömbös tengely, leginkább igénybevett pontok, alkalmas szelvény.

A hajlítófeszültség két részét, mely két egymásra merőleges síkban keletkezik, mindenkor egy olyan eredő hajlítófeszültséggel helyettesítjük, melynek nagysága arányos a pontnak a hajlítás tengelyétől mért távolságával. A :

$$\sigma_x = \frac{R_x}{F} - \left(\frac{y M_z}{I_z} + \frac{z M_y}{I_y} \right)$$

képlet jobboldalának második tagja, az összetett hajlításnak felel meg. A következőkben az eredő hajlítási tengelyt fogjuk meghatározni.

A hajlítás tengelye azon egyenes, mely a szelvény síkjában van, annak súlypontján megy keresztül, fekvése pedig olyan, hogy a vele párhuzamos sávokban a derékfeszültség állandó és arányos a sávnak a hajlítás tengelyétől mért távolságával. Valamely hajlításra igénybevett körszelvényű rúd tetszőleges szelvényének m pontjában (259. ábra) a hajlítófeszültségek :

$$\sigma_2 = - \frac{y M_z}{I_z} \quad \text{és} \quad \sigma_3 = - \frac{z M_y}{I_y}$$

Ha ω azon szög, melyet az u eredő hajlítási tengely a z tengellyel bezár, v az m pont, illetve a sáv távolsága az u tengelytől,

akkor a σ_2 és σ_3 feszültségeket helyettesítő σ'_r derékfeszültség is kifejezhető az előbbiekhöz hasonlóan:

$$\sigma'_r = A \cdot v$$

ahol A arányossági tényező és amelyre nézve érvényes, hogy:

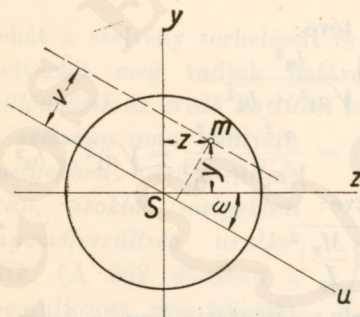
$$A \cdot v = y \frac{M_z}{I_z} + z \frac{M_y}{I_y}$$

vagy, ha rövidség okából:

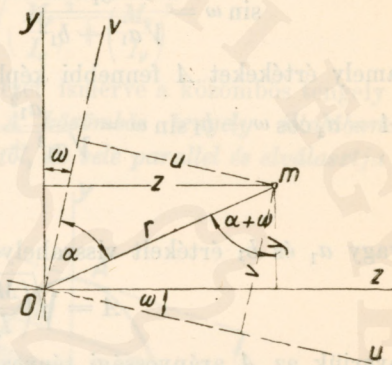
$$\frac{M_z}{I_z} = a_1 \quad \text{és} \quad \frac{M_y}{I_y} = b_1$$

akkor:

$$A \cdot v = a_1 y + b_1 z \quad (1)$$



259. ábra.



260. ábra.

A derékfeszültség általános kifejezése ezek alapján lesz:

$$\sigma_x = \frac{R_x}{F} - Av \quad (2)$$

$$\sigma_x = \frac{R_x}{F} - (a_1 y + b_1 z)$$

ami bebizonyítandó.

Elvégezzük a koordináták transzformációját (260. ábra):

$$y = r \cos(\alpha + \omega) = r \cos \alpha \cos \omega - r \sin \alpha \sin \omega$$

$$z = r \sin(\alpha + \omega) = r \sin \alpha \cos \omega + r \cos \alpha \sin \omega$$

de mivel: $r \cos \alpha = v$ és $r \sin \alpha = u$

kapjuk, hogy:

$$y = v \cos \omega - u \sin \omega$$

$$z = u \cos \omega + v \sin \omega$$

amely értékeket az (1) egyenletbe behelyettesítve:

$$Av = a_1 (v \cos \omega - u \sin \omega) + b_1 (u \cos \omega + v \sin \omega)$$

azaz:

$$Av = v (a_1 \cos \omega + b_1 \sin \omega) + u (b_1 \cos \omega - a_1 \sin \omega)$$

Ezen egyenlet csak úgy állhat fenn, ha az u koefficiense zéró, azaz :

$$A = a_1 \cos \omega + b_1 \sin \omega$$

és

$$b_1 \cos \omega - a_1 \sin \omega = 0$$

vagyis :

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{b_1}{a_1} = \frac{\frac{M_y}{I_y}}{\frac{M_z}{I_z}} = \frac{M_y I_z}{M_z I_y} \quad (3)$$

amely egyenletből az eredő hajlítási tengelyhez tartozó ω meghatározható.

De ezen esetben (261. ábra) :

$$\sin \omega = \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \quad \text{és} \quad \cos \omega = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

amely értékeket A fennebbi képletébe téve :

$$\begin{aligned} A = a_1 \cos \omega + b_1 \sin \omega &= \frac{a_1^2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} + \frac{b_1^2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \\ &= \frac{a_1^2 + b_1^2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \end{aligned}$$

vagy a_1 és b_1 értékeit visszahelyettesítve :

$$A = \sqrt{\left(\frac{M_z}{I_z}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{I_y}\right)^2}$$

nyerjük az A arányossági tényezőt, mely megmutatja, hogy a derékfeszültség miként változik a v távolsággal.

Ezek alapján tehát a derékfeszültség általános kifejezése :

$$\sigma_x = \frac{R_x}{F} - A \cdot v = \frac{R_x}{F} - v \sqrt{\left(\frac{M_z}{I_z}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{I_y}\right)^2} \quad (4)$$

amely egyenlet jobb oldalának első tagja a derékszúlárdságból, második tagja az összetett hajlító szúlárdságból származó derékfeszültség. Összetett hajlításnál a terhelés síkja bizonyos szög alatt hajlik a főtehetetlenségi tengelyekhez.

Olyan szelvénynél, mely mindkét főtehetetlenségi tengelyre szimmetrikus és amelynek tehetetlenségi ellipszise kör (tengelyszelvények), a derékfeszültség :

$$\sigma = \frac{R_x}{F} - \frac{v}{I} \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$$

de

$$\sqrt{M_z^2 + M_y^2} = M_r$$

az eredő hajlítónyomaték tehát :

$$\sigma = \frac{R_x}{F} - \frac{v}{I} M_r$$

azaz a derékfeszültség lineárisan változik a semleges rétegtől való távolsággal.

A szelvény leginkább igénybevett pontjai azok, melyekben a feszültség maximális, melyek a közömbös tengelytől a legtávolabb fekszenek, tehát a kerületnek a közömbös tengellyel párhuzamos érintőjéhez tartozó érintési pontjaiban keletkezik a maximális összenyomó-, illetve húzófeszültség. A 262. ábrán A a leginkább nyomott, B a leginkább húzott pont. A leginkább nyomott pontban:

$$\sigma_A = -Ae_I$$

a leginkább húzott pontban pedig:

$$\sigma_B = +Ae_{II}$$

a feszültség

Valamely szelvény alkalmas a hajlításra akkor, ha a legnagyobb összenyomó- és húzófeszültség egyenlő biztonságot nyújt, ami akkor következik be, ha a leginkább összenyomásra igénybevett pont távolsága a közömbös tengelytől úgy aránylik a rugalmasság határához az összenyomásnál, mint a leginkább húzott pont távolsága a közömbös tengelytől viszonylik a rugalmasság határához húzásnál. Azaz:

$$\frac{e_{II}}{H_2} = \frac{e_I}{H_1}$$

Amely anyagoknál $H_1 = H_2$ (kovácsolt, hengereltvas), a közömbös tengely felezi a leginkább igénybevett pontok távolságát, azaz:

$$e_I = e_{II}.$$

Ellenben öntöttvasnál $H_2 = 2H_1$, tehát $e_{II} = 2e_I$, itt a leginkább nyomott pont kétszer olyan távol van a közömbös tengelytől, mint a leginkább húzott pont.

52. §. Összetett hajlítás.

a) Kőrszelvényű tartóknál (tengelyek).

Kőrszelvény esetén $I_x = I_y = I$ és $e_I = e_{II} = \frac{d}{2}$, tehát az

összetett hajlításnak megfelelő képlet lesz:

$$\sigma_{A,B} = \mp \frac{d}{I} \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$$

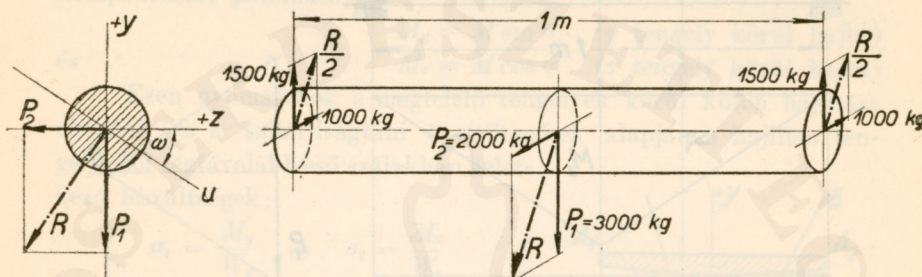
de mivel $\frac{I}{\frac{d}{2}} = W$ az ellenálló nyomatékkal:

$$\sigma_{A,B} = \mp \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2}}{W} \leq \sigma_m$$

és

$$W\sigma_m = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = M_r$$

mert a z és az erre merőleges y tengely körüli hajlítónyomaték egy eredő hajlítónyomatékkal (M_r) helyettesíthető, ezáltal az összetett hajlítás az eredő hajlítás tengely (itt egyszerűsített közömbös tengely) körüli egyszerű hajlítássá redukálódik. Az eredő nyomaték



263. ábra.

meghatározását számítással és szerkesztéssel az alábbi példában mutatjuk be.

Pl. Egy két végén csapágyazott 1 m hosszú tengely (263. ábra) közepén $P_1 = 3000$ kg függélyes és $P_2 = 2000$ kg vízszintes erővel van megterhelve. Keresendő a szükséges tengelyátmérő.

Van egy hajlítónyomaték a függélyes és egy a vízszintes síkban. A maximális nyomatékok a középső (veszélyes) szelvényben:

$$M_z = 1500 \cdot 0.5 = 75000 \text{ kgcm a függélyes síkban}$$

$$\text{és } M_y = 1000 \cdot 0.5 = 50000 \text{ kgcm a vízszintes síkban.}$$

Az eredőnyomaték:

$$M_r = \sqrt{750^2 + 500^2} = \sqrt{812500} = \sim 900 \text{ kgcm}$$

Legyen: $\sigma_m = 500$ kg/cm² (kovácsvas), akkor:

$$M_r = W\sigma_m = \frac{d^3\pi}{32}\sigma_m = \frac{d^3}{10} \cdot 500 = 90000 \text{ kgcm}$$

ahonnan:

$$d = \sqrt[3]{1800} = 12,2 \text{ cm}$$

a szükséges tengelyátmérő.

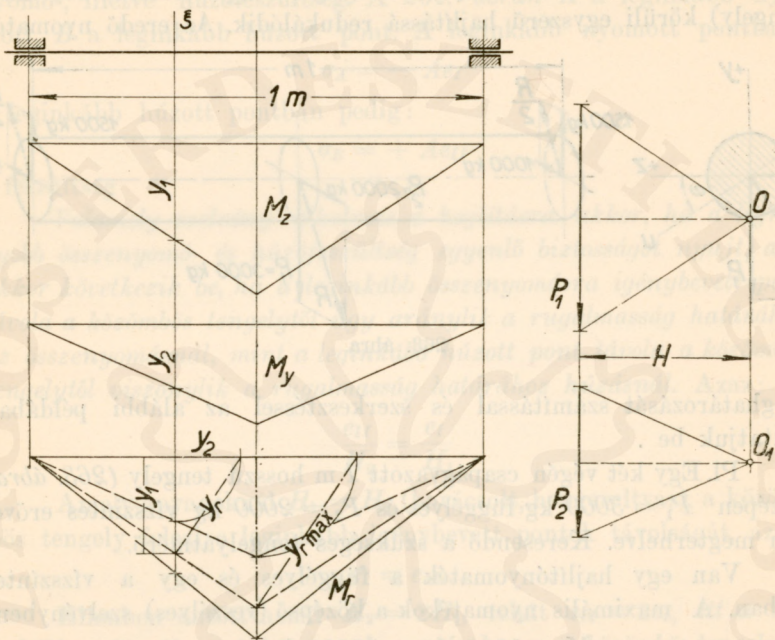
Az eredő hajlítási tengelynek a z tengellyel bezárt szöge

$$\text{pedig: } \operatorname{tg} \omega = \frac{M_y}{M_z} = \frac{50000}{75000} = \frac{2}{3} = 0,666$$

és ebből:

$$\omega = 33^\circ 40'$$

Ugyanezen feladat grafikus megoldása a 264. ábrán van feltüntetve. Felrajzoljuk a tengelyt léptékben (m az erőlépték, n a rajzlépték és H a pólustávolság) és az ismert módon megszerkesztjük a nyomatéki ábrát először a függélyes teherhez M_z , azután a vízszintes teherhez M_y . Majd a két nyomatéki ábrát közös tengelyre redukálva megszerkesztjük az eredő nyomatéki ábrát. Tetszőleges



264. ábra.

ξ szelvényhez tartozó redukált, vagy eredő ordinátát (y_r) Pythagoras tétele szerint, mint az egymásra merőlegesen felrajzolt y_1 és y_2 ordináták-, mint befogókhoz tartozó átfogót nyerjük, tehát:

$$y_r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

A szerkesztést több szelvényre elvégezvén, az eredő nyomatéki ábrát felrajzolhatjuk. A veszélyes szelvényben a nyomaték lesz:

$$M_r^{\max} = y_r^{\max} \cdot H \cdot m \cdot n = W \cdot \sigma_m$$

ahonnan W és ebből a szükséges d kiszámítható.

Ha a tengelyt egyenszilárdságú alakúra (harmadfokú parabola) készítenők, akkor az átmérő az egyes szelvényekben külön-külön meghatározandó az $y_r \cdot H \cdot m \cdot n = W \cdot \sigma_m$ képletből.

b) Összetett hajlítás szimmetrikus szelvényeknél.

Gyakran előfordul, hogy hengerelt vastartók (I $\square$) összetett hajlításra vannak igénybevéve, mint pl. a födél szerkezetek szelemenjei, boltozatok vasgerendái, stb. Ilyenkor a szelvénynek vannak ugyan szimmetriatengelyei, de az ezekhez tartozó tehetetlenségi nyomatékok nem egyenlők.

A terhelés síkja (ξ) bizonyos α szög alatt hajlik a főtehetetlenségi tengelyekhez (265. ábra). Az M hajlító-nyomatékvektor két komponenssel pótolható:

$$\begin{aligned} M_y &= M \sin \alpha & (y \text{ tengely körül hajlít}) \\ M_z &= M \cos \alpha & (z \text{ tengely körül hajlít}) \end{aligned}$$

Ezen nyomatékok a megfelelő tengelyek körül külön hajlítást okoznak és a szilárdságtani összefüggések alapján a hajlítás tengelyeitől legtávolabb eső szálakban keletkező feszültségek:

$$\sigma_1 = \frac{M_y}{W_y} \quad \text{és} \quad \sigma_2 = \frac{M_z}{W_z}$$

Minthogy pedig a két tengely körüli nyomaték egyszerre érvényesül, összetett hajlítás áll elő, midőn a szelvény tehetetlenségi nyomatékát a ξ (a terhelés síkjának nyomvonalára) irányához konjugált η tengelyre kell vonatkoztatni, ez az eredő hajlítási tengely, melynek hajlásszögére érvényes, hogy:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{M_y I_z}{I_y M_z}$$

Ha a szelvény olyan, hogy a szélső sávokban található bizonyos pontok, melyek a hajlítás mindkét tengelyétől maximális távolságban vannak ($\square$, I vagy a négyszögletes profil), akkor ezekben a pontokban — ábránkban A_1 és A_2 — keletkezik a maximális rugalmas feszültség σ_r , amely a σ_1 és σ_2 feszültségek algebrai összegével (egy-másrahalmozás) egyenlő,

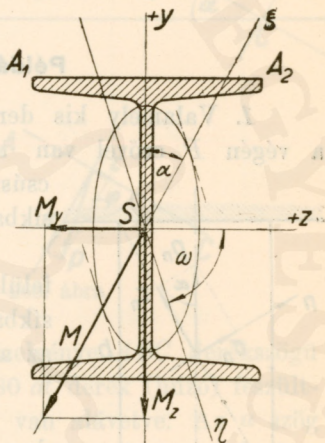
$$\sigma_r = \sigma_1 + \sigma_2$$

ahol σ_1 az A_1 pontban M_y nyomaték és σ_2 az A_1 pontban M_z nyomaték által okozott derékfeszültség. Behelyettesítve az értékeket:

$$\sigma_r = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{1}{W_z} \left(M_z + \frac{W_z}{W_y} M_y \right) \leq \sigma_m$$

és legyen:

$$\frac{W_z}{W_y} = c$$



265. ábra.

akkor:
$$W_z = \frac{M_z + c M_y}{\sigma_m}$$

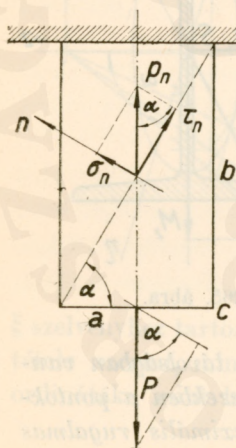
és a szelvény méretei, ha M_z , M_y , σ_m ismeretesek, ebből már meghatározhatók. A c értéke adott profilnál a szabványtáblázatokból vehető:

$\overline{\text{I}}$	szelvényre középértékben	$c = 7 - 8$
$\square$	»	$c = 6$
négyszögletes	»	$c = 1,3 - 1,5$

A L vastartó szintén előfordul ilyenmő igénybevételeknél, de ezt a profilt nem lehet pontosan az előbbi eljárással meghatározni, mert nincs két olyan pontja, mely a két főtehetetlenségi, illetve a két hajlítási tengelyétől egyaránt maximális távolságban volna.

Példák a VI. fejezethez.

1. Valamely kis derékszögű a , b és c élekkel bíró prizma a végén P erővel van terhelve (266. ábra). Kérdés, mekkora csúsztató-feszültség ébred a pontozott átlós-síkban?



266. ábra.

τ_n csúsztató-feszültség hat $c\sqrt{a^2 + b^2}$ felületre. Ha elvágjuk a prizmát az átlós síkban és felállítjuk az egyensúlyi egyenletet az alsó részre:

$$P \sin \alpha - \tau_n c \sqrt{a^2 + b^2} = 0$$

de:
$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

és így:
$$P \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \tau_n c \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tau_n = P \frac{b}{(a^2 + b^2) c}$$

2. Valamely négyzetes a^2 szelvényű rúd kinyúlik b darabbal a falból és a végén Q nyíróerővel van terhelve, amely egyenletesen oszlik meg a szélső felületen. Keressük meg a normálfeszültséget a pontozott átlós síkban (267. ábra).

$$a s \sigma + a^2 \tau_1 \sin \alpha + b a \tau_1 \cos \alpha = 0$$

de:
$$\sin \alpha = \frac{b}{s} \quad \text{és} \quad \cos \alpha = \frac{a}{s}$$

tehát:

$$as\sigma + a^2\tau_1 \frac{b}{s} + ba\tau_1 \frac{a}{s} = 0$$

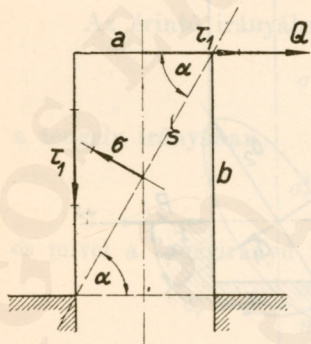
$$s\sigma + a\tau_1 \frac{b}{s} + b\tau_1 \frac{a}{s} = 0$$

$$s^2\sigma + ab\tau_1 + ab\tau_1 = 0$$

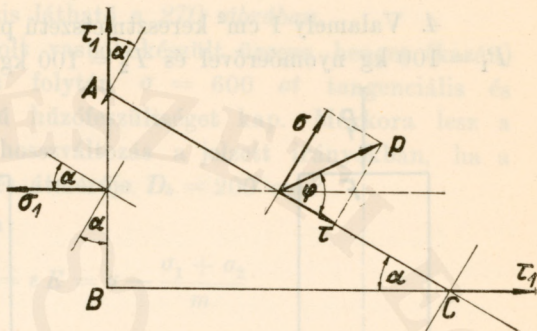
ahonnan: $\sigma = -\frac{2ab\tau_1}{a^2 + b^2}$

de: $a^2\tau_1 = Q$

és így: $\sigma = -\frac{Q \cdot 2b}{a(a^2 + b^2)}$



267. ábra.



268. ábra.

3. Valamely kis prizma, melynek szelvénye ABC derékszögű háromszög (268. ábra), AB oldalán $\sigma_1 = 80$ at derék (húzó) feszültségnek és $\tau_1 = 60$ at nyíró feszültségnek van alávetve. Az α szög 30° . Keressük az AC oldallap p mértani feszültségét és a φ hajlásszöget. Ha AB lapban τ_1 feszültség van, akkor BC -ben is τ_1 -nek kell ébrednie. (Wittenbauer.) Állítsuk fel az egyensúlyi egyenleteket AC és reá merőleges irányban.

$$AC\sigma - AB\sigma_1 \sin \alpha + AB\tau_1 \cos \alpha + BC\tau_1 \sin \alpha = 0$$

$$\sigma = \sigma_1 \sin^2 \alpha - \tau_1 \sin \alpha \cos \alpha - \tau_1 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sigma = \sigma_1 \sin^2 \alpha - \tau_1 \sin 2\alpha$$

(1)

$$AC\tau + BC\tau_1 \cos \alpha - AB\tau_1 \sin \alpha - AB\sigma_1 \cos \alpha = 0$$

$$\tau = -\tau_1 \cos^2 \alpha + \tau_1 \sin^2 \alpha + \sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\tau = \sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha - \tau_1 \cos 2\alpha$$

(2)

Ebből: $p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ és $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sigma}{\tau}$

$$\sigma = 80 \cdot \sin^2 30^\circ - 60 \cdot \sin 60^\circ = -31,96 \text{ at}$$

és: $\tau = 80 \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ - 60 \cdot \cos 60^\circ = 4,64 \text{ at}$

tehát:

$$p = \sqrt{31,96^2 + 4,64^2} = 32,3 \text{ at}$$

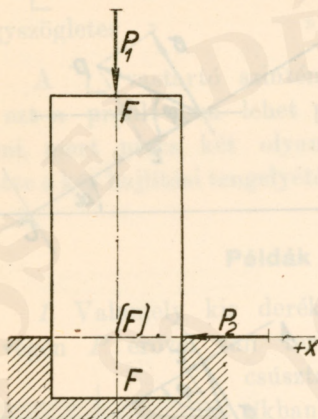
és:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{31,96}{4,64} = -6,88$$

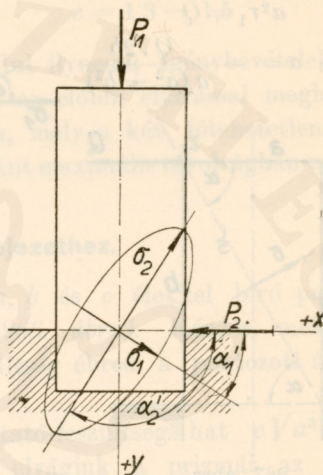
amelyből:

$$\varphi = -81^\circ 45'$$

4. Valamely 1 cm^2 keresztmetszetű prizmatikus test (269. ábra) $P_1 = 100 \text{ kg}$ nyomóerővel és $P_2 = 100 \text{ kg}$ nyíróerővel van igénybe-



269. ábra.



270. ábra.

véve. Ha ezek az erők az F szelvényen egyenletesen oszlanak el, mekkorák a szelvény főderékfeszültségei?

$$\sigma_x = 0$$

$$\sigma_y = -\frac{P_1}{F} \quad \tau_z = \frac{P_2}{F}$$

amely értékeket a 42. § (1a) egyenletekbe behelyettesítve:

$$\sigma = -\frac{P_1}{F} \sin^2 \alpha' + \frac{P_2}{F} \sin 2\alpha'$$

$$\tau = +\frac{P_1}{F} \sin \alpha' \cos \alpha' - \frac{P_2}{F} \cos 2\alpha'$$

Mivel főderékfeszültségek esetén $\tau = 0$, a második egyenletből

$$\text{kapjuk, hogy:} \quad \frac{2}{2} P_1 \sin \alpha' \cos \alpha' = P_2 \cos 2\alpha'$$

de:

$$P_1 = P_2 = 100 \text{ kg,}$$

tehát:

$$\operatorname{tg} 2\alpha' = +2$$

amelyből: $\alpha'_1 = 31^\circ 43' 10''$ és $\alpha_1 = 90^\circ - \alpha'_1$
 $\alpha'_2 = 121^\circ 43' 10''$ és $\alpha_2 = 90^\circ - \alpha'_2$
 $\sigma_1 = -100 \cdot \sin^2 31^\circ 43' 10'' + 100 \cdot \sin 63^\circ 26' 20'' = +61,8 \text{ kg}$
 $\sigma_2 = -100 \cdot \sin^2 121^\circ 43' 10'' + 100 \cdot \sin 243^\circ 26' 20'' = -161,8 \text{ kg}$

A feszültségi ellipszis látható a 270. ábrában.

5. Valamely kovácsolt vasból készült üreges henger (kazán) hidrosztatikai túlnyomás folytán $\sigma = 600 \text{ at}$ tangenciális és $\sigma_2 = 300 \text{ at}$ tengelyirányú húzófeszültséget kap. Mekkora lesz a rugalmas feszültség és a hosszváltozás a jelzett irányokban, ha a henger hossza $l = 10 \text{ m}$ és átmérője $D_b = 200 \text{ cm}$?

Az érintő irányában:

$$\sigma_r = \varepsilon E = \sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m}$$

a tengely irányában:

$$\sigma'_r = \varepsilon' E = \sigma_2 - \frac{\sigma + \sigma_1}{m}$$

és mivel a sugárirányú feszültség jelen esetben: $\sigma_1 = 0$,

$$\sigma_r = \sigma - \frac{\sigma_2}{m} = 600 - \frac{300}{4} = 525 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma'_r = \sigma_2 - \frac{\sigma}{m} = 300 - \frac{600}{4} = 150 \text{ kg/cm}^2$$

A fajlagos hosszváltozások a jelzett irányokban:

$$\varepsilon = \frac{525}{2000000} = 0,00026$$

$$\varepsilon' = \frac{150}{2000000} = 0,000075$$

tehát a megnyúlások:

$$\Delta D_b = \varepsilon D_b = 0,00026 \cdot 200 = 0,052 \text{ cm}$$

és: $\Delta l = \varepsilon' l = 0,000075 \cdot 1000 = 0,075 \text{ cm}$

VII. FEJEZET.

53. §. Nyírósziárdság.

Ha valamely tartó szelvényének terhelését megvizsgálva azt találjuk, hogy a lemetezett tartórészre működő összes külső erőknek csupán a szelvény síkjában fekvő y vagy z tengely, mint az egyik főtehetetlenségi tengely mentén van szállítóhatása, forgatóhatása pedig nincs, akkor a szükséges méretezést az egyszerű nyírósziárdság alapján kell elvégezni. A nyíró igénybevétel analitikai ismeretetőjelei tehát:

$$R_x = 0; \quad R_y \geq 0 \quad \text{vagy} \quad R_z \geq 0$$

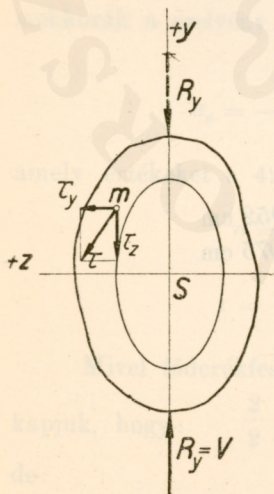
és

$$M_x = M_y = M_z = 0$$

A nyírásnál keletkező belső feszültségek a keresztmetszet síkjában működnek, tehát csúsztató-feszültségek, amelyeknek az y és z tengelyekre merőleges komponenseit τ_y és τ_z -vel jelöljük (271. ábra).

Míg deréksziárdságnál a feszültségek eloszlása a szelvényben egyenletes, addig a nyírásnál ugyanazon szelvény különböző pontjaiban más és más feszültség ébred, amelyek közül a legnagyobb fog a méretezés alapjául szolgálni.

Hogy a nyírósziárdság alapképleteit, a terhelések és feszültségek közötti összefüggéseket levezethessük, felvesszük az xyz koordináta-rendszert úgyhogy annak középpontja a szelvény súlypontjával, y és z tengelyei a szelvény megfelelő főtehetetlenségi tengelyeivel essenek össze, az x tengely pedig merőleges a szelvény síkjára. A nyíróerőt az y tengellyel párhuzamosnak vesszük fel és R_y -al jelöljük. Nyírásra igénybevett szelvénynek a derékfeszültsége lehet minden pontban



271. ábra.

zéró, de a tartó többi pontjaira $\frac{d\sigma}{dx}$ már nem lehet az, mert a nyíróerő hajlítónyomatékot okoz minden olyan szelvényre nézve, melynek síkja nem vág össze a nyíróerő irányával. Ha tehát valamely szelvényre nézve $\sigma = 0$, a szomszédos szelvényre nézve már σ nem lehet zéró. Általánosan tehát az x irányban meghosszabbodások, reá merőleges irányokban pedig megrövidülések lesznek, azaz *Hooke* törvénye szerint:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\sigma}{E} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{\mu \sigma}{E}$$

A ξ , η és ζ értékeket nyerjük, ha ezen kifejezéseket részletesen integráljuk. A részletes integrálhoz az állandó helyett a két másik változónak valamely függvénye járul, mert ezeket a parciális differenciálásnál állandóknak tekintettük, tehát:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{E} \int \sigma dx + F_1(y, z) \\ \eta &= -\frac{\mu}{E} \int \sigma dy + F_2(x, z) \\ \zeta &= -\frac{\mu}{E} \int \sigma dz + F_3(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ismeretes továbbá az alakváltozásból, hogy:

$$\left. \begin{aligned} \tau_y &= G \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \\ \tau_z &= G \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletekből, valamint a külső és a belső erők egyensúlyából megállapíthatjuk a csúsztató-feszültségek és terhelések közötti összefüggéseket, melyek a következő egyenletekbe foglalhatók:

$$\left. \begin{aligned} \tau_y &= \frac{R_y}{I_z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \delta y - yz \right) \\ \tau_z &= \frac{R_y}{I_z} \left(\frac{\partial V}{\partial y} - \delta z - \frac{z^2}{2(1+\mu)} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ahol R_y a nyíróerő, I_z a szelvény tehetetlenségi nyomatéka, $\mu = 0,25$, δ állandó és V oly függvény, melyet nem lehet általánosan kifejezni, melynek alakja és értéke a szelvény kerületének alakjától függ. A V függvényt az elmélet megalkotójának tiszteletére *De Saint-Venant-féle függvénynek* nevezzük.

A V -függvény meghatározására két feltétel áll rendelkezésünkre. Az elsőt a differenciális prizma egyensúlyának feltétele adja:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_y}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

A σ derékfeszültséget is már meghatároztuk és kaptuk, hogy:

$$\sigma = \frac{R_x}{F} - y \frac{M_z}{I_z} - z \frac{M_y}{I_y}$$

ha pedig a hajlítás csupán a z tengely körül történik, akkor:

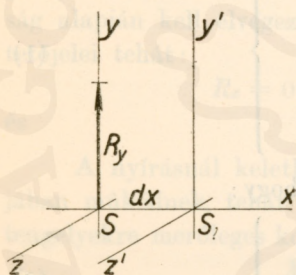
$$\sigma = \frac{R_x}{F} - y \frac{M_z}{I_z} \quad \text{és így:} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} = - \frac{y}{I_z} \cdot \frac{\partial M_z}{\partial x}$$

De ha S a nyírásra igénybevett szelvény súlypontja és S_1 egy másik, dx távolságban levő szelvény súlypontja (272. ábra), akkor:

$$dM_z = -R_y \cdot dx$$

lesz az R_y nyomatéka a z' tengely körül, tehát:

$$\frac{dM_z}{dx} = -R_y$$



272. ábra.

és így:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{y}{I_z} R_y$$

amely értéket behelyettesítve a differenciális prizma egyensúlyi egyenleteibe, τ_y és τ_z képleteiből meghatározzuk $\frac{\partial \tau_z}{\partial y}$ és $\frac{\partial \tau_y}{\partial z}$ értékeit. Ekkor a következő egyenletet nyerjük:

$$\frac{y}{I_z} R_y + \frac{R_y}{I_z} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - y \right) + \frac{R_y}{I_z} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

amiből következik, hogy:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

és ez az előbb említett első feltétel.

A második feltételt azon körülmény szolgáltatja, hogy a mértani feszültség a tartó palástjának minden pontjában zéró.

Ha a szelvény kerületének m pontjában a tartó palástjához érintő síkot fektetünk, akkor ennek nyomvonala az yz síkon érinti m pontban a szelvény kerületét (273. ábra).

Mint ahogy a sík párhuzamos az x tengellyel, továbbá m pontban a mértani feszültség $p = 0$ és mivel az m ponton átmenő és a koordináta síkokkal párhuzamos három egymásra merőleges síkban csak σ_x , τ_y és τ_z feszültségek vannak, azért *e síknak a nyomvonala az yz síkban összevág az eredő csúsztató-feszültség irányával.*

$$\text{Azaz:} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dz} = \frac{\tau_z}{\tau_y}$$

$$\text{vagyis:} \quad \tau_z dz = \tau_y dy \quad (5)$$

Ez a második ú. n. kerületi feltétel, mely szerint az eredő csúsztató-feszültség iránya a szelvény kerületének minden pontjában, összevág a kerület érintőjének irányával.

Ezek alapján most már bebizonyítható általánosan, hogy:

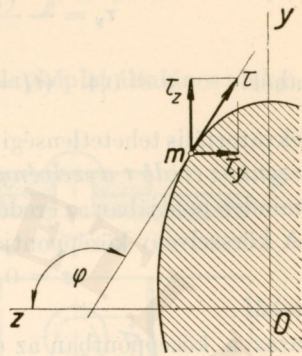
$$\left. \begin{aligned} \iint dy dz \tau_z &= R_y \\ \iint dy dz \tau_y &= R_z = 0 \\ \iint dy dz (z\tau_z - y\tau_y) &= M_{cs} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ez az egyenletcsoport adja a feszültségek és külerők közötti összefüggést.

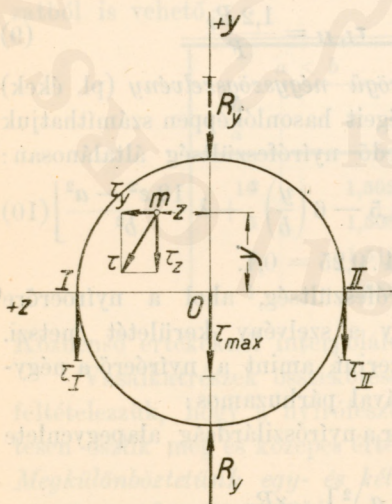
Gyakorlati alkalmazást tekintve egyik legfontosabb szelvény a *kör* (pl. csavar, szögecs, csapszeg, stb.). Ha ennek sugara r , akkor kerületének egyenlete:

$$y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

A keresztmetszet valamely y és z koordinátájú m pontjára ható τ nyírófeszültség általában ferdén áll a koordinátatengelyekhez képest (274. ábra); ennek két komponense:



273. ábra.



274. ábra.

$$\left. \begin{aligned} \tau_z &= \frac{(1+\mu) R_y}{4 I_z} \left(r^2 - y^2 - \frac{3\mu-1}{1+\mu} z^2 \right) \\ \tau_y &= -\frac{(1-\mu) R_y}{2 I_z} y \cdot z \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ahol: $\mu = 0,4$ ($G = 0,4 E$) és $I_z = \frac{F \cdot r^2}{4} = \frac{r^4 \pi}{4}$ a kör

ekvatoriális tehetetlenségi nyomatéka. *E két képletből τ_z és τ_y , ezekből viszont az eredő τ a szelvény bármely pontjára meghatározható.* A kerület minden pontjában az eredő csúsztató-feszültség az érintő irányában hat. A körszelvény középpontjában lép fel a maximális nyírófeszültség, itt:

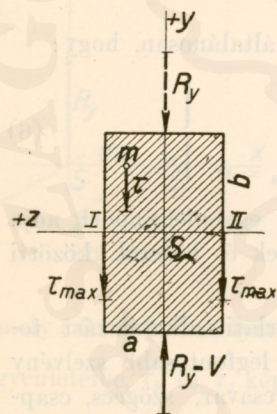
$$z = 0 \quad \text{és} \quad y = 0$$

tehát:

$$\tau_y = 0$$

azaz a középpontban az eredő nyírófeszültségnek csak τ_z komponense van és ez a szelvény legnagyobb nyírófeszültsége. Az általános egyenletbe $z = 0$ és $y = 0$ -t betéve kapjuk, hogy:

$$\tau_{\max} = \tau_z = \frac{1,4 R_y}{4 I_z} r^2 = \frac{1,4 R_y r^2}{4 \cdot \frac{r^4 \pi}{4}} = \frac{1,4 R_y}{r^2 \pi} = \frac{1,4 R_y}{F} = \frac{z R_y}{F}$$



275. ábra.

és a méretezés a: $\tau_{\max} = \frac{1,4 R_y}{F} \leq 0,8 \sigma_m$ (8)

képlettel történik, ez a nyírószilárdság alapképlete körszelvénynél.

Az I. és II. pontokban a nyírófeszültség:

$$\tau_{I, II} = \frac{1,2 R_y}{F} \quad (9)$$

Derékszögű négyszögszelvény (pl. ékek) nyírófeszültségeit hasonlóképpen számíthatjuk ki. Itt az eredő nyírófeszültség általánosan:

$$\tau_z = \tau = \frac{R_y}{F} \left[1,5 - 6 \left(\frac{y}{b} \right)^2 + \lambda \frac{12 z^2 - a^2}{b^2} \right] \quad (10)$$

ahol $\lambda = 0,4 \cdot 0,25 = 0,1$.

Ott lép fel a maximális nyírófeszültség, ahol a nyíróerőre merőleges z főtehetetlenségi tengely a szelvény kerületét metszi. Két esetet különböztetünk meg, aszerint, amint a nyíróerő a négyszög hosszabb, vagy rövidebb oldalával párhuzamos:

1. ha $a < b$ (275. ábra), akkor a nyírószilárdság alapegyenlete nagy megközelítéssel a következő:

$$\tau_z = \tau_{\max} = \frac{R_y}{F} \left[1,5 + 0,189 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] = \frac{z R_y}{F} \leq 0,8 \sigma_m \quad (11)$$

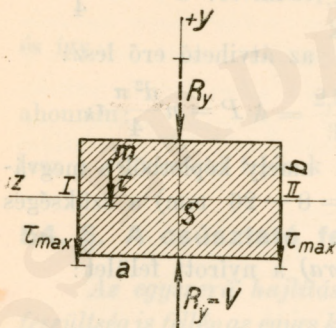
2. ha $a > b$ (276. ábra), akkor:

$$\tau_z = \tau_{\max} = \frac{R_y}{F} \left[1,244 + 0,445 \left(\frac{a}{b} \right) \right] = \frac{\alpha R_y}{F} \leq 0,8 \sigma_m \quad (12)$$

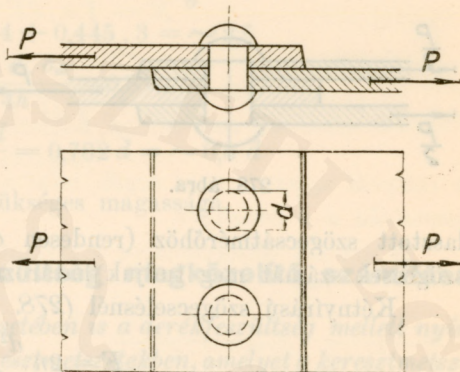
az alapszilárdsági képlet.

Mint az eddigiekből látható, a nyírási alapképlet általános alakja:

$$\tau = \frac{\alpha R_y}{F} \leq 0,8 \sigma_m$$



276. ábra.



277. ábra.

ahol α a szelvény alakjától függő tényező, körszelvélynél $\alpha = 1,4$; négyszögszelvélynél ha: $a < b$, akkor $\alpha = 1,5 + 0,189 \left(\frac{a}{b} \right)^2$; ha $a > b$, akkor $\alpha = 1,244 + 0,445 \left(\frac{a}{b} \right)$. Négyszögszelvélynél α az alábbi táblázatból is vehető:

$a < b$		$a > b$	
$\frac{b}{a}$	α	$\frac{a}{b}$	α
10	1,502	10	5,625
5	1,508	5	3,427
2	1,510	2	2,094
1	1,689	1	1,689

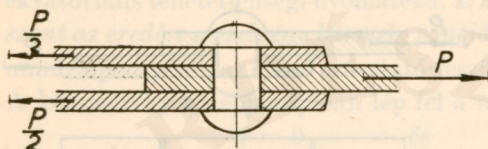
Közbenő értékeknél interpolálunk.

Vasalkatrészek összekötésére szolgáló szögecskek számításánál feltételezzük, hogy a nyírófeszültség a szelvényben közel egyenletesen oszlik meg és közepes értékét: $\tau_k = 800 \text{ kg/cm}^2$ -nek választjuk. Megkülönböztetünk egy- és kétnyírási szögecskötést; előző esetben a szögecsnek egy, utóbbiban pedig két szelvénye van nyírásra igénybevéve.

Egynyírási szögecselésnél (277. ábra) legyen P kg a megadott nyíróerő, d cm egy szögecs átmérője, n a szögecskek száma; akkor:

$$\tau = \frac{nP}{F} = \frac{1,4 P}{F} = 0,8 \sigma_m$$

ahonnan:
$$\frac{P}{F} = \frac{0,8 \sigma_m}{1,4} = \tau_k = 800 \text{ kg/cm}^2$$



278. ábra.

és mivel: $F = n \frac{d^2 \pi}{4}$

az átvihető erő lesz:

$$P = n \frac{d^2 \pi}{4} \tau_k$$

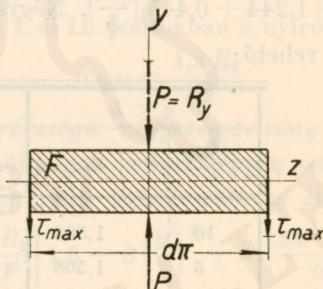
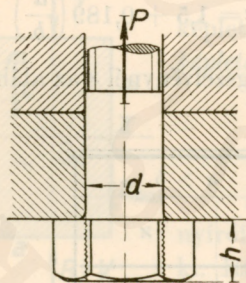
amely képletből a megválasztott szögecsátmérőhöz (rendesen $d = 8 - 26$ mm) a szükséges szögecskek számát meg tudjuk határozni.

Kétnyírási szögecselésnél (278. ábra) a nyírott felület:

$$F = 2n \frac{d^2 \pi}{4}$$

tehát itt az átvihendő erő:

$$P = 2n \frac{d^2 \pi}{4} \tau_k \quad *)$$



279. ábra.

Pl. Kiszámítandó a csavarorsó fejének magassága (279. ábra). A nyírott felület hengerpalást, amely kifejtett állapotban is fel van az ábrán tüntetve, $F = d\pi h$. A nyíróerő továbbá:

$$P = \frac{d^2 \pi}{4} \sigma_m$$

*) Vasszerkezeteknél a szögecsket nemcsak nyírásra, hanem falnyomásra (palástnyomásra) is ellenőrizzük. Lásd: Grafosztatika és vasszerkezetek.

ahol σ_m a csavarorsó anyagában megengedett húzófeszültség. A nyíróigénybevétel alaképlete szerint:

$$\tau = \frac{zP}{d\pi h} = \frac{z \frac{d^2 \pi}{4} \sigma_m}{d\pi h} = \frac{zd \sigma_m}{4h} = 0,8 \sigma_m$$

Feltételezve, hogy $d \sim h$, továbbá mivel $\frac{a}{b} = \sim 3$

$$z = 1,244 + 0,445 \cdot 3 = \sim 2,5$$

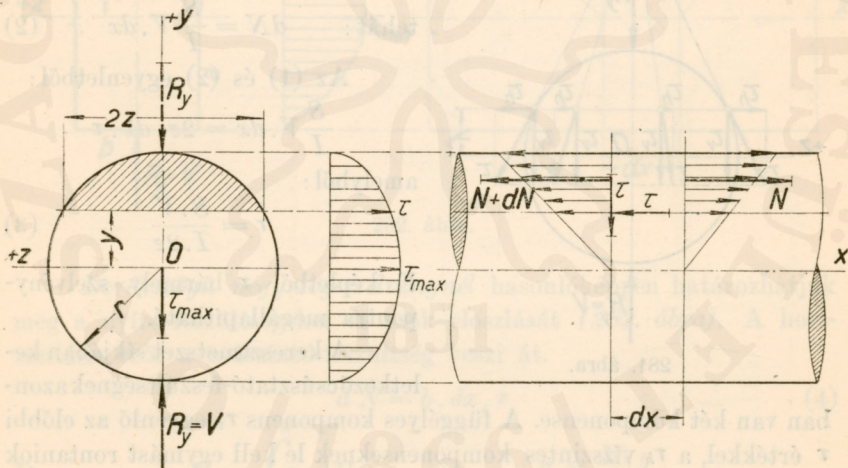
és így:
$$\frac{2,5 d \cdot \sigma_m}{4h} = 0,8 \sigma_m$$

ahonnan:
$$h = \frac{2,5 d}{3,2} = 0,782 d = \sim 0,8 d$$

lesz a csavarorsó fejének szükséges magassága.

54. §. A csúsztató feszültség megközelítő számítása.

Az egyszerű hajlítás esetében is a derékfeszültség mellett nyírófeszültség is fellép az egyes keresztmetszetekben, amelyet a keresztmetszet egyik főtengelyébe eső erő okoz. A következőkben megközelítő elmé-



280. ábra.

lettel akarjuk ezt a csúsztató-feszültséget meghatározni. E végből a testből párhuzamos síkokkal egy kis részt kivágunk.

Legyen a *körszelvényű* rúdból kimetszett rész, a besraffozott terület szorozva dx -el (280. ábra). Keressük tetszőleges y távolban a csúsztató-feszültséget a keresztmetszet síkjában és a $2z \cdot dx$ síkelemben, amely csúsztató-feszültség párhuzamos az x tengellyel és nagysága τ .

A két, egymástól dx távolban levő szelvényben keletkező nyomaték más és így a keletkező derékfeszültségek is különbözők. Legyen ezek eredője az egyik szelvényben N , a másikban pedig $N + dN$. A dN értéket a csúsztató-feszültség okozza:

$$dN = 2z \cdot dx \cdot \tau \quad (1)$$

a normál erő:

$$N = \int_0^F \sigma \cdot dF \quad \text{de:} \quad \sigma = \frac{M_h y}{I}$$

tehát:

$$N = \frac{M_h}{I} \int_0^F dF \cdot y = \frac{M_h}{I} S$$

az integrál ugyanis nem egyéb, mint a besraffozott felület sztatikai nyomatéka a z tengelyre.

N értékét differenciálva x szerint kapjuk, hogy:

$$\frac{dN}{dx} = \frac{S}{I} \frac{dM_h}{dx}$$

de: $\frac{dM_h}{dx} = V$ a nyíró erő,

$$\text{tehát:} \quad dN = \frac{S}{I} V \cdot dx \quad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletből:

$$\frac{S}{I} V \cdot dx = 2z \cdot dx \cdot \tau$$

amelyből:

$$\tau = \frac{S \cdot V}{I \cdot 2z} \quad (3)$$

E képletből τ bármely szelvénypontra megállapítható.

A keresztmetszet síkjában keletkező csúsztató-feszültségnek azonban van két komponense. A függélyes komponens τ_v egyenlő az előbbi τ értékkel, a τ_h vízszintes komponenseknek le kell egymást rontaniok (281. ábra). Ugyanazon y távolban τ_v mindég egyforma, tehát τ_h az eredő τ alapján megszerkeszthető, amely eredők E pontban találkoznak.

Számítsuk ki a (3) képlettel a körszelvény középpontjában $\tau_{\max}$ -ot:

$$\tau_{\max} = \frac{R_y \frac{r^2 \pi}{2} \cdot \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}}{\frac{r^4 \pi}{4} \cdot 2r} = \frac{R_y \frac{4}{6}}{r^2 \pi \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \frac{R_y}{F} = \sim 1,4 \frac{R_y}{F}$$

281. ábra.

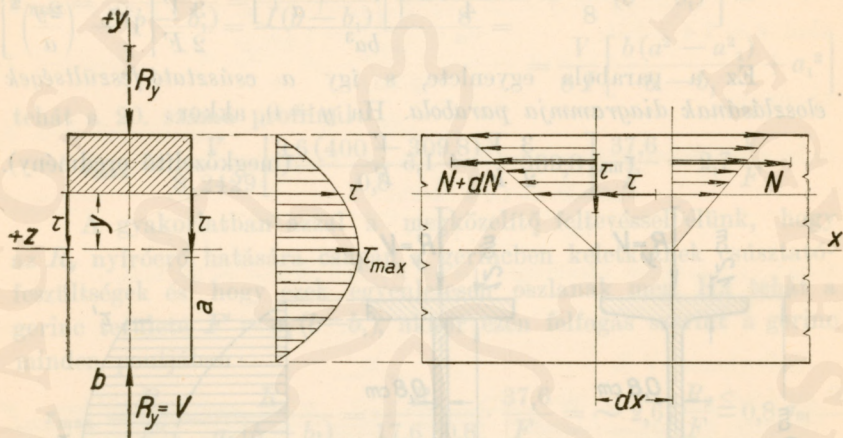
Keressük τ változását y távolban. Erre nézve azt kapjuk, hogy :

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{V}{F} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2}$$

Ha ezt:

$$\left(\frac{\tau}{\frac{4}{3} \frac{V}{F}}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

alakban írjuk, akkor azt látjuk, hogy a τ nyírófeszültségnek az y -al való változását diagrammban ellipszissel tüntethetjük fel (280. ábrán). Ebből pedig a feszültségek kg/cm²-ben bármely hosszanti szelvényben közvetlenül lemérhetők.



282. ábra.

Derékszögű négyszög-szelvénynél hasonlóképpen határozhatjuk meg a nyíró-feszültségeket és azok eloszlását (282. ábra). A horizontális erőt a csúsztató-feszültség veszi át.

$$dN = b \cdot dx \cdot \tau \quad (4)$$

De:
$$N = \int_0^F \sigma \cdot dF \quad \text{és} \quad \sigma = \frac{M_h y}{I_z}$$

és így:
$$N = \frac{M_h}{I_z} \int_0^F dF \cdot y = \frac{M_h}{I_z} S$$

de:
$$\frac{dM_h}{dx} = V \quad \text{azaz:} \quad dM_h = V \cdot dx$$

tehát:
$$dN = \frac{S}{I_z} \cdot V \cdot dx \quad (5)$$

A (4) és (5) egyenletből:

$$b \cdot dx \cdot \tau = \frac{S}{I_z} V \cdot dx$$

ahonnan:

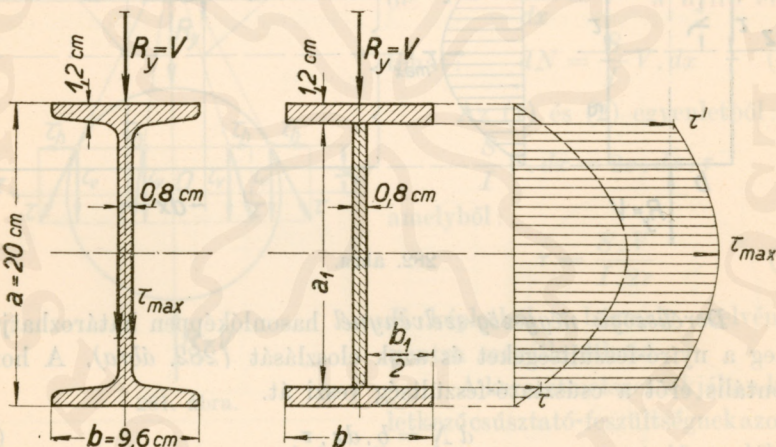
$$\tau = \frac{S \cdot V}{I_z \cdot b} \quad (6)$$

Keressük τ változását y távolban:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{V \cdot b \left(\frac{a}{2} - y \right) \cdot \left(\frac{a}{2} + y \right)}{\frac{ba^3}{12} \cdot b} = \frac{6V \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right)}{ba^3} = \\ &= \frac{6}{4} \frac{Va^2 \left[1 - \left(\frac{2y}{a} \right)^2 \right]}{ba^3} = \frac{3}{2} \frac{V}{F} \left[1 - \left(\frac{2y}{a} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Ez a parabola egyenlete, s így a csúsztató-feszültségek eloszlásának diagrammja parabola. Ha $y = 0$, akkor:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V}{F} = 1,5 \frac{V}{F} \quad (\text{megközelítő eredmény}).$$



283. ábra.

Pl. Az eddigiek alapján keressük a $\text{I} 20 \text{ N.P.}^*)$ szelvény nyírófeszültségeit (283. ábra). A szelvényre nézve a táblázatból kapjuk, hogy $F = 37,6 \text{ cm}^2$ és $I = 2429,25 \text{ cm}^4$.

A csúsztató-feszültség a két öv belső határegyenesein:

$$\tau = \frac{V \cdot S}{I \cdot b} = \frac{V \left(\frac{a}{2} - \frac{a_1}{2} \right) b \left(\frac{a}{2} + \frac{a_1}{2} \right)}{I \cdot b} = \frac{V}{8I} (a^2 - a_1^2)$$

^{*}) Czákó Adolf: Táblázatok vasszerkezetek méretezéséhez.

A gerincet az övektől elválasztó két egyenesben a csúsztató-feszültség értéke:

$$\tau' = \frac{V \cdot S}{I(b-b_1)} = \frac{V}{I(b-b_1)} \cdot \frac{b\left(\frac{a}{2} - \frac{a_1}{2}\right)\left(\frac{a}{2} + \frac{a_1}{2}\right)}{2} = \frac{V}{8I} \cdot \frac{b(a^2 - a_1^2)}{b-b_1}$$

és ennek alapján a 20. számú profilnál:

$$\tau' = \frac{V}{8 \cdot 2429} \cdot \frac{9,6(400-309,8)}{0,8} \cdot \frac{37,6}{F} = \frac{32558}{15546} \frac{V}{F} = 2,09 \frac{V}{F}$$

Maximális csúsztató-feszültség a hajlítás tengelyében keletkezik és ennek nagysága:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{V \cdot S}{I(b-b_1)} = \frac{V}{I(b-b_1)} \left[\frac{b(a^2 - a_1^2)}{8} + \frac{a_1^2}{8}(b-b_1) \right] = \\ &= \frac{V}{8I} \left[\frac{b(a^2 - a_1^2)}{b-b_1} + a_1^2 \right] \end{aligned}$$

tehát a 20. számú profilnál:

$$\tau_{\max} = \frac{V}{8 \cdot 2429} \left[\frac{9,6(400-309,8)}{0,8} + 309,8 \right] \frac{37,6}{F} = 2,7 \frac{V}{F}$$

A gyakorlatban azzal a megközelítő feltevessel élünk, hogy az R_y nyírőerő hatására csupán a gerincben keletkeznek csúsztató-feszültségek és hogy ezek egyenletesen oszlanak meg. Ha tehát a gerinc területe $F' = a_1(b-b_1)$, akkor ezen felfogás szerint a gerinc minden pontjában:

$$\tau_{\max} = \frac{R_y}{F'} = \frac{R_y}{a_1(b-b_1)} = \frac{R_y}{17,6 \cdot 0,8} \cdot \frac{37,6}{F} = \sim 2,67 \frac{R_y}{F} \leq 0,8 \sigma_m$$

nagyságú függőleges csúsztató-feszültség keletkezik.

A (6) alatti képletet felhasználhatjuk összekötő szögecsék egymástól való távolságának megállapítására, a következőképpen (284. ábra). Egy szögecs által átvitt erő:

$P = t \cdot b \cdot \tau = d \delta z$, ahol $z = 1400 \text{ kg/cm}^2$ a falnyomás.

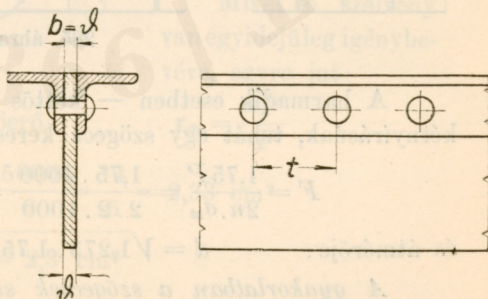
De a $\tau = \frac{V \cdot S}{I \cdot b}$ képletből:

$$b \tau = \frac{V \cdot S}{I} \text{ tehát: } P = t \frac{V \cdot S}{I}$$

ahonnan a szögecsék egymástól való távolsága:

$$t = \frac{P \cdot I}{V \cdot S} = \frac{d \delta z I}{V \cdot S}$$

amely képletben I és S a hajlítási tengelyre vonatkoznak.



284. ábra.

Példák a VII. fejezethez.

1. Két lemez össze van kötve (285. ábra):

1. rálapolva két szögeccsel,
2. egy hevederrel és négy szögeccsel és
3. kettős hevederrel és négy szögeccsel.

Az átviendő erő $P = 4000$ kg és $\sigma_m = 1000$ kg/cm². Keressük a három esetnek megfelelően a szögecs-átmérőket.

Az első és második esetben a szögecsok egyenyrásúak:

$$\tau = 0,8\sigma_m = \frac{\alpha P}{F}$$

ahol $\alpha = 1,4$ tehát:

$$\sigma_m = \frac{1,4P}{0,8F} = 1,75 \frac{P}{F}$$

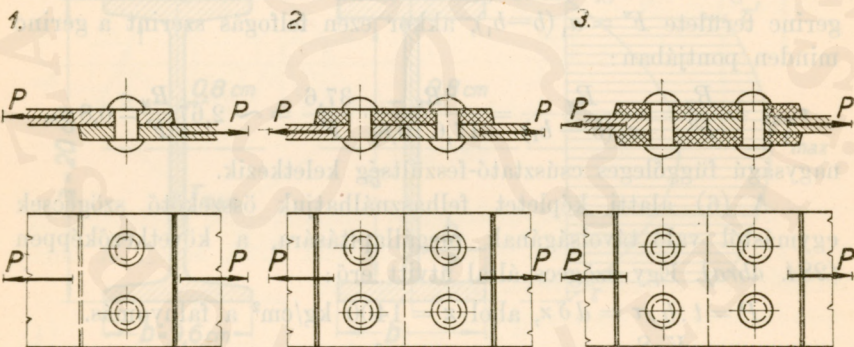
ahonnan:

$$F = \frac{1,75P}{\sigma_m}$$

és ha a szögecsok száma $n = 2$, akkor egy szögecs szükséges szelvénye:

$$F = \frac{1,75P}{n \cdot \sigma_m} = \frac{1,75 \cdot 4000}{2 \cdot 1000} = 3,5 \text{ cm}^2 = \frac{d^2}{1,273}$$

tehát egy szögecs átmérője: $d = \sqrt{1,273 \cdot 3,5} = \sim 21 \text{ mm}$.



285. ábra.

A harmadik esetben — kettős hevederkötésnél — a szögecsok kétnyrásúak, tehát egy szögecs keresztmetszete:

$$F = \frac{1,75P}{2n \cdot \sigma_m} = \frac{1,75 \cdot 4000}{2 \cdot 2 \cdot 1000} = 1,75 \text{ cm}^2 = \frac{d^2}{1,273}$$

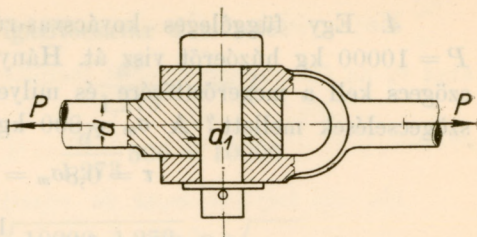
és átmérője: $d = \sqrt{1,273 \cdot 1,75} = \sim 15 \text{ mm}$.

A gyakorlatban a szögecsok számításánál figyelembe veszik azt is, hogy a szögecs kihülésekor, az összehúzódnál fellépő axiális

erő-okoztasurlódás, feltétlenül
növeli a nyírással szemben
kifejtett ellenállást
és ezért:

$$\tau_k = \frac{0,8\sigma'_m}{1,4} = 800 \text{ kg/cm}^2$$

közepes nyírófeszültségelszámítanak, ami jóval nagyobb σ_m értéknek felelne meg.



286. ábra.

2. Két rúd egy csappal van összekötve (286. ábra). Ha a húzásnak alávetett rúd átmérője ismeretes, $d = 6 \text{ cm}$, keressük a húzóerőt és a csap átmérőjét. Legyen: $\sigma_m = 500 \text{ kg/cm}^2$.

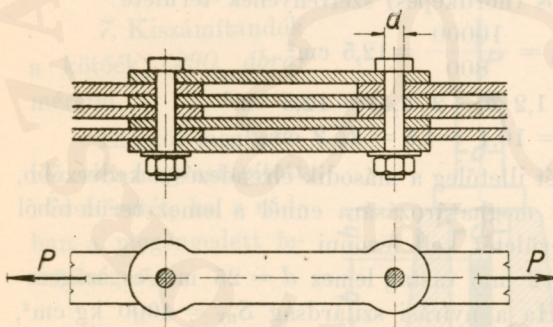
A húzóerő:
$$P = \frac{d^2\pi}{4} \sigma_m = \frac{6^2}{1,273} 500 = 14200 \text{ kg}$$

A nyírófeszültség:
$$\tau = 0,8\sigma_m = \frac{zP}{F}$$

ahonnan:
$$F = \frac{zP}{0,8\sigma_m} = \frac{1,4 \cdot 14200}{0,8 \cdot 500} = \sim 50 \text{ cm}^2$$

$$F = 2 \frac{d_1^2\pi}{4} = 50 \text{ cm}^2 \quad \text{tehát} \quad \frac{d_1^2\pi}{4} = 25 \text{ cm}^2$$

és
$$d_1 = \sqrt{1,273 \cdot 25} = \sim 5,6 \text{ cm}.$$



287. ábra.

3. Valamely Gall-féle láncsal (ízületes lánc) átviszünk $P=5000 \text{ kg}$ erőt (287. ábra). Keressük a csavarok méretét, ha a megengedett nyírófeszültség $\tau_m = 500 \text{ kg/cm}^2$

Mivel 6 szelvény van egyidejűleg igénybevéve, egyre jut:

$$P' = \frac{5000}{6} \text{ kg nyíróerő.} \quad \tau_m = \frac{zP'}{F}$$

és innen:
$$F = \frac{zP'}{\tau_m} = \frac{1,4}{500} \cdot \frac{5000}{6} = \frac{14}{6} = 2,33 \text{ cm}^2$$

Tehát:
$$\frac{d^2}{1,273} = 2,3 \text{ cm}^2$$

amelyből:
$$d = \sqrt{1,273 \cdot 2,33} = \sim 1,75 \text{ cm}.$$

4. Egy függőleges kovácsvas-rúd $a = 12$ mm vastag és $P = 10000$ kg húzóerőt visz át. Hány darab $d = 24$ mm átmérőjű szögecs kell a megerősítésére és milyen széles a laposvas a vázolt szögecselések mellett? A $\sigma_m = 800$ kg/cm² (288. ábra).

$$\tau = 0,8\sigma_m = \frac{zP}{F}$$

$$0,8 \cdot 800 = 640 = \frac{1,4 \cdot 10000}{F}$$

ahonnan:

$$F = \frac{14000}{640} = 21,8 \text{ cm}^2$$

Mivel egy db. $d = 24$ mm-es szögecs területe:

$$\frac{2,4^2 \cdot \pi}{4} = 4,52 \text{ cm}^2$$

azért:

$$n = \frac{21,8}{4,52} = 4,8 = \sim 5 \text{ db.}$$

szögecs kell a megerősítéshez.

A vonórúd hasznos (hordképes) szelvényének területe:

$$F_1 = \frac{10000}{800} = 12,5 \text{ cm}^2$$

de:

$$F_1 = 1,2(b - 2 \cdot 2,4) = 12,5 \text{ cm}^2$$

ahonnan:

$$b = 10,4 + 4,8 = 15,2 \text{ cm.}$$

A lemez gyöngítését illetőleg a második elrendezés a kedvezőbb, mert a hasznos szelvény meghatározására ennél a lemez területéből csak egy szögecslyuk területét kell levonni.

5. Valamely $\delta = 12$ mm vastag lemez $d = 25$ mm-es szögecslyukakkal látandó el. Ha a nyírási szilárdság $S_{ny} = 4000$ kg/cm², mekkora a lyukasztáshoz szükséges erő?

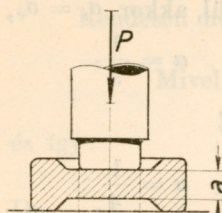
A nyírott felület egy hengerpalást:

$$F = d\pi\delta = 2,5 \cdot 3,14 \cdot 1,2 = 9,42 \text{ cm}^2$$

és az egy lyuk előállításához szükséges nyíróerő:

$$P = 9,42 \cdot 4000 = 37680 \text{ kg.}$$

6. Milyen legyen a mentőzsámoly a mérete, ha $P = 10000$ kg erő veszi nyírásra igénybe? (289. ábra.) A mentőzsámolyban a $\sigma_m = 1200$ kg/cm², az igazítócsavarban pedig $\sigma'_m = 500$ kg/cm².



289. ábra.

Az igazítócsavar d mérete:

$$\frac{d^2}{1,273} \sigma'_m = P$$

$$\frac{d^2}{1,273} 500 = 10000$$

ahonnan:

$$d = \sqrt{\frac{10000 \cdot 1,273}{500}} = \sqrt{25,4} = \sim 5 \text{ cm.}$$

A nyírás egy hengerpalást mentén történik, amely kiterítve derékszögű négyszög (lásd 276. ábra) és az 53. § (12) képlet szerint:

$$z = 1,244 + 0,445 \left(\frac{a}{b} \right)$$

itt $\left(\frac{a}{b} \right)$ legyen:

$$5 = \frac{d\pi}{a}$$

akkor:

$$z = 1,244 + 0,445 \cdot 5 = 3,469$$

és

$$\tau = 0,8\sigma_m = \frac{zP}{F} = \frac{zP}{a \cdot d\pi}$$

és az értékeket behelyettesítve, ebből:

$$a = \frac{zP}{d\pi \cdot 0,8\sigma_m} = \frac{3,469 \cdot 10000}{5 \cdot 3,14 \cdot 0,8 \cdot 1200} = 2,3 \text{ cm} = \sim 2,5 \text{ cm.}$$

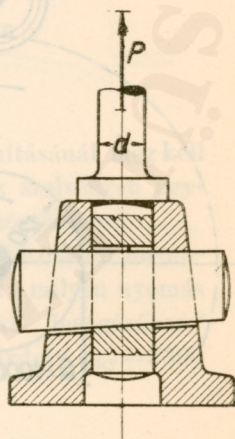
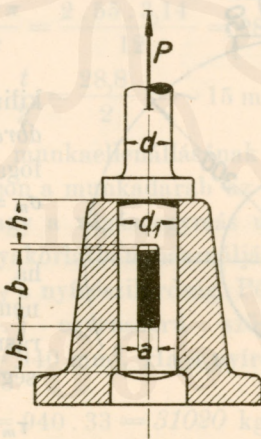
7. Kiszámítandók a kötőék (290. ábra) méretei.

Először meghatározzuk a megvastagított rúd méretét, ha a rúd-ban a megengedett feszültség σ_r :

$$P = \frac{d^2\pi}{4} \sigma_r =$$

$$= \left(\frac{d_1^2\pi}{4} - ad_1 \right) \sigma_r$$

$$d^2 = d_1^2 \left(1 - \frac{4}{\pi} \frac{a}{d_1} \right)$$



290. ábra.

Legyen: $\frac{a}{d_1} = \alpha$ és $\frac{4}{\pi} = 1,273$

akkor:

$$d_1 = \frac{d}{\sqrt{1 - 1,273\alpha}}$$

Ha a rúd és az ék ugyanazon anyagból készül, akkor $\sigma_r = \sigma_{\epsilon}$, ahol σ_{ϵ} az ékben megengedett feszültség; továbbá $\alpha = \frac{1}{3}$,

akkor: $a = \frac{d_1}{3}$ és $d_1 = \frac{4}{3} d$

Ha rúd folytatás és az ék edzett acél, akkor $\alpha = \frac{1}{4}$,

$a = \frac{d_1}{4}$ és $d_1 = \frac{5}{4} d$

Az ék nyírásra van igénybevéve:

$$\tau_m = \frac{1,5P}{F} = 0,8\sigma_{\epsilon}$$

ahonnan:

$$F = \frac{1,5P}{0,8\sigma_{\epsilon}}$$

$$2ab = \frac{1,5 \cdot d^2 \cdot \sigma_r}{0,8 \cdot 1,273 \cdot \sigma_{\epsilon}}$$

és $b = \frac{1,5}{0,8 \cdot 1,273 \cdot 2} \cdot \frac{\sigma_r}{\sigma_{\epsilon}} \cdot \frac{d^2}{a} = 0,737 \frac{\sigma_r}{\sigma_{\epsilon}} \frac{d^2}{a}$

Ha a rúd és az ék anyaga ugyanaz, akkor: $\sigma_r = \sigma_{\epsilon}$ és

$$a = \frac{d_1}{3} = \frac{4/3 d}{3}$$

és $b = \left(1,66 - \frac{5}{3}\right) d$

$$h = 0,75d_1$$

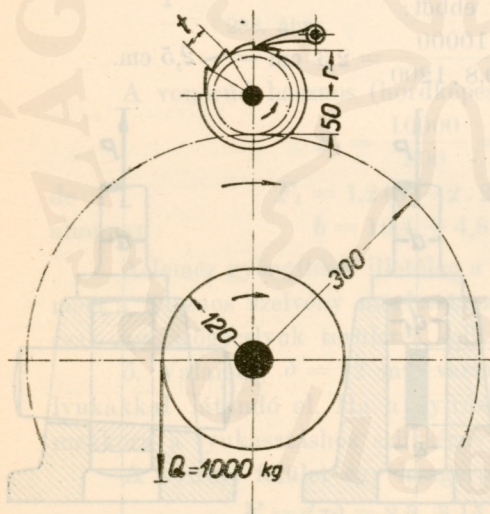
8. Egy hengerkerék kilincsműve számítandó (291. ábra), ha $Q = 1000$ kg, a fogak száma $z = 12$ és $\sigma_m = 1,75$ kg/mm².

A kilincerék fogait, ha kicsiny a magasságuk, nem hajlításra, hanem nyírásra számítjuk. A fog szélessége b és a fogosztás t .

$$\tau_m = 0,8 \sigma_m = \frac{zP}{F} = \frac{zP}{t \cdot b} = \frac{zP}{t^2 \frac{b}{t}}$$

ahonnan: $t = \sqrt{\frac{zP}{0,8 \sigma_m b}}$ vagy, mivel: $\sqrt{\frac{z}{0,8 \sigma_m}} = \sim 1$

$$t = \sqrt{\frac{t}{b}} P \text{ a fogosztás.}$$



291. ábra.

Rendesen nem P , hanem M nyomaték van adva és $P = \frac{M}{r}$.

Mivel: $2r\pi = zt$ ahonnan: $r = \frac{zt}{2\pi}$

és így: $P = \frac{M2\pi}{zt}$

De: $t^2 = \frac{t}{b} P = \frac{t}{b} \frac{M2\pi}{zt}$

és ebből: $t = 1,85 \sqrt[3]{\frac{M \cdot t}{z \cdot b}}$

Példánkban: $M = 1000 \cdot 120 = 120000 \text{ kgmm}$

az áttevés: $\frac{300}{50} = 6$

tehát: $M_1 = \frac{1}{6} 120000 = 20000 \text{ kgmm}$

Legyen: $\frac{t}{b} = 2$

akkor: $t = 1,85 \sqrt[3]{\frac{20000}{12} \cdot 2} = 27,5 \text{ mm}$

és így: $r = \frac{zt}{2\pi} = \frac{12 \cdot 27,5}{2 \cdot 3,14} = 52,6 \text{ mm}$

ezt $r = 55 \text{ mm}$ -re kerekítjük, akkor t is javítandó:

$$t = \frac{2r\pi}{z} = \frac{2 \cdot 55 \cdot 3,14}{12} = 28,8 \text{ mm}$$

és $b = \frac{t}{2} = \frac{28,8}{2} = \sim 15 \text{ mm}$

9. Olló-szerszámok munkaellenállásának számításánál meg kell különböztetnünk azt, vajjon a munkadarab az egész szelvényen egyidejűleg vágatik-e el, avagy a vágás egymás után történik-e?

Az első esetre a gyakorlatban használják a következő formulát: $P = F \cdot S_{ny}$, ahol S_{ny} a nyírószilárdság. Például: milyen nyomás szükséges a $\angle 70.70.7$ egyenszárú szögletvas levágásához? A szögletvas területe $F = 940 \text{ mm}^2$. Ha a nyírószilárdság $S_{ny} = 3300 \text{ kg/cm}^2$, akkor:

$$P = 940 \cdot 33 = 31020 \text{ kg.}$$

Vagy pl. mekkora erő kell egy 8 mm átmérőjű Bessemer-acéldrót átvágására, ha $S_{ny} = 4400 \text{ kg/cm}^2$?

$$P = F \cdot S_{ny} = \frac{d^2}{1,273} 44 = \frac{8^2}{1,273} 44 = 50,26 \cdot 44$$

$$P = 2210 \text{ kg.}$$

Ha azonban a munkadarabot, pl. a pléhlemezt csak darabonként nyírjuk el rézsútos szerszámokkal, akkor a nyírásra kisebb erő is elegendő, mert a szétvágott keresztmetszet kisebb. Felvehetjük, hogy a munkaellenállás arányos a lemez vastagsággal δ , a nyírószilárdsággal S_{ny} és az α metszésszög cotangensével (292. ábra) és a nyíróerő:

$$P = 0,55 \cdot S_{ny} \cdot \delta^2 \cdot \cotg \alpha$$

ahol az α szög $10 - 12^\circ$. Vaslemeznél, ahol $S_{ny} = 24 \text{ kg/mm}^2$

$$P = 13,2 \cdot \delta^2 \cdot \cotg \alpha$$

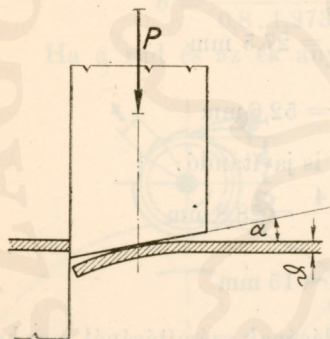
acéllemeznél pedig, melynél $S_{ny} = 40 \text{ kg/mm}^2$:

$$P = 22 \cdot \delta^2 \cdot \cotg \alpha$$

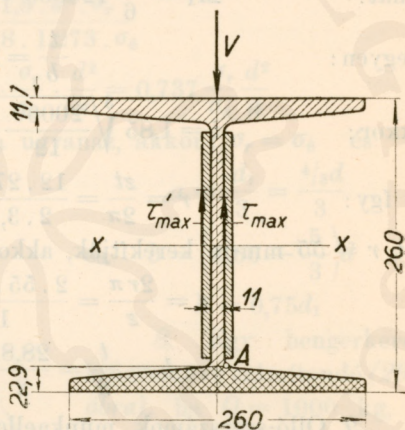
Pl. milyen erő kell egy $\delta = 15 \text{ mm}$ -es vaslemez átvágására?

$$P = 13,2 \cdot 15^2 \cdot \cotg 10^\circ = 13,2 \cdot 15^2 \cdot 5,671 = 16850 \text{ kg.}$$

10. Valamely 26. sz. Grey-tartóra hat $V = 15000 \text{ kg}$ nyíróerő. A illesztés két darab 200.8-as hevederlemezzel történik (293. ábra). Keresendő a maximális nyírófeszültség az illesztés le-



292. ábra.



293. ábra.

mezeiben ($\tau'_{\max}$), továbbá a tartóban ($\tau_{\max}$) és meghatározandó a τ nyírófeszültség az öv és gerinc között. A heveder lemezben:

$$\tau'_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V}{F} = \frac{3}{2} \frac{15000}{2 \cdot 0,8 \cdot 20} = 703 \text{ kg/cm}^2$$

Az öv és a gerinc elválasztó vonalán az 54. § alapján:

$$\tau = \frac{V \cdot S}{z \cdot I_x}$$

ahol S a kétszer sraffozott terület sztatikai nyomatéka az x tengelyre.

$$S = 1,17 \cdot 26 (13 - 0,585) + (26 - 1,1) \left(\frac{2,29 - 1,17}{2} \right) \cdot \left(13 - 1,17 + \frac{2,29 - 1,17}{3} \right) = 536,5 \text{ cm}^3$$

A »Hütte«-ból kivéve $I_x = 14352 \text{ cm}^4$ és $z = 1,1 \text{ cm}$, tehát:

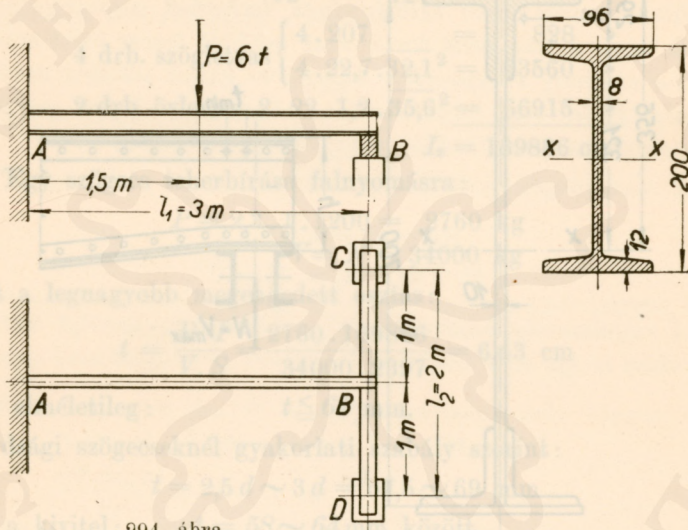
$$\tau = \frac{15000 \cdot 536,5}{1,1 \cdot 14352} = 510 \text{ kg/cm}^2$$

Közelítőleg volna a gerincben, ha föltesszük, hogy a nyíróerő hatására csak a gerincben keletkeznek csúsztató-feszültségek és ezek egyenletesen oszlanak el:

$$\tau_{\max} = \frac{V}{F} = \frac{15000}{(26 - 2 \cdot 2,29) 1,1} = \frac{15000}{23,56} = 640 \text{ kg/cm}^2$$

A feszültségek eloszlása a 283. ábrán látható.

11. Valamely egyik végén befogott I 20 N. P. (Czakó-táblázat) tartó másik B vége egy két helyen alátámasztott 15. 20-as



294. ábra

fagerendára (C, D) támaszkodik és közepén $P = 6 \text{ t}$ erővel van megterhelve (294. ábra). Mekkora erővel nyomja a vastartó a fagerendát, mekkora a vastartóban keletkező nyírófeszültség és mekkora a vastartó végének a besüllyedése?

A 20. sz. vastartóra: $I_x = 2402 \text{ cm}^2 = I_1$

$$E_1 = 2000000 \text{ kg/cm}^2$$

A fagerendára pedig: $I_2 = 10000 \text{ cm}^4$

$$E_2 = 150000 \text{ kg/cm}^2$$

A B pontra felírva a besüllyedéseket, meghatározhatjuk N_B -t:

$$\frac{P \left(\frac{l_1}{2} \right)^3}{3 I_1 E_1} + \frac{P \left(\frac{l_1}{2} \right)^2}{2 I_1 E_1} \cdot \frac{l_1}{2} = \frac{N_B \cdot l_1^3}{3 I_1 E_1} = \frac{N_B \cdot l_2^3}{48 I_2 E_2}$$

amely egyenletbe az értékeket behelyettesítve és N_B -re megoldva kapjuk, hogy:

$$N_B = 1760 \text{ kg}$$

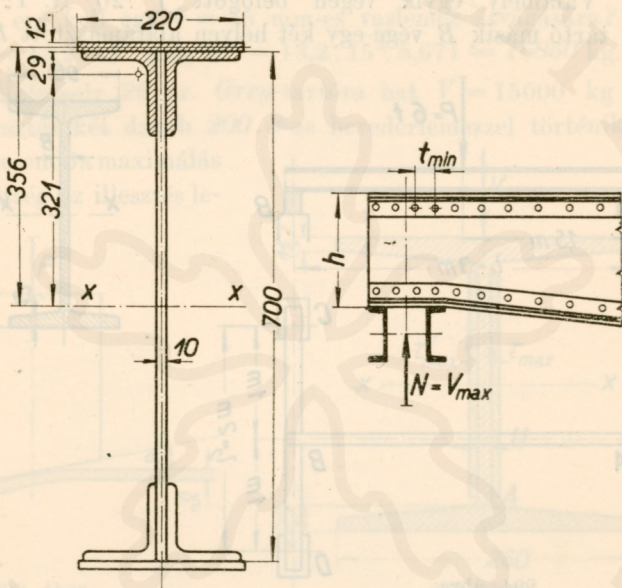
A legnagyobb nyíróerő:

$$V_{\max} = P - N_B = 6000 - 1760 = 4240 \text{ kg}$$

$$\tau_{\max} = \frac{V \cdot S}{I_1 \cdot \delta}$$

$$S = 9,6 \cdot 1,2 \cdot 9,4 + 8,8 \cdot 0,8 \cdot 4,4 = 139 \text{ cm}^3$$

tehát:
$$\tau_{\max} = \frac{4240 \cdot 139}{2402 \cdot 0,8} = 307 \text{ kg/cm}^2$$



295. ábra.

vagy megközelítéssel kapnók, hogy:

$$\tau_{\max} = \frac{V_{\max}}{F_{\text{gerinc}}} = \frac{4240}{17,6 \cdot 0,8} = 301 \text{ kg/cm}^2$$

A besüllyedés pedig:

$$f = \frac{N_B \cdot l_2^3}{48 \cdot I_2 \cdot E_2} = \frac{1760 \cdot 200^3}{48 \cdot 10000 \cdot 150000} = 0,196 \text{ cm}.$$

12. Valamely szögcselt tartó egy 10 mm erős gerinclemezből, 4 darab 100.100.12 szögletvasból, s fönt és lent egy-egy 220.12 mm-es övlemezről áll (295. ábra). A felszabadító erő $N = 34 \text{ t}$, a szögcsel-átmérő $d = 23 \text{ mm}$. Keresendő a szögcselosztás t , ha $\tau_m = 600 \text{ kg/cm}^2$ és $\alpha = 1200 \text{ kg/cm}^2$.

A legnagyobb megengedett osztás: $t = \frac{P \cdot I}{V \cdot S}$, ahol P a kétnyírású szögecs teherbírása falnyomásra, I a teljes szelvény tehetetlenségi nyomatéka, V a nyíróerő és S az egész övrész sztatikai nyomatéka, a súlyponti tengelyre. A $V_{\max}$ mellett lesz $t_{\min}$.

A sztatikai nyomaték:

$$S_x = 22,1 \cdot 2,35,6 + 2 \cdot 22,7 \cdot 32,1 = 2397 \text{ cm}^3,$$

mert egy szögvas területe: $F = 22,7 \text{ cm}^2$.

A tehetetlenségi nyomaték:

$$\text{gerinclemez: } \frac{1 \cdot 70^3}{12} = \frac{343000}{12} = 28583 \text{ cm}^4$$

$$4 \text{ drb. szögletvas } \begin{cases} 4 \cdot 207 \quad \quad = 828 \quad \gg \\ 4 \cdot 22,7 \cdot 32,1^2 = 93560 \quad \gg \end{cases}$$

$$2 \text{ drb. övlemez } 2 \cdot 22,1 \cdot 2,35,6^2 = 66915 \quad \gg$$

$$I_x = 189886 \text{ cm}^4$$

Egy szögecs teherbírása falnyomásra:

$$P = 2,3 \cdot 1,1200 = 2760 \text{ kg}$$

és

$$V = N = 34000 \text{ kg}$$

Tehát a legnagyobb megengedett osztás:

$$t = \frac{P \cdot I}{V \cdot S} = \frac{2760 \cdot 189886}{34000 \cdot 2397} = 6,43 \text{ cm}$$

avagy elméletileg: $t \leq 64 \text{ mm}$.

Szilárdsági szögecseknél gyakorlati szabály szerint:

$$t = 2,5d \sim 3d = 57,5 \sim 69 \text{ mm}$$

tehát a kivitel: $t = 58 \sim 64 \text{ mm}$ között.

VIII. FEJEZET.

55. §. Csavarószilárdság.

Ha valamely tartó szelvényének terhelését megvizsgálva azt találjuk, hogy a lementszett tartórészre működő összes külső erőknek, csupán a szelvény súlypontján átmenő és ennek síkjára merőleges x tengely körül van forgatóhatása, akkor a szükséges méretezést az egyszerű csavarószilárdság alapján kell elvégezni.

A csavaró-igénybevétel analitikai ismertető jelei tehát:

$$\begin{aligned} R_x &= R_y = R_z = 0 \\ M_x &> 0; \quad M_y = M_z = 0 \end{aligned}$$

A rugalmasság határán belül a külerők egyensúlyt tartanak a belerőkkel és így az x tengelyre vonatkozó forgatóhatásaik egyenlők.

$$M_x = M_{cs} = \int_0^F df (y\tau_y - z\tau_z) \quad (1)$$

amely egyenletben y és z a szelvény egy tetszőleges pontjának két ordinátája. Az (1) alatti egyenletből juthatunk a gyakorlatban használható képletek matematikai levezetésére, ha figyelembe vesszük a feszültségek okozta alakváltozásokat is.

Mint hogy a derékfeszültségek összetevői:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$$

a fajlagos hosszváltozások értékei:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

ahonnan:

$$\xi = F_1(y, z); \quad \eta = F_2(x, z) \quad \text{és} \quad \zeta = F_3(x, y) \quad (2)$$

A csúsztató-feszültségek és élszögváltozások közötti összefüggések, ha G a csúsztató rugalmasság modulusza:

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= G \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = 0 \\ \tau_y &= G \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \\ \tau_z &= G \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Egyszerű csavarás esetén, minthogy $\tau_x = 0$:

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$$

és részletesen differenciálva x szerint:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = 0 \quad (4)$$

A (2) egyenletekből azonban:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial F_2(x, z)}{\partial x} = \Phi_2(x, z)$$

és

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial F_3(x, y)}{\partial x} = \Phi_3(x, y)$$

A nyert eredményt a (4) egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy:

$$\frac{\partial \Phi_2(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_3(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

Ezen egyenlet, ha ϑ olyan mennyiség, mely csupán x -nek függvénye, felbontható két részre:

$$\frac{\partial \Phi_2(x, z)}{\partial z} + \vartheta = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial \Phi_3(x, y)}{\partial y} - \vartheta = 0$$

amely alakban az egyenletek megoldhatók és pedig kapjuk, hogy:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\vartheta \cdot z \quad \text{és} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = +\vartheta \cdot y$$

Helyettesítsük be az így nyert eredményeket τ_y és τ_z értékeibe, akkor:

$$\left. \begin{aligned} \tau_y &= G \left[\frac{\partial F_1(y, z)}{\partial z} + \vartheta y \right] \\ \tau_z &= G \left[\frac{\partial F_1(y, z)}{\partial y} - \vartheta z \right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ha mármost csak abban a szelvényben keressük a csúsztató-feszültségek komponenseit, melynek síkjában a tengelyrendszert felvettük, akkor $x = 0$ és ϑ állandó lesz és ha:

$$F_1(y, z) = \vartheta V$$

ahol V a *De Saint-Venant-féle függvény*, mely a keresztmetszet alakjától függ, akkor az (1) egyenlet alapján:

$$M_{cs} = \iint (y\tau_y - z\tau_z) dy dz = \vartheta \cdot G \iint \left[y \left(\frac{\partial V}{\partial z} + y \right) - z \left(\frac{\partial V}{\partial y} - z \right) \right] dy dz \quad (7)$$

A jobboldalon levő kettős integrál alatti kifejezés nem egyéb, mint a szelvény csavarási modulusza D és így:

$$\left. \begin{aligned} M_{cs} &= \vartheta \cdot G \cdot D \\ \vartheta &= \frac{M_{cs}}{G \cdot D} \end{aligned} \right\} \quad (7a)$$

ahol ϑ állandónak bizonyos fizikai jelentősége van. Ugyanis ezen (7) egyenletből lehet az elcsavarodás specifikus szögét, azaz a hosszegységre jutó elcsavarodást megállapítani, mindenféle szelvényű tartóra vonatkozóan. A csavarási modulusznak csak egyik tényezője a poláris tehetetlenségi nyomaték és egyedül a körszelvélynél vág össze e két érték egymással.

A (6) és (7) számú egyenletekből pedig a keletkező csúsztatófeszültségek komponenseit kapjuk és pedig:

$$\left. \begin{aligned} \tau_y &= \frac{M_{cs}}{D} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + y \right) \\ \tau_z &= \frac{M_{cs}}{D} \left(\frac{\partial V}{\partial y} - z \right) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Bármilyen alakú szelvény legyen tehát csavarásra igénybevéve, a szelvény egyes pontjaiban keletkező csavaró-feszültségek komponenseit a (8) alatti egyenletekből lehet megállapítani és így természetesen kikereshető a maximális csavaró-feszültség értéke is, amelyet az anyagban megengedett feszültséggel kell kapcsolatba hozni.

A *De Saint Venant-féle függvény* alakja és értéke azonban a szelvény alakjától függ. A függvény meghatározására 1) a »kerületi feltétel« szolgál, mely szerint a csúsztató-feszültség iránya a szelvény kerületén ennek érintőjével vág össze, azonkívül 2) a differenciális prizma egyensúlyi feltétele.

Legegyszerűbbek a viszonyok a körszelvélynél, mert itt minden szelvény az elcsavarás után is sík marad; minden más szelvény keresztmetszeti síkjai ellenben görbe felületekbe mennek át. Körszelvélynél az eredetileg egyenesvonalú alkotók az elcsavarás után csavarvonalakat képeznek (296. ábra). Két egymástól l távolságra fekvő metszetben levő r sugár a csavarás után φ szöveget zár

be egymással; ha azonban a metszetek távolsága csupán dx , akkor a bezárt szög $d\varphi$ lesz. A csavarvonal alaptulajdonsága szerint:

$$\frac{l}{dx} = \frac{\varphi}{d\varphi}$$

Az elcsavarásnál az m pont által leírt ív:

$$y \cdot d\varphi = dx \cdot \gamma$$

E két egyenletből kifejezve dx -t:

$$\frac{l d\varphi}{\varphi} = \frac{y \cdot d\varphi}{\gamma}$$

ahonnan:

$$\gamma = \frac{y \cdot \varphi}{l}$$

Az y távolban levő m pontban a csúsztató-feszültség:

$$\tau = G \cdot \gamma$$

ahol G a csúsztató rugalmassági modulusz és γ az élszögváltozás ívmértékben kifejezve (296. ábra). Tehát, mivel $\gamma = \frac{y \cdot \varphi}{l}$

$$\tau = G \frac{y \cdot \varphi}{l} \quad (9)$$

A csúsztató-feszültségek a sugárra merőlegesek és lineárisan változnak az y szerint, mivel G és l állandók; eloszlásuk a 297. ábrán fel van tüntetve. Maximális csúsztató-feszültség a kerületen lép fel és nagysága, mivel $y = r$:

$$\tau_{\max} = G \frac{r \varphi}{l} \quad (10)$$

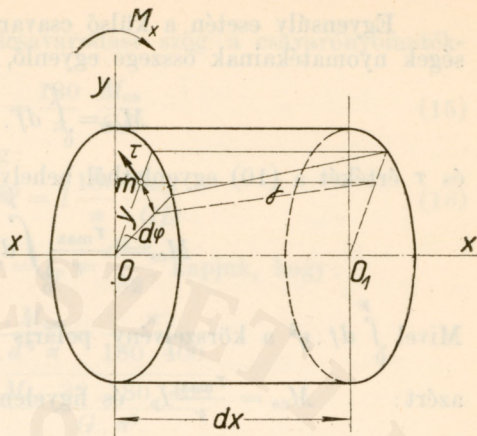
A (9) és (10) egyenletekből kapjuk, hogy:

$$\tau : \tau_{\max} = y : r \quad (11)$$

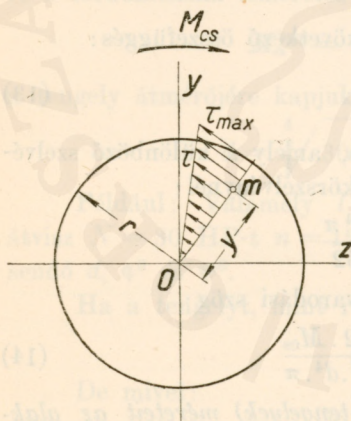
ahonnan:

$$\tau = \tau_{\max} \frac{y}{r}$$

amely képletből tetszőleges pontban a csúsztató-feszültség a $\tau_{\max}$ -ból kiszámítható.



296. ábra.



297. ábra.

Egyensúly esetén a külső csavarónyomaték és a belső feszültségek nyomatékainak összege egyenlő, tehát:

$$M_{cs} = \int_0^F df \cdot \tau \cdot y$$

és τ értékét a (10) egyenletből behelyettesítve

$$M_{cs} = \frac{\tau_{\max}}{r} \int_0^F df \cdot y^2$$

Mivel $\int_0^F df \cdot y^2$ a körszelvény poláris tehetetlenségi nyomatéka I_p ,

azért: $M_{cs} = \frac{\tau_{\max}}{r} I_p$ és figyelembe véve, hogy: $\frac{I_p}{r} = W_p$

a poláris ellenálló-nyomatékkal, kapjuk körszelvényre a csavarószilárdság alaképletét:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{cs}}{W_p} \leq 0,8 \sigma_m \quad (12)$$

Fontos csavarásnál az elcsavarodás specifikus szöge ϑ , a hosszegységre eső elfordulási szög; ezzel mérjük az alakváltozást. Ha dx darabon az elcsavarodás $d\varphi$, akkor:

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx}$$

Elméleti úton megállapítható a következő összefüggés:

$$\vartheta = \frac{M_{cs}}{GD} \quad (13)$$

ahol D a szelvény csavarási modulusza, amely a különböző szelvényeknél külön-külön meghatározandó, körszelvénynél:

$$D = I_p = \frac{d^4 \pi}{32}$$

tehát körszelvénynél a specifikus elcsavarodási szög:

$$\vartheta = \frac{M_{cs}}{G \cdot I_p} = \frac{32 \cdot M_{cs}}{G \cdot d^4 \cdot \pi} \quad (14)$$

Hosszú tengelyek (transzmisszió-tengelyek) méreteit az alakváltozási egyenletből határozzuk meg. A specifikus elcsavarodási szög 1 cm hosszú részre maximálisan $1/400$ fok lehet, (azaz 1 m hossza $1/4^0$ -nak megfelelő ív), így tehát ívmértékben ϑ minden cm hosszú tengelyre:

$$\vartheta = \frac{\pi}{180 \cdot 400}$$

A hosszegységre jutó elcsavarodási szög a csavarónyomatékkal kifejezve fokokban:

$$\vartheta^0 = \frac{180}{\pi} \frac{M_{cs}}{GD} \quad (15)$$

l hosszúságú tartórészre pedig:

$$\psi^0 = l \vartheta^0 = l \frac{180}{\pi} \frac{M_{cs}}{GD} \quad (16)$$

Mivel körszelvénynél: $D = I_p = \frac{d^4 \pi}{32}$, kapjuk, hogy:

$$\vartheta = \frac{32 \cdot M_{cs}}{G \cdot d^4 \pi} = \frac{\pi}{180 \cdot 400}$$

ahonnan:

$$d = \sqrt[4]{\frac{M_{cs} \cdot 32 \cdot 180 \cdot 400}{G \cdot \pi^2}}$$

Kovácsvasból készült transzmisszió-tengelyeknél $G = 800000$ kg/cm² és így:

$$d = \sqrt[4]{0,3 \cdot M_{cs}^{kgcm}} \quad (17)$$

vagy, ha M_{cs} kgm-ben van adva:

$$d = \sqrt[4]{30 \cdot M_{cs}^{kgm}} \quad (17a)$$

Rendesen nem a csavarónyomaték, hanem az átvitt lóerőszám és a fordulatszám ismeretes és mivel:

$$M_{cs}^{kgm} = 716,2 \frac{N}{n} \quad \text{tehát}$$

a tengely átmérőjére kapjuk, hogy:

$$d = \sqrt[4]{30 \cdot 716,2 \frac{N}{n}} = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \quad (18)$$

Például: Valamely $l = 12$ m hosszú transzmisszió-tengely átvissz $N = 30$ HP-t $n = 120$ percenkénti fordulatszámmal. Keresendő d , ϑ^0 és ψ^0 .

Ha a tengelyt, mint rövid tartót méreteznők, akkor:

$$0,8 \sigma_m = \frac{M_{cs}}{W_p}$$

De mivel:

$$M_{cs} = 716,2 \frac{30}{120} = 179 \text{ kgm} = 17900 \text{ kgcm}$$

és kovácsvasnál: $\sigma_m = 500 \text{ kg/cm}^2$,

$$W_p = \frac{M_{cs}}{0,8 \sigma_m} = \frac{17900}{0,8 \cdot 500} = 44,76 \text{ cm}^3 = \frac{d^3 \pi}{16}$$

ahonnan:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 44,76}{3,14}} = \sqrt[3]{228} = 6,1 \text{ cm} \quad \text{volna.}$$

Azonban a tengelyt az elcsavarodási szögből méretezzük, azaz:

$$d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} = 12 \sqrt[4]{0,25} = 12 \sqrt[4]{0,5} = 12 \cdot 0,71 = 8,5 \text{ cm}$$

lesz a tengely átmérője.

Az 1 cm-re eső elcsavarodási szög fokokban:

$$\vartheta^0 = \frac{180}{\pi} \frac{M_{cs}}{G \cdot I_p} = \frac{180}{\pi} \frac{M_{cs} \cdot 32}{G \cdot d^4 \pi} = \frac{180}{\pi} \frac{32 \cdot 17900}{800000 \cdot 5220 \cdot 3,14} = \sim \frac{1^0}{400} = 9''$$

és 1200 cm hosszúságú tengelyre:

$$\psi^0 = l \cdot \vartheta^0 = 1200 \cdot 9'' = 10800'' = 3^0.$$

Már az egyszerű négyszögalakú szelvénynél a V függvény meghatározása, a négyszög oldalainak különböző viszonzyszáma mellett komplikációt okoz, mert hosszadalmas számítást igényel, noha pontos eredményeket lehet e szelvényekre megállapítani.

Herrmann Emil teljes matematikai pontossággal megállapította összevont formában, a De Saint-Venant-féle elmélet alapján a négyszögre vonatkozólag a maximális τ csavaró-feszültséget a hosszabbik oldal felezőpontjában, továbbá a rövidebb oldal felezőpontjában fellépő τ_1 feszültséget és a D csavarási moduluszt a (8) számú egyenletből. Eredményei:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \alpha \frac{M_{cs}}{a^3} \\ \tau_1 &= \beta \frac{M_{cs}}{a^3} \\ D &= \kappa a^4 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

amely összefüggésekben α , β és κ állandók értékeit táblázatban állította össze $\frac{b}{a}$ viszonzyszám kerek számú értékeinél.

VIII. táblázat, α , β és κ értékeiről.

$\frac{b}{a}$	α	β	κ	$\frac{b}{a}$	α	β	κ
1	4,8139	4,8139	0,141	6	0,5586	0,4148	1,790
2	2,0336	1,6167	0,457	7	0,4710	0,3496	2,123
3	1,2470	0,9394	0,790	8	0,4070	0,3022	2,457
4	0,8762	0,6610	1,123	9	0,3584	0,2661	2,790
5	0,6861	0,5097	1,457	10	0,3202	0,2373	3,123

A nyert eredmények azonban hosszúkás négyszögek esetén, amikor $\frac{b}{a} > 4$, a kísérleti eredményekkel nem vágnak össze, azért

utóbb Föppl, majd Weber más korrigált formulákat ajánlanak a méretszámításhoz.

Amíg a körszelvényű tartók csavaró-igénybevételének megállapítása *De Saint-Venant* elmélete szerint lezártnak tekinthető,

$$\left. \begin{aligned} \text{ugyanis:} \quad \tau_{\max} &= \frac{M_{cs}}{W_p} \\ \text{és} \quad \vartheta &= \frac{32 \cdot M_{cs}}{G \cdot d^4 \cdot \pi} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

addig a négyszögű szelvényre a gyakorlatban sűrűn alkalmazzák a *Bach-féle* megközelítő képletet, mely a τ_y és τ_z megállapításánál felhasznált konvergáló sorok negyedik hatványánál magasabb kitevőjű tagjaira már nincs figyelemmel és mint kétszeresen szimmetrikus szelvényt tárgyalja és azon feltevésből indul ki, hogy az eredő $\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$ feszültség, a két főtehetetlenségi tengelyre lineárisan változik, de más állandó szerint, mint a 298. ábra mutatja.

Egy tetszőleges y és z ordinátákkal bíró pontban a csavaró-feszültség két komponensét a következő egyszerű összefüggések adják:

$$\left. \begin{aligned} \tau_y &= \frac{3}{4} \frac{M_{cs}}{I_z} \left(1 - \frac{z^2}{a_1^2}\right) y \\ \tau_z &= -\frac{3}{4} \frac{M_{cs}}{I_y} \left(1 - \frac{y^2}{b_1^2}\right) z \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

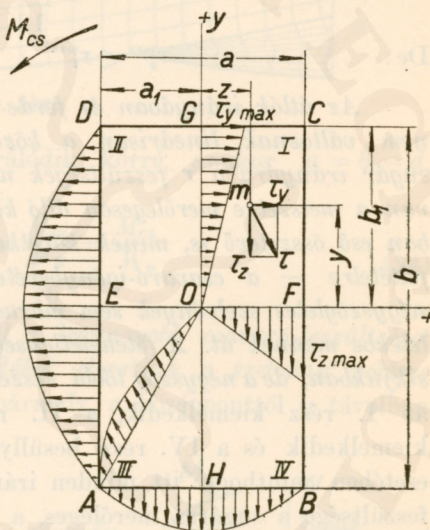
amely egyenletekben I_y és I_z a két főtehetetlenségi tengelyre vonatkozó inercia-nyomatékot jelenti.

Ezen megközelítő eljárással levezetett egyenletek a csavaró-feszültségek eloszlásának világos képét adják.

A legnagyobb csavaró-feszültség E és F pontokban keletkezik, ahol:

$$z = \pm a_1 \quad \text{és} \quad y = 0 \quad \text{tehát:} \quad \tau_y = 0$$

$$\text{és} \quad \tau_z^{\max} = -\frac{3}{4} \frac{M_{cs}}{ba^3 \cdot \frac{2}{12} a} = \mp 4,5 \frac{M_{cs}}{ba^2} \quad (22)$$



298. ábra.

Ha négyzetről van szó, akkor az előjeltől eltekintve, azaz a feszültség abszolút értékét alapul véve kapjuk, hogy:

$$\tau_z^{\max} = 4,5 \frac{M_{cs}}{a^3}$$

míg a pontos eredmény: $\tau_z^{\max} = 4,81 \frac{M_{cs}}{a^3}$ lenne. (22a)

DA és BC oldalak mentén a feszültségek parabola-törvény szerint változnak, éppúgy, mint AB és CD mentén, G és H pontokban. Itt ugyanis $z = 0$ és $y = \pm b_1$ s így:

$$\tau_y^{\max} = \pm \frac{3}{4} \frac{M_{cs}}{ab^3} \cdot \frac{2}{12 \cdot b} = \pm 4,5 \frac{M_{cs}}{ab^2}$$

De:

$$\tau_y^{\max} < \tau_z^{\max}$$

Az átlók irányában és ferde metszetek mentén a feszültségek nem változnak lineárisan a középponttól mért távolsággal és a sugár irányára a τ feszültségek nem is állanak merőlegesen, azaz van a metszetre merőlegesen álló komponenseken kívül átlós irányban eső összetevő is, minek következtében — tekintettel a kerületi feltételre — a csavaró-igénybevételre esetében deformáció után a négyszögletes szelvények sem maradnak síkbeliek, hanem görbe felületekbe mennek át. A főtengelytengelyek megmaradnak eredeti síkjukban, de a négyszög többi része kimozdul a síkjából; ugyanis ha az I. rész kiemelkedik, a II. rész besüllyed, a III. rész ismét kiemelkedik és a IV. rész besüllyed. A kör-keresztmetszetű tartó esetében, minthogy itt minden irányban a szelvény eredő csavaró-feszültsége a sugárra merőleges, a deformáció után is sík marad a kijelölt keresztmetszet, de minden más szelvényű tartónál görbe felületet kapunk.

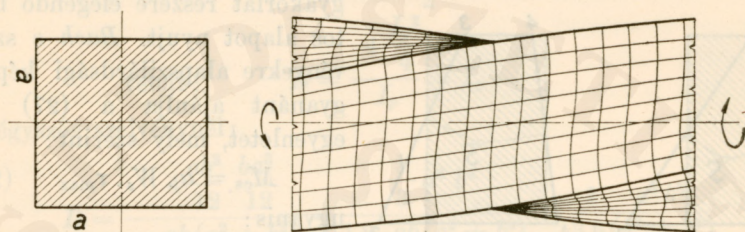
Az elliptikus keresztmetszetű rúd viselkedése csavarás után hasonló a négyszög-szelvényű rúdéhoz. Ha ugyanis ilyen rúd kerületére az alkotóhoz parallel négyszögeket karcunk a kísérlet előtt, úgy az elcsavarás után a négyszögek ferde rombuszokká lesznek, a szelvény síkjából kimozdul. A legnagyobb szögelfordulás a kis tengely végén lesz, azaz a $\tau = G \cdot \gamma$ élszögváltozási egyenlet alapján e pontokban lesz $\tau_{\max}$. A négyszög csúspontjaiban, A, B, C és D-ben, csavaró-feszültség nem keletkezik és így ezen alkotók élszögváltozásai zéróval egyenlők. Mindezt pl. a négyzet-szelvényre a 299. ábra mutatja. Elliptikus szelvény esetében (300. ábra) a kis tengely

végén keletkező maximális csavaró feszültség, hasonlóan állapítható meg megközelítő módszerrel, mint a négyyszögű szelvénynél.

$$\tau_z^{\max} = \frac{16 M_{cs}}{a^2 b \pi} \quad (23)$$

és a nagy tengely végpontjában keletkező:

$$\tau_y^{\max} = \frac{16 M_{cs}}{a b^2 \pi}$$



299. ábra.

Ha pedig az ellipszis degenerálódik körre, amikor $a = b = d$, akkor körszelvényű tartó esetén:

$$\tau_{\max} = \frac{16 M_{cs}}{d^3 \pi} = \frac{M_{cs}}{\frac{d^3 \pi}{16}} = \frac{M_{cs}}{W_p} \quad (24)$$

Azaz körszelvényű tartónál a legnagyobb csavaró-feszültséget megkapjuk, ha a csavaró-nyomatékot elosztjuk a szelvény poláris ellenálló-nyomatékával és a kör bármely, a középponttól y távolban levő pontjára:

$$\tau = \frac{M_{cs} y}{I_p}$$

De Saint-Venant elmélete alapján levezetett, az egyenoldalú háromszög-keresztmetszetű tartóra vonatkozó maximális csavaró-feszültséget az oldalak felezőpontjaiban kapjuk és erre megközelítőleg:

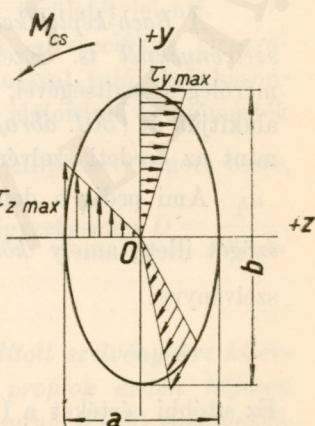
$$\tau_{\max} = 20 \frac{M_{cs}}{a^3} \leq 0,8 \sigma_m \quad (25)$$

ha a a háromszög oldala; egyenlőoldalú hatszög esetében:

$$\tau_{\max} = \frac{1,09 M_{cs}}{a^3} \quad (26)$$

és a pontos képlet:

$$\tau_{\max} = \frac{1,027 M_{cs}}{a^3}$$

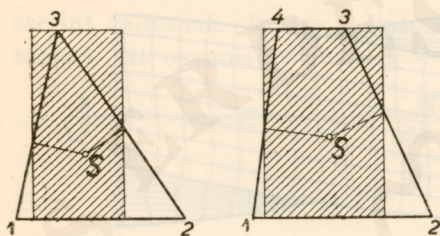


300. ábra.

az oldalak felezőpontjaiban fellépő csavaró-feszültség; és egyenoldalú nyolcszögre:

$$\tau_{\max} = \frac{0,378 M_{cs}}{a^3}$$

Már ezen néhány szelvény vizsgálatánál tapasztaljuk, hogy a megközelítő eljárás mellett is alig sikerül közös formulát találni, noha *Bach* alábbi összevont képlete, a felsorolt szelvényekre a



301. ábra.

gyakorlat részére elegendő biztos alapot nyújt. *Bach* e szelvényekre alapszilárdsági képlet gyanánt ajánlja a (27) sz. egyenletet, mely szerint:

$$M_{cs} = \alpha \cdot W_e \cdot \tau_{\max} \quad (27)$$

ugyanis:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{cs}}{W_p} = \frac{M_{cs}}{\alpha W_e}$$

amely egyenletben, a minimális ellenállónyomaték: $W_e = \frac{I_{\min}}{e}$, azaz a szelvény minimális inercia-nyomatéka osztva e -vel, a csavarási tengelytől kisebb távolságban levő szélső szál távolával. Az α pedig állandó érték:

körre, körgyűrűre, ellipszisre, ellipszis-gyűrűre:	2
négyszögre, az oldalak viszonyától függetlenül:	$\frac{4}{3}$
háromszögre:	1,385
hatszögre:	1,694.

A *Bach*-képleteket előnyösen használhatjuk nem-szimmetrikus szelvényeknél is. Ezeknél a súlypontból az oldalakra bocsátott merőleges segítségével, a szelvényeket oly derékszögű négyszögekké alakítjuk át (301. ábra), melyeknek csavaróellenállása ugyanakkora, mint az eredeti szelvényeké.

Ami pedig a deformációval kapcsolatos specifikus élváltozási szöget illeti, amely *körszelvény* esetén $\vartheta = \frac{M_{cs}}{G \cdot I_p}$, az minden más szelvényre:

$$\vartheta = \frac{M_{cs}}{G \cdot D}$$

Ez utóbbi értéket a (7) alatti általános egyenletből igen körülményes számítással lehetne megkapni. A gyakorlatban azon szelvényekre, melyekre a (27) számú egyenlet érvényessége fentartható,

De Saint-Venant egyenletét használjuk, mely szerint a csavarási modulusz:

$$D = \frac{4 I_y \cdot I_z}{\zeta (I_y + I_z)} = \frac{4 I_y \cdot I_z}{\zeta I_p} \quad (28)$$

ahol a ζ állandó érték, kör- és körgyűrűre: 1; négyzet- és ellipszisre: 1,2; négyszögre: 1,2 — 1,5.

Körszelvéynél: $I_y = I_z = \frac{I_p}{2}$

$$\text{tehát: } D = \frac{4 \frac{I_p^2}{4}}{I_p} = I_p$$

Négyszög-szelvéynél:

$$D = \frac{4 \frac{ab^3}{12} \cdot \frac{ba^3}{12}}{1,2 \frac{ab(a^2 + b^2)}{12}} = \frac{\frac{1}{3} a^4 b^4}{1,2 \cdot ab(a^2 + b^2)} = \frac{1}{3,6} \frac{a^3 b^3}{(a^2 + b^2)}$$

és négyzetnél:

$$D = \frac{1}{3,6} \frac{a^6}{2a^2} = \frac{1}{7,2} a^4 = 0,14 a^4$$

A $\top$, $\sqcap$, $\sqcup$, $\sqsubset$ és egyéb hengerelt vasprofilra azonban sem a (22) egyenletet, sem a (27) számú egyenletet nem lehet jól felhasználni, amiért is *De Saint-Venant* már a csavarási modulusz megállapítására ovális és hosszúkás szelvények és $\sqcap$ esetén a:

$$D = \frac{F^4}{40 I_p} \quad (29)$$

egyenletet ajánlotta, amelyben F a szelvény területét jelenti.

Bauschinger számos kísérletet végzett a specifikus elcsavarodási szög kísérleti eredményeinek, e formulával való összehasonlítására és megállapította, hogy a nevezőben előforduló 40 számérték

csak a: $\frac{b}{a} = 4$ arányú négyszögre, kör- és ellipszisre vágott össze,

míg ha: $\frac{b}{a} = 8$, akkor $D = \frac{F^4}{38,5 I_p}$; viszont négyzet esetén $D = \frac{F^4}{42,7 I_p}$;

háromszögnél pedig $D = \frac{F^4}{45 I_p}$.

*Ugyancsak Bach négyszögekből összeállított szelvényekre kísérletileg igazolta, hogy különböző magasságú profilok esetén teljesen hasznavehetetlen számítási eredményeket kapunk a (29) egyenletből. Dr. Föppl hengerelt vastartók csavarási moduluszainak megállapítására, szintén nagyszámú kísérletet végzett. Megvizsgálta *De Saint-**

Venant formuláit és azt találta, hogy a hengerelt vastartók szelvényei elcsavarodásának kísérleti eredményét jobban megközelíti a (29) számú egyenlet, mint a (28) szám alatti, *de a profilok sokfélesége miatt, azt sem lehet nyugodtan elfogadni.* *Föppl* felhasználta *Prandtl* és *Bredt* azon megállapítását, hogy hengerelt vasszelvények csavarási tényezőjének megkeresésénél a négyszögletes szelvényeket olyanoknak kell venni, mintha a rövidebb oldaluk igen kicsiny volna a hosszabbhoz képest, amikor is matematikai alapon levezethető, hogy a csavarási modulusz:

$$D = \eta \frac{1}{3} \Sigma l d^3 \quad (30)$$

ahol d a négyszögekből összeállított idomvasakra a rövidebb oldalakat, l pedig a hosszabb oldalt jelenti és η korrekciótényező, mely abból származik, hogy a négyszögek nem végtelen keskenyek. *Föppl kísérleteivel, ezen korrekciótényező meghatározását tűzte ki feladatául.* Meg kell jegyezni, hogy a $\sqcap$, $\sqsubset$, $\sqsubset$ stb. szelvények letompításait négyszögekké kell kiegészíteni, ha a (30) egyenletet használni akarjuk.

A η korrekciótényező tartókra: $\sqcap$ 1,3; $\sqsubset$ 1,2; $\sqsubset$ differenciálgépi 1,29; $\sqsubset$ 1,15; $\sqsubset$ 0,99; $\sqsubset$ vasra pedig 1,15.

Ugyancsak *Föppl* matematikai alapon az M_{cs} nyomaték által okozott legnagyobb nyírófeszültség meghatározására, az összes hengerelt vastartóknál a:

$$\tau_{\max} = \frac{3 \cdot M_{cs} \cdot d_{\max}}{\Sigma l a^3} \quad (31)$$

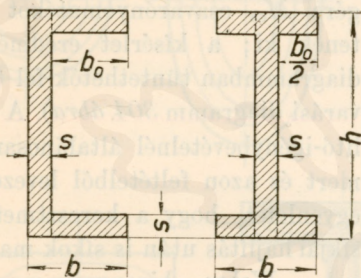
egyenletet vezette be, amelyben $d_{\max}$ a legvastagabb négyszög, keskenyebb oldalát jelenti, pl. $\sqcap$ $\sqsubset$ $\sqsubset$ $\sqsubset$ tartóknál az övek vastagságát. A legnagyobb csavaró-feszültség ezen esetekben az övek hosszabb oldalai mentén, a kerületen lépne fel és:

$$\vartheta = \frac{M_{cs}}{G \frac{1}{3} \Sigma l d^3} \quad (31a)$$

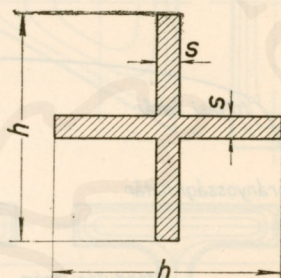
A *Föppl* által kijelölt formulák, az egyszerű szögletes vasakat kivéve, mindenütt kedvezőbb — a müncheni technikai laboratóriumban végzett kísérletek eredményeivel jobban összevágó — számbeli eredményeket adnak, mint a *De Saint-Venant* egyenletei.

A csavarási moduluszt körszelvényű tartó esetén először *Coulomb* határozta meg, s szerinte ennek értéke cm^4 egységben ugyanannyi, mint a körszelvény poláris tehetetlenségi nyomatéka. *Navier* azt gondolta, hogy minden szelvény csavarási modulusza megegyezik

a szelvény poláris tehetetlenségi nyomatékával. *De Saint-Venant* azonban pontos matematikai alapon kimutatta, hogy már a leg-egyszerűbb körtől eltérő, szabályos szelvények esetén is a két érték nem vág össze, hanem a (7) alatti egyenletből határozandó meg, s megközelítő eljárással a (28) és (29) sz. egyenletekből állapítható meg. Azonban a négyszögekből összetett szelvények esetén *Bauschinger* és *Bach* újabb kísérleti eredményei nem igazolták a *De Saint-Venant* formuláknak hengerelt-vas profilokra vonatkozó érvényességét, amiért is említett kutatók korrekciós tényezők bevezetését ajánlották. A *Föppl*-féle kísérletek pedig éppen azt célozták, hogy gyakorlati és tudományos alapon érjenek el kedvezőbb eredményeket. E célból *Föppl* direkt hengerelt-vasakkal végzett pontos kísérleteket és azokat összehasonlította a korrigált *De Saint-Venant*-képlettel és a (30) számú egyenletből nyert eredményekkel,



302. ábra.



303. ábra.

s ez utóbbit ajánlotta gyakorlati használatra. A korrekció-tényező azonban jóformán minden profilra más értékű volt, de az egyes pl. $\square$ szelvényekre is ennek különböző dimenziói mellett is változott. Ilyenmódon tehát *Föppl* idevágó eredményei sem nyújtanak megfelelőt az előálló deformációk megállapítására. A csavarásra igénybevett tartó méreteinek megállapítását illetőleg, *Föppl* elfogadja *Bach*-nak a különböző négyszögekből összeállított szelvényű, de öntöttvas-anyagú tartókra levezetett képleteit, amelyeknél *Bach* azon feltételből indult ki, hogy a profilok csavarással szembeni ellenállása, megegyezik a megfelelő méretű négyzetekével. A 302. ábrán bemutatott tartókra ennek értelmében:

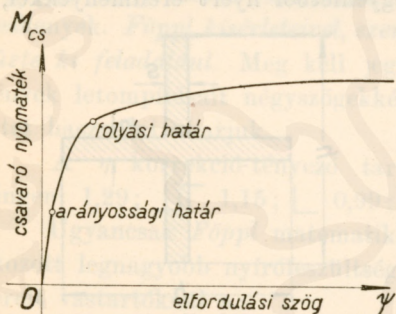
$$M_{cs} = \frac{2}{9} \tau_{\max} (hs^2 + 2b_0s^2) = \frac{2}{9} \tau_{\max} s^2 (h + 2b_0) \quad (32)$$

a 303. ábra szerinti keresztalakú szelvényre pedig:

$$M_{cs} = \frac{2}{9} \tau_{\max} s^2 h + \frac{2}{9} \tau_{\max} s^2 (h - s) = \frac{2}{9} \tau_{\max} s^2 h \left(2 - \frac{s}{h} \right) \quad (33)$$

Eltekintve attól, hogy *Bach* öntöttvas-anyagú tartókkal kísérletezett, melynek fajlagos hosszváltozása sem egyezik meg a különböző irányokban, amiért is ezen anyagnál a csavaró-feszültség mellett derékfeszültség is fellép, amely az öntöttvas jellegzetes törését is okozza (a hengerelt-vas profilok azonban rendszeren *Martin*-folytvasból készülnek): *nem alkalmazhatók* a (32) és (33) *egyenletek* a $\top \perp \square \sqsubset$ stb. *tartókra* már azért sem, mert a *lekerekítések* teljesen figyelmen kívül hagyják és a csavaró-feszültségek eloszlása keskeny négyszögeknél nem változik lineárisan a hosszabb tengely irányában, hanem lemniskátaszerű görbe szerint.

Weber tanár (Zürich) a legújabb időkben ugyancsak vizsgálat alá vette, a csavarásra igénybevett különféle szelvényű vas-tartókat. A csavarókísérlet véghezvitele géppel történik: a rúd



304. ábra.

egyik végét befogva a másik végére M_{cs} csavarónyomatékok fejtenek ki; a kísérlet eredményei diagrammban tüntethetők fel (csavarási diagramm 304. ábra). A hajlító-igénybevételnél általánosan ismert és azon feltételből levezetett egyenletet, hogy a keresztmetszet síkjai hajlítás után is síkok maradnak, *Weber* bizonyos megfontolásokkal a csavaró-igénybevételekre is átdolgozta közös formu-

lára, oly módon, hogy a feszültségi felületek figyelembevételével, általános érvényű összefüggést lehetett megállapítani és a szelvények különféleségét, valamint ugyanolyan szelvények különböző arányait, *fix* tényezővel vette figyelembe.

De Saint-Venant a feladat megoldásának differenciálegyenletét már a mult század közepén közreadta és ez bizonyos számú szelvényre már pontos, összevont megoldást is nyújtott, de a keskeny négyszögekből összetett profilokra. a kísérleti eredmények szerint nem vált be.

Weber más úton, de szigorúan pontos matematikai alapon a csúsztató-feszültségek általános differenciálegyenletéből indul ki, ugyanis:

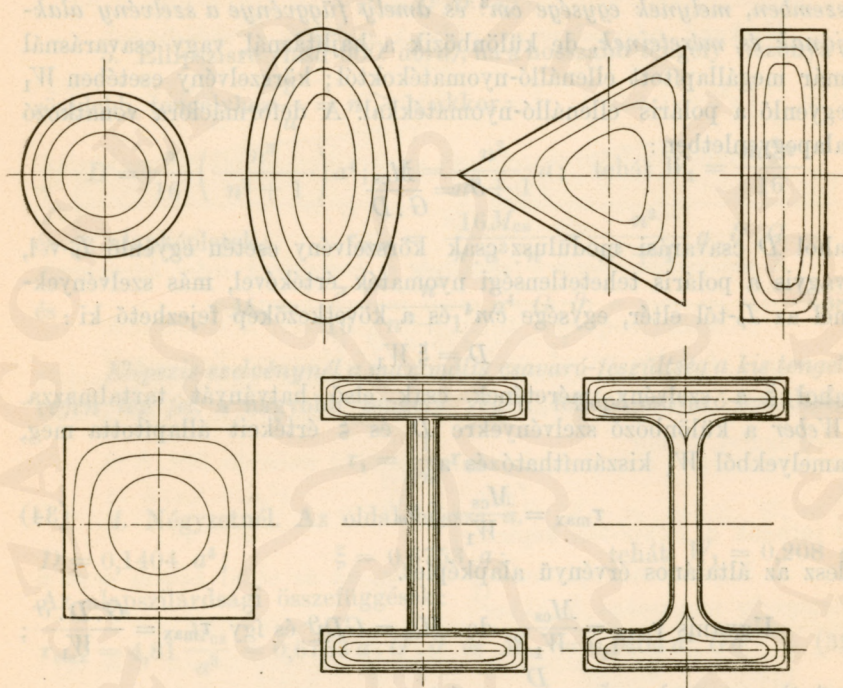
$$\frac{\partial^2 f(yz)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(yz)}{\partial z^2} = 2 \, G\vartheta = \text{állandó}$$

és ebből nyerte a csúsztatás görbeseregének egyenletcsoportját:

$$f(yz) = K$$

ahol K a különböző szelvényeknél, a csavarás tengelyével parallel lamellákban fellépő nyíróerőt jelenti. Ebből azután meg tudta határozni τ_y , τ_z és τ értékeit és az ennek megfelelőleg, az M_{cs} csavarónyomatékkal való összefüggést.

A feszültségi felületek alakjának megállapítására vonatkozó elméleti fejtegetései, lényegesen egyszerűsültek a *Prandtl-féle membránteória* ismeretével. Ugyanis *Prandtl* egyszerű kísérlettel igazolta és matematikailag bebizonyította, hogy a különböző keresztmetszetű



305. ábra.

tartók csavarásánál keletkező görbe felületek, a következő módon állíthatók elő. Ha valamely tartány fedőlemezén a szelvénynek megfelelő alakot kilyukasztunk és a felső szelvény kerületén síkszerű vékony hártyát, vagy burkot a széleken jól kifeszítünk, s ha továbbá e tartányban a nyomást a külső levegőhöz képest kissé növeljük, vagy csökkentjük, akkor a hártya lankásan fel- vagy ledomborodik, s a szóbanlevő szelvény csavarási igénybevételénél előálló feszültségi-felület alakját veszi fel. A keletkező feszültségeket ugyanis a hártyán a kis kidomborodás után és előtte változatlanoknak tekinti. Ez a feszültségi-felület magában foglalja a csúsztató-feszültségi

görbesereget, melyeknek jellegzetes alakjait egyes szelvényekre a 305. ábrán látjuk. A görbék bármely pontjához tartozó érintő az illető pontban uralkodó eredő csúsztató-feszültség irányát adja.

Weber a csavaró-igénybevétel alapegyenletét minden szelvényre az általános alakban:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{cs}}{W_1}$$

adta meg, ahol W_1 az ellenállónyomatékokat jelenti a csavarással szemben, melynek egysége cm^3 és amely függvénye a szelvény alakjának és méreteinek, de különbözik a hajlításnál, vagy csavarásnál már megállapított ellenálló-nyomatékoktól; körszelvény esetében W_1 egyenlő a poláris ellenálló-nyomatékkal. A deformációra vonatkozó alapegyenletben:

$$\vartheta = \frac{M_{cs}}{G \cdot D}$$

ahol D csavarási modulusz csak körszelvény esetén egyenlő I_p -val, vagyis a poláris tehetetlenségi nyomaték értékével, más szelvényeknél az I_p -tól eltér, egysége cm^4 és a következőkép fejezhető ki:

$$D = \xi W_1$$

ahol ξ a szelvény méretének csak első hatványát tartalmazza. Weber a különböző szelvényekre D és ξ értékeit állapította meg, amelyekből W_1 kiszámítható és a:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{cs}}{W_1} \leq \sigma_m \quad (34)$$

lesz az általános érvényű alapképlet.

$$\text{Ugyanis } \tau_{\max} = \frac{M_{cs}}{W_1}, \text{ de } M_{cs} = G D \vartheta \text{ és így } \tau_{\max} = \frac{G \cdot D \cdot \vartheta}{W_1};$$

minthogy azonban $\xi = \frac{D}{W_1}$, azért:

$$\tau_{\max} = G \cdot \xi \cdot \vartheta \quad (35)$$

Vizsgáljuk D és ξ értékeit a különböző szelvényekre.

1. Kör esetén:

$$D = \frac{r^4 \pi}{2}; \quad \xi = r, \text{ tehát: } W_1 = \frac{r^3 \pi}{2} \text{ és így:}$$

$$\tau_{\max} = \frac{2 M_{cs}}{r^3 \pi} \quad (36)$$

a maximális csavaró-feszültség a kör területén lép fel. De továbbá:

$$\tau_{\max} = \vartheta \cdot G \cdot r \text{ és } M_{cs} = G \cdot D \cdot \vartheta = \frac{G \cdot \vartheta \cdot r^4 \pi}{2} \quad (36a)$$

2. Körgyűrű esetében. A körgyűrű külső sugara r_k , belső sugara r_b .
$$D = \frac{(r_k^4 - r_b^4) \pi}{2}; \quad \xi = r_k; \quad W_1 = \frac{(r_k^4 - r_b^4) \pi}{2r_k}$$

és így az alapszilárdsági összefüggések:

$$\tau_{\max} = \frac{2 \cdot M_{cs} \cdot r_k}{\pi (r_k^4 - r_b^4)} = G \cdot \vartheta \cdot r_k \quad \text{és} \quad M_{cs} = \frac{\pi}{2} (r_k^4 - r_b^4) G \cdot \vartheta \quad (37)$$

A belső kerületen a csavaró-feszültség:

$$\tau' = G \cdot \vartheta \cdot r_b$$

3. Ellipszisre (lásd 300. ábra), ha a hosszabb tengely viszonya a rövidebb tengelyhez $\frac{b}{a} = n > 1$, akkor:

$$D = \frac{\pi}{16} \left(\frac{n^3}{n^2 + 1} \right) a^4; \quad \xi = \frac{n^2}{n^2 + 1} a; \quad \text{tehát} \quad W_1 = \frac{n a^3 \pi}{16}$$

és az alapképletek:
$$\tau_{\max} = \frac{16 M_{cs}}{\pi \cdot a^3 \cdot n} = \frac{n^2}{n^2 + 1} a \cdot \vartheta \cdot G$$

és
$$M_{cs} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{n^3}{n^2 + 1} \cdot a^4 \cdot G \cdot \vartheta \quad (38)$$

Ellipszis-szelvénynél a maximális csavaró-feszültség a kis tengely végén lép fel, a nagyobb tengely végén fellépő csavaró-feszültség:

$$\tau_1 = \frac{1}{n} \tau_{\max}$$

4. Négyzetnél. Az oldal hossza a .

$$D = 0,1404 a^4; \quad \xi = 0,6753 a; \quad \text{tehát} \quad W_1 = 0,208 a^3$$

Az alapszilárdsági összefüggések:

$$\tau_{\max} = 4,81 \frac{M_{cs}}{a^3} = 0,6753 a \cdot G \cdot \vartheta \quad \text{és} \quad M_{cs} = 0,1404 a^4 \cdot G \vartheta \quad (39)$$

A maximális csavaró-feszültség az oldalak felezőpontjaiban lép fel, a sarokpontokban pedig a feszültség zéró.

5. Négyyszögre. A hosszabb oldal (b) viszonya a rövidebb oldalhoz (a) legyen $\frac{b}{a} = n > 1$, de $n < 4$. Akkor:

$$D = \frac{a^4}{3} \left(n - 0,63 + \frac{0,052}{n^4} \right); \quad \xi = \left(1 - \frac{0,65}{1 + n^3} \right) a;$$

tehát:
$$W_1 = \frac{\frac{a^3}{3} \left(n - 0,63 + \frac{0,052}{n^4} \right)}{\left(1 - \frac{0,65}{1 + n^3} \right)}$$

Az alapképlet, mely szerint négyszög-szelvényű tartók csavarásra méretezendők, a következő:

$$\tau_{\max} = \frac{3M_{cs}}{a^3} \cdot \frac{\left(1 - \frac{0,65}{1+n^3}\right)}{\left(n - 0,63 + \frac{0,052}{n^4}\right)} \quad (40)$$

Maximális csavaró-feszültség a hosszabbik oldal felezőpontjában lép fel, a sarokpontokban a feszültség zéró.

Keskeny négyszögre az oldalak viszonya $\frac{b}{a} = n > 4$;

$$D = \frac{1}{3} (a^3b - 0,63a^4); \quad \xi = a; \quad \text{tehát } W_1 = \frac{a^2b - 0,63a^3}{3}$$

Az alapszilárdsági összefüggés a csavarónyomaték és $\tau_{\max}$ között:

$$\tau_{\max} = \frac{3M_{cs}}{a^2b - 0,63a^3} = a \cdot G \cdot \vartheta \quad (41)$$

A maximális csavaró-feszültség a hosszabbik oldal középpontjában lép fel, míg a rövidebb oldal felében keletkező:

$$\tau_1 = 0,7425 \cdot a \cdot G \cdot \vartheta$$

Ha a nevezőben $0,63a^3$ értéket mellőznők, amiképpen azelőtt a csúsztató-feszültségi görbesereg megállapítása nélkül keresték is az összefüggést, akkor:

$$\tau_{\max} = \frac{3M_{cs}}{a^2b}$$

és jutnánk a Föppl-féle képlethez.

6. Egyenoldalú háromszög esetén, ha az oldal hossza a és a háromszög magassága h , akkor:

$$D = \frac{h^4}{15\sqrt{3}} = \frac{a^4}{46,183}; \quad \xi = \frac{h}{2} = \frac{a}{2,309} \quad \text{és így:}$$

$$W_1 = \frac{h^3}{7,5\sqrt{3}} = \frac{a^3}{20}$$

$$\text{tehát: } \tau_{\max} = \frac{12,98M_{cs}}{h^3} = \frac{20M_{cs}}{a^3} = \frac{h}{2} G \cdot \vartheta = \frac{a}{2,309} G \cdot \vartheta \quad (42)$$

A legnagyobb csavaró-feszültség az oldalak középpontjában lép fel, a sarokpontokban a feszültség zéró. A feszültség az oldalak mentén parabola-törvény szerint változik.

7. Keskeny egyenszárú háromszög esetén. Az alap a , a magasság h és az alappal szemben fekvő szög $\alpha < 15^\circ$.

$$D = \frac{1}{13} ah^3 - 0,105a^4; \quad \xi = a; \quad W_1 = \frac{1}{13} h^3 - 0,105a^3$$

tehát:
$$\tau_{\max} = \frac{M_{cs}}{\frac{1}{13} h^3 - 0,105 a^3} = a \cdot G \cdot \vartheta \quad (43)$$

A legnagyobb feszültség a hosszabb oldalon lép fel az alaponál közelében, a sarokpontban zéró.

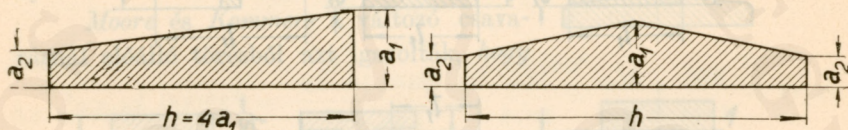
8. Egyenlőoldali hatszög esetén, ha az oldalak hossza a , két-két párhuzamos oldal egymástól való távolsága $2r_k$ és F a hatszög területe:

$$D = 0,533 r_k^2 F = 1,035 a^4; \quad \xi = 1,223 r_k = 1,058 a$$

$$(F = 3ar_k \text{ és } r_k = 0,865 a), \text{ tehát } W_1 = 0,436 r_k F = 0,97 a^3$$

Az alapképlet tehát:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{cs}}{0,436 r_k \cdot F} = \frac{M_{cs}}{0,97 a^3} = \frac{1,027 M_{cs}}{a^3} \leq \tau_{\text{meg}} \quad (44)$$



306. ábra.

Maximális a feszültség az oldalak találkozási pontjában.

Ugyancsak egyenlőoldali nyolcszögre, ha az oldal a :

$$\tau_{\max} = \frac{0,378 M_{cs}}{a^3}$$

9. A 306. ábrában feltüntetett trapéz és kettős trapéz esetében:

$$D = \frac{1}{12} \frac{h(a_1^4 - a_2^4)}{a_1 - a_2} - 0,105(a_1^4 + a_2^4); \quad \xi = a_1; \text{ tehát } W_1 = \frac{D}{a_1}$$

és így:
$$\tau_{\max} = \frac{M_{cs} \cdot a_1}{D} = a_1 G \cdot \vartheta \quad (45)$$

A maximális feszültség a hosszabbik oldalon lép fel a_1 közelében.

Két szimmetrikusan összetett trapéznál pedig:

$$D = \frac{1}{12} \frac{h(a_1^4 - a_2^4)}{a_1 - a_2} - 0,21a_2^4; \quad \xi = a_1; \quad W_1 = \frac{D}{a_1} \text{ és így:}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{cs} a_1}{D} = a_1 G \cdot \vartheta \quad (45 a)$$

Legnagyobb feszültség a hosszabbik oldal közepén lép fel.

10. A 307. ábrában látható: $\perp$, $\perp$, $\perp$, $\square$, $\square$, $\square$ tartókra:

$$D = \frac{1}{3} l s^3; \quad \xi = s, \text{ tehát } W_1 = \frac{1}{3} l s^2 \text{ és így:}$$

$$\tau_{\max} = \frac{3 M_{cs}}{l s^2} \leq \tau_{\text{meg}}$$

Szögletvas-szelvényre $l_t = l_1 + l_2 - 1,6 s$

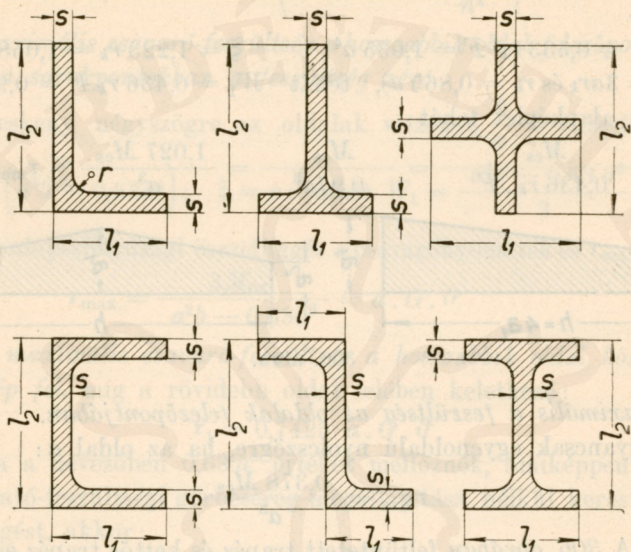
» $l_t = l_1 + l_2 - 0,9 s$

» $l_t = l_1 + l_2 - 0,15 s$

» $l_t = 2l_1 + l_2 - 2,6 s$

» $l_t = 2l_1 + l_2 - 1,2 s$

A legnagyobb csavaró-feszültség a határoló vonalak mentén lép fel. A lekerekítéseknél a τ értéke 16⁰/₁₀-al nagyobb. Ugyanis ott,



lekerekítéseknél $r = s$

307. ábra.

ahol a csúsztató-feszültségi görbesereg közötti csőlamella vastagsága a legkisebb, ott keletkezik mindig a maximális csavaró-feszültség.

11. Ha a négyszögekből összeállított és lekerekített szelvény-nél a keskeny négyszögek változó vastagságúak, ugyanis az öv vas-tagabb, mint a gerinc, akkor a 308. ábrában beírt méretek mellett:

$$D = \frac{1}{3} (l_1 s_f^3 + l_2 s^3)$$

$$\xi = s_f$$

tehát :

$$W_1 = \frac{1}{3} (l_1 s_f^2 + l_2 \frac{s^3}{s_f})$$

és

$$\tau_{\max} = \frac{M_{cs}}{W_1} = \frac{3 M_{cs}}{l_1 s_f^2 + l_2 \frac{s^3}{s_f}} = s_f \cdot G \cdot \vartheta \quad (46)$$

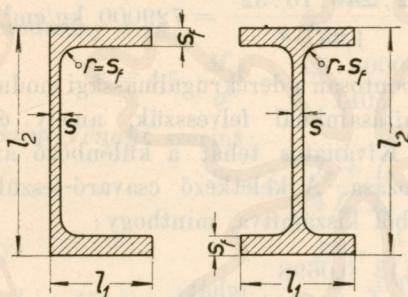
A csavarási modulusz értékében az egyes szelvényekre:

$$\begin{aligned} \square \text{ és } \sqsubset \text{ szelvényre: } l_1 &= 2l_1 - 1,0 s_f; \quad l_2 = l_2 - 1,6 s_f \\ \text{II} \text{ » } l_1 &= 2l_1 - 1,26 s_f; \quad l_2 = l_2 - 1,67 s_f + 1,76 s \end{aligned}$$

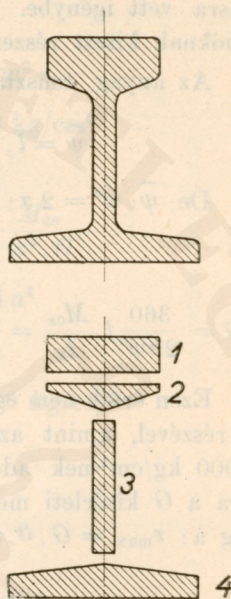
A csavaró-feszültség az övek mentén lesz a legnagyobb.

12. A 309. ábrában bemutatott sínszelvényre a csavarónyomaték és csúszató-feszültség összefüggését azon megfontolásból vezethetjük le, hogy a négy különálló részre megkeressük az átvitt csavaró-nyomatékokat a szelvényrész különféle alakja szerint és ezeket algebrailag összegezzük. Hasonló módon járhatunk el minden olyan szelvényre, melyek az ismertetett rész-szelvényekből tehetők össze.

Moore és Kommers a változó csavarásnál előálló törésből azt igazolták, hogy



308. ábra.



309. ábra.

a csavaró-munkaszülárdság a hajlításnak megfelelő munkaszülárdság 0,52 részével egyenlő, ami a Mohr-féle feszültségi elméletet igazolja.

Ha valamely körszelvényű csavarásra és hajlításra igénybevett tartónál, a szelvény kis félköralakú kivájással (rovatékkal) van ellátva, úgy a csavaró-feszültség e helyen a: $\tau_{\max} = \frac{M_{cs}}{W_p}$ értékének kétszeresére is emelkedhetik; ha pedig a bevágás éles, úgy a körszelvényű tartó gyors törésére is vezethet.

Az összeállított képletsorozatnak jó hasznát vehetjük a csavaró-kísérleteknél is, melyeket az Amsler-féle géppel végzünk. Ugyanis a csavaró-nyomatékból, vagy a specifikus elcsavarodási szöget, avagy ha ezt is mérjük, a csúszató rugalmassági moduluszt állapíthatjuk meg. Az elcsavarodás szögéből és a csúszató rugalmassági tényezőből pedig, a csavaró-feszültséget lehet a képletekkel kiszámítani.

A csavarásnál ugyanis az élszögváltozás nagyságát, minthogy az eredetileg egyenesvonalú alkotók csavarvonalat írnak le, azon szögnek megfelelő ív fogja megadni, mellyel az egységnyi távolban levő két szelvény egymáshoz képest elfordul.

Például: *Duleau* valamely 1,98 cm átmérőjű vasrudat egyik végén befogott és a másik végén 32 cm-es karon 10 kg-os súllyal elcsavarásra vett igénybe. Az elcsavarás szögét a 2,4 m hosszú, deformációknak kitett részen 4° -nak találta.

Az anyag csúsztató rugalmassági modulusza kiszámítható a:

$$\widehat{\psi} = l \cdot \vartheta = l \frac{M_{cs}}{G \cdot D} \quad \text{képletből.}$$

De $\widehat{\psi} : \psi^\circ = 2\pi : 360$ és így, mivel $D = I_p$:

$$\psi^\circ = \frac{360}{2\pi} l \frac{M_{cs}}{G \cdot I_p}$$

$$\text{és } G = \frac{360}{2\pi\psi^\circ} l \frac{M_{cs}}{I_p} = \frac{360}{2\pi \cdot 4} \frac{32 \cdot 240 \cdot 10 \cdot 32}{1,98^4 \cdot \pi} = 729000 \text{ kg/cm}^2$$

Ezen érték nem egyezik pontosan a derékrugalmassági modulusz 0,4 részével, amint azt számításainknál felvesszük, amely érték 800000 kg/cm²-nek adódnék. Kíváncsú tehát a különböző anyagokra a G kísérleti meghatározása. A keletkező csavaró-feszültség pedig a: $\tau_{\max} = G \cdot \vartheta \cdot r$ értékből kiszámítva, minthogy:

$$\psi = 0,0698 \text{ és } \vartheta = \frac{0,0698}{240}, \text{ tehát:}$$

$$\tau_{\max} = 729000 \frac{0,0698}{240} \cdot 0,99 = 210 \text{ kg/cm}^2$$

A következő példák megvilágítják, hogy a különböző formulákból számított csavaró-feszültség milyen mértékben tér el. Egyszerű négyzet-alakú szelvényre a *De Saint-Venant*-, *Bach*- és *Weber-képletek* alig adnak lényeges eltérést.

Pl. Valamely négyzet-keresztzelvényű folytvas-rúd 80000 kgcm csavarónyomatékot visz át és azt kívánjuk, hogy a specifikus elcsavarodási szög 1 m hosszra ne legyen nagyobb $1/4^\circ$ -nál. Keressük a csavaró-feszültséget.

$$\text{Legyen } G = 830000 \text{ kg/cm}^2 \text{ és } \vartheta^\circ = \frac{1^\circ}{400}$$

$$\vartheta = \frac{180}{\pi} \frac{M_{cs}}{G \cdot D}, \text{ ahol } D = 0,1404 a^4, \text{ a } \textit{Weber-képletből.}$$

Kifejtve:
$$D = \frac{180 \cdot M_{cs}}{\pi \cdot G \cdot \vartheta} = \frac{180 \cdot 80000}{\pi \cdot 830000 \cdot \frac{1}{400}} = 2220 \text{ cm}^4$$

tehát: $2220 = 0,1404 a^4$

ahonnan:
$$a = \sqrt[4]{\frac{D}{0,1404}} = 11,2 \text{ cm.}$$

Weber szerint: $\xi = 0,6753 a$

tehát: $W_1 = 0,208 a^3 = 291,2 \text{ cm}^3$

és
$$\tau_{\max} = \frac{M_{cs}}{W_1} = \frac{80000}{291,2} = 274 \text{ kg/cm}^2$$

Bach formulája szerint:

$$\vartheta = 3,56 \cdot M_{cs} \frac{2a^2}{a^6} \frac{1}{G} = 7,12 \cdot \frac{M_{cs}}{a^4 \cdot G}$$

tehát:
$$D = \frac{a^4}{7,12} = 0,1404 a^4$$

Az eredmény τ -ra:

$$\tau = 4,5 \cdot \frac{M_{cs}}{a^3} = \frac{4,5 \cdot 80000}{1405} = 256 \text{ kg/cm}^2$$

De Saint-Venant szerint:

$$\vartheta = \xi \cdot \frac{I_z + I_y}{4 I_z \cdot I_y} \cdot \frac{M_{cs}}{G}$$

és így:
$$D = \frac{4 I_z \cdot I_y}{\xi (I_z + I_y)}$$

I_z és I_y a főtengelyekhez tartozó inercia-nyomaték, ahol $\xi = 1,2$

tehát:
$$D = \frac{4 \left(\frac{a^4}{12} \cdot \frac{a^4}{12} \right)}{1,2 \cdot \frac{a^4}{6}} = 0,1399 a^4$$

és a csavaró-feszültség Herrmann táblázata szerint:

$$\tau_{\max} = 4,813 \cdot \frac{M_{cs}}{a^3} = 274 \text{ kg/cm}^2$$

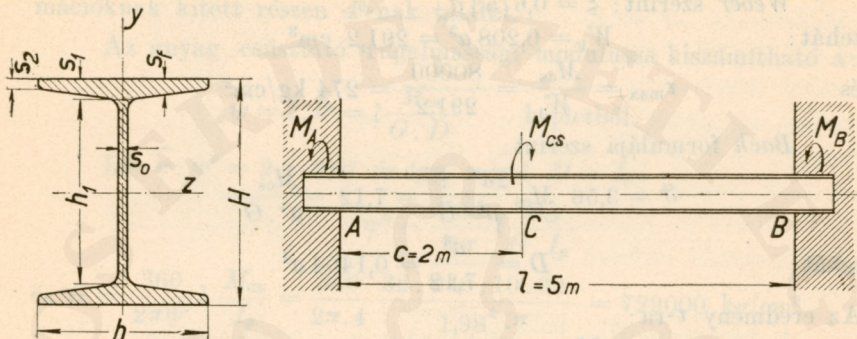
Eltérő eredményeket kapunk azonban, ha keskeny négyszögekre, avagy hengerelt vasprofilokra végeznők a számítást. Pl. a 310. ábrán feltüntetett 40. számú differdingeni $\perp$ tartó 5 m távolban két végén be van fogva és a baloldali alátámasztástól számítva 2 m távolban $M_{cs} = 150000 \text{ kgcm}$ csavarónyomatékkal van megterhelve. Keressük a maximális csavaró-feszültséget és specifikus elcsavarodási szöget a különböző képletekkel.

A falnál keletkező csavarónyomatékok:

$$M_A = M_{cs} \frac{l - c}{l} = \frac{150000 \cdot 3}{5} = 90000 \text{ kgcm}$$

$$M_B = M_{cs} \frac{c}{l} = \frac{150000 \cdot 2}{5} = 60000 \text{ kgcm}$$

Számítsuk ki a falnál keletkező csavaró-feszültséget *Weber* képleteivel oly módon, hogy a profilnál nemcsak a lekerekítéseket,



310. ábra.

hanem az övek lejtését is figyelembe vesszük. A két övet külön vesszük figyelembe a (45) sz. egyenlet alapján és a gerincet a (41) egyenlettel, s meghatározzuk elsősorban a csavarási moduluszokat.

Az övre: $s_1 = 3,1 \text{ cm}$, $s_2 = 1,82 \text{ cm}$, $h = 30 \text{ cm}$

$$D_1 = \frac{1}{12} \frac{h(s_1^4 - s_2^4)}{s_1 - s_2} = 0,21 s_2^4 = \frac{1}{12} \frac{30(3,1^4 - 1,82^4)}{3,1 - 1,82} = 0,21 \cdot 3,1^4 = 145 \text{ cm}^4 \quad \text{és} \quad 2D_1 = 290 \text{ cm}^4$$

A gerince: $h_1 = 33,8 \text{ cm}$, $s_0 = 1,55 \text{ cm}$ és $n = \frac{h_1}{s_0} > 4$

$$D_2 = \frac{1}{3} (s_0^3 h_1 - 0,63 s_0^4) = 40,75 \text{ cm}^4$$

Tehát: $D = 2D_1 + D_2 = 290 + 40,75 = 330,75 \text{ cm}^4$

és ha $\xi_{\max} = s_1$, akkor:

$$W_1 = \frac{D}{\xi_{\max}} = \frac{330,75}{3,1} = 107 \text{ cm}^3$$

Tehát a tartó A és C közötti részében:

$$\tau_{\max} = \frac{M_A}{107} = \frac{90000}{107} = 841 \text{ kg/cm}^2$$

A $c = 2 \text{ m}$ hosszú rész elcsavarodási szöge:

$$\psi^0 = 200 \vartheta^0 = \frac{180}{\pi} \frac{M_A \cdot c}{G \cdot D} = \frac{180}{\pi} \frac{90000 \cdot 200}{830000 \cdot 330,75} = 3,72^0$$

Számítsuk ki a tartó csavaró-feszültségét *Weber* egyenletéből az esetben, ha az öveket közepes méretű derékszögű négyszögeknek tekintjük (46) képletből:

$$\tau_{\max} = \frac{3M_A}{l_{t1}s_f^2 + l_{t2}\frac{s_0^3}{s_f}} = s_f \frac{3M_A}{l_{t1}s_f^3 + l_{t2}s_0^3}$$

de: $s_f = \frac{3,1 + 1,82}{2} = 2,46 \text{ cm}$ és $s_0 = 1,55 \text{ cm}$, továbbá:

$l_{t1} = 2,30 - 1,26 \cdot 2,46 = 56,9 \text{ cm}$ és

$l_{t2} = 40 - 1,67 \cdot 2,46 + 1,76 \cdot 1,55 = 38,62 \text{ cm}$

ezek alapján tehát:

$$\tau_{\max} = \frac{3 \cdot 90000 \cdot 2,46}{56,9 \cdot 2,46^3 + 38,62 \cdot 1,55^3} = 606 \text{ kg/cm}^2$$

A specifikus elcsavarodási szög, valamint az *AC* részre az elcsavarodás fokokban: $\vartheta = \frac{\tau_{\max}}{G \cdot s_f}$

$$\text{és} \quad \psi^0 = \frac{200 \cdot \vartheta \cdot 180}{\pi} = \frac{200 \cdot 180 \cdot 606}{\pi \cdot 850000 \cdot 2,46} = 3,4^0$$

Prandtl és *Föppl* egyenletei alapján:

$$D = \frac{1}{3} \mathcal{L}hs^3 = \frac{1}{3} (30 \cdot 2,46^3 + 2 \cdot 35,08 \cdot 1,55^3) = 341,3 \text{ cm}^4$$

Ezen érték kiigazítást szenvedne, ha η korrekció-tényezőt ismernők.

$$\tau_{\max} = \frac{90000 \cdot 2,46}{341,3} = 649 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{és} \quad \psi^0 = l\vartheta^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{90000 \cdot 200}{830000 \cdot 341,3} = 3,75^0$$

Bach megközelítő eljárásával: $\tau_{\max} = \frac{M_{cs}}{W_e}$

$$\text{ahol: } W_e = \frac{2}{9} \left[s_0^2 H + 2s_f^2 (h - s_0) \right]$$

$$W_e = \frac{2}{9} \left[1,55^2 \cdot 40 + 2 \cdot 2,46^2 (30 - 1,55) \right] = 97,81 \text{ cm}^3$$

$$\text{és} \quad \tau_{\max} = \frac{90000}{97,8} = 919 \text{ kg/cm}^2$$

Használjuk fel az elcsavarodási szög megállapítására *De Saint-Venant* egyenletét, mely szerint: $D = \frac{F^4}{40 I_p}$. A terület *Hütte* sze-

rint $F = 203,6 \text{ cm}^2$, a poláris tehetetlenségi nyomaték pedig:

$$I_p = I_y + I_z = 9721 + 57834 = 67555 \text{ cm}^4$$

tehát:
$$D = \frac{203,6^4}{40 \cdot 67555} = 643 \text{ cm}^4$$

és
$$\psi^0 = \frac{180}{\pi} \frac{90000 \cdot 200}{830000 \cdot 643} = 2^\circ$$

Amint az eredmények összehasonlításából látjuk, profilvasakra már lényeges eltérések mutatkoznak. *Megbízható pontos eredményt úgy a csavaró-feszültségre, mint az elcsavarodási szögére Weber (45) és (46) szám alatti képletei szolgáltatnak*, amint azt a kísérletek is igazolják. Ha a megengedett csavaró-feszültség folytvásra 800—850 kg/cm², úgy *Bach* eljárása mellett a terhelésnek megfelelőleg nagyobb méretű szelvényt, míg *Föppl* eljárásával kisebb szelvényt kellene választani. Kedvezőbb eredményt kapnánk *Föppl* egyenletéből és *Weber* közelítő módszerével — ha az öv közepes vastagsága helyett a legnagyobb vastagságot vennők alapul — ami igazolja a pontos elmélet azon megállapítását, *hogy a ferde lejtésű övben a maximális csavaró-feszültség az övek mentén ugyan, de a gerinc közelében lesz a legnagyobb.*

56. §. Csavaros rúgók teherbírása és alakváltozása.

A gyakorlatban előforduló, kis emelkedésű csavar alakjával bíró rúgóknál elégséges, ha a hajlítás és a nyírás okozta feszültségek figyelmen kívül való hagyásával csak a csavaró-feszültséget vesszük tekintetbe. Ezen megszorítással nyerjük a következő vonatkozásokat:

A) *Körszelvényű hengeres rúgó (311. ábra, a). A rúgó alul és felül egész körön felfekszik és ezért az eredő iránya, melyet a kör kerületén egyenletesen elosztottnak tekintünk, összevág a rúgó középvonalával. Bármelyik keresztmetszetben főleg csavaró-feszültség ébred, amely az ábrán feltüntetett jelölésekkel a következőképpen fejezhető ki:*

$$\tau = \frac{Pr}{2 \frac{d^3 \pi}{32}} = \frac{16 Pr}{\pi d^3}$$

vagy ebből:

$$Pr = \frac{d^3 \pi}{16} \tau$$

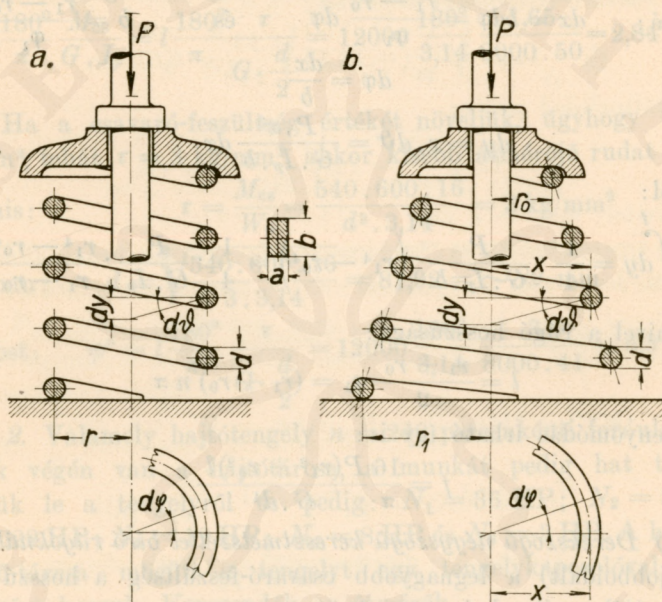
A felső rúgótányér lesüllyedését, vagyis a rúgó f összenyomódását P teher alatt, az alábbiakban számítjuk ki. Ha két szomszédos keresztmetszet középpontja $rd\varphi$ ívbéli távolságban van egy-

mástól, az egyenes tartóra vonatkozó képletek alkalmazásával, e két keresztmetszet viszonylagos elcsavarodása:

$$d\vartheta = \frac{M_{cs}}{G \cdot I_p} r \cdot d\varphi$$

A rúgó görbültsége miatt az elcsavarodás egyúttal a két keresztmetszet viszonylagos eltolódásával jár, melynek nagysága, a rúgó tengelyén mérve:

$$dy = r \cdot d\vartheta = \frac{M_{cs}}{G \cdot I_p} r^2 \cdot d\varphi$$



311. ábra.

Az integrálás ez esetben azonnal elvégezhető és mivel φ kezdő értéke zérus, végső értéke pedig $2\pi n$, ha n a csavarulatok száma, úgy az összenyomódás a tengely irányában:

$$f = \frac{Pr^3}{G \cdot I_p} 2\pi n = \frac{64r^3n}{d^4} \cdot \frac{P}{G} = \frac{4\pi nr^2}{d} \frac{\tau}{G}$$

B) Kórszelvényű kúpos rúgó (311. ábra, b). A maximális feszültség az alsó csavarulat végszelvényében van és nagysága:

$$\tau = \frac{16}{\pi} \frac{P \cdot r_1}{d^3} \text{ amiből: } P = \frac{d^3 \pi}{16r_1} \tau$$

Az alakváltozásra vonatkozó alapegyenletek ugyanazok, mint hengeres rúgónál, de integrálásuk végett bizonyos átalakítások szükségesek. Ugyanis most a tetszőleges keresztmetszetről:

$$d\vartheta = \frac{Px^2}{G \cdot I_p} d\varphi$$

Az összefüggés x és φ között lineáris és pedig, ha:

$$x = a + b\varphi$$

úgy:

$$r_0 = a$$

$$r_1 - r_0 = b\varphi_1 = b2\pi n$$

Továbbá: $dx = b d\varphi = \frac{r_1 - r_0}{\varphi_1} d\varphi$ és $b = \frac{r_1 - r_0}{\varphi_1}$

vagy: $d\varphi = \frac{dx}{b}$

Ezzel: $dy = x \cdot d\vartheta = \frac{P \cdot x^3}{G \cdot I_p \cdot b} dx$

és ebből:

$$f = \int_0^l dy = \frac{1}{4} \cdot \frac{P}{G \cdot I_p \cdot b} \cdot (r_1^4 - r_0^4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{P}{G \cdot I_p} \cdot \frac{r_1^4 - r_0^4}{r_1 - r_0} \varphi_1$$

vagy, mivel a rúgó hosszúsága:

$$l = \frac{r_1 + r_0}{2} \varphi_1 = (r_1 + r_0) n \pi$$

az összenyomódás írható így is:

$$f = \frac{16 P (r_1^2 + r_0^2) l}{\pi G \cdot d^4}$$

C) Derékszögű négyszögű keresztmetszettel bíró rúgónál (311. ábrán jobboldalt) a legnagyobb csavaró-feszültség a hosszú oldal felezőpontjában ébred és nagysága:

$$\tau = \frac{9 Pr}{2 a^2 b}$$

ahol a jelenti a rövidebb, b pedig a hosszabb oldal hosszát. Az összenyomódás képletében I_p helyébe a Herrmann-táblázat (344. oldal) szerinti: $D = \alpha a^4$ értéket kell behelyettesíteni.

Példák a VIII. fejezethez.

1. Valamely körszelvényű kovácsvasrúd átmérője $d = 100$ mm, hossza $l = 12$ m. A rudat a végén $P = 540$ kg erő $R = 600$ mm karon működve csavarásra veszi igénybe. Kiszámítandó a keletkező feszültség és az elcsavarodási szög.

A kerületi feszültség az 55. § (12) képletével:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{cs}}{W_p} = \frac{540 \cdot 600 \cdot 16}{100^3 \cdot 3,14} = 1,65 \text{ kg/mm}^2$$

Az $l = 12$ m hosszú rúd elcsavarodása pedig az 55. § (16) képlete szerint:

$$\psi^\circ = l \frac{180^\circ}{\pi} \frac{M_{cs}}{DG}$$

ahol körszelvényénél:

$$D = I_p = \frac{d^4 \pi}{32}$$

a csúsztató rugalmassági modulusz pedig $G = 8000 \text{ kg/mm}^2$, tehát:

$$\psi^\circ = l \frac{180^\circ}{\pi} \frac{M_{cs}}{G \cdot I_p} = l \frac{180^\circ}{\pi} \frac{\tau}{G \cdot \frac{d}{2}} = 12000 \frac{180^\circ}{3,14} \frac{1,65}{8000 \cdot 50} = 2,84^\circ = 2^\circ 50'$$

Ha a csavaró-feszültség értékét növeljük, úgyhogy $\sigma = 3,75 \text{ kg/mm}^2$, tehát $\tau = 3 \text{ kg/mm}^2$, akkor kisebb átmérőjű rudat kapunk, ugyanis:

$$\tau = \frac{M_{cs}}{W_p} = \frac{540 \cdot 600 \cdot 16}{d^3 \cdot 3,14} = 3 \text{ kg/mm}^2$$

ahonnan:

$$d = \sqrt[3]{\frac{540 \cdot 600 \cdot 16}{3 \cdot 3,14}} = 81,92 = \sim 82 \text{ mm}$$

és most:

$$\psi^\circ = l \frac{180^\circ}{\pi} \frac{\tau}{G \cdot \frac{d}{2}} = 12000 \frac{180^\circ}{3,14} \frac{3}{8000 \cdot 41} = 6,3^\circ = 6^\circ 18'$$

2. Valamely hajtótengely $n = 240$ percenkénti fordulattal jár. Egyik végén van a hajtótárcsa, a munkát pedig hat tárcsával vesszük le a tengelyről és pedig: $N_1 = 36 \text{ HP}$; $N_2 = 30 \text{ HP}$; $N_3 = 22 \text{ HP}$; $N_4 = 12 \text{ HP}$; $N_5 = 8 \text{ HP}$ és $N_6 = 3 \text{ HP}$. A harmadik levevő-tárcsa mögött a tengelyt egy tengelykapcsolóval kisebb átmérőre hozzuk. Keresendők az átmérők.

A hajtótárcsa mögött az egész munkát át kell vinnie a tengelynek, tehát: $N = 36 + 30 + 22 + 12 + 8 + 3 = 111 \text{ HP}$.

A folyttvas transzmisszió-tengelyeknél, tekintettel az egyidejűleg fellépő hajlító-nyomatékokra (önsúly, tárcsák súlya, szíjfeszültségek), az alábbi képletben a csavaró-feszültséget $\tau = 120 \text{ kg/cm}^2$ -re választjuk, tehát:

$$M_{cs}^{\text{kgcm}} = 71620 \frac{N}{n} = \frac{d^3 \pi}{16} 120$$

ahonnan:

$$d^3 = \frac{16 \cdot 71620}{3,14 \cdot 120} \frac{N}{n} = 3000 \frac{N}{n}$$

és

$$d = \sqrt[3]{3000 \frac{N}{n}} = 14,42 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$$

Az értékeket behelyettesítve:

$$d_1 = 14,42 \sqrt[3]{\frac{111}{240}} = 11,22 \text{ cm.}$$

Az alakváltozásból folyólag pedig az 55. § (18) képlettel:

$$d_1 = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} = 12 \sqrt[4]{\frac{111}{240}} = 9,9 \text{ cm.}$$

Kivitel: $d_1 = \sim 12 \text{ cm.}$

A tengelykapcsoló mögött levő tengely által átadandó munka:

$$N' = N_4 + N_5 + N_6 = 12 + 8 + 3 = 23 \text{ HP}$$

tehát a csavaró-szilárdsági képlettel:

$$d_2 = 14,42 \sqrt[3]{\frac{N'}{n}} = 14,42 \sqrt[3]{\frac{23}{240}} = 6,63 \text{ cm}$$

az alakváltozásból pedig:

$$d_2 = 12 \sqrt[4]{\frac{N'}{n}} = 12 \sqrt[4]{\frac{23}{240}} = 6,7 \text{ cm.}$$

Kivitel: $d_2 = \sim 7 \text{ cm.}$

3. Üreges öntöttvas turbina-tengely mérete számítandó, ha az átvitt lóerőszám $N = 40 \text{ HP}$ és a percenkénti fordulatszám $n = 60$. A belső és külső átmérő viszonya: $\frac{d_b}{d_k} = 0,7$ és $\sigma_m = 250 \text{ kg/cm}^2$.

$$M_{cs}^{\text{igem}} = 71620 \frac{N}{n} = W_p \cdot 0,8 \sigma_m = W_p \cdot 0,8 \cdot 250$$

$$\text{de: } W_p = \left(d_k^3 - d_b^3 \right) \frac{\pi}{16} = d_k^3 \left(1 - \frac{d_b^3}{d_k^3} \right) \frac{\pi}{16}$$

$$\text{tehát: } 71620 \frac{N}{n} = d_k^3 \left(1 - 0,7^3 \right) \frac{\pi}{16} \cdot 200$$

$$\text{ahonnan: } d_k^3 \left(1 - 0,7^3 \right) = \frac{71620 \cdot 40 \cdot 16}{60 \cdot 3,14 \cdot 200} = 1216$$

$$d_k^3 = \frac{1216}{1 - 0,343} = \frac{1216}{0,657} = 1850$$

$$\text{és } d_k = \sqrt[3]{1850} = 12,3 \text{ cm}$$

$$d_b = 0,7 \cdot 12,3 = 8,6 \text{ cm}$$

4. Valamely öntöttvas-cső hossza $l = 5 \text{ m}$. A külső átmérője $d_k = 50 \text{ mm}$, belső átmérője $d_b = 40 \text{ mm}$. A cső egyik végén be van fogva, másik végén P erővel $r = 500 \text{ mm}$ -es karon csavarásra van igénybevéve. Milyen nagy lehet ezen P erő, ha a csövet a rugalmassági határig veszi igénybe és milyen nagy az elcsavarodási szög?

A csavarónyomaték:

$$M_{cs} = P \cdot r = \frac{(d_k^3 - d_b^3) \pi}{16} 0,8 \sigma_p$$

ahonnan:
$$P = \frac{(d_k^3 - d_b^3) \pi \cdot 0,8 \sigma_p}{16r} \quad \text{és} \quad \sigma_p = \sim H$$

Az öntöttvasra a rugalmasság határa húzásnál: $\sigma_p = 7,5 \text{ kg/mm}^2$,
tehát: $\tau = 0,8 \sigma_p = 0,8 \cdot 7,5 = 6 \text{ kg/mm}^2$

és így:
$$P = \frac{(50^3 - 40^3) 3,14 \cdot 6}{16 \cdot 500} = 144 \text{ kg.}$$

Az elcsavarodási szög pedig az 55. § (16) képletével:

$$\psi^\circ = l \frac{180^\circ}{\pi} \frac{M_{cs}}{GD} = l \frac{180^\circ}{\pi} \frac{M_{cs}}{G \cdot I_p} = l \frac{180^\circ}{\pi} \frac{\tau}{G \cdot \frac{d_k}{2}}$$

ahol $G = 4000 \text{ kg/mm}^2$, tehát:

$$\psi^\circ = \frac{5000 \cdot 180^\circ \cdot 6}{3,14 \cdot 4000 \cdot 25} = 17,2^\circ = 17^\circ 12'$$

5. Valamely négyzet-szelvényű, mindkét végén befogott tölgyfa-gerenda a közepén, a hossz tengelyére merőlegesen álló $r = 728 \text{ mm}$ -es karon $P = 1000 \text{ kg}$ terhet hord. A befogási távol $l = 4 \text{ m}$ és $\tau_{cs} = 8 \text{ kg/cm}^2$, a megengedett csavaró-feszültség. Milyen legyen a négyzetszelvény oldala?

Az $\frac{l}{2}$ hosszúságú gerendarészre:

$$M_{cs} = \frac{Pr}{2} = \frac{1000 \cdot 72,8}{2} = 36400 \text{ kgcm}$$

csavarónyomaték által van igénybevéve.

A Herrmann-féle képlettel (55. § 19):

$$\tau_{\max} = 4,81 \frac{M_{cs}}{a^3} = \tau_{cs}; \text{ a csavaró-feszültség az oldalak felezőpontjaiban, }$$

ahonnan:
$$a = \sqrt[3]{\frac{4,81 M_{cs}}{\tau_{cs}}}$$

és az értékeket behelyettesítve:

$$a = \sqrt[3]{\frac{4,81 \cdot 36400}{8}} = \sqrt[3]{21885} = \sim 28 \text{ cm}$$

Az elcsavarodási szög pedig:

$$\psi^\circ = \frac{l}{2} \frac{180^\circ}{\pi} \frac{M_{cs}}{G \cdot D}$$

ahol $G = 40000 \text{ kg/cm}^2$ és *Herrmann* szerint:

$$D = \alpha a^4$$

ahol $\alpha = 0,141$ a táblázatból, tehát:

$$D = 0,141 \cdot 28^4 = 0,141 \cdot 614656 = 86666 \text{ cm}^4$$

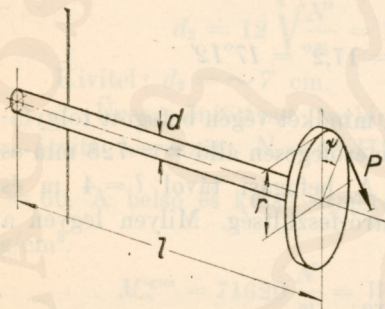
és így: $\psi^\circ = 200 \frac{180^\circ}{3,14} \frac{36400}{40000 \cdot 86666} = 0,12^\circ = 7'12''$

Ha *Bach* képletével (55. § 27) számolunk, akkor:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{cs}}{W_p} = \frac{M_{cs}}{\alpha W_e} = \tau_{cs}$$

ahol négyzetnél $\alpha = \frac{4}{3}$, tehát: $\frac{36400}{\frac{4}{3} \frac{a^3}{6}} = 8$

ahonnan: $a = \sqrt[3]{\frac{36400 \cdot 9}{2 \cdot 8}} = \sqrt[3]{20475} = \sim 27,4 \text{ cm.}$



312. ábra.

6. Valamely körkeresztmetű egyenes torziós rúgó (312. ábra) egyik végén erősen be van fogva, másik végén r sugarú kör-alakú tárcsa kerületén működő: $P = 125 \text{ kg}$ erővel csavarásra van igénybevéve. A rúgó hossza $l = 1000 \text{ mm}$, a kívánt elcsavarodásra: $f = 90 \text{ mm}$. Legyen továbbá a rúgó anyaga edzett és megerezsett acél, amelyre $E = 30000$

kg/mm^2 . Keresendő a rúgó átmérője d , a tárcsa sugara r és az elcsavarodási szög. A rúgó igénybevétele ugyanaz, mint az l hosszúságú, csavarásra igénybevett tengelyé.

$$M_{cs} = Pr = \frac{d^3 \pi}{16} \tau \quad (1)$$

amely egyenletben még két ismeretlen van, de:

$$\psi = \frac{l M_{cs}}{G \cdot D} = \frac{l M_{cs}}{G \cdot I_p} = \frac{32 l \cdot P \cdot r}{G d^4 \pi}$$

ahol:

$$f = r \psi$$

tehát:

$$f = \frac{32 l \cdot P \cdot r^2}{G \cdot d^4 \pi}$$

Az (1) és (2) egyenletekből kifejezhető r és d :

$$\frac{d^3 \pi r}{16 P} = \sqrt{\frac{G \cdot d^4 \pi f}{32 l P}}$$

$$\frac{d\pi\tau}{16P} = \sqrt{\frac{G\pi f}{32lP}}$$

$$d = \frac{16P}{\pi\tau} \sqrt{\frac{G \cdot \pi \cdot f}{32 \cdot l \cdot P}} = \frac{4}{\tau} \sqrt{\frac{P \cdot G \cdot f}{2\pi l}}$$

de $G = 0,4E = 12000 \text{ kg/mm}^2$ és $\tau = 32 \text{ kg/mm}^2$, tehát:

$$d = \frac{4}{32} \sqrt{\frac{125 \cdot 12000 \cdot 90}{2 \cdot 3,14 \cdot 1000}} = 18,3 \text{ mm}$$

$$\text{és } r = \frac{d^3\pi\tau}{16P} = \frac{18,3^3 \cdot 3,14 \cdot 32}{16 \cdot 125} = \sim 308 \text{ mm.}$$

Az elcsavarodás mértéke pedig:

$$\widehat{\psi} = \frac{f}{r} = \frac{90}{308} = 0,292$$

$$\text{és így: } \widehat{\psi}^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \psi = \frac{180^\circ}{3,14} 0,292 = 16,7^\circ = 16^\circ 42'$$

IX. FEJEZET.

57. §. Az alakváltozás munkája.

A testre ható külső erők munkát végeznek a deformáció alatt, ezen munkák algebrai összegét a külső erők munkájának nevezzük. A külső erők munkáján kívül beszélhetünk még a belső erőknek, vagyis a feszítőerőknek munkájáról is. Az egész test alakváltozása miatt a térfogatelem egyrészt merev testszerű elmozdulásban részesül, másrészt szorosan vett alakváltozást szenved; mindkét változásnak megfelelően a térfogatelem felszínének pontjai elmozdulnak. Azt a munkát, amelyet a feszítőerők a merev testszerű elmozdulás alatt végeznek, a térfogatelem elmozdulási munkájának, azt a munkát pedig, amelyet a feszítőerők a térfogatelem szorosan vett alakváltozása következtében végeznek, a térfogatelem alakváltozási munkájának nevezzük. Ha a testet térfogatelemek összességének fogjuk fel és ha meghatározzuk minden egyes térfogatelem alakváltozási munkáját, akkor ezen elemi munkák összege megadja a test alakváltozási munkáját.

Amikor az alakváltozást előidéző külső erők nem mindjárt a végső értékükkel kezdenek hatni, hanem fokozatosan növekednek zérótól kezdve egészen a végső értékig, akkor *sztatikai igénybevételről* beszélünk; ezzel szemben *dinamikai igénybevételről* beszélünk, ha a külső erők kezdettől fogva a végső nagyságukkal hatnak és így lökéseket, rezgéseket, belső mozgásokat idéznek elő.

58. §. A derékszilárdság alakváltozási munkája.

Valamely l hosszúságú, F keresztmetszetű rúd egyik végén meg van erősítve, a másik végén P húzóerő hat rá. Ezen erő fokozatosan növekedik zérótól bizonyos P_1 értékig, minek folytán a rúd hossza is megnövekedik. Az erő egy bizonyos közbenső értékének x

meghosszabbodás felel meg, a viszonylagos megnyúlás $\varepsilon_x = \frac{x}{l}$; míg az erő határértékéhez P_1 -hez λ meghosszabbodás tartozik, s így $\varepsilon = \frac{\lambda}{l}$ (313. ábra).

Mialatt x értéke dx -el nő, azalatt a P erő dA munkát végez, amely munka:

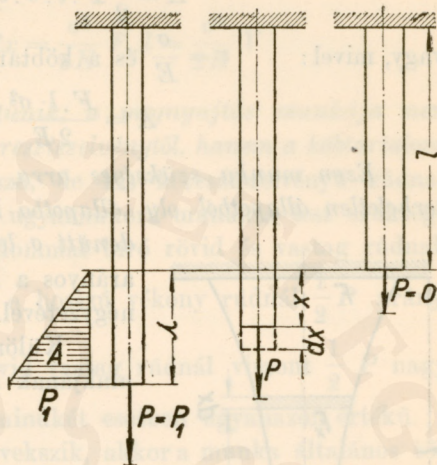
$$dA = P \cdot dx \quad (1)$$

De: $P = F \cdot \sigma_x$ (s egyúttal $P_1 = F\sigma$) és $x = l\varepsilon_x$, tehát $dx = l \cdot d\varepsilon_x$; ennél fogva:

$$dA = F \cdot \sigma_x \cdot l \cdot d\varepsilon_x$$

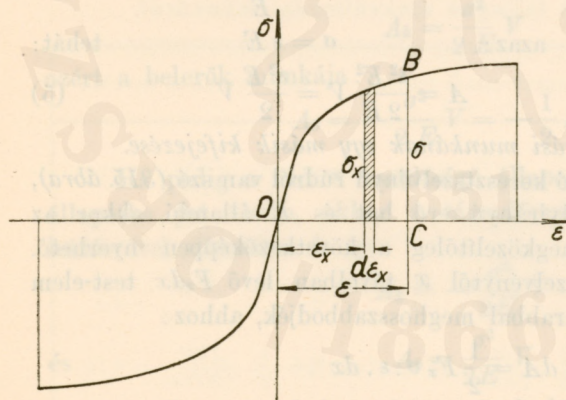
Ebből az összes munka, mialatt a tartó $\lambda = l \cdot \varepsilon$ meghosszabbodást szenved:

$$A = F \cdot l \int_0^{\varepsilon} \sigma_x \cdot d\varepsilon_x \quad (2)$$



313. ábra.

A σ_x és ε_x közötti összefüggés a terjedési vonal segítségével fejezhető ki. Legyen a rúd anyagára a terjedési vonal (húzási diagramm) a 314. ábrán feltüntetett görbe, melynek abszcisszái



314. ábra.

a viszonylagos megnyúlást, ordinátái pedig a hozzátartozó feszültséget jelentik. A besraffozott differenciális terület $\sigma_x \cdot d\varepsilon_x$ ennek integrálja, a görbe által bezárt terület ε -ig. Ennél fogva a λ meghosszabbodáshoz szükséges alakváltozási munka:

$$A = F \cdot l \cdot (OBC)$$

A szilárdságtanban rendszeren csupán az elasztikus alakváltozásokkal dolgoznak és az ennek megfelelő munkát nevezik deformációs munkának és egyben felteszik, hogy a rugalmasság határán belül, a Hooke-törvény szerint, a megnyúlás lineárisan változik a

feszültséggel. Ezen esetben OBC terület megfelel az ε alapú és σ magasságú háromszögnek, tehát:

$$A = \frac{1}{2} F \cdot l \cdot \sigma \cdot \varepsilon = \frac{1}{2} P_1 \cdot \lambda \quad (3)$$

vagy, mivel: $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ és a köbtartalom $V = F \cdot l$

$$A = \frac{F \cdot l \cdot \sigma^2}{2 E} = \frac{\sigma^2}{2 E} V \quad (4)$$

Ezen munka szükséges arra, hogy a V köbtartalmú rudat terheletlen állapotból oly állapotba hozzuk, hogy a feszültség mindenütt σ legyen. Az alakváltozási munka arányos a köbtartalommal és a feszültség négyzetével.

Különösen egyszerű a munka ezen alakjának levezetése:

$$A = \frac{1}{2} P_1 \lambda$$

amely megfelel a 313. ábrán besraffozott háromszög területének.

Ha a σ értéket a viszonylagos megnyúlás segítségével fejezzük ki, akkor:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

azaz:

$$\sigma = \varepsilon E \quad \text{tehát:}$$

$$A = \frac{\varepsilon^2 E^2}{2 E} V = \frac{\varepsilon^2 E}{2} V \quad (5)$$

és ez lesz az alakváltozási munkának egy másik kifejezése.

Ha azonban változó keresztmetsvényű rúdról van szó (315. ábra), amelynél csupán tengelyirányú erő hat és E állandó, akkor az alakváltozási munka megközelítőleg a következőképpen nyerhető.

Hogy a terhelt szelvénytől x távolban levő $F_x dx$ test-elem az x irányban $\varepsilon \cdot dx$ darabbal meghosszabbodjék, ahhoz:

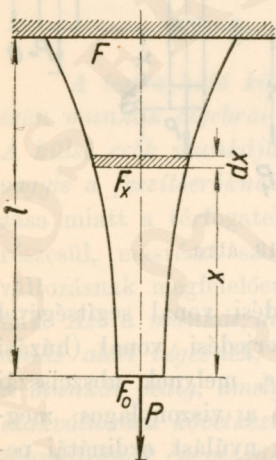
$$dA = \frac{1}{2} F_x \sigma \cdot \varepsilon \cdot dx$$

munka szükséges, vagy mivel $\sigma = \varepsilon E$:

$$dA = \frac{1}{2} F_x \varepsilon^2 \cdot E \cdot dx = \frac{1}{2} F_x \frac{\sigma^2}{E} dx = \frac{\sigma^2}{2 E} F_x dx$$

ahonnan:

$$A = \frac{1}{2 E} \int_0^l \sigma^2 \cdot F_x dx \quad (6)$$



315. ábra.

Megközelítőnek tekintjük ezen eljárást azért, mert a palást pontjaiban a feszültségek érintőlegesek és nem x irányúak. Ha a szelvény (F) állandó, akkor a (4) képlethez jutunk:

$$A = \frac{\sigma^2}{2E} F \int_0^l dx = \frac{\sigma^2}{2E} F \cdot l = \frac{\sigma^2}{2E} V$$

Mint a (4) képletből kitűnik, a megnyújtás munkája nem függ külön a hosszról, vagy a keresztaszelvénytől, hanem a köbtartalomtól. Ennélfogva valamely hosszú, de kis keresztaszelvényű rúdnak bizonyos σ feszültség elérésére ugyanakkora munkára lesz szüksége, mint egy ugyanilyen köbtartalommal bíró rövid és vastag rúdnak.

Minthogy $\frac{1}{2} P = \frac{1}{2} F \cdot \sigma$, azért a hosszú vékony rúdnál $\frac{1}{2} P$ aránylag kicsi, ellenben λ nagy; rövid vastag rúdnál viszont $\frac{1}{2} P$ nagy, de λ kicsi, úgyhogy a szorzat mindkét esetben ugyanazon értékű.

Ha a terhelés lassan növekszik, akkor a munka általános törvénye szerint:

$$\Sigma \frac{1}{2} mv^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2 = \Sigma A_k + \Sigma A_b = \Sigma A = 0 \quad (7)$$

mert $v = v_0$. Az egyenletben A_k a külerők, A_b pedig a belerők munkáját jelenti. De mivel a külerők munkája:

$$A_k = \frac{\sigma^2}{2E} V$$

azért a belerők munkája:

$$A_b = -\frac{\sigma^2}{2E} V = -\frac{1}{2} P_1 \lambda$$

Ha pedig a rúd σ feszültségű állapotból lassan a terheletlen állapotba jut vissza, akkor a támadópont mozgásának iránya a húzóerővel ellentétes és így:

$$A_k = -\frac{\sigma^2}{2E} V$$

$$\text{és} \quad A_b = \frac{\sigma^2}{2E} V$$

Amikor a rúd lassanként növekedő nyomóerő hatása alatt λ értékkel megrövidül, akkor az erő pozitív munkát végez, mert megrövidülésnél a támadópont elmozdulása, a nyomóerő irányában történik. Ezen munka szintén:

$$A = \frac{\sigma^2}{2E} V$$

ami egyébként természetes is, mert a $+\sigma$ húzófeszültségnek a $-\sigma$ nyomófeszültséggel való felcserélése, a σ^2 -ben változást nem okoz.

Tehát, ha valamely rudat terheletlen állapotból zérótól P_1 -ig fokozatosan növekedő húzás- vagy nyomásnak vetünk alá és a rúd a rugalmassági határon belül meghosszabbodik vagy megrövidül, akkor mindkét esetben a külső munka pozitív, a belső munka pedig negatív. A terheletlen állapotba való visszajutásnál ennek ellenkezője érvényes.

Fajlagos alakváltozási munkának ($\mathfrak{U}$) nevezzük a térfogat-egység alakváltozási munkáját. Általában:

$$\mathfrak{U} = \frac{dA}{dV} \quad (8)$$

Húzás és nyomás esetében a (4) képletből kapjuk, hogy:

$$\mathfrak{U} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad (9)$$

Érdekes összehasonlítani a fajlagos meghosszabbodási és megrövidülési munkákat, melyeket a különböző anyagokból készült prizmatikus rudak a rugalmassági határon belül elbírnak. Az alábbi táblázatban, az $\mathfrak{U} = \frac{\sigma^2}{2E}$ képletben, $\sigma = H$, ahol H a feszültség a rugalmassági határon; $\mathfrak{U}$ egysége kgcm/cm^3 .

VIII. táblázat. A fajlagos alakváltozási munkáról.

Anyag	Meghosszabbodási munka	Megrövidülési munka
Öntöttvas	$\mathfrak{U} = \frac{1}{2} \cdot \frac{600^2}{1000000} = 0,18$	$\mathfrak{U} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1600^2}{1000000} = 1,28$
Rúdvas	$\mathfrak{U} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1600^2}{2000000} = 0,64$	$\mathfrak{U} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1600^2}{2000000} = 0,64$
Öntöttacél	$\mathfrak{U} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4500^2}{2200000} = 4,6$	$\mathfrak{U} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4500^2}{2200000} = 4,6$
Fa	$\mathfrak{U} = \frac{1}{2} \cdot \frac{250^2}{120000} = 0,26$	$\mathfrak{U} = \frac{1}{2} \cdot \frac{170^2}{120000} = 0,12$
Üveg	$\mathfrak{U} = \frac{1}{2} \cdot \frac{340^2}{1000000} = 0,058$	$\mathfrak{U} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1450^2}{1000000} = 1,05$
Kaucuk	$\mathfrak{U} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20^2}{10} = 20$	—

Látjuk e táblázatból, hogy az öntöttacél kétszer annyi munkát képes elbírní, mint a rúdvas, bár a rugalmassági határa alig

háromszor nagyobb. Ahol tehát munka végzéséről van szó, a drága öntöttacél előnyösebb, mint a rúdvas. A fának nagyobb a meghosszabbodási munkája, mint az öntöttvasnak. E tekintetben különösen kedvező a kaucsuk, mely az öntöttacél munkaképességét 4,3-szer felülmúlja. A kaucsuk tehát főképpen rúgós berendezéseknél a legelőnyösebb anyag volna, de nagy hibája, hogy nem elég tartós.

Az eddigiekben csupán elasztikus alakváltozásokkal számoltunk, azaz feltételeztük, hogy a feszültségekkel a rugalmassági határon belül maradunk. Most ugyanis a test tökéletesen rugalmasnak vehető, a maradó alakváltozás zéró, tehát az egész alakváltozás rugalmas alakváltozás. Általános esetben azonban a zérótól P -ig fokozatosan növekedő erővel megterhelt rúd egész hosszváltozása λ , két részből áll, λ' maradó és λ'' rugalmas (múló) hosszváltozásból. Akkor:

$$\lambda = f_1(P) \qquad \lambda' = f_2(P) \qquad \lambda'' = f_3(P)$$

avagy:

$$P = \varphi_1(\lambda) \qquad P = \varphi_2(\lambda') \qquad \text{és} \qquad P = \varphi_3(\lambda'')$$

Ennek megfelelőleg az alakváltozási munka is két részből áll. Az egész alakváltozási munka:

$$A_1 = \int_0^{\lambda} P \cdot d\lambda = \int_0^{\lambda} \varphi_1(\lambda) d\lambda = A_2 + A_3$$

ahol a maradó alakváltozásnak megfelelő munka:

$$A_2 = \int_0^{\lambda'} P \cdot d\lambda'$$

és a rugalmas alakváltozási munka:

$$A_3 = \int_0^{\lambda''} P \cdot d\lambda''$$

ez utóbbi azon mechanikai munka, mely a testben felhalmozódik.

59. §. Hirtelen terhelés behatása.

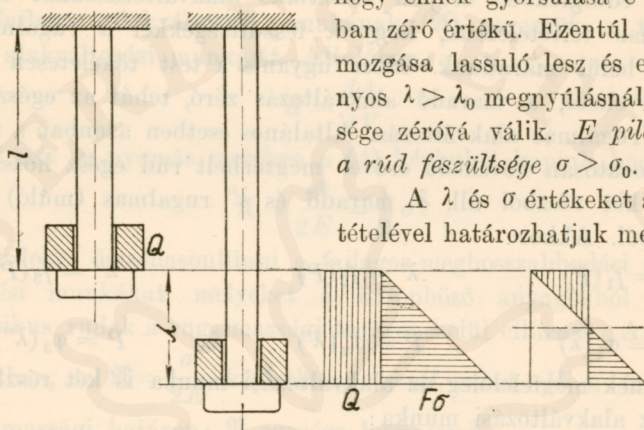
Ha valamely F keresztmetszvényű rúd alsó végéhez Q súly van erősítve, úgy a rúdban önsúlyától eltekintve: $\sigma_0 = \frac{Q}{F}$ feszültség ébred és az ennek megfelelő elasztikus megnyúlás:

$$\lambda_0 = \frac{Q}{F} \cdot \frac{l}{E}$$

Ha azonban a Q súlyt kezdetben alátámasztjuk, azután az alátámasztástól hirtelen megszabadítjuk, akkor a rúd a testre a következő pillanatban még semmi erőt sem fejt ki, a súly csupán a nehézség hatásának van alávetve. Amely pillanatban azonban a rúd a lefelé eső Q súly hatása alatt: $\lambda_0 = \frac{Q l}{F E}$ megnyúlást ér el, benne a fenti σ_0 feszültség ébred, amely a Q súlyt ellensúlyozza, úgy-

hogy ennek gyorsulása e pillanatban zéró értékű. Ezentúl a Q súly mozgása lassuló lesz és egy bizonyos $\lambda > \lambda_0$ megnyúlásnál, a sebessége zéróvá válik. E pillanatban a rúd feszültsége $\sigma > \sigma_0$.

A λ és σ értékeket a munka tételével határozhatjuk meg. A le-



316. ábra.

felé való mozgás alkalmával az összes energiaváltozás zéróval egyenlő, mert a kezdő- és végsebesség zéró. A Q súly e közben $Q \cdot \lambda$ munkát végez, melyet egy négyszög területével ábrázolhatunk (316. ábra). A belső erők munkája feltéve, hogy λ még a rugalmasság határán belül fekszik:

$$-\frac{\sigma^2}{2E} V = -\frac{1}{2} P \cdot \lambda$$

ahol P a legnagyobb feszültségnek megfelelő húzóerő: $P = F \cdot \sigma$

A két munka összege zéróval egyenlő, tehát:

$$\frac{1}{2} F \cdot \sigma \cdot \lambda = Q \lambda$$

ahonnan:

$$\sigma = \frac{2Q}{F} = 2 \sigma_0 \quad (1)$$

A Q hirtelen terhelés tehát kétszer akkora feszültséget okoz, mint a zérótól Q -ig fokozatosan növekedő terhelés.

Az (1) egyenletből következik, hogy:

$$\lambda = 2 \lambda_0 \quad (2)$$

Ezen legalsó helyzetben a rúd feszültsége $F \cdot \sigma = 2Q$. A test ekkor egy pillanattig $2Q - Q = Q$ felfelé irányuló erőnek van alávetve, melytől viszont felfelé irányuló gyorsulást is nyer. A felfelé irányuló mozgás alkalmával a rúd feszültsége csökken $\sigma_0 = \frac{Q}{F}$ értékig, amikor is az egyensúlyt újra elértük. A testnek akkor lesz ismét zéró sebessége, ha bizonyos h magasságra emelkedett, melynél a megrövidülő tartó pozitív munkája egyenlő a nehézségi erő negatív munkájával, vagyis:

$$\frac{\sigma^2}{2E} V = Qh$$

azaz, mivel $V = F \cdot l$ és $\sigma = \frac{2Q}{F}$:

$$h = \frac{2Ql}{F \cdot E} = 2\lambda_0 = \lambda$$

a tartó tehát visszanyeri eredeti hosszúságát. A tartó alsó végpontja ennél fogva lengő, oszcillatórikus mozgást végez.

Ha tehát egy elasztikus rúd valamely súly hirtelen hatásának van alávetve, úgy ezáltal oly maximális feszültséget ér el, amely éppen kétszerese az egyensúlyi feszültségnek. A rúdon függő test a legmagasabb és legalacsonyabb helyzetek között lengéseket végez az egyensúlyi helyzet, mint középpont körül. Ezen lengések a légellenállás és a rúd tökéletlen rugalmassága miatt csillapított lengések, egyre kisebbednek, s végül megszűnnek. Míg lassan növekedő terhelésnél az alakváltozási munka:

$$A_k = \frac{1}{2} Ql$$

addig hirtelen terhelésnél:

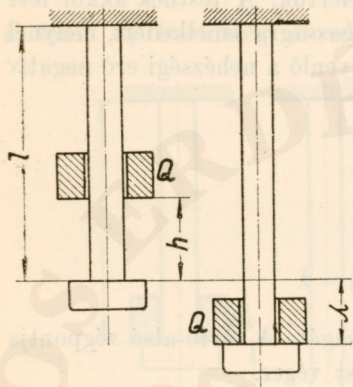
$$\left(A_k \right) = Q \cdot l = \frac{\sigma^2}{2E} V = \frac{F \cdot \sigma \cdot \lambda}{2} = - A_b \quad (3)$$

A változó és a testre ható összes erőt akkor lehet legvilágosabban szemléltetővé tenni, ha a két munkafelületet: $Q\lambda$ és $\frac{1}{2} F\sigma\lambda$ ellenkező jellel egymásba toljuk (316. ábra). A felső részben lefelé, az alsó részben felfelé irányuló erőket kapunk, míg a középben az összes erő zéró.

A gyakorlatban igen sűrűn fordulnak elő ilyen gyors terhelések. Ez a körülmény az oka annak, hogy sztatikai számításnál a megengedhető feszültséget jóval kisebbnek választjuk a rugalmassági határnál. Ha pl. valamely rúd F szelvényét $0,5 H$ feszültségre

számítottuk (H a rugalmassági határ), akkor hirtelen terhelésnél a feszültség H lesz.

Ha valamely súlyt kaucsukszátra, rúdra, láncra stb. akasztunk és azt akarjuk, hogy a rúdban keletkező legnagyobb feszültség ne legyen lényegesen nagyobb az egyensúlyi feszültségnél, akkor az alátámasztást nem szabad hirtelen elvenni, hanem a keret- vagy csavarberendezést lassan kell süllyeszteni.



317. ábra.

Az egyensúlyi feszültséget még jobban meghaladjuk, ha a testnek azon pillanatban, midőn a terheletlen rúdra hat, már van bizonyos v sebessége. Ez az eset áll fenn a 317. ábrán feltüntetett viszonyok mellett, hol a Q súly h magasságról esik alá és csak azután hat a rúdra. Ha λ a rúd legnagyobb meghosszabbodása, akkor, amint ezt elértük, az eső test legmélyebb helyzetébe jutván, sebessége

ebben a pillanatban zéró. A munkamennyiség változása a legmagasabb és legalacsonyabb helyzetben szintén zéró. Minthogy Q súly $h + \lambda$ -val süllyed, azért:

$$\frac{\sigma^2}{2E} V = Q(h + \lambda)$$

vagy mivel: $\lambda = \frac{\sigma l}{E}$:

$$\frac{\sigma^2}{2E} V = Qh + Q \frac{\sigma \cdot l}{E}$$

ahonnan:

$$\sigma = \frac{Q \cdot l}{V} \pm \sqrt{\frac{Q^2 \cdot l^2}{V^2} + \frac{2QhE}{V}}$$

Ha még figyelembe vesszük, hogy $V = F \cdot l$, továbbá:

$$\sigma_0 = \frac{Q}{F} \quad \text{s így} \quad \frac{\sigma_0}{l} = \frac{Q}{V}$$

akkor a következő eredményt nyerjük:

$$\sigma = \sigma_0 + \sqrt{\sigma_0^2 + 2\sigma_0 \frac{h}{l} E} \quad (4)$$

A gyök negatív értékét nem kell figyelembe venni, mert a rúdban keletkező legnagyobb feszültséget keressük.

Például: valamely $F = 4 \text{ cm}^2$ keresztmetszvényű, $l = 500 \text{ cm}$ hosszú vasrúdra a 317. ábra szerint $Q = 100 \text{ kg}$ súly $h = 10 \text{ cm}$ magasról esik le. Keressük a maximális feszültséget.

Az egyensúlyi feszültség volna:

$$\sigma_0 = \frac{Q}{F} = \frac{100}{4} = 25 \text{ kg/cm}^2$$

tehát jelentéktelen, míg a maximális feszültség a (4) képlet szerint:

$$\sigma = 25 + \sqrt{625 + 2000000} = 1439 \text{ kg/cm}^2$$

vagyis aránytalanul nagyobb.

A megfelelő meghosszabbodás:

$$\lambda = \frac{1439 \cdot 500}{2000000} = 0,36 \text{ cm}$$

ez a $h = 10 \text{ cm}$ mellett csaknem elhanyagolható

Általában véve λ a legtöbb esetben mellőzhető h mellett, s akkor:

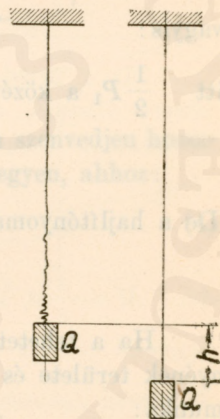
$$\frac{\sigma^2}{2E} V = Qh$$

amiből:

$$\sigma = \sqrt{2\sigma_0 \frac{h}{l} E} \quad (5)$$

Ez a képlet érvényes az egyik végén megerősített kötélre is, melynek alsó végéhez Q súly van erősítve, ha a kötel kezdetben oly laza, hogy a szabadon bocsátott test h magasságon esik le, míg a kötel megfeszül (318. ábra).

Az aknaszállító drótkötel aránylag rövid élettartamára nagy befolyást gyakoroló lökőhatások között, szerepel a laza kötel képződése is. Ilyenkor a kötel már egy bizonyos v sebességgel mozog, amikor a kasszéken ülő, nyugalomban levő kas pillanatnyilag rá akasztódik. Ez a hirtelen terhelés lökőhatást, a feszültségek aránytalan megnövekedését okozza.



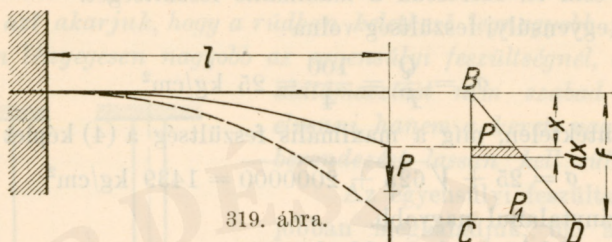
318. ábra.

60. §. A hajlítás alakváltozási munkája.

Ha valamely prizmatikus és merőlegesen befogott rudat szabad végén zérótól lassan növekvő P erővel hajlításra vesszünk igénybe, akkor a rúd szabad vége besüllyed. Keressük a hajlítás munkáját azon feltétel mellett, hogy a nyíróerőket és az erő által okozott helyi összenyomást mellőzzük.

Az erő egy közbenső P értékénél a szabad vég besüllyedése:

$$x = \frac{Pl^3}{3IE} \text{ de az erő } P_1 \text{ végső értéke mellett pedig: } f = \frac{P_1 l^3}{3IE}$$



319. ábra.

tehát az erő arányos a besüllyedéssel.

A BCD háromszögben (319. ábra)

$BC = f$ és $CD = P_1$, a P erő differenciális munkája $P \cdot dx$, az egész háromszög területe pedig az

összes munkának felel meg,

$$\text{vagyis:} \quad A = \frac{1}{2} P_1 f \quad (1)$$

itt $\frac{1}{2} P_1$ a középerő és f az út hossza. Mivel $f = \frac{P_1 l^3}{3IE}$, azért:

$$A = \frac{P_1^2 l^3}{6IE}$$

De a hajlítónyomaték: $P_1 l = \frac{I}{e} \sigma$, ennél fogva:

$$A = \frac{1}{6} \frac{I^2 \sigma^2 l}{e^2 IE} = \frac{1}{6} \frac{I \cdot l \sigma^2}{e^2 E} \quad (2)$$

Ha a tehetetlenségi nyomaték $I = F \cdot i^2$, ahol F a tartó szelvényének területe és i a tehetetlenségi sugár, akkor az alakváltozási munka:

$$A = \frac{1}{6} F \cdot l \frac{i^2 \sigma^2}{e^2 E} = \frac{V}{6} \frac{i^2 \sigma^2}{e^2 E} \quad (3)$$

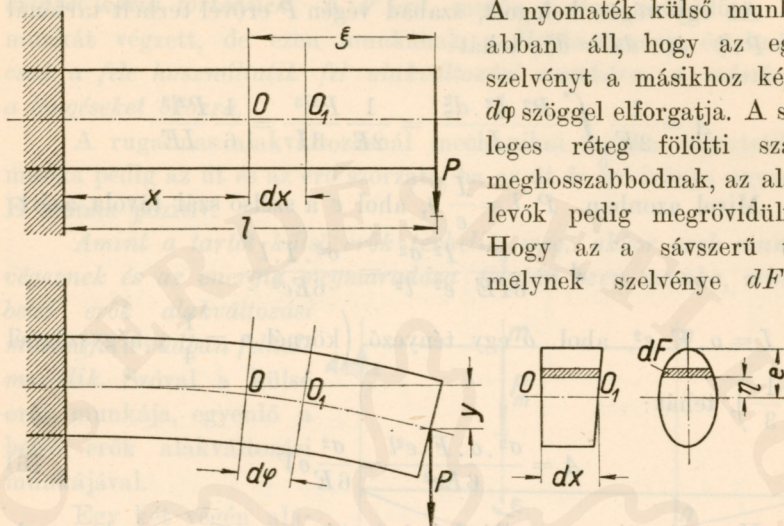
Az $\frac{i}{e}$ viszony csupán a szelvény alakjától függ, de nem a nagyságától. Tehát a hajlítás munkája szintén csak a rúd köbtartalmától és az elérendő feszültségtől függ.

Más terhelési módok mellett is csupán az f besüllyedést kell ismerni. Hasonló módon számítunk akkor is, ha ferdén befalazott rúdról van szó.

Hogy a hajlítás alakváltozási munkája egy végén befalazott tartónál csakugyan: $A = \frac{1}{6} \frac{P_1^2 l^3}{IE}$, az még a következőképpen is

igazolható. Tekintsünk két, egymástól dx távolságban levő szelvényt (320. ábra), melyek a hajlítás előtt párhuzamosak voltak.

A nyomaték külső munkája abban áll, hogy az egyik szelvényt a másikhoz képest $d\varphi$ szöggel elforgatja. A semleges réteg fölötti szálak meghosszabbodnak, az alatta levők pedig megrövidülnek. Hogy az a sávszerű test, melynek szelvénye dF és



320. ábra.

hossza dx , a rúd középvonala irányában olymódon szenvedjen hosszváltozást, hogy a fajlagos hosszváltozás éppen ε legyen, ahhoz:

$$dA = \frac{1}{2} dF \cdot \sigma \cdot \varepsilon \cdot dx \quad (4)$$

munka szükséges. De mivel $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$,

$$dA = \frac{\sigma^2}{2E} dF \cdot dx$$

Tekintve azonban, hogy $\sigma = \frac{M}{I} \eta$, kapjuk, hogy:

$$dA = \frac{1}{2E} \frac{M^2}{I^2} \eta^2 \cdot dF \cdot dx$$

$$\text{és} \quad A = \frac{1}{2E} \int_0^l \int_0^F \frac{M^2}{I^2} dF \cdot \eta^2 \cdot dx = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M^2}{I^2} dx \int_0^F \eta^2 \cdot dF$$

ahonnan, mivel:

$$\int_0^F \eta^2 dF = I$$

$$A = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M^2}{I} dx \quad (5)$$

Ez az egyenes tengelyű rúd hajlítására felhasznált alakváltozási munka általános kifejezése.

Az egy végén befogott, szabad végén P erővel terhelt tartónál $M = P \cdot \xi$ és $dx = d\xi$; tehát:

$$A = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{P^2 \cdot \xi^2 \cdot d\xi}{I} = \frac{1}{2E} \frac{P^2 l^3}{3I} = \frac{1}{6} \frac{P^2 l^3}{IE}$$

Mivel azonban $P \cdot l = \frac{I}{e} \sigma$, ahol e a szélső szál távolsága, azért:

$$A = \frac{l^3}{6IE} \frac{I^2 \sigma^2}{e^2 l^2} = \frac{\sigma^2 \cdot I \cdot l}{6Ee^2}$$

de: $I = o \cdot F \cdot e^2$, ahol o egy tényező (körnél $o = \frac{1}{4}$, négyszögűnél $o = \frac{1}{3}$), tehát:

$$A = \frac{\sigma^2 \cdot o \cdot F \cdot e^2 l}{6Ee^2} = \frac{\sigma^2}{6E} o V \quad (6)$$

Ha a tartó egyenszilárdságú tartó, azaz $\sigma_{\max}$ minden szelvényre állandó, akkor ismét az alakváltozási munka általános kifejezéséből indulunk ki, azaz:

$$A = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M^2}{I} dx$$

de: $M = \frac{I}{e} \sigma$, tehát:

$$A = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{\sigma^2}{e^2} I dx$$

és $I = o \cdot F \cdot e^2$, amely értéket behelyettesítve:

$$A = \frac{1}{2E} \int_0^l F \cdot dx \cdot o \cdot \sigma_{\max}^2 = \frac{\sigma^2}{2E} o \cdot V \quad (7)$$

Az alakváltozási munka egyenszilárdságú tartónál tehát háromszor akkora, mint amit a prizmatikus rúdra kaptunk. Az alakváltozási munka független az alátámasztás módjától és a terheléstől és egyenes arányban áll a rúd térfogatával meg a feszültség négyzetével.

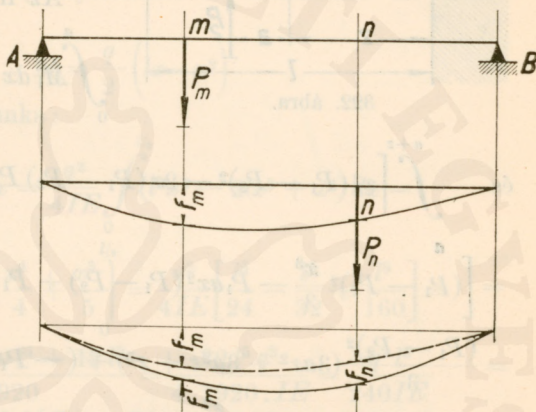
A belső feszültségek munkája a meghajlított rúdnál $A_b = -A$. Hirtelen megterhelés esetén a legnagyobb feszültség kétszerese az

egyensúlyi feszültségnek és a rúd lengései a közép egyensúlyi helyzet körül történnek. A P erő, midőn f úton működött, $P \cdot f$ munkát végzett, de ezen munkának a Hooke-törvény értelmében csak a fele használtatik fel alakváltozási munkára, a másik fele a lengéseket okozza.

A rugalmas alakváltozásnál mechanikai munka végeztetik, a munka pedig az út és az erő szorzata, ha az út és erő iránya ugyanaz. E munka pozitív.

Amint a tartót külső erők terhelik meg, akkor ezek munkát végeznek és az energia megmaradása folytán ezen munka, mint a belső erők alakváltozási munkája, a rúdban felhalmozódik. Szóval a külső erők munkája, egyenlő a belső erők alakváltozási munkájával.

Egy két végén alátámasztott tartót (321. ábra) m pontjában zérótól P_m -ig fokozatosan növekedő erővel megterhelünk. A tartó f_m értékkel besüllyed, alakváltozást szenved és a külső erő által



321. ábra.

okozott alakváltozási munka: $A = \frac{1}{2} P_m f_m$. Ha a most meghaj-

lított tartót n pontjában újabb, zérótól P_n -ig fokozatosan növekedő erővel terheljük meg, ez az erő a tartót f_n értéknek megfelelően behajlítja és így a tartó újabb alakváltozási munkát szenved. De ezáltal m pontban is újabb, f_m' nagyságú behajlás áll elő. Most azonban, noha P_m erő f_m' úton hat, mégsem ez az erő okozza az újabb besüllyedést, a P_m erő már csupán eltolási munkát végez, melynek nagysága $A_v = P_m \cdot f_m'$. Tehát az alakváltozási munka a neki megfelelő eltolási munkának, csupán a felével egyenlő.

Példák az alakváltozási munkára hajlításnál.

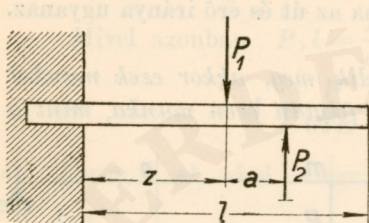
1. Valamely egyik végén befogott szimmetrikus szelvényű tartó, melynek I a tehetetlenségi nyomatéka, két egymástól a távolságban levő, ellentétes értelmű P_1 és P_2 erővel van megterhelve.

A hajlítás-okozta alakváltozási munka legyen maximum. Keresendő a z távolság (322. ábra) és a munka maximuma. (Wittenbauer.)

Ha balról a távolságot x -el jelöljük, akkor a mezőben a hajlítónyomaték: $M_1 = P_2x$ és z mezőben:

$$M_2 = P_2x - P_1(x - a) = -x(P_1 - P_2) + P_1a$$

Az alakváltozási munka az (5) képlet szerint:



322. ábra.

$$A = \frac{1}{2IE} \left[\int_0^a M_1^2 \cdot dx + \int_a^{a+z} M_2^2 \cdot dx \right]$$

Az integrálásokat elvégezve:

$$\int_0^a M_1^2 dx = P_2^2 \int_0^a x^2 \cdot dx = \frac{P_2^2 a^3}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{és} \quad & \int_a^{a+z} \left[x^2 (P_1 - P_2)^2 - 2x(P_1 - P_2)P_1a + P_1^2 a^2 \right] dx = \\ & = \left[(P_1 - P_2)^2 \frac{x^3}{3} - P_1 a x^2 (P_1 - P_2) + P_1^2 a^2 x \right]_a^{a+z} = \\ & = \frac{(P_1 - P_2)^2}{3} (3az^2 + 3a^2z + z^3) + (-P_1^2 a + P_1 P_2 a)(2az + z^2) + \\ & + P_1^2 a^2 z = (P_1 - P_2)^2 \frac{z^3}{3} + (P_1 - P_2)^2 z^2 a - P_1^2 a z^2 + P_1 P_2 a z^2 + \\ & + (P_1 - P_2)^2 a^2 z - P_1^2 2a^2 z + P_1^2 a^2 z + 2a^2 P_1 P_2 z = \\ & = \frac{z^3}{3} (P_1 - P_2)^2 + az^2 \left[(P_1 - P_2)^2 - P_1^2 + P_1 P_2 \right] + \\ & + a^2 z \left[(P_1 - P_2)^2 - 2P_1^2 + P_1^2 + 2P_1 P_2 \right] = \\ & = \frac{z^3}{3} (P_1 - P_2)^2 - (P_1 - P_2) a P_2 z^2 + P_2^2 a^2 z \end{aligned}$$

Ezen értékeket az alakváltozási munka kifejezésébe behelyettesítve:

$$A = \frac{1}{2IE} \left[\frac{P_2^2 a^3}{3} + z P_2^2 a^2 - a z^2 P_2 (P_1 - P_2) + \frac{z^3}{3} (P_1 - P_2)^2 \right]$$

Ennek maximális értékét megkapjuk, ha:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dz} = 0 &= P_2^2 a^2 - 2az P_2 (P_1 - P_2) + z^2 (P_1 - P_2)^2 = \\ &= z^2 - 2az \frac{P_2}{P_1 - P_2} + \frac{P_2^2 a^2}{(P_1 - P_2)^2} \end{aligned}$$

ahonnan :

$$z = \frac{aP_2}{P_1 - P_2} \pm \sqrt{\frac{a^2 P_2^2}{(P_1 - P_2)^2} - \frac{P_2^2 a^2}{(P_1 - P_2)^2}} = \frac{aP_2}{P_1 - P_2}$$

Ha $P_1 > P_2$, akkor : $\frac{d^2 A}{dz^2} < 0$.

és így : $A_{\max} = \frac{a^3}{6IE} \frac{P_1 P_2^2}{P_1 - P_2}$

2. Valamely két helyen szabadon alátámasztott állandó szelvényű l hosszúságú tartó, q egyenletesen elosztott teherrel van megterhelve. A tehetetlenségi nyomatéka I . Keresendő az alakváltozási munka.

A nyomaték : $M = \frac{q}{2} (lx - x^2)$

Az alakváltozási munka :

$$\begin{aligned} A &= 2 \frac{1}{2IE} \int_0^{l/2} M^2 \cdot dx = \frac{q^2}{4IE} \int_0^{l/2} (l^2 x^2 - 2lx^3 + x^4) dx = \\ &= \frac{q^2}{4IE} \left[l^2 \frac{x^3}{3} - 2l \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_0^{l/2} = \frac{q^2}{4IE} \left[\frac{l^5}{24} - \frac{l^5}{32} + \frac{l^5}{160} \right] = \\ &= \frac{q^2}{4IE} \frac{80l^5 - 60l^5 + 12l^5}{1920} = \frac{32l^5 q^2}{4 \cdot 1920 \cdot IE} = \frac{q^2 l^5}{240IE} \end{aligned}$$

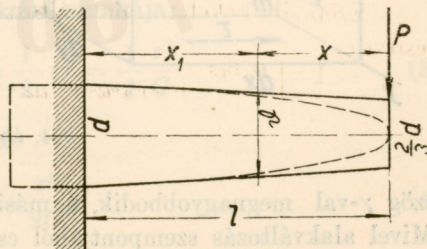
Mint hogy pedig a besüllyedés : $f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{IE}$

és : $f^2 = \frac{25 \cdot q^2 \cdot l^8}{147456 \cdot I^2 E^2}$

azért : $A = \frac{147456 I^2 \cdot E^2 \cdot f^2}{25 \cdot l^3 \cdot 240 \cdot I \cdot E} = \frac{147456 IE f^2}{l^3 \cdot 6000} = \frac{3072 IE f^2}{125 l^3}$

3. Keresendő az alakváltozási munka egyik végén befogott körszelvényű tartónál, mely a szabad végén P erővel van megterhelve. A tartó egyenszilárd-ságú, tehát a hajlítással szemben egyforma az ellenállása. A tengely hossza l , a befogás helyén a körszelvény átmérője d , a befogástól x_1 távolságban pedig ϑ (323. ábra). Mint ismeretes :

$$\vartheta^3 = d^3 \frac{x}{l} \text{ azaz } \vartheta = d \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$$



323. ábra.

Továbbá $M = P \cdot x$ és $I_1 = \frac{\vartheta^4 \pi}{64}$

Az alakváltozás munkája:

$$A = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M^2}{I_1} dx = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{P^2 x^2}{\frac{\vartheta^4 \pi}{64}} dx$$

de: $\vartheta^4 = d^3 \frac{x}{l} d^3 \sqrt{\frac{x}{l}} = d^4 \left(\frac{x}{l} \right)^{4/3}$

Ha $\frac{d^4 \pi}{64} = I$, akkor:

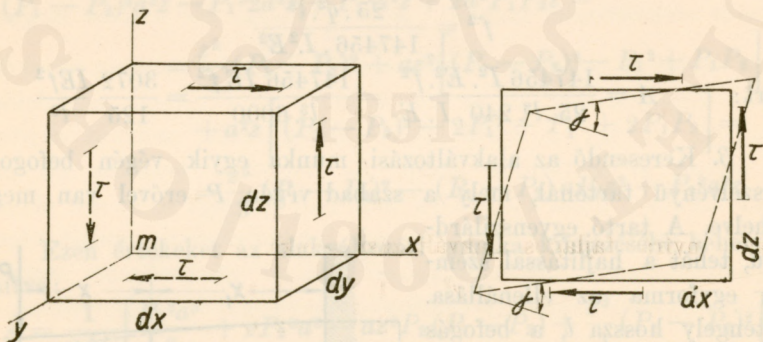
$$A = \frac{P^2}{2E} \int_0^l \frac{x^2 \cdot dx \cdot l^{4/3}}{\frac{d^4 \pi}{64} x^{4/3}} = \frac{P^2 l^{4/3}}{2IE} \int_0^l x^{2/3} \cdot dx = \frac{P^2 l^{4/3}}{2IE} \frac{3}{5} \left[x^{5/3} \right]_0^l$$

azaz:

$$A = \frac{3}{10} \frac{P^2}{IE} l^{4/3} \cdot l^{5/3} = \frac{3}{10} \frac{P^2 l^3}{IE}$$

61. §. A nyírás alakváltozási munkája.

A tiszta nyírás deformáló hatása abban áll, hogy az xz síkkal párhuzamos derékszögű négyszög-metszetekben (324. ábra) két derék-



324. ábra.

szög γ -val megnagyobbodik, a másik kettő pedig γ -val kisebbedik. Mivel alakváltozás szempontjából csupán ez a szögváltozás a lényeges, az alakváltozás úgy jöhetett létre, hogy $dx \cdot dy$ oldallap mozdu-

latlan maradt és a vele áttelleges lap mozdult el az x iránnyal párhuzamosan (325. ábra).

Csak az x iránnyal párhuzamos τ feszültség végez munkát; a reá merőleges feszültségek munkája zéró, mert az elmozdulás az erő irányára merőleges.

Legyen a zérótól τ -ig folytonosan növekedő feszültség egy közbenső τ' értékének megfelelő szögváltozás γ' . A csúsztató- (nyíró-) feszültség $d\tau'$ -el való megnövekedésével a szögváltozás $d\gamma'$ -vel megnő, a felső oldallap (325. ábra) $dz \cdot d\gamma'$ -el fog elmozdulni, tehát a

$(\tau' + d\tau') dx dy$ feszítő erő, amely:

$(\tau' + d\tau') dx dy \cdot dz d\gamma'$ munkát végez.

Ha $dx \cdot dy \cdot dz = dV$ a differenciális prizma térfogata és az ötödrendű végtelen kicsiny tagot elhanyagoljuk, ez a munka:

$$\tau' \cdot d\gamma' \cdot dV$$

alakban írható. A dV térfogatelemnek, a τ végső feszültséghez tartozó alakváltozási munkája tehát:

$$dA = dV \int_0^{\gamma} \tau' d\gamma' \quad (1)$$

és a fajlagos alakváltozási munka:

$$\mathfrak{A} = \frac{dA}{dV} = \int_0^{\gamma} \tau' d\gamma' \quad (2)$$

Miután azonban:

$$\tau' = G\gamma'$$

ahol G a csúsztató- rugalmassági modulusz, azért:

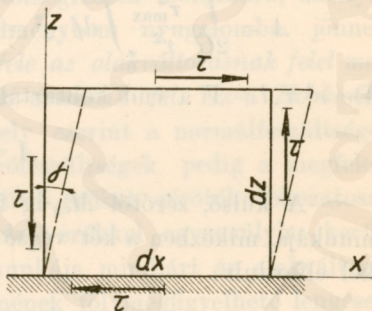
$$\mathfrak{A} = G \int_0^{\gamma} \gamma' d\gamma'$$

azaz a nyírás fajlagos alakváltozási munkája:

$$\mathfrak{A} = G \frac{\gamma^2}{2} = \frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} \quad (3)$$

és az egész alakváltozási munka:

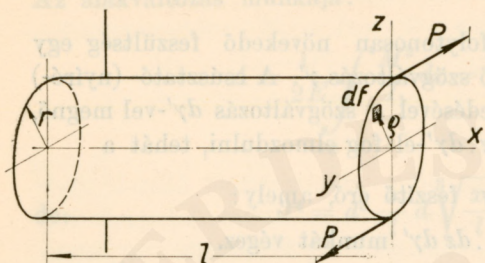
$$A = \frac{\tau^2}{2G} V \quad (4)$$



325. ábra.

62. §. A csavarás alakváltozási munkája.

Ha a csavarásra igénybevett körszelvényű tartó: $dy \cdot dz = df$ felülettel és l hosszúsággal bíró elemét olymódon akarjuk elcsavarni



326. ábra.

(326. ábra), hogy az elváltozásnak szöge γ legyen és $\tau = G\gamma$, akkor az ehhez szükséges munka differenciálja:

$$dA = \frac{\tau \cdot df}{2} \gamma l = \frac{\tau^2 \cdot df \cdot l}{2G} \quad (1)$$

és az egész munka:

$$A = \frac{l}{2G} \int_0^F df \cdot \tau^2 \quad (2)$$

Minthogy azonban: $\frac{\tau}{\tau_{\max}} = \frac{\rho}{r}$ ahonnan: $\tau = \tau_{\max} \frac{\rho}{r}$

amely értéket a (2) egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy:

$$A = \frac{l}{2G} \frac{\tau_{\max}^2}{r^2} \int_0^F df \cdot \rho^2 = \frac{l}{2G} \frac{\tau_{\max}^2 r^4 \pi}{r^2 \cdot 2} = \frac{l}{4G} \tau_{\max}^2 r^2 \pi$$

De $r^2 \pi \cdot l = V$ a rúd köbtartalma, tehát az alakváltozási munka:

$$A = \frac{\tau_{\max}^2}{4G} V \quad (3)$$

A külső, zérótól M_{cs} -ig fokozatosan növekvő nyomaték végzett munkája, miközben a két végső szelvény egymáshoz képest $l\theta$ értékkel elfordult:

$$A = \frac{1}{2} M_{cs} \cdot l \cdot \theta \quad (4)$$

ahol θ az elcsavarodás specifikus szöge, illetőleg a hosszegységre eső elfordulási szög ívmértékben:

$$\text{Tehát:} \quad \frac{1}{2} M_{cs} \cdot l \cdot \theta = \frac{\tau_{\max}^2}{4G} V \quad (5)$$

De körszelvényénél:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{cs}}{W_p} = \frac{M_{cs}}{\frac{r^3 \pi}{2}}$$

$$\text{és így:} \quad \frac{1}{2} M_{cs} l \cdot \theta = \frac{4 M_{cs}^2 r^2 \pi l}{4G r^6 \pi^2} \quad \frac{1}{2} l \theta = \frac{M_{cs} \cdot l}{G \cdot r^4 \cdot \pi}$$

ahonnan a specifikus elcsavarodási szög körszelvényénél:

$$\theta = \frac{2 M_{cs}}{G \cdot r^4 \cdot \pi} \quad (6)$$

63. §. Castigliano és Maxwell elmélete.

A hajlítónyomaték alakváltozási munkájának kifejezése igen értékes segédeszköz, a terhelt-tartó problémák megoldására.

Hogy Castigliano tételét levezethessük, a következőket kell előrebocsátanunk.

Ha valamely egyensúlyban levő, $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ külső koncentrált erőkből álló erőrendszer valamely rugalmas testet megtámad, úgy e test alakváltozást szenved, ami a támadópontok elmozdulásaival jár. Ha pedig ezen elmozdulásoknak az erők irányába eső komponensei $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$, akkor az új egyensúlyi állapot bekövetkezéséig a külső erők munkája:

$$P_1 \mu_1 + P_2 \mu_2 + P_3 \mu_3 + \dots + P_n \mu_n$$

lesz. Ezen munka megfelel azon átmenetnek, amíg a tartó a terheletlen állapotból, a terheltbe kerül.

A külső erők eme munkájának egy része a test alakváltozására fordítatik, a másik része pedig a tömegrészek mozgására, amelyek a surlódás következtében végeredményben nyugalomba jönnek. *Rendesen a külső erők munkájának fele az alakváltozásnak felel meg, a másik felét a tömegrészek lengései emésztik fel.* Ez a Hooke-féle törvény alapján tételezhető fel, amely szerint a normálfeszültségek a megfelelő megnyúlásokkal, a nyírófeszültségek pedig a megfelelő elcsúszásokkal arányosak. Ha a külső erőket zérótól fokozatosan növelnők, úgyhogy a megfelelő belső erőkkel egyensúlyba kerüljenek, akkor ezen változó erők munkája mindjárt az alakváltozás munkája volna, s ilyenkor nem lépnének föl megfigyelhető lengések.

Vegyük fel, hogy valamely rugalmas testnél a külső munkájának bizonyos tört része az alakváltozásra használtatik fel, azaz az alakváltozás munkája A , a külső erők munkájával, A_k -val bizonyos összefüggésben van:

$$A = \frac{1}{\nu} A_k$$

ahol ν az eddig megfigyelt alakoknál 2-vel egyenlő.

Ha mármost az erőrendszer egyik erőjének, pl. P_1 -nek értéke az új egyensúlyi állapot bekövetkeztéig P_1 -től $P_1 + \vartheta_1 = P'_1$ -ig növekedik, úgy az alakváltozási munkának változása ΔA lesz.

Ha $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ a P_1 változása mellett $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \dots, \mu'_n$ értékűvé lesz, akkor $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ erő támadási pontjai $\mu'_1 - \mu_1$,

$\mu_2' - \mu_2, \mu_3' - \mu_3, \dots, \mu_n' - \mu_n$ értékkel mozdulnak el és az ennek megfelelő munka:

$$B = P_1(\mu_1' - \mu_1) + P_2(\mu_2' - \mu_2) + P_3(\mu_3' - \mu_3) + \dots + P_n(\mu_n' - \mu_n)$$

és ezenkívül ϑ_1 is bizonyos $\frac{1}{z} \vartheta_1(\mu_1' - \mu_1)$ munkát létesít, ahol z valamely véges értéket jelez.

Az alakváltozási munka megváltozása:

$$\Delta A = B + \frac{1}{z} \vartheta_1(\mu_1' - \mu_1) \quad (1)$$

Ha mármost az elasztikus testre előbb $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ erőrendszer hatás azután ezt az erőrendszert elvéve $P_1', P_2, P_3, \dots, P_n$ erőrendszerrel pótoljuk, akkor a két erőrendszernek megfelelő munkák közötti különbség:

$$(P_1' \mu_1' + P_2 \mu_2' + P_3 \mu_3' + \dots + P_n \mu_n') - (P_1 \mu_1 + P_2 \mu_2 + P_3 \mu_3 + \dots + P_n \mu_n)$$

és továbbá:

$$P_1' = P_1 + \vartheta_1$$

s így kapjuk, hogy:

$$P_1(\mu_1' - \mu_1) + P_2(\mu_2' - \mu_2) + \dots + P_n(\mu_n' - \mu_n) + \vartheta_1 \mu_1' = B + \vartheta_1 \mu_1'$$

Ezen különbség az alakváltozási munka ν -szeresét adja, amely ugyanis előáll, ha a $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ erőrendszert a $P_1', P_2, P_3, \dots, P_n$ erőrendszerrel pótoljuk:

$$\nu \Delta A = B + \vartheta_1 \mu_1' \quad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletből:

$$(\nu - 1) \Delta A = \vartheta_1 \left(\mu_1' - \frac{1}{z} \mu_1' + \frac{1}{z} \mu_1 \right)$$

$$\frac{\Delta A}{\vartheta_1} = \frac{1}{z} \left(\mu_1' \frac{z-1}{\nu-1} + \frac{1}{\nu-1} \mu_1 \right)$$

ha pedig $\mu_1' = \mu_1 + d$, akkor:

$$\frac{\Delta A}{\vartheta_1} = \frac{1}{\nu-1} \mu_1 + d \frac{z-1}{z(\nu-1)}$$

A d változó és elenyészik ϑ értékével, $\lim d = 0$.

Ha A -t mint a változó P_1 függvényét tekintjük, akkor azon érték mellett, ahol $\lim \vartheta_1 = 0$,

$$A_1' = \frac{1}{\nu-1} \mu_1$$

és mivel ezen fejtegetés minden P erőre vonatkozik, általában írható, hogy:

$$A_p' = \frac{1}{\nu-1} \mu_p \quad (3)$$

továbbá, ha az elasztikus testek a *Hooke*-féle törvényt követik és $\nu = 2$, akkor:

$$A_p' = \mu_p \quad (4)$$

Ez az egyenlet adja *Castigliano* tételét. Ha A értéke a $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ erőktől függ, akkor egymás után $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ erő függvényének tekinthető és ennek megfelelőleg n leszámraztatást képezhetünk, amelyeket A parciális differenciál-hányadosainak tekinthetünk $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ szerint. Ezek alapján *Castigliano* tétele a következőképp foglalható szavakba: *Ha az alakváltozási munkát, mint a rugalmas testre ható külső erők függvényét állítjuk elő, akkor bármelyik erő szerint vett parciális differenciál-hányadosa, az illető erő támadópontjának az erő irányába eső elmozdulásával egyenlő.*

E tétel akkor is érvényes, ha $\nu \geq 2$ és így $A_p' = \frac{1}{\nu - 1} \mu_p$.

Ha mármost $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ értékeit meg tudjuk határozni, akkor az n egyenletcsoportból $A_1' = (\mu_1), A_2' = (\mu_2), A_3' = (\mu_3), \dots, A_n' = (\mu_n)$, a $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ erők meghatározhatók.

Ezen utóbbi megállapítás nagyfontosságú, ugyanis ha $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ erőcsoport külerőkre és reakció-erőkre bomlik és ha van közöttük sztatikailag határozatlan fix támadópontú reakció-erő, akkor $(\mu_{n-2}) = 0, (\mu_{n-1}) = 0, (\mu_n) = 0$ és így ν minden értékénél $A_{n-2}' = 0, A_{n-1}' = 0, A_n' = 0$ és P_{n-2}, P_{n-1} és P_n ezen egyenletekből meghatározható.

Castigliano tételét tehát az alakváltozási munka minimumának megfelelő tétel gyanánt használjuk fel, mert $A_1' = 0, A_2' = 0, \dots, A_n' = 0$ szükséges feltétele annak, hogy A , mint $P_1, P_2, \dots, P_n$ függvénye maximum legyen vagy minimum, de egyéb megfontolás is arra tanít, hogy A tényleg minimális, ha $P_1, P_2, \dots, P_n$ erőket ezen egyenleteknek megfelelően határozzuk meg.

Ugyanezen fejtegetések érvényesek maradnak akkor is, ha egy vagy több P erőt nyomatékkal helyettesítünk, csak most $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ nagyságokat azonosnak tekintjük.

Az alkalmazásnál különösen figyelni kell arra, hogy az erők egymástól függetlenek legyenek.

Vegyünk egy egyik végén befogott, másik végén alátámasztott tartót (327. ábra), mely egyenletesen elosztott erővel (q kg/m) van megterhelve és határozzuk meg *Castigliano* tétele alapján az alátámasztásnál a felszabadító erőt. A ξ szelvényben a nyomaték:

$$M_\xi = -N_1x + \frac{1}{2}qx^2$$

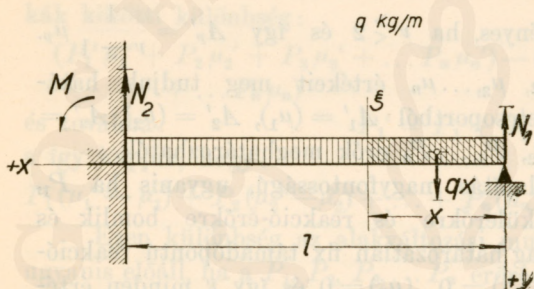
A hajlítás alakváltozási munkájánál levezetett összefüggés szerint:

$$F''(x) = \frac{1}{2IE} M_{\xi}^2 = \frac{N_1^2 x^2 - N_1 q x^3 + \frac{1}{4} q^2 x^4}{2IE}$$

$$\text{és így: } F(x) = A = \frac{\frac{1}{3} N_1^2 x^3 - \frac{1}{4} N_1 q x^4 + \frac{1}{20} q^2 x^5}{2IE} + C$$

ha $C = 0$, $x = 0$, akkor $A = 0$ és ha pedig $x = l$, akkor:

$$A = \frac{\frac{1}{3} N_1^2 l^3 - \frac{1}{4} N_1 q l^4 + \frac{1}{20} q^2 l^5}{2IE}$$



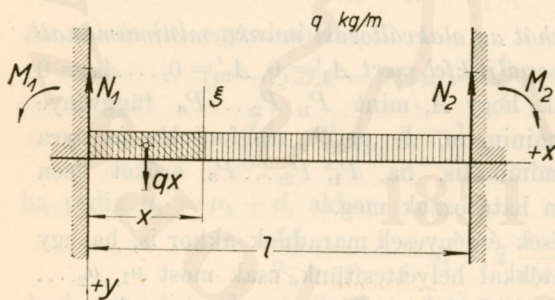
327. ábra.

Ez az egész rúd alakváltozási munkája. Ha A függvénye N_1 -nek és $(u_1) = 0$, akkor:

$$\frac{\partial A}{\partial N_1} = 0 = \frac{2}{3} N_1 l^3 - \frac{1}{4} q l^4$$

ahonnan az ismeretlen reakció-erő:

$$N_1 = \frac{3}{8} q l = \frac{3}{8} Q$$



328. ábra.

Vagy legyen a tartó mindkét végén befalazott és egyenletesen elosztott erőkkel terhelt (328. ábra). A nyomaték a ξ szelvényben:

$$M_{\xi} = M_1 - N_1 x + \frac{1}{2} q x^2$$

$$F'(x) = \frac{1}{2IE} M_{\xi}^2 =$$

$$= \frac{M_1^2 + N_1^2 x^2 + \frac{1}{4} q^2 x^4 - 2M_1 N_1 x - N_1 q x^3 + M_1 q x^2}{2IE}$$

$$F(x) = A =$$

$$= \frac{M_1^2 x + \frac{1}{3} N_1^2 x^3 + \frac{1}{20} q^2 x^5 - M_1 N_1 x^2 - \frac{1}{4} N_1 q x^4 + \frac{1}{3} M_1 q x^3}{2IE} + C$$

De: $C = 0$, ha $x = 0$ és így $A = 0$

ha pedig $x = l$, akkor kapjuk az egész rúd alakváltozási munkáját:

$$A = \frac{M_1^2 l + \frac{1}{3} N_1^2 l^3 + \frac{1}{20} q^2 l^5 - M_1 N_1 l^2 - \frac{1}{4} N_1 q l^4 + \frac{1}{3} M_1 q l^3}{2IE}$$

Ha ezt M_1 függvényének tekintjük, akkor:

$$\frac{\partial A}{\partial M_1} = 2 M_1 l - N_1 l^2 + \frac{1}{3} q l^3 = 0$$

és innen az ismeretlen felszabadító nyomaték:

$$M_1 = \frac{1}{2} N_1 l - \frac{1}{6} q l^2$$

$$\text{ha } Q = ql \text{ és } N_1 = \frac{Q}{2}, \text{ akkor: } M_1 = \frac{1}{12} Ql$$

Castigliano tételéből igen fontos tétel vezethető le, melyet először Maxwell ismert fel és amelyet Maxwell-féle felcserélhetőségi tételnek nevezünk.

A behajlás, amelyet valamely tartó P erő által szenved, a tartó minden x helyére: $y = n \frac{P s^3}{IE}$, ahol n számérték és s valamely hosszúság, melyek az alátámasztás módja szerint esetről-esetre meghatározhatók. Ez következménye azon összefüggésnek, hogy

$F''(x) = \frac{M}{IE}$, mert M a P -vel arányos. A tétel a szuperpozíció tételéből következik. A szuperpozíció (egymásrahalmazás), azaz az egymás fölé helyezett terhek-okozta feszültségek és alakváltozásokra vonatkozó tétel értelmében tudjuk azt, hogy ha bármely test valamely külső erő által okozott feszültségek következtében bizonyos alakváltozást szenved és egy más külső-erő okozta feszültség szintén bizonyos alakváltozást okoz, úgy mind a két feszültség együttes behatása alatt oly alakváltozást szenved, amely a két alakváltozás geometriai (vektoros) összeadása által meghatározható. Ennélfogva valamely $P_1, P_2, \dots, P_n$ erőkkel terhelt tartó behajlása y lineáris függvénye

ezen erőknek és ha: $\frac{ns^3}{IE} = a$

akkor: $y = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots + a_n P_n$

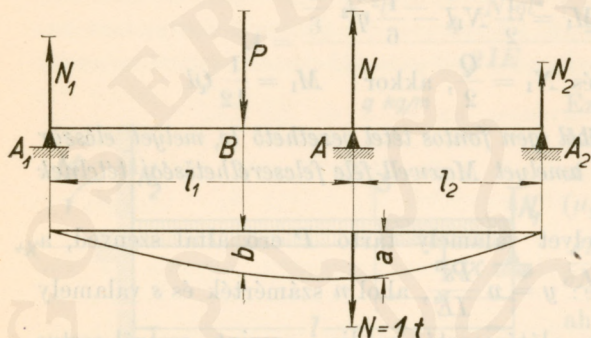
ahol $a_1, a_2, \dots, a_n$ helyről-helyre változik és x -nek a függvénye. Ha $P_1 = 1, P_2 = 0 \dots P_n = 0$, akkor $y = a_1$, tehát a_1 együttható a P_1 teher befolyásoló tényezője, az x helyre nézve, melynél a behajlás y , s ennélfogva $a_1, a_2, \dots, a_n$ együtthatók lesznek az egyes terhek befolyásoló tényezői.

Maxwell felcserélhetőségi tétele a következő:

$$a_p^{(q)} = a_q^{(p)} \quad (5)$$

és szávakban: a P_p erő befolyásoló száma a P_q erő támadópontjának eltolására vonatkoztatva, megegyezik a P_q erő befolyásoló számával, a P_p erő támadópontjának eltolására.

Ezen tétel segítségével a tartók szilárdságtanában a sztatikailag határozatlan reakció-erőket a folytonos tartóknál (329. ábra) meg tudjuk határozni. Az A alátámasztást eltávolítjuk és A pontban



329. ábra.

$N = 1$ erőt képzelünk működtetve, s meghatározzuk a behajlási vonalat ezen N terhelés mellett, ha különben a tartó terheletlen. Ezen behajlási vonal ordinátái adják a tartó különböző helyeire a befolyásoló számokat $N = 1$ mellett,

úgyhogy pl. b a befolyásoló szám P -re nézve. Tehát tetszőleges N terhelés mellett Nb lesz a besüllyedés nagysága. Ha mármost a különben terheletlen tartóra $P = 1$ terhelést helyezünk, akkor a Maxwell-teória szerint ez ugyanazon b behajlást idézi elő A -ban, amelyet az $N = 1$ terhelés okozott a B pontban és így a B pontban egy tetszőleges P terhelés Pb besüllyedést okoz A -ban. Ha tehát két helyen alátámasztott tartó n teherrel van megterhelve, $P_1, P_2, \dots, P_n$, úgy ezek A -ban a következő besüllyedést létesítik:

$$P_1 \cdot b^{(1)} + P_2 \cdot b^{(2)} + P_3 \cdot b^{(3)} + \dots + P_n \cdot b^{(n)}$$

ha a $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ pontokban működő erőkhöz: $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}, \dots, b^{(n)}$ tartozik.

Ha most A pontban valamely reakció-erő ezen besüllyedést megakadályozza, akkor:

$$Na = P_1 b^{(1)} + P_2 b^{(2)} + P_3 b^{(3)} + \dots + P_n b^{(n)}$$

ahonnan:

$$N = \frac{P_1 b^{(1)} + P_2 b^{(2)} + P_3 b^{(3)} + \dots + P_n b^{(n)}}{a} \quad (6)$$

Amint N reakció-erőt ismerjük, az N_1 és N_2 reakció-erőket is az egész tartó egyensúlyát kifejező két sztatikai egyenletből meghatározhatjuk.

Mivel az egyedüli behajlási vonal elegendő a $P_1, P_2, \dots, P_n$ erők minden állásánál N meghatározására, ezért ezt befolyásoló vonalnak nevezzük.

Ha az alátámasztásnál a besüllyedés van, akkor:

$$Na = P_1 b^{(1)} + P_2 b^{(2)} + P_3 b^{(3)} + \dots + P_n b^{(n)} = \mu$$

Határozzuk meg ezek alapján a 330.

ábrán feltüntetett tartónál a felszabadító erőket. A (6) képlet szerint:

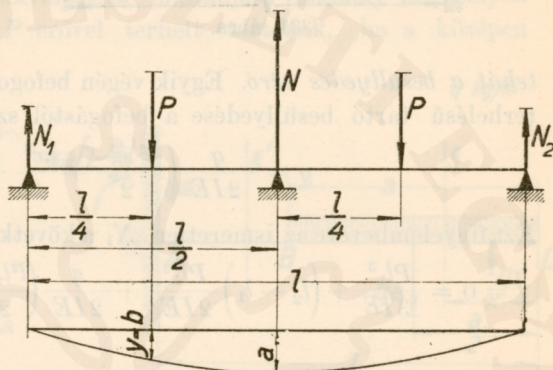
$$Na = Pb + Pb = 2Pb$$

A besüllyedés:

$$f = \frac{1}{48} \frac{Nl^3}{IE}$$

tehát a befolyásoló szám:

$$a = \frac{1}{48} \frac{l^3}{IE}$$



330. ábra.

A besüllyedés (elasztikus vonal) egyenletéből a befolyásoló szám tetszőleges helyen:

$$y = \frac{l^3}{16IE} \left(\frac{x}{l} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} \right)$$

és ha $x = \frac{l}{4}$, akkor:

$$y = \frac{l^3}{16IE} \left[\frac{1}{4} - \frac{4}{3} \frac{64}{l^3} \right] = \frac{11}{768} \frac{l^3}{IE}$$

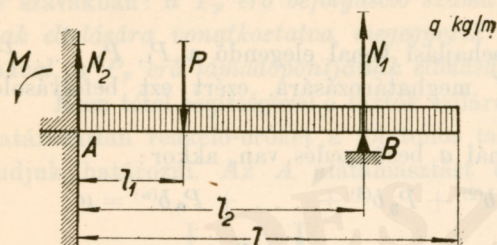
Mármost:
$$N \frac{1}{48} \frac{l^3}{IE} = 2P \frac{11}{768} \frac{l^3}{IE}$$

amiből:
$$N = 2 \cdot \frac{528}{768} P = 2 \cdot \frac{22}{32} P = \frac{22}{16} P$$

tehát a másik két felszabadító erő, mivel ezek egyenlőek és

$$N_1 + N_2 = \frac{10}{16} P \quad \text{lesz:} \quad N_1 = N_2 = \frac{5}{16} P$$

A 331. ábrán felülről határozatlan. A Castigliano—Maxwell-teória szerint a felszabadító erőt a



331. ábra.

következőképp határozhatjuk meg. Az ismeretlen N_1 felszabadító erő ugyanakkora, de ellentétes irányú besüllyedést okoz a B pontban, mint a terhelések ugyancsak a B pontban.

A B pontban tehát a besüllyedés zéró. Egyik végén befogott egyenletesen elosztott terhelésű tartó besüllyedése a befogástól számított x távolságban :

$$y = \frac{q}{2IE} \left(\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right)$$

Ezt figyelembevéve az ismeretlen N_1 a következő egyenletből kapható :

$$f = 0 = \frac{Pl_1^3}{3IE} + (l_2 - l_1) \frac{Pl_1^2}{2IE} + \frac{q}{2IE} \left(\frac{l^2 l_2^2}{2} - \frac{ll_2^3}{3} + \frac{l_2^4}{12} \right) - \frac{N_1 l_2^3}{3IE}$$

Példák a IX. fejezethez.

1. Valamely 2.2 cm^2 keresztmetszvényű, prizmatikus vasrúd $P = 4000 \text{ kg}$ erővel van megterhelve. Keressük a fajlagos alakváltozási munkát, tehát mekkora alakváltozási munkát vesz fel a rúd cm^3 -ként?

Az 58. § (9) képlete szerint :

$$\mathfrak{A} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{P^2}{F^2 \cdot 2E} = \frac{4000^2}{4^2 \cdot 2 \cdot 2000000} = \frac{1}{4} \text{ kgcm/cm}^3$$

2. Valamely l hosszúságú egyenszilárdságú tartó végső szelvénye F_0 és P erővel van húzásra megterhelve. A tartó anyagának fajsúlya γ . Keresendő a tartó alakváltozási munkája. (Wittenbauer.)

Mindhogy σ minden szelvényben egyforma és a határoló görbe

egyenlete: $F_x = F_0 \cdot e^{\frac{\gamma x}{\sigma}}$ ahol: $\sigma = \frac{P}{F_0}$, azért az 58. § (6) képlete alapján :

$$A = \frac{\sigma^2}{2E} \int_0^l F_x \cdot dx = \frac{P^2}{2EF_0^2} \int_0^V dV = \frac{P^2 \cdot V}{2EF_0^2}$$

amely egyenletben V , a tartó térfogata.

$$\text{De: } V = \int_0^l F_0 e^{\frac{\gamma x}{\sigma}} dx = \left[\frac{\sigma}{\gamma} F_0 e^{\frac{\gamma x}{\sigma}} \right]_0^l = \frac{F_0 \sigma}{\gamma} \left(e^{\frac{\gamma l}{\sigma}} - 1 \right) = \frac{P}{\gamma} \left(e^{\frac{\gamma l}{\sigma}} - 1 \right)$$

tehát az alakváltozás munkája:

$$A = \frac{P^3}{2EF_0^2\gamma} \left(e^{\frac{\gamma l}{P}} - 1 \right)$$

3. Keressük az alakváltozási munkáját valamely két helyen alátámasztott, közepén P erővel terhelt tartónak, ha a közepén

$$f = \frac{Pl^3}{48IE} \text{ a besüllyedés.}$$

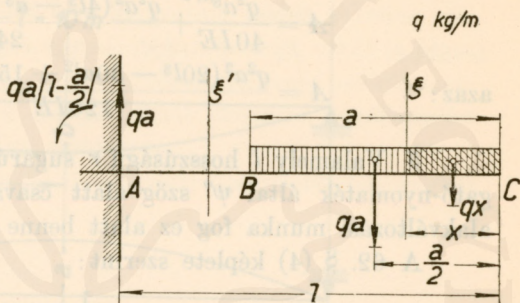
A 60. § (1) képletével:

$$A = \frac{1}{2} P \cdot f$$

$$\text{de: } P = \frac{48IEf}{l^3}$$

és így az alakváltozás munkája:

$$A = \frac{24IEf^2}{l^3}$$



332. ábra.

4. Valamely egyik végén befogott l hosszúságú tartó a szabad végétől számított a távolban q kg/m egyenletesen elosztott terhet hord (332. ábra). Keressük az alakváltozási munkát. (Wittenbauer.)

BC között a nyomaték:

$$\text{és } AB \text{ között: } M_1 = \frac{qx^2}{2}$$

$$M_2 = qa \left(x - \frac{a}{2} \right)$$

Az alakváltozási munka a 60. § (5) képlet szerint:

$$A = \frac{1}{2IE} \left(\int_0^a M_1^2 dx + \int_a^l M_2^2 dx \right)$$

Az integrálásokat végrehajtva:

$$\int_0^a \frac{q^2 x^4}{4} dx = \frac{q^2}{4} \frac{a^5}{5} = \frac{q^2 a^5}{20}$$

$$\begin{aligned}
 \text{és} \quad q^2 a^2 \int_a^l \left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4} \right) dx &= q^2 a^2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} + \frac{a^2 x}{4} \right]_a^l = \\
 &= q^2 a^2 \frac{4(l^3 - a^3) - 6a(l^2 - a^2) + 3a^2(l - a)}{12} = \\
 &= q^2 a^2 \left(\frac{4l^3 - 4a^3 - 6al^2 + 6a^3 + 3a^2 l - 3a^3}{12} \right) = \\
 &= \frac{q^2 a^2}{12} (4l^3 - a^3 - 6al^2 + 3a^2 l)
 \end{aligned}$$

Adjuk össze a két határozott integrál értékét:

$$A = \frac{q^2 a^5}{40IE} + \frac{q^2 a^2 (4l^3 - a^3 - 6al^2 + 3a^2 l)}{24IE}$$

$$\text{azaz:} \quad A = \frac{q^2 a^2 (20l^3 - 30al^2 + 15a^2 l - 2a^3)}{120IE}$$

5. Valamely l hosszúságú r sugarú tengely, valamely M_{cs} forgató-nyomaték által ψ° szög alatt csavarodik el. Kérdés: mennyi alakváltozási munka fog ez alatt benne felhalmozódni?

A 62. § (4) képlete szerint:

$$A = \frac{1}{2} M_{cs} l \vartheta$$

ahol M_{cs} a (6) képletből:

$$M_{cs} = \frac{\pi}{2} G \vartheta r^4$$

$$\text{és} \quad \psi^\circ = l \vartheta^\circ = l \frac{180^\circ}{\pi} \vartheta$$

$$\text{Tehát:} \quad A = \frac{\pi}{4} G \vartheta^2 r^4 l$$

$$\text{de:} \quad \vartheta^2 = \frac{\pi^2}{180^{\circ 2}} \frac{\psi^{\circ 2}}{l^2}$$

$$\text{tehát:} \quad A = \frac{\pi}{4} G \cdot r^4 \cdot l \frac{\pi^2 \psi^{\circ 2}}{180^{\circ 2} \cdot l^2} = \frac{\pi^3}{4 \cdot 180^{\circ 2}} G r^4 \frac{\psi^{\circ 2}}{l}$$

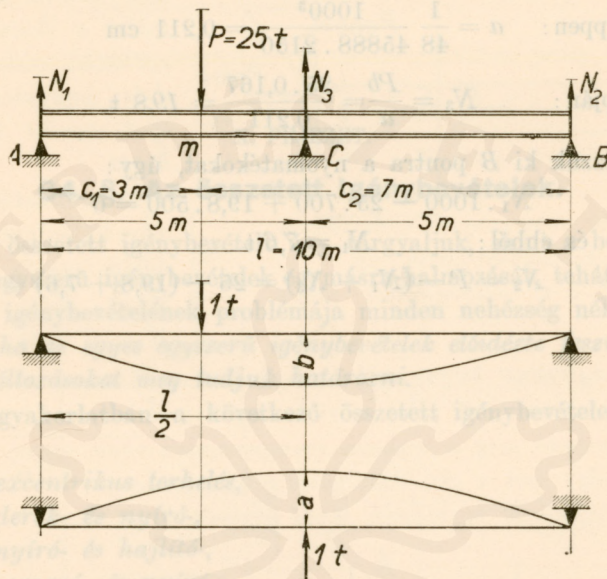
és így az alakváltozás munkája:

$$A = \frac{\pi^3}{129600} \frac{G r^4}{l} \psi^{\circ 2}$$

6. Valamely $l = 10$ m hosszú $\perp$ 45 N.P. tartó három helyen van alátámasztva, e három alátámasztás pedig két egyenlő mezőre osztja. A tartó a 333. ábrán megadott méretek mellett m pontban

$P = 25 \text{ t}$ erővel van megterhelve. Keressük N_1 , N_2 és N_3 ismeretlen felszabadító erőket a *Maxwell*-féle felcserélhetőségi tétel alapján.

$I = 45888 \text{ cm}^4$ és $E = 2150 \text{ t/cm}^2$. Ha N_3 értékét meghatároztuk, akkor N_1 és N_2 már a sztatika két alapegyenletéből nyerhető.



333. ábra.

A 63. § (6) egyenlete, ha csak egy erő működik, így alakul át:

$$N_3 a = P b$$

amely egyenletben a azon behajlást jelenti, melyet a két szélső alátámasztáson nyugvó tartó szenvedne $N_3 = 1 \text{ t}$ erő hatása folytán az N_3 alatt; b pedig azon behajlást jelenti, melyet a két szélső alátámasztáson nyugvó tartó szenvedne ugyancsak N_3 erő helyén, ha csupán $P = 1 \text{ t}$ erő terhelné a rajzban adott m helyen.

Az a és b egyszerűen meghatározható. Ugyanis:

$$a = \frac{1}{48} \frac{l^3}{IE}$$

és b értéket megkapjuk, ha a rugalmas vonal egyenletében: $y = f(x)$

az $x = \frac{l}{2}$ értéket behelyettesítjük:

$$y = \frac{1}{IE} \frac{c_1^2 \cdot c_2^2}{6l} \left(2 \frac{x}{c_2} + \frac{x}{c_1} - \frac{x^3}{c_2^2 c_1} \right)$$

ámde $c_1 = 300$ cm, $c_2 = 700$ cm és $x = \frac{l}{2} = 500$ cm, tehát:

$$b = \frac{1 \cdot 300^2 \cdot 700^2}{45888 \cdot 2150 \cdot 6000} \left(2 \frac{500}{700} + \frac{500}{300} - \frac{500^3}{700^2 \cdot 300} \right) = 0,167 \text{ cm}$$

hasonlóképpen: $a = \frac{1}{48} \frac{1000^3}{45888 \cdot 2150} = 0,211 \text{ cm}$

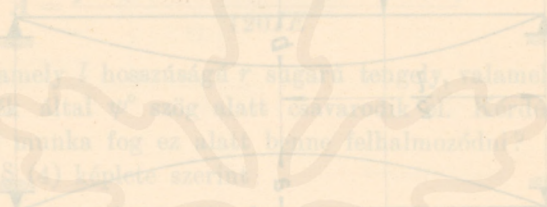
Ezek alapján: $N_3 = \frac{Pb}{a} = \frac{25 \cdot 0,167}{0,211} = 19,8 \text{ t.}$

Fejezzük ki B pontra a nyomatékokat, úgy:

$$N_1 \cdot 1000 - 25 \cdot 700 + 19,8 \cdot 500 = 0$$

és ebből: $N_1 = 7,6 \text{ t}$

továbbá: $N_2 = P - (N_1 + N_3) = 25 - (19,8 + 7,6) = -2,4 \text{ t.}$



X. FEJEZET.

64. §. Az összetett igénybevételek.

Az összetett igénybevételt úgy tárgyaljuk, mint a benne előforduló egyszerű igénybevételek egymásra-halmozását, tehát a tartó összetett igénybevételének problémája minden nehézség nélkül megoldható, ha az egyes egyszerű igénybevételek előidézte feszültségeket és alakváltozásokat meg tudjuk határozni.

A gyakorlatban a következő összetett igénybevételek gyakoribbak:

1. excentrikus terhelés,
2. derék- és nyíró-,
3. nyíró- és hajlító-,
4. csavaró- és nyíró-,
5. derék- és csavaró- és végül
6. csavaró- és hajlítóigénybevétel.

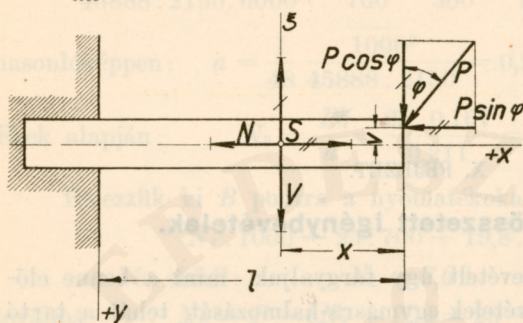
65. §. Excentrikus terhelés.

Valamely egyik végén befalazott prizmás tartó a szabad végén egy a szelvény súlypontjától v távolságban levő és φ szög alatt hajló P erővel van megterhelve (334. ábra). A P erő komponensei $P \cos \varphi$ és $P \sin \varphi$. Tetszőleges ξ szelvény terhelését vizsgálva, rakjuk át ezen komponenseket a ξ szelvény súlypontjába pozitív és negatív értelemben. Az egy és két vonalkával jelölt erők hajlító- erőpárokat alkotnak és az eredő hajlítónyomaték:

$$M_x = P \cos \varphi \cdot x - P \sin \varphi \cdot v \quad (1)$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M_x}{EI} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (2)$$

A ξ szelvény terhelése tehát — az önsúlytól eltekintve — az M_x eredő hajlítónyomaték, továbbá az $N = P \sin \varphi$ nyomó- és a $V = \frac{dM_x}{dx} = P \cos \varphi$ nyíróerők; a tartó összetett szilárdságra van



334. ábra.

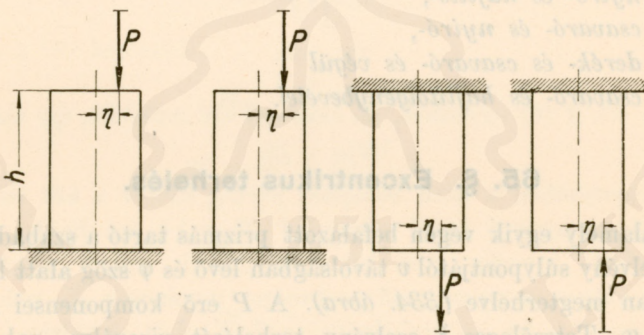
igénybevéve. Ezen adatokból a feszültségi és görbülési viszonyok, a már ismeretes szabályok szerint kiszámíthatók.

Bennünket leginkább azon különleges eset érdekel, midőn $\varphi = 90^\circ$, tehát $M_x = -P \cdot v$;

$N = P$ és $V = 0$,

ez az *excentrikus húzás, illetve nyomás*, aszerint, amint P húzó- vagy összenyomó-erő. Ha a rúd függőleges helyzetű, négy eset különböztethető meg a terhelés szempontjából (335. ábra).

A négy eset a rúd önsúlyától eltekintve, csak a P erő előjelében különbözik egymástól, tehát közösen tárgyalható.



335. ábra.

Keressük excentrikus összenyomás esetén (336. ábra) a keletkező belső feszültségeket. A P erő a derékszögű négyszög-szelvényű tartó súlyvonalától η távolságban működik, s így η az *excentricitás*. A terhelt szelvény súlypontjában felvesszünk két egyenlő nagy, de ellentétes irányú P erőt, az adott P erővel párhuzamosan. Az egyik P erő ekkor tisztán összenyomást okoz, a vonalkával jelzett $P \cdot \eta$ erőpár pedig tisztán hajlítást az y tengely körül. A keletkező belső eredő-

feszültség, tetszőleges v szelvényben, mint a tiszta összenyomásból és a tiszta hajlításból származó derékfeszültségek algebrai összege:

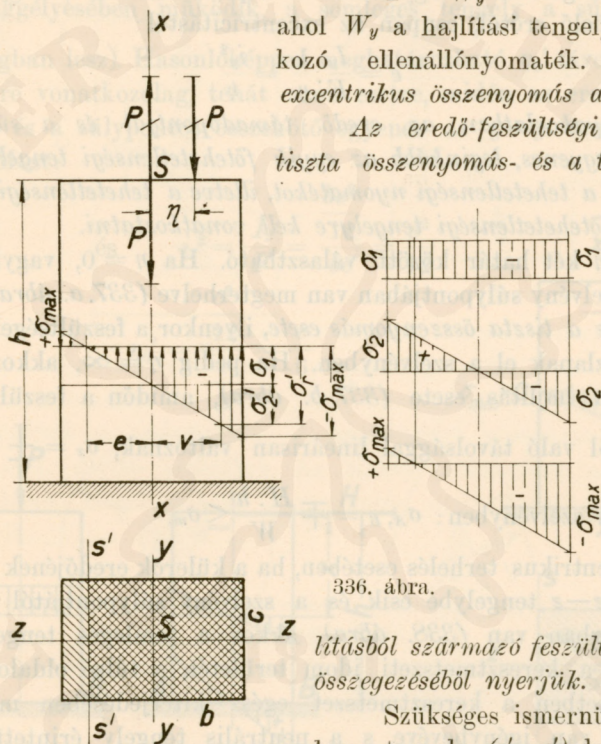
$$\sigma_r' = \sigma_1 + \sigma_2' = -\left(\frac{P}{F} \pm \frac{P\eta v}{I_y}\right)$$

ahol $\sigma_1 = -\frac{P}{F}$ a tiszta összenyomásból és $\sigma_2' = \mp \frac{P\eta v}{I_y} = \mp \frac{Mv}{I_y}$ a tiszta hajlításból eredő derékfeszültség; a szélső szálakban pedig, ha:

$$v = \mp \frac{b}{2}; \sigma_r = \sigma_{\max} = -\left(\frac{P}{F} \pm \frac{M}{W_y}\right) \leq \sigma_m \quad (3)$$

ahol W_y a hajlítási tengelyre vonatkozó ellenállónyomaték. Ez az *excentrikus összenyomás* alapképlete.

Az *eredő-feszültségi ábrát* a *tiszta összenyomás- és a tiszta haj-*



336. ábra.

lításból származó feszültségi ábrák összegezéséből nyerjük.

Szükséges ismernünk a semleges tengely ($s'-s'$) helyzetét is, melyben az eredőfeszültség zéró és amely elválasztja a szelvény azon pontjait, melyekben húzófeszültség ébred, azon pontoktól, melyekben a feszültség összenyomó (az ábrán a szelvény nyomott része keresztben-sraffozott). Legyen a semleges tengely távolsága a súlyvonalától:

$$v = -e$$

A v szelvényben, mint ismeretes, a feszültség:

$$\sigma_r = -\left(\frac{P}{F} + \frac{P\eta v}{I_y}\right)$$

ahonnan, ha:

$$v = -e \text{ és } \sigma_r = 0$$

$$\frac{P}{F} - \frac{P\eta e}{I_y} = 0$$

és tovább:

$$\frac{I_y}{F} = \eta \cdot e = i_y^2 \quad (4)$$

ahol i_y a szelvény tehetetlenségi sugara a hajlítás tengelyére, amely prizmás tartónál állandó. Az excentricitásnak és a semleges tengely súlyponttól mért távolának szorzata, tehát állandó. Ha η nő, e kisebbedik és megfordítva. Ugyancsak e képletből látható, hogy e nem függ a terhelő erőtlől, csupán az excentricitástól:

$$e = \frac{I_y}{F} \cdot \frac{1}{\eta} = \frac{i_y^2}{\eta}$$

A gyakorlatban az eredő támadópontját és a súlypontot összekötő egyenes, leginkább az egyik főtehetetlenségi tengellyel esik össze, így a tehetetlenségi nyomatékot, illetve a tehetetlenségi-sugarat a másik főtehetetlenségi tengelyre kell vonatkoztatni.

Az η két határ között választható. Ha $\eta = 0$, vagyis a rúd a végső szelvény súlypontjában van megterhelve (337. a. ábra), akkor $e = \infty$; ez a tiszta összenyomás esete, ilyenkor a feszültségek egyenletesen oszlanak el a szelvényben. Ha pedig $\eta = \infty$, akkor $e = 0$; ez a tiszta hajlítás esete (337. b. ábra), amidőn a feszültségek a súlyponttól való távolsággal lineárisan változnak, $\sigma_x = \pm \frac{H \cdot x}{W}$ és

a veszélyes szelvényben: $\sigma_{A, B} = \mp \frac{H \cdot h}{W} \leq \sigma_m$.

Excentrikus terhelés esetében, ha a külerők eredőjének támadópontja a $z-z$ tengelybe esik és a szelvény súlypontjától bizonyos η_0 távolságban van (338. ábra), akkor a semleges tengely, vagy zéróvonala a keresztmetszeti idom területét, a túlsó oldalon érinti. E határesetben a keresztmetszet egész kiterjedésében mindenütt nyomásra van igénybevéve, s a neutrális tengely érintette szélső pontokban, vagy pontban a feszültség zéró. Kessük az η_0 excentricitást. Az e távolság most a szélső szál távolsága, tehát $e = a_0$.

Érvényes mindenkor, hogy $\eta \cdot e = \eta_0 \cdot a_0 = i_y^2 = \text{konstans}$, ahonnan:

$$\eta_0 = \frac{i_y^2}{a_0} \quad (5)$$

A 338. ábrán feltüntetett derékszögű négyszög-szelvénynél:

$$a_0 = \frac{b}{2} \quad \text{és} \quad i_y^2 = \frac{I_y}{F} = \frac{\frac{cb^3}{12}}{cb} = \frac{b^2}{12}$$

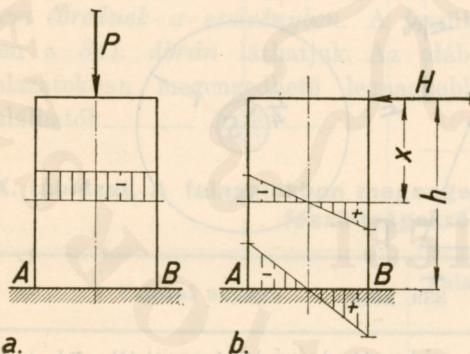
tehát :

$$\eta_0 = \frac{\frac{b^2}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{b}{6}$$

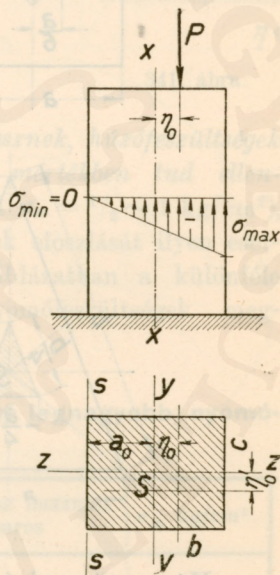
Azaz, ha az eredő a súlyponttól $\frac{b}{6}$ távolban hat, a semleges tengely összeesik a szélső szállal (ha pedig fordítva, az erő a szélső szál függélyesében működik, a semleges tengely a súlyponttól $\frac{b}{6}$ távolságban lesz). Hasonlóképpen meghatározható η_0' távolság a $z-z$ tengelyre vonatkozólag, tehát azon esetre, midőn az eredő támadópontját és a súlypontot összekötő egyenes az $y-y$ tengellyel esik össze. Most:

$$a_0 = \frac{c}{2} \quad \text{és} \quad i_z^2 = \frac{I_z}{F} = \frac{\frac{bc^3}{12}}{bc} = \frac{c^2}{12}$$

$$\text{tehát:} \quad \eta_0' = \frac{\frac{c^2}{12}}{\frac{c}{2}} = \frac{c}{6}$$



337. ábra.



338. ábra.

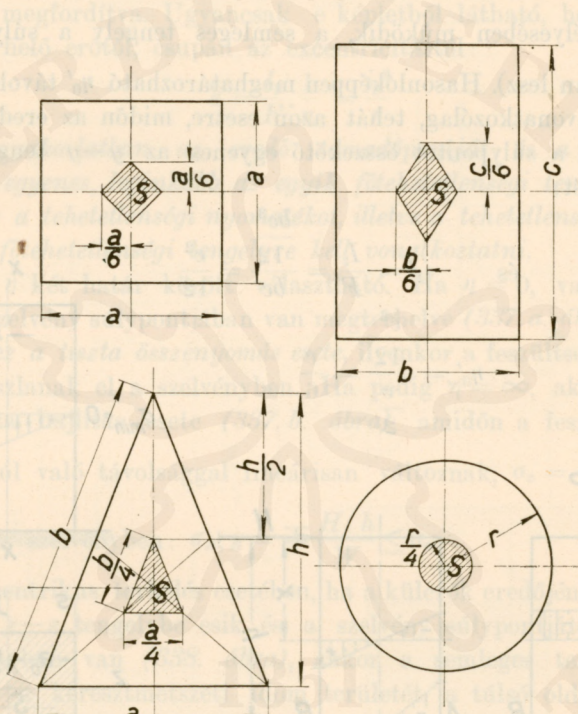
A súlyponttól számítva η_0 -nak minden irányban van bizonyos értéke és az ezen pontokat összekötő görbe által bezárt területet, a keresztmetszet magjának, vagy magszelvényének nevezzük. A magszelvényen belül terhelve a tartót, annak bármely szelvényében csak összenyomó-feszültségek keletkeznek, húzófeszültségek nem.

Körszelvény magjának a meghatározásánál elegendő η_0 -t, mint a mag sugarát kiszámítani. Mivel itt η_0 minden irányban ugyan-

azon értékkel bír, a magszelvény az adott szelvénnel koncentrikus kör lesz. Tehát:

$$\eta_0 = \frac{i_0^2}{a_0}$$

de: $i_0^2 = \frac{d^4 \pi}{d^2 \pi} = \frac{d^2}{4}$ és $a_0 = \frac{d}{2}$ tehát: $\eta_0 = \frac{\frac{d^2}{4}}{\frac{d}{2}} = \frac{d}{8} = \frac{r}{4}$

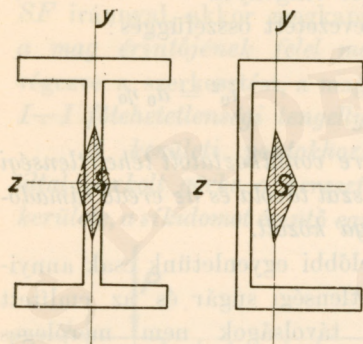


339. ábra.

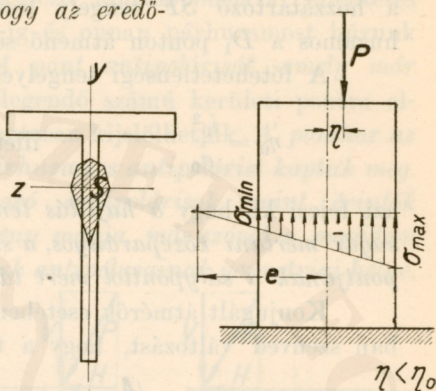
Háromszög-szelvény magidomát hasonlóképpen állapíthatnók meg, eredményül egy olyan, az adott háromszög oldalaival rendre párhuzamos oldalú háromszöget kapunk, melynek csúcspontjai az adott háromszög oldalfelező egyenesének felezőpontjaival vágnak össze és oldalhosszai az adott háromszög oldalhosszainak negyedrésszével egyenlők.

Derékszögű négyszög-, négyzet-, háromszög- és körszelvények magjai a 339. ábrán vannak feltüntetve, a 340. ábrán pedig a Γ , $\square$, $\triangle$ szelvényeké.

A falazatokra (támasztófalak, gátak, kémények) önsúlyukon kívül tetszőleges irányú erők működhetnek, mint víz- és földnyomás, szélnyomás, centrikus és excentrikus terhelések. Ha az összes erők eredőjének függőleges komponense a falazat magsszelvényén belül támad, akkor elérjük azt, hogy az eredő-



340. ábra.



341. ábra.

feszültségek mind összenyomó-feszültségek lesznek, húzófeszültségek ellenben, melyeknek a falazat csak csekély mértékben tud ellenállni (pl. nyomásra $\sigma_m = 7 \text{ kg/cm}^2$, húzásra $\sigma_m = 1/2 \sim 1 \text{ kg/cm}^2$), nem ébrednek a szelvényben. A feszültségek eloszlását ilyen esetben a 341. ábrán láthatjuk. Az alábbi táblázatban a különféle falazatokban megengedhető legnagyobb nyomófeszültségek megtalálhatók.

IX. táblázat. A falazatokban megengedhető legnagyobb nyomófeszültségekről.

Falazat anyaga	Falazathoz használt habares	$\sigma_m \text{ kg/cm}^2$
Közönséges téglá	fehér mész	5—7
Közönséges téglá	cement	8—10
Kemény pillértégla	cement	12—15
Szilárd terméskő	cement	8—9
Kevésbbé szilárd terméskő	fehér mész	3—5
Kevésbbé szilárd terméskő	cement	5—7

Szabálytalan és tetszőleges görbe vonalakkal határolt kereszt-szelvények magját legegyszerűbben a tehetetlenségi ellipszis segítségével szerkeszthetjük meg.

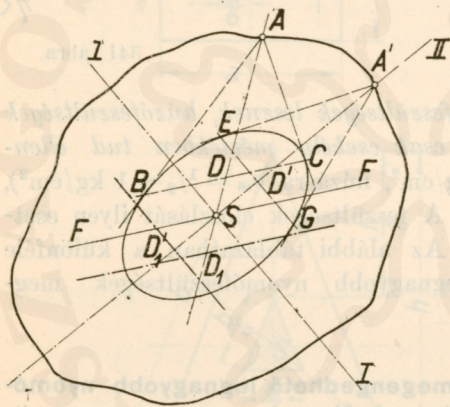
Ha azt kívánjuk, hogy a semleges tengely a szélső A szállal essék össze (342. ábra), akkor a P erőt a hajlítás tengelyétől $\overline{SD_1}$ távolságban kell működtetni, a magszelvény érintővonalán. Az AS erővonal tekinthető a centrál-ellipszis egyik konjugált tengelyének, a hozzátartozó $\overline{SF}$ tengely lesz a hajlítás tengelye, amely párhuzamos a D_1 ponton átmenő semleges tengellyel.

A főtehetetlenségi tengelyekre levezetett összefüggés:

$$\eta_0 = \frac{i_0^2}{a_0} \quad \text{illetve:} \quad i_0^2 = a_0 \eta_0$$

azt fejezi ki, hogy a hajlítás tengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi sugár mértani középárányos, a szélső szál távolsága és az eredő támadópontjának a súlyponttól mért távolsága között.

Konjugált átmérők esetében ez előbbi egyenletünk csak amnyiban szenved változást, hogy a tehetetlenségi sugár és az említett



342. ábra.

távolságok nem merőleges irányban, hanem a konjugált tengelyekkel párhuzamos irányban értendők. Tehát i_0 helyett i_0' , a_0 helyett a_0' és η_0 helyett η_0' veendő. Ábránkban tehát $\overline{SE}$ megfelel az $\overline{SF}$ hajlítási tengelyre vonatkozó tehetetlenségi sugárnak, ha a felületelemek távolságait AS irányhoz párhuzamosan vesszük. $\overline{SA}$ a szélső szál távolsága, szintén nem merőlegesen

mérve a hajlítás tengelyétől, hanem a konjugált tengely irányában; úgyszintén $\overline{SD_1} = \overline{SD}$. Azaz érvényes, hogy: $\overline{SE}^2 = \overline{SD} \cdot \overline{SA}$.

Ez az egyenlet érvényes akkor is, ha $\overline{SA}$ távolban képzeljük a külerőt működtetve, de abban az esetben a semleges tengely a D_1 ponton megy át és ismét az $\overline{SA}$ irányához konjugált iránnyal esik össze.

Ezek előrebocsátásával fogunk a belső mag megszerkesztéséhez.

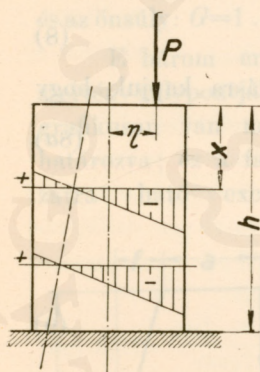
Tegyük fel, hogy a külerő A pontban működik, szerkesszük meg a szelvény magjának az érintőjét. Az A pontot összekötjük S súlyponttal, azután meghúzzuk A pontból az idom centrál ellipsziséhez az érintőket. Az érintési pontokat összekötő egyenest, $\overline{BC}$ -t, az A pont

polárisának nevezzük, amelyre nézve ismeretes, hogy $\overline{SE}^2 = \overline{SD} \cdot \overline{SA}$; de $\overline{SA} = a_0'$ és $\overline{SE}^2 = i_0'^2$ és így $i_0'^2 = a_0' \cdot \overline{SD}$ és

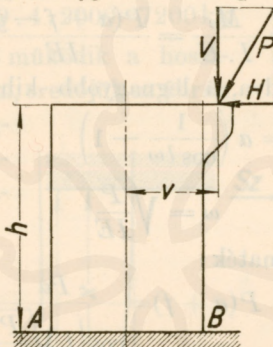
$$\overline{SD} = \eta_0' = \overline{SD}_1.$$

Ha a nyert D pontot a külerő támadópontjával ellentétes irányban S ponttól felrakjuk D_1 -ig és onnan párhuzamost húzunk $\overline{SF}$ iránnyal, akkor megkapjuk A pont antipolárisát, amely már a mag érintőjének felel meg. Elegendő számú kerületi pontra elvégezve a szerkesztést, a magot pontosan kijelölhetjük. A' ponthoz az $I-I$ főtehetetlenségi tengellyel párhuzamos antipolárist kaptuk meg.

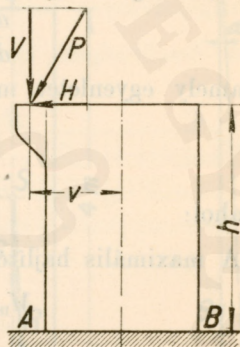
A kerületi pontokhoz tartozó antipolárisok, mint érintők által burkolt görbe, a keresztszelvény magja, más szóval a magidom kerülete, a síkidomot érintő egyenesek antipólusainak geometriai helye.



343. ábra.



a.



b.

344. ábra.

Ha az excentrikus terhelésnél a rúd önsúlyát is figyelembe vesszük, úgy a tartó felső végétől x távolságban levő szelvényben (343. ábra) — ha G_x az x hosszúságú tartórész súlya — a feszültség:

$$\sigma_x = -\frac{P + G_x}{F} \mp \frac{P\eta v}{I}$$

Mivel G_x arányos x -szel, azért a semleges tengelyeket magában foglaló sík u. i. a semleges réteg nem lesz függélyes helyzetű, mint amikor az önsúlyt figyelmen kívül hagytuk, hanem ferde, felülről lefelé távolodik a rúd tengelyétől.

Gyakrabban előforduló terheléseket tüntet fel a 344. ábra. Keressük a feszültségeket a veszélyes szelvény A és B pontjaiban.

A hajlító-nyomaték a legalsó szelvényre

a) esetben:

$$M = Hh - V \cdot v$$

a feszültségek pedig:

$$\sigma_{A,B} = -\frac{V}{F} \mp \left(\frac{Hh - V \cdot v}{W} \right) \leq \sigma_m \quad (6)$$

b) esetben pedig:

$$M = Hh + V \cdot v$$

és a feszültségek:

$$\sigma_{A,B} = -\frac{V}{F} \mp \left(\frac{Hh + V \cdot v}{W} \right) \leq \sigma_m \quad (7)$$

amely képletekben a felső előjel *A* pontra, az alsó előjel *B* pontra érvényes.

Előfordulhat hosszú rudaknál, hogy valamely erő excentrikusan működik nyomásra, a szelvényen kívül fekvő karon (345. ábra); ilyenkor a rúd kihajlik. Állapítsuk meg a rúdban fellépő maximális feszültségeket. A rugalmas vonal differenciálegyenlete:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{I \cdot E} = \frac{P(a + f - y)}{IE} \quad (8)$$

amely egyenletet megoldva, a legnagyobb kihajlásra kapjuk, hogy

$$f = a \left(\frac{1}{\cos l\omega} - 1 \right) \quad (8a)$$

ahol:

$$\omega = \sqrt{\frac{P}{IE}}$$

A maximális hajlítónyomaték:

$$M_{\max} = P(a + f) = \frac{Pa}{\cos \left(l \sqrt{\frac{P}{IE}} \right)} \quad (9)$$

és

$$\sigma_{\max}^{I, II} = -\left(\frac{P}{F} \mp \frac{M_{\max}}{W} \right) \leq \sigma_m \quad (9a)$$

Megközelítőleg vehető a cosinus-sor alapján, hogy:

$$\cos \left(l \sqrt{\frac{P}{IE}} \right) = 1 - \frac{Pl^2}{2IE} \quad (10)$$

Ha pedig a hosszú rudat excentrikus húzásra vesszük igénybe, akkor (346. ábra) a legnagyobb kihajlás:

$$f = a \left(1 - \frac{1}{\operatorname{Cos} l\omega} \right) \quad (11)$$

(ahol »Cos« hiperbolikus függvény) és a maximális hajlító-nyomaték:

$$M_{\max} = P \cdot a$$

mivel az alakváltozás miatt az erő karja kisebbedik, tehát ha a tartó kihajlik, a nyomaték is, a feszültség is csökken. Így a maximális feszültség:

$$\sigma_{\max}^{I, II} = \left(\frac{P}{F} \pm \frac{M_{\max}}{W} \right) \leq \sigma_m \quad (12)$$

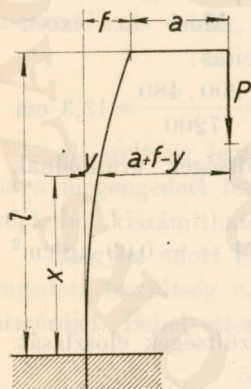
Közelítőleg vehető, hogy:

$$\cos \left(l \sqrt{\frac{P}{IE}} \right) \approx 1 + \frac{Pl^2}{2IE} \quad (13)$$

Végül határozzuk meg valamely falazatnál adott esetben a maximális feszültségeket. Valamely 4 m magas, 0,9 m vastag szabadon álló falat önsúlyán kívül $P = 5000$ kg centrikus nyomó-erő és a szélnyomás terheli (347. ábra). A falazat fajsúlya $\gamma = 2000$ kg/m³ és a szélnyomás $Sz = 120$ kg/m². A falazatnak rendszeren 1 m hosszúságú darabját vesszük vizsgálat alá.

1 m hosszú falazatra ható
 szélnyomás: $Sz = 4 \cdot 120 = 480$ kg
 terhelő erő: $P = 5000$ kg
 és az önsúly: $G = 1 \cdot 0,9 \cdot 4 \cdot 2000 = 7200$ kg

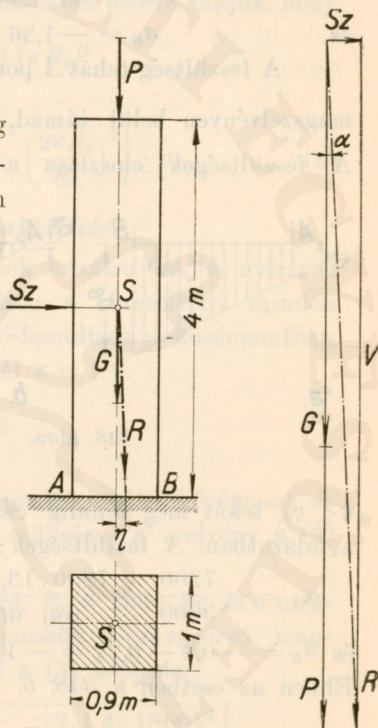
E három erő működik a hosszszelvény súlypontjában, eredőjük az ábrán grafikusan van meghatározva; ez a falazatra ható excent-



345. ábra.



346. ábra.



347. ábra.

rikus terhelés. Az eredő horizontális komponense $H = Sz = 480$ kg, amely a falazatot elcsúsztatni igyekszik, de ennek ellenáll a falazat súlya, tehát elhanyagolható, mert $\alpha < \varphi$, ahol φ a surlódás szöge a falazat anyagára. Marad, mint excentrikus nyomó-erő a függőleges komponens: $V = P + G = 12200$ kg.

Számítsuk ki az excentricitást.

$$12200 : 480 = 200 : \eta$$

ahonnan: $\eta = \frac{200 \cdot 480}{12200} = 7,86 \text{ cm.}$

A feszültségek a legalsó szelvény A és B pontjaiban:

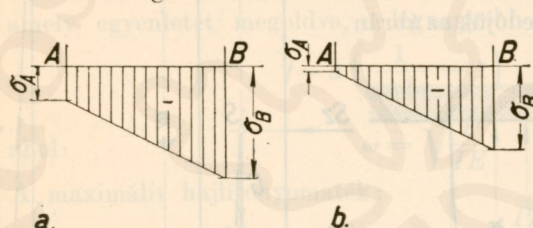
$$\sigma_{A,B} = -\frac{P}{F} \pm \frac{P\eta}{W} \quad (15)$$

ahol a felső előjel az A pontra, az alsó előjel B pontra vonatkozik. Tehát:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= -\frac{12200}{9000} + \frac{12200 \cdot 7,86 \cdot 6}{100 \cdot 90^2} = \\ &= -1,36 + 0,71 = -0,65 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

és $\sigma_B = -1,36 - 0,71 = -2,07 \text{ kg/cm}^2$

A feszültség tehát A pontban is összenyomó; ugyanis itt az erő a magszelvényen belül támad, $\eta = 7,86 \text{ cm}$, míg $\eta_0 = \frac{90}{6} = 15 \text{ cm}$. A feszültségek eloszlása a 348. a. ábrán látható.



348. ábra.

Számítsuk ki a feszültségeket azon esetben, ha a $P = 5000 \text{ kg}$ nyomó erő, nem hatna a falra.

Most az excentricitás:

$$\eta = \frac{200 \cdot 480}{7200} = 13,3 \text{ cm}$$

$\eta < \eta_0$, tehát még mindig csak összenyomó-feszültségek uralkodnak a falazatban. A feszültségek:

$$\sigma_A = -\frac{7200}{9000} + \frac{7200 \cdot 13,3 \cdot 6}{100 \cdot 90^2} = -0,8 + 0,71 = -0,09 \text{ kg/cm}^2$$

és $\sigma_B = -0,8 - 0,71 = -1,51 \text{ kg/cm}^2$

Ebben az esetben a 348. b. ábra mutatja a feszültségek eloszlását.

66. §. Derék- és nyíró-igénybevétel.

Tegyük fel, hogy valamely szelvényt egyidejűleg az R_x derékerő és az R_y nyíróerő terheli. A derékfeszültség a szelvény minden pontjában ugyanazon értékű, tehát a legnagyobb rugalmas feszültség a szelvény azon pontjában ebred, amelyben a maximális nyírófeszültség keletkezik. Ha F a szelvény területe, akkor a derékfeszültség:

$$\sigma_x = \frac{R_x}{F} \quad (1)$$

és a legnagyobb nyírófeszültség:

$$\tau_{\max} = \frac{\alpha R_y}{F} \quad (2)$$

ahol α a szelvény alakjától függő tényező. A rugalmas feszültség abban a pontban, melyben $\tau_{\max}$ keletkezik, a *De Saint-Venant*-teória szerint:

$$\sigma_r = \frac{3 \sigma_x + 5 \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \tau_{\max}^2}}{8}$$

ahová σ_x és $\tau_{\max}$ értékeket (1) és (2) képletekből betéve kapjuk, hogy

$$\sigma_r = \frac{3 R_x + 5 \sqrt{R_x^2 + 4 (\alpha R_y)^2}}{8 F}$$

és továbbá:
$$\sigma_r = \frac{5}{8} \frac{R_x}{F} \left[0,6 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 \alpha R_y}{R_x} \right)^2} \right] \leq \sigma_m \quad (3)$$

Ez a derék- és nyírószilárdság alapképlete.

Így pl. előfordul néha, hogy csavarok húzásra (R_x) és nyírásra (R_y) vannak igénybevételre. A derékfeszültség a körszelvény minden pontjában ugyanazon értékű, a csúsztató-feszültség a középpontban maximális és értéke, mivel körszelvényenél $\alpha = 1,4$:

$$\tau_{\max} = \frac{1,4 R_y}{F}$$

A szelvény leginkább igénybevett pontja tehát a középpont és ha a megengedett feszültség σ_m adott, a szükséges F szelvény a (3) képletből kiszámítható.

Legyen adott esetben $R_x = 2500$ kg, $R_y = 1800$ kg és a megengedett feszültség $\sigma_m = 500$ kg/cm². Keressük a csavarorsó magátmérőjét. Behelyettesítve ezen értékeket a (3) képletbe:

$$\sigma_m = 500 = \frac{5}{8} \frac{2500 \cdot 4}{d^2 \cdot 3,14} \left[0,6 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot 1,4 \cdot 1800}{2500} \right)^2} \right]$$

ahonnan:
$$d = 3,36 \text{ cm}$$

ennek megfelel 1⁵/₈"-os csavar.

Összetett igénybevételre való méretezésnél általában úgy járunk el, hogy megkeressük az egyik igénybevételből származó maximális feszültséget, azután a másik igénybevételből származót, mindkét esetben megállapítjuk a rugalmas feszültséget és a kedvezőtlenebb értékkel számolunk.

67. §. Nyíró- és hajlító-igénybevétel.

Ez a terhelések leggyakoribb módja. A szelvényt egyidejűleg R_y nyíróerő és M_z hajlítónyomaték terheli. A hajlításból származó derékfeszültség azon pontokban a legnagyobb, melyek a legtávolabb fekszenek a hajlítás tengelyétől, vagyis a kerület azon részében, amely párhuzamos a hajlítási tengellyel, pl. z -vel.

A nyíróerő mindig merőleges a hajlítási tengelyre, tehát a felvett esetben z -re. Minthogy az eredő csúsztató-feszültség a kerületnek minden pontjában az érintő irányában hat, azért a leginkább igénybevett pontokban a nyírófeszültségnek csak τ_y összetevője keletkezik, míg $\tau_z = 0$.

Ha a szelvény az y tengelyre szimmetrikus (pl. kör, ellipszis) és ha az a leginkább igénybevett pont, melyben a kerület az y tengelyt metszi, akkor τ_y szintén zéró. Ugyanis körszelvénynél:

$$\tau_y = - \frac{(1 - \mu) R_y}{2 I_z} y \cdot z$$

s a jelzett pontban $z = 0$. Az ilyen szelvényben tehát a rugalmas feszültség egyenlő a leginkább igénybevett pontban keletkező hajlító feszültséggel, más szóval a hajlítás-okozta legnagyobb rugalmas feszültség teljesen független attól, amelyet a nyíróerő okoz.

Ha ellenben a leginkább igénybevett pontok, egy a hajlítási tengellyel párhuzamos vonalban fekszenek (pl. négyszög), akkor csupán $\tau_z = 0$, de viszont τ_y többnyire oly csekély, hogy a hajlításból származó feszültséggel szemben mellőzhető. Ilyen esetekben tehát elegendő csupán a hajlításból származó feszültségeket figyelembe venni. Ha azonban a τ_y csúsztató-feszültség nem mellőzhető, akkor a rugalmas feszültség az ismeretes:

$$\sigma_r' = \frac{3\sigma_x + 5\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_y^2}}{8}$$

képlet szerint számítandó ki. Ezen rugalmas feszültségen kívül kiszámíthatjuk azon rugalmas feszültséget is, amelyet tisztán a nyíróerő, a legnagyobb nyírófeszültség pontjaiban okoz, σ_r'' feszültséget, és a két érték közül a kedvezőtlenebbel számolunk.

Tehát körszelvény esetén (349. ábra) az I. és II. pontokban a rugalmas feszültség egyúttal a legnagyobb hajlító-feszültség, mivel itt a csúsztató-feszültség zéró:

$$\sigma_r' = \sigma = \mp \frac{M_z}{W}$$

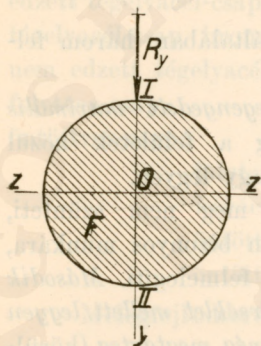
a középpontban pedig, lévén itt a hajlításból származó derékfeszültség zéró és a nyírásból származó csúsztató-feszültség a legnagyobb :

$$\sigma_r'' = \frac{5}{4} \tau_{\max} = \frac{5}{4} 1,4 \frac{R_y}{F} = \frac{7}{4} \frac{R_y}{F}$$

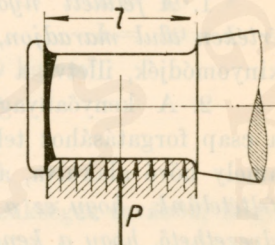
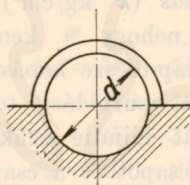
Ha $\frac{M_z}{W} > \frac{7}{4} \frac{R_y}{F}$, akkor a tartót tisztán hajlításra, ha pedig :

$\frac{M_z}{W} < \frac{7}{4} \frac{R_y}{F}$, akkor csak nyírásra méretezzük.

A hajlításra igénybevett tartók számításánál a nyíróerő- okozta feszültségeket nem vesszük figyelembe, de a hajlításra igénybevett egyenszilárdságú tartóknál a legkisebb szelvényt, a nyíróerő- okozta legnagyobb feszültség alapján méretezzük.



349. ábra.



350. ábra.

A nyíró- és hajlító-igénybevételre példakép vehetjük az ú. n. homlokcsapot (hordozó-csap). Forgó géprészek hengeres támaszkodó részét általában csapnak nevezzük. Minden esetben a csapot a csapágyra egy bizonyos eredő P erő fogja rászorítani, homlokcsapnál ez az erő a csapra merőlegesen hat, így a csap egyik végén befogott, egész hosszában egyenletesen terhelt tartónak tekinthető (350. ábra). Ha d a csap átmérője, l a hossza és P az egész egyenletesen elosztott teher, akkor a legnagyobb derék- és egyúttal rugalmas feszültség :

$$\sigma_r' = \frac{M}{W} \quad \text{és behelyettesítve :}$$

$$\sigma_r' = \frac{\frac{Pl}{2}}{\frac{d^3\pi}{32}} = \frac{16Pl}{d^3\pi}$$

A nyírás-okozta rugalmas feszültség pedig:

$$\sigma_r'' = \frac{5}{4} \tau_{\max} = \frac{5}{4} 1,4 \frac{P}{d^2 \pi} = \frac{7P}{d^2 \pi}$$

Kérdés: mekkora csap-hosszúságnál kell az átmérőt a hajlítás szerint és milyen hosszúságnál kell a nyírás szerint kiszámítani?

A $\sigma_r' > \sigma_r''$ ha: $\frac{16Pl}{d^3 \pi} > \frac{7P}{d^2 \pi}$ illetve ha: $\frac{l}{d} > \frac{7}{16}$ ilyenkor tisztán hajlításra méretezünk; ha pedig: $\sigma_r' < \sigma_r''$, azaz $\frac{l}{d} < \frac{7}{16}$, akkor az átmérő a nyírószilárdsági alapképletből számítható. Előbbi eset a leggyakoribb.

A gyakorlatban a csapok számításánál általában három feltételt kell kielégítenünk. Nevezetesen:

1. A felületi nyomás ($k \text{ kg/cm}^2$) a megengedett maximális értéken alul maradjon, nehogy a kenőanyag a felületek közül kinyomódjék, illetve a csap-csésze kopása túlnagy legyen.

2. A kenőanyag a surlódást teljesen meg nem szünteti, a csap forgatásához tehát mindig szükség van bizonyos munkára, amely hővé alakulva, a csapot és a csapágyat felmelegíti. Második feltételünk, hogy ez a hőmennyiség oly hőmérséklet mellett legyen elvezethető, hogy a kenőanyag kenőképességét még megtartsa (körülbelül $70-80^\circ\text{C}$).

3. A csapnak végül elég szilárdnak kell lennie, tehát el ne törjön, illetve káros deformációt ne szenvedjen.

Leghelyesebben úgy járunk el, ha az $\frac{l}{d}$ viszonyt kiszámítjuk oly feltétel alapján, hogy egyrészt a csap elég erős legyen, másrészt pedig a felületi nyomás, a megengedett értéket túl ne haladja; a hosszát azután a surlódási munka képletével ellenőrizzük.

A csapra ható normális erőket, feltéve, hogy a csapot a csapágy félig fogja körül, vízszintes és függőleges komponensekre bontjuk. A vízszintes komponensek egyenlő nagyok, de ellentétes irányúak lévén, ellensúlyozzák egymást, a függőleges komponensek összegének pedig egyenlőnek kell lenni a csapot terhelő P erővel. Tegyük fel, hogy a felületi nyomás minden pontban ugyanaz, akkor:

$$P = l \cdot d \cdot k$$

amely értéket a:

$$P \frac{l}{2} = \frac{d^3 \pi}{32} \sigma_m = \sim 0,1 d^3 \cdot \sigma_m$$

hajlítási képletbe betéve kapjuk, hogy:

$$\frac{l^2 \cdot d \cdot k}{2} = 0,1 d^3 \sigma_m$$

ahonnan:

$$\left(\frac{l}{d}\right)^2 = \frac{0,2 \sigma_m}{k}$$

és

$$\frac{l}{d} = \sqrt{\frac{0,2 \sigma_m}{k}}$$

Ha $\frac{l}{d}$ értékét ismerjük, akkor: $P \frac{l}{d} = \frac{d^2 \pi}{16} \sigma_m$ egyenlethől a d kiszámítható és l a melegejlődésre való tekintettel ellenőrzendő.

Iránytadó értékek σ_m - és k -ra a következők:

edzett tégelyacél-csap, edzett tégelyacél-csapágýban: $k = 150 \text{ kg/cm}^2$

tégelyacél-csap, bronz-csapágýban: $k = 90 \quad \gg$

nem edzett tégelyacél-csap, bronz-csapágýban: $k = 60 \quad \gg$

folytvas-csap: $\gg \quad k = 40 \quad \gg$

öntöttvas-csap: $\gg \quad k = 30 \quad \gg$

folytacélra: $\sigma_m = 400\text{—}500 \text{ kg/cm}^2$

kovácsvasra: $\sigma_m = 300\text{—}400 \quad \gg$

öntöttacélra: $\sigma_m = 250\text{—}350 \quad \gg$

öntöttvasra: $\sigma_m = 150\text{—}250 \quad \gg$

Melegejlődésre ellenőrizve a csapot szükséges továbbá, hogy

$$l \geq \frac{P \cdot n}{w}$$

amely képletben n , a fordulatszám és w tapasztalati szám, melynek értéke:

$$w = \frac{1500 \cdot A_z}{\mu}$$

ahol A_z a surlódási munka kgm/sec -ban az $l \cdot d$ csapvetület 1 cm^2 -ére vonatkoztatva és μ a surlódási tényező, a csap és csapágý között. Általában w annál nagyobb, minél kisebb a surlódás. Forgattyú-csapoknál rendszeren: $w \leq 90000$.

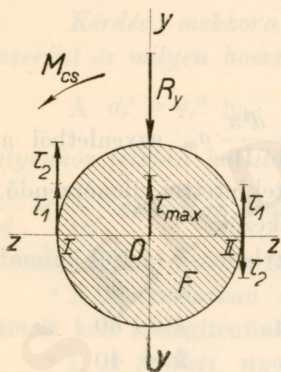
Ha a csapra ható erő változik (pl. forgattyú-csapoknál), akkor a szilárdsági számításnál a legnagyobb, a surlódási munkánál pedig, a csapra ható közepes erő a mérvadó.

68. §. Csavaró- és nyíró-igénybevétel.

A legnagyobb rugalmas feszültség a szelvénynek vagy azon pontjában keletkezik, amelyben a nyírófeszültség a legnagyobb, vagy ott, ahol a csavaró-feszültség maximális értékű. Ezért mindkét

pontban meghatározzuk a rugalmas feszültséget és a kedvezőtlenebb értékkel számolunk.

Körszelvényű tartónál (351. ábra) legyen a szelvény terhelése az R_y nyíróerő és az $M_x = M_{cs}$ csavaró-nyomaték. Legnagyobb csavaró-feszültség a körszelvény kerületén keletkezik és pedig annak minden pontjában egyenlő nagyságban. Ennélfogva a kerületen a legnagyobb rugalmas feszültség azon pontban fog fellépni, melyben a legnagyobb nyírófeszültség is keletkezik, ez pedig azon pont, melyben a nyíróerőre merőleges z tengely, a kerületet metszi. Ezen pontban (I) $y = 0$ és $z = r$, tehát a nyírófeszültség komponensei:



351. ábra.

$$\tau_y = 0 \quad \text{és} \quad \tau_z = \frac{1,2 R_y}{F} = \tau_1.$$

A csavaró-feszültség pedig a kerület minden pontjában kifejezhető:

$$\tau_{cs} = \frac{M_{cs}}{W_p} = \frac{4 M_{cs}}{F \cdot d} = \tau_2$$

ugyanis körszelvénynél:
$$W_p = \frac{F \cdot d}{4}$$

Ennélfogva az összes csúsztató-feszültség a kerület I pontjában, mint a nyírásból és csavarásból származó feszültségek algebrai összege adódik:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{1,2 R_y}{F} + \frac{4 M_{cs}}{F \cdot d}$$

és így a rugalmas feszültség az I pontban:

$$\sigma_r' = \frac{5}{4} \tau = \frac{5}{4} \left(\frac{1,2 R_y}{F} + \frac{4 M_{cs}}{F \cdot d} \right) = \frac{3 R_y + 5 \left(\frac{M_{cs}}{r} \right)}{2 F} \quad (1)$$

Keressük most a rugalmas feszültséget a szelvény azon pontjában, melyben a nyírófeszültség maximális. A legnagyobb nyírófeszültség a kör középpontjában keletkezik s értéke:

$$\tau_{\max} = \frac{1,4 R_y}{F}$$

ellenben itt a csavaró-feszültség zéró. A körszelvény középpontjában tehát a legnagyobb rugalmas feszültség:

$$\sigma_r'' = \frac{5}{4} \tau_{\max} = \frac{7}{4} \frac{R_y}{F} \quad (2)$$

Mindaddig, míg $\sigma_r' > \sigma_r''$, csavarásra és nyírásra kell a tartót számítani; ha azonban $\sigma_r' < \sigma_r''$, akkor tisztán nyírásra. Tehát, ha $\sigma_r' > \sigma_r''$, akkor:

$$\frac{6}{4} \frac{R_y}{F} + \frac{5M_{cs}}{F \cdot d} > \frac{7}{4} \frac{R_y}{F}$$

azaz:

$$\frac{5M_{cs}}{F \cdot d} > \frac{1}{4} \frac{R_y}{F}$$

ahonnan:

$$M_{cs} > \frac{R_y \cdot d}{20} \quad (3)$$

ilyenkor csavarásra és nyírásra számítunk az (1) képlettel; ha pedig

$$M_{cs} < \frac{R_y \cdot d}{20} \quad (4)$$

akkor tisztán nyírásra méretezünk, a (2) képlet szerint.

69. §. Derék- és csavaró-igénybevétel.

A húzás-, illetve nyomásból származó derékfeszültség a szelvény minden pontjában ugyanaz, tehát a rugalmas feszültség abban a pontban maximális, melyben a csavaró-feszültség a legnagyobb.

Körszelvénynél a legnagyobb csavaró-feszültség a kerületen lép fel és értéke:

$$\tau = \frac{M_{cs}}{W_p} = \frac{4M_{cs}}{F \cdot d}$$

míg a derékfeszültség értéke a szelvény minden pontjában:

$$\sigma_x = \frac{R_x}{F}$$

Ennélfogva a legnagyobb rugalmas feszültség a *De Saint-Venant*-teória szerint:

$$\sigma_r = \frac{3\sigma_x + 5\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}{8} = \frac{3R_x + 5\sqrt{R_x^2 + 4\left(\frac{4M_{cs}}{d}\right)^2}}{8F}$$

Ez a terhelési mód a gyakorlatban ritkábban fordul elő.

70. §. Csavaró- és hajlító-igénybevétel.

Gyakori terhelési mód. A szelvényt egyidejűleg M_h hajlító- és M_{cs} csavarónyomaték terheli. A legnagyobb rugalmas feszültség a szelvénynek vagy abban a pontjában keletkezik, ahol a legnagyobb hajlító-feszültség lép fel, vagy ott, ahol a csavaró-feszültség a leg-

nagyobb. Mindkét helyen meg kell határozni a rugalmas feszültséget és a méretezéshez a kedvezőtlenebb, tehát a nagyobb értéket kell megtartani.

1. *Körszelvényű tartónál* (pl. tengelyeknél) legyen z tengely a hajlítási tengely (352. ábra). A legnagyobb csavaró-feszültség a szelvény kerületén lép fel, a legnagyobb hajlító-feszültség pedig az I és II pontokban. Körszelvénynél tehát ezen leginkább igénybevett pontokban van a legnagyobb rugalmas feszültség.

A hajlításból származó derékfeszültség I és II pontokban:

$$\sigma = \frac{M_h}{W}$$

ahol az ekvatoriális ellenálló-nyomaték:

$$W = \frac{d^3 \pi}{32} = \frac{F \cdot d}{8}$$

$$\text{tehát: } \sigma = \frac{8 M_h}{F \cdot d} \quad (1)$$

A legnagyobb csavaró-feszültség pedig a kerületen:

$$\tau = \frac{M_{cs}}{W_p}$$

ahol a poláris ellenálló-nyomaték:

$$W_p = \frac{d^3 \pi}{16} = \frac{F \cdot d}{4}$$

és így:

$$\tau = \frac{4 M_{cs}}{F \cdot d} \quad (2)$$

Ennélfogva az I és II pontokban a maximális rugalmas feszültség a De Saint-Venant-teória szerint:

$$\sigma_r = \frac{3 \sigma + 5 \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2}}{8}$$

ahová az értékeket behelyettesítve:

$$\sigma_r = \frac{3 M_h + 5 \sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2}}{F \cdot d} = \frac{3 M_h + 5 \sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2}}{8 W} \quad (3)$$

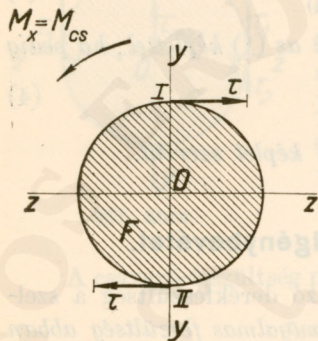
avagy:

$$M_r = W \cdot \sigma_r = \frac{3}{8} M_h + \frac{5}{8} \sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2} = M_i \quad (4)$$

ahol M_r a redukált, vagy ideális hajlító-nyomaték (M_i).

A méretezés az:

$$M_i = W \cdot \sigma_m$$



352. ábra.

képlettel történik; az ideális nyomatékmal tehát úgy számítunk, mintha a tartó tisztán csak hajlításra volna igénybevéve.

Használhatjuk méretezéshez a következő, *Bach*-féle képletet is:

$$M_i = 0,35 M_h + 0,65 \sqrt{M_h^2 + (\alpha_0 M_{cs})^2} = W \cdot \sigma_m \quad (5)$$

ahol:
$$\alpha_0 = \frac{\sigma_h}{1,3 \sigma_{cs}}$$

és σ_h a megengedett hajlító-, σ_{cs} pedig a megengedett csavaró-feszültség. Kovácsvas-tengelyeknél megközelítéssel vehető: $\alpha_0 = 1$

Újabban a folytvastengelyek számításánál a *Rankine*- és a csúsztató-feszültségi teóriák szerint szoktak eljárni. A *Rankine*-teória szerint a legnagyobb főderékfeszültség:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2}}{2}$$

ahová az értékeket betéve:

$$\sigma_1 = \left[\frac{M_h}{W} + \sqrt{\left(\frac{M_h}{W} \right)^2 + 4 \left(\frac{M_{cs}}{W_p} \right)^2} \right] : 2$$

és mivel $W_p = 2W$, kapjuk, hogy:

$$\sigma_1 = \frac{M_h + \sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2}}{2W}$$

ahonnan:

$$M_i = W \cdot \sigma_1 = \frac{M_h + \sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2}}{2} \quad (6)$$

A csúsztató-feszültségi elmélet szerint pedig:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2}$$

és $2 \tau_{\max} = \sigma_r = \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2}$

ahová az értékeket behelyettesítve:

$$\sigma_r = \sqrt{\left(\frac{M_h}{W} \right)^2 + 4 \left(\frac{M_{cs}}{2W} \right)^2} = \frac{\sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2}}{W}$$

azaz:

$$M_i = W \cdot \sigma_r = \sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2} \quad (7)$$

A *Rankine*-formula adja a legkisebb, a csúsztató-feszültségi elmélet pedig a legnagyobb értékeket.

Az ideális hajlító-nyomatékot grafikusan is könnyű meghatározni. Felrajzoljuk a tengelyt két vetületben. Az esetleg ferde irányban ható erőket vízszintes és függőleges összetevőkre bontva, megszerkesztjük a hajlító-nyomatéki ábrákat mindkét síkban ugyanolyan H pólustávolság, m erő- és n rajzléptékkel, ezekből pedig

ismeretes módon (52. §) *geometriai összegezéssel az eredő hajlítónyomatéki ábrát*. Az eredő hajlítónyomatéki ábra vízszintes záróvonala fölé felvisszük a csavarónyomatékokat olyképpen, hogy a kiszámított csavarónyomatékot osztjuk H pólustávolsággal, az m erő- és n rajzlépték figyelembe vételével, tehát a csavarónyomaték ábrájának ordinátája:

$$y_{cs} = \frac{M_{cs}}{H \cdot m \cdot n}$$

Az alább feltüntetett szerkesztéssel megállapítjuk a maximális ideális hajlítónyomatéknak megfelelő y_i -t és ebből a nyomaték:

$$M_i = y_i H \cdot m \cdot n = W \cdot \sigma_m$$

ahonnan a veszélyes szelvényben az átmérőt már kiszámíthatjuk.

Az ideális nyomatéki ábrából a körszelvényű tengelyt, mint egyenszilárdságú tartót ugyancsak grafikusan meghatározhatjuk (27. §).

Legyen a 353. ábrán feltüntetett, két végén csapágyazott tengelyre két fogaskerék felékelve. Az I fogaskerék kapja a munkát, ezt a tengely közvetítésével átadja a II fogaskeréknek, ez pedig leadja egy másik tengelynek. A P_1 és P_2 fognyomásokat a megfelelő középpontokba átrakva $P_1 r_1$ és $P_2 r_2$ csavarónyomatékokat, s P_1 és P_2 hajlító-erőket kapunk.

Ha a homlokkerekek súlya G_1 és G_2 , továbbá feltéve, hogy a fognyomások vertikálisan hatnak (legkedvezőtlenebb eset), a függélyes síkban működő hajlító-erők: $Q_1 = P_1 + G_1$ és $Q_2 = P_2 + G_2$ lesznek. Ezen erőkhöz megszerkesztjük a hajlítónyomatéki ábrát. A csavarónyomaték rendszeren az átvíendő lóerőszámmal N és a percnkénti fordulatszámmal n adott és ez a két fogaskerék közötti részen adódik át, nagysága állandó.

$$M_{cs} = P_1 r_1 = P_2 r_2 = 716,2 \frac{N}{n}$$

A csavarónyomaték ábrája ezen alapon már felrajzolható a hajlítónyomatéki ábra vízszintes záróvonala fölé.

A szerkesztés további menete az ábrából kivehető.

Az $\frac{5}{8} y_h$ és $\frac{5}{8} y_{cs}$ mint befogókhoz megrajzolt:

$\overline{CD} = \frac{5}{8} \sqrt{y_h^2 + y_{cs}^2}$ átfogóhoz, a $\overline{DE} = \overline{DF} = 3 y_h$ távolságot hozzáadva, a:

$$\overline{CF} = \overline{KL} = \frac{3}{8} y_h + \frac{5}{8} \sqrt{y_h^2 + y_{cs}^2} = y_i$$

A hajlító-feszültség pedig, a szelvény rövidebb oldalában a legnagyobb:

$$\sigma = \frac{M_h}{W}$$

de ezen oldalakban csavaró-feszültség is keletkezik és ennek értéke az oldalak felezőpontjaiban, tehát a *III* és *IV* pontokban:

$$\tau = \frac{\beta M_{cs}}{a^3}$$

A rugalmas feszültség az *I* és *II* pontokban ezek alapján:

$$\sigma_r' = \frac{5}{4} \tau_1 = \frac{5}{4} \frac{\alpha M_{cs}}{a^3}$$

amely képlet jobb oldalát szorozva és osztva W -vel, kapjuk, hogy:

$$\sigma_r' = \frac{5}{4} \frac{\alpha M_{cs}}{a^3} \cdot \frac{ab^2}{6 \cdot W} = \frac{5}{24} \frac{\alpha M_{cs}}{W} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \quad (8)$$

ahol W a hajlítási tengelyre vonatkozó ellenálló-nyomaték.

A *III* és *IV* pontokban pedig a rugalmas feszültség:

$$\sigma_r'' = \frac{3 \frac{M_h}{W} + 5 \sqrt{\left(\frac{M_h}{W}\right)^2 + 4 \left(\frac{\beta M_{cs}}{a^3}\right)^2}}{8}$$

és ha a $\left(\frac{W}{W}\right)$ -vel beszorzunk kapjuk, hogy:

$$\sigma_r'' = \frac{3 M_h + 5 \sqrt{M_h^2 + 4 \frac{\beta^2 M_{cs}^2 W^2}{a^6}}}{8 W}$$

avagy mivel:

$$\frac{4 \beta^2 M_{cs}^2}{a^6} \cdot \frac{a^2 b^4}{36} = \left[\frac{1}{3} \beta M_{cs} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right]^2$$

lesz:

$$\sigma_r'' = \frac{3 M_h + 5 \sqrt{M_h^2 + \left[\frac{1}{3} \beta M_{cs} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right]^2}}{8 W} \quad (9)$$

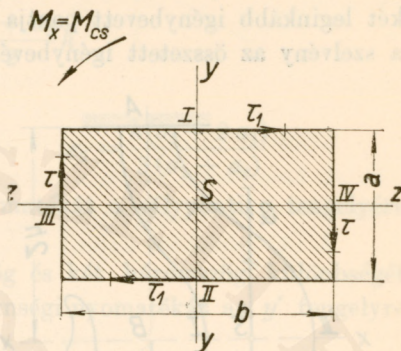
amely képlet még a következő alakra hozható:

$$\sigma_r'' = \frac{5 M_h}{8 W} \left\{ 0,6 + \sqrt{1 + \left[\frac{\beta M_{cs}}{3 M_h} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right]^2} \right\} \quad (10)$$

Az α és β értékek a 344. oldalon található táblázatból adott esetben kivethetők.

Az így nyert σ_r' és σ_r'' rugalmas feszültségek közül a nagyobbikat kell a méretezésnél megtartani. Ha $\sigma_r' > \sigma_r''$, akkor a (8) képlettel tisztán csavarásra számítjuk a tartót, ha pedig $\sigma_r' < \sigma_r''$, akkor a (10) képlettel csavarásra és hajlításra méretezzük.

Második esetben, ha a hajlítás tengelye a z tengely, tehát a terhelések $M_x = M_{cs}$ csavaró- és $M_z = M_h$ hajlító-nyomaték, a legnagyobb csavaró- és legnagyobb hajlító-feszültségek összeszeesnek az I és II pontokban (354. ábra). Itt tehát csak egy rugalmas feszültség mérvadó és ennek nagysága:



354. ábra.

$$\sigma_r = \frac{3 \frac{M_h}{W} + 5 \sqrt{\left(\frac{M_h}{W}\right)^2 + 4 \left(\frac{\alpha M_{cs}}{a^3}\right)^2}}{8} \quad (11)$$

és ebből:

$$\sigma_r = \frac{3 M_h + 5 \sqrt{M_h^2 + \left[\frac{1}{3} \alpha M_{cs} \left(\frac{b}{a}\right)\right]^2}}{8 W} \quad (12)$$

illetve:

$$\sigma_r = \frac{5 M_h}{8 W} \left\{ 0,6 + \sqrt{1 + \left[\frac{\alpha M_{cs}}{3 M_h} \left(\frac{b}{a}\right) \right]^2} \right\} \quad (13)$$

és a redukált, vagy ideális hajlító-nyomaték:

$$M_r = W \cdot \sigma_r$$

a szükséges szelvény méretei ebből a képletből már megállapíthatók.

71. §. A vonóhorog szilárdsága.

A horog nyakát A -ban befogottnak vesszük. A nyak szelvénye tisztán húzásra van igénybevéve, ellenben az $x-x$ szelvény — mivel, ha a Q terhelő-erőt önmagával párhuzamosan, a szelvény S súlypontjába, pozitív és negatív értelemben átrakjuk, (355. ábra) Q húzóerőt és $Q(r + e_1)$ hajlító-erőpárt kapunk — már húzásra és hajlításra van igénybevéve. Minthogy a Q erő nyomatéka az irányára merőleges $x-x$ keresztmetszet S súlypontjára vonatkozólag a leg-

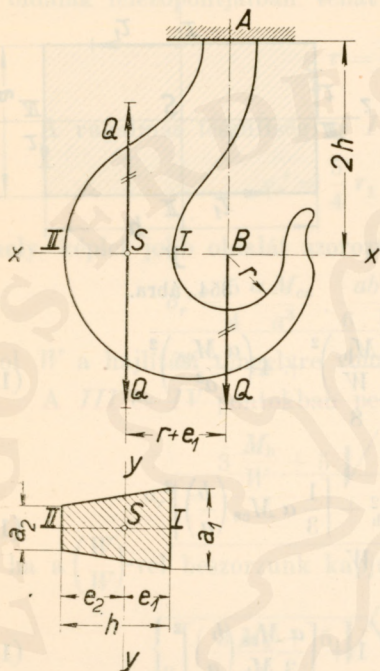
nagyobb, azért ez lesz a veszélyes szelvény, ennek leginkább igénybevett pontjaiban kell a rugalmas feszültségeket meghatározni.

A szelvény alakját lehetőleg úgy kell megválasztani, hogy a két leginkább igénybevett pontja egyenlő biztonságot nyújtson, tehát a szelvény az összetett igénybevételre alkalmas legyen.

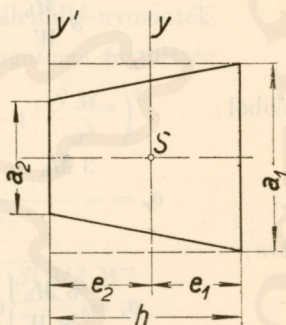
Ha az $x-x$ keresztaszelvény területe F , tehetetlenségi nyomatéka a hajlítási tengelyre (y) vonatkoztatva I , akkor a rugalmas feszültségek az I , illetve II pontban:

$$\sigma_I = \frac{Q}{F} + \frac{Q(r+e_1)e_1}{I}$$

$$\text{és} \quad \sigma_{II} = \frac{Q}{F} - \frac{Q(r+e_1)e_2}{I}$$



355. ábra.



356. ábra.

A szelvény akkor alkalmas, ha $\sigma_I = -\sigma_{II}$ (kovácsolt vasnál) tehát:

$$\sigma_I + \sigma_{II} = 0 = \frac{2Q}{F} + \frac{Q(r+e_1)(e_1-e_2)}{I}$$

$$\text{ahonnan:} \quad 2I = F(r+e_1)(e_2-e_1)$$

$$\text{De mivel: } \sigma_I - \sigma_{II} = 2\sigma = \frac{Q(r+e_1)}{I}(e_1+e_2)$$

ahol: $e_1 + e_2 = h$ a szelvény magassága,

tehát:

$$2I = \frac{Q(r+e_1)h}{\sigma} = F(r+e_1)(e_2-e_1) \quad (1)$$

azaz:

$$\frac{Q}{\sigma} = \frac{F}{h}(e_2-e_1) \quad (2)$$

Határozzuk meg a trapéz-szelvényt olyan feltétellel, hogy alkalmas legyen. Megjegyzendő, hogy a trapéz párhuzamos oldalait görbékkel szokták helyettesíteni, de ezt is mint trapézt számítják. A trapéz területe:

$$F = \frac{a_1 + a_2}{2} h$$

és ismeretes, hogy

$$e_1 = \frac{h(a_1 + 2a_2)}{3(a_1 + a_2)}; \quad e_2 = \frac{h(a_2 + 2a_1)}{3(a_1 + a_2)}$$

és így a trapéz tehetetlenségi nyomatékát a súlyponti y tengelyére a következőképpen nyerjük:

A trapézt, mint egy négyszög és két háromszög különbségét foghatjuk fel és felírjuk a tehetetlenségi nyomatékát az y' tengelyre (356. ábra):

$$I_{y'} = \frac{a_1 h^3}{3} - \frac{1}{12} (a_1 - a_2) h^3 = I_y + \frac{a_1 + a_2}{2} h \frac{h^2 (a_2 + 2a_1)^2}{9 (a_1 + a_2)^2}$$

ahonnan:

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{a_1 h^3}{3} - \frac{h^3 (a_1 - a_2)}{12} - \frac{h^3 (a_2 + 2a_1)^2}{18 (a_1 + a_2)} \\ I_y &= \frac{12 a_1 h^3 (a_1 + a_2) - 3 h^3 (a_1 - a_2) (a_1 + a_2) - 2 h^3 (a_2 + 2a_1)^2}{36 (a_1 + a_2)} = \\ &= \frac{h^3 [12 a_1^2 + 12 a_1 a_2 - 3 a_1^2 + 3 a_2^2 - 2 (a_2^2 + 4 a_1 a_2 + 4 a_1^2)]}{36 (a_1 + a_2)} = \\ &= \frac{h^3 (9 a_1^2 + 12 a_1 a_2 + 3 a_2^2 - 2 a_2^2 - 8 a_1 a_2 - 8 a_1^2)}{36 (a_1 + a_2)} \end{aligned}$$

és az összevonásokat elvégezve:

$$I_y = I = \frac{(a_1^2 + 4 a_1 a_2 + a_2^2) h^3}{36 (a_1 + a_2)}$$

Az I képlete tekintettel e_1 és e_2 értékeire, még így is felírható:

$$I = \frac{(a_1 e_1 + a_2 e_2) h^2}{12}$$

Ezen összefüggések felhasználásával:

$$\frac{F}{h} = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad \text{és} \quad e_2 - e_1 = \frac{h(a_1 - a_2)}{3(a_1 + a_2)}$$

amely értékeket a (2) képletbe téve kapjuk, hogy:

$$\frac{Q}{\sigma} = \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right) \frac{h(a_1 - a_2)}{3(a_1 + a_2)} = \frac{h(a_1 - a_2)}{6} \quad (3)$$

Ezt továbbá az (1.) képletbe behelyettesítve:

$$2I = \frac{h^2(a_1 - a_2)(r + e_1)}{6} = \frac{h^2(a_1 e_1 + a_2 e_2)}{6}$$

amelyből:

$$r(a_1 - a_2) = a_2(e_1 + e_2) = a_2 h$$

és

$$ra_1 = a_2(h + r)$$

avagy:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{r}{h + r} \quad (4)$$

Tehát a trapéz-szelvény akkor alkalmas, ha a párhuzamos oldalak hosszúsága fordítva arányos, ezen oldalaknak a teher határvonalától való távolságával.

A (4) képletből kapjuk, hogy:

$$a_1 - a_2 = \frac{h a_1}{h + r}$$

amit a (3) képletbe behelyettesítve:

$$Q = \frac{h^2 a_1 \sigma}{6(h + r)} \quad (5)$$

Ha most:

$$a_1 = \alpha h \quad \text{és} \quad r = \beta h$$

akkor:

$$Q = \frac{h^2 \alpha \sigma}{6(1 + \beta)}$$

ahonnan:

$$h = \sqrt{\frac{6(1 + \beta)Q}{\alpha \cdot \sigma}} \quad (6)$$

és

$$a_2 = \frac{a_1 \beta}{1 + \beta} = \frac{\alpha \beta}{1 + \beta} h$$

Tekintve azt, hogy a horógnál a terhelő-erő felváltva Q vagy zéró, az összilárdság esetével állunk szemben; az összilárdságnál pedig a megengedett σ_m' feszültség, a statikai terhelésnél megengedett σ_m feszültségnek $2/3$ része.

Leggyakrabban:

$$\beta = 0,5$$

$$\alpha = 2/3$$

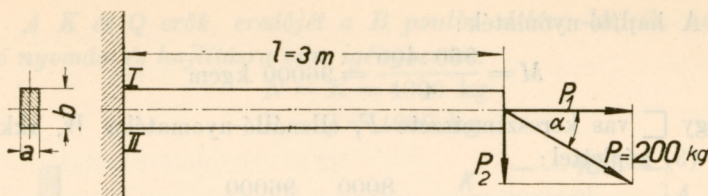
tehát:

$$h = \sqrt{\frac{6 \cdot 1,5 \cdot 3}{2} \frac{Q}{\sigma_m'}} = \sqrt{\frac{27}{2} \frac{Q}{\sigma_m'}} = 3,67 \sqrt{\frac{Q}{\sigma_m'}} \quad (7)$$

Példák a X. fejezethez.

1. Valamely négyszög-szelvényű, egyik végén befogott $l = 3$ m hosszú fagerenda, a szabad végén $P = 200$ kg, $\alpha = 30^\circ$ alatt hajló erővel van megterhelve. A keresztmetszet oldalainak aránya $\frac{b}{a} = 2$ és $\sigma_m = 120$ kg/cm². Keresendők a szelvény méretei (357. ábra).

$$P_1 = P \cos \alpha = 200 \frac{\sqrt{3}}{2} = 173 \text{ kg}$$



357. ábra.

$$P_2 = P \sin \alpha = 200 \frac{1}{2} = 100 \text{ kg}$$

$$\sigma_{I, II} = \frac{P_1}{ab} \pm \frac{P_2 l}{ab^2} \text{ vagy, mivel: } a = \frac{b}{2}$$

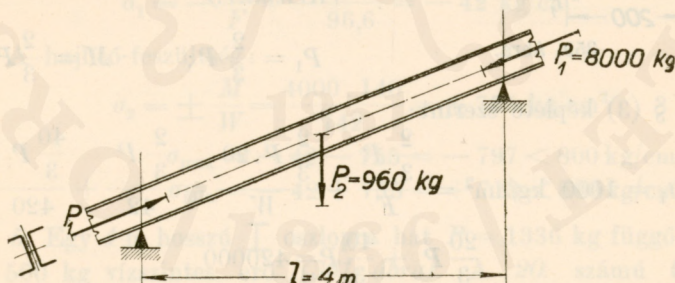
$$\sigma_{I, II} = \frac{2 P_1}{b^2} \pm \frac{12 P_2 l}{b^3}$$

Legcélszerűbb b értéket megválasztani és behelyettesítéssel meggyőződni arról, hogy a nyert σ érték megegyezik-e az anyag megengedhető feszültségével, avagy mint harmadfokú egyenletet a *Cardan*-képlettel is megoldhatjuk, de ez kevésbé kényelmes.

Legyen $b = 15 \text{ cm}$, akkor:

$$\sigma_{I, II} = \frac{2 \cdot 173}{15^2} \pm \frac{12 \cdot 100 \cdot 300}{15^3} = \frac{346}{225} \pm \frac{360000}{3375} = 1,54 \pm 106,66$$

Tehát: $\sigma_I = 108,2 \text{ kg/cm}^2$ és $\sigma_{II} = 105,12 \text{ kg/cm}^2$,
a b méret megfelel. A fagerenda tehát $15,7,5 \text{ cm}^2$ -es.



358. ábra.

2. Valamely födélzék felső öve 2 darab $\square$ vasból áll és $P_1 = 8000 \text{ kg}$ erővel összenyomásra van igénybevéve. Legyen az alátámasztás vízszintes távolsa $l = 4 \text{ m}$ és a tartó a közepén $P_2 = 960 \text{ kg}$ függőleges erővel van még megterhelve (358. ábra). Számítsuk ki a profilt, ha $\sigma_m = 800 \text{ kg/cm}^2$.

A hajlító-nyomaték:

$$M = \frac{960 \cdot 400}{4} = 96000 \text{ kgcm}$$

Ha egy $\square$ vas keresztmetszete F , ellenálló-nyomatéka W , akkor a 65. § (3) képlettel:

$$\sigma = - \frac{8000}{2F} - \frac{96000}{2W}$$

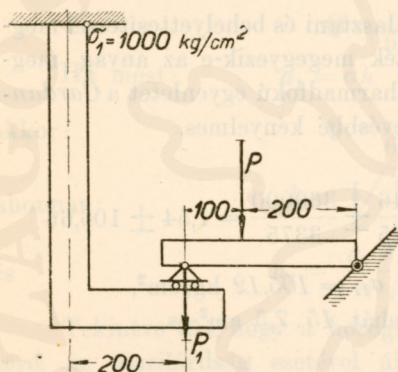
Válasszunk 14-es profilt, melyre $F = 20,4 \text{ cm}^2$ és $W = 86,4 \text{ cm}^3$, akkor:

$$-\sigma = \frac{8000}{2 \cdot 20,4} + \frac{96000}{2 \cdot 86,4} = 751 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_m$$

tehát a 14-es profil megfelelő.

Ha 12-es profilt vettünk volna, ennél már a: $-\sigma = 1026 \text{ kg/cm}^2$.

3. Valamely derékszögben meghajlított rúd a földben meg van erősítve és lehorgonyozva (359. ábra), a rúdszelvény $F = 42 \text{ cm}^2$ és az ellenálló-nyomatéka: $W_1 = W_2 = 420 \text{ cm}^3$. A meghajlított végére ható erőt, egy gerenda-tartó nyomása szolgáltatja, a rajzban adott viszonyok mellett. Mekkora legyen P teher, hogy a befogásnál a húzófeszültség értéke $\sigma_1 = 1000 \text{ kg/cm}^2$ legyen? (Kriemler.)



359. ábra.

$$P_1 = \frac{2}{3} P; \quad M = \frac{2}{3} P \cdot 20$$

A 65. § (3) képlete szerint:

$$\sigma_1 = 1000 \text{ kg/cm}^2 = \frac{\frac{2}{3} P}{F} + \frac{\frac{2}{3} P \cdot 20}{W} = \frac{\frac{2}{3} P}{42} + \frac{\frac{40}{3} P}{420}$$

$$\frac{20}{3} P + \frac{40}{3} P = 420000$$

ahonnan:

$$P = 21000 \text{ kg}$$

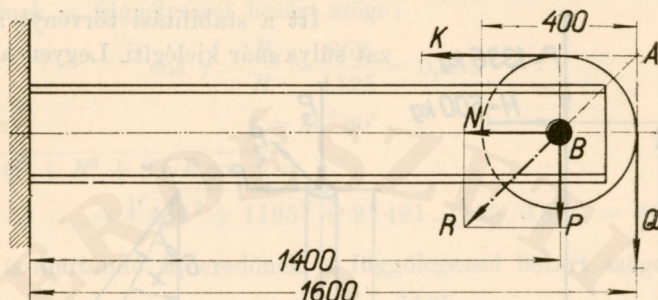
4. Valamely vízszintes karon olyan fix csiga van (360. ábra), amellyel $Q = 4$ tonna terhet emelhetünk. A csiga átmérője $D = 40 \text{ cm}$, a lánc vízszintesen lesz továbbítva és a surlódástól eltekintve $K = Q$. Milyen profilra van szükség, ha a tartót két $\square$ vashál készíttjük és $\sigma_m = 800 \text{ kg/cm}^2$? (Dreyer.)

A K és Q erők eredőjét a B pontba áttéve látjuk, hogy a tartó nyomás- és hajlításra van igénybevéve.

$$N = K = 4000 \text{ kg}$$

és

$$P = Q = 4000 \text{ kg}$$



360. ábra.

Először a nyomást elhanyagolva, tisztán hajlításra méretezünk.

A szükséges ellenálló-nyomatek:

$$W = \frac{M}{\sigma_m} = \frac{4000 \cdot 140}{800} = 700 \text{ cm}^3$$

Válasszunk 2 darab 26. számú $\square$ tartót, amelynél:

$$F' = 2,48,3 = 96,6 \text{ cm}^2$$

$$W = 2,371 = 742 \text{ cm}^3$$

Ellenőrzés.

A tiszta nyomófeszültség:

$$\sigma_1 = -\frac{N}{F} = -\frac{4000}{96,6} = -42 \text{ kg/cm}^2$$

A hajlító-feszültség:

$$\sigma_2 = \pm \frac{M}{W} = \frac{4000 \cdot 140}{742} = \pm 755 \text{ kg/cm}^2$$

tehát: $\sigma_{\max} = -42 - 755 = -797 < 800 \text{ kg/cm}^2$

és $\sigma_{\min} = -42 + 755 = +713 < 800 \text{ kg/cm}^2$

5. Egy 4 m hosszú $\square$ oszlopra hat $P = 1336 \text{ kg}$ függőleges és $H = 500 \text{ kg}$ vízszintes erő (361. ábra). A 20. számú tartónál $W_x = 214 \text{ cm}^3$ és $F = 33,4 \text{ cm}^2$. Az oszlop úgy van állítva, hogy a tartó gerince összeesik a terhelési síkkal. Meghatározandó a maximális feszültség.

$$M = 500 \cdot 400 = 200000 \text{ kgcm}$$

és a 65. § (3) képlete szerint:

$$\sigma = -\frac{P}{F} \pm \frac{M}{W}$$

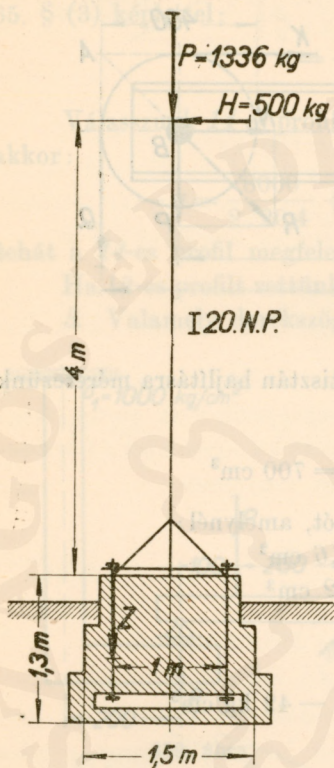
és az értékeket behelyettesítve:

$$\sigma = -\frac{1336}{33,4} \pm \frac{200000}{214} = -40 \pm 934$$

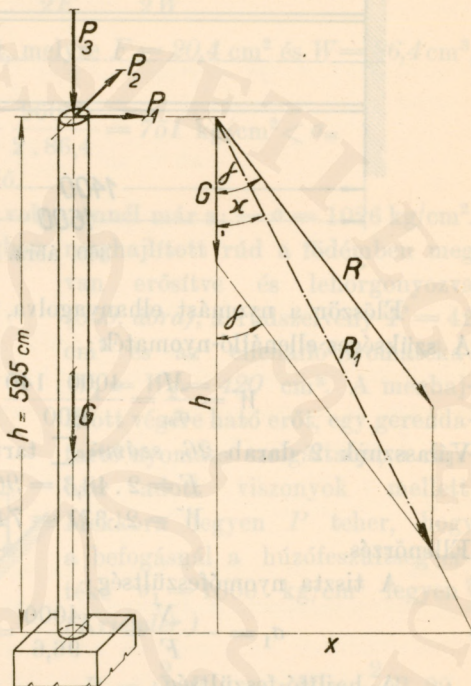
tehát:

$$\sigma_{\max} = -974 \text{ kg/cm}^2$$

Itt a stabilitási törvényt az alapzat súlya már kielégíti. Legyen a falazat



361. ábra.



362. ábra.

fajsúlya $\gamma = 2,4 \text{ t/m}^3$; az egyik oldalon levő csavarok a falazat fél súlyát veszik át:

$$Z = \frac{1,5 \cdot 1 \cdot 1,3}{2} 2400 = \sim 2340 \text{ kg}$$

$$Z \cdot 100 + 1336 \cdot 50 > 200000$$

$$2340 \cdot 100 + 1336 \cdot 50 = 300800 > 200000$$

azaz körülbelül 1,5-szeres a biztonság.

6. Valamely telefonvezeték sarokpóznája $d = 35 \text{ cm}$ átmérőjű rönkfa. Magassága $h = 595 \text{ cm}$, keresztmetsvénye $F = 962 \text{ cm}^2$, ellenálló-nyomatéka $W = 4209 \text{ cm}^3$. Felül meg van terhelve két egymásra merőleges $P_1 = P_2 = 500 \text{ kg}$ vízszintes irányú és $P_3 = 962 \text{ kg}$

függélyes erővel (362. ábra). A pózna befogás fölötti súlya $G=481$ kg. Keresendő a póznában keletkező legnagyobb nyomó- és húzófeszültség.

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2} = \sqrt{500^2 + 500^2 + 962^2} = 1195 \text{ kg}$$

R eredőnek, a függéllyessel bezárt szöge:

$$\cos \gamma = \frac{P_3}{R} = \frac{962}{1195} = 0,805$$

ahonnan:

$$\gamma = 36^\circ 20'$$

$$R_1 = \sqrt{G^2 + R^2 + 2GR \cos \gamma} =$$

$$= \sqrt{481^2 + 1195^2 + 2 \cdot 481 \cdot 1195 \cdot 0,805} = 1607 \text{ kg}$$

Kiszámítandó R_1 eredőnek, a függőlegessel bezárt szöge α :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin (180^\circ - \gamma)} = \frac{1195}{1607}$$

$$\sin (180^\circ - \gamma) = \sin \gamma = \sin 36^\circ 20' = 0,592$$

és

$$\sin \alpha = 0,440$$

ahonnan:

$$\alpha = 26^\circ 10'$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 26^\circ 10' = 0,491 = \frac{x}{h} = \frac{x}{595}$$

$$x = 595 \cdot 0,491 = 292 \text{ cm}$$

$$\sigma_{1,2} = - \left(\frac{R_1 \cos \alpha}{F} \pm \frac{R_1 \cos \alpha \cdot x}{W} \right)$$

$$R_1 \cos \alpha = 1607 \cdot 0,897 = 1440 \text{ kg}$$

$$\text{tehát: } \sigma_{1,2} = - \left(\frac{1440}{962} \pm \frac{1440 \cdot 292}{4209} \right) = - (1,5 \pm 99)$$

és így:

$$\sigma_1 = -100,5 \text{ kg/cm}^2$$

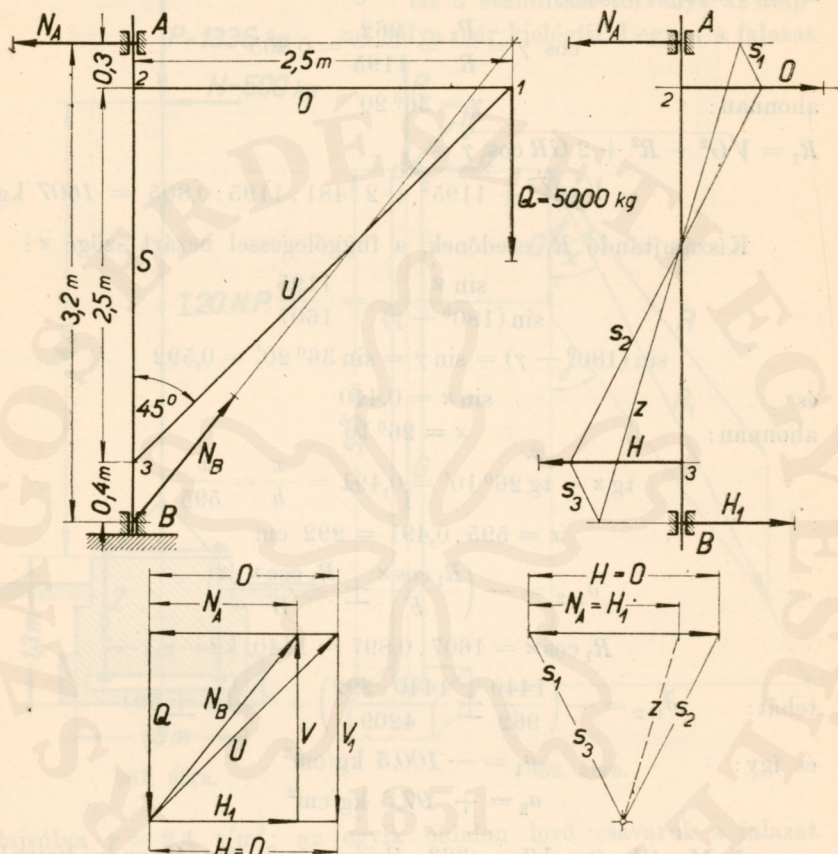
$$\sigma_2 = +97,5 \text{ kg/cm}^2$$

7. Megállapítandók a 363. ábrán vázolt forgódaru rúdjaainak méretei, ha $\sigma_m = 800 \text{ kg/cm}^2$.

A felszabadító erők N_A és N_B meghatározása az ábrán látható; a három közös síkban levő erő egyensúlyi feltétele, hogy közös támadó pontjuk legyen és a zárt erőpoligonban a nyílfolyamat folytonos.

A rúderőket is meghatározhatjuk grafikusan azon alapon, hogy egyensúlyban levő rácsos szerkezetnél az összes csomópontok — a külső és belső erők hatása alatt — egyensúlyban vannak. Ha tehát megrajzoljuk valamely csomópontban működő külső szabad és reakció-erőkhöz és belső rúderőkhöz az erőpoligont, akkor a sztatika

szabályai szerint zárt idomot kell kapnunk. Ha a szerkesztés szerint valamely rúdra azt találjuk, hogy az erő a csomópont felé van irányítva, akkor nyomott, ha pedig a csomóponttól a rúd közepe felé van irányítva, akkor húzott rúddal van dolgunk.



363. ábra.

Ezen alapon az O rúdban (gém) a rúderő: $+ 5000 \text{ kg}$ húzóerő. A húzásra szükséges keresztmetszet:

$$F = \frac{5000}{800} = 6,25 \text{ cm}^2$$

és ha a rudat két $0,8 \text{ cm}$ vastag laposvasból készítjük $\parallel$, akkor egy laposvasnak szélessége:

$$b = \frac{6,25}{2 \cdot 0,8} = 3,9 \text{ cm}$$

Az U rúdban (dúc) a rúderő:

$$-\sqrt{Q^2 + O^2} = -\sqrt{5000^2 + 5000^2} = -\sqrt{50000000} = -7071 \text{ kg nyomóerő.}$$

A rúd hossza:

$$l = \sqrt{2,5^2 + 2,5^2} = \sqrt{12,5} = 3,53 \text{ m}$$

A nyomáshoz szükséges keresztaszelvény:

$$F_1 = \frac{7071}{800} = 8,85 \text{ cm}^2$$

a kihajláshoz szükséges minimális inercia-nyomaték:

$$I_{\min} = 2,5 \cdot P_t \cdot l_m^2 = 2,5 \cdot 7,071 \cdot 12,5 = 221 \text{ cm}^4$$

és két drb. szögletvasat véve $\llcorner$, ennek megfelel 2 drb. $\llcorner$ 90.90.9 profil, amelynél $F = 2 \cdot 15,5 = 31 \text{ cm}^2$

és
$$I_{\min} = 2 \cdot 116 = 232 \text{ cm}^4$$

Ellenőrizzük *Tetmajer* szerint. A minimális tehetetlenségi-sugár:

$$i = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{232}{31}} = \sqrt{7,5} = 2,74 \text{ cm}$$

$$\frac{i}{i} = \frac{353}{2,74} = 129 > 105,$$

tehát a választott profil jó.

Az S oszlop, vagy darutengely hajlításra és összenyomásra van igénybevéve. A nyomatéki ábra a rajzon látható.

A reakció-erő: $N_A = H_1 = 5000 \frac{2,5}{3,2} = 3906 \text{ kg}$

A maximális hajlító-nyomaték a 3. pontban:

$M_{\max} = N_2 \cdot 0,4 = 3906 \cdot 0,4 = 1562,4 \text{ kgm} = 156240 \text{ kgcm}$ és a szükséges keresztmetszeti tényező:

$$W = \frac{M_{\max}}{\sigma_m} = \frac{156240}{800} = 195,3 \text{ cm}^3$$

Ha két $\square$ vasból készítjük a szelvényt $\square\square$, ennek megfelel 2 drb. 16. sz. profil, melynél $F = 2 \cdot 24 = 48 \text{ cm}^2$

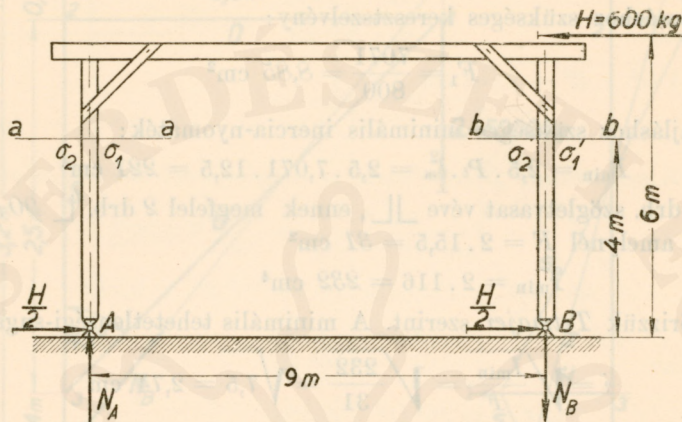
és
$$W_x = 2 \cdot 116 = 232 \text{ cm}^3$$

Az oszlop a $B-3$ részen nyomást is szenved, a nyomóerő $V_1 = 5000 \text{ kg}$, tehát a feszültség:

$$\sigma = - \left(\frac{V_1}{F} + \frac{M}{W} \right) = - \left(\frac{5000}{48} + \frac{156240}{232} \right) = - (104 + 674) = -778 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_m$$

a szelvény tehát megfelel.

8. Fejkötőkkel ellátott fakeret két oldalon csuklóba van fogva (364. ábra). Mekkora az N_A és N_B függélyes felszabadító erő, ha adva van a szélnyomás $H = 600$ kg és ez egyedül hat a szerkezetre? Ha feltételezzük, hogy a két csukló $\frac{H}{2}$ reakció-erővel járul a H felvételére, keressük aa és bb szelvényekben a derékerőt, a nyíró-



364. ábra.

erőt és a nyomatékot. A függőleges oszlopok $24 \cdot 24$ cm² méretű fagerendák. Keresendők aa és bb szelvényekben a σ_1 , σ_2 illetve σ'_1 , σ'_2 derékfeszültségek és a τ csúsztató- (nyíró) feszültség. (Kriemler.)

A felszabadító erők:

$$N_A \cdot 9 = H \cdot 6$$

$$N_A = \frac{600 \cdot 6}{9} = 400 \text{ kg} \quad N_B = -400 \text{ kg}$$

aa szelvényben:

$$N_a = -400 \text{ kg} ; Q_a = \frac{H}{2} = 300 \text{ kg}$$

$$M_a = \frac{H}{2} \cdot 400 = 300 \cdot 400 = 120000 \text{ kgcm}$$

bb szelvényben:

$$N_b = +400 \text{ kg} ; Q_b = \frac{H}{2} = 300 \text{ kg}$$

$$M_b = \frac{H}{2} \cdot 400 = 120000 \text{ kgcm}$$

Az oszlop keresztmetszete: $F = 24^2 = 576$ cm² és a szelvény

ellenállónyomatéka: $W = \frac{24^3}{6} = 2304$ cm³.

Az aa szelvényben tehát:

$$\sigma_{1,2} = -\frac{400}{576} \mp \frac{120000}{2304} = -0,69 \mp 52,08$$

és így: $\sigma_1 = -52,77 \text{ kg/cm}^2$

$$\sigma_2 = +51,39 \text{ kg/cm}^2$$

a bb szelvényben pedig:

$$\sigma'_{1,2} = \frac{400}{576} \mp \frac{120000}{2304} = 0,69 \mp 52,08$$

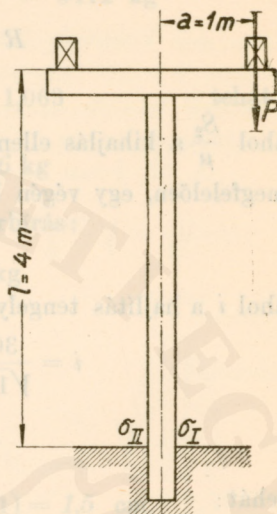
tehát: $\sigma'_1 = -51,59 \text{ kg/cm}^2$

$$\sigma'_2 = +52,77 \text{ kg/cm}^2$$

Végül a csúsztató-feszültség:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F} = 1,5 \frac{300}{576} = 0,78 \text{ kg/cm}^2$$

9. Valamely 30.30 cm^2 kereszt-szelvényű fenyőfa-oszlop (365. ábra) $l = 4 \text{ m}$ hosszú. A végén elhelyezett keresztfa két vízszintes gerenda alátámasztására szolgál, az egyik P erővel van megterhelve.



365. ábra.

Keressük meg az oszlop hordképességét $\beta = 4$ biztonsággal mellett, azután a legnagyobb kihajlást és a legnagyobb feszültségeket.

$$F = 900 \text{ cm}^2$$

$$W = 4500 \text{ cm}^3$$

$$I = 67500 \text{ cm}^4$$

$$S_2 = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$E = 108000 \text{ kg/cm}^2$$

A 65. § (9a) képlete szerint:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{M_{\max}}{W} \leq \sigma_m \quad \text{de:} \quad M_{\max} = \frac{Pa}{\cos l\omega}$$

$$\text{és így:} \quad \sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{Pa}{W \cos l\omega} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{Fa}{W \cos l\omega} \right) \leq \sigma_m$$

ahonnan:

$$P = \frac{F \sigma_m}{1 + \frac{Fa}{W \cos l\omega}}$$

a törőerő pedig:

$$R = \frac{F \cdot S_2}{1 + \frac{Fa}{W \cos l\omega}}$$

Tekintve azonban, hogy hosszú tartóval van dolgunk, amely kihajlik, kihajlásra pedig a tartó teherbírása kisebb, mint összenyomásra, a nevezőbe még μ kisebbitő tényező jön:

$$R = \frac{F \cdot S_2}{\mu \left(1 + \frac{Fa}{W \cos l\omega} \right)}$$

ahol $\frac{S_2}{\mu}$ a kihajlás elleni szilárdság és a különböző karcsúságoknak megfelelően, egy végén befogott fenyőfa-tartóra empirikusan:

$$\mu = 0,7 + 0,03 \frac{l}{i}$$

ahol i a hajlítás tengelyére vonatkozó inercia-sugár. Jelen esetben:

$$i = \frac{30}{\sqrt{12}} = \frac{30}{3,46} = 8,66 \text{ cm}$$

$$\frac{l}{i} = \frac{400}{8,66} = 46,2$$

tehát: $\mu = 0,7 + 0,03 \cdot 46,2 = 2,086$

De: $\frac{Fa}{W} = \frac{900 \cdot 100}{4500} = 20$

és így:

$$R = \frac{F \cdot S_2}{\mu \left(1 + \frac{Fa}{W \cos l\omega} \right)} = \frac{900 \cdot 280}{2,086 \left(1 + \frac{20}{\cos l\omega} \right)} = \frac{120805}{1 + \frac{20}{\cos l\omega}}$$

ahol: $\omega = \sqrt{\frac{R}{IE}}$

Ha első megközelítéssel vesszük, hogy:

$$\frac{1}{\cos l\omega} = 1 \quad \text{akkor:} \quad R_1 = \frac{120805}{21} = 5752 \text{ kg}$$

De közelítőleg:

$$\frac{1}{\cos l\omega} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(l\omega)^2} = 1 + \frac{1}{2}(l\omega)^2 + \frac{1}{4}(l\omega)^4$$

ahol: $l\omega = l \sqrt{\frac{R}{IE}}$

és az előbb nyert R_1 értékkel:

$$(l\omega)^2 = l^2 \frac{R_1}{IE} = \frac{160000 \cdot 5752}{67500 \cdot 108000} = 0,126$$

tehát:
$$\frac{1}{\cos l\omega} = 1,066$$

és így:
$$R_2 = \frac{120805}{1 + 20 \cdot 1,066} = 5412 \text{ kg}$$

És újra ezzel az R_2 -vel:

$$(l\omega)^2 = 0,119; \quad \frac{1}{\cos l\omega} = 1,063 \quad \text{tehát}$$

kapjuk, hogy:
$$R_3 = \frac{120805}{1 + 20 \cdot 1,063} = 5426 \text{ kg}$$

Mint hogy azonban $\beta = 4$, tehát a teherbírás:

$$P = \frac{1}{4} 5426 = 1356,5 \text{ kg}$$

Ennek megfelel:

$$(l\omega)^2 = 0,03$$

$$\frac{1}{\cos l\omega} = 1,015$$

tehát a tartó felső végének a kihajlása:

$$f = a \left(\frac{1}{\cos l\omega} - 1 \right) = 100 (1,015 - 1) = 1,5 \text{ cm.}$$

A feszültségek pedig:

$$\sigma_{I, II} = - \frac{P}{F} \left(1 \pm \frac{Fa}{W \cos l\omega} \right) = - \frac{1356,5}{900} (1 \pm 20 \cdot 1,015)$$

azaz:

$$\sigma_I = - 31,95 \text{ kg/cm}^2$$

és

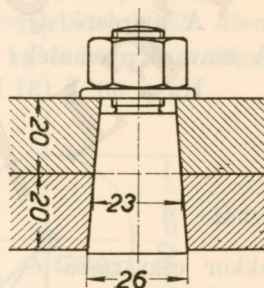
$$\sigma_{II} = + 28,95 \text{ kg/cm}^2$$

10. Valamely összekötésre szolgáló csapszög (366. ábra) $P = 2500 \text{ kg}$ erővel van meghúzva, de a mellett $Q = 400 \text{ kg}$ kerületi erőt is átvisz, ami jó befogásnál nyíró-igénybevételt okoz. Keressük a fellépő feszültséget.

$$\sigma = \frac{2500 \cdot 4}{2,3^2 \cdot 3,14} = 603 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{\max} = 1,4 \frac{400 \cdot 4}{2,3^2 \cdot 3,14} = 135 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_r = \frac{3}{8} \sigma + \frac{5}{8} \sqrt{\sigma^2 + 4\alpha_0^2 \tau_{\max}^2}$$



366. ábra.

és folytassuk, a megerőltetési (kimerülési) tényező:

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_m}{1,3 \tau_m} = \sim 1$$

tehát:
$$\sigma_r = \frac{3}{8} 603 + \frac{5}{8} \sqrt{603^2 + 4 \cdot 135^2}$$

$$\sigma_r = 226 + 413 = 639 \text{ kg/cm}^2$$

11. Valamely homlokcsap terhelése $P = 3000 \text{ kg}$, a fordulatszám $n = 100$ percenként. Legyen $\sigma_m = 500 \text{ kg/cm}^2$ és a megengedett felületi nyomás: $k = 40 \text{ kg/cm}^2$. Meghatározandó a csap átmérője és hossza (350. ábra).

A 67. §-ban mondottak szerint:

$$\frac{l}{d} = \sqrt{\frac{\sigma_m \cdot 0,2}{k}} = \sqrt{\frac{0,2 \cdot 500}{40}} = \sqrt{2,5} = 1,58 = \sim 1,6$$

De:
$$P \frac{l}{2} = \frac{d^3 \pi}{32} \sigma_m = \sim 0,1 d^3 \sigma_m$$

ahonnan:
$$P \frac{l}{d} = 0,2 d^2 \sigma_m$$

és
$$d = \sqrt{\frac{P}{0,2 \sigma_m} \cdot \frac{l}{d}} = \sqrt{\frac{3000 \cdot 1,6}{0,2 \cdot 500}} = \sqrt{48} = 6,92 \sim 7 \text{ cm}$$

tehát:
$$l = 1,6d = 1,6 \cdot 7 = 11,2 \sim 12 \text{ cm.}$$

A melegfejlődési feltételből adódna, ha $w = 45000$ -rel számolunk (mint pl. transzmisszióknál):

$$l = \frac{P \cdot n}{w} = \frac{3000 \cdot 100}{45000} = 6,7 \text{ cm, de ez a felületi}$$

nyomás miatt kicsi, tehát az előbbi értéket tartjuk meg.

12. Keressük valamely ellensúly emelő-tengelyénél a feszültséget a 367. ábrán adott viszonyok mellett. A tengely csavarás- és nyírásra van igénybevéve. (Hindenlang—Lübeck.)

A nyíróerő: $Q = 15 \text{ kg}$

A csavaró nyomaték: $M_{cs} = 15,50 = 750 \text{ kgcm.}$

Ha a 68. § (3) képlete szerint:

$$M_{cs} > \frac{Q \cdot d}{20}$$

tehát:
$$750 > \frac{15 \cdot d}{20}$$

akkor csavarásra és nyírásra számítunk. Tehát a II. pontban a 68. § (1) képlete szerint:

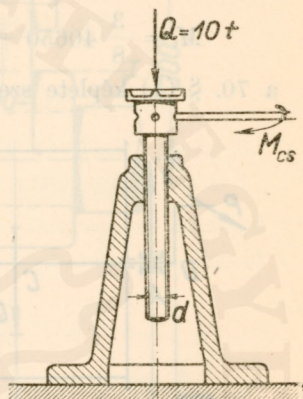
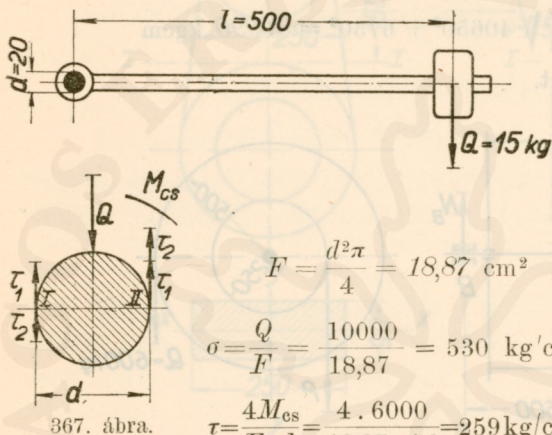
$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{1,2Q}{F} + \frac{4M_{cs}}{Fd} = \frac{1}{F} \left(1,2Q + 4 \frac{M_{cs}}{d} \right) =$$

$$= \frac{4}{2^2 \cdot 3,14} \left(1,2 \cdot 15 + 4 \frac{750}{2} \right) = \frac{1}{3,14} \cdot 1518 = 483 \text{ kg/cm}^2$$

és ugyanitt a rugalmas feszültség:

$$\sigma_r = \frac{5}{4} \tau = \frac{5}{4} 483 = 604 \text{ kg/cm}^2.$$

13. Kiszámítandó valamely csavaremelő csavarjának maximális igénybevétele, ha $Q = 10000 \text{ kg}$ és a megfelelő hajtó-nyomaték $M_{cs} = 6000 \text{ kgcm}$, továbbá a csavar magszelvényének átmérője $d = 49 \text{ mm}$ (368. ábra). A csavar összenyomásra és csavarásra van igénybevéve. (Haren.)



$$F = \frac{d^2 \pi}{4} = 18,87 \text{ cm}^2$$

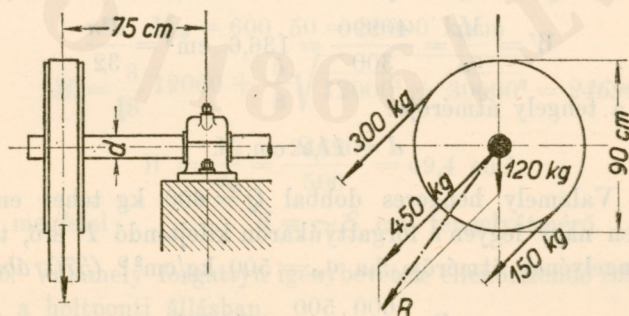
$$\sigma = \frac{Q}{F} = \frac{10000}{18,87} = 530 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau = \frac{4M_{cs}}{F \cdot d} = \frac{4 \cdot 6000}{18,87 \cdot 4,9} = 259 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_r = 0,35\sigma + 0,65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 0,35 \cdot 530 + 0,65\sqrt{530^2 + 4 \cdot 259^2}$$

$$\sigma_r = 666 \text{ kg/cm}^2.$$

14. Valamely $G = 120 \text{ kg}$ súlyú szíjtárcsa, melynek átmérője $D = 90 \text{ cm}$, egy tengely szabad végére van felékelve (369. ábra). A szíjfeszültségek: $T_1 = 300 \text{ kg}$, $T_0 = 150 \text{ kg}$ és irányuk a függő-



lyessel 45° szöget zár be. Keressük a tengely átmérőjét, ha $\sigma_m = 300 \text{ kg/cm}^2$.

$$R = \sqrt{450^2 + 120^2 + 2 \cdot 450 \cdot 120 \cdot \cos 45^\circ} = 542 \text{ kg}$$

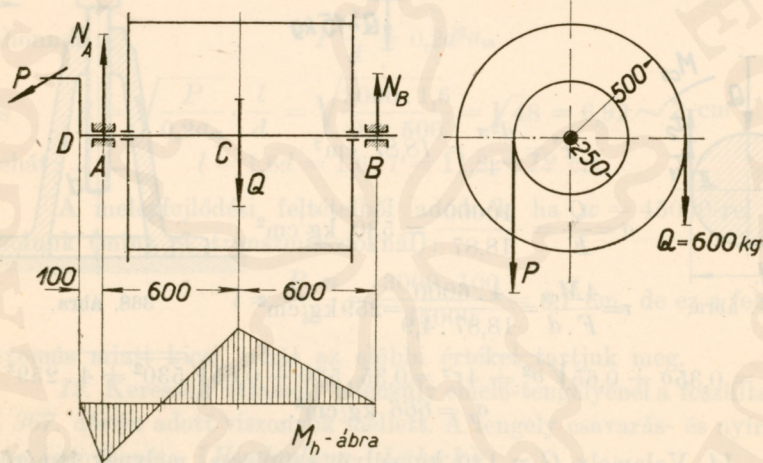
$M_h = 542 \cdot 75 = 40650 \text{ kgcm}$, a hajlító nyomaték

és $M_{cs} = (300 - 150) \frac{90}{2} = 6750 \text{ kgcm}$, a csavaró nyomaték.

A tengelyt tisztán hajlításra méretezzük az ideális nyomaték alapján, amely:

$$M_i = \frac{3}{8} 40650 + \frac{5}{8} \sqrt{40650^2 + 6750^2} = 40990 \text{ kgcm}$$

a 70. § (4) képlete szerint.



370. ábra.

A szükséges ellenállónyomaték:

$$W = \frac{M_i}{\sigma_m} = \frac{40990}{300} = 136,6 \text{ cm}^3 = \frac{d^3 \pi}{32}$$

ahonnan a tengely átmérője:

$$d = 11,2 \text{ cm.}$$

15. Valamely hengeres dobbal $Q = 600 \text{ kg}$ teher emelendő fel. Milyen nagy legyen a forgattyúkaron kifejtendő P erő, továbbá a dob tengelyének átmérője, ha $\sigma_m = 500 \text{ kg/cm}^2$? (370. ábra).

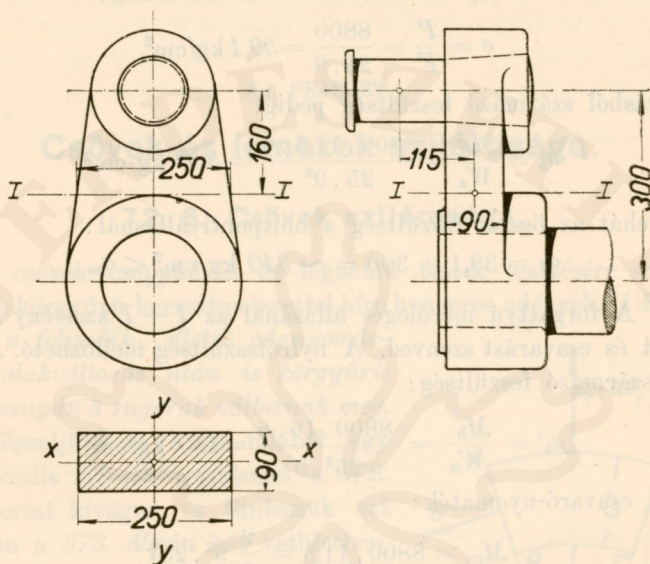
$$P = \frac{600 \cdot 500}{250} = 1200 \text{ kg}$$

A nyomatéki tétellel kiszámítjuk N_B -t:

$$N_B \cdot 1200 - 600 \cdot 600 + 1200 \cdot 100 = 0$$

ahonnan:
$$N_B = \frac{360000 - 120000}{1200} = 200 \text{ kg}$$

és
$$N_A = 1800 - 200 = 1600 \text{ kg.}$$



371. ábra.

A dob tengelye hajlításra, azonkívül $\overline{CD}$ részen csavarásra van igénybevéve, tehát a 70. § (4) képletével:

$$M_i = \frac{3}{8} M_h + \frac{5}{8} \sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2}$$

ahol: $M_h = 200 \cdot 60 = 12000 \text{ kgcm}$

és $M_{cs} = 600 \cdot 50 = 30000 \text{ kgcm}$

tehát:
$$M_i = \frac{3}{8} 12000 + \frac{5}{8} \sqrt{12000^2 + 30000^2} = 24690 \text{ kgcm}$$

$$W = \frac{M_i}{\sigma_m} = \frac{24690}{500} = 49,4 \text{ cm}^3$$

aminek megfelel: $d = \sim 8 \text{ cm}$ tengelyátmérő.

16. Valamely forgattyú igénybevétele ellenőrizendő (371. ábra)

1. a holtponti állásban,

2. abban az állásban, amelyben a csavaró-nyomaték maximum.

A legnagyobb forgató-erő a forgattyú derékszögű állásánál lesz és $P = 8800$ kg. Keresendők a feszültségek az $I-I$ szelvényben. (Haren.)

1. Holtponti állásnál az $I-I$ szelvény húzó-, illetve nyomó-, azonkívül hajlító-igénybevételt szenved.

A húzásból (nyomásból) származó feszültség:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{8800}{25.9} = 39,1 \text{ kg/cm}^2$$

a hajlításból származó feszültség pedig:

$$\sigma_b = \frac{M_h}{W_x} = \frac{8800 \cdot 11,5 \cdot 6}{25 \cdot 9^2} = 300 \text{ kg/cm}^2$$

Tehát az összes feszültség a holtponti állásnál:

$$\sigma_I = 39,1 + 300 = \sim 340 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_m$$

2. A forgattyú merőleges állásánál az $I-I$ szelvény nyírást, hajlítást és csavarást szenved. A nyírófeszültség mellőzhető. A hajlításból származó feszültség:

$$\sigma_b' = \frac{M_h'}{W_y} = \frac{8800 \cdot 16 \cdot 6}{25^2 \cdot 9} = 150 \text{ kg/cm}^2$$

A csavaró-nyomaték:

$$M_{cs} = 8800 \cdot 11,5 = \frac{2}{9} \cdot 9^2 \cdot 25 \tau$$

ahonnan a csavarásból származó feszültség:

$$\tau = \frac{8800 \cdot 11,5 \cdot 4,5}{9^2 \cdot 25} = 225 \text{ kg/cm}^2$$

A rugalmas feszültség *De Saint-Venant* elméletével:

$$\sigma_r = \frac{3 \cdot 150 + 5 \sqrt{150^2 + 4 \cdot 225^2}}{8} = \frac{450 + 5 \cdot 474}{8}$$

$$\sigma_r = 353 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_m$$

Tehát:

$$\sigma_r < \sigma_m$$

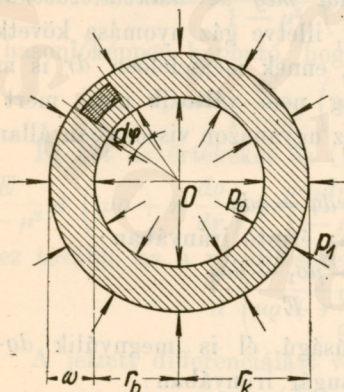
XI. FEJEZET.

Csövek és lemezek szilárdsága.

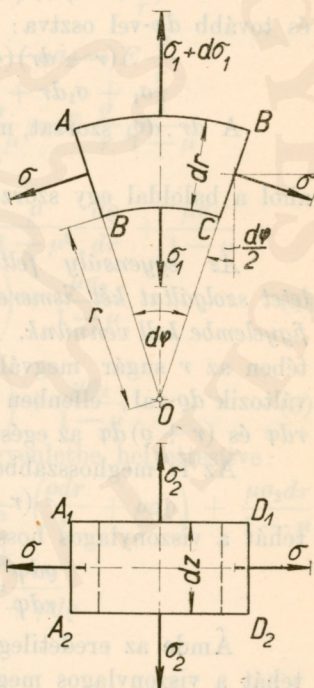
72. §. Csövek szilárdsága.

A csövek cseppfolyós és légnemű testek vezetésére szolgáló, rendszeren körgyűrű-keresztmetszettel bíró hengeres edények. A keresztmetszet a folyadék-, illetve gáznyomás- okozta alakváltozás után is körgyűrű marad, csupán a sugarak változnak meg.

Képzeljünk el a cső falából egy differenciális méretű testelemet a 372. ábra szerint kivágva és tüntessük ezt fel külön a 373. ábrán két vetületben. Az egyensúly helyreállítása végett a differenciális lapokon feszültségeket kell



372. ábra.



373. ábra.

működtetnünk. Mivel az élek, a terhelés következtében beálló alakváltozásnál meghosszabbodnak, de a lapszögek nem változnak meg,

minden feszültség derékfeszültség lesz, csúsztató-feszültségek nem ébrednek.

A testelem az $ABCD$ alappal bíró dz magasságú prizma, melynek lapjain keletkező feszültségek az ábrán láthatók. A BC és AD körhenger-lapokon σ_1 , illetve $\sigma_1 + d\sigma_1$ feszültségek lépnek föl, ugyanis a sugármenti feszültségek, a sugárral együtt megváltoztatják értéküket; az érintő-irányú feszültség σ , a tengelyirányú feszültség pedig σ_2 .

Az egyensúly feltétele, hogy az összes működő erők sugárirányú komponenseinek algebrai összege zéró, azaz:

$$(r + dr) \cdot d\varphi \cdot dz (\sigma_1 + d\sigma_1) - rd\varphi dz \sigma_1 - 2dr \cdot dz \cdot \sigma \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} = 0$$

Az egyenletet dz -vel osztva és figyelembe véve, hogy kis szögeknél

$$\sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{\widehat{d\varphi}}{2}$$

kapjuk, hogy:

$$(r + dr) d\varphi (\sigma_1 + d\sigma_1) - rd\varphi \sigma_1 - dr \sigma d\varphi = 0$$

és tovább $d\varphi$ -vel osztva:

$$(r + dr)(\sigma_1 + d\sigma_1) - r\sigma_1 - \sigma dr = 0$$

$$r\sigma_1 + \sigma_1 dr + rd\sigma_1 + drd\sigma_1 - r\sigma_1 - \sigma dr = 0$$

A $dr \cdot d\sigma_1$ szorzat, mint másodrendű kicsiny mellőzhető, tehát:

$$\sigma_1 dr + rd\sigma_1 = \sigma dr$$

ahol a baloldal egy szorzat differenciálja és így:

$$d(\sigma_1 r) = \sigma dr \quad (1)$$

Az egyensúly feltétele, amint látható, csak egy egyenletet szolgáltat két ismeretlennel, tehát még az alakváltozásokat is figyelembe kell vennünk. A folyadék, illetve gáz nyomása következtében az r sugár megváltozik ϱ -val, ennek megfelelően dr is megváltozik $d\varrho$ -val; ellenben a $d\varphi$ szög nem változik meg, mert az $rd\varphi$ és $(r + \varrho)d\varphi$ az egész kerülethez ugyanazon viszonyban állanak.

Az ív meghosszabbodása:

$$(r + \varrho)d\varphi - rd\varphi = \varrho d\varphi$$

tehát a viszonylagos hosszváltozás az érintő irányában:

$$\frac{\varrho d\varphi}{rd\varphi} = \frac{\varrho}{r} = \frac{\sigma - \mu\sigma_1 - \mu\sigma_2}{E}$$

Ámde az eredetileg dr hosszúságú él is megnyúlik $d\varrho$ -val, tehát a viszonylagos megnyúlás a sugár irányában:

$$\frac{d\varrho}{dr} = \frac{\sigma_1 - \mu\sigma - \mu\sigma_2}{E}$$

ahol $\mu = \frac{1}{m}$ a Poisson-féle szám reciprók értéke.

Ezt a két egyenletet így is írhatjuk:

$$\sigma - \mu\sigma_1 - \mu\sigma_2 = E \frac{\varrho}{r} \quad (2)$$

$$\text{és} \quad \sigma_1 - \mu\sigma - \mu\sigma_2 = E \frac{d\varrho}{dr} \quad (3)$$

E két utóbbi képletből meghatározzuk σ és σ_1 -et. A (2)-ből kivonva a (3)-at, kapjuk, hogy:

$$E \left(\frac{\varrho}{r} - \frac{d\varrho}{dr} \right) = \sigma(1 + \mu) - \sigma_1(1 + \mu) = (1 + \mu)(\sigma - \sigma_1)$$

$$\text{ahonnan:} \quad \sigma - \sigma_1 = \frac{E}{1 + \mu} \left(\frac{\varrho}{r} - \frac{d\varrho}{dr} \right)$$

$$\text{és} \quad \sigma_1 = \sigma - \frac{E}{1 + \mu} \left(\frac{\varrho}{r} - \frac{d\varrho}{dr} \right)$$

Helyettesítsük ezt be a (2) egyenletbe, akkor:

$$\sigma - \mu\sigma + \frac{E\mu}{1 + \mu} \left(\frac{\varrho}{r} - \frac{d\varrho}{dr} \right) - \mu\sigma_2 = E \frac{\varrho}{r}$$

$$\sigma(1 - \mu) + \frac{E\mu}{1 + \mu} \left(\frac{\varrho}{r} - \frac{d\varrho}{dr} \right) - \mu\sigma_2 = E \frac{\varrho}{r}$$

$$\sigma + E \frac{\mu}{1 - \mu^2} \left(\frac{\varrho}{r} - \frac{d\varrho}{dr} \right) - \frac{\mu\sigma_2}{1 - \mu} = E \frac{\varrho}{r} \frac{1}{1 - \mu}$$

amely egyenletből:

$$\begin{aligned} \sigma &= E \frac{\varrho}{r} \left(\frac{1}{1 - \mu} - \frac{\mu}{1 - \mu^2} \right) + E \frac{\mu}{1 - \mu^2} \frac{d\varrho}{dr} + \frac{\mu\sigma_2}{1 - \mu} \\ \sigma &= \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{\varrho}{r} + \mu \frac{d\varrho}{dr} \right) + \frac{\mu\sigma_2}{1 - \mu} \end{aligned} \quad (4)$$

és hasonlóképpen kapható, hogy:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\mu \frac{\varrho}{r} + \frac{d\varrho}{dr} \right) + \frac{\mu\sigma_2}{1 - \mu} \quad (5)$$

Ezeket az értékeket az (1) alatti egyenletbe helyettesítve:

$$\frac{E}{1 - \mu^2} d \left(\mu\varrho + r \frac{d\varrho}{dr} \right) + \frac{\mu\sigma_2 dr}{1 - \mu} = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{\varrho dr}{r} + \mu d\varrho \right) + \frac{\mu\sigma_2 dr}{1 - \mu}$$

és ez tovább, ha a rövidítéseket elvégezzük:

$$d \left(\mu\varrho + r \frac{d\varrho}{dr} \right) = \frac{\varrho dr}{r} + \mu d\varrho$$

A jelzett differenciálást végrehajtva:

$$\mu d\varrho + r d \left(\frac{d\varrho}{dr} \right) + d\varrho = \frac{\varrho dr}{r} + \mu d\varrho$$

ahonnan r -rel való osztás után kapjuk, hogy:

$$d \left(\frac{d\varrho}{dr} \right) + \frac{d\varrho}{r} - \frac{\varrho dr}{r^2} = 0$$

Ez pedig egy teljes differenciál, ugyanis:

$$d\left(\frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r}\right) = 0$$

mert:

$$d\left(\frac{d\varrho}{dr}\right) + d\frac{\varrho}{r} = d\left(\frac{d\varrho}{dr}\right) + \frac{rd\varrho - \varrho dr}{r^2} = d\left(\frac{d\varrho}{dr}\right) + \frac{d\varrho}{r} - \frac{\varrho dr}{r^2}$$

A (6) egyenletből egyszeri integrálással nyerjük, hogy:

$$\frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r} = 2A$$

ahol $2A$ legyen az állandó és tovább:

$$rd\varrho + \varrho dr = 2A \cdot r \cdot dr = d(r\varrho)$$

és ennek integrál-egyenlete:

$$r\varrho = Ar^2 + B$$

ahol B alatt állandót értünk. Ezen egyenletből:

$$\varrho = Ar + \frac{B}{r} \quad \text{és} \quad \frac{\varrho}{r} = A + \frac{B}{r^2} \quad (7)$$

Differenciáljuk továbbá a ϱ -nak a kifejezését:

$$d\varrho = A dr - \frac{B}{r^2} dr \quad \text{azaz:} \quad \frac{d\varrho}{dr} = A - \frac{B}{r^2} \quad (8)$$

A $\frac{\varrho}{r}$ és $\frac{d\varrho}{dr}$ -nek most nyert értékeit a (4) és (5) egyenletekbe helyettesítve:

$$\sigma = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(A + \frac{B}{r^2} + \mu A - \frac{\mu B}{r^2} \right) + \frac{\mu \sigma_2}{1 - \mu}$$

és

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\mu A + \frac{\mu B}{r^2} + A - \frac{B}{r^2} \right) + \frac{\mu \sigma_2}{1 - \mu}$$

Ha a homogén tagokat összefoglaljuk és behozzuk a következő jelöléseket:

$$\frac{\mu \sigma_2}{1 - \mu} + \frac{EA}{1 - \mu} = a \quad \text{továbbá:} \quad \frac{EB}{1 + \mu} = b$$

akkor eredményül kapjuk, hogy:

$$\sigma = a + \frac{b}{r^2} \quad (9)$$

$$\sigma_1 = a - \frac{b}{r^2} \quad (10)$$

Ezekben a képletekben az a és b állandók értékeit kell még meghatározni. *Ismernünk kell e végett a csőre belülről és kívülről ható nyomásokat.* Legyen a cső belsejében levő folyadék, vagy gáz feszültsége p_0 , a cső külső palástjára ható feszültség p_1 , jelölje r_b a

cső belső, r_k pedig annak külső sugarát, tehát $r_k - r_b = \omega$ a cső falvastagságát. Mivel az összenyomó-feszültségek negatív feszültségek:

$$\sigma_1 = -p_0, \text{ ha } r = r_b$$

és

$$\sigma_1 = -p_1, \text{ ha } r = r_k$$

vagyis:

$$-p_0 = a - \frac{b}{r_b^2} \quad \text{és} \quad -p_1 = a - \frac{b}{r_k^2}$$

A felső egyenletet az alsóból kivonva:

$$p_0 - p_1 = b \left(\frac{1}{r_b^2} - \frac{1}{r_k^2} \right)$$

ahonnan:

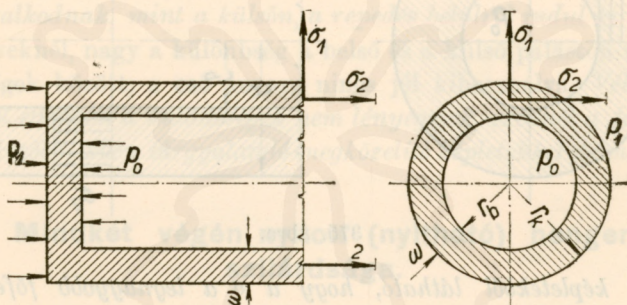
$$b = \frac{(p_0 - p_1) r_b^2 r_k^2}{r_k^2 - r_b^2} \quad (11)$$

és ennek alapján:

$$a = -p_0 + \frac{b}{r_b^2} = -p_0 + \frac{p_0 r_k^2 - p_1 r_k^2}{r_k^2 - r_b^2}$$

tehát:

$$a = \frac{p_0 r_b^2 - p_1 r_k^2}{r_k^2 - r_b^2} \quad (12)$$



374. ábra.

Ezen értékeket a σ kifejezésébe helyettesítve, nyerjük a körkeresztmetszet érintőjének irányába eső főfeszültségre, hogy:

$$\sigma = \frac{p_0 r_b^2 - p_1 r_k^2}{r_k^2 - r_b^2} + \frac{(p_0 - p_1) r_b^2 r_k^2}{(r_k^2 - r_b^2) r^2} \quad (13)$$

Ha pedig a σ_1 kifejezésébe helyettesítjük be az a és b értékeket, akkor a sugár irányú főfeszültséget kapjuk, tehát:

$$\sigma_1 = \frac{p_0 r_b^2 - p_1 r_k^2}{r_k^2 - r_b^2} - \frac{(p_0 - p_1) r_b^2 r_k^2}{(r_k^2 - r_b^2) r^2} \quad (14)$$

Ha a cső a két végén nem nyitható, hanem zárt, a tengely irányában húzás ébred, ez adja a harmadik, tengelyirányú főfeszültséget. Nagyságát a következőképpen kapjuk. A csövet elzáró fenék alakjától eltekintve csak azt az erőt számítjuk ki, mellyel a

fenékre ható belső túlnyomás a cső falát megnyújtja és feltesszük, hogy az ezen erővel egyensúlyt tartó σ_2 feszültségek a körgyűrű-szelvényben egyenletes eloszlásúak. Tehát a 374. ábra szerint:

$$(r_k^2 \pi - r_b^2 \pi) \sigma_2 = r_b^2 \pi p_0 - r_k^2 \pi p_1 = P$$

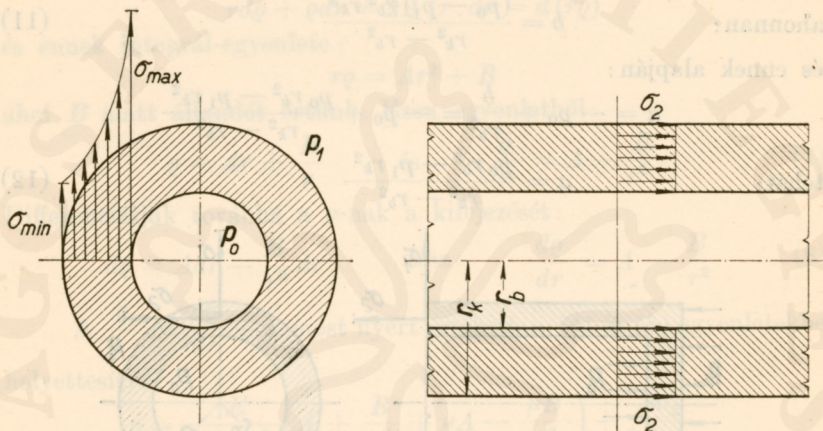
azaz:

$$\pi (r_k^2 - r_b^2) \sigma_2 = \pi (r_b^2 p_0 - r_k^2 p_1)$$

ahonnan a tengelyirányú főfeszültség:

$$\sigma_2 = \frac{p_0 r_b^2 - p_1 r_k^2}{r_k^2 - r_b^2} \quad (15)$$

A három főfeszültséget ismerve, a rugalmas feszültségek már meghatározhatók.



375. ábra.

A képletekből látható, hogy a σ a legnagyobb főfeszültség, tehát az ezzel párhuzamos irányban, a körszelvény érintőjének irányában fog a legnagyobb rugalmas feszültség is fellepni:

$$\sigma_{r\max} = E \frac{Q}{r} = \sigma - \mu \sigma_1 - \mu \sigma_2 \quad (16)$$

míg a sugárirányú rugalmas feszültség:

$$\sigma_r' = E \frac{dQ}{dr} = \sigma_1 - \mu \sigma - \mu \sigma_2 \quad (17)$$

Vizsgáljuk meg, hogy a vastagfalú cső falában milyen törvény szerint változnak az érintő-irányú feszültségek. A σ főfeszültségre nézve levezettük, hogy:

$$\sigma = a + \frac{b}{r^2}$$

ahol r a tetszőleges sugár. Ez az egyenlet azt mutatja, hogy a legnagyobb főfeszültség $\sigma_{\max}$ ott fog föllépni, ahol » r « a legkisebb,

tehát, ha $r = r_b$ akkor: $\sigma_{\max} = a + \frac{b}{r_b^2}$; a legkisebb főfeszültség $\sigma_{\min}$

pedig ott, ahol r a legnagyobb, tehát ha $r = r_k$, s így $\sigma_{\min} = a + \frac{b}{r_k^2}$.

A feszültség változásának törvényét az általános egyenlet adja, amely szerint a feszültség fordítva arányos r^2 -tel, az eloszlást ábrázoló görbe tehát hiperbola (375. ábra).

Miután a legnagyobb feszültség az érintő irányában, tehát a cső tengelyére merőleges irányban lép fel, a csövek a hengeralkotó mentén fognak túlnyomás alatt felrepedni. Ezért pl. a kazán-szögecselésnél, ha a hossz-varraton (hengeralkotó mentén) kétsoros a szögecselés, a kereszt-varraton csak egysoros szögecselést találunk. Ha egy földbe fektetett vízvezeték-cső keresztirányban reped fel, annak nem az az oka, hogy nem volt elég szilárd, hanem az, hogy az egyenlőtlen felfekvés folytán hajlító-feszültségek léptek fel és ezek okozták a törést.

Amint a képletek tanúsítják, a cső belső palástján nagyobb feszültségek uralkodnak, mint a külsőn, a repedés belülről indul ki. Vastagfalú csöveknél, nagy a különbség a belső és a külső paláston uralkodó feszültségek között, a cső anyaga nincs jól kihasználva. *Vékonyfalú csöveknél ellenben a különbségek nem lényegesek, ezeknél a falvastagságot a későbbiekben tárgyalandó megközelítő képletekkel számítjuk ki.*

73. §. Mindkét végén nyitott (nyitható) hengeres-cső szilárdsága.

Két esetet kell megkülönböztetnünk: a belső és a külső túlnyomás esetét.

1. *Belső túlnyomásnál* $p_0 > p_1$, tehát a cső belső palástján nagyobb nyomás uralkodik, mint a külsőn, a belső túlnyomás $p_b = p_0 - p_1$. Leggyakrabban a cső külső palástjára csak a légnyomás hat (gőz-, víz-, sűrített levegő-vezetékek), ilyenkor az előbbi § (13) képletében p_0 helyett a túlnyomást,

$$p_b = p_0 - 1 \text{ at}$$

értéket vesszük, p_1 helyett pedig zérót veszünk tehát: $p_1 = 0$ és a maximális érintőleges húzófeszültség, a cső belső palástján:

$$\sigma_{\max} = \frac{p_b r_b^2}{r_k^2 - r_b^2} + \frac{p_b r_b^2 r_k^2}{(r_k^2 - r_b^2) r_b^2} = \frac{p_b r_b^2 + p_b r_k^2}{r_k^2 - r_b^2}$$

tehát:

$$\sigma_{\max} = \frac{p_b (r_b^2 + r_k^2)}{r_k^2 - r_b^2}$$

Tekintettel arra, hogy a belső paláston: $\sigma_1 = -p_b$, továbbá nyitható csőnél: $\sigma_2 = 0$, a legnagyobb rugalmas feszültség a belső paláston, az érintő irányában lép fel és nagysága:

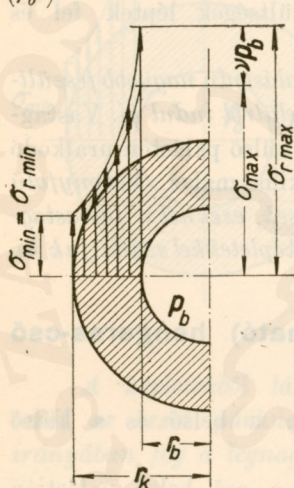
$$\sigma_{r\max} = \sigma_{\max} - \mu(-p_b) = \sigma_{\max} + \mu p_b \quad (1)$$

A rugalmas feszültségek eloszlását a 376. ábra tünteti föl.

A megfelelő értékeket az (1) egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned} \sigma_{r\max} &= \frac{p_b (r_b^2 + r_k^2)}{r_k^2 - r_b^2} + \frac{\mu p_b (r_k^2 - r_b^2)}{r_k^2 - r_b^2} = \\ &= \frac{p_b [r_b^2 (1 - \mu) + r_k^2 (1 + \mu)]}{r_k^2 - r_b^2} \leq \sigma_m \end{aligned}$$

A jobboldalon a számlálót és a nevezőt r_b^2 -tel osztva, kifejezzük $\left(\frac{r_k}{r_b}\right)^2$ -et, azaz:



$$\sigma_m = \frac{p_b \left[(1 - \mu) + \left(\frac{r_k}{r_b}\right)^2 (1 + \mu) \right]}{\left(\frac{r_k}{r_b}\right)^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} \sigma_m \left(\frac{r_k}{r_b}\right)^2 - p_b \left(\frac{r_k}{r_b}\right)^2 (1 + \mu) &= \sigma_m + p_b (1 - \mu) \\ \left(\frac{r_k}{r_b}\right)^2 &= \frac{\sigma_m + (1 - \mu) p_b}{\sigma_m - (1 + \mu) p_b} \end{aligned}$$

és ha Bauschinger szerint: $\mu = 0,25$, akkor:

$$\frac{r_k}{r_b} = \sqrt{\frac{\sigma_m + 0,75 p_b}{\sigma_m - 1,25 p_b}}$$

De mivel $r_k - r_b = \omega$ a falvastagság, az egyenletet r_b -vel szorozva és mindkét oldalából r_b -t kivonva kapjuk, hogy:

$$\omega = r_b \left(\sqrt{\frac{\sigma_m + 0,75 p_b}{\sigma_m - 1,25 p_b}} - 1 \right) \quad (2)$$

De $r_b = \frac{D_b}{2}$, ahol D_b a cső belső átmérője és a rozsdásodás és excentrikus öntésre való tekintettel még bizonyos C értékkel növeljük a falvastagságot (pl. öntöttvasnál $C \sim 0,8$ cm), akkor a De Saint-Venant-képlet a következőképpen írható:

$$\omega = \frac{D_b}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma_m + 0,75 p_b}{\sigma_m - 1,25 p_b}} - 1 \right) + C \quad (3)$$

ahol σ_m a cső anyagában megengedett feszültség, középértékben öntöttvasnál (250—300) kg/cm², folyasztottvasnál és foszforbronznál (500—800) kg/cm², acélöntvényre (900—1100) kg/cm². Megjegyezzük, hogy öntöttvas-csöveket legfeljebb $p_b = 14$ at nyomásig szoktuk használni.

Ha $p_b = \frac{\sigma_m}{1,25}$, akkor kapnók, hogy $\omega = \infty$. *Herrmann* ezt a

képletet még átalakította. Ugyanis ha $\frac{p_b}{\sigma_m}$ kis érték, akkor:

$$\frac{\sigma_m + 0,75 p_b}{\sigma_m - 1,25 p_b} = \frac{4 \sigma_m + 3 p_b}{4 \sigma_m - 5 p_b} = 1 + \frac{8 p_b}{4 \sigma_m - 5 p_b}$$

tehát:

$$\omega = \frac{D_b}{2} \left[\left(1 + \frac{8 p_b}{4 \sigma_m - 5 p_b} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]$$

ahonnan — ha a sorbafejtésnél a harmadik tagot már elhanyagoljuk — kapjuk, hogy:

$$\omega = \frac{D_b}{2} \left(1 + \frac{4 p_b}{4 \sigma_m - 5 p_b} - 1 \right) = \frac{D_b}{2} \frac{4 p_b}{4 \sigma_m - 5 p_b}$$

tehát *Herrmann* megközelítő képlete, amely valamivel nagyobb értéket ad, mint a *De Saint-Venant*-féle képlet, a következő:

$$\omega_{cm} = \frac{D_b \text{ (cm)} \cdot p_b \text{ (at)}}{2 \sigma_m \text{ (kg/cm}^2\text{)} - 2,5 p_b \text{ (at)}} + C \quad (4)$$

Öntöttvas-gőzvezető-csöveknél rendszeren $p_b = 10$ at-val számolunk és $\sigma_m = 250$ kg/cm², tehát:

$$\omega = \frac{10 D_b}{500 - 25} + C = \frac{D_b}{47,5} + C$$

és kikerekítve:

$$\omega = \frac{D_b}{50} + C \quad (5)$$

A vaskohászatban gyakran alkalmazott vízakumulátorok magas nyomású vízzel dolgoznak. Tekintve, hogy itt a nyomás a 100 at-t is eléri, *öntöttvas helyett acélöntvényű hengereket, vagy kovácsvas-gyűrűkkel megerősített öntöttvas-hengereket használnak*. Legyen pl. $p_b = 50$ at, $\sigma_m = 300$ kg/cm², akkor a falvastagság:

$$\omega = \frac{D_b}{2} \left(\sqrt{\frac{300 + 0,75 \cdot 50}{300 - 1,25 \cdot 50}} - 1 \right) + C = 0,096 D_b + C$$

és ha $p_b = 100$ at, akkor:

$$\omega = \frac{D_b}{2} \left(\sqrt{\frac{300 + 75}{300 - 125}} - 1 \right) + C = 0,232 D_b + C$$

2. *Külső túlnyomásnál* az előző § (14) képletében p_1 helyett a $p_k = p_1 - 1$ at értéket vesszük és feltesszük, hogy a belső feszültség: $p_0 = 0$, tehát a cső belseje a külső levegővel közlekedik, mint pl. a gőzkazánok tűzcsövei. Ebben az esetben a tangenciális feszültség a cső belső palástján:

$$\sigma_{\max} = \frac{-p_k r_k^2}{r_k^2 - r_b^2} + \frac{-p_k r_b^2 r_k^2}{(r_k^2 - r_b^2) r_b^2} = -\frac{2 p_k r_k^2}{r_k^2 - r_b^2}$$

$$\text{tehát:} \quad -\frac{2 p_k r_k^2}{r_k^2 - r_b^2} = -\sigma_{r \max} \leq \sigma_m \quad (6)$$

ez egyúttal a rugalmas feszültség is, mert feltevésünk szerint $\sigma_1 = p_0 = 0$ és nyitott csőnél $\sigma_2 = 0$.

A (6) egyenletből:

$$r_k = r_b \sqrt{\frac{\sigma_m}{\sigma_m - 2 p_k}}$$

és mivel $r_k - r_b = \omega$, a *De Saint-Venant*-féle képlet így alakul:

$$\omega = r_b \left(\sqrt{\frac{\sigma_m}{\sigma_m - 2 p_k}} - 1 \right) = \frac{D_b}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma_m}{\sigma_m - 2 p_k}} - 1 \right) \quad (7)$$

Ha $p_k = \frac{\sigma_m}{2}$, akkor kapnók, hogy $\omega = \infty$. Belső túlnyomásnál ez: $p_b = \frac{\sigma_m}{1,25}$ mellett következik be, tehát mivel $\frac{\sigma_m}{1,25} > \frac{\sigma_m}{2}$,

egyenlő belső átmérő és biztosság mellett, a külső túlnyomású cső falvastagsága nagyobb, mint a belső túlnyomású csőé, azaz ugyanazon falvastagság mellett belül nyomott csőben nagyobb lehet a folyadék, vagy gáz nyomása, mint a kívül nyomott csőben.

A (7) képletet *Herrmann* még átalakította a következőképpen:

$$\sqrt{\frac{\sigma_m}{\sigma_m - 2 p_k}} = \left(1 + \frac{2 p_k}{\sigma_m - 2 p_k} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{p_k}{\sigma_m - 2 p_k}$$

tehát a falvastagság megközelítéssel:

$$\omega = \frac{D_b p_k}{2 (\sigma_m - 2 p_k)} + C \quad (8)$$

Ez a képlet valamivel nagyobb értéket ad a falvastagságra, mint a (7) alatti.

74. §. Mindkét végén zárt hengeres-cső szilárdsága.

Mindkét végén zárt csőnél a σ és σ_1 főfeszültségek mellett a σ_2 tengelyirányú főfeszültség is fellép. A σ és σ_1 főfeszültségekről feltesszük, hogy ugyanakkorák, mint a nyitott csőveknél, tehát:

$$\sigma = a + \frac{b}{r^2}$$

és
$$\sigma_1 = a - \frac{b}{r^2}$$

ahol:
$$a = \frac{p_0 r_b^2 - p_1 r_k^2}{r_k^2 - r_b^2} \quad \text{és} \quad b = \frac{(p_0 - p_1) r_b^2 r_k^2}{r_k^2 - r_b^2}$$

és a 72. § (15) képlete szerint a tengelyirányú feszültség:

$$\sigma_2 = \frac{p_0 r_b^2 - p_1 r_k^2}{r_k^2 - r_b^2}$$

1. *Belső túlnyomásnál.* Ha a belső túlnyomás $p_b = p_0 - 1$ at a külső nyomás az előbbiekhöz hasonlóan itt is $p_1 = 0$ -nak tekinthető, akkor a főfeszültségek:

$$\sigma = \frac{p_b r_b^2}{r_k^2 - r_b^2} + \frac{p_b r_b^2 r_k^2}{(r_k^2 - r_b^2) r^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{p_b r_b^2}{r_k^2 - r_b^2} - \frac{p_b r_b^2 r_k^2}{(r_k^2 - r_b^2) r^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{p_b r_b^2}{r_k^2 - r_b^2}$$

A legnagyobb rugalmas feszültség a cső belső palástján fog fellépni a σ irányában, erre nézve $r = r_b$

és
$$\sigma = \frac{p_b (r_b^2 + r_k^2)}{r_k^2 - r_b^2}; \quad \sigma_1 = -p_b \quad \text{és} \quad \sigma_2 = \frac{p_b r_b^2}{r_k^2 - r_b^2}$$

tehát:

$$\sigma_{r \max} = \sigma - \mu \sigma_1 - \mu \sigma_2 = \frac{p_b (r_b^2 + r_k^2)}{r_k^2 - r_b^2} + \mu p_b - \frac{\mu p_b r_b^2}{r_k^2 - r_b^2} \leq \sigma_m$$

és tovább:
$$\sigma_m = \frac{p_b [(1 + \mu) r_k^2 + (1 - 2\mu) r_b^2]}{r_k^2 - r_b^2}$$

$$\sigma_m = \frac{p_b \left[(1 + \mu) \left(\frac{r_k}{r_b} \right)^2 + (1 - 2\mu) \right]}{\left(\frac{r_k}{r_b} \right)^2 - 1}$$

$$\sigma_m \left(\frac{r_k}{r_b} \right)^2 - p_b \left(\frac{r_k}{r_b} \right)^2 (1 + \mu) = \sigma_m + p_b (1 - 2\mu)$$

$$\left(\frac{r_k}{r_b} \right)^2 = \frac{\sigma_m + (1 - 2\mu) p_b}{\sigma_m - (1 + \mu) p_b}$$

és ha $\mu = 0,25$ akkor :

$$\frac{r_k}{r_b} = \sqrt{\frac{\sigma_m + 0,5 p_b}{\sigma_m - 1,25 p_b}}$$

De $r_k - r_b = \omega$ a falvastagság, továbbá $r_b = \frac{D_b}{2}$, tehát a *De Saint-Venant*-képlet a következőképpen alakul :

$$\omega = \frac{D_b}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma_m + 0,5 p_b}{\sigma_m - 1,25 p_b}} - 1 \right) + C \quad (1)$$

Ebből a *Herrmann-féle* megközelítő képletet, mely ennél valamivel nagyobb eredményt szolgáltat, a következőképpen nyerjük :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_m + 0,5 p_b}{\sigma_m - 1,25 p_b} \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\frac{4 \sigma_m + 2 p_b}{4 \sigma_m - 5 p_b} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{7 p_b}{4 \sigma_m - 5 p_b} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \sim 1 + \frac{3,5 p_b}{4 \sigma_m - 5 p_b} \end{aligned}$$

tehát :

$$\omega = \frac{D_b}{2} \frac{3,5 p_b}{4 \sigma_m - 5 p_b} = \frac{1,75 D_b \cdot p_b}{2 (2 \sigma_m - 2,5 p_b)} = 0,875 \frac{D_b \cdot p_b}{2 \sigma_m - 2,5 p_b} + C \quad (2)$$

Összehasonlítva az így kapott képletet az előbbi § (4) képletével láthatjuk, hogy zárt csőre ugyanazon nyomás, belső átmérő és biztonság mellett kisebb falvastagságot kapunk, mint nyitott csőnél. Megjegyzendő, hogy a *Herrmann-féle* képletek csak közepes nyomásokig alkalmazhatók, nagy nyomásoknál a pontos *De Saint-Venant*-képleteket kell használni.

A szénsavas palackok két végükön zárt, belső túlnyomású edények. Nálunk árnyékban a maximális hőmérséklet $+37^{\circ} \text{C}$, ennél a cseppfolyós CO_2 feszültsége : $p_b = 88 \text{ kg/cm}^2$. Határozzuk meg a kovácsvas-palack falvastagságát. A feszültség a szerint, amint a palack telt, vagy üres, p_b és zero között változik, tehát összilárd-sággal számolunk, ez kovácsvasnál $\frac{2}{3} \cdot 3600 \text{ kg/cm}^2 = 2400 \text{ kg/cm}^2$ -re vehető, tehát 1,5-szeres biztonság mellett a :

$$\sigma_m = \frac{2400}{1,5} = 1600 \text{ kg/cm}^2 = 1600 \text{ at.}$$

A (2) képlet szerint a falvastagság :

$$\omega = 0,875 \frac{D_b \cdot 88}{2 \cdot 1600 - 2,5 \cdot 88} + C = \frac{D_b}{38,7} + 0,2 \text{ cm}$$

Ha a biztonság 2,5, akkor $\sigma_m = \frac{2400}{2,5} = 960 \text{ kg/cm}^2$, ilyenkor :

$$\omega = \frac{D_b}{22} + 0,2 \text{ cm}$$

Végül *Bach* a mindkét végén zárt, p_b belső túlnyomásra igénybevett csövekre a *De Saint-Venant*-formula alapján megadja, hogy:

$$\sigma_r = \sigma - \mu \sigma_1 - \mu \sigma_2 \leq \sigma_m$$

ahol a *Poisson*-féle szám reciprokja most $\mu = \frac{1}{3}$.

Ekkor a szükséges külső sugár:

$$r_k = r_b \sqrt{\frac{k + 0,4 p_b}{k - 1,3 p_b}}$$

illetve a falvastagság:

$$\omega' = r_b \left(\sqrt{\frac{k + 0,4 p_b}{k - 1,3 p_b}} - 1 \right) \quad (3)$$

ahol k kg/cm² a cső hordképessége (szilárdsága), illetve az ω' falvastagság mellett már szakad a cső. Ha k helyett a megengedett feszültség $\sigma_m \leq \sigma_r$ értékét helyettesítjük be, akkor a *Bach-féle* képlet:

$$\omega = r_b \left(\sqrt{\frac{\sigma_m + 0,4 p_b}{\sigma_m - 1,3 p_b}} - 1 \right) \quad (4)$$

A (3) képletből érdekes következtetést vonhatunk. Tegyük fel, hogy valamely esetben $p_b = \frac{k}{1,3}$ akkor a nevező zéró, tehát

$\omega = \infty$, azaz végtelen nagy falvastagságot kapunk. Ami azt jelenti, hogy pl. a 3400 kg/cm² szakító-szilárdságú kovácsolt-vasból, a

$p_b = \frac{3400}{1,3} = 2615$ at belső túlnyomáshoz,

már nem lehetne csövet konstruálni.

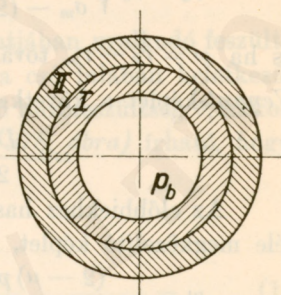
A (3) és vele együtt a (4) képlet is, tehát

csak addig használható, amíg $\frac{p_b}{k}$, illetve

$\frac{p_b}{\sigma_m} < 0,77$. Azonban a lövegek csövében a

lőpor elégsénél (4000 at), továbbá magas nyomású présekben (pl. *Huber*-féle présnél 8000 at) az előző 2615 at-t több-

szörösen meghaladó nyomások is előfordulnak, amiért is ilyenkor duplafalú csövet, vagy szorítógyűrűkkel ellátott csöveket használnak (377. ábra). A símára esztergált külső felületű I. csőre melegen ráhúzzák a II. csövet, melynek belső sugara valamivel kisebb, mint az I. cső külső sugara. Kihüléskor a külső cső összehúzódása radiális összenyomó-feszültségeket idéz elő a belső csőben



377. ábra.

és a p_0 belső nyomásnak először ezen nyomó-feszültségeket kell legyőznie, csak azután kezdi az anyagot húzásra igénybevenni.

2. *Külső túlnyomásnál.* Belül a szabad levegő nyomása hat, tehát az előbbiekhöz hasonlóan a külső túlnyomás:

$$p_k = p_1 - 1 \text{ at}$$

és $p_0 = 0$ -nak tekinthető (pl. búvárdugattyúk). A főfeszültségek most:

$$\begin{aligned}\sigma &= -\frac{p_k r_k^2}{r_k^2 - r_b^2} - \frac{p_k r_k^2 r_b^2}{(r_k^2 - r_b^2) r^2} \\ \sigma_1 &= -\frac{p_k r_k^2}{r_k^2 - r_b^2} + \frac{p_k r_k^2 r_b^2}{(r_k^2 - r_b^2) r^2} \\ \sigma_2 &= -\frac{p_k r_k^2}{r_k^2 - r_b^2}\end{aligned}$$

A legnagyobb főfeszültségek a cső belső palástján lépnek fel, tehát, ha $r = r_b$ és értékeik:

$$\sigma = -p_k \frac{2r_k^2}{r_k^2 - r_b^2}; \quad \sigma_1 = 0 \quad \text{és} \quad \sigma_2 = -\frac{p_k r_k^2}{r_k^2 - r_b^2}$$

A legnagyobb rugalmas feszültség a σ irányával parallel, tehát a körszelvény érintőjének irányában lép fel, a cső belső palástján és nagysága:

$$-\sigma_{\max} = \sigma - \mu \sigma_1 - \mu \sigma_2 = -\frac{p_k r_k^2 (2 - \mu)}{r_k^2 - r_b^2} \leq \sigma_m$$

és ez összenyomó-feszültség, ahonnan:

$$r_k = r_b \sqrt{\frac{\sigma_m}{\sigma_m - (2 - \mu) p_k}} = r_b \sqrt{1 + \frac{(2 - \mu) p_k}{\sigma_m - (2 - \mu) p_k}}$$

és ha $\omega = r_k - r_b$, továbbá $r_b = \frac{D_b}{2}$ és $\mu = 0,25$, akkor a *De Saint-Venant*-képlet a következő:

$$\omega = \frac{D_b}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{1,75 p_k}{\sigma_m - 1,75 p_k}} - 1 \right) \quad (5)$$

Az előbbiekhöz hasonló módon itt is levezethető a *Herrmann*-féle megközelítő képlet, amely szerint:

$$\omega = \frac{(2 - \mu) p_k D_b}{4[\sigma_m - (2 - \mu) p_k]} + C = \frac{1,75 p_k D_b}{4(\sigma_m - 1,75 p_k)} + C \quad (6)$$

Bach képlete külső túlnyomású cső esetén:

$$r_k = r_b \sqrt{\frac{\sigma_m}{\sigma_m - 1,7 p_k}}$$

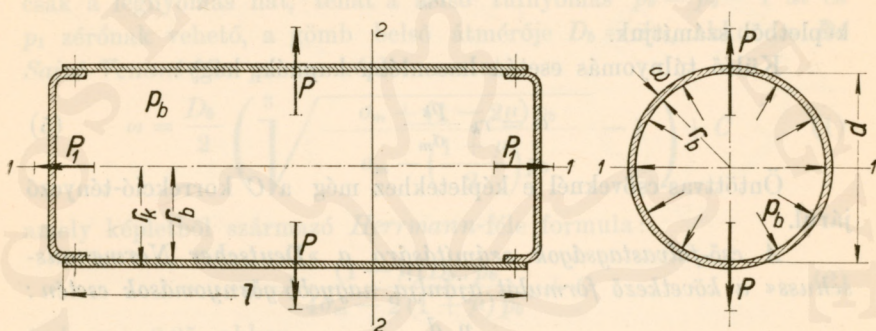
illetve:

$$\omega = r_b \left(\sqrt{\frac{\sigma_m}{\sigma_m - 1,7 p_k}} - 1 \right) \quad (7)$$

és e képlet addig használható, míg $\frac{p_k}{\sigma_m} < 0,59$.

75. §. Vékonyfalú csövek szilárdsága.

Belső túlnyomásra igénybevett, mindkét végén zárt, vékonyfalú csövek falvastagságát megközelítőleg a következőképpen számítjuk. Ha a körgyűrű-keresztmetszetű cső falvastagsága az átmérőhöz képest kicsiny (pl. gőzkazánok, kisnyomású gáz- és gőzvezetékek, vízvezetéki csövek), elegendő pontossággal feltehetjük, hogy a sugármenti metszetekben egyenletesen elosztott húzófeszültségek lépnek fel. A hidrosztatika ismeretes tétele szerint a henger- vagy gömbfelületre gyakorolt folyadéknyomás eredőjét tetszőleges irányban úgy kapjuk, ha a nyomott felületnek a kérdéses irányra merőleges síkra



378. ábra.

való vetületét, megszorozzuk a felület súlypontjában uralkodó feszültséggel. Tehát ha p_b a belső túlnyomás és a cső falában keletkező, a körkeresztmetszet érintőjének irányába eső húzófeszültség σ , akkor az 1—1 hosszanti szelvényre vonatkozólag (378. ábra) írható, hogy egyensúly esetén:

$$P = dl p_b = 2 l \omega \sigma$$

ahonnan a falvastagság:

$$\omega = \frac{dl p_b}{2 \sigma} = r_b \frac{p_b}{\sigma} \quad (1)$$

A 2—2 keresztmetszetre pedig, ha a tengelyirányú húzófeszültség a cső falában σ' :

$$P_1 = \frac{d^2 \pi}{4} p_b = d \pi \omega \sigma'$$

amely egyenletből:

$$\omega = \frac{dl p_b}{4 \sigma'} = r_b \frac{p_b}{2 \sigma'} \quad (2)$$

E két képletből látható, hogy a cső falában a tengelyirányú húzófeszültség csak félakkora, mint a kör-keresztmetszet érintőjének irányába eső húzófeszültség, mert:

$$\sigma = r_b \frac{pb}{\omega} \quad \text{és} \quad \sigma' = r_b \frac{pb}{2\omega}$$

tehát:

$$\sigma' = \frac{\sigma}{2} \quad (3)$$

Ebből következik, hogy ha a cső belső túlnyomását fokozzuk, ez a hengeralkotó mentén szakad fel. A szükséges falvastagságot tehát az:

$$\omega = r_b \frac{pb}{\sigma_m} \quad (4)$$

képletből számítjuk.

Külső túlnyomás esetén hasonlóan kapnók, hogy:

$$\omega = r_k \frac{pk}{\sigma_m} \quad (5)$$

Öntöttvas-csöveknél e képletekhez még a C korrekció-tényező járul.

A cső-falvastagságok számítására a »Deutscher Normenausschuss« a következő formulát ajánlja, nagyobb gőznyomások esetén:

$$\omega = \frac{p \cdot d}{200 \cdot \sigma_{\text{meg}} \cdot v} + c$$

ahol ω a falvastagság mm-ben, p az üzemi nyomás kg/cm²-ben;

» d a cső belső átmérője mm-ben, σ_{meg} a megengedett feszültség kg/cm²-ben;

» v egy viszonyszám és pedig a varrat-szilárdságának viszonya, az ép cső falához. Varrat-nélküli csőnél $v = 1$;

» c állandó, az előállításnál származó egyenetlenségekből, rozsdá, stb. = 1 mm.

A megengedett feszültség meghatározásánál a 300° C fölötti hőmérsékletre már a szilárdság esését kell figyelembe venni.

Rendesen elégségesnek tartják a folyási határnak, a megengedett feszültséghez való viszonyát 2,35-szeresre venni, azaz 2,35 a biztonság és így ha pl. 400° C-nál a folyási határ 12 kg/mm², akkor:

$$\sigma_{\text{meg}} = \frac{12}{2,35} = 5,1 \text{ kg/mm}^2$$

Idomdarabokra és hengeres zárórészeknél ugyanezt a képletet használják, de a » c « értékét elhanyagolják.

A különböző hőmérsékletet úgy vesszük figyelembe, hogy az egyenlet jobboldalát valamely viszonysszámmal szorozzuk, ez pedig egyenlő a 300^0 C melletti és a kérdéses hőmérséklet melletti szilárdság viszonyával.

A kiszámított értékekhez 20 mm-ig 20^0_0 -ot és 20 mm-en feül 15^0_0 -ot adunk hozzá.

76. §. Gömbalakú edények szilárdsága.

Vastagfalú gömbalakú edények falvastagsága

1. *belső túlnyomásnál*, ha a gömb falának külső felületére csak a légnyomás hat, tehát a belső túlnyomás $p_b = p_o - 1$ at és p_1 zérónak vehető, a gömb belső átmérője $D_b = 2r_b$, akkor a *De Saint-Venant*-féle pontos képlet szerint:

$$\omega = \frac{D_b}{2} \left(\sqrt[3]{\frac{\sigma_m + (1 - 2\mu)p_b}{\sigma_m - \left(\frac{1 + \mu}{2}\right)p_b}} - 1 \right) + C \quad (1)$$

amely képletből származó *Herrmann*-féle formula:

$$\omega = \frac{(1 - \mu) D_b \cdot p_b}{4\sigma_m - 2(1 + \mu)p_b} + C \quad (2)$$

és ha $\mu = 0,25$, akkor:

$$\omega = \frac{3D_b \cdot p_b}{16\sigma_m - 10p_b} + C \quad (3)$$

Bach képlete $\left(\mu = \frac{1}{3}\right)$ a következő:

$$r_k = r_b \sqrt[3]{\frac{\sigma_m + 0,4 p_b}{\sigma_m - 0,65 p_b}} \quad (4)$$

ahol r_k a gömb külső sugara. Ez a képlet érvényes, míg $\frac{p_b}{\sigma_m} < 1,54$

2. *Külső túlnyomásnál* pedig, ha az edényben a normális légnyomás uralkodik, tehát a külső túlnyomás: $p_k = p_1 - 1$ at, azaz úgy vesszük, hogy $p_b = 0$, akkor:

$$\omega = \frac{D_b}{2} \left(\sqrt[3]{\frac{\sigma_m}{\sigma_m - \frac{3(1 - \mu)p_k}{2}}} - 1 \right) + C \quad (5)$$

és a *Herrmann*-féle megközelítő képlet:

$$\omega = \frac{(1 - \mu) D_b \cdot p_k}{4\sigma_m - 6(1 - \mu)p_k} + C \quad (6)$$

ha pedig $\mu = 0,25$, akkor:

$$\omega = \frac{3 D_b \cdot p_k}{16 \sigma_m - 18 p_k} + C \quad (7)$$

Bach szerint:

$$r_k = r_b \sqrt[3]{\frac{\sigma_m}{\sigma_m - 1,05 p_k}} \quad \text{amely formula} \quad (8)$$

érvényes, míg $\frac{p_k}{\sigma_m} < 0,95$.

Vékonyfalú gömbalakú edényeknél pedig az előző §-ban mondtak alapján:

1. *belső túlnyomásnál* (p_b) egyen-súly esetén (379. ábra) írható, hogy:

$$P = \frac{d^2 \pi}{4} p_b = d \pi \omega \sigma$$

ahonnan:

$$\omega = \frac{d}{4} \frac{p_b}{\sigma}$$

és mivel:

$$\begin{aligned} d &= 2r_b \\ \omega &= \frac{r_b}{2} \frac{p_b}{\sigma_m} \end{aligned} \quad (9)$$

Tehát azonos *belső nyomás és átmérő mellett félakkora a gömb falvastagsága, mint az ugyanolyan anyagból való hengeres cső.*

2. *Külső túlnyomásnál* pedig:

$$\omega = \frac{r_k}{2} \frac{p_k}{\sigma_m} \quad (10)$$

ahol r_k a gömb külső sugara.

Ha a hengeres edény gömbfelületű födelének sugara a henger átmérőjével egyenlő, akkor a falvastagságuk is egyenlő.

77. §. Lemezek szilárdsága.

Köralakú egyenletesen elosztott terhelésű sík-lemez.

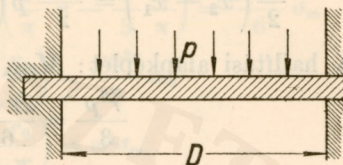
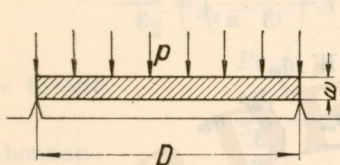
Két esetet kell megkülönböztetnünk, aszerint, amint a lemez kerülete meg van támasztva, vagy pedig a lemez széle be van fogva (380. ábra). Ha a lemez széle csupán alá van támasztva, akkor a szükséges lemezvastagság:

$$\omega = D \sqrt{\frac{3(1-\mu)(3+\mu)p}{32\sigma_m}} \quad (1)$$

és ha $\mu = 0,25$, akkor:

$$\omega = 0,478 D \sqrt{\frac{p}{\sigma_m}} \quad (2)$$

amely képletekben D a lemez átmérője, p a lemezre ható túlnyomás és σ_m a lemez anyagában megengedett feszültség.



380. ábra.

Ha pedig a lemez széle be van fogva, akkor a lemez vastagsága:

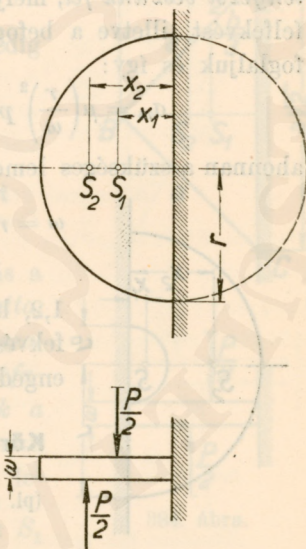
$$\omega = \frac{D}{4} \sqrt{\frac{3(1+\mu)p}{\sigma_m - \frac{2+7\mu-\mu^2}{2(1-\mu)}p}} \quad (3)$$

és $\mu = 0,25$ mellett:

$$\omega = 0,484 D \sqrt{\frac{p}{\sigma_m - 2,46 p}} \quad (4)$$

Kör alakú lemeznel a legnagyobb feszültségek a közepén keletkeznek, ugyancsak itt van a legnagyobb behajlás is.

Bach ugyanezen terhelési eset megoldására az alábbi egyszerű megközelítő módszert adja. Megszorító feltétel, hogy a lemez behajlása a vastagságához viszonyítva, elenyészően csekély legyen. A kísérletek tanúsága szerint a lemez az átmérője mentén szakad el, tehát ott lesz a legnagyobb feszültség. Tekintsük ezek alapján a lemezt az átmérője mentén befogottnak (381. ábra) és a felülről lefelé ható elosztott terhelést (folyadék- vagy gáznyomás) a félkörlap S_1 súlypontjában képzeljük koncentrálni: $\frac{r^2\pi}{2} \cdot p = \frac{P}{2}$



381. ábra.

A megtámasztásnál fellépő $\frac{P}{2}$ erő egyenletesen oszlik el a lemez alsó, megtámasztott kör-kerületén és egy a félkörív S_2 súlypontján

áthaladó erővel helyettesíthető. A súlypontok távolsága a befogástól számítva: $x_1 = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}$ és $x_2 = \frac{2}{\pi} r$.

A veszélyes szelvényt olyan erőpár hajlítja, melynek nyomatéka:

$$\frac{P}{2} (x_2 - x_1) = \frac{r^2 \pi}{2} p \left(\frac{2}{\pi} r - \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} \right) = \frac{r^3 p}{3}$$

A hajlítási alapképlet: $M_{\max} = W \cdot \sigma_m$

tehát:
$$\frac{r^3 p}{3} = \frac{2r \omega^2}{6} \sigma_m = \frac{r \omega^2}{3} \sigma_m$$

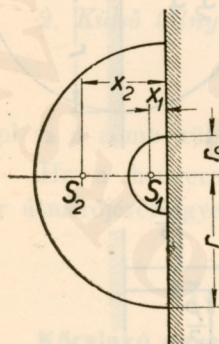
ahonnan:
$$\sigma_m = \left(\frac{r}{\omega} \right)^2 \cdot p$$

Ez a számítás az egész szelvényben egyenletes eloszlású feszültséget tételez fel. A valóságban azonban a lemez közepe felé nagyobb a feszültség, mint a széleken és ezen eltérés miatt μ korrekciótényezőt veszünk fel, melybe a szabad felfekvést, illetve a befogást is belefoglaljuk és így:

$$\sigma_m = \mu \left(\frac{r}{\omega} \right)^2 p \quad (5)$$

ahonnan a szükséges lemezvastagság:

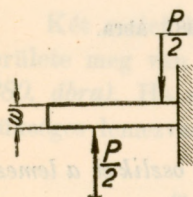
$$\omega = r \sqrt{\frac{\mu \cdot p}{\sigma_m}} \quad (6)$$



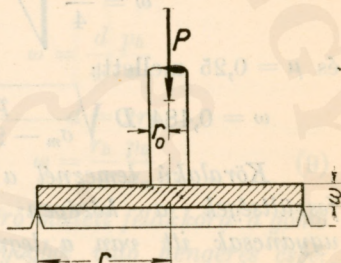
A μ értéke öntöttvasra, szabad felfekvésnél: 1,2, befogás esetén: 0,8; folytvasra, szabad felfekvésnél: 0,75, befogásnál: 0,5 és ha a befogás enged: 0,38.

Kör alakú, közepén r_0 sugarú körön egyenletesen terhelt sík-lemez

(pl. szelepháznak kengyel- és csavarral leszorított fődele).



383. ábra.



382. ábra.

Az elosztott teher a kisebb, r_0 sugarú körterületen hat (382. ábra). Ismét egyik átlója mentén befalozottnak képzeljük a lemezt (383. ábra). Az elosztott erőt: $\frac{r_0^2 \pi}{2} p = \frac{P}{2}$ az r_0 sugarú félkör lap S_1 súlypontjában koncentráltan működőnek tekintjük, míg a felszaba-

dító $\frac{P}{2}$ erő, az r sugarú félkörív S_2 súlypontjában hat. A súlypontok távolsága a befogástól számítva: $x_1 = \frac{4}{3} \frac{r_0}{\pi}$ és $x_2 = \frac{2}{\pi} r$.

A hajlító-igénybevétel alaképlete szerint:

$$\frac{P}{2} (x_2 - x_1) = \frac{P}{2} \left(\frac{2}{\pi} r - \frac{4}{3} \frac{r_0}{\pi} \right) = \frac{2r\omega^2}{6} \sigma_m$$

és tovább:

$$\frac{Pr}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r_0}{r} \right) = \frac{r\omega^2}{3} \sigma_m$$

ahonnan:

$$\frac{3P}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r_0}{r} \right) = \omega^2 \sigma_m$$

és ebből, ha még a μ korrekció-tényezőt is behozzuk:

$$\sigma_m = \frac{3P}{\pi\omega^2} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r_0}{r} \right) \mu \quad (7)$$

és a lemez vastagságot kifejezve:

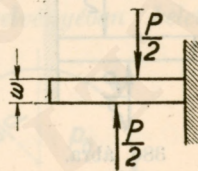
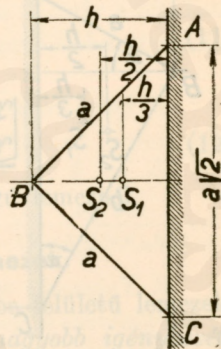
$$w = \sqrt{\frac{3P}{\pi\sigma_m} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r_0}{r} \right) \mu} \quad (8)$$

Ha $r_0 < \frac{r}{10}$, akkor: $\mu = 1,5$; ha pedig

$r_0 = \frac{r}{2}$, akkor: $\mu = 1,2$.

Négyzetalakú, egyenletesen elosztott terhelésű sík-lemez.

Legnagyobb a feszültség és behajlás a lemez közepén. *Bach kísérletekkel kimutatta, hogy az átló mentén következik be a szakadás, tehát a lemezt, egyik átlója mentén befalazott tartónak tekintve, meghatározhatjuk a lemez vastagságát.* Legyen a négyzet-alakú lemezre ható túlnyomás p , akkor a fél lemezre ható terhelő erő $\frac{a^2}{2} p = \frac{P}{2}$ és ez S_1



384. ábra.

súlypontban működőnek tekinthető, a befogástól $\frac{h}{3}$ távolban (384. ábra). Az alátámasztásnál fellépő $\frac{P}{2}$ felszabadító erő egyenletesen elosztva az ABC törtvonal mentén működik és az ABC törtvonal S_2 súlypontjába koncentrálható, a veszélyes szelvénytől $\frac{h}{2}$ távolban.

A hajlítási alapképlet: $M_{\max} = W \cdot \sigma_m$,

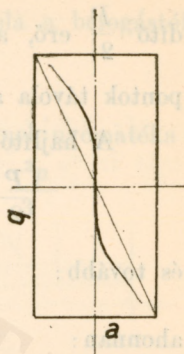
$$\text{tehát: } \frac{P}{2} \left(\frac{h}{2} - \frac{h}{3} \right) = \frac{a\sqrt{2} \cdot \omega^2}{6} \sigma_m$$

$$\text{vagy, mivel: } h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\text{kapjuk, hogy: } \frac{a^2 p}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{a\sqrt{2} \cdot \omega^2}{6} \sigma_m$$

$$\frac{a^2 p}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\omega^2}{6} \sigma_m$$

$$\text{ahonnan: } \sigma_m = \frac{a^2 p}{4 \omega^2}$$



385. ábra.

Vagy ha a μ korrekció-tényezőt behozzuk:

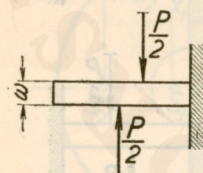
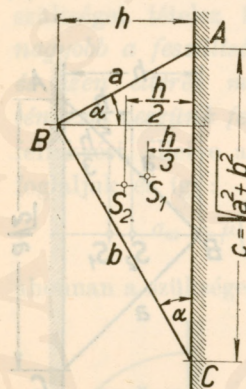
$$\sigma_m = \mu \frac{p}{4} \left(\frac{a}{\omega} \right)^2 \quad (9)$$

$$\text{ahonnan: } \omega = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{\mu \cdot p}{\sigma_m}} \quad (10)$$

Öntöttvasnál szabad felfekvés esetén: $\mu = 1,12$, befogásnál: $\mu = 0,75$; folytvasnál, szabad felfekvés esetén: $\mu = 0,7$ és befogásnál: $\mu = 0,47$.

Derékszögű négyszög-alakú, egyenletesen terhelt sík-lemez.

A Bach-féle kísérletek azt mutatták, hogy az egyenletesen megterhelt négyszögletes lemez a közepén — a hosszabb oldallal parallel — szakad el és e szakadás azután a négyszög csúcsai felé folytatódik (385. ábra), tehát a veszélyes szelvény megközelítéssel az átló mentén vehető fel.



386. ábra.

Az átlós sík mentén befogottnak képzeljük a lemezt (386. ábra). Az egyenletesen elosztott terhel (folyadék- vagy gáztúlnyomás) p . A fél négyszögre ható erő:

$$\frac{ab}{2} \cdot p = \frac{P}{2}$$

és ez a fél négyszög-terület S_1 súlypontjában működik a befogástól $\frac{h}{3}$ távolban, viszont az ABC törtvonal mentén egyenletesen eloszló

$\frac{P}{2}$ felszabadító erő, az ABC vonal S_2 súlypontjában hat, a befogástól $\frac{h}{2}$ távolságban.

$$\frac{ab}{2} p \left(\frac{h}{2} - \frac{h}{3} \right) = \frac{ab}{2} p \frac{h}{6} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \omega^2}{6} \sigma_m.$$

De:
$$h = a \cos \alpha = a \frac{b}{c} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

tehát:
$$\frac{ab}{2} p \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \omega^2 \cdot \sigma_m$$

azaz:
$$\frac{abp}{2} \cdot \frac{ab}{a^2 + b^2} = \omega^2 \sigma_m$$

és így:
$$\sigma_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{p}{\omega^2}$$

ahonnan, a korrekció-tényezőt is figyelembe véve:

$$\sigma_m = \mu \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{p}{\omega^2} \quad (11)$$

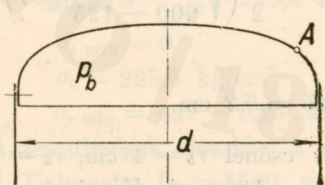
és a szükséges lemezvastagság:

$$w = ab \sqrt{\frac{\mu}{2} \cdot \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \frac{p}{\sigma_m}} \quad (12)$$

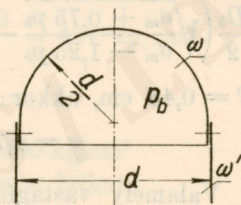
ahol a μ értékei ugyanazok, mint a négyzetalakú lemeznél.

Gömb- és ellipszoid-felületű lemezek.

Bach ugyancsak kísérletezett rotációs görbe felületű lemezekkel is (kazánfödelek) és azt találta, hogy a legnagyobb igénybevéte a karima átmeneténél van és az átmenet görbületi sugarának nagysága szerint többszöröse, a fenék középső szelvényében keletkező



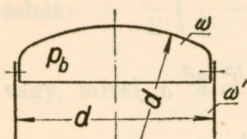
387. ábra.



388. ábra.

igénybevételnek. A kísérleti megfigyelés alapján az elliptikus födelek a legjobban megfelelők, ahol a karimába való átmenet fokozatosan és lassabban történik. A legnagyobb az igénybevétel az A helyen (387. ábra), amit az arányossági határ túllépésénél, az anyag

lepattozása is igazol. A lepattozás elliptikus födeleknél 42 at mellett következett be, míg a szokásos laposabb födeleknél már 10 at mellett.



389. ábra.

A félgömb-felületű födelek falvastagsága a 76. §-ban mondottak alapján (388. ábra):

$$\omega = \frac{\omega'}{2} = \frac{d}{4} \frac{p_b}{\sigma_m}$$

ahol ω' a henger falvastagsága.

Alkalmaznak gömbsüveg felületű födeleket is (389. ábra); ezeknél megközelítőleg vehető, hogy:

$$\omega = \omega'$$

Példák a XI. fejezethez.

1. Valamely szivattyú nyomócsővezetékén $H = 500$ m magasra emeli fel a vizet és a szivattyú hengerének belső átmérője $D_b = 25$ cm. Kiszámítandó a henger falvastagsága, ha $\sigma_m = 250$ kg/cm² (öntöttvas).

$$\text{A belső túlnyomás: } p_b = \frac{500}{10} = 50 \text{ at.}$$

A 73. § (4) képlete szerint:

$$\omega = \frac{D_b \cdot p_b}{2\sigma_m - 2,5p_b} + C = \frac{25 \cdot 50}{500 - 2,5 \cdot 50} + C = 3,3 + 0,8 = 4,1 \text{ cm.}$$

2. Valamely vízakumulátornál a belső túlnyomás $p_b = 100$ at. Az acélöntvényű henger belső átmérője $D_b = 50$ cm. Keresendő a henger falvastagsága, ha $\sigma_m = 600$ kg/cm².

A 73. §. (3) képlete szerint:

$$\omega = \frac{D_b}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma_m + 0,75 p_b}{\sigma_m - 1,25 p_b}} - 1 \right) + C = \frac{50}{2} \left(\sqrt{\frac{600 + 75}{600 - 125}} - 1 \right) + C$$

és ha $C = 0,45$ cm, akkor:

$$\omega = 4,75 + 0,45 = 5,2 \text{ cm.}$$

3. Valamely vastagfalú, zárt csőnél $r_b = 4$ cm, $r_k = 10$ cm, $\omega = 6$ cm és a belső túlnyomás $p_b = 1200$ at. Kiszámítandók az érintő-irányú $\sigma_{r \max}$ és a sugár-irányú $\sigma'_{r \max}$ rugalmas feszültségek.

A 72. § (16) és (17) képletei szerint:

$$\sigma_{r \max} = \sigma - \mu \sigma_1 - \mu \sigma_2$$

és

$$\sigma'_{r \max} = \sigma_1 - \mu \sigma - \mu \sigma_2$$

Az érintő-irányú főfeszültség: $\sigma = a + \frac{b}{r^2}$

a sugár-irányú főfeszültség pedig: $\sigma_1 = a - \frac{b}{r^2}$

amely képletekben az állandók:

$$a = \frac{p_b r_b^2}{r_k^2 - r_b^2} = \frac{1200 \cdot 16}{100 - 16} = 228,5$$

$$b = \frac{p_b r_b^2 r_k^2}{r_k^2 - r_b^2} = \frac{1200 \cdot 16 \cdot 100}{100 - 16} = 22850.$$

Legnagyobbak a feszültségek a cső belső palástján, tehát, ha $r = r_b$; az érintő-irányú főfeszültség itt:

$$\sigma_{\max} = a + \frac{b}{r_b^2} = 228,5 + \frac{22850}{16} = +1657 \text{ kg/cm}^2$$

a sugár irányába eső főfeszültség:

$$\sigma_{1 \max} = a - \frac{b}{r_b^2} = 228,5 - \frac{22850}{16} = -1200 \text{ kg/cm}^2$$

és a tengely-irányú főfeszültség:

$$\sigma_2 = \frac{p_b r_b^2}{r_k^2 - r_b^2} = +228,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Ezeket az értékeket felhasználva, az érintő-irányú legnagyobb rugalmas feszültség, ha $\mu = 0,25$:

$$\sigma_{r \max} = 1657 - 0,25 \cdot (-1200) - 0,25 \cdot 228,5 = \\ = 1657 + 300 - 57 = 1900 \text{ kg/cm}^2$$

és a sugár-irányú rugalmas feszültség:

$$\sigma_{r' \max} = -1200 - 0,25 \cdot 1657 - 0,25 \cdot 228,5 = \\ = -1200 - 414 - 57 = -1671 \text{ kg/cm}^2.$$

Határozzuk meg az érintő-irányú rugalmas feszültséget a cső külső palástján, ha $r = r_k$; akkor:

$$\sigma_{\min} = a + \frac{b}{r_k^2} = 228,5 + \frac{22850}{100} = 457 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{1 \min} = 0$$

$$\sigma_2 = 228,5 \text{ kg/cm}^2$$

tehát: $\sigma_{r \min} = 457 - 0,25 \cdot 228,5 = 400 \text{ kg/cm}^2$

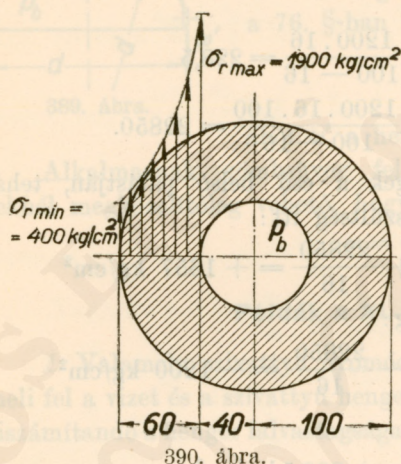
A feszültségek eloszlása a 390. ábrán látható.

4. Valamely $D_b = 1500$ mm átmérőjű kazánban lévő gőz és víz nyomása $p_b = 10^6$ at. Keresendő a falvastagság, ha a lemezben megengedett feszültség $\sigma_m = 420 \text{ kg/cm}^2$.

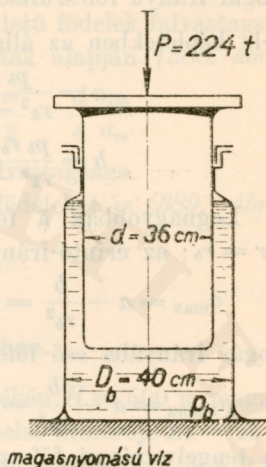
A 75. § (4) képlete szerint:

$$\omega = \frac{D_b}{2} \cdot \frac{p_b}{\sigma_m} = \frac{150 \cdot 10}{2 \cdot 420} = \frac{1500}{840} = 1,78 = \sim 2 \text{ cm.}$$

5. Keressük valamely hídteher-emelésre szolgáló acél-öntvényű nyomóhenger falvastagságát, ha a dugattyúra ható erő $P = 224$ tonna, s a megengedett feszültség $\sigma_m = 600$ kg/cm² és $C = 0$ (391. ábra).



390. ábra.



391. ábra.

Az edény mindkét végén zárt, de összehasonlítás kedvéért a nyitható edényekre érvényes képletekkel is meghatározzuk a falvastagságot. (Hütte.)

A belső túlnyomás:
$$p_b = \frac{P}{\frac{d^2 \pi}{4}}$$

$$p_b = \frac{224000 \cdot 4}{36^2 \cdot 3,14} = 220 \text{ kg/cm}^2$$

Mint nyitható csövet számítva, a 73. § (3) képlettel:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{D_b}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma_m + 0,75 p_b}{\sigma_m - 1,25 p_b}} - 1 \right) = 20 \left(\sqrt{\frac{600 + 0,75 \cdot 220}{600 - 1,25 \cdot 220}} - 1 \right) = \\ &= 20 \left(\sqrt{\frac{765}{315}} - 1 \right) = 10,6 \text{ cm} \end{aligned}$$

vagy a 73. § (4) megközelítő képlettel:

$$\omega = \frac{D_b p_b}{2 \sigma_m - 2,5 p_b} = \frac{40 \cdot 220}{1200 - 550} = 13,5 \text{ cm}$$

Mint a két végén zárt csövet számítva, a 74. § (1) képlettel:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{D_b}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma_m + 0,5 p_b}{\sigma_m - 1,25 p_b}} - 1 \right) = 20 \left(\sqrt{\frac{600 + 0,5 \cdot 220}{600 - 1,25 \cdot 220}} - 1 \right) = \\ &= 20 \left(\sqrt{\frac{710}{325}} - 1 \right) = 9,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

vagy a 74. § (2) megközelítő képlettel:

$$\omega = 0,875 \frac{D_b \cdot p_b}{2 \sigma_m - 2,5 p_b} = 0,875 \cdot 13,5 = 11,8 \text{ cm}$$

a Bach-féle képlettel, 74. § (4), kifejezve:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{D_b}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma_m + 0,4 p_b}{\sigma_m - 1,3 p_b}} - 1 \right) = 20 \left(\sqrt{\frac{600 + 0,4 \cdot 220}{600 - 1,3 \cdot 220}} - 1 \right) = \\ &= 20 \left(\sqrt{\frac{688}{314}} - 1 \right) = \sim 9,6 \text{ cm} \end{aligned}$$

Középértékben vehetünk tehát $\omega = 10$ cm-t.

Ha tévesen, mint vékonyfalú csövet számítottuk volna 75. § (4):

$$\omega = \frac{D_b}{2} \cdot \frac{p_b}{\sigma_m} = 20 \frac{220}{600} = 7,34 \text{ cm} \quad \text{tehát, nem}$$

volna megfelelő a falvastagság.

6. Valamely acél-öntvényű sajtó hengerének belső átmérője $D_b = 600$ mm. Keresendő a külső átmérő és a szükséges falvastagság, ha $\sigma_m = 1000$ kg/cm² és a belső túlnyomás $p_b = 250$ at.

Zárt edény belső túlnyomásra a Bach-féle képlettel 74. § (4):

$$\begin{aligned} r_k &= r_b \sqrt{\frac{\sigma_m + 0,4 p_b}{\sigma_m - 1,3 p_b}} = 30 \sqrt{\frac{1000 + 0,4 \cdot 250}{1000 - 1,3 \cdot 250}} = 30 \sqrt{\frac{1100}{675}} = 38,4 \text{ cm} \\ \omega &= r_k - r_b = 38,4 - 30 = 8,4 = \sim 8,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Ha, mint vékonyfalú csövet számítanók 74. § (4):

$$\omega = r_b \frac{p_b}{\sigma_m} = 30 \frac{250}{1000} = 7,5 \text{ cm.}$$

7. Az előbbi példának megfelelően számítsuk ki a falvastagságot a De Saint-Venant-képlettel 74. § (1):

$$\omega = \frac{D_b}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma_m + 0,5 p_b}{\sigma_m - 1,25 p_b}} - 1 \right) = 30 \left(\sqrt{\frac{1000 + 0,5 \cdot 250}{1000 - 1,25 \cdot 250}} - 1 \right) = 8,4 \text{ cm}$$

Keressük ugyanezen példának megfelelően, az $\omega = 10$ cm falvastagság mellett keletkező σ feszültséget. Az:

$$\omega = \frac{D_b}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma + 0,5 p_b}{\sigma - 1,25 p_b}} - 1 \right)$$

képletből kifejezzük σ -t:

$$\left(\frac{2\omega}{D_b} + 1 \right)^2 = \frac{\sigma + 0,5 p_b}{\sigma - 1,25 p_b} = \frac{4\sigma + 2 p_b}{4\sigma - 5 p_b} = 1 + \frac{7 p_b}{4\sigma - 5 p_b}$$

$$\frac{4\omega^2}{D_b^2} + \frac{4\omega}{D_b} + 1 = 1 + \frac{7 p_b}{4\sigma - 5 p_b}$$

$$\frac{\omega^2 + D_b \omega}{D_b^2} = \frac{1,75 p_b}{4\sigma - 5 p_b}$$

avagy a reciprok értéket véve:

$$\frac{4\sigma - 5 p_b}{1,75 p_b} = \frac{D_b^2}{\omega(D_b + \omega)}$$

továbbá:

$$4\sigma = 5 p_b + \frac{1,75 p_b D_b^2}{\omega(D_b + \omega)}$$

$$\sigma = 1,25 p_b + \frac{1,75 p_b D_b^2}{4\omega(D_b + \omega)}$$

ahonnan:

$$\sigma = p_b \left(1,25 + \frac{1,75 D_b^2}{4\omega(D_b + \omega)} \right)$$

és az értékeket behelyettesítve kapjuk, hogy zárt edénynél:

$$\sigma = 250 \left(1,25 + \frac{1,75 \cdot 60^2}{4 \cdot 10(60 + 10)} \right) = 250(1,25 + 2,25) = 875 \text{ kg/cm}^2$$

Ha nyitható edénynél kerestük volna az $\omega = 10$ cm falvastagság mellett a feszültséget, akkor 73. § (3) képlet alapján:

$$\omega = \frac{D_b}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma + 0,75 p_b}{\sigma - 1,25 p_b}} - 1 \right)$$

ahonnan:

$$\left(\frac{2\omega}{D_b} + 1 \right)^2 = \frac{\sigma + 0,75 p_b}{\sigma - 1,25 p_b} = \frac{4\sigma + 3 p_b}{4\sigma - 5 p_b} = 1 + \frac{8 p_b}{4\sigma - 5 p_b}$$

és az előbbihez hasonló módon kifejezve kapjuk, hogy:

$$\sigma = p_b \left(1,25 + \frac{D_b^2}{2\omega(D_b + \omega)} \right)$$

tehát példánkban:

$$\sigma = 250 \left(1,25 + \frac{60^2}{2 \cdot 10(60 + 10)} \right) = 250(1,25 + 2,57) = 955 \text{ kg/cm}^2$$

Ha vékonyfalú csőnél végeznők az ellenőrzést $\omega = 10$ cm mellett:

$$\sigma = \frac{D_b p_b}{2 \omega} = \frac{60}{2} \cdot \frac{250}{10} = 750 \text{ kg/cm}^2$$

és így jóval kisebb értéket kapunk, mint amekkora a valóságban keletkezik ilyen viszonyok mellett!

8. Valamely gőzgép hengerének belső átmérője $D_b = 30$ cm és a gőznyomás $p = 12$ at. A fődél öntöttvasból készül és köralakú sík-lemez, $\sigma_m = 250 \text{ kg/cm}^2$ és $\mu = 1,2$ a korrekció-tényező, szabad felfekvésnél. Keresendő a fődél falvastagsága.

A 77. § (2) képlete szerint:

$$\begin{aligned} \omega &= 0,478 D_b \sqrt{\frac{p}{\sigma_m}} = 0,478 \cdot 30 \sqrt{\frac{12}{250}} = 0,478 \cdot 30 \sqrt{0,048} = \\ &= 3,14 = \sim 3,2 \text{ cm} \end{aligned}$$

A *Bach*-féle megközelítő képlet 77. § (6) szerint pedig:

$$\omega = r \sqrt{\frac{\mu \cdot p}{\sigma_m}} = \frac{D_b}{2} \sqrt{\frac{\mu \cdot p}{\sigma_m}} = \frac{30}{2} \sqrt{\frac{1,2 \cdot 12}{250}} = \frac{30}{2} \sqrt{0,0576} = 3,6 \text{ cm.}$$

9. A 392. ábrán felrajzolt méretű szelepház födelét kengyel és csavar tartja leszorítva. A belső túlnyomás $p = 6 \text{ at}$. A födél anyaga öntöttvas, $\sigma_m = 250 \text{ kg/cm}^2$, a leszorító erő $P = 3000 \text{ kg}$. A csavar $1\frac{3}{8}$ "-es és a nyomott felület: $2r_0 = 3 \text{ cm}$ átmérőjű, a korrekció-tényező $\mu = 1,5$. Keresendő a födél falvastagsága. (*Hindenlang—Lübeck*).

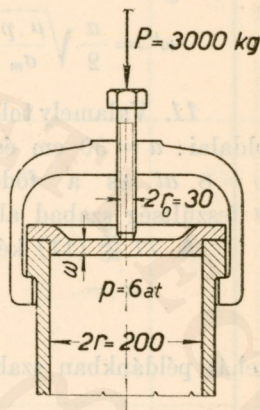
A 77. § (8) képlete szerint:

$$\omega = \sqrt{\frac{3 P}{\pi \cdot \sigma_m} \left(1 - \frac{2 r_0}{3 r}\right) \mu}$$

ahová az értékeket behelyettesítve kapjuk, hogy:

$$\omega = \sqrt{\frac{3 \cdot 3000}{3,14 \cdot 250} \left(1 - \frac{2 \cdot 1,5}{3 \cdot 10}\right) 1,5}$$

ahonnan: $\omega = 3,94 = \sim 4 \text{ cm}$.



392. ábra.

10. Valamely négyzet alakú öntöttvas-lemez oldala $a = 4 \text{ m}$, a reá ható túlnyomás $p = 5000 \text{ kg/m}^2$ ($= 0,5 \text{ kg/cm}^2$). Keresendő a maximális nyomaték és a falvastagság szabad alátámasztás és befogás esetén, ha $\sigma_m = 250 \text{ kg/cm}^2$.

A 384. ábra szerint:

$$h = a \cos 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a}{1,41} = 2,84 \text{ m}$$

A fél lemezre ható erő:

$$\frac{P}{2} = \frac{a^2}{2} p = \frac{4^2}{2} 5000 = 40000 \text{ kg}$$

Az átlós metszetre a maximális nyomaték:

$$M_{\max} = \frac{P}{2} \left(\frac{h}{2} - \frac{h}{3} \right) = \frac{P}{2} \cdot \frac{h}{6} = 40000 \frac{2,84}{6} = \sim 18800 \text{ kgm}$$

tehát szabad alátámasztásnál, ha $\mu = 1,12$, a nyomaték:

$$M'_{\max} = 1,12 \cdot 18800 = 20850 \text{ kgm}$$

befogás esetén pedig, ha $\mu = 0,75$,

$$M''_{\max} = 0,75 \cdot 18800 = 14100 \text{ kgm.}$$

A falvastagság pedig a 77. § (10) képletével szabad alátámasztásnál:

$$\omega' = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{\mu \cdot p}{\sigma_m}} = \frac{400}{2} \sqrt{\frac{1,12 \cdot 0,5}{250}} = 9,46 = \sim 9,5 \text{ cm}$$

és befogásnál:

$$\omega'' = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{\mu \cdot p}{\sigma_m}} = \frac{400}{2} \sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,5}{250}} = 7,74 = \sim 7,8 \text{ cm.}$$

11. Valamely tolószekrény derékszögű négyszög-alakú födelének oldalai: $a = 30 \text{ cm}$ és $b = 50 \text{ cm}$, a legnagyobb túlnyomás pedig $p = 8 \text{ at}$ és a födél falvastagsága $\omega = 2,7 \text{ cm}$. Keresendő a σ feszültség szabad alátámasztásnál és befogásnál.

A 77. § (11) képlete szerint:

$$\sigma = \mu \frac{1}{2} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \frac{p}{\omega^2}$$

tehát példánkban szabad alátámasztásnál, mivel $\mu = 1,12$

$$\sigma' = 1,12 \frac{1}{2} \frac{30^2 \cdot 50^2}{30^2 + 50^2} \frac{8}{2,7^2} = 410 \text{ kg/cm}^2$$

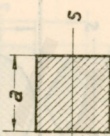
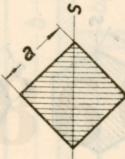
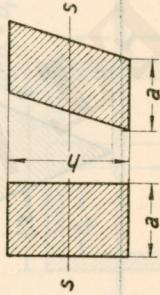
befogás esetén pedig, mivel $\mu = 0,75$

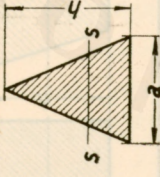
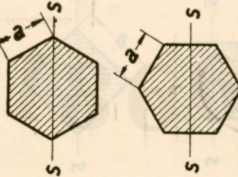
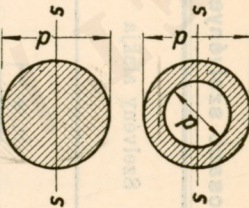
$$\sigma'' = 0,75 \frac{1}{2} \frac{30^2 \cdot 50^2}{30^2 + 50^2} \frac{8}{2,7^2} = 270 \text{ kg/cm}^2$$

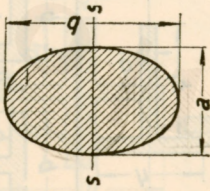
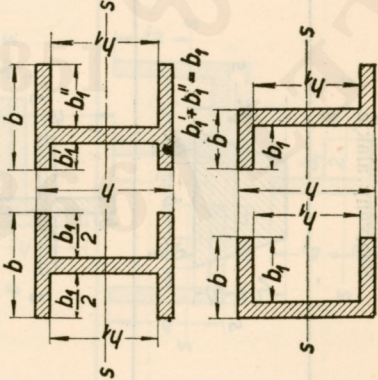
Az ω méretét megnöveljük legalább 3 cm-re, amikor is a megengedett feszültségeket megfelelő módon kisebbítjük, $\sigma' = 330 \text{ kg/cm}^2$ -re és $\sigma'' = 220 \text{ kg/cm}^2$ -re. Ez a méret már megtartható.

FÜGGELÉKÜL

a fontosabb szelvények tehetetlenségi- és ellenálló-nyomatéka és a szelvények területei.

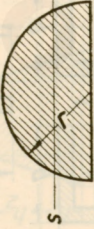
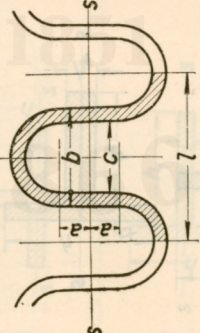
Szám	Szelvény alakja	Tehetlenségi nyomaték a súlyponti tengelyre I_s	Ellenálló-nyomaték W_s	Terület F
1.	 	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^3}{6}$	a^2
2.		$\frac{1}{12} \cdot ah^3$	$\frac{1}{6} \cdot ah^2$	$a \cdot h$

Szám	Szelvény alakja	Tehetefenségi nyomaték a súlyponti tengelyre I_s	Ellenálló-nyomaték W_s	Terület F
3.		$\frac{1}{36} \cdot a \cdot h^3$	$\frac{1}{24} \cdot ah^2$	$\frac{ah}{2}$
4.		$\frac{5\sqrt{3}}{16} a^4 = 0,5413 a^4$	$\frac{5}{8} a^3$ $0,5413 a^3$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = 2,598 a^2$ $\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$
5.		$\frac{d^4 \pi}{64}$ $\frac{(d^4 - d_1^4) \pi}{64}$	$\frac{d^3 \pi}{32}$ $\frac{(d^4 - d_1^4) \pi}{32 d}$	$d^2 \frac{\pi}{4}$ $(d^2 - d_1^2) \frac{\pi}{4}$

Szám	Szelvény alakja	Tehetlenségi nyomaték a súlyponti tengelyre I_s	Ellenálló-nyomaték W_s	Terület F
6.		$\frac{ab^3 \pi}{64}$	$\frac{ab^2 \pi}{32}$	$ab \pi$
7.		$\frac{1}{12} (bh^3 - b_1 h_1^3)$	$\frac{1}{6h} (bh^3 - b_1 h_1^3)$	$bh - b_1 h_1$

Szám	Szelvény alakja	Tehetlenségi nyomaték a súlyponti tengelyre I_s	Ellenálló-nyomaték W_s	Terület F
8.		$\frac{6b^2 + 6 \cdot bb_1 + b_1^2}{36(2b + b_1)} h^3$	$W_s^{(n)} = \frac{6b^2 + 6b \cdot b_1 + b_1^2}{12(3b + 2b_1)} h^2$	$\frac{2b + b_1}{2} h$
9.		$\frac{b}{12} [h^3 + (h - b)b^2]$	$\frac{b}{6h} [h^3 + (h - b)b^2]$	$b(2h - b)$
		$\frac{b(h^3 + h_1 b^2)}{12}$	$\frac{b}{6h} [h^3 + h_1 b^2]$	$b(h + h_1)$
10.		$\frac{bh^3 - b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3}{12}$	$\frac{bh^3 - b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3}{6h}$	$bh - b_1 h_1 - b_2 h_2$

Szám	Szelvény alakja	Tehetlenségi nyomaték a súlyponti tengelyre I_s	Ellenálló-nyomaték W_s	Terület F
11.		$\frac{bh^3 + b_1 h_1^3}{12}$	$\frac{bh^3 + b_1 h_1^3}{6 h}$	$bh + b_1 h_1$
12.		$\frac{1}{12} (bh^3 - b_1 h_1^3) + \frac{bh b_1 h_1 (h - h_1)^2}{4 (bh - b_1 h_1)}$	$\frac{I_s}{e_1} = W_s^{(1)}$ $e_1 = \frac{bh^2 - b_1 h_1^2}{2 (bh - b_1 h_1)}$	$bh - b_1 h_1$

Szám	Szelvény alakja	Teheteflenségi nyomaték a súlyponti tengelyre I_s	Ellenálló-nyomaték W_s	Terület F
13.		$0,1101 \cdot r^4$	$0,19 \cdot r^3$	$r^2 \frac{\pi}{2}$
14.		$\frac{\pi}{64} (b^4 - c^4) +$ $+ \frac{1}{3} a (b^3 - c^3) +$ $+ \frac{\pi}{4} (b^2 - c^2) a^2 +$ $+ \frac{2}{3} a^3 (b - c)$	$\frac{I_s}{e} = W$ $e = a + \frac{b}{2}$	$2 \left[4a \frac{b-c}{2} + \frac{\pi (b^2 - c^2)}{4} \right]$

TARTALOMJEGYZÉK.

Bevezetés.

I. FEJEZET.

Szilárdságtani alapfogalmak és a tartó terhelése.

	Oldal
1. §. A rugalmasság és szilárdság fogalma	5
2. §. A tartókról általában	7
3. §. A tartó és szelvény terhelése	11

II. FEJEZET.

Derékszilárdság.

4. §. Egyenes tartó derékszilárdsága és a rövid prizma nyújtó-feszültsége	14
5. §. A derékfeszültség és alakváltozások közötti összefüggés (Hooke törvénye)	15
6. §. Szilárdsági próbák	19
7. §. Rövid prizma összenyomó-szilárdsága	30
8. §. A hőmérséklet hatása a test alakjára	32
9. §. Rövid vasbeton-oszlop összenyomó-szilárdsága	34
10. §. Megengedhető feszültség és biztonság	38
11. §. Gépalkatrészek méretezéséről	39
12. §. A munkaszilárdság	40
13. §. Hosszú tartó nyújtószilárdsága	43
14. §. Fokozatos tartó nyújtószilárdsága	45
15. §. Az egyenszilárdságú tartó	46
Példák a II. fejezethez.	47

III. FEJEZET.

Hajlítószilárdság.

16. Egyenes tartó hajlítószilárdsága	65
17. §. Közömbös tengely, leginkább igénybevett pontok, alkalmas szelvény	69
18. §. Veszélyes szelvény	72
19. §. A meggörbített középvonal alakjának meghatározása. A rugalmas vonal	78

20. §. Egyenes tartó hajlítása a középvonalára merőleges terhek által	82
21. §. Hajlításra igénybevett, sztatikailag határozott tartók számítása	96
Két végén alátámasztott, koncentrált erővel terhelt tartó ...	96
22. §. Egyik végén befogott, koncentrált erővel terhelt tartó	102
23. §. Egyik végén befogott tartó, elosztott terheléssel	104
24. §. Két végén alátámasztott tartó, elosztott terheléssel	107
25. §. Két végén alátámasztott tartó, vegyes terheléssel	117
26. §. A kötélgörbe egyenlete és meghatározása	120
27. §. Egyensúlyádságú tartók	126
28. §. Hajlításra igénybevett, sztatikailag határozatlan tartók számítása	135
Egyik végén befogott, másik végén alátámasztott, koncentrált erővel terhelt tartó	136
29. §. Egyik végén befogott, másik végén alátámasztott tartó, egyenletesen elosztott teherrel	138
30. §. Mindkét végén befogott, koncentrált erővel terhelt tartó	141
31. §. Mindkét végén befogott tartó, egyenletesen elosztott teherrel	144
32. §. Polytonos tartók	147
a) Clapeyron-féle egyenletek	156
b) Többtámaszú tartó megközelítő számítása, háromszögszerűen megosztó terhelés mellett	166
33. Lökésből származó hajlító-terhelés, dinamikai faktor	172
Példák a III. fejezethez	180

IV. FEJEZET.

34. §. Kihajlás elleni szilárdság.

35. §. Vasbeton-oszlop kihajlás elleni szilárdsága	224
Példák a IV. fejezethez	226

V. FEJEZET.

36. §. A drótkötél szilárdsági viszonyai és számítása. ...

VI. FEJEZET.

37. §. A feszültségek elmélete.

38. §. Mértani feszültség	249
39. §. A csúsztató-feszültségek sajátsága	252
40. §. A mértani feszültség tetszősszerű lapon. Az elemi tetraéder feszültségi állapota	253
41. §. Föderékfeszültségek	258
42. Térbeli, síkbeli és lineáris feszültségi állapot	261
43. §. A feszültségek és alakváltozások közötti összefüggés	272
44. §. A csúsztató-rugalmassági modulusz meghatározása	276

45. §. Rugalmas feszültségek	278
46. §. A terhelések és belső feszültségek közötti matematikai egyenletek megállapítása	283
47. §. A differenciális prizma egyensúlya	284
48. §. A szelvény derékfeszültségének meghatározása	288
49. §. A törés veszélyének megállapítása	289
50. §. A különféle feszültségi elméletek alkalmazása	302
51. §. A hajlítás tengelye, közömbös tengely, leginkább igénybevett pontok, alkalmas szelvény	304
52. §. Összetett hajlítás	308
Példák a VI. fejezethez	312

VII. FEJEZET.

53. §. Nyírószilárdság.	316
54. §. A csúsztató-feszültség megközelítő számítása	323
Példák a VII. fejezethez	328

VIII. FEJEZET.

55. §. Csavarószilárdság.	338
56. §. Csavaros rúgók teherbírása és alakváltozása	364
Példák a VIII. fejezethez	366

IX. FEJEZET.

57. §. Az alakváltozás munkája.	372
58. §. A derékszilárdság alakváltozási munkája	372
59. §. Hirtelen terhelés behatása	377
60. §. A hajlítás alakváltozási munkája	381
61. §. A nyírás alakváltozási munkája	388
62. §. A csavarás alakváltozási munkája	390
63. §. Castigliano és Maxwell elmélete	391
Példák a IX. fejezethez	398

X. FEJEZET.

64. §. Az összetett igénybevételek.	402
65. §. Excentrikus terhelés	402
66. §. Derék- és nyíró-igénybevétel	414
67. §. Nyíró- és hajlító-igénybevétel	416
68. §. Csavaró- és nyíró-igénybevétel	419
69. §. Derék- és csavaró-igénybevétel	421
70. §. Csavaró- és hajlító-igénybevétel	422
71. §. A vonóhorog szilárdsága	427
Példák a X. fejezethez	430

XI. FEJEZET.

Csövek és lemezek szilárdsága.

Oldal

72. §. Csövek szilárdsága	445
73. §. Mindkét végén nyitott hengeres-cső szilárdsága	453
74. §. Mindkét végén zárt hengeres-cső szilárdsága	457
75. §. Vékonyfalú csövek szilárdsága	461
76. §. Gömbalakú edények szilárdsága	463
77. §. Lemezek szilárdsága	464
Példák a XI. fejezethez	470

A hazai és külföldi szakirodalom tájékoztató jegyzéke.

- Dr. August Föppl: Vorlesungen über technische Mechanik.
Dr. August Föppl und Dr. Ludwig Föppl: Drang und Zwang.
Max Fischer: Statik und Festigkeitslehre.
C. Bach: Maschinenelemente.
C. Bach: Elastizität und Festigkeit.
C. Bach: Festigkeitseigenschaften und Gefügebilder der Konstruktionsmaterialien.
Wilhelm Keck: Mechanik.
Oeuvres complets de Laplace.
Herrmann Emil: Szilárdságtan.
Dr. ifj. Szily Kálmán: Mechanika.
Müller—Breslau: Neuere Methoden der Festigkeitslehre und der Statik.
Dr. Ing. Max Foerster: Grafostatik und Festigkeitslehre.
W. Hindenlang, O. Lübeck: Festigkeitslehre.
I. Jedlitschka: Mechanik.
A. Weichert: Festigkeitslehre und angewandte Mechanik.
Max Fischer: Kursus in Statik und Festigkeitslehre.
I. Perry: Angewandte Mechanik.
W. Rebber—L. Hummel: Die Festigkeitslehre
Dr. A. Ritter: Lehrbuch der höheren und technischen Mechanik.
Dr Ing. Otto Mohr: Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik.
Ernst Wehnert: Einführung in die Festigkeitslehre.
Ernst Wehnert: Zusammengesetzte Festigkeitslehre.
Dr. Alexander Wernicke: Lehrbuch der Mechanik.
Ernest Aragon: Résistance des Matériaux.
Herrmann Miksa: Gépelemek.
Dr. Ing. Karl Laudien: Leitfaden der Mechanik der Maschinenbauer.
A. E. H. Love: A treatise on the mathematical theorie of elasticity.
Reuleaux: Abriss der Festigkeitslehre für den Maschinenbau.
Friedrich Bleich: Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke.
Constantin Weber: Die Lehre der Drehungsfestigkeit.
Sandel: Festigkeitsbedingungen.
A. Föppl: Über die Torsion von runden Stäben mit veränderlicher Beanspruchung.
R. Lauenstein: Die Eisenkonstruktionen des Hochbaues.

S. Graf: Anwendungen der Festigkeitslehre.

Dr. Mihailich Győző: Vasbetónszerkezetek.

Dr. M. Planck: Einführung in die Mechanik deformierbarer Körper.

Maurice Lévy: La statique graphique et ses applications aux constructions.

A. Castigliano: Theorie der Biegungs- und Torsionsfedern.

W. Keck: Vorträge über Elastizitätslehre als Grundlage für die Festigkeitsberechnung der Bauwerke.

Dr. Ing. Theodor Pöschl: Berechnung von Behältern nach neueren analytischen und grafischen Methoden.

Dr. A. Ritter: Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenkonstruktionen.

Sonntag: Biegung, Schub und Scherung.

L. von Tetmajer: Die Gesetze der Knickungs- und der zusammengesetzten Druckfestigkeit.

L. von Tetmajer: Die angewandte Elastizitäts- und Festigkeitslehre.

A. Vierendeel: Cours de stabilité des constructions.

Richard Woernle: Ein Beitrag zur Beurteilung der heutigen Berechnungsweise der Drahtseile.

Carl I. Kriemler: Aufgabensammlung aus der technischen Mechanik.

Ferdinand Wittenbauer: Aufgaben aus der technischen Mechanik.

Zech-Cranz: Aufgabensammlung für theoretische Mechanik.

P. Stephan: Aufgabensammlung aus dem Gebiete der gesamten Mechanik.

Georg Dreyer: Erklärungen und Musterbeispiele zur Festigkeits- und Elastizitätslehre.

R. Haren: Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre.

C. Kriemler: Aufgabensammlung aus der Technischen Mechanik.

Dr. Kossalka János: Tartók sztatikája.

Hütte: Des Ingenieurs Taschenbuch 25. Auflage.

